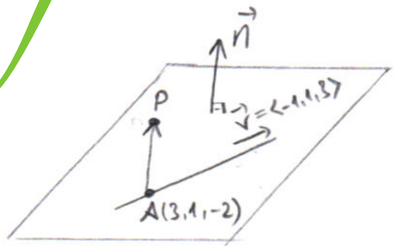
MAT1072 / MATEMATİK 2

Doğru / Düzlem / Vektörel Fonksiyonlar

$(3,1,-2)$

1) $P(3,-1,0)$ noktasından geçen ve $x=3-t$, $y=1+t$, $z=-2+3t$ doğrusunu içeren düzlemin denklemini bulunuz.

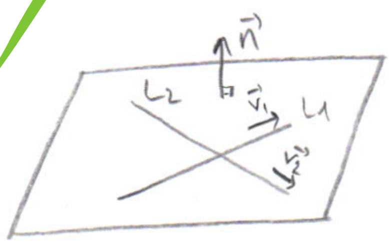


$$\vec{n}=\vec{AP}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\langle \underset{A}{-8},\underset{B}{-2},\underset{C}{-2}\rangle$$

$$-8(x-3)-2(y+1)-2(z-0)=0$$

$$4x+y+z=11$$

2) $L_1:\ x=-1+t,\ y=2+t,\ z=1-t$ $\quad L_2:\ x=1-4s,\ y=1+2s,\ z=2-2s$ doğrularının belirlediği düzlemi bulunuz.



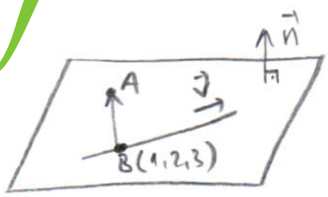
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=\langle 1,1,-1\rangle\\ \vec{v_2}=\langle -4,2,-2\rangle\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp\vec{v_1}\\ \vec{n}\perp\vec{v_2}\end{array}\right\}\quad \vec{n}\parallel\vec{v_1}\times\vec{v_2}$$

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -2\end{vmatrix}=\langle \underset{A}{0},\underset{B}{6},\underset{C}{6}\rangle$$

$(-1,2,1)$ düzlem üzerinde bir nokta $\Rightarrow 6(y-2)+6(z-1)=0 \Rightarrow 6y+6z=18$

3) $A(1,6,-4)$ noktasından geçen ve $\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=2-3t\\ z=3-t\end{array}\right\}$ doğrusunu içeren düzlemin denklemini bulunuz.

$(1,2,3)$ $\qquad v=(2,-3,-1)$



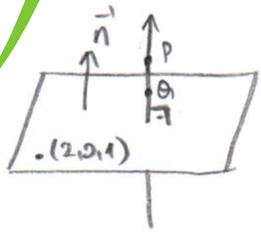
$$\vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$$

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & 7\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\langle 25,14,8\rangle$$

$$25(x-1)+14(y-6)+8(z+4)=0$$

$$25x+14y+8z=77$$

4) $P(1,1,0)$ ve $Q(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan ve $(2,0,1)$ den geçen düzlemin denklemini bulunuz



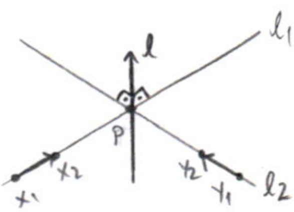
$\vec{n} = \vec{PQ} = \langle 3,-2,-2 \rangle \Rightarrow 3(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$

$3x-2y-2z=4$

5) $X_1(1,4,2)$ ve $X_2(1,5,3)$ noktalarından geçen l_1 doğrusu ile $Y_1(3,1,5)$ ve $Y_2(4,0,7)$ den geçen l_2 doğrusu bir P noktasında kesişmektedir.

a) P noktasını bulunuz.

b) Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem P den geçsin hem de l_1 ve l_2'ye dik olsun.



a) $l_1 : \vec{X_1X_2} = \langle \underset{a}{0}, \underset{b}{1}, \underset{c}{1} \rangle$ $\quad X_1(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{4}, \underset{z_0}{2})$ $\quad l_1 : \begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=2+t \end{cases}$

$l_2 : \vec{Y_1Y_2} = \langle 1,-1,2 \rangle$ $\quad Y_1(3,1,5)$ $\quad l_2 : \begin{cases} x=3+s \\ y=1-s \\ z=5+2s \end{cases}$

$P : l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{array}{l} 3+s=1 \Rightarrow s=-2 \\ 1-s=4+t \Rightarrow t=-1 \\ 5+2s=2+t \ \checkmark \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array} \Rightarrow P(1,3,1)$

b) $\left.\begin{array}{l} l \perp l_1 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{v_1} \\ l \perp l_2 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{v_2} \end{array}\right\} \vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \langle \underset{a}{3}, \underset{b}{1}, \underset{c}{-1} \rangle$ $\quad P(1,3,1)$

$l : \begin{cases} x=1+3t \\ y=3+t \\ z=1-t \end{cases}$

6) $x+2y+3z=5$ düzleminin $x-2y+z=3$ düzlemine dik olup olmadığını araştırınız.

$x+2y+3z=5 \ \downarrow \ \vec{n_1} = \langle 1,2,3 \rangle$ $\qquad x-2y+z=3 \ \downarrow \ \vec{n_2} = \langle 1,-2,1 \rangle$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1-4+3=0$ olduğundan düzlemler diktir.

7) $x-2y+5z=1$ düzleminin $x=2-t$, $y=1+2t$, $z=t-1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.

Doğrunun yön vektörü : $\vec{v}=\langle -1,2,1\rangle$

Düzlemin normal vektörü : $\vec{n}=\langle 1,-2,5\rangle$

$\Big\}$ $\vec{v}\cdot\vec{n}=-1-4+5=0 \Rightarrow$ paraleldir.

8) $x+y=1$ ve $2x+y-2z=2$ düzlemleri veriliyor.

a) Düzlemlerin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini,

b) " " doğrusuna dik olan ve $P(3,1,-1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

a) $x+y=1 \Rightarrow \vec{n_1}=\langle 1,1,0\rangle$

$2x+y-2z=2 \Rightarrow \vec{n_2}=\langle 2,1,-2\rangle$

$$\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\langle -2,2,-1\rangle$$

$z=0 \Rightarrow \begin{matrix}x+y=1\\ 2x+y=2\end{matrix}\Big\}\ \begin{matrix}x=1\\ y=0\end{matrix} \Rightarrow A(1,0,0)$

$$l:\begin{cases}x=1-2t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$$

b) $\vec{PP_0}=(x-3)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z+1)\vec{k}$

$\vec{v}\cdot(\vec{PP_0})=0 \Rightarrow -2(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0 \Rightarrow -2x+2y-z=-3$

9) $P(1,2,1)$ ve $Q(2,0,1)$ den geçen ve $3x-y+z=6$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulun.

$3x-y+z=6 \Rightarrow \vec{n_1}=\langle 3,-1,1\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n_1}$

$\vec{PQ}=\langle 1,-2,0\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{PQ}$

$$\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\langle \underset{A}{-2},\underset{B}{-1},\underset{C}{5}\rangle$$

$P(1,2,1) \Rightarrow -2(x-1)-(y-2)+5(z-1)=0 \Rightarrow 2x+y-5z=-1$

10) $x+\lambda y+2z=3$ ve $\lambda x+y-2z=1$ düzlemleri paralel ise $\lambda=?$

$\vec{n_1}=\langle 1,\lambda,2\rangle$

$\vec{n_2}=\langle \lambda,y,-2\rangle$

$\Big\}$ $\vec{n_1}\parallel\vec{n_2} \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{1}=\dfrac{2}{-2}=-1 \Rightarrow \lambda=-1$

VEKTÖREL FONKSİYONLAR

11) Uzayda zamana bağlı olarak hareket eden bir cismin konum fonksiyonu $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\sqrt{3}\,\vec{k}$ ile veriliyor. Cismin konum ile ivme vektörü arasındaki açı ne zaman $\frac{2\pi}{3}$ olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle -\sin t, \cos t, \sqrt{3} \rangle$$

2 sint.cost

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{|\vec{r}||\vec{a}|} = \frac{-\cos^2 t - \sin^2 t}{\sqrt{1+3t^2}\cdot\sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+3t^2}}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1+3t^2}} \Rightarrow 1+3t^2 = 4 \Rightarrow t = \mp 1 \Rightarrow t = 1$$

12) $\vec{r}(t) = (1+t^2)^{3/2}\,\vec{i} + (3-t^2)^{3/2}\,\vec{j} + (4t^2)\,\vec{k}$ eğrisinin $-1 \leq t \leq 1$ aralığında kalan kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

$$r'(t) = \langle 3t\sqrt{1+t^2}, -3t\sqrt{3-t^2}, 8t \rangle$$

$$L = \int_{-1}^{1} |r'(t)|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{9t^2(1+t^2) + 9t^2(3-t^2) + 64t^2} = \int_{-1}^{1} 10|t| = 10\int_{-1}^{0} -t\,dt + 10\int_{0}^{1} t\,dt$$

$$= 5\left(-t^2\Big|_{-1}^{0} + t^2\Big|_{0}^{1}\right) = 10$$

13) $\vec{r}(t) = at^2\,\vec{i} + bt\,\vec{j} + c\ln t\,\vec{k}$ eğrisinin $(a,b,c \in \mathbb{R})$ $1 \leq t \leq T$ aralığında $b^2 = 4ac$ iken kalan uzunluğunu hesaplayınız.

$$L = \int_{1}^{T} |r'(t)| = \int_{1}^{T} \left|2at\,\vec{i} + b\,\vec{j} + \frac{c}{t}\,\vec{k}\right| dt = \int_{1}^{T} \sqrt{4a^2t^2 + b^2 + \frac{c^2}{t^2}}\,dt$$

$$\overset{b^2=4ac}{=} \int_{1}^{T} \sqrt{4a^2t^2 + 4ac + \frac{c^2}{t^2}}\,dt = \int_{1}^{T} \left(2at + \frac{c}{t}\right) dt = at^2 + c\ln t\Big|_{1}^{T}$$

$$= aT^2 + c\ln T - a = a(T^2-1) + c\ln T$$

14) Uzayda zamana bağlı hareket eden bir parçacığın hız vektörü $\vec{v}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + 2t\vec{k}$ olsun.

i) $t=1$ de hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı bulun.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 2\vec{k} \quad \xRightarrow{t=1} \quad \vec{a}(1) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}(1)| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\vec{v}(1) = 2\vec{i} + 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{v}(1)| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}(1)\vec{v}(1)}{|\vec{a}(1)||\vec{v}(1)|} = \frac{2+4}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ii) Parçacık $t=0$ da $(1,-1,2)$ noktasında ise $\vec{r}(t)$ konum vektörünü bulun.

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\vec{j} + t^2\vec{k} + c$$

$$\vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = c$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t - 1\right)\vec{j} + (t^2+2)\vec{k}$$

15) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \sqrt{2}t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$ olsun.

i) $\vec{r}(t)$ eğrisinin $(1,0,1)$ noktasından $(e, \sqrt{2}, \frac{1}{e})$ noktasına kadar eğri uzunluğunu hesaplayınız.

$$\vec{r}\,'(t) = e^t\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - e^{-t}\vec{k} \Rightarrow |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

$x = e^t$, $y = \sqrt{2}t$, $z = e^{-t}$

$(1,0,1)$ için $\left.\begin{matrix} 1 = e^t \\ 0 = \sqrt{2}t \\ 1 = e^{-t} \end{matrix}\right\} t=0$ $\qquad$ $(e, \sqrt{2}, \frac{1}{e})$ için $\left.\begin{matrix} e = e^t \\ \sqrt{2} = \sqrt{2}t \\ \frac{1}{e} = e^{-t} \end{matrix}\right\} t=1$

$$L = \int_0^1 |r'(t)|dt = \int_0^1 (e^t - e^{-t})dt = e^t - e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{e}$$

ii) $\vec{r}(t)$ eğrisinin $t=0$ daki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t)\big|_{t=0} = (e^t\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - e^{-t}\vec{k})\big|_{t=0} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$$: $t=0$ daki teğet doğruya paralel vektör

$$t=0 \Rightarrow (1,0,1) \Rightarrow l: \begin{cases} x = 1+t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 1-t \end{cases}$$

16) $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + (t^2 - \cos t)\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$ eğrisinin $t=0$ daki teğet doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Teğet vektör: $\vec{r}\,'(t) = \cos t\,\vec{i} + (2t + \sin t)\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$

$\vec{r}\,'(0) = \vec{i} + \vec{k} = \langle \underset{a}{1}, \underset{b}{0}, \underset{c}{1} \rangle$ = $t=0$ daki vektör $\underbrace{\text{teğet doğruya}}_{\ell}$ paralel

$t=0$ için, $x = \sin t \Rightarrow x_0 = 0$

$y = t^2 - \cos t \Rightarrow y_0 = -1$

$z = e^t \Rightarrow z_0 = 1$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \Rightarrow \ell = \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

17) $\vec{r}(t) = \ln t\,\vec{i} + \dfrac{t-1}{t+2}\,\vec{j} + t\ln t\,\vec{k}$ eğrisinin $t=1$ deki teğet doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Teğet vektör: $\vec{r}\,'(t) = \dfrac{1}{t}\,\vec{i} + \dfrac{t+2-t+1}{(t+2)^2}\,\vec{j} + (\ln t + 1)\,\vec{k}$

$\vec{r}\,'(1) = \vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}$ = $t=1$ deki $\overbrace{\text{teğet doğruya}}^{\ell}$ paralel vektör

$= \langle 1, 1/3, 1 \rangle$

$t=1$ için $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$

$$\Rightarrow \ell = \begin{cases} x = t \\ y = t/3 \\ z = t \end{cases}$$

18) $A(t) = (5t-6)\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + 9\,\vec{k}$ ve $B(t) = t^2\,\vec{i} + (2t+3)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ zamana bağlı hareket eden A ve B cisimlerinin vektörel konum fonksiyonları olsun.

a) A ve B cisimlerinin çarpıştıkları anı ve bu andaki konumlarını bulun.

b) Çarpışma anında A ve B cisimleri arasındaki açıyı bulun.

a) $A(t) = B(t) \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5t-6 &= t^2 \\ t^2 &= 2t+3 \\ 9 &= t^2 \end{aligned}\right\}$ $\cancel{t=-3}$, $t = 3$ $\Rightarrow A(3) = B(3) = 9\vec{i} + 9\vec{j} + 9\vec{k}$

b) Teğetlerin arasındaki açı = teğetlerin arasındaki açı

$$\left.\begin{aligned} A'(t) &= 5\vec{i} + 2t\vec{j} \\ B'(t) &= 2t\vec{i} + 2\vec{j} + 2t\vec{k} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \vec{v}_1 &= A'(3) = \langle 5, 6 \rangle \\ \vec{v}_2 &= B'(3) = \langle 6, 2, 6 \rangle \end{aligned}\right\} \cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{30+12}{\sqrt{61}\,\sqrt{76}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{42}{\sqrt{61 \cdot 76}}\right)$$