

FONKSİYONLAR

A ve B gibi boş olmayan iki küme verildiğinde; A kümesinin her elemanını B'nin bir tek elemanına esleyen bir f kuralına A'dan B'ye bir fonksiyon denir. Bu ilişki sembolik olarak $f: A \rightarrow B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde ifade edilir.

$x \in A$ bir f kuralıyla $y \in B$ 'ye eslenmiş ise bu ilişki $y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Burada x 'e bağımsız değişken, y 'ye bağımlı değişken denir.

$A = D(f)$ kümesine f 'in tanım kümesi denir.

$R(f) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\}$ ile belirlenen kümeye f 'in değer kümesi denir.

Fonksiyonun Tanım Kümesi:

Bağımsız değişkenin belirli bir reel değerine karşılık, bir f fonksiyonu vasıtasıyla belirli bir reel değer bulunabiliyorsa, bağımsız değişkenin o değeri için f fonksiyonu tanımlıdır denir.

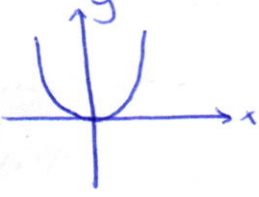
Herhangi bir f fonksiyonu tanım kümesi belirtilmeden tanımlanmışsa, bu fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonun reel bir sayıya karşılık getirdiği tüm reel sayıların kümesini alacağız.

<u>Fonksiyon</u>	<u>Tanım Kümesi</u>
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$

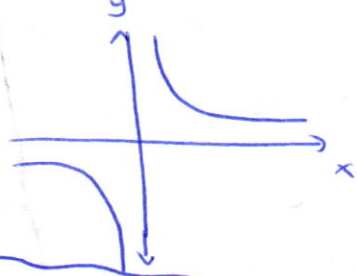
Bir Fonksiyonun Grafiği

Bir f fonksiyonunun grafiği; $y=f(x)$ denklemini sağlayan noktaların Kartezyen düzlemdeki yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafikdir.

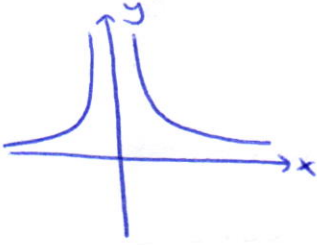
① $y=x^2$



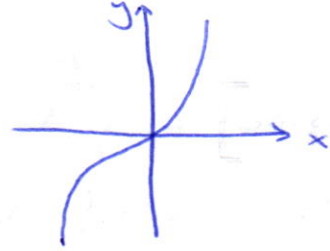
② $y=\frac{1}{x}$



③ $y=\frac{1}{x^2}$



④ $y=x^3$



Fonksiyonlarla İlgili Bazı Kavramlar

① Artan-Azalan Fonksiyonlar: $f(x)$ fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. $\forall x_1, x_2 \in I$ için

a) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, I aralığında artandır.

b) $x_1 < x_2$ " $f(x_1) > f(x_2)$ " f, I aralığında azalandır.

② Tek-Gift Fonksiyonlar:

$y=f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için

* $f(-x)=f(x)$ ise f Gift Fonksiyondur ve y -eksenine göre simetrik bir grafiği vardır.

* $f(-x)=-f(x)$ ise f Tek Fonksiyondur ve o -rijine göre simetrik bir grafiği vardır.

③ Lineer Fonksiyonlar: m ve b sabitleri için $y=mx+b$ şeklindeki fonksiyona lineer fonksiyon denir.

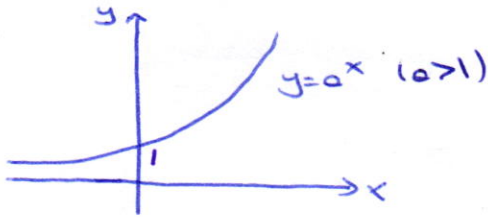
④ Polinomlar: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ şeklindeki $P(x)$ fonksiyonuna polinom denir. a_n başkatsayı, n ise polinomun derecesi olarak adlandırılır.

⑤ Rasyonel Fonksiyonlar: $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere,

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ bülümüne rasyonel (kesirli) fonk. denir. Bir rasyonel fonksiyonun tanım kümesi $Q(x) \neq 0$ şartını sağlayan tüm reel x sayılarının kümesidir.

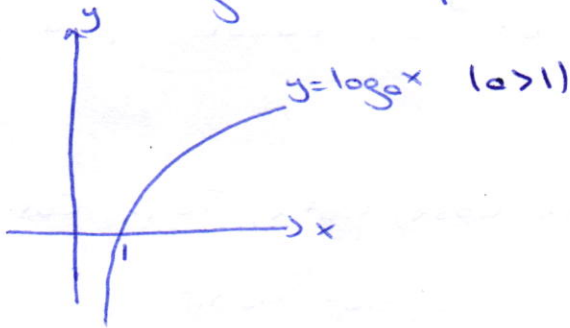
⑥ Üstel Fonksiyonlar: $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $y = f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonk. denir. Bütün üstel fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ tanım kümesine ve $(0, \infty)$ görüntü kümesine sahiptir.



$$y = a^x$$

$$a > 0 \quad a \neq 1$$

⑦ Logaritmik Fonksiyon: $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonuna logaritmik fonk. denir. Logaritmik fonk. $x > 0$ için tanımlıdır.



$$y = \log_a x$$

$$a > 0 \quad a \neq 1 \quad x > 0$$

⑧ Bileşke Fonksiyon: f ve g fonksiyonları için, bileşke fonksiyon:

$f \circ g(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanır. $f \circ g$ nin tanım kümesi,

$g(x)$ in f in tanım kümesi içinde olması şartıyla, g nin tanım kümesindeki x sayılarını içerir.

9) Fonksiyonun Grafiğinin Kaydırılması:

F4

a) Dikey Kaydırma: $y=f(x)+k \rightarrow k>0$ ise; f 'in grafiğini k birim yukarı kaydırır

$\rightarrow k<0$ ise; f 'in grafiğini $|k|$ birim aşağı kaydırır

b) Yatay Kaydırma: $y=f(x+h) \rightarrow h>0$ ise; f 'in grafiğini h birim sola kaydırır

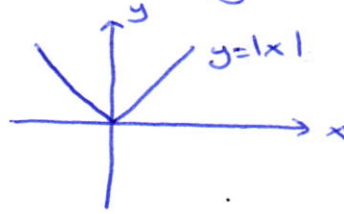
$\rightarrow h<0$ ise; f 'in grafiğini $|h|$ birim sağa kaydırır

10) Parçalı Fonksiyonlar:

Bazen bir fonksiyonu, tanım kümesinden farklı parçaları üzerinde farklı formüller kullanarak tanımlamak gerekir.

Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

$$(*) |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

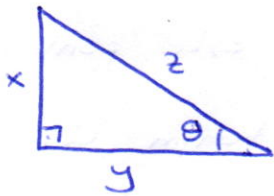


11) Periyodik Fonksiyonlar: Her x değeri için $f(x+p)=f(x)$

olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonk. denir. Böyle bir en küçük p değerine f 'in periyodu denir.

12) Trigonometrik Fonksiyonlar: $\sin x, \cos x, \cot x, \tan x, \operatorname{cosec} x, \sec x$

fonsiyonlarına Trigonometrik Fonksiyonlar denir.



$$\sin \theta = \frac{x}{z}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{z}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{y}$$

$$\cot \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sec \theta = \frac{z}{y}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{z}{x}$$

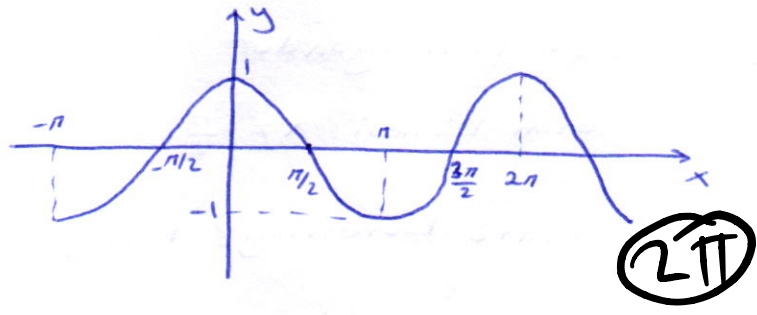
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

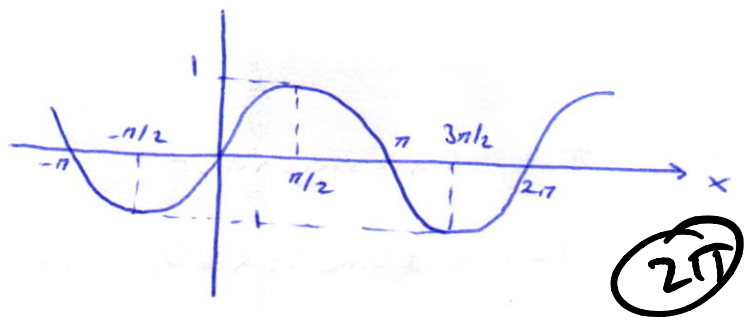
$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

a) $y = \cos x$ fonksiyonu: \rightarrow Sadece $\cos x$ çift fonk.



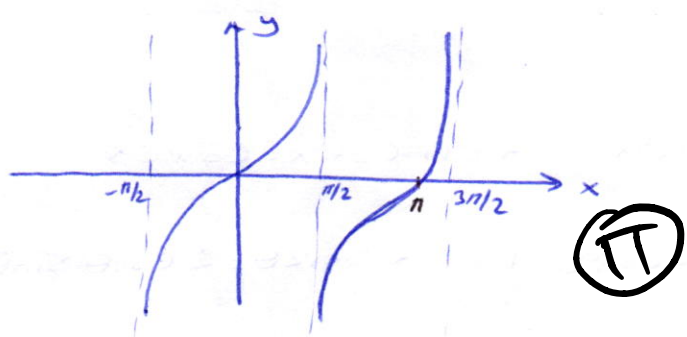
- Çift fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
- Periyodu: 2π

b) $y = \sin x$ fonksiyonu:



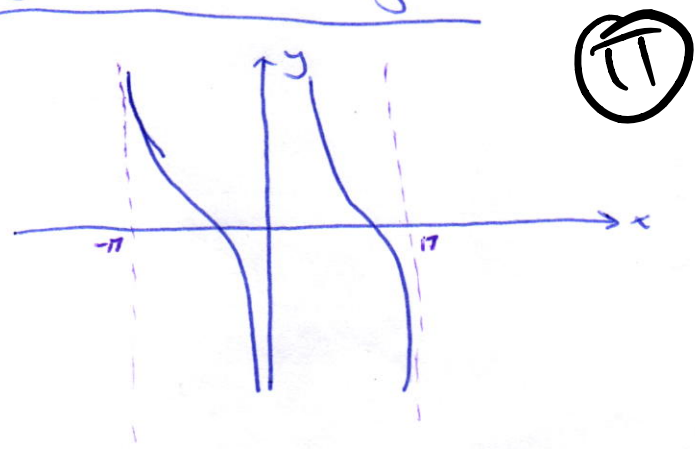
- Tek fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
- Periyodu: 2π

c) $y = \tan x$ fonksiyonu:



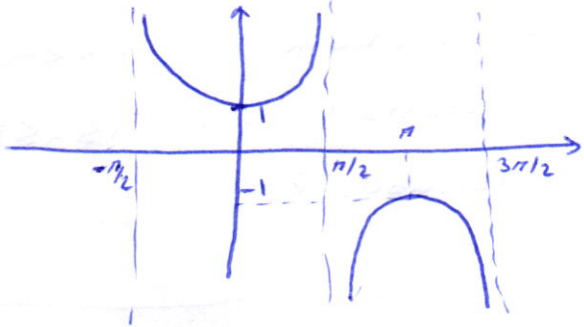
- Tek fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
- Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$
- Periyodu: π

d) $y = \cot x$ fonksiyonu:



- Tek fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $x \neq 0, x \neq \pm \pi, x \neq \pm 2\pi$
- Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$
- Periyodu: π

e) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ Fonksiyonu:



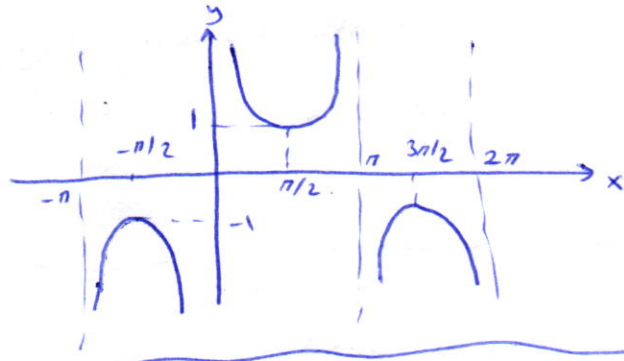
Gift fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$

Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$

Periyodu: 2π

f) $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ Fonksiyonu:



Tek fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$

Periyodu: 2π

Bazı Trigonometrik Özdeşlikler:

- * $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- * $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- * $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- * $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$
- * $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$
- * $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$
- * $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$
- * $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b$
- * $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- * $\sin(a+b) = \cos b \sin a + \cos a \sin b$
- * $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$