MAT1072 / Matematik 2

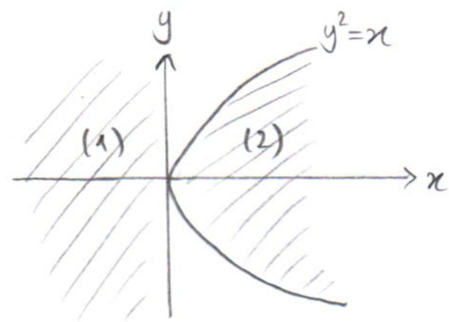
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Tanım Kümesi / Limit / Süreklilik

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgesini belirleyip çiziniz.

a) $z = \ln\left(1 - \dfrac{y^2}{x}\right) \Rightarrow 1 - \dfrac{y^2}{x} > 0$ olmalıdır.

(1) Her $x < 0$ için $1 - \dfrac{y^2}{x} < 0$ dır.

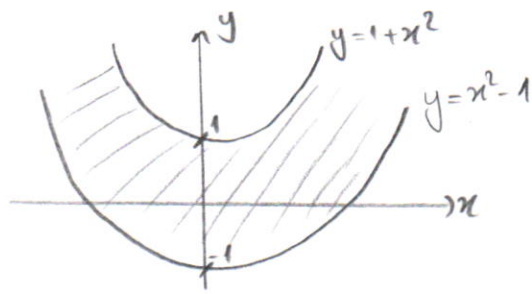
(2) $x > 0$ için $1 - \dfrac{y^2}{x} > 0 \Rightarrow y^2 < x$ 'tir.



b) $f(x,y) = \arccos(y - x^2)$

$\Rightarrow -1 \leq y - x^2 \leq 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1$

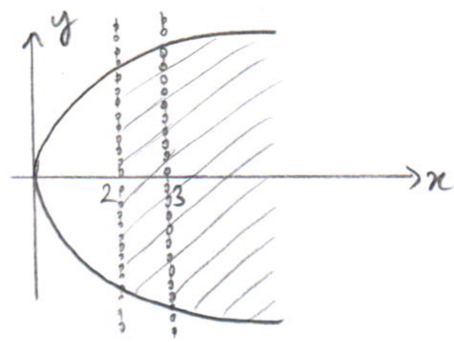


c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x - y^2}}{\ln(x-2)}$

$\sqrt{x-y^2}$: $x - y^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq y^2$

$\ln(x-2)$: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

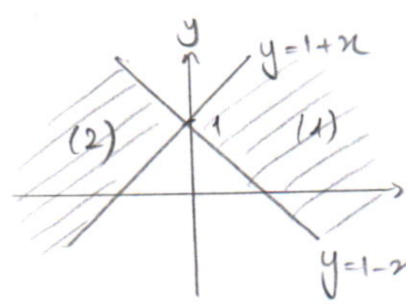
$\dfrac{1}{\ln(x-2)}$: $\ln(x-2) \neq 0 \Rightarrow x - 2 \neq 1$
$\Rightarrow x \neq 3$



d) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x} \Rightarrow x \neq 0$ ve $-1 \leq \dfrac{y-1}{x} \leq 1$

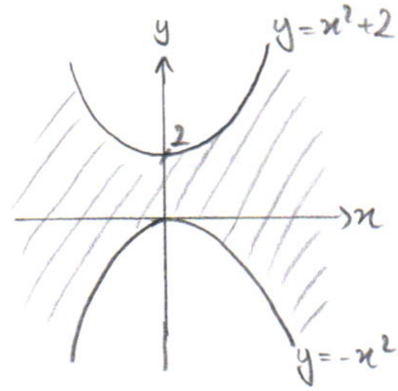
(1) $x > 0$ için $-x \leq y - 1 \leq x \Rightarrow 1 - x \leq y \leq 1 + x$

(2) $x < 0$ için $-x \geq y - 1 \geq x \Rightarrow 1 + x \leq y \leq 1 - x$



e) $f(x,y) = \arccos \dfrac{y-1}{x^2+1}$

$\Rightarrow -1 \leq \dfrac{y-1}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2+2$



f) $f(x,y) = \ln(xy + x - y - 1)$

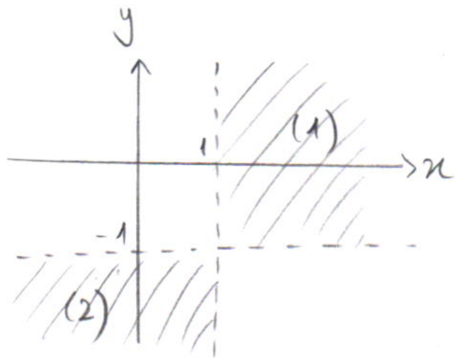
$xy + x - y - 1 > 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow x(y+1) - (y+1) > 0$

$\Rightarrow (x-1)(y+1) > 0$

(1) $x-1>0$, $y+1>0 \Rightarrow x>1 \quad y>-1$

(2) $x-1<0$, $y+1<0 \Rightarrow x<1 \quad y<-1$



g) $z = \ln(y^2x - 1 + y^2 - x)$

$y^2x - 1 + y^2 - x > 0 \Rightarrow (y^2-1)(x+1) > 0$

(1) $y^2 - 1 > 0$, $x+1>0$

$y^2 > 1 \qquad x > -1$

$y>1 \quad y<-1$

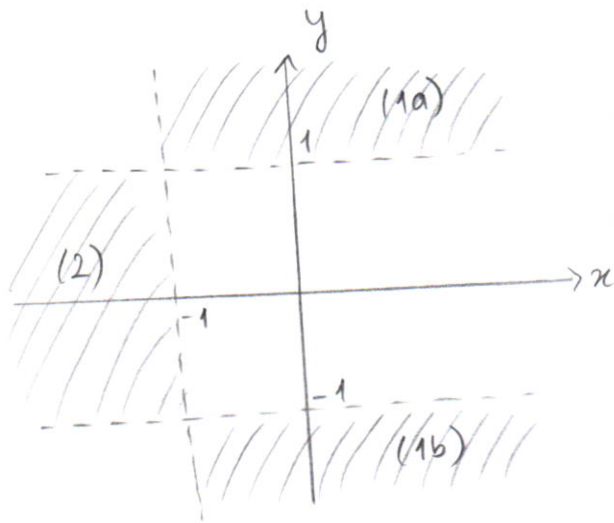
$x>-1 \quad y>1 \quad (1a)$

$x>-1 \quad y<-1 \quad (1b)$

(2) $y^2 - 1 < 0$, $x+1<0$

$y^2 < 1 \qquad x<-1$

$-1<y<1$



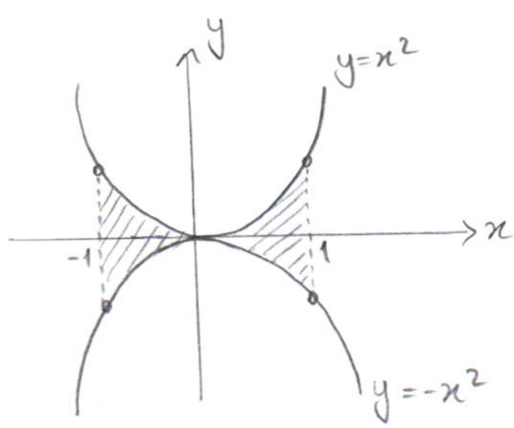
h) $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{y}{x^2}\right) + \ln(1-x^2)$

$\arccos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$: $-1 \leq \dfrac{y}{x^2} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$

$x \neq 0 \qquad x \neq 0$

$\ln(1-x^2)$: $1 - x^2 > 0$

$\Rightarrow -1 < x < 1$



2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt{1+3x^2y^2}-2}{xy-1}$ limitini hesaplayınız.

$$L=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\left(\sqrt{1+3x^2y^2}-2\right)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)}{(xy-1)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(x^2y^2-1)}{(xy-1)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(xy+1)}{\sqrt{1+3x^2y^2}+2} = \frac{3}{2}$$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|xy|}$ limitinin varlığını araştırın.

$y=mx$ doğruları boyunca yaklaşırsak,

$$\lim_{x\to 0} = \frac{xmx}{|xmx|} = \frac{m}{|m|} \begin{cases} \to =1 & m>0 \\ \to =-1 & m<0 \end{cases}$$ Limit mevcut değildir.

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$ limitinin varlığını araştırın.

1. yol: $y=mx$ boyunca; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{mx} = \dfrac{1}{m}$ $\Rightarrow$ Limit m'ye bağlı olduğundan mevcut değil

2. yol: $\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\Rightarrow$ Limit θ'ya bağlı old. mevcut değil

5) a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a. $y=mx$ boyunca, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ $\Rightarrow$ m'e bağlı $\Rightarrow$ Limit yok.

b. $\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\ln(1+y)}{x^2+y^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

$y=mx$ boyunca, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+mx)}{x^2(1+m^2)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{m}{1+mx}}{1+m^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ $\Rightarrow$ m'e bağlı $\Rightarrow$ Limit yok.

veya $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\ln(1+mx)^{1/x}}_{e^m} \cdot \dfrac{1}{1+m^2} = \dfrac{\ln e^m}{1+m^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y\sin\pi x}{x+y-2}$ limitinin varlığını inceleyin.

$$\lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to1}\frac{y\sin\pi x}{x+y-2}\right) = \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to1}\frac{\pi\cos\pi x}{1} = -\pi$$

$$\lim_{y\to1}\left(\lim_{x\to1}\frac{y\sin\pi x}{x+y-2}\right) = \lim_{y\to1}\frac{0}{y-1} = 0$$

Eşit olmadığından
iki kat limit mevcut değil
$\Rightarrow$ Limit mevcut değil.

<u>NOT:</u> İki kat (ardışık) limitin eşit çıkması limitin mevcut olduğunu garanti etmez. Dolayısıyla sadece limitin mevcut olmadığını gösterirken işimize yarar.

$y=kx^{1/2}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy+x^{3/2}}{y^3+xy}$ limitinin varlığını araştırın.

$x=ky^2$ boyunca limit ; $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{2ky^3+k^{3/2}y^3}{y^3+ky^3} = \dfrac{2k+k^{3/2}}{1+k}$: k'ya bağlı $\Rightarrow$ limit yok.

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = ? = L$

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+\cancel{1}-\cancel{1}} = 2$$

$x=ky$

10) $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2}{x^2+3y^3}$ fonksiyonunun (0,0) da limiti var mıdır?

$y=mx$ boyunca limit, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-m^2x^2}{x^2+3m^3x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(3-m^2)}{x^2(1+\underbrace{3m^3x}_{=0})} = 3-m^2 \Rightarrow$ m'ye bağlı
$\Rightarrow$ Limit yok.

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$ limitinin varlığını araştırın.

$y=mx$ boyunca limit, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx^2}{(1+m^2)x^2}\cdot\dfrac{m}{m} = \dfrac{m}{1+m^2} \Rightarrow$ m'ye bağlı $\Rightarrow$ Limit yok.

$x=ky$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{x^4+y^2}$ limitinin varlığını araştırın.

$y=mx^3$ boyunca limit, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3xmx^3}{x^4+m^2x^6} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3mx^4}{x^4(1+\underbrace{m^2x^2}_{=0})} = 3m$: m'ye bağlı
$\Rightarrow$ Limit yok

(y=mx boyunca da limit alınabilir)

13) $f(x,y) = \dfrac{xy-2y}{\sqrt{(x-2)^4+y^4}}$ fonksiyonunun $(2,0)$'daki limitini araştırın.

$y=m(x-2)$ doğrusu boyunca limit,

$$\lim_{x\to 2} \frac{m(x-2)^2}{(x-2)^2\sqrt{1+m^4}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^4}} \Rightarrow m\text{'ye bağlı} \Rightarrow \text{Limit yok.}$$

14) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}\,y^2}{x+y^3}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da limiti var mıdır?

1. yol: $x=ky^3$ boyunca limit: $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{k}\,y^3}{y^3(1+k)} = \frac{\sqrt[3]{k}}{1+k} \Rightarrow k$'ya bağlı limit yok

2. yol: $y=kx^{1/3}$ boyunca limit: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{kx}{x(1+k^3)} = \frac{k}{1+k^3} \Rightarrow k$'ya bağlı $\Rightarrow$ limit yok.

15) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon>0$ için $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ var mıdır?

$$\left|\frac{x^2y^4}{x^4+y^4}\right| \leq \frac{x^2(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = x^2 \leq x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \cancel{\delta_1 = \sqrt{\varepsilon}} \quad \boxed{\delta_2=\sqrt{\varepsilon}}$$

16) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}$ fonksiyonunun,

a) $y=x+1$ doğrusu boyunca $(0,1)$ deki limitini bulunuz

b) $(0,1)$ noktasında limitinin mevcut olmadığını gösteriniz

a) $y=x+1$ boyunca limit,
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+(x+1)^2-(x+1)}{x-3(x+1)^2+3(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+x}{-3x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x+1)}{x(-3x-2)} = -\frac{1}{2}$$

b)
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1} \frac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$
$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{y^2-y}{-3(y^2-y)} = -\frac{1}{3}$$

iki kat limit mevcut olmadığından limit yoktur.

17) Bir $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu parçalı olarak

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

ile veriliyor. f nin $(0,0)$ daki sürekliliğini araştırınız.

$\forall \theta$ için $-1\leq \sin\theta \leq 1$ olduğundan $x\neq 0$ olmak üzere $-y^2\leq y^2\sin\frac{1}{x}\leq y^2$

$$\Rightarrow 0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} -y^2 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\sin\frac{1}{x} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\sin\frac{1}{x}=0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2\sin\frac{1}{x} = f(0,0)=0$ olduğundan süreklidir.

<u>NOT</u>: Sıkıştırma (Sandviç) teoremi çift değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

18) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli midir?

$f(0,0)=2$ olduğundan bu noktada tanımlı ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{x^2+y^2}}{1+\cos\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos\sqrt{x^2+y^2}}}_{=1/2}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=2$ olduğundan sürekli değildir.

19) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^4+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli midir?

$f(0,0)=0$ olduğundan bu noktada tanımlı ✓

$y=mx$ boyunca limit; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3xmx}{x^4+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3mx^2}{x^2(x^2+m^2)} = \dfrac{3m}{m^2}=\dfrac{3}{m}$

$\Rightarrow$ Limit m'e bağlı olduğundan mevcut değil

$\Rightarrow$ sürekli değil

20) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} &, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orijin hariç her noktada sürekli olduğunu gösteriniz.

$(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ şeklinde olup fonksiyon $(0,0)$ hariç her noktada süreklidir.

$(x,y)=(0,0)$ için $f(x,y)=f(0,0)=0$ 'dır ancak bu noktada limiti olmadığından sürekli değildir. Çünkü;

$y=mx$ boyunca: $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2xmx}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2mx^2}{x^2(1+m^2)}=\frac{2m}{1+m^2}$: m'e bağlı $\Rightarrow$ Limit yok

21) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} &, (x,y)\neq(0,0) \\ 0 &, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun
a) $(0,0)$ daki sürekliliğini inceleyiniz
b) $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevlerinin varlığını araştırınız.

a) $x=my^2$ boyunca: $\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{my^2y^2}{m^2y^4+y^4}=\frac{m}{1+m^2}$: m'e bağlı $\Rightarrow$ Limit yok

b) $\displaystyle f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$

$\displaystyle f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$

22) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ hesaplayınız.

$(x,y)\neq(0,0)$ için $\displaystyle -1\leq\cos\frac{1}{x^2+y^2}\leq1 \Rightarrow -(x^2+y^2)\leq(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\leq x^2+y^2$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}-(x^2+y^2)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2+y^2=0$ olduğundan sıkıştırma teoremine göre

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}=0$

23) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu (0,0) da sürekli midir?

$f(0,0)=0$ olduğundan bu noktada tanımlı ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ olduğundan fonksiyon (0,0) da süreklidir.

24) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) daki sürekliliğini inceleyiniz.

$f(0,0)=0$ olduğundan fonksiyon bu noktada tanımlı ✓

$y=mx$ doğrusu boyunca limit ; $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{(1+m^2)x^2} = \dfrac{m}{1+m^2} \Rightarrow$ m'e bağlı

$\Rightarrow$ Limit yok.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ mevcut olmadığından sürekli değildir.