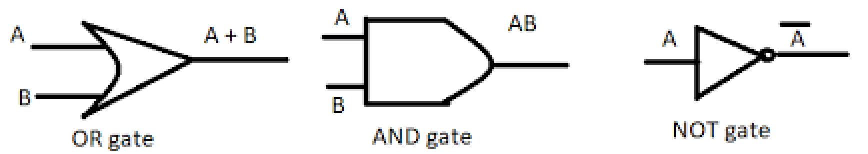
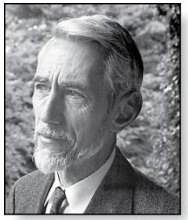
Bölüm 3
Boole Cebri





Claude Shannon
(1916 - 2001)

- Boole fonksiyonları
- Boole fonksiyonlarının gösterilimi
- Mantık kapıları
- Karnaugh haritaları

- Boole cebri {0, 1} üzerinden çalışır, işlem operatörleri

  + (Boolean sum)

  . (Boolean product)

  ~ (Complement)

- Bu işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır
  - *Boole sum*: $1 + 1 = 1$

    $1 + 0 = 1$

    $0 + 1 = 1$

    $0 + 0 = 0$

$$\textit{Boole product}: 1 \cdot 1 = 1$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$

$$\textit{complement}: \bar{0} = 1$$
$$\bar{1} = 0$$

Örnek: $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$?

Çözüm : $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0 + \bar{1}$

$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Boole ifadeler and Boole fonksiyonlar

Tanım:

$B = \{0, 1\}$ olsun

$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B$, her $1 \le i \le n\}$

0 ve 1'lerden oluşan tüm ***n*** bitlik değerlerin kümesi olsun.

Herhangi bir ***x*** değişkeninin değeri B kümesinden ise alabileceği değerler 0 veya 1 olur. ***x*** değişkenine ***Boolean değişken*** denir.

B^n'den B'ye olan bir fonksiyona da ***n. dereceden Boole fonksiyon*** denir

- **Örnek**: Verilen Boole fonksiyonunun değeri nedir ?

$$F(x, y, z) = xy + \bar{z}.$$

Çözüm:

TABLE

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Tanım: F gibi bir Boole fonksiyonunun,

$\bar{F}$

$$\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Tanım: n değişkenden oluşan iki Boole fonksiyonu olan F ve G eşit kabul edilebilmesi için, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ B kümesinin elemanları olduğunda F $(b_1, b_2, \ldots, b_n) =$ G $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eşitliği sağlanmalıdır.

xy, xy + 0 ve xy.1 bu üç farklı Boole ifadesi birbirine denktir

F+ G olan

$$(F + G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

FG

$$(FG)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Boole ifadeler and Boole fonksiyonlar

Örnek: ***n***’nin değerine göre kaç farklı Boole fonksiyonu vardır?

Çözüm: Saymanın temel ilkelerinden çarpma ilkesine göre 0 ve 1’lerden oluşan birbirinden farklı n’lik dizilerin sayısı 2^n’dir ve 2^{2^n}tane de n. dereceden Boole fonksiyonu vardır.

The Number of Boolean Functions of Degree *n*.	
Degree	*Number*
1	4
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

İkinci dereceden bir Boole fonksiyonunun tanım kümesi 4 farklı ikiliden oluşur ve değer kümesi 2 elemanlı B={0, 1} dir. Bu yüzden 16 farklı 2.derecedn Boole fonksiyonu vardır.

The 16 Boolean Functions of Degree Two.

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Boole cebrindeki özdeşlikler

Boolean Identities.	
Identity	*Name*
$\overline{\overline{x}} = x$	Law of the double complement
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	Idempotent laws
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Identity laws
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Domination laws
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Commutative laws
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Associative laws
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Distributive laws
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$	De Morgan's laws
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Absorption laws
$x + \overline{x} = 1$	Unit property
$x\overline{x} = 0$	Zero property

Devre tasarımlarının sadeleştirilmesinde kullanılırlar

Örnek: $x(y + z) = xy + xz$ doğru mudur?

Çözüm:

Verifying One of the Distributive Laws.

x	y	z	$y + z$	xy	xz	$x(y + z)$	$xy + xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Boole cebrindeki özdeşlikler

A+A'B =A+B

İspat-1

$$A + A'B = \underbrace{(A+A')}_{1} \cdot (A+B) = A+B$$

İspat-2

$$A\cdot(1+B) + A'B = A + AB + A'B$$

$$= A + B\underbrace{(A+A')}_{1}$$

$$= A+B$$

Boole cebrindeki özdeşlikler

$$AC+A'B+\underbrace{BC}_{\text{redundant term}}=AC+A'B$$

Consensus Theorem

İspat:

$$AC+A'B+BC(A+A')$$

$$AC+A'B+ABC+A'BC$$

$$AC(1+B)+A'B(1+C)=AC+A'B$$

Şartlar:
Üç farklı değişken olmalı, her bir değişken 2 kez tekrarlanmalı, değişkenlerden birisinin sadece 1 kez değili/tümleyeni olmalı.
Değil'i ve kendisi kullanılan değişkenin olmadığı terim gereksiz terimdir.

Boole cebrinin soyut tanımı

Boole cebri ∨, ∧ ikili işlemleri ve ~ tekli işlemi uygulanabilen, 0 ve 1 elemanlarına sahip ve tüm x, y, z şeklindeki değişkenlerinde bu özelliklerin tamamı uygulanabilen B kümesidir.

$$x \vee 0 = x$$
$$x \wedge 1 = x$$

Birim (identity) kuralları

$$x \vee \bar{x} = 1$$
$$x \wedge \bar{x} = 0$$

Tümleyen (complement) kuralları

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Birleşme (associative) kuralları

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

Değişme (commutative) kuralları

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$$

Dağılma (distributive) kuralları

Boole fonksiyonlarının gösterilimi

- **Örnek**: Tabloda verilmiş olan $F(x, y, z)$ and $G(x, y, z)$ fonksiyonlarını tanımlayan Boole ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

F fonksiyonu sadece $x = z = 1$ ve $y = 0$ olduğunda 1 değerini aldığından $F(x, y, z) = x\bar{y}z$ dir

TABLE

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$F = \underline{1\,.}\,(xy'z) = xy'z$$

$$G = x\underline{yz'} + x'\underline{yz'} = yz'(\underbrace{x+x'}_{1}) = yz'$$

Çarpımların toplamı açılımı

- **Tanım**: Bir değişken veya tümleyenine **öğe** (*literal*) denir. Boole değişkenleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 'in $y_i = x_i$ veya $y_i = \overline{x}_i$ durumunu sağlayan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çarpımına ***minterim*** denir.

  Her değişken bir öğe olarak gösterildiğinde bir miniterim ***n*** tane öğenin çarpımıdır.

Örnek : $F(x,y,z) = (x + y)\bar{z}$ fonksiyonu için toplamların çarpımı açılımını bulunuz.

Çözüm 1:

Tabloda $F(x,y,z)$ fonksiyonun 1 olduğu değerler alındığında $F(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

x	y	z	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

Çözüm 2:

$F(x,y,z) = (x + y)\bar{z}$

$= x\bar{z} + y\bar{z}$ ***dağılma kuralı***

$= x1\bar{z} + 1y\bar{z}$ ***özdeşlik kuralı***

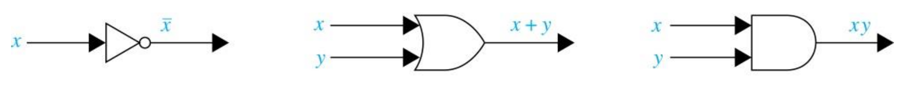
$= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z}$ ***birim özelliği***

$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{z}$ ***dağılma kuralı***

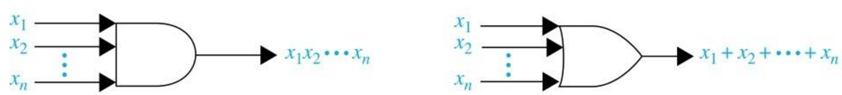
$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ ***değişmezlik kuralı***

Mantık kapıları

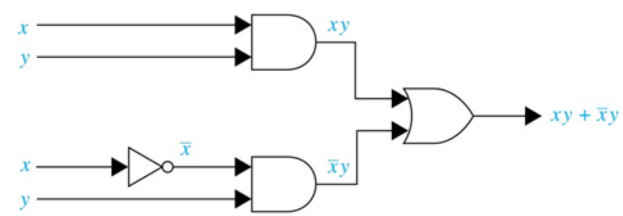
Devrelerin temel elemanları kapılardır ve kapı türleri farklı bir Boole işlemini gerçekleştirmektedir.
Kullanılan kapılar OR (toplama), AND (çarpma), NOT (tersi)

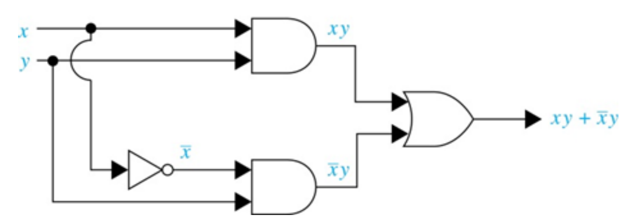


(a) Inverter (b) OR gate (c) AND gate



$xy + \bar{x}y$
ifadesini mantık kapıları ile gösterelim





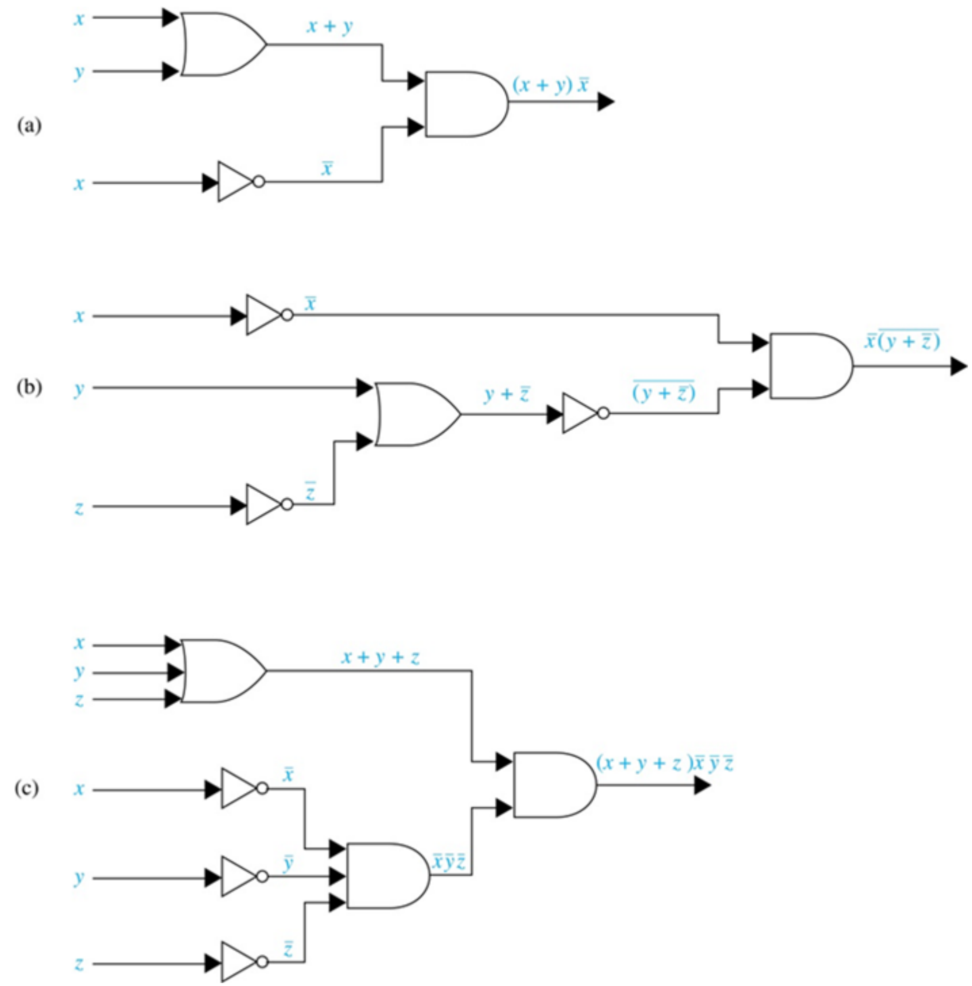
Örnek

Aşağıdaki ifadeleri mantık kapıları ile tasarlayınız

(a) $(x + y)\bar{x}$

(b) $\bar{x}\,\overline{(y + \bar{z})}$

(c) $(x + y + z)(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$

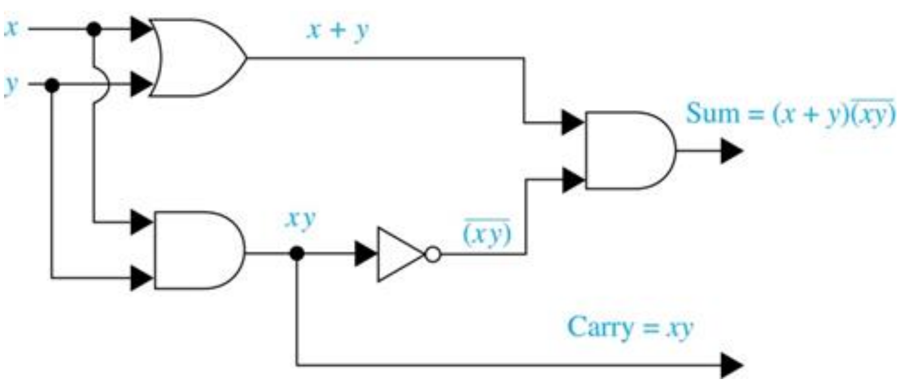


Devre örnekleri

- İki bitlik yarı toplayıcı devresi (half adder)

Input and Output for the Half Adder.

Input		*Output*	
x	*y*	*s*	*c*
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

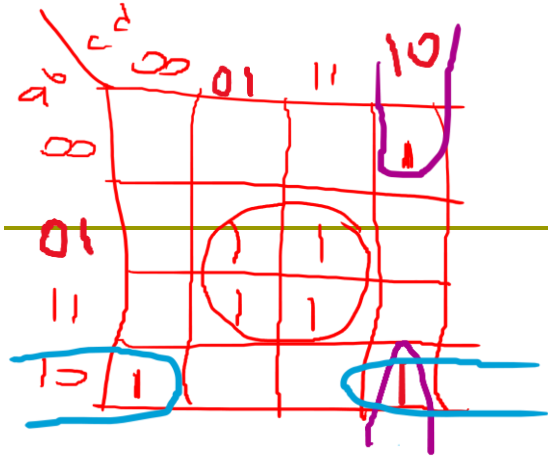


Karnaugh map

A \ BC	00	01	11	10
0	$\boxed{0}$ (0)	1 (1)	0 (3)	1 (2)
1	1 (4)	1 (5)	0 (7)	0 (6)

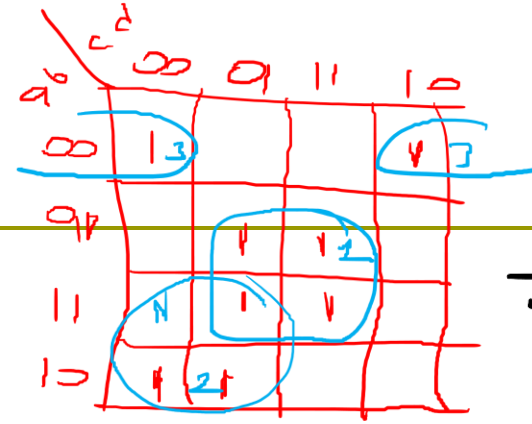
AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	1 (1)	0 (3)	1 (2)
01	1 (4)	0 (5)	0 (7)	1 (6)
11	0 (12)	0 (13)	1 (15)	1 (14)
10	0 (8)	1 (9)	0 (11)	0 (10)

2 değişkende sıralama
00 – 01 – 11 – 10 olmalı



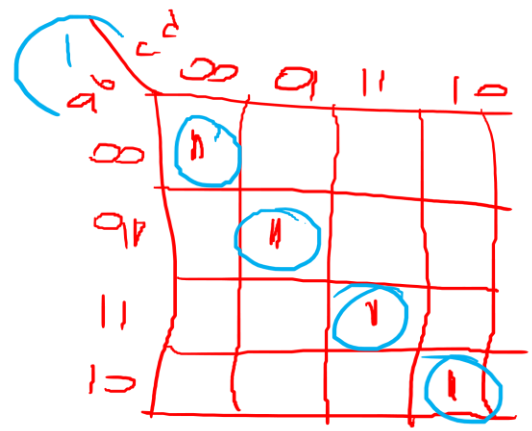
cd
ab
00
01
11
10

ab'd + b'cd'
+ bd



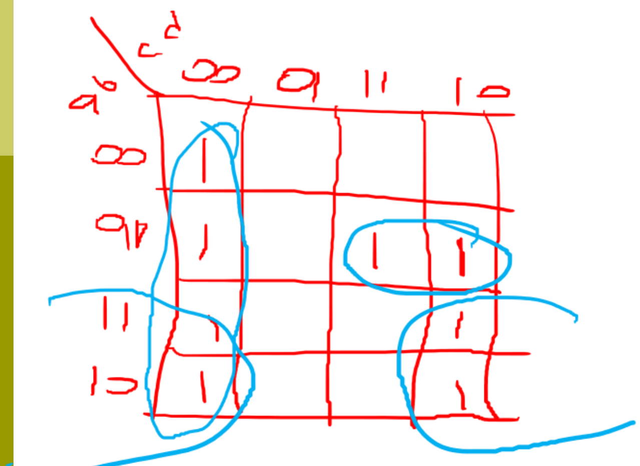
cd
ab
00
01
11
10

= ?



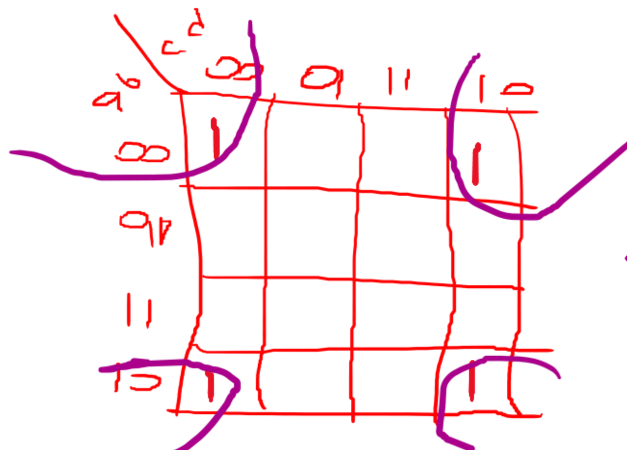
cd
ab
00
01
11
10

= ?



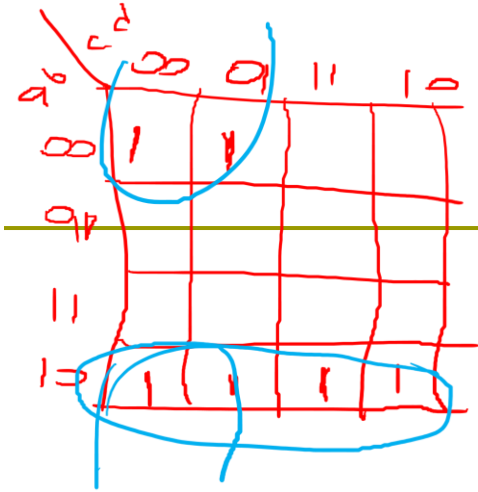
cd
ab
00
01
11
10

= ?

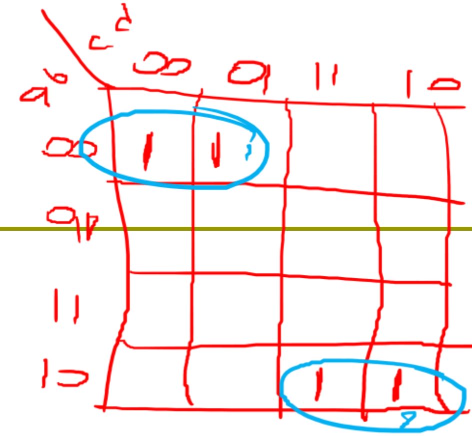


cd
ab
00
01
11
10

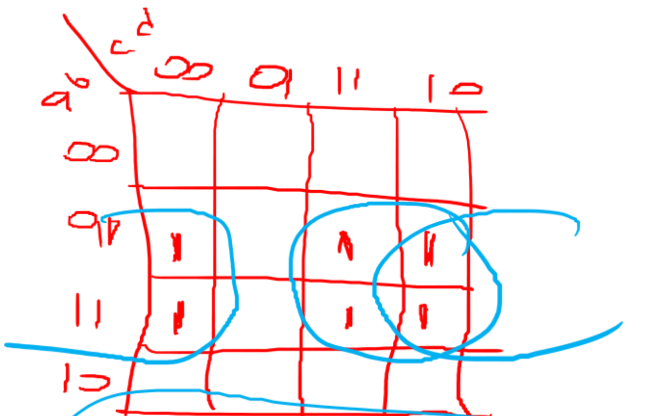
= b'd



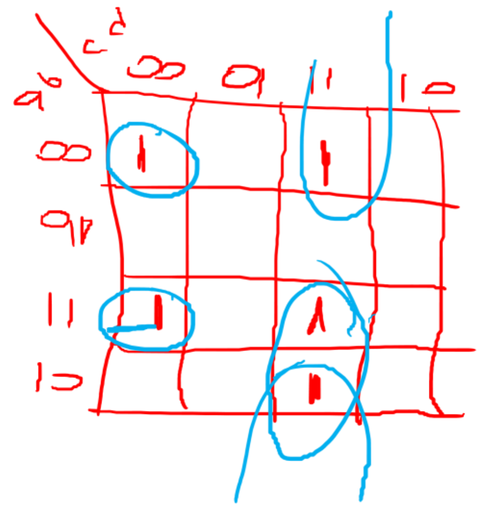
= ?



$a'b'c' + ab'c$



$f: bd' + bc$



= ?

Karnaugh diyagramları

https://youtu.be/zFPAuskKETg

https://youtu.be/gEFyd7aWHok

https://youtu.be/BJIN7fZc2SU

https://youtu.be/PSCtOXoFmGYhttps://youtu.be/diwmhcsljJA
https://youtu.be/GgazfgKMAZE