1. 约数定理：若 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}$，则
   - 约数个数 $f(n)=\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)$
   - 约数和 $g(n)=\prod_{i=1}^{k}(\sum_{j=0}^{a_i}p_i^j)$
2. 小于 n 且互质的数之和为 $\frac{n\times\varphi(n)}{2}$
3. 若 $\gcd(i,j)=1$，则 $\gcd(n,n-i)=1(1\le i\le n)$
4. 错排公式：$D(n)=(n-1)(D(n-2)+D(n-1))=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=\left[\frac{n!}{e}+0.5\right]$
5. 部分错排公式：$n+m$ 个数中 m 个数必须错排求排列数
   - $dp\left[i\right]=n\times dp\left[i-1\right]+(i-1)\times(dp\left[i-1\right]+dp\left[i-2\right])$
   - $dp\left[0\right]=n!$
   - $dp\left[1\right]=n\times n!$
   - $dp\left[m\right]$ 为所求解
6. 海伦公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{(a+b+c)}{2}$
7. 求 $C(n,k)$ 中质因子 P 的个数：把 n 转化为 P 进制，并记它每个位上的和为 S_1 把 $n-k$，k 做同样的处理，得到 S_2，S_3 则答案为：$\frac{S_2+S_3-S_1}{P-1}$
8. 威尔逊定理：p 是质数 $\Rightarrow(p-1)!\equiv-1\pmod p$
9. 欧拉定理：$\gcd(a,n)=1\Rightarrow a^{\varphi(n)}\equiv1\pmod n$
10. 欧拉定理推广：$\gcd(n,p)=1\Rightarrow a^n\equiv a^{n\%\varphi(p)}\pmod p$
11. 模的幂公式：$a^n\pmod m=\begin{cases}a^n\pmod m & n<\varphi(m)\\ a^{n\%\varphi(m)+\varphi(m)}\pmod m & n\ge\varphi(m)\end{cases}$
12. 素数定理：对于不大于 n 的素数个数 $\pi(n)$，$\lim_{n\to\infty}\pi(n)=\frac{n}{\ln n}$
13. 位数公式：正整数 x 的位数 $N=\log_{10}n+1$
14. 斯特林公式 $n!\approx\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$
15. 设 $a>1,m,n>0$，则 $\gcd(a^m-1,a^n-1)=a^{\gcd(m,n)}-1$
16. 设 $a>b,\gcd(a,b)=1$，则 $\gcd(a^m-b^m,a^n-b^n)=a^{\gcd(m,n)}-b^{\gcd(m,n)}$

$$G=\gcd(C_n^1,C_n^2,\ldots,C_n^{n-1})=\begin{cases}n & n\ is\ peime\\ 1 & n\ has\ multy\ prime\ factors\\ p & n\ has\ single\ prime\ factor\ p\end{cases}$$

$$\gcd(Fib(m),Fib(n))=Fib(\gcd(m,n))$$

17. 求和公式：
   * $\sum k=\frac{n(n+1)}{2}$
   * $\sum 2k-1=n^2$
   * $\sum k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   * $\sum(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$
   * $\sum k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$
   * $\sum k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
   * $\sum k^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$
   * $\sum k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
   * $\sum k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
   * $\sum k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

18. 若 $\gcd(m,n)=1$，则：
    - 最大不能组成的数 $m\times n-m-n$
    - 不能组合数个数 $N=\frac{(m-1)(n-1)}{2}$
19. $(n+1)lcm(C_n^0,C_n^1,...,C_n^{n-1},C_n^n)=lcm(1,2,...,n+1)$
20. 若 p 为质数，则 $(x+y+...+w)^p\equiv x^p+y^p+...+w^p \pmod p$
21. 卡特兰数：1，1，2，5，14，42，132，429，1430，4862，16796，58786，208012

$$h(0)=h(1)=1,h(n)=\frac{(4n-2)h(n-1)}{n+1}=\frac{C_{2n}^n}{n+1}=C_{2n}^n-C_{2n}^{n-1}$$

22. 第二类斯特林数：

$$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}=S(n,k)$$
$$S(n,0)=[n=0]$$
$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$
$$S(n,m)=\sum_{i=0}^m\frac{(-1)^{m-i}i^n}{i!(m-i)!}$$

23. 第一类斯特林数：

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=[n=0]$$
$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$$

24. 上升幂和普通幂的转换：

$$x^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k$$
$$x^n=\sum_{k=0}^n\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}(-1)^{n-k}x^{\overline{k}}$$

25. 下降幂和普通幂的转换：

$$x^{\underline{n}}=\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^{n-k}x^k$$
$$x^n=\sum_{k=0}^n\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}$$

26. 多项式下降幂表示和多项式点值表示的关系：

下降幂表示：$f(x)=\sum_{i=0}^n b_ix^{\underline{i}}$

点值表示：$f(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$

$$a_k=\sum_{i=0}^n b_ik^{\underline{i}}$$
$$b_k=\sum_{i=k}^n\begin{Bmatrix}i\\k\end{Bmatrix}a_i$$

27. 下降幂与组合数结合：

$$\binom{n}{k}\times k^{\underline{m}}=\binom{n-m}{k-m}\times n^{\underline{m}}$$

28. 伯努利数：

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+1}^iB_i$$
$$\sum_{i=1}^n i^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}C_{k+1}^iB_{k+1-i}(n+1)^i$$

29. 平行求和法：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m}$$

30. 上指标求和:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

31. 范德蒙德恒等式:

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

32. 卢卡斯定理:

$$\binom{n}{m} \bmod p=\binom{\lfloor n/p\rfloor}{\lfloor m/p\rfloor}\cdot\binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

33. 二项式定理:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

34. 二项式反演:

至少: $f_k=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}g_i \Leftrightarrow g_k=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}f_i$

至多: $f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g_i \Leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$

35. 莫比乌斯反演:

令 $f(d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=d]$

$F(n)=\sum_{n|d}f(d)=\lfloor\frac{N}{n}\rfloor\lfloor\frac{M}{n}\rfloor$

有 $f(n)=\sum_{n|d}\mu(\lfloor\frac{d}{n}\rfloor)F(d)$

$\phi(n)=\sum_{d|n}d\times\mu(n/d)$

36. 常用普通生成函数:

- $F(x)=\sum_{n>=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$
- $F(x)=\sum_{n>=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$
- $F(x)=\sum_{n>=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\sum_{n>=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum_{n>=0}^{+\infty}(x^n)'=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$
- $F(x)=\sum_{n>=0}^{+\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$
- $F(x)=\sum_{n>=0}^{+\infty}\binom{n+m}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$

37.

类型	n个球	r个盒子	是否允许有空盒	方法数
$(0,0,1)$	不相同	不相同	允许	r^n
$(1,0,0)$	相同	不相同	不允许	$\binom{n-1}{r-1}$
$(1,0,1)$	相同	不相同	允许	$\binom{n+r-1}{r-1}$
$(0,0,0)$	不相同	不相同	不允许	$r!\cdot S(n,r)$
$(0,1,0)$	不相同	相同	不允许	$S(n,r)$
$(0,1,1)$	不相同	相同	允许	$\sum_{k=1}^{r}S(n,r)$
$(1,1,0)$	相同	相同	不允许	$B(n,r)$
$(1,1,1)$	相同	相同	允许	$\sum_{k=1}^{r}B(n,r)$

38. FFT 常用素数

$r \cdot 2^k + 1$	r	k	g
998244353	119	23	3
1004535809	479	21	3
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
3221225473	3	30	5
75161927681	35	31	3
77309411329	9	33	7
206158430209	3	36	22
2061584302081	15	37	7
2748779069441	5	39	3
6597069766657	3	41	5
39582418599937	9	42	5
79164837199873	9	43	5
263882790666241	15	44	7
1231453023109121	35	45	3
1337006139375617	19	46	3
3799912185593857	27	47	5
4222124650659841	15	48	19
7881299347898369	7	50	6
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

39.