华北电力大学硕士研究生课程考试试题（A 卷）

2019～2020 学年第二学期

课程编号：________　课程名称：工程数学基础　年级：2019　开课单位：数理学院

命题教师：课程组　考核方式：闭卷　考试时间：120 分钟　试卷页数：2 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ 。

（1）　（6 分）设内积空间 V **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **下的度量矩阵是** A **，**

求 $\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$ **与** $2\alpha_2-\alpha_3+3\alpha_4$ **的夹角。**

（2）　（4 分）求 A **的 LU 分解。**

（3）　（4 分）利用（2）中的 LU 分解求方程组 $Ax=b$ **的解 。**

二、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$。

（1）　（4 分）求矩阵 A **的满秩分解。**

（2）　（4 分）求 A^+ **，并用** A^+ **表示方程组** $Ax=b$ **的极小范数最小二乘解。**

（3）　（4 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是线性空间** V **的一组基，线性变换** T **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **下的矩阵是** A **。**

学号是单号的同学求线性变换 T **的象空间** $R(T)$ **的一组基和** $\dim(N(T))$ **；**

学号是双号的同学求线性变换 T **的核空间** $N(T)$ **的一组基和** $\dim(R(T))$ **。**

三、设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（1）　（4 分）求 A **的最小多项式**

（2）　（4 分）求 A **的 Jordan 标准型。**

（3）　（4 分）求 $\sin(2A)$ 。

四、(1)　(8 分)考察用 Gauss-Seidel 迭代解下列方程组的收敛性

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+3x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+3x_3=5 \end{cases}$$

若收敛，取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，计算 $x^{(1)},x^{(2)}$。

(2)　（4 分）迭代公式 $x_{k+1}=2x_k-1-\frac{1}{2}\cos(x_k), k=0,1,2,\cdots$ 是否收敛？

五、设 $p_2(x)$ 是 $f(x)$ 的二次插值函数，插值节点为 $0,h,2h$。

(1)　(8 分)用 $p_2(x)$ 导出积分 $I=\int_0^{3h} f(x)dx$ 的一个插值型求积公式 I_h，

(2)　(6 分)对（1）中的 I_h，利用泰勒公式证明：$I-I_h=\frac{3}{8}h^4 f'''(0)+O(h^5).$

六、(12 分) 设微分方程 $\begin{cases} y'=\lambda y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ $(\mathrm{Re}\,\lambda<0),$

(1) 写出求解此问题的欧拉公式和梯形公式；

(2) 推导对应的欧拉公式和梯形公式的绝对稳定域。

七、(12 分)对下列线性规划问题:

$$\min z=4x_1+x_2+2x_3+3x_4$$

$$\begin{cases} 6x_1+x_2+2x_3+5x_4\ge 15 \\ -2x_1+7x_2-x_3+x_4\ge 2 \\ x_1+5x_2+4x_3+2x_4\ge 0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{cases}$$

(1)写出其对偶模型,

(2)试用对偶单纯形法求解

八：(12 分)用梯度法（最速下降法）求函数 $f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$ 的极小点，用初始点 $X^{(0)}=(0,0)^T$ 开始迭代，并取 $\varepsilon=0.1$，或者迭代到求出 $X^{(3)}$ 和 $f(X^{(3)})$。

华北电力大学硕士研究生课程考试试题（B 卷）

2019～2020 学年第二学期

课程编号：__________ 课程名称：工程数学基础 年级：2019 开课单位：数理学院

命题教师：课程组 考核方式：闭卷 考试时间：120 分钟 试卷页数：2 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$。

（1）（6 分）设内积空间 V **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **下的度量矩阵是** A，

求 $\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$ 与 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4$ **与的夹角。**

（2）（4 分）求 A **的 LU 分解。**

（3）（4 分）利用（2）中的 LU 分解求方程组 $Ax=b$ **的解。**

二、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$。

（1）（4 分）求矩阵 A **的满秩分解。**

（2）（4 分）求 A^+，**并用** A^+ **表示方程组** $Ax=b$ **的极小范数最小二乘解。**

（3）（4 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **是线性空间** V **的一组基，线性变换** T **在基** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ **下的表示矩阵是** A。

学号是单号的同学求线性变换 T **的象空间** $R(T)$ **的一组基和** $\dim(N(T))$；

学号是双号的同学求线性变换 T **的核空间** $N(T)$ **的一组基和** $\dim(R(T))$。

三、设 $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$。

（1）（4 分）求 A **的最小多项式。**

（2）（4 分）求 A **的 Jordan 标准型。**

（3）（4 分）求 $\cos(2A)$。

四、(12 分） 将下面的线性方程组变化为等价的线性方程组，使之应用雅克比迭代法和高斯-赛德尔迭代法均收敛，写出变化后的线性方程组及雅克比迭代法和高斯-赛德尔迭代法的迭代公式，并说明收敛的理由。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

五、(12 分） 确定求解初值问题 $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ 的三步显式 Adams 方法

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(\alpha f_{n+2} - 16 f_{n+1} + 5 f_n)$$

中的参数 α，使该方法成为三阶方法，并求出局部截断误差主项。

六、(1) (6 分)设 x_j 为互异节点（$j = 0,1,\cdots,n$） $l_j(x)$ 是 n 次插值基函数，试证明：

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(0) x_j^k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,\cdots,n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & k = n+1 \end{cases}.$$

(2) (8 分)求三个不同的求积节点 x_0, x_1, x_2 的及常数 c，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]$$

具有尽可能高的代数精度，并指出代数精确度是多少?

七：对下列线性规划问题：

$$\max z = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 20 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 60 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

(1) (4 分)写出其对偶模型,

(2) (8 分)使用单纯形法求解

八、(12 分)用库恩—塔克条件求解非线性规划：

$$\begin{cases} \max f(x) = (x-4)^2 \\ 1 \le x \le 6 \end{cases}$$

华北电力大学硕士研究生课程考试试题（A 卷）

2020～2021 学年第一学期

课程编号：50920021　课程名称：工程数学基础　年级：2020　开课单位：数理学院

命题教师：命题组　考核方式：闭卷　考试时间：120 分钟　试卷页数：3 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、　填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、构造迭代格式 $\boldsymbol{x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b)}$**(其中**$\boldsymbol{\alpha}$**是实数)**，用以求解线性方程组

$\boldsymbol{Ax=b}$**,其中**$\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}}$**，**$\boldsymbol{b=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}$**，则迭代格式收敛等价于**$\boldsymbol{\alpha}$ **满足**_______ 。

2、已知非线性方程$2^x+x-4=0$在$x_0=1.4$附近有根，若构造迭代格式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$，则

取迭代函数$\varphi(x)=$________时，该迭代格式一定局部收敛到方程的根。

3、取插值节点$x_1=$-2，$x_2=$-1，$x_3=1, x_4=2$，而$\{l_i(x), i=0,1,2,3\}$是关于这4个节点

的4个3次拉格朗日插值基函数。则$\sum_{i=0}^{3}l_i(x)x_i^2=$__________。

4、$f(x)=x^3$在$[-1,1]$上关于$\rho(x)=1$的一次最佳平方逼近多项式是__________。

5、 n 阶实对称对称矩阵A满足$(A+4E)^5(A-6E)^4=0_{n\times n}$，$rank(A-6E)=r$，

则$\|A\|_F=$_________。

6、记$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 则$Ax=b$的极小范数最小二乘解是_______（结果需化简）。

而A^+A 的 Jordan 标准型为__________。

7、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是线性空间$V$ 的基，V_1=span$(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4, \alpha_2-\alpha_3)$，

V_2=span$(\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$，则$V_1+V_2$的维数是_________。

8、已知线性规划问题 $\begin{array}{l}\max z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 30 \\ x_j \ge 0 (j = 1,2,3) \end{cases}\end{array}$ 的最优表如下，其中 x_4，x_5是松弛变量。

c_j			3	1	5	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	15	3	-1	0	1	-1
5	x_3	6	3/5	4/5	1	0	1/5
$\sigma_j = c_j - z_j$			0	-3	0	0	-1

由此表可得其对偶问题的最优解是________。

9、用梯度法求 $f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ 的极小点，若取初始值 $X^{(0)} = (0,0)$，需取_________为搜索方向获得 $X^{(1)}$.

二、(15 分) 已知 3，0，0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & -4 \\ -4 & 1 & 7 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值。

(1)、 (5 分) 求矩阵 A 的最小多项式。

(2)、 (5 分) 求矩阵 A 的 Jordan 标准形。

(3)、 (5 分) 求 e^{2A} ，并求 $\left|e^{2A}\right|$ 。

三、已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$。 .

(1)、(7 分) 若 A 是内积空间 V 在一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的度量矩阵，则 λ 需满足什么条件？此时，求 $\alpha_1 - \alpha_2$ 与 $\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4$ 的夹角。

(2)、(8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性空间 V 的一组基. V 上的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的表示矩阵是 A，若 $R(T)$ 的维数是 3，则 λ 需满足什么条件？此时求 $N(T)$ 。

四、（10 分）取 5 个等距节点 ，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算

积分$\int_0^2 \frac{1}{1+2x^2}dx$ 的近似值（保留 4 位小数）。

五、（10 分）用下列数据表构造$f(x)$的一个至多4次插值多项式，并建立误差公式。

X	0	1
$f(x)$	−1	0
$f'(x)$	−2	10
$f''(x)$		40

六、(10 分)用数值方法求解方程$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$时，选取等步长，

（1)、(5 分）若用隐式欧拉法 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$， $n = 0,1,2,\cdots$

证明该公式具有一阶精度，并给出局部截断误差主项。

（2)、(5 分）用（1）中的隐式欧拉法取步长$h = 0.1$ 求解下述问题（保留 4 位小数），

$$\begin{cases} y' = x + \frac{1}{2}y, \qquad 0 \le x \le 0.4 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

七、(10 分)对下列线性规划问题：
$$\min z = 8x_1 + 16x_2 + 12x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad \ge 2 \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0 (j = 1,2,3) \end{cases}$$

⑴、写出其对偶模型。

⑵、试用单纯形法或对偶理论求解上述问题。

八、(10 分)用 K-T 条件求解如下非线性规划问题

$$M\text{in } f(X) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1 - 3x_2$$
$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

华北电力大学硕士研究生课程考试试题（ B卷）

2020～2021学年第一学期

课程编号：50920021　课程名称：工程数学基础　年级：2020　开课单位：数理学院

命题教师：命题组　考核方式：闭卷　考试时间：120分钟　试卷页数：3页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、 填空题（每空2分，共20分）

1、构造迭代格式 $x^{(k+1)}=\alpha x^{(k)}+(Ax^{(k)}-b)$(其中$\alpha$是实数),用以求解线性方程组

$Ax=b$,其中$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$，则迭代格式收敛等价于$\alpha$ 满足_______。

2、已知非线性方程$2^x+x-5=0$在$x_0=1.5$附近有根,若构造迭代格式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$，则

取迭代函数$\varphi(x)=$________时,该迭代格式一定局部收敛到方程的根。

3、取插值节点$x_1=1$，$x_2=2,x_3=3,x_4=4$，而$\{l_i(x),i=0,1,2,3\}$是关于这4个节点

的4个3次拉格朗日插值基函数。则$\sum_{i=0}^{3}l_i(x)x_i=$__________。

4、$f(x)=x^5$在[-1,1]上关于$\rho(x)=1$的一次最佳平方逼近多项式是__________。

5、 设n阶实对称对称矩阵A满足$(A+4E)^5(A-3E)^4=0_{n\times n}$，$rank(A+4E)=r$，

则$\|A\|_F=$_________。

6、记$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. 则$Ax=b$的极小范数最小二乘解是_______（结果需化简）。

而AA^+ 的Jordan标准型为__________。

7、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是线性空间$V$ 的基，V_1=span$(\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_3)$,

V_2=span$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$, 则$V_1+V_2$的维数是_________。

8、已知线性规划问题 $\max Z = 3x_1 + 4x_2$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ 的最优表如下，其中 x_3，x_4是松弛变量。

c_j			3	4	0	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_1	18	1	0	3/5	−1/5
4	x_2	4	0	1	−1/5	2/5
σ_j			0	0	−1	−1

由此表可得其对偶问题的最优解是________。

9、用梯度法求 $f(X) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2$ 的极小点，若取初始值 $X^{(0)} = (0,0)$，需取_________为搜索方向获得 $X^{(1)}$.

二、（15 分）已知 4，0，0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & -1 \\ -4 & 1 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值。

（1）、（5 分）求矩阵 A 的最小多项式。

（2）、（5 分）求矩阵 A 的 Jordan 标准形。

（3）、（5 分）求 e^{3A}，并求 $|e^{3A}|$。

三、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$。 .

(1)、（7 分）若 A 是内积空间 V 在一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的度量矩阵，则 λ 需满足什么条件？此时，求 $\alpha_1 - \alpha_2$ 与 $\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4$ 的夹角。

(2)、(8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性空间 V 的一组基. V 上的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的表示矩阵是 A，若 $R(T)$ 的维数是 3，则 λ 需满足什么条件？此时求 $N(T)$。

四、（10 分）取 5 个等距节点 ，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算

积分 $\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值（保留 4 位小数）。

五、（10 分）用下列数据表构造 $f(x)$ 的一个至多4次插值多项式，并建立误差公式。

X	0	1
$f(x)$	0	−1
$f'(x)$	10	−2
$f''(x)$	40	

六、(10 分)用数值方法求解方程 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 时，选取等步长，

（1）、（5 分）若用隐式欧拉法 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$， $n = 0,1,2,\cdots$

证明该公式具有一阶精度，并给出局部截断误差主项。

（2）、（5 分）用（1）中的隐式欧拉法取步长 $h = 0.2$ 求解下述问题（保留 4 位小数），

$$\begin{cases} y' = 2x + \frac{1}{3}y, \qquad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

七、(10 分)对下列线性规划问题：

$$\min z = 15x_1 + 24x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} 6x_2 + x_3 \ge 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0 (j = 1,2,3) \end{cases}$$

(1)、写出其对偶模型。

(2)、试用单纯形法或对偶理论求解上述问题。

八、(10 分)用 K-T 条件求解如下非线性规划

$$M\text{in } f(X) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$
$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

华北电力大学硕士研究生课程考试试题（A卷）

2021～2022学年第一学期

课程编号：S509077课程名称：工程数学基础年级：研2021级开课单位：数理学院

命题教师：课程组 考核方式：闭卷考试时间：120分钟试卷页数：2页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、 填空题(每空2.5分，共25分)

1. 设$\{\varphi_n(x)\}, n=0,1,2,\cdots$是$[a,b]$上是带权函数$\rho(x)=x$的首 1 的 n 次正交多项式，则$\int_a^b x\varphi_2(x)dx=$______。

2. 数值微分公式$f'(x_i)\approx\dfrac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}$的截断误差为______。

3. 求解线性方程组$Ax=b$的迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$收敛的充要条件是______。

4. 求解非线性方程$f(x)=x$的牛顿迭代格式是______。

5. 设5阶实对称矩阵A满足$(A-3E)^2(A+4E)^3=0$，$rank(A-3E)=1$，则A的2-范数$\|A\|_2=$______。

6. $\begin{pmatrix}5&5\\4&-5\end{pmatrix}$在基$\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$下的坐标为______。

7. 内积空间 V 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的度量矩阵为$\begin{pmatrix}4&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则向量$\alpha_1+\alpha_2$和$\alpha_1+\alpha_3$的夹角是______。

8. 用梯度法求解非线性规划问题$\min f(X)=(x_1+1)^2+(2x_2-1)^2$,初始点$(0,0)$，近似最佳步长$\lambda_0=$______。

9. 非线性规划问题$\begin{cases}\min f(x)=(x-2)^2\\1\le x\le 5\end{cases}$的K-T条件是______。

10. 若$\hat{X},\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的可行解，c和b是原问题的价值向量和资源向量，当______时,$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

二、 (15 分)设$V_1 = span\{1+2t+t^2, -1+t+t^2+t^3\}, V_2 = span\{2-t+t^3, 1-t+3t^2+7t^3\}$，

(1) 求V_1+V_2和$V_1 \cap V_2$的基与维数；

(2) V_1+V_2是否为直和，如果是，说明理由，如果不是，将V_1+V_2的基扩充成$R_3(t)$的基。

三、 (15 分)已知$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) 求A^+；

(2) 求AA^+的若当标准形及$\|AA^+\|_F$。

(3) 计算$\cos AA^+$。

四、 (10 分)求一个不超过 4 次的多项式$p(x)$，使得其取值如下

x	1	2	3
$p(x)$	1	3	7
$p'(x)$	3	5	

并写出插值余项表达式。

五、 (10 分)(1)写出求解常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$的梯形公式；(2) 说明梯形公式是几阶收敛的(要求有证明过程)。

六、 (10 分)确定求积公式$\int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$中的待定参数，使其代数精度尽可能高，并指出所得公式的代数精度。

七、 (15 分)已知线性规划问题：
$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1, \\ x_1 + 4x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

(1)写出其对偶问题；(2) 求线性规划问题的最优解。

华北电力大学硕士研究生课程考试试题（B 卷）

2021～2022 学年第一学期

课程编号：S509077 课程名称：工程数学基础年级：研 2021 级开课单位：数理学院

命题教师：课程组 考核方式：闭卷考试时间：120 分钟试卷页数：2 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、 填空题(每空 2.5 分，共 25 分)

1. 设 $x_i(i=0,1,2,3,4,5)$ 是互异节点，$l_i(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{5}(2x_i^5+x_i^2+1)l_i(x)=$__________。

2. 数值微分公式 $f'(x_i)\approx\dfrac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}$ 的截断误差为________。

3. 设线性方程组 $Ax=b$，其中 A 为正定矩阵且其每个特征值 λ 满足 $0<\alpha\le\lambda\le\beta$，迭代公式：$x_{k+1}=x_k+\omega(b-Ax_k)$，则当 ω 取值范围为：__________时，上述迭代法收敛。

4. 设 $f(x)=x^2-4x+4$，若用牛顿迭代法求其根 $x^*=2$，则牛顿法________阶收敛。

5. 设 5 阶实对称矩阵 A 满足 $(A-2E)^2(A+E)^3=0$，$rank(A-2E)=2$，则 A 的 F-范数 $\|A\|_F=$________。

6. $\begin{pmatrix}5&5\\5&-2\end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ 下的坐标为________。

7. 内积空间 V 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$，则向量 $\alpha_1+\alpha_2$ 和 $\alpha_2+\alpha_3$ 的夹角是__________。

8. 用梯度法求解非线性规划问题 $\min f(X)=\left(2x_1+1\right)^2+\left(x_2-1\right)^2$，初始点 $(0,0)$，近似最佳步长 $\lambda_0=$__________。

9. 写出非线性规划问题 $\begin{cases}\max f(x)=\left(x-4\right)^2\\1\le x\le 5\end{cases}$ 的 K-T 条件____________。

10. 若 $\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，原问题与对偶问题的互补松弛性为，$\hat{X},\hat{Y}$ 为最优解当且仅当____________。

二、 (15 分)已知 $A_1=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix},B_1=\begin{pmatrix}-5&6\\-5&9\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}4&-4\\3&-5\end{pmatrix}$

设 $V_1=span\{A_1,A_2\},V_2=span\{B_1,B_2\}$，

(1) 求 V_1+V_2，$V_1\cap V_2$ 的基与维数；

(2) 判别 V_1+V_2 是否是直和，并说明理由。

三、 (15 分)已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$

(1) 求 A^+；

(2) 求 A 的若当标准形。

(3) 计算 $\sin A$。

四、 (10 分)求一个不超过 3 次的多项式 $p(x)$，使得其取值如下。

x	1	2	4
$p(x)$	4	2	4
$p'(x)$	1		

五、 (10 分)(1)写出求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'(x)=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的改进的欧拉公式；(2) 说明改进的欧拉公式是几阶收敛的(要求有证明过程)。

六、 (10 分)确定求积公式 $\int_0^h f(x)dx\approx h[a_0f(0)+a_1f(h)]+h^2[b_0f^{'}(0)+b_1f^{'}(h)]$ 的 a_0,a_1,b_0,b_1 使其具有尽可能高的代数精度，并指出代数精确度是多少?

七、 (15 分)已知线性规划问题：
$$\max z=2x_1+x_2,\quad \begin{cases}5x_2\le 15,\\6x_1+2x_2\le 24,\\x_1+x_2\le 5\\x_j\ge 0,\ j=1,2\end{cases}$$

(1)写出其对偶问题；(2) 求线性规划问题的最优解。

华北电力大学研究生课程考试试题（A卷）

2022 ～2023　学年第一学期

课程编号：S509077　课程名称：工程数学基础

年　级：一年级　开课单位：数理学院　命题教师：课程组

考核方式：开卷　考试时间：120 分钟 共 3 页

一、（10 分）设$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$，

求$\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_2$，$\|A\|_F$，$\rho(A)$。

二、（10 分）用广义逆矩阵的方法

求$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

的极小范数最小二乘解。

三、（10 分）已知$R^{2\times 2}$中的两组基分别是：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

（1）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵；

（2）分别求矩阵$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$和基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

四、（10 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

（1）求矩阵 A 的若尔当标准形 J；

（2）求矩阵函数$sinA$。

五、（10 分）求解线性代数方程组$\begin{cases}\alpha x_1+x_2+3x_3=1\\ x_1+\alpha x_2+2x_3=1\\ -3x_1+2x_2+\alpha x_3=1\end{cases}$

雅克比迭代法收敛的条件是什么？

六、（10 分）求一个次数不高于 4 次的多项式$p(x)$，使

$p(0)=p'(0)=0, p(1)=p'(1)=1, p(2)=1$，

并写出余项表达式。

七、（10 分）确定求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

八、（10 分）在区间[0,1]上以 h=0.5 为步长，分别用欧拉法与预测-校正法求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + x - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的数值解.（计算结果用分数精确表示）

九、（10 分）已知线性规划问题

$$minZ = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,3)$$

（1）写出其对偶问题；

（2）求线性规划问题的最优解。

十、（10 分）用最速下降法求解$minf(X) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$，

选初始点$X^{(0)} = (1,1)^T$。

华北电力大学研究生课程考试试题（B卷）

2022 ～2023　学年第一学期

课程编号：S509077　课程名称：工程数学基础

年　级：一年级　开课单位：数理学院　命题教师：课程组

考核方式：开卷　　　　　考试时间：120 分钟　共 2 页

一、（10 分）求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$的加号逆.

二、（10 分）已知R^3中的两组基分别是：

$$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(2,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$$
$$\beta_1=(1,2,-1)^T,\beta_2=(2,2,-1)^T,\beta_3=(2,-1,-1)^T$$

定义R^3中的线性变换为$T(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,3.$求

（1）从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

（2）T 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵;

（3）T 在基β_1,β_2,β_3下的矩阵.

三、（10 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$

（1）求矩阵 A 的若尔当标准形 J;

（2）求矩阵函数e^{At}.

四、线性空间 V 按照某种内积运算构成欧氏空间，向量

$$\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T,\beta_1=(0,2)^T,\beta_2=(6,12)^T$$

且α_i与β_j的内积为

$$(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_1,\beta_2)=15,(\alpha_2,\beta_1)=-1,(\alpha_2,\beta_2)=3$$

（1）求 V 在基α_1,α_2下的度量矩阵 A;

（2）求 V 的标准正交基.

五、（10 分）求函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$[1,3]$上对于$\Phi=span\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式.

六、（10 分）求满足插值条件$f(0)=1,f'(0)=2,f(1)=0,f(2)=5,f'(2)=2$ 的插值多项式，并给出余项表达式.

七、（10 分）取 5 个点的函数值，分别用复化梯形公式和复化辛普森公式计算积分

$\int_0^4(3x^2+2x+1)dx.$

八、（10 分）在区间[0,0.3]上以 h=0.1 为步长，用预测-校正法求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=x^2+x-y\\ y(0)=0\end{cases}$$

的数值解.

九、（10 分）已知线性规划问题

$$max\ Z=3x_1-5x_2-2x_3-x_4$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 4\\ 4x_1-x_2+x_3+2x_4\le 6\\ -x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 12\\ x_j\ge 0(j=1,2,3,4)\end{cases}$$

（1）写出其对偶问题;

（2）求线性规划问题的最优解.

十、（10 分）写出非线性规划

$$\begin{cases}min\quad f(x)=(x-2)^2\\ \qquad 1\le x\le 3\end{cases}$$

的 Kuhn-Tucker 条件并进行求解.

华北电力大学研究生课程考试试题（A 卷）

2023～2024　学年第 1 学期

课程编号：S509077　　课程名称：工程数学基础　　年　级：研 2023 级　开课单位：数理学院

命题教师：课题组　　考核方式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　共 2 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、　填空题（每空 2.5 分）

1.线性空间 $\boldsymbol{V}_1 = \mathbf{Span}\{1-x+x^3, x-x^2\}$ 和 $\boldsymbol{V}_2 = \mathbf{Span}\{1+x^3, x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ 为 $\boldsymbol{P}_3[x]$ 的两个线性子空间，则 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$ 的维数为__________。

2.内积空间 $\boldsymbol{V}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度为_______。

3.求解非线性方程 $e^x - 3x^2 = 0$ 的牛顿迭代格式为_____________。

4. 已知函数 $y = f(x)$ 经过三个点 $(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))$，则其二次拉格朗日插值多项式为___________________________。

5. 利用雅克比迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$，其迭代矩阵为______________。

6. 设 $\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，X_s 为原问题的松弛变量的值，Y_s 为对偶问题剩余变量的值。$\hat{X},\hat{Y}$ 分别是原问题和对偶问题最优解的充分必要条件是______________。

7.用最速下降法求解非线性规划 $\min f(X) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$，选取初始点 $(2,-2,1)^\top$，最速下降方向为_____________，最佳步长 $\lambda_0 =$_____________。

二、（10 分）求矛盾方程 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ x_1+x_3=0, \\ 2x_1+2x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+6x_3=3 \end{cases}$ 的极小范数最小二乘解。

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型。

2.求矩阵函数 $\sin \boldsymbol{A}$。

3.求矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|_1, \|\boldsymbol{A}\|_F$。

四、（10 分）定义 $\boldsymbol{P}_3[\boldsymbol{x}]$上的线性变换$\boldsymbol{T}$ 如下: $\forall \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{x}^3 \in \boldsymbol{P}_3[\boldsymbol{x}]$

$$\boldsymbol{Tf}(\boldsymbol{x}) = \quad \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{a}_1 \quad + \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{x} + \quad \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{x}^2 + \quad \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_0 \quad \boldsymbol{x}^3$$

1.求线性变换$\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{P}_3[\boldsymbol{x}]$的自然基$1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$下的表示矩阵。

2.求值域$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})$和零空间$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T})$的基与维数。

五、（10 分）确定求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \alpha(b-a)^2 \quad f'(a) - f'(b)$$

中的待定参数α，使其代数精度尽量高，并指出其代数精度的次数。

六、（10 分）求四次 Newton 型 Hermite 插值多项式$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$，使得

x	0	1
$H(x)$	3	5
$H'(x)$	4	6
$H''(x)$		7

并建立误差估计公式。

七、（10 分）对于求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

1.证明梯形法是二阶方法。

2.对于初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = 1 \end{cases}$，取等距步长$\boldsymbol{h} = 0.2$，分别写出欧拉法和预估-校正法的计算公式。

八、（10 分）1.写出线性规划问题 $\begin{array}{l} \max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geqslant 8 \\ 12x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 9x_4 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \leqslant 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases} \end{array}$ 的对偶问题。

2.用单纯形法或对偶理论求解线性规划问题：$\begin{array}{l} \max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leqslant 90 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$

九、（10 分）用 K—T 条件求解非线性规划

$$\begin{cases} \min f(x) = (x-5)^2 \\ 2 \le x \le 6 \end{cases}$$ 。

华北电力大学研究生课程考试试题（B卷）

2023～2024　学年第 1 学期

课程编号：S509077　课程名称：工程数学基础　年　级：研 2023 级　开课单位：数理学院

命题教师：课题组　考核方式：闭卷　考试时间：120 分钟　共 2 页

特别注意：所有答案必须写在答题册上，答在试题纸上一律无效

一、　填空题（每空 2.5 分，共 20 分）

1.线性空间 $V_1=\text{Span}\{1+x^3,x+x^2\}$ 和 $V_2=\text{Span}\{1+x,x^2+x^3,1+x+x^2+x^3\}$ 为 $P_3[x]$ 的两个线性子空间，则 V_1+V_2 的维数为__________。

2.内积空间 V 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}5&2&0\\2&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，向量 $\alpha_1-5\alpha_2+3\alpha_3$ 的长度为________。

3. 求解非线性方程 $x-\tan x=0$ 的牛顿迭代格式为______________。

4．已知函数 $y=f(x)$ 经过三个点 $(0,2),(1,-1),(2,4)$，构造其二次拉格朗日插值多项式____________________。

5. 利用高斯-赛德尔迭代法求解线性方程组 $\begin{cases}x_1+0.4x_2+0.4x_3=1,\\0.4x_1+x_2+0.8x_3=2,\\0.4x_1+0.8x_2+x_3=3;\end{cases}$ 其迭代矩阵为_______________。

6.假设 $\max z=\mathbf{CX}$ $s.t.\begin{cases}\mathbf{AX}\le\mathbf{b}\\\mathbf{X}\ge\mathbf{0}\end{cases}$ 为线性规划的原问题，$\min\omega=\mathbf{Yb}$ $s.t.\begin{cases}\mathbf{YA}\ge\mathbf{C}\\\mathbf{Y}\ge\mathbf{0}\end{cases}$ 为其对偶问题，若 $\bar{X}$ 是原问题的可行解，$\bar{Y}$ 是对偶问题的可行解，则 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别对应的目标函数值满足的关系为_____________。

7.用最速下降法求解非线性规划 $\min f(X)=(x_1-2)^2+2x_2^2$，选取初始点 $(0,0)^\top$，最速下降方向为______________，最佳步长 $\lambda_0=$______________。

二、（10 分）求矛盾方程 $\begin{cases}2x_3=1,\\x_1+x_2=1,\\x_3=1,\\x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$ 的极小范数最小二乘解。

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}$

1.求矩阵 A 的 Jordan 标准型。

2.求矩阵函数 e^A。

3.求矩阵范数$\|A\|_\infty,\|A\|_F$。

四、（10 分）定义$P_3[x]$上的线性变换T如下:$\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3[x]$

$$Tf(x)=(a_0+a_1)+(a_1+a_2)x+(a_2+a_3)x^2+(a_3+a_0)x^3$$

1.求线性变换T在$P_3[x]$的自然基$1,x,x^2,x^3$下的表示矩阵。

2.求值域$R(T)$和零空间$N(T)$的基与维数。

五、（10 分）确定求积公式

$$\int_0^h f(x)dx\approx A_0f(0)+A_1f(h)+A_2f'(0)$$

中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出其代数精度的次数。

六、（10 分）求四次 Newton 型 Hermite 插值多项式$H(x)$，使得

x	0	1	2
$H(x)$	3	5	7
$H'(x)$	4	6	

并建立误差估计公式。

七、（10 分）对于求解初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$

1.证明$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})\quad n=0,1,2,...$是一阶方法。

2.对于初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-y,\\ y(0)=1\end{cases}$，取等距步长$h=0.3$，分别写出欧拉法和梯形法的计算公式。

八、（10 分）已知线性规划问题

$$\max z=-x_1-x_2+4x_3$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3\leqslant 9\\ x_1+x_2-x_3\leqslant 2\\ -x_1+x_2+x_3\leqslant 4\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3\end{cases}$$

1.写出线性规划问题的对偶问题；

2.求解线性规划问题。

九、（10 分）用 K—T 条件求解非线性规划

$$\begin{cases}\min f(x)=(x-4)^2\\ 1\le x\le 6\end{cases}。$$

华北电力大学研究生课程考试试题（A 卷）

2024 ～ 2025　学年第 1 学期

课程编号：S509077　　课程名称：工程数学基础
年　　级：2024 级　　开课单位：数理学院　　命题教师：课题组
考核方式：闭卷　　考试时间：120 分钟　共 2 页

---

1. （10 分）利用矩阵的广义逆分别求出如下方程组的最小二乘解或最小范数解：

$$(a)\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -5\\ -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32\\ 31\\ 27\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & -5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$$

2. （10 分）在矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 中，$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，定义线性变换 $T(X)=AX-XA, \forall X\in R^{2\times 2}$,

（1）求 T 在自然基底 $E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 下的表示矩阵；

（2）证明 0 是 T 的特征值并讨论 0 的重数与 a,b,c,d 的关系。

3.（10 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

（1）求 A 的若尔当标准型 J；
（2）求矩阵函数 $\sin(\pi A)$。

4.（10 分）已知线性方程组 $\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，

（1）写出雅克比迭代格式，并给出收敛的充要条件；

（2）写出 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时的高斯-赛德尔迭代格式，并判断是否收敛。

5.（10 分）为了求出非线性方程 $x^2=a(a>0)$ 的算数平方根 $\sqrt{a}$，现给出迭代公式：$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$, 假设迭代初始值 x_0 充分接近于 $\sqrt{a}$，证明序列 x_n 是三阶收敛的。

6.（10 分）设 $P_2(x)$ 是对光滑函数 $f(x)$ 的二次插值多项式，插值节点为 $(0,f(0)),(h,f(h)),(2h,f(2h))$, 给出用 $P_2(x)$ 近似 $f(x)$ 求积分 $I=\int_0^{3h}f(x)dx$ 的数值积分公式 I_2，并用泰勒展开公式说明 $I-I_2=\frac{3}{8}h^4f^{(3)}(0)+O(h^5)$。

7.（10 分）求 $f(x)=e^x$ 在 $[-1,1]$ 上的三次最佳逼近多项式，并给出误差。（最终结果保留小数点后 4 位）

8.（10 分）考虑常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'(x)+y(x)=0\\ y(0)=1\end{cases}$，试证明用梯形法所求 $y(nh)$ 的近似解为 $y(nh)\approx y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n$，并说明该算法此时是收敛的。

9.（10 分）考虑如下线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min\quad z=-3x_1-x_2\\
&s.t.\quad \begin{cases}3x_1+3x_2+x_3=30,\\ 4x_1-4x_2+x_4=16,\\ 2x_1-x_2\le 12,\\ x_i\ge 0, i=1,2,3,4\end{cases}
\end{aligned}
$$

（1） 利用单纯形法求出最优解；

（2） 写出该问题的对偶问题并给出其最优解。

10.（10 分）利用 KT 条件求解如下非线性约束极值问题的最优解：

$$
\begin{aligned}
&\max\quad f(X)=14x_1-x_1^2+6x_2-x_2^2+7\\
&s.t.\quad \begin{cases}x_1+x_2\le 2,\\ x_1+2x_2\le 3.\end{cases}
\end{aligned}
$$

华北电力大学研究生课程考试试题（B 卷）

2024 ～ 2025　学年第 1 学期

课程编号：S509077　课程名称：工程数学基础

年　　级：2024 级　开课单位：数理学院　命题教师：课题组

考核方式：闭卷　考试时间：120 分钟　共 2 页

1.（10 分）求出如下方程组的极小范数最小二乘解 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$。

2.（10 分）在矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 中，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，定义线性变换 $T(X)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}X\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\forall X\in R^{2\times 2}$,

求 T 在基底 $\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 下的表示矩阵。

3.（10 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 A 的若尔当标准型 J，并求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$ 。

4.（10 分）已知线性方程组 $\begin{cases} 15x+3y-2z=85, \\ 2x+10y+z=51, \\ x-2y+8z=5, \end{cases}$

（1）写出雅克比迭代格式，并判断是否收敛；

（2）写出高斯-赛德尔迭代格式，并判断是否收敛。

5.（10 分）已知以下数据点及其导数信息

$$x_0=0,\quad f(x_0)=1,\quad f'(x_0)=-1,$$
$$x_1=1,\quad f(x_1)=2,\quad f'(x_1)=3,$$

使用 Newton 插值法构造 Hermite 插值多项式 $H(x)$ 并计算 $H(0.5)$ 的值。

6.（10 分）给出如下迭代公式：$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$,假设迭代初始值 x_0 充分接近于 $\sqrt{a}$，证明该公式是一种计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法。

7.（10 分）求常数 a,b 和两个不同的节点 t_1,t_2，使求积公式 $\int_{-1}^{1}f(t)(1+t^2)dt\approx af(t_1)+bf(t_2)$ 对 $f(t)$ 为三次多项式时精确成立。

8.（10 分）考虑区间 $t \in [0,0.5]$ 上的常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = -2ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$，试用欧拉法和改进欧拉法求步长 $h = 0.1$ 时的数值解，并给出与精确解的绝对误差与相对误差。（结果保留小数点后 4 位）

9.（10 分）考虑如下线性规划问题

$$\min \quad z = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$$
$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_3 \ge 3, \\ x_2 + 2x_3 \ge 5, \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3, \end{cases}$$

（1）利用单纯形法求出最优解；

（2） 写出该问题的对偶问题并给出其最优解。

10.（10 分）用最速下降法求解 $\min \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2$，取初始点 $X^{(0)} = (1,1)^T$，迭代一次。