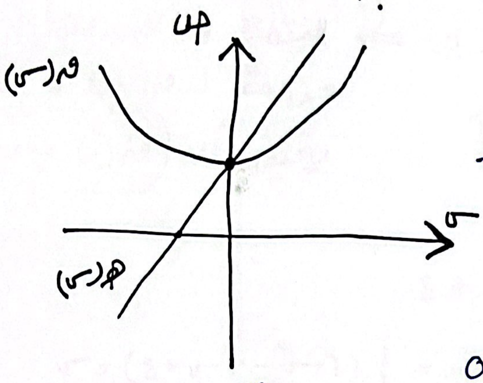
التكامل المحدود + علاقة المشتقة بالتكامل

* معتمداً على الشكل ، اذا كان هـ(س) = ٣س + ٥ و كانت قَ(س) = ٢س + ٢ ، جد: ق(٢)



ق(س) = ∫ (٢س + ٢) ء س

ق(س) = س^{٢} + ٢س + جـ

٥ = ٠ + ٠ + جـ

$\boxed{\text{جـ} = ٥}$

ق(س) = س^{٢} + ٢س + ٥

ق(٢) = ٤ + ٤ + ٥

ق(٢) = ١٣

من الشكل ق(٠) = هـ(٠)

= ٣(٠) + ٥ = ٥

---

* اذا كان ∫ (قَ(س) + ٣س^{٢}) ء س = س^{٤} + أ س^{٣} + ٢س وكان قَ(١) = ٧ ، ق(١) = ٣ ، جد: ① قيمة أ

② قَ(٢)

③ ق(٢)

⇐ ① ∫ (قَ(س) + ٣س^{٢}) = س^{٤} + أس^{٣} + ٢س ← نشتق الطرفين

قَ(س) + ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٣أس^{٢} ← نعوض قَ(١) = ٧

قَ(١) + ٣(١) = ٤(١) + ٣أ(١)

٧ + ٣ = ٤ + ٣أ

٦ = ٣أ ⇐ ∴ أ = ٢

② قَ(س) = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ⇐ قَ(٢) = ٤٤

③ ق(س) = ∫ ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ء س ⇐ ق(س) = س^{٤} + س^{٣} + جـ ← لكن ق(١) = ٣

٣ = ١ + ١ + جـ ← جـ = ١

∴ ق(س) = س^{٤} + س^{٣} + ١ ⇐ ق(٢) = ١٦ + ٨ + ١ = ٣٥

إذا كانت النقطة (١، ٧) نقطة حرجة لكثير حدود ق(س)
وكانت ق''(س) = ١٢س − ١٠ أوجد ق(س).

⇐ ق''(س) = ١٢س − ١٠

ق'(س) = ∫ ق''(س) ءس = ∫ (١٢س − ١٠) ءس

ق'(س) = ٦س^{2} − ١٠س + جـ ⇐ النقطة (١، ٧) نقطة حرجة لـ ق(س)، هذا يعني أنه ق'(١) = ٠

٠ = ٦ − ١٠ + جـ

∴ جـ = ٤

⇐ ق'(س) = ٦س^{2} − ١٠س + ٤

ق(س) = ∫ ق'(س) ءس = ∫ (٦س^{2} − ١٠س + ٤) ءس

ق(س) = ٢س^{3} − ٥س^{2} + ٤س + جـ ⇐ ق(١) = ٧

٧ = ٢ − ٥ + ٤ + جـ

∴ جـ = ٦

∴ ق(س) = ٢س^{3} − ٥س^{2} + ٤س + ٦

---

* إذا كانت ق'(س) = ٦س + $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ وكانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١ هي ص − ٣س = ٥ أوجد ق(س).

⇐ ق(١) = ٥ + ٣(١) = ٨

⇐ ق'(س) = ∫ (٦س + ٣س$^{-\frac{1}{2}}$) ءس

ق'(س) = ٣س^{2} + ٦$\sqrt{س}$ + جـ

ص' − ٣ = ٠ ← ص' = ٣ ← ق'(١) = ٣

$\cancel{٣}$ = $\cancel{٣}$ + ٦ + جـ ← جـ = −٦

⇐ ق(س) = ∫ (٣س^{2} + ٦س$^{\frac{1}{2}}$ − ٦) ءس

= س^{3} + ٦ × $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ − ٦س + جـ

= س^{3} + ٤$\sqrt{س^{3}}$ − ٦س + جـ

∴ ٨ = ١ + ٤ − ٦ + جـ

جـ = ٩

∴ ق(س) = س^{3} + ٤$\sqrt{س^{3}}$ − ٦س + ٩

تكامل الاقترانات الدائرية :

① $$\int \frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{\text{جا}^{٣}\text{س} \times \text{جتا}\,\text{س}}\,\text{د س}$$

$$= \int \frac{٢\,\cancel{\text{جا س}}\,\cancel{\text{جتا س}}}{\text{جا س}\,.\,\cancel{\text{جتا س}}\,.\,\cancel{\text{جا س}}\,.\,\text{جا س}} = \int \frac{٢}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س} = \int ٢\,\text{قتا}^{٢}\text{س}\,\text{د س}$$

$$= -٢\,\text{ظتا س} + \text{جـ}$$

② $$\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - ٧}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س}$$

$$= \int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - ٧}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س} = \int \frac{\text{جا}^{\cancel{٣}}\text{س}}{\cancel{\text{جا}^{٢}\text{س}}}\,\text{د س} - ٧\int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \int \text{جا س}\,\text{د س} - ٧\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\,\text{د س} = -\text{جتا س} + ٧\,\text{ظتا س} + \text{جـ}$$

③ $$\int (٥\text{س}^{٢} - ٣\,\text{ظتا}^{٢}\text{س})\,\text{د س}$$

$$= \int (٥\text{س}^{٢} - ٣(-١ + \text{قتا}^{٢}\text{س}))\,\text{د س}$$

$$= \int (٥\text{س}^{٢} + ٣ - ٣\,\text{قتا}^{٢}\text{س})\,\text{د س} = \frac{٥}{٣}\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ٣\,\text{ظتا س} + \text{جـ}$$

④ $$\int (\text{قا س} + \text{ظا س})^{٢}\,\text{د س} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قا س}\,\text{ظا س} + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{د س}$$

$$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قا س}\,\text{ظا س} + \text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{د س}$$

$$= \int (٢\,\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قا س}\,\text{ظا س} - ١)\,\text{د س}$$

$$= ٢\,\text{ظا س} + ٢\,\text{قا س} - \text{س} + \text{جـ}$$

Scanned with CamScanner

٥) $$\int \frac{\text{جتا}\,س}{1-\text{جتا}\,س}\,ءس$$

$$= \int \frac{\text{جتا}\,س}{1-\text{جتا}\,س} \times \frac{1+\text{جتا}\,س}{1+\text{جتا}\,س}\,ءس$$

$$= \int \frac{\text{جتا}\,س\,(1+\text{جتا}\,س)}{1-\text{جتا}^2\,س}\,ءس = \int \frac{\text{جتا}\,س + \text{جتا}^2\,س}{\text{جا}^2\,س}\,ءس$$

$$= \int \frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س\,\text{جا}\,س}\,ءس + \int \left(\frac{\text{جتا}\,س}{\text{جا}\,س}\right)^2 ءس = \int \text{ظتا}\,س\,\text{قتا}\,س\,ءس + \int \text{ظتا}^2\,س\,ءس$$

$$= \int \text{ظتا}\,س\,\text{قتا}\,س\,ءس + \int (\text{قتا}^2\,س - 1)\,ءس$$

$$= -\text{قتا}\,س - \text{ظتا}\,س - س + ث$$

٦) $$\int \frac{ءس}{\text{قتا}\,س - 1} = \int \frac{ءس}{\frac{1}{\text{جا}\,س} - 1} = \int \frac{ءس}{\frac{1-\text{جا}\,س}{\text{جا}\,س}} = \int \frac{\text{جا}\,س}{1-\text{جا}\,س}\,ءس$$

$$= \int \frac{\text{جا}\,س}{1-\text{جا}\,س} \times \frac{1+\text{جا}\,س}{1+\text{جا}\,س}\,ءس = \int \frac{(1+\text{جا}\,س)\,\text{جا}\,س}{1-\text{جا}^2\,س}\,ءس$$

$$= \int \frac{\text{جا}\,س + \text{جا}^2\,س}{\text{جتا}^2\,س}\,ءس = \int \frac{\text{جا}\,س}{\text{جتا}\,س\,\text{جتا}\,س}\,ءس + \int \left(\frac{\text{جا}\,س}{\text{جتا}\,س}\right)^2 ءس$$

$$= \int \text{ظا}\,س\,\text{قا}\,س\,ءس + \int \text{ظا}^2\,س\,ءس = \int \text{ظا}\,س\,\text{قا}\,س\,ءس + \int (\text{قا}^2\,س - 1)\,ءس$$

$$= \text{قا}\,س + \text{ظا}\,س - س + ث$$

٧) $$\int \frac{ءس}{\text{جتا}^2\,س - \text{جتا}^4\,س} = \int \frac{ءس}{\text{جتا}^2\,س\,(1-\text{جتا}^2\,س)} = \int \frac{ءس}{\text{جا}^2\,س\,\text{جتا}^2\,س} = \int \frac{ءس}{(\frac{1}{2}\,\text{جا}\,2س)^2}$$

$$= 4\int \frac{ءس}{\text{جا}^2\,2س} = 4\int \text{قتا}^2\,2س\,ءس = 4 \times -\frac{1}{2}\,\text{ظتا}\,2س + ث$$

$$= -2\,\text{ظتا}\,2س + ث$$

مثال: جد كثير حدود من الدرجة الأولى ق(س) حيث ق(١) = ٥ ،

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ١٤ .

(اقتران خطي)

⇐ من الدرجة الأولى: ق(س) = أس + ب

⇐ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{٣}$ (أس + ب) دس = ١٤

١٤ = [أ/٢ س² + ب س]$_{١}^{٣}$ ⇐ (٩/٢ أ + ٣ب) − (أ/٢ + ب) = ١٤

٤أ + ٢ب = ١٤

٢أ + ب = ٧ —— ①

⇐ ق(١) = ٥ ⇐ أ + ب = ٥ —— ②

بحل المعادلتين : ب = ٥ − أ ⇐ ٢أ + ٥ − أ = ٧

أ = ٢ ⟷ ب = ٣

∴ $\boxed{\text{ق(س) = ٢س + ٣}}$

* مثال: جد كثير حدود من الدرجة الثانية ق(س) حيث

ق(٠) = ق(١) = صفر ، $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس = −١ .

⇐ من الدرجة الثانية: ق(س) = أس² + ب س + جـ

⇐ ق(٠) = ٠ ⇐ جـ = ٠

⇐ ق(١) = ٠ ⇐ ٠ = أ + ب ⇐ أ = −ب —— ①

⇐ $\int_{٠}^{١}$ (أس² + ب س) دس = −١ ⇐ [أ س³/٣ + ب س²/٢]$_{٠}^{١}$ = −١

⇐ أ/٣ + ب/٢ = −١ —— ② ⇐ أ = ٦ ، ب = −٦ ⇐ $\boxed{\text{ق(س) = ٦س² − ٦س}}$

⇐ جـ قاعدة الاقتران ق(س) إذا كانت ق''(س) = ٦ ،

$\int_{0}^{1}$ ق'(س) دس = ٥ ، ق(١) = ٨ .

لـ ق''(س) = ٦ ⇐ $\int$ ق''(س) دس = $\int$ ٦ دس

ق'(س) = ٦س + جـ

⇐ $\int_{0}^{1}$ ق'(س) دس = $\int_{0}^{1}$ (٦س + جـ) دس = $\left[\text{٣س}^{٢} + \text{جـ س}\right]_{0}^{1}$ = ٥

٣ + جـ = ٥ ⇐ جـ = ٢ ⇐ ق'(س) = ٦س + ٢

⇐ $\int$ ق'(س) دس = $\int$ (٦س + ٢) دس = ٣س^{٢} + ٢س + جـ$_{١}$

⇐ ق(١) = ٨ ⇐ ٨ = ٣ + ٢ + جـ ⇐ جـ$_{١}$ = ٣

∴ $\boxed{\text{ق(س) = ٣س}^{٢}\text{ + ٢س + ٣}}$

⇐ جـ $\int_{-1}^{1}$ س^{٣} × |س| دس

|س| ⇐ س = ٠ ⇐ $\int_{-1}^{0}$ ـس^{٣} دس + $\int_{0}^{1}$ س^{٣}

−− ++ (−١ ، ٠ ، ١)

$\left[-\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{-1}^{0}$ + $\left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{0}^{1}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$.

⇐ جـ $\int_{0}^{\pi}$ |جتاس| دس ⇐ جتاس = ٠ ،

س = $\frac{\pi}{٢}$

= $\int_{0}^{\pi/2}$ جتاس دس + $\int_{\pi/2}^{\pi}$ ـجتاس دس

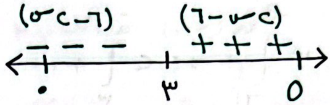
++ −− (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π)

= ١ + ١ = ٢

$$\Leftarrow\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{٢س} - ٦| \ ، & ٠ \le \text{س} < ٥ \\ [\![\frac{\text{س}}{٤} + ٢]\!] \ ، & ٥ \le \text{س} < ١٠ \end{cases} \quad ، \text{ جد } \int_{٠}^{١٠} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$$

$$\Leftarrow\ \int_{٠}^{١٠} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٠}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{١٠} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow\ \text{٢س} - ٦ = ٠ \qquad \text{س} = ٣$$

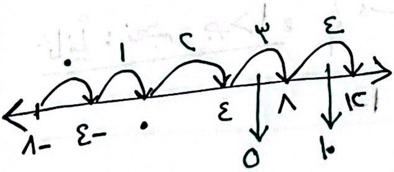


$$\therefore \int_{٠}^{٥} |\text{٢س} - ٦|\,\text{دس} = \int_{٠}^{٣} (٦ - \text{٢س})\,\text{دس} + \int_{٣}^{٥} (\text{٢س} - ٦)\,\text{دس}$$

$$= \Big[\text{٦س} - \text{س}^٢\Big]_{٠}^{٣} + \Big[\text{س}^٢ - \text{٦س}\Big]_{٣}^{٥} = ٩ - ٠ + -٥ + ٩ = ١٣$$

$$\Leftarrow\ \int_{٥}^{١٠} [\![\frac{\text{س}}{٤} + ٢]\!]\,\text{دس} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{س}}{٤} + ٢ = ٠$$

$$\text{س} = -٨ \qquad \text{ل} = ٤$$



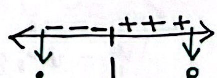
$$= \int_{٥}^{٨} ٣\,\text{دس} + \int_{٨}^{١٠} ٤\,\text{دس}$$

$$= ٩ + ٨ = ١٧$$

$$\Leftarrow\ \therefore \int_{٠}^{١٠} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ١٣ + ١٧ = ٣٠$$

$\Leftarrow$ اذا كانت $\int_{٠}^{\text{م}} |\text{٢س} - ٢|\,\text{دس} = ٥$ ، جد قيمة م حيث م > ١.

$$\Leftarrow\ \text{٢س} - ٢ = ٠ \qquad \text{س} = ١$$



$$\Leftarrow = \int_{٠}^{١} (٢ - \text{٢س})\,\text{دس} + \int_{١}^{\text{م}} (\text{٢س} - ٢)\,\text{دس} = ٥$$

$$٥ = \Big[\text{٢س} - \text{س}^٢\Big]_{٠}^{١} + \Big[\text{س}^٢ - \text{٢س}\Big]_{١}^{\text{م}}$$

$$٥ = ١ + (\text{م}^٢ - \text{٢م} + ١)$$

$$٠ = \text{م}^٢ - \text{٢م} - ٣$$

$$٠ = (\text{م} - ٣)(\text{م} + ١)$$

$\therefore$ م $= ٣$ ✓

م $= -١$ ✗

⟸ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} ، & ٠ \le \text{س} \le \text{م} \\ \text{م} \times \dfrac{(١-\text{س})}{١-\text{م}} ، & \text{م} < \text{س} \le ١ \end{cases}$ ، جد $\int_{٠}^{١} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ حيث $٠ < \text{م} < ١$.

⟸ $\int_{٠}^{١} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \int_{٠}^{\text{م}} \text{س}\, \text{ء}\text{س} + \int_{\text{م}}^{١} \dfrac{\text{م}(١-\text{س})}{١-\text{م}}\, \text{ء}\text{س}$

$$\left[\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{\text{م}} + \frac{\text{م}}{١-\text{م}}\left[\left(\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{\text{م}}^{١}$$

$$= \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م}}{١-\text{م}}\left(\left(١-\frac{١}{٢}\right) - \left(\text{م} - \frac{\text{م}^٢}{٢}\right)\right)$$

$$= \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م}}{١-\text{م}} \times \left(\frac{١}{٢} - \text{م} + \frac{\text{م}^٢}{٢}\right)$$

$$= \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م}}{٢(١-\text{م})} - \frac{٢\text{م}^٢}{٢(١-\text{م})} + \frac{\text{م}^٣}{٢(١-\text{م})}$$

$$= \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م} - ٢\text{م}^٢ + \text{م}^٣}{٢(١-\text{م})} = \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م}(١-\text{م})\cancel{(١-\text{م})}}{٢\cancel{(١-\text{م})}} \; -١ = \frac{\text{م}^٢}{٢} + \frac{\text{م} - \text{م}^٢}{٢}$$

$$= \cancel{\frac{\text{م}^٢}{٢}} - \cancel{\frac{\text{م}^٢}{٢}} + \frac{\text{م}}{٢} = \frac{\text{م}}{٢} .$$

⟸ بيّن أن $\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\, \text{ء}\text{س} + \int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}}\, \text{ء}\text{س} = ١$

⟸ تكامل : $\left[\dfrac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{٠}^{١} + \left[\dfrac{\text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}+١}}{\frac{١}{\text{ن}}+١}\right]_{٠}^{١}$

$$= \frac{١}{١+\text{ن}} + \frac{١}{١+\frac{١}{\text{ن}}} = \frac{١}{١+\text{ن}} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$$

$$= \frac{١+\text{ن}}{\text{ن}+١} = ١ \quad \#$$

⇐ إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الإقتران ق(س) وكان $\int_{1}^{5} \frac{4}{\text{م(س)} - \text{هـ(س)}}\, \text{دس} = 2$ ، فجد

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س}\ \text{م(س)}\ \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \text{جا}^2\text{س}\ \text{هـ(س)}\ \text{دس}$$

⇐ هذا يعني أن م(س) − هـ(س) = جـ ⇐ $\int_{1}^{5} \frac{4}{\text{جـ}}\, \text{دس} = 2$

$\frac{16}{\text{جـ}} = 2$ ⇐ ∴ $\text{جـ} = 8$

$$\Leftarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س}\ \text{م(س)}\ \text{دس} - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س}\ \text{هـ(س)}\ \text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\text{جا}^2\text{س}\ \text{م(س)} - \text{جا}^2\text{س}\ \text{هـ(س)}\right) \text{دس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س} \times \underbrace{\left(\text{م(س)} - \text{هـ(س)}\right)}_{\text{جـ} = 8} \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 8\, \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$$

$$= 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \text{جتا}2\text{س})\, \text{دس} = 4\left(\text{س} - \frac{\text{جا}2\text{س}}{2}\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = (\pi - 2).$$

⇐ إذا كان ق(س) = $3 + 2\,\text{جا}^4\text{س}$ ، بيّن أن $\int_{0}^{2\pi} \text{ق(س)}\ \text{دس}$ ينحصر بين 6π ، 10π .

⇐ $-1 \leq \text{جاس} \leq 1$ ، $\text{س} \in [0 ، 2\pi]$

نرفع للأس 4 : $0 \leq \text{جا}^4\text{س} \leq 1$

$$0 \leq 2\,\text{جا}^4\text{س} \leq 2$$

$$3 \leq 3 + 2\,\text{جا}^4\text{س} \leq 5$$

$$\int_{0}^{2\pi} 3\, \text{دس} \leq \int_{0}^{2\pi} (3 + 2\,\text{جا}^4\text{س})\, \text{دس} \leq \int_{0}^{2\pi} 5\, \text{دس}$$

$$6\pi \leq \int_{0}^{2\pi} (3 + 2\,\text{جا}^4\text{س})\, \text{دس} \leq 10\pi \quad \#$$

Scanned with CamScanner

⟸ فيما يلي جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م وأصغر قيمة ممكنة للثابت ن .

① $م \le \int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - س^٢}\ ءس \le ن$

② $م \le \int_{٠}^{٤} \sqrt{٤س - س^٢}\ ءس \le ن$

③ $م \le \int_{-٣}^{٢} \sqrt{س^٢ + ٧}\ ءس \le ن$

④ $م \le \int_{٠}^{\pi} \frac{٦}{٣ - ٢\, جتا^٢ س}\ ءس \le ن$

← من الأفضل في مثل هذه الحالات أن نجد قيم س الحرجة ثم نجد صور هذه النقط ثم نحصر د(س) بين أصغر قيمة وأكبر قيمة وبعد ذلك نجد التكامل .

$\boxed{١}$ $د(س) = \sqrt{٢٥ - س^٢}$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

$د'(س) = \frac{-\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{٢٥ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٢٥ - س^٢}}$

$د' = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$د' = غ.م \Leftarrow س = \pm ٥$

∴ النقط الحرجة : ٠ ، ٥ ، −٥ ⟵ $د(-٥) = ٠$

$د(٥) = ٠$ ، $د(٠) = ٥$

∴ $٠ \le د(س) \le ٥$

$\int_{-٥}^{٥} ٠\ ءس \le \int_{-٥}^{٥} د(س)\ ءس \le \int_{-٥}^{٥} ٥\ ءس$

$٠ \le \int_{-٥}^{٥} د(س)\ ءس \le ٥٠$

أكبر قيمة للثابت م

$م = ٠$

أصغر قيمة للثابت ن

$ن = ٥٠$

$\boxed{2}$ $م \leq \int_{0}^{4} \sqrt{4س - س^2}\ دس \leq ن$

$ق(س) = \sqrt{4س - س^2} \Leftarrow ق'(س) = \dfrac{4 - 2س}{2\sqrt{4س - س^2}}$

$س \in [0، 4]$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 4 - 2س = 0 \Leftarrow س = 2 \longrightarrow ق(2) = 2$

$ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow \sqrt{4س - س^2} = 0$

$س(4 - س) = 0 \left\langle \begin{array}{l} س = 0 \to ق(0) = 0 \\ س = 4 \to ق(4) = 0 \end{array}\right.$

$\therefore\ 0 \leq ق(س) \leq 2$

$\int_{0}^{4} 0\ دس \leq \int_{0}^{4} ق(س)\ دس \leq \int_{0}^{4} 2\ دس$

$م \swarrow\ 0 \leq \int_{0}^{4} ق(س)\ دس \leq 8 \longrightarrow ن$

$\boxed{3}$ الجواب النهائي : $\underset{م}{5\sqrt{7}} \leq \int_{-3}^{2} ق(س)\ دس \leq \underset{ن}{20}$

$\boxed{4}$ $ق(س) = \dfrac{6}{3 - 2جتا^2 س}$ ، $س \in [0، \pi]$

$ق'(س) = \dfrac{\cancel{6} \times \cancel{2} \times 2 جتاس \times - جاس}{(3 - 2جتا^2 س)^2} = \dfrac{-24 جاس جتاس}{(3 - 2جتا^2 س)^2}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow -24 جاس جتاس = 0$

$جاس = 0 \Leftarrow س = 0، \pi$ أطراف الفترة

$جتاس = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$

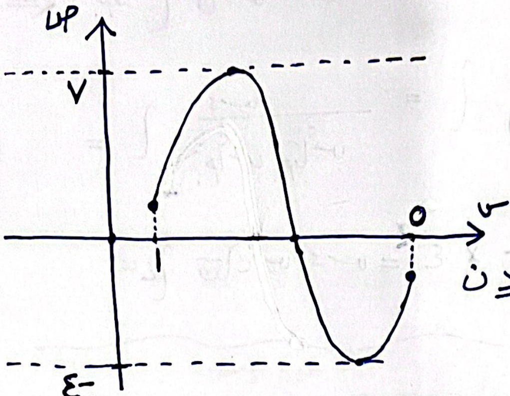
$ق'(س)$ غير موجودة عند أطراف الفترة : $س = 0، \pi$

$\Leftarrow ق(0) = 6$ ، $ق(\frac{\pi}{2}) = 2$ ، $ق(\pi) = 6$ $\Leftarrow \therefore\ 2 \leq ق(س) \leq 6$

$\int_{0}^{\pi} 2\ دس \leq \int_{0}^{\pi} ق(س)\ دس \leq \int_{0}^{\pi} 6\ دس$

$\underset{م}{2\pi} \leq \int_{0}^{\pi} ق(س)\ دس \leq \underset{ن}{6\pi}$

في الشكل الذي يمثل د(س) ، جد م ، ن في الحالات الآتية:



① $\text{م} \le \int_{١}^{٥} \text{د(س) دس} \le \text{ن}$

② $\text{م} \le \int_{١}^{٥} \text{د}^{٢}\text{(س) دس} \le \text{ن}$

③ $\text{م} \le \int_{١}^{٥} (٨ - ٣\,\text{د(س)})\ \text{دس} \le \text{ن}$

$\boxed{١}$

$-٤ \le \text{د(س)} \le ٧ \quad ،\ \text{س} \in [١ ، ٥]$

$\int_{١}^{٥} -٤\ \text{دس} \le \int_{١}^{٥} \text{د(س) دس} \le \int_{١}^{٥} ٧\ \text{دس}$

$\underset{\text{م}}{-١٦} \le \int_{١}^{٥} \text{د(س) دس} \le \underset{\text{ن}}{٢٨}$

$\boxed{٢}$

$-٤ \le \text{د(س)} \le ٧$

$٠ \le \text{د}^{٢}\text{(س)} \le ٤٩$

$\int_{١}^{٥} ٠\ \text{دس} \le \int_{١}^{٥} \text{د}^{٢}\text{(س) دس} \le \int_{١}^{٥} ٤٩\ \text{دس}$

$\underset{\text{م}}{٠} \le \int_{١}^{٥} \text{د}^{٢}\text{(س) دس} \le \underset{\text{ن}}{١٩٦}$

$\boxed{٣}$

$-٤ \le \text{د(س)} \le ٧$

$١٢ \ge -٣\,\text{د(س)} \ge -٢١$

$-٢١ \le -٣\,\text{د(س)} \le ١٢$

$-١٣ \le ٨ - ٣\,\text{د(س)} \le ٢٠$

$\int_{١}^{٥} -١٣\ \text{دس} \le \int_{١}^{٥} (٨ - ٣\,\text{د(س)})\ \text{دس} \le \int_{١}^{٥} ٢٠\ \text{دس}$

$\underset{\text{م}}{-٥٢} \le \int_{١}^{٥} (٨ - ٣\,\text{د(س)})\ \text{دس} \le \underset{\text{ن}}{٨٠}$

⇐ جـ $\int$ قا^{٢}س . قتا^{٢}س دس

$= \int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٢}\text{س . جتا}^{٢}\text{س}} = \int \frac{\text{دس}}{(\frac{١}{٢}\text{جا٢س})^{٢}} = ٤ \int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}$

$= ٤ \int$ قتا^{٢}٢س دس $= ٤ \times -\frac{١}{٢}$ ظتا٢س + ث $= -٢$ ظتا٢س + ث

⇐ جـ $\int_{١}^{٣} \frac{(\text{س}^{٢}-٢)^{٢}-٤}{\text{س}^{٢}}$ دس

$= \int_{١}^{٣} \frac{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢} + \cancel{٤} - \cancel{٤}}{\text{س}^{٢}}$ دس $= \int_{١}^{٣} \frac{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$ دس

$= \int_{١}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٤)$ دس $= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}\right]_{١}^{٣} = ٩ - ١٢ - \frac{١}{٣} + ٤$

$= \frac{٢}{٣}$

⇐ اذا كان $\int$ ق(س) دس = جتا س − ٢جا س

فما قيمة $\frac{\text{ق}(\frac{\pi}{٤})}{\text{ق}'(\frac{\pi}{٤})}$

⇐ نشتق الطرفين : ق(س) = − جا س − ٢جتا س ← ق$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-٣}{\sqrt{٢}}$

// // : ق$'$(س) = − جتا س + ٢جا س ← ق$'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{\text{ق}(\frac{\pi}{٤})}{\text{ق}'(\frac{\pi}{٤})} = \frac{\frac{-٣}{\cancel{\sqrt{٢}}}}{\frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}}} = -٣$

إذا كان د(س) ≤ س في [٠، ٣] فجد أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{0}^{3}$ (٢ − ٢ د(س)) دس

⇐ د(س) ≤ س

−٢ د(س) ≥ −٢ س

٢ − ٢ د(س) ≥ ٢ − ٢ س

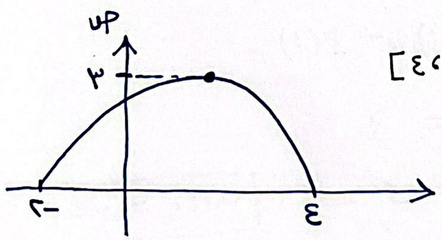
$\int_{0}^{3}$ (٢ − ٢ د(س)) دس ≥ $\int_{0}^{3}$ (٢ − ٢ س) دس

[٢س − س٢] $_{0}^{3}$ = ٦ − ٩ = −٣

∴ $\int_{0}^{3}$ (٢ − ٢ د(س)) دس ≥ −٣

⇐ الشكل يمثل د(س) في [−٢، ٤] فجد الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار $\int_{-2}^{4}$ د(س) دس

أ) $\boxed{١٨}$ ب) ٤ جـ) ٦ د) ١٤



• ٠ ≤ د(س) ≤ ٣ ، س ∈ [−٢، ٤]

$\int_{-2}^{4}$ ٠ دس ≤ $\int_{-2}^{4}$ د(س) دس ≤ $\int_{-2}^{4}$ ٣ دس

٠ ≤ $\int_{-2}^{4}$ د(س) دس ≤ ١٨

الفرق = ١٨ − ٠ = ١٨

سؤال لطيف : اذا كان ق'(س) = أ س - ٣ س^٢ ، جد قاعدة منحنى الإقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)) .

١٠ علامات

⇐ ص = ٤ - س ⇐ ص' = ق'(س) = ق'(س) |_{س=١} = -١

⇐ ق'(س) = أ س - ٣ س^٢ نعوض س = ١ ⇐ ق'(١) = أ - ٣ = -١

∴ أ = ٢

⇐ ق(١) = ص = ٤ - س = ٤ - ١ = ٣ ⇐ ∴ النقطة (١ ، ٣) تحقق ق

∴ النقطة (١ ، -١) تحقق ق'

⇐ ق(س) = ∫ ق'(س) دس = ∫ (٢ س - ٣ س^٢) دس = س^٢ - س^٣ + جـ

النقطة (١ ، ٣) تحقق ⇐ ٣ = ~~١~~ - ~~١~~ + جـ ⇐ جـ = ٣

∴ قاعدة ق هي : ق(س) = س^٢ - س^٣ + ٣