

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

Типы поглощающих граничных условий ³

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

Линейные операторы

Оператор A называется линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов A и B выполняются условия:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$$

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$$

Волновое уравнение в одномерном случае

6

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Уравнения адвекции

Любая функция E_z , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Сделаем замену

$$\bar{\xi} = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}$$

$$\bar{\xi} = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}}$$

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

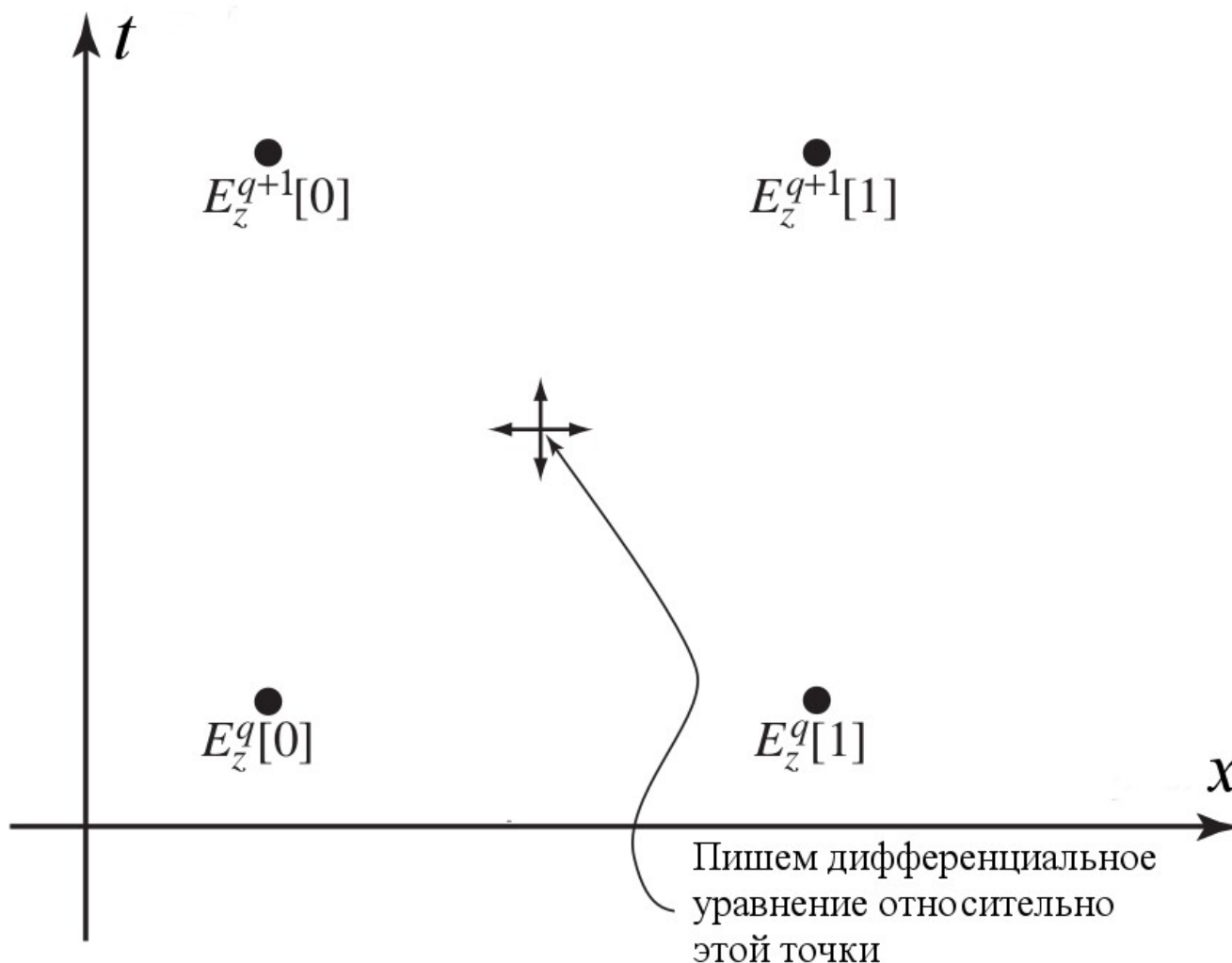
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

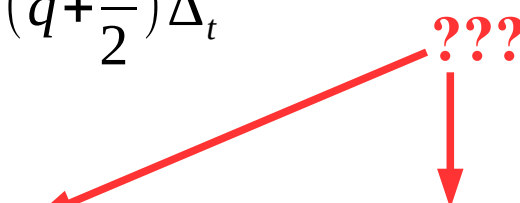
Поглощающие граничные условия первой степени

Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы



Запишем производные в уравнении адвекции
через центральную конечно-разностную схему

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$


$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
& \approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}
\end{aligned}$$

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\
 & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x}
 \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$- \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы

Из полученного уравнения выражаем $E_z^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

Поглощающие граничные условия первой степени для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M] \right)$$

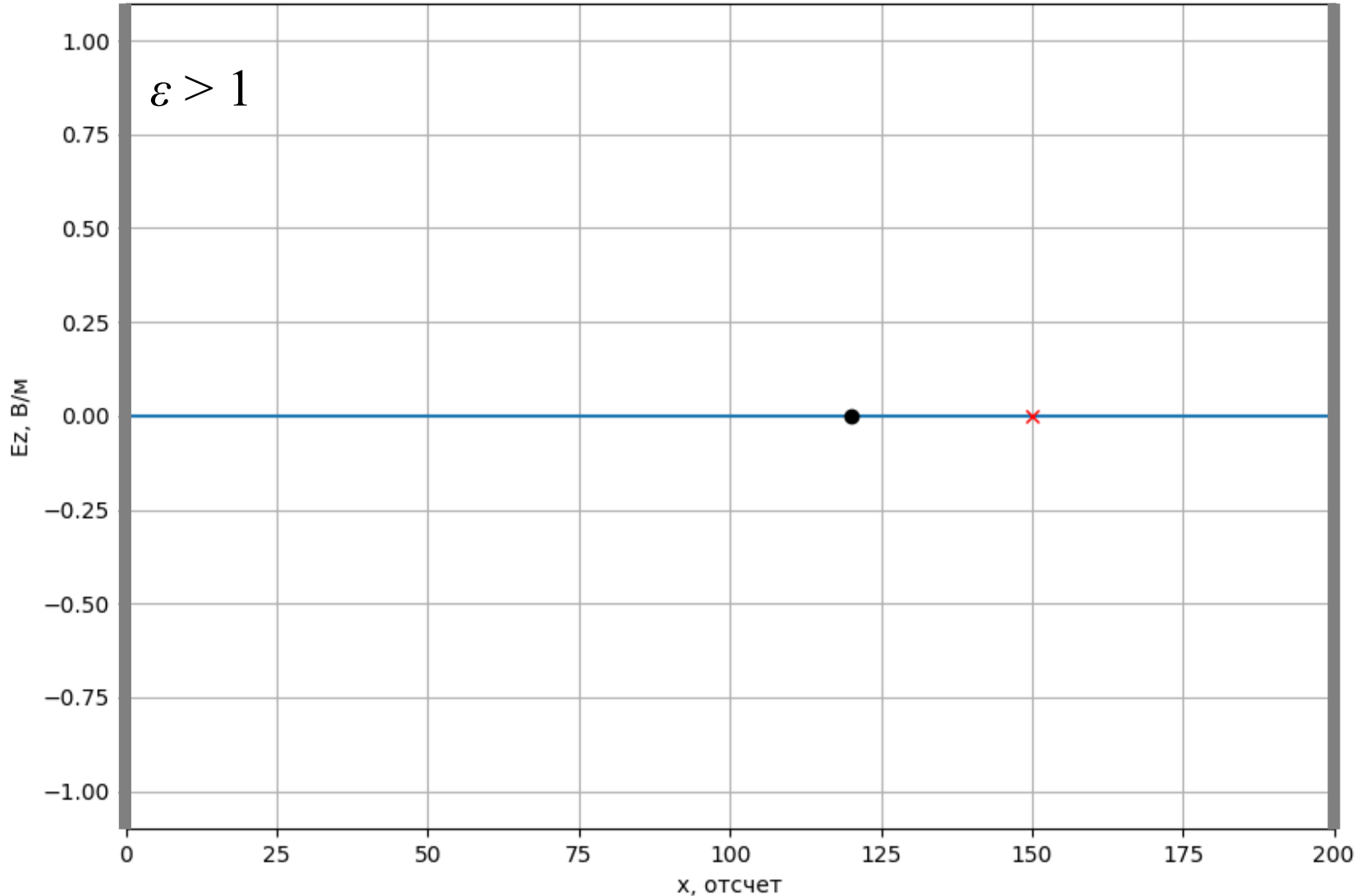
Поглощающие граничные условия первой степени

Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) первой степени (fdtd_abc_first.py) 27



Формулировка граничных условий АВС первой степени с использованием дискретных операторов

Введем несколько новых операторов:

I — оператор идентичности.

$$I E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

s_x^w — оператор пространственного сдвига.

$$s_x^w E_z^q[m] = E_z^q[m + w]$$

s_t^w — оператор временного сдвига.

$$s_t^w E_z^q[m] = E_z^{q+w}[m]$$

Свойства линейных операторов

Введенные операторы коммутативны
(можно менять порядок их применения)

$$S_x^w S_t^w = S_t^w S_x^w$$

$$I S_x^w = S_x^w$$

$$I S_t^w = S_t^w$$

$$I I = I$$

Уравнения адвекции

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка ³²

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$
$$\approx \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка ³³

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q+1}[m+1]}{2} = \\ & = \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка 34

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} = \\ & \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_t^{-1} E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} &\approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) E_z^{q+1}[0] - \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) s_t^{-1} E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} = \\
 &= \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) \left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (I - s_t^{-1} + s_x^1 - s_x^1 \cdot s_t^{-1}) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (E_z^{q+1}[0] - E_z^q[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
 & \approx \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1} \cdot s_x^1) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

Поглощающие граничные условия второй степени

39

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

Поглощающее граничное условие второй степени

41

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left(E_z^{q+1}[2] + \underline{E_z^{q-1}[0]} \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left(S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left(\underline{E_z^q[0]} + \underline{E_z^q[2]} - E_z^{q+1}[1] - \underline{E_z^{q-1}[1]} \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} \underline{E_z^q[1]} \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}
 \end{aligned}$$

Поглощающее граничное условие второй степени

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Для свободного пространства и $S_c = 1$
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$

$$1 \rightarrow -2$$

$$2 \rightarrow -3$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) второй степени (fdtd_abc_second.py) 45

