VERİ YAPILARI VE ALGORİTMALAR

BLM2512 Gr.2

2020-2021 Bahar Yarıyılı (Uzaktan Eğitim)

Dr.Öğr.Üyesi Göksel Biricik

GRAFLAR

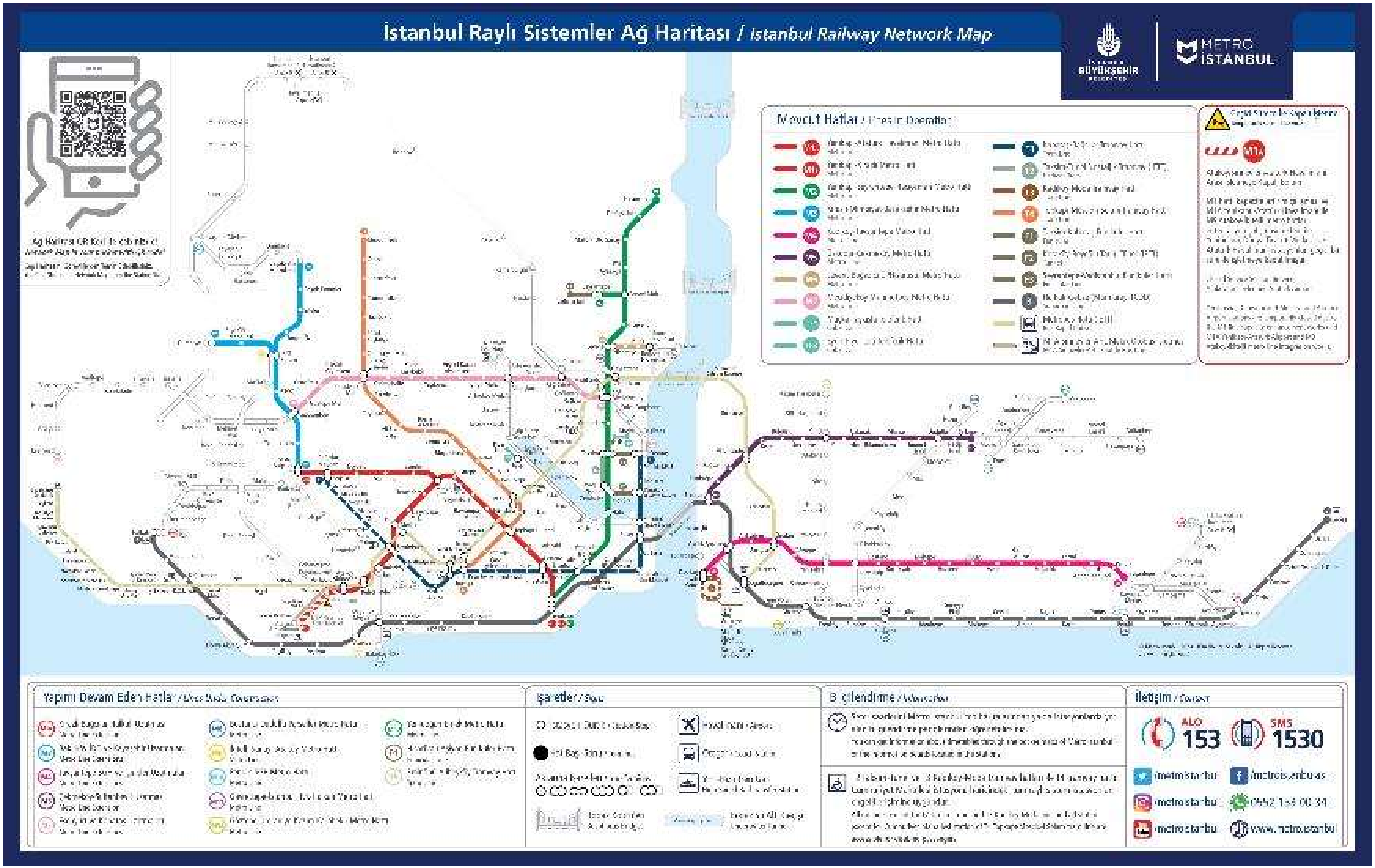
Çizgeler

Graflar

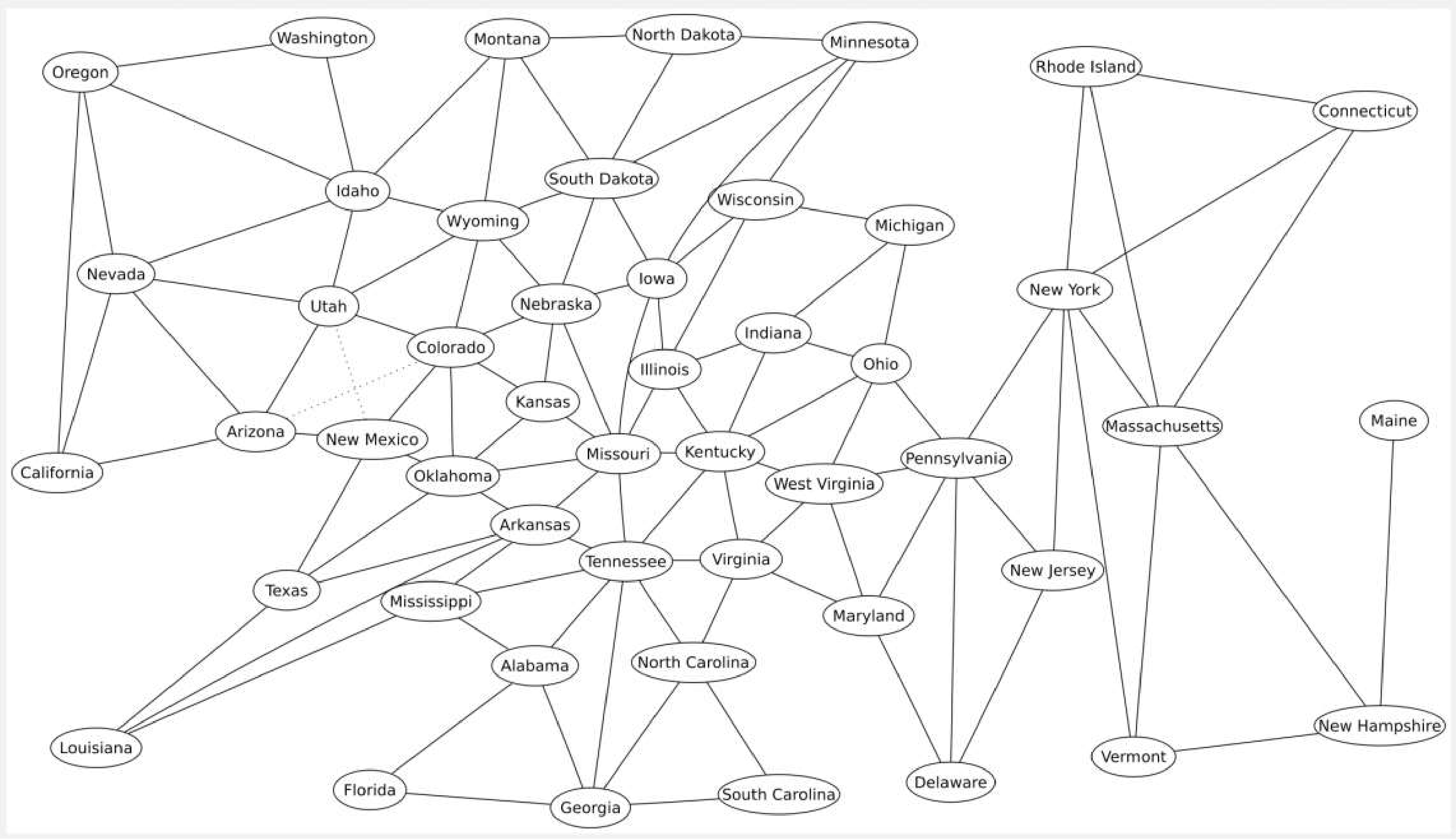
- Birbirine bağlı elemanlar kümesine graf adı verilir.
- G(V,E)
-         V (vertex) Düğüm, |V| Düğüm sayısı
-         E (edge) Kenar, |E| Kenar sayısı

- Karmaşıklık gösteriminde, O(VE) → O(|V||E|)

İstanbul Raylı Sistemleri

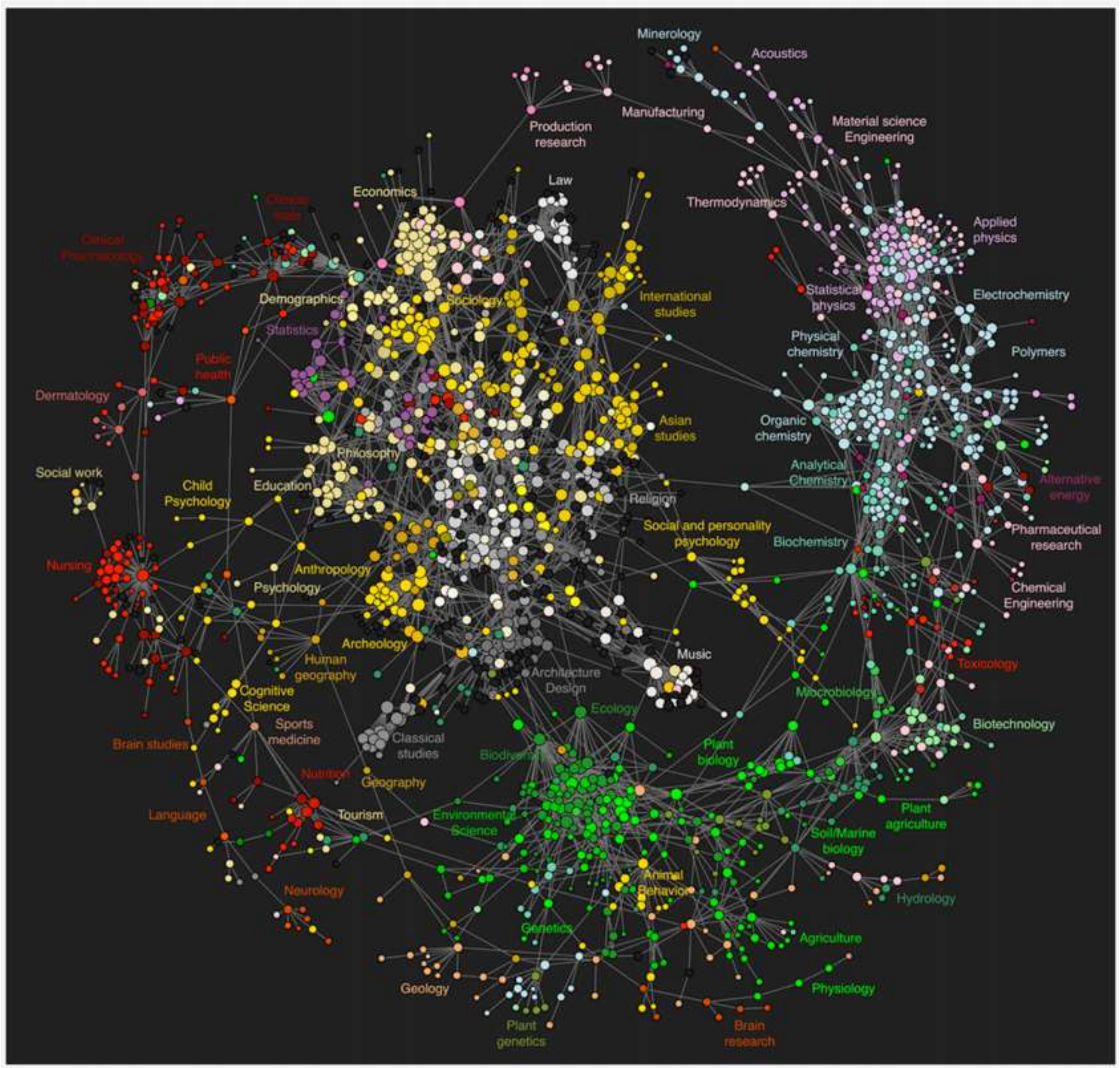


ABD Eyaletleri Sınır Komşulukları

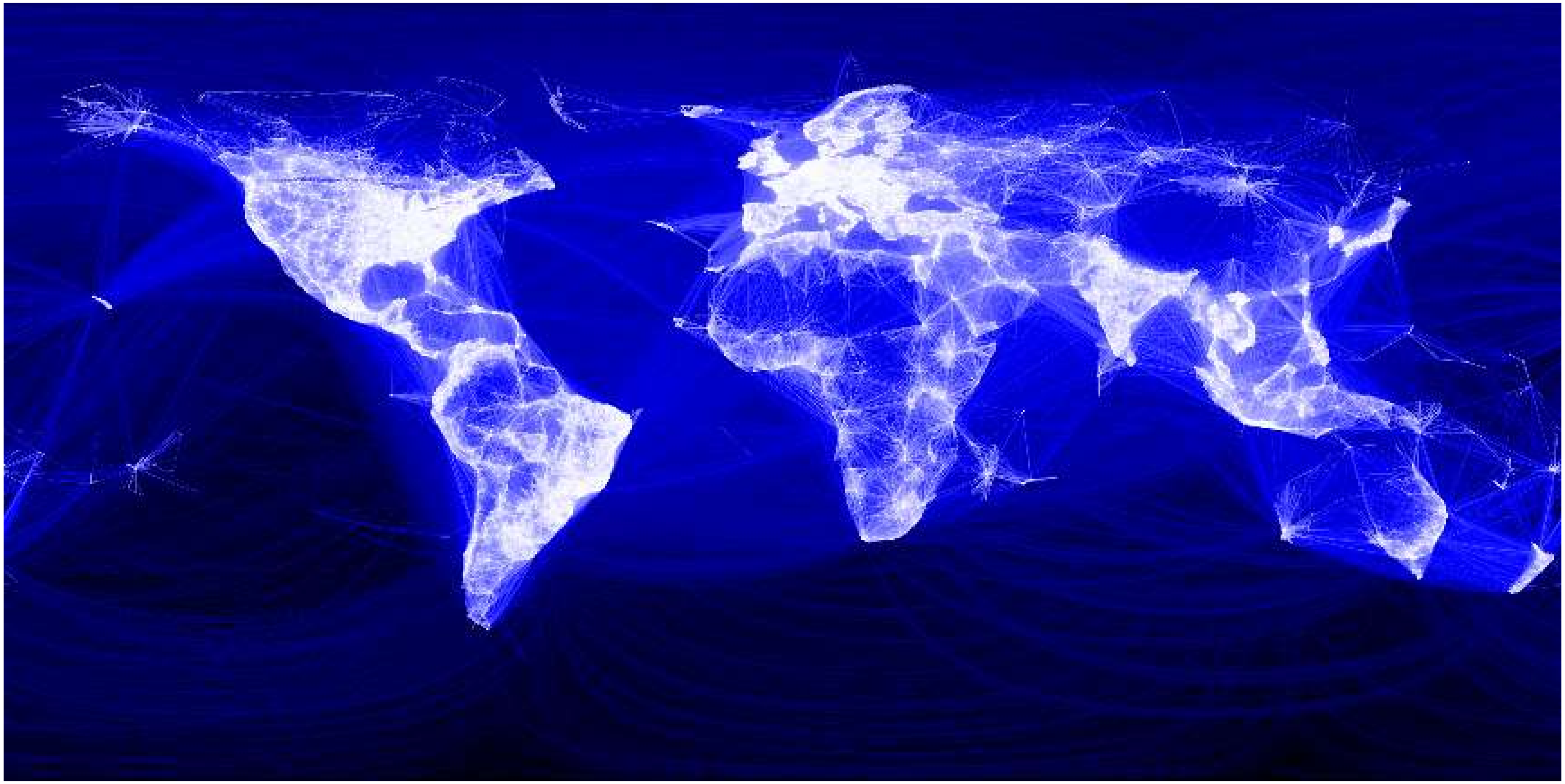


Protein-Protein Etkileşim Ağı

Bilim Konuları Tıklama Bağlantıları



FaceBook Arkadaşlık Bağlantıları

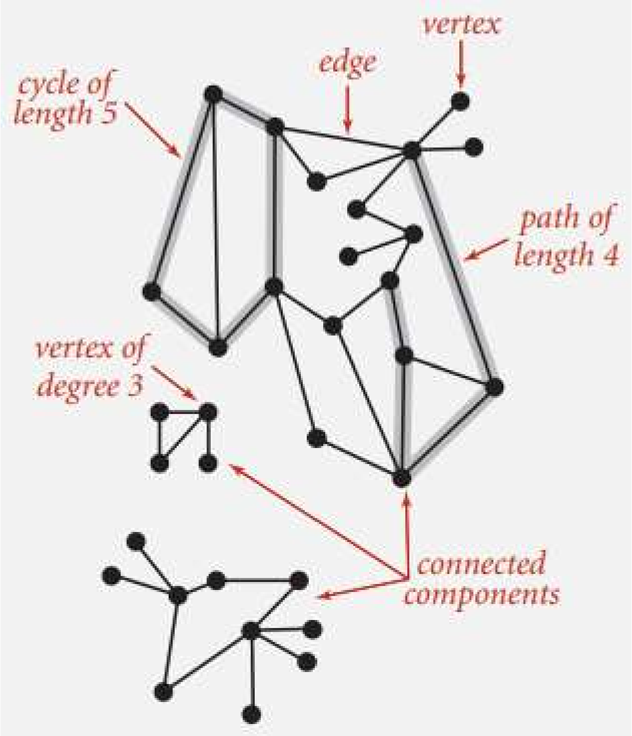


Graf Kullanım Alanları

- **Haritalar**:
  - Beşiktaş-Davutpaşa arası en kısa yol nedir? (Shortest Path)
  - Beşiktaş-Davutpaşa arası en hızlı yol nedir? (Max Flow)
- **Web İçeriği**: Arama Motorları
- **Devreler**: Kısa devre var mı? Bağlantılar çaprazlamadan gerçeklenebiliyor mu?
- **Zaman Planlaması/Tarife**: Birbiri ile bağlı işler sırası, kısıtlar altında en kısa sürede nasıl tamamlanır?
- **Ticaret**: Alıcı-Satıcı-Ürün Ağı
- **Eşleştirme**: Öğrenci – Kulüp/Staj eşleştirme
- **Bilgisayar Ağları**
- **Yazılım**: Derleyicilerin modüller arası statik/dinamik çağrıları, kaynakları modellemesi
- **Sosyal ağlar**: Anomali, kanaat önderi, bot ağı…

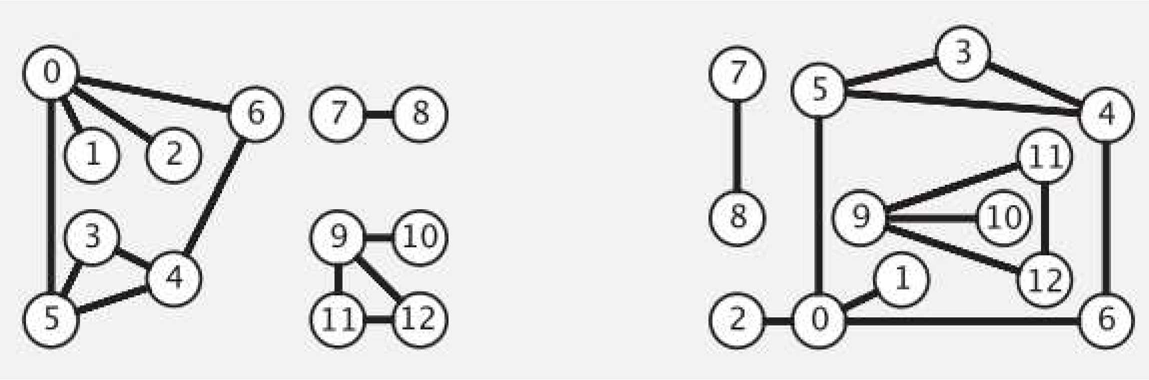
Graf Terminolojisi

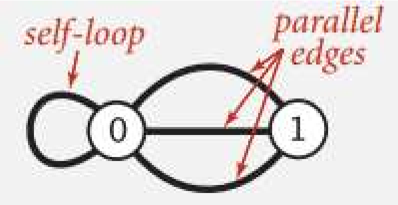
- **Path** (Yol): Kenarlarla bağlanmış olan düğümler silsilesi.
- **Cycle** (Çevrim): İlk ve Son düğümü aynı olan yollar.
- İki düğüm arasında bir yol varsa, bu iki düğüm birbirine bağlıdır (**connected**).



Graf Tipleri

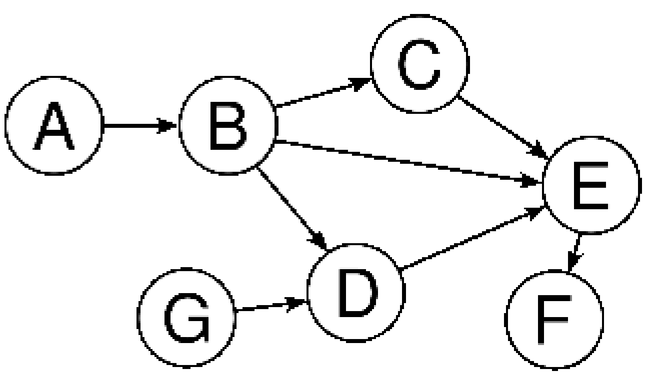
- Yönsüz Graf (Undirected)
- Yönlü Graf (Digraph)
- Kenar Ağırlıklı Yönsüz Graf
- Kenar Ağırlıklı Yönlü Graf

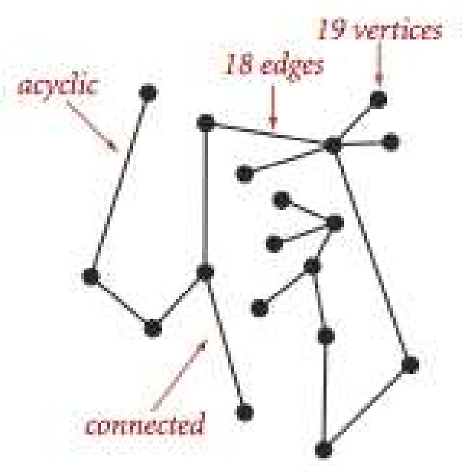




Acyclic (Çevrimsiz) Graf

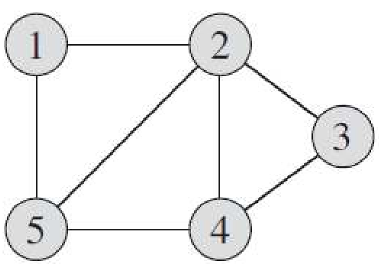
- Kapalı Döngü içermeyen graflar.
- 5 şart doğru ise ağaçtır:
  - V-1 kenar var, döngü yok
  - V-1 kenar var, bileşenleri bağlı
  - Herhangi bir kenarı kaldırmak, ağacı keser
  - Çevrimsizdir, bir kenar eklemek cyclic yapar
  - G'nin her kenar çiftini basit bir yol bağlar.

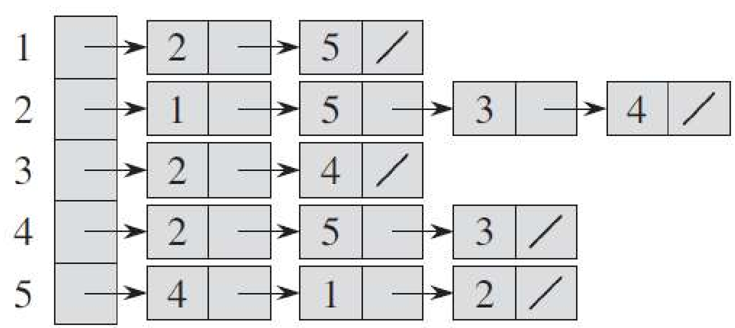




Graf Gösterimi (Graph Representation)

- Komşuluk Listesi (Adjacency List)
  - Seyrek (Sparse) graflar için uygun
- Komşuluk Matrisi (Adjacency Matrix)
  - V^2 yer kaplar
  - $A_{ij} = 1$, if $i,j \in E$; 0 otherwise
  - $A^T = A$
  - 1 bit ile tutabiliriz.

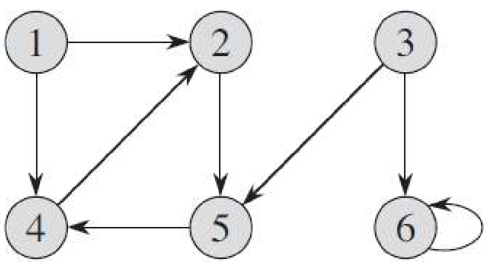


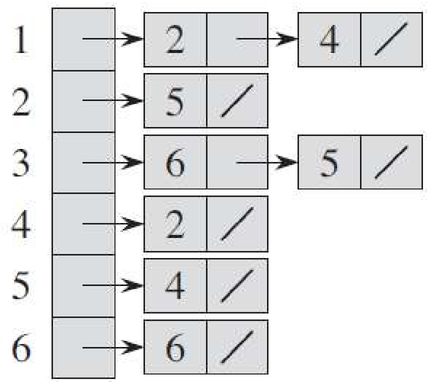


$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Graf Gösterimi (Graph Representation)

- Yönlü grafta A^T != A





$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

- Ağırlıklı (weighted) graflarda matriste değerler yer alır.
- Bağlantı var mı?
  - Listede yavaş O(degree(V))
  - Matriste hızlı O(1)

GRAF ARAMA YÖNTEMLERİ

BFS, DFS

Önce Genişlemesine Arama (Breadth First Search, BFS)

- En basit arama yöntemlerinden biridir.
- Pek çok algoritma BFS'ye benzer mantık kullanır.
  - Prim MST, Dijkstra SP
- Girdi: G(V,E), yönlü ya da yönsüz, kaynak düğüm S$\in$V
- S'den ulaşılabilen tüm düğümleri «keşfetmeye» çalışır.
  - «Breadth-First Tree» (S kökünden erişilebilen tüm yollar) yaratır.
  - S'den erişilebilen v düğümlerine giden en kısa yolları içerir.
- K+1 uzaklığa geçmeden önce, K uzaklıktaki tüm yollar bulunur.

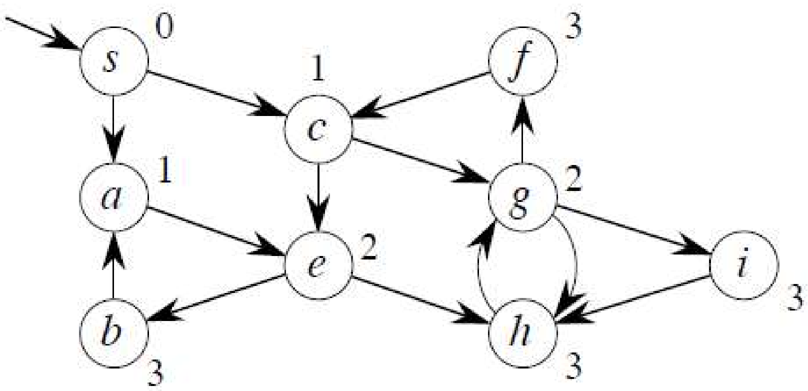
Önce Genişlemesine Arama (Breadth First Search, BFS)

- Fikir:
  - S’ten bir dalga gönder.
  - İlk önce S’ten 1 uzaklıktakilere çarpar.
  - Onlardan, 2 uzaklıktakilere çarpar.
  - …
- Dalganın önünde kim olacak?
- FIFO queue
  - Dalga v’ye çarptı ve daha v’yi terketmediyse, $v \in Q$.

BFS Algoritması

```
BFS(V, E, s)
for each u ∈ V −{s}
   do d[u]←∞
d[s] ← 0
Q ← ∅
ENQUEUE(Q, s)
while Q != ∅
   do u ← DEQUEUE(Q)
      for each v ∈ Adj[u]
         do if d[v]=∞
            then d[v] ← d[u] + 1
                 ENQUEUE(Q, v)
```

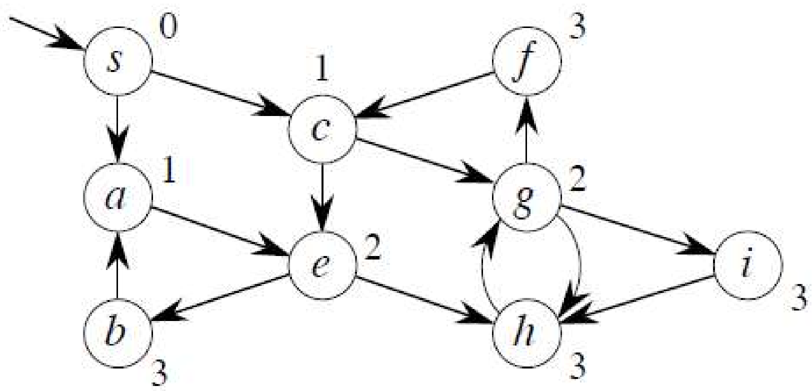
BFS Algoritması



- Q = *NULL*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

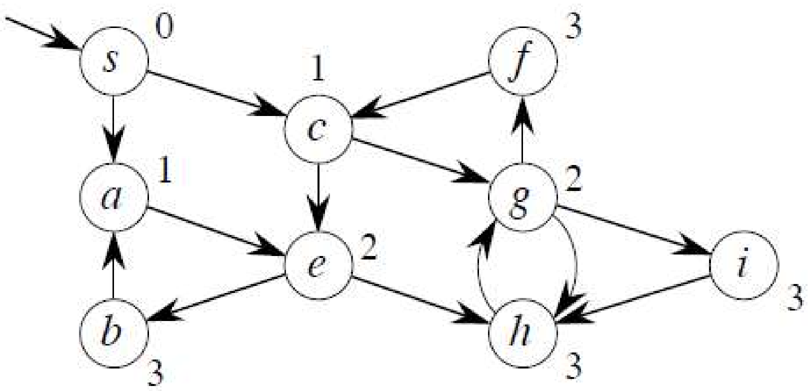
BFS Algoritması



- Q = {*s*}
- *u=s [a,c] d[a]=d[s]+1, d[c]=d[s]+1*
- *Q={a,c}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	∞	1	∞	∞	∞	∞	∞	0

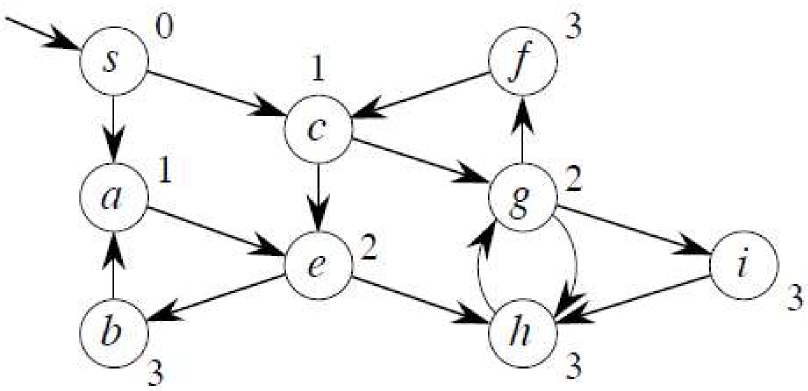
BFS Algoritması



- Q = {*a*,*c*}
- *u=a [e] d[e]=d[a]+1*
- *Q={c,e}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	∞	1	2	∞	∞	∞	∞	0

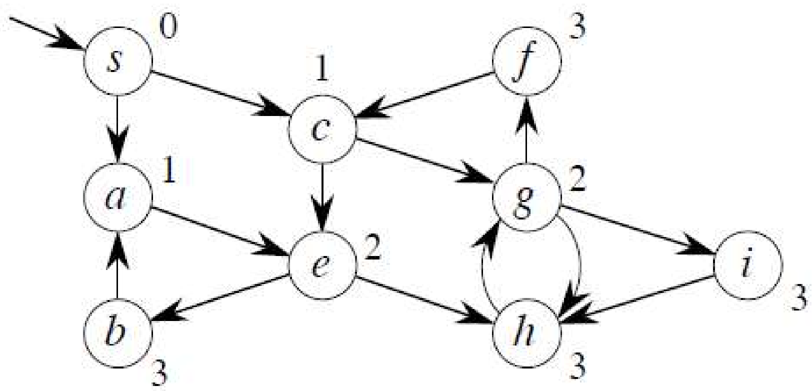
BFS Algoritması



- Q = {*c*,*e*}
- *u=c [e,g] d[e]!=∞, d[g]=d[c]+1*
- *Q={e,g}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	∞	1	2	∞	2	∞	∞	0

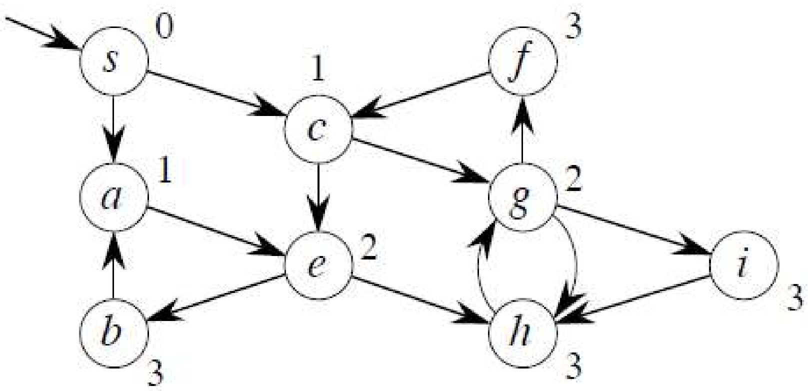
BFS Algoritması



- Q = {*e,g*}
- *u=e [b,h] d[b]=d[e]+1, d[h]=d[e]+1*
- *Q={g,b,h}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	∞	2	3	∞	0

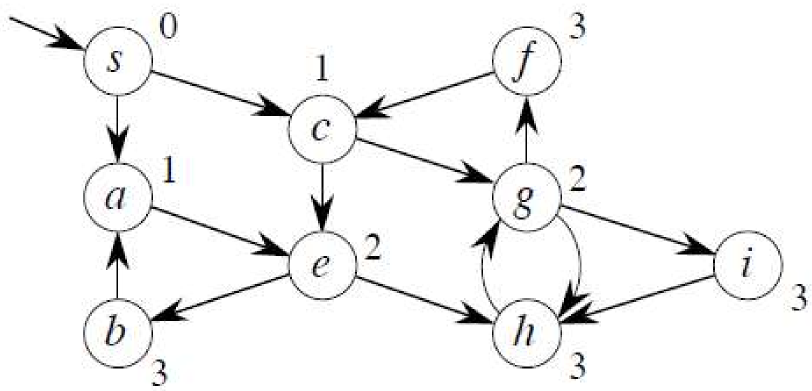
BFS Algoritması



- Q = {*g,b,h*}
- *u=g [f,h,i] d[f]=d[g]+1, d[h]!=∞, d[i]=d[g]+1*
- *Q={b,h,f,i}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	3	2	3	3	0

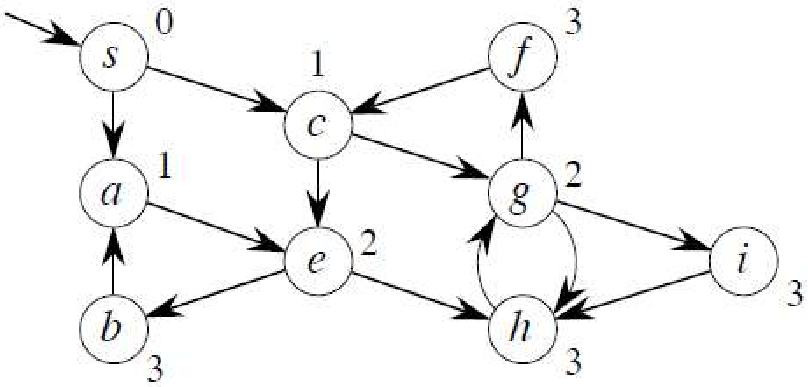
BFS Algoritması



- Q = {*b,h,f,i*}
- *u=b [a] d[a]!=∞*
- *Q={h,f,i}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	3	2	3	3	0

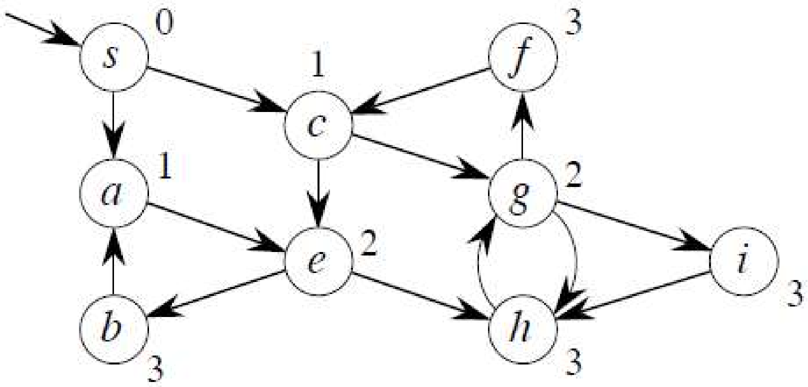
BFS Algoritması



- Q = {*h,f,i*}
- *u=h [g] d[g]!=∞*
- *Q={f,i}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	3	2	3	3	0

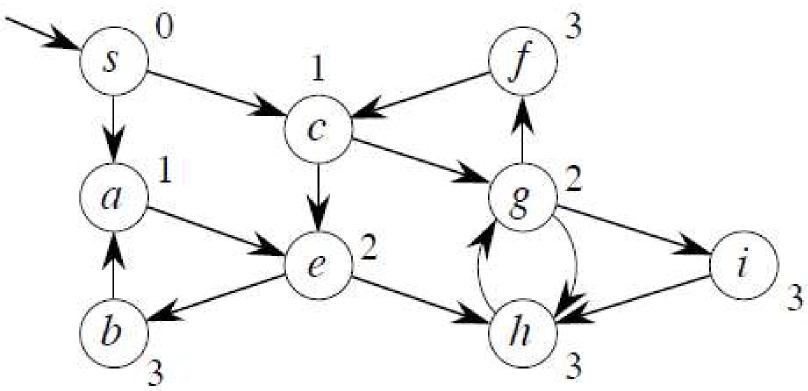
BFS Algoritması



- Q = {*f,i*}
- *u=f [c] d[c]!=∞*
- *Q={i}*

	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	3	2	3	3	0

BFS Algoritması



- Q = {*i*}
- *u=i [h] d[h]!=∞*
- *Q={ }* ➔ *stop*

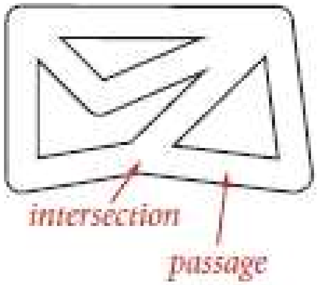
	a	b	c	e	f	g	h	i	S
d	1	3	1	2	3	2	3	3	0

BFS Karmaşıklık Analizi

- Enqueue / Dequeue O(1)
- Her düğüm en fazla 1 kere enqueue, toplam O(V)
- Her düğüm en fazla 1 kere dequeue ve o zaman (u,v) kontrolü: O(E)

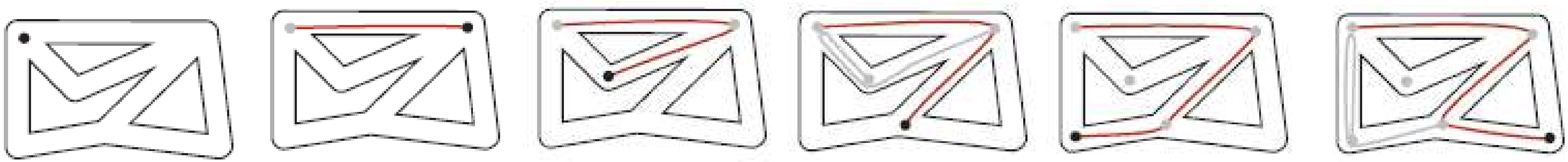
- O(V+E) (+ init O(V))
- Komşuluk listesi gösterimi boyutunda lineer zamanda çalışır.

Tremaux Exploration



- Bir labirentin girişindeyiz. Elimizde bir yumak ip var. Kaybolmadan labirentten nasıl çıkarız?

1. İşaretsiz bir geçide ip döşe
2. İlk kez geçtiğin tüm geçit ve kesişimleri işaretle
3. İşaretli bir kesişime gelirsen, ip ile geri gel
4. Geri gelirken hiçbir işaretsiz kesişim kalmayana kadar adımları geri al.



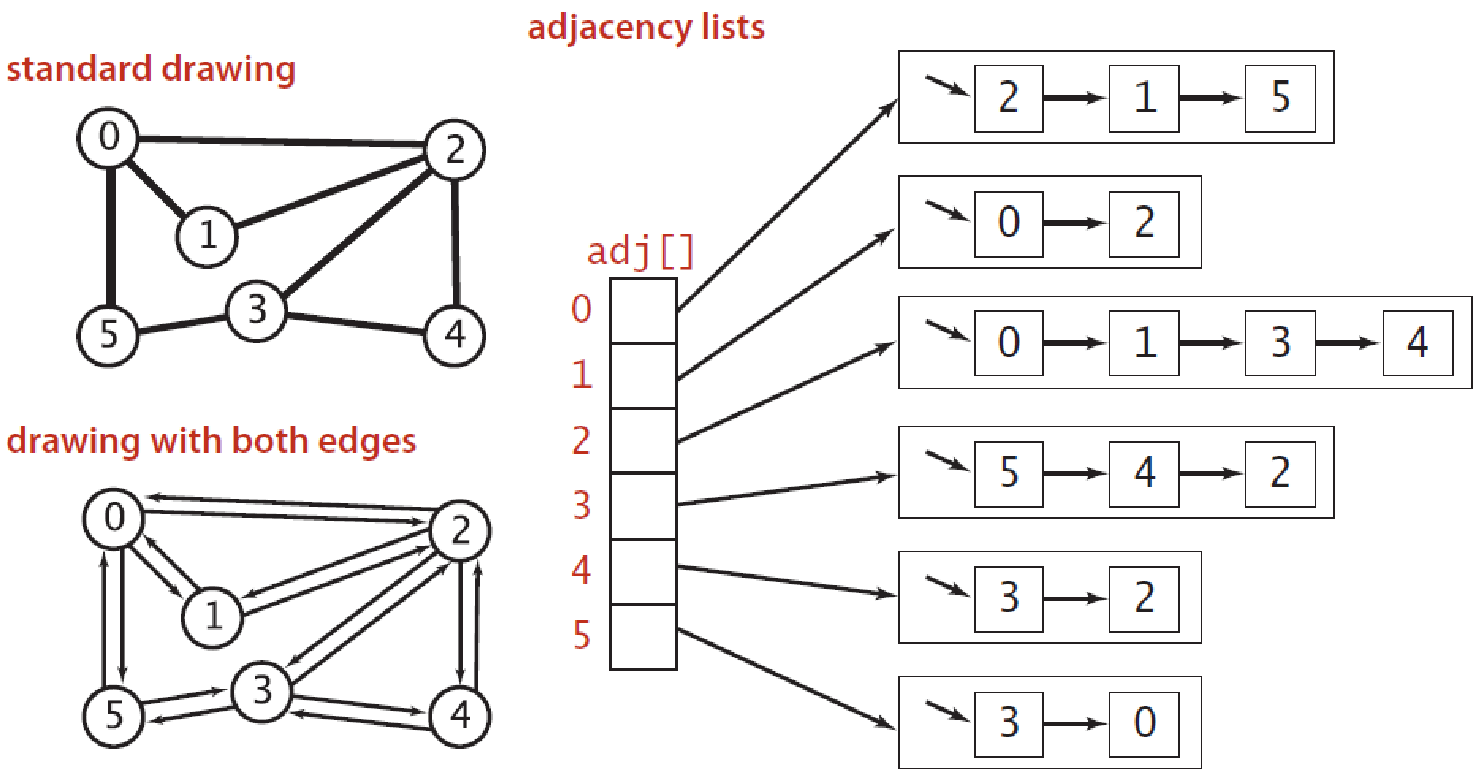
DFS de bu yönteme benzer. Hatta daha kolaydır ☺

Önce Derinlemesine Arama (Depth First Search, DFS)

- Düğümleri rekürsif olarak ziyaret et.
- Bir düğümü al, işaretle.
- Tüm (işaretsiz) komşularını rekürsif olarak ziyaret et.

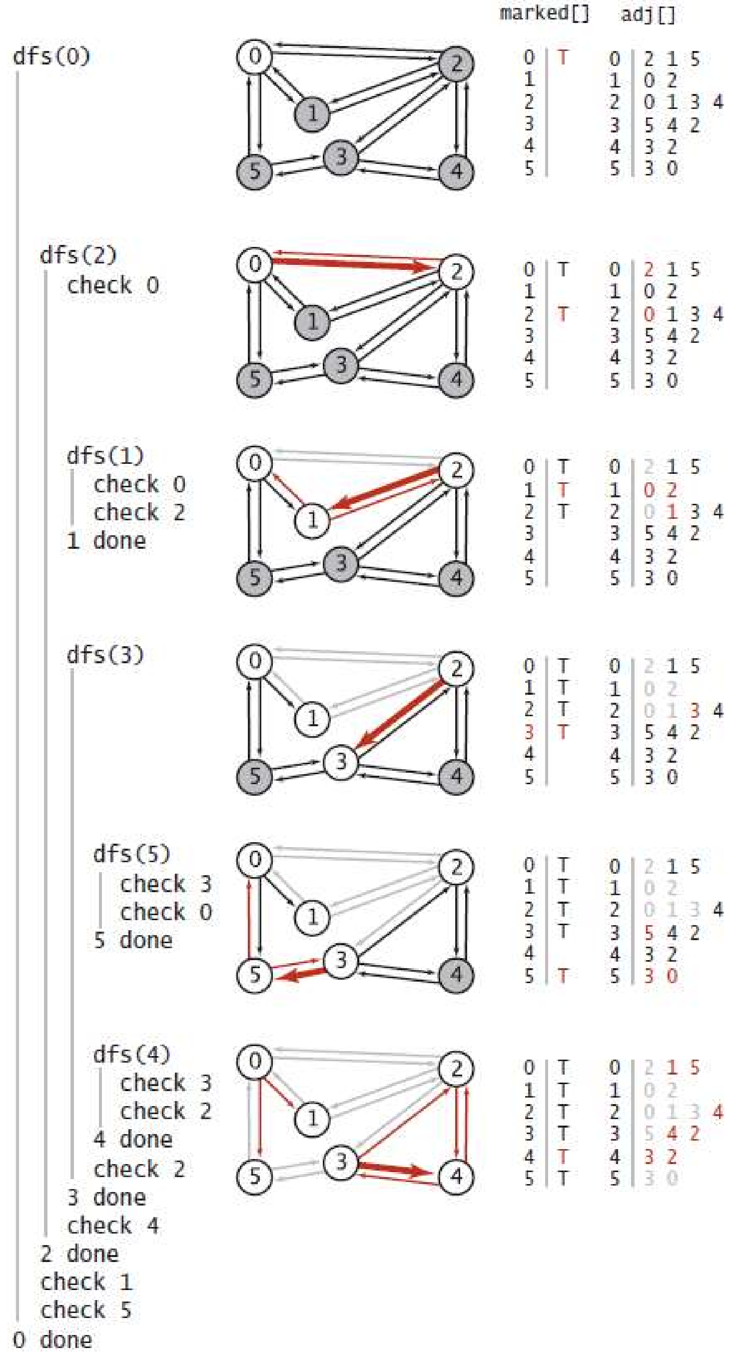
```
DepthFirstSearch(G,s)
   count=0;
   for each vertex u ∈ G.V
      marked[u]=FALSE
   dfs(G,s)

dfs(G,v)
   marked[v]=TRUE
   count++
   for each w ∈ G.adj[v]
      if (! marked[w])
         dfs(G,w)
```

DFS Algoritması



DFS Algoritması

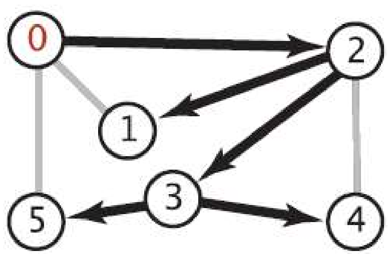
- 2, 0'ın ilk komşusu ve unmarked. Visit 2.
- 2'nin ilk komşusu 0 ve marked. Geç. Sıradaki komşu 1 ve unmarked. Rekürsif olarak işaretle ve visit 1.
- 1'in tüm komşuları [0,2] marked. Geri dön. 2'nin sıradaki komşusu 3'ü işaretle ve visit (unmarked).
- 3'ün ilk komşusu 5 ve unmarked. İşaretle ve Visit 5.
- 5'in tüm komşuları [3,0] marked. Geri dön. 3'ün sıradaki komşusu 4'ü işaretle ve visit (unmarked).
- 4'ün komşularını kontrol et, geri dön 3'ün kalan komşularını kontrol et, geri dön 2'nin kalan komşularını kontrol et, geri dön 0'ın kalan komşularını kontrol et.
- Tüm gezinti bitti.



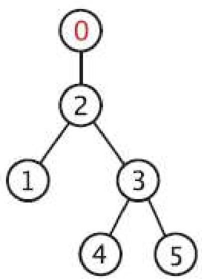
DFS ile neyi çözebiliriz?

- Tek kaynaktan nerelere gidebiliriz?
- Verilen 2 düğüm birbirine bağlı mıdır? ⇔ 2 düğüm arası yol var mıdır?

```
DepthFirstPaths(G,s)
    for each vertex u € G.V
      marked[u]=FALSE
      edgeTo[u] = 0;
   dfs(G,s)

dfs(G,v)
   marked[v]=TRUE
   for each w € G.adj[v]
      if (! marked[w])
         edgeTo[w]=v
         dfs(G,w)

pathTo(v)
   // path is a stack
   if (! marked[v]) return NULL
   for (x=v; x!=s; x=edgeTo[x])
      path.push(x)
   path.push(s)
   return path
```



edgeTo[]	
0	
1	2
2	0
3	2
4	3
5	3



x	path
5	5
3	3 5
2	2 3 5
0	0 2 3 5

MINIMUM SPANNING TREE

Asgari Tarama/Örtme Ağacı

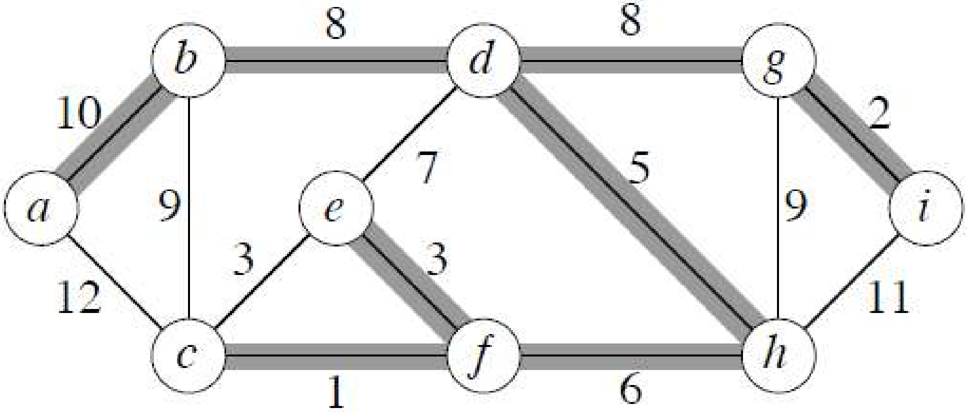
Minimum Spanning Tree

- Bir köyün muhtarısınız.
- Sorumluluğunuz gereği, köydeki tüm evleri birbirine bağlamanız gerek.
  - Bir yol parçası w ile 2 ev (u, v) bağlanabilir.
  - Bu yol parçasının yapım/tamir masrafı w(u,v)'dir.
- Hedefiniz,
  - Herkesi birbirine bağlı tutacak (bir evden diğer tüm evlere ulaşılabilecek)
  - Bunu minimum masraf ile yapacak

Yol ağını oluşturmaktır.

Minimum Spanning Tree

- Çözüm: Köyünüzü yönsüz graf olarak modelleyin. G=(V,E)
- Her (u,v) € E kenarı için bir **ağırlık** w(u,v) atayın.
- Öyle bir $\mathrm{T} \subseteq E$ bulun ki;
  - T tüm düğümleri birbirine bağlasın (tarasın/örtsün)
  - $w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u,v)$ Değeri asgaride kalsın.
- Tüm örten ağaçlar içerisinde ağırlıklarının toplamı en az olan ağaca asgari tarama ağacı (minimum spanning tree) adı verilir.



Minimum Spanning Tree

- G(V,E) grafımızda tanımlı $w:E \rightarrow \mathbb{R}$ ağırlık fonksiyonumuz olsun.
- G için tanımlı bir MST (min w) bulmak istiyoruz.
  - MST'nin |V|-1 kenarı olmalı.
  - Çevrim (cycle) içermemeli.
  - G için birden fazla MST bulunabilir.
- Kenarlardan oluşan bir A kümesi oluşturmalıyız.
- Boş küme ile başlayıp, A'ya kenar ekleyerek büyütürüz.
  - Döngü şartı: A, bir MST'nin alt kümesi olmalıdır.
- Bu durumda ancak **güvenli** kenarları kümeye eklemeliyiz.

- Her adımda bir stratejiye göre davranıp eylem gerçekleştiriyoruz. ➔ Greedy çözümler MST oluşturmak için uygun.

Generic MST Algoritması

GENERIC-MST(G,w)

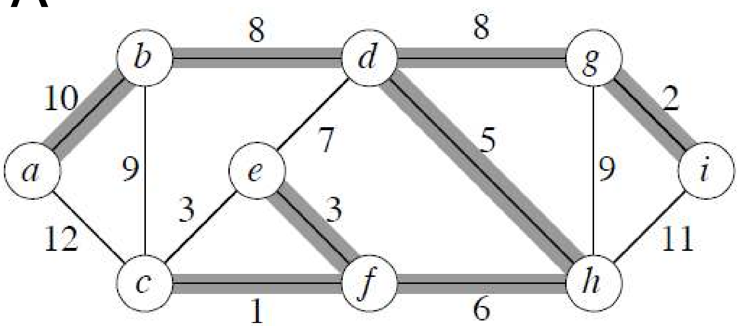
1 A = ∅;

2 **while** A does not form a spanning tree

3 find an edge (u,v) that is safe for A

4 A = A U {(u,v)}

5 **return** A



- Güvenli kenar nasıl bulunacak?
  - (c,f) kenarı en düşük maliyetli olan. A için güvenli mi?
  - O ana kadar oluşan ağaçta c ∈ S olsun ama f düğümü yok (f ∈ V-S)
  - Herhangi bir MST'de en az bir kenar ile f de ağaca bağlanmalıdır. Neden en ucuz olanını seçmeyelim ki? (Greedy seçim stratejisi)

Generic MST Algoritması

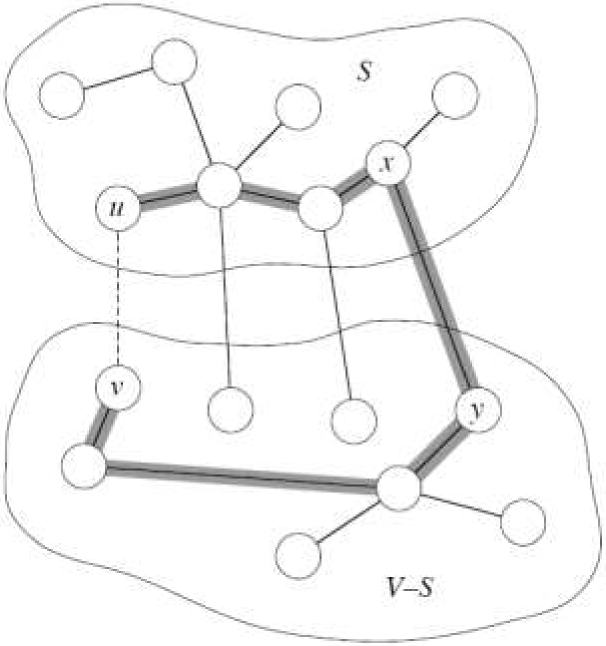
- S ve V-S ayrık kısımlarına kesim (cut) diyelim.
- (S, V-S) kesimleri arasında kenarlar (u,v) € E olabilir.
- Bu kesimler arasında bağlantıyı hafifleten bir kenar bizim için güvenlidir.
- Örnekte, (u,v) kenarının değeri (x,y)

kenarının değerinden küçük olsun.

(x,y)'yi kaldırıp (u,v)'yi ekleriz,

Spanning tree yapısını bozmamış

oluruz.



Generic MST Algoritması

- Algoritmadaki A kümesi, bağlı bileşenlerden oluşan bir ormandır.
  - Başlangıçta, her bileşen tek bir düğümdür.
- Herhangi bir güvenli kenar, iki bileşeni birleştirerek tek bileşen haline getirir.
  - Her bileşen bir ağaçtır.
- MST'de |V|-1 kenar olduğundan, döngü |V|-1 kere döner.
  - |V|-1 güvenli kenarı eklediğimizde, elimizde tek bir bileşen oluşur.

- Bu noktadan devam edersek, Kruskal'ın MST algoritma çözümüne ulaşırız.

KRUSKAL MST

Kruskal'ın MST Algoritması

- Her düğüm bir bileşen olacak şekilde başlar.
- Tekrarlı olarak, iki bileşeni birbirine bağlayacak «hafif» bir kenar bularak devam eder (kesimler arasındaki hafif kenar).
- Kenarları, ağırlıklarına göre artan şekilde tarar.
- Bir kenarın farklı bileşenlerdeki düğümleri bağlayıp bağlamadığını belirlemek için ayrık küme şeklinde veri yapısı kullanır.

Kruskal’ın MST Algoritması

KRUSKAL(V, E, w)

$A \leftarrow \emptyset$

for each vertex $v \in V$

  do MAKE-SET(v)

sort E into nondecreasing order by weight w

for each (u, v) taken from the sorted list

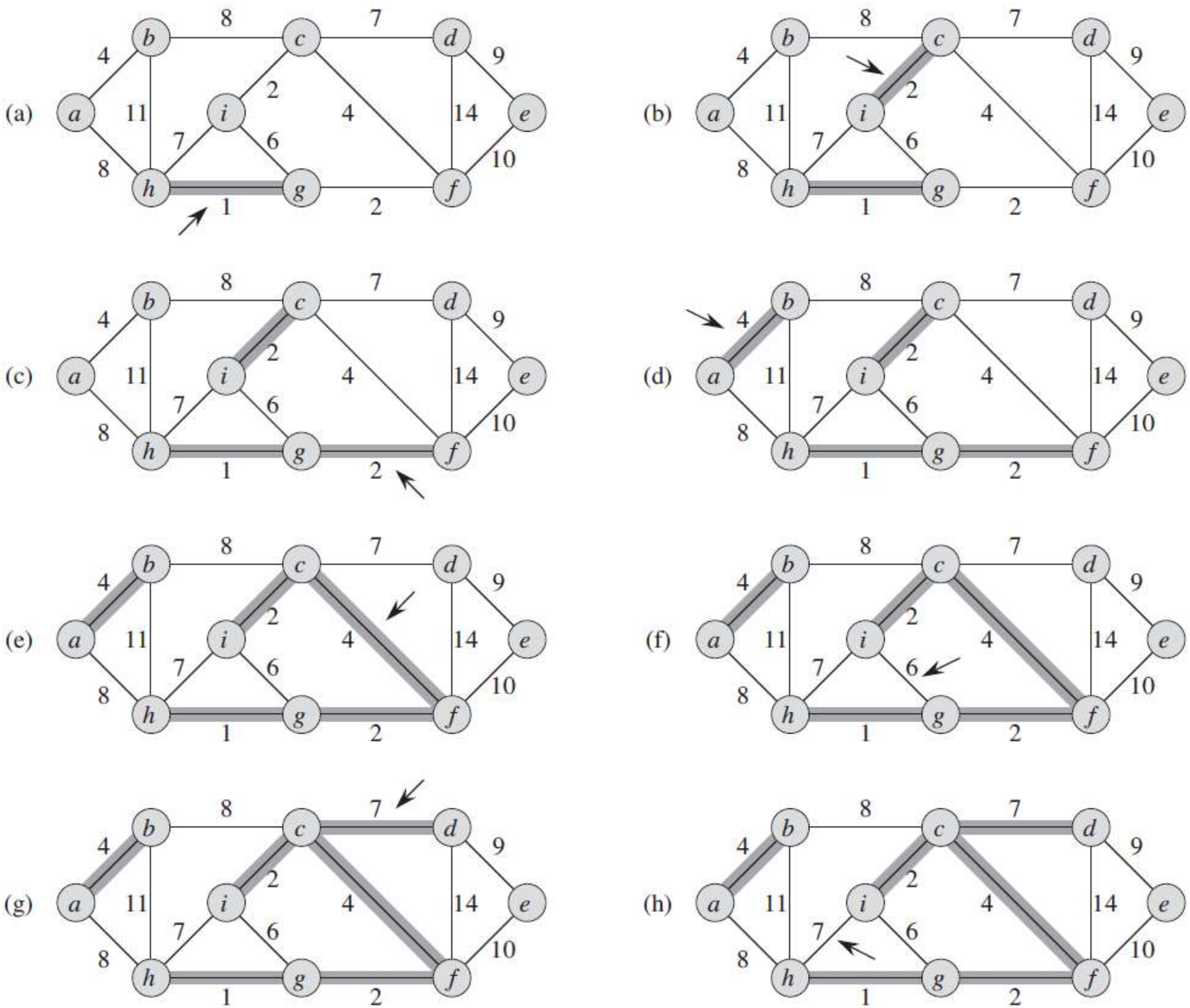
  do if FIND-SET(u) = FIND-SET(v)

    then $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$

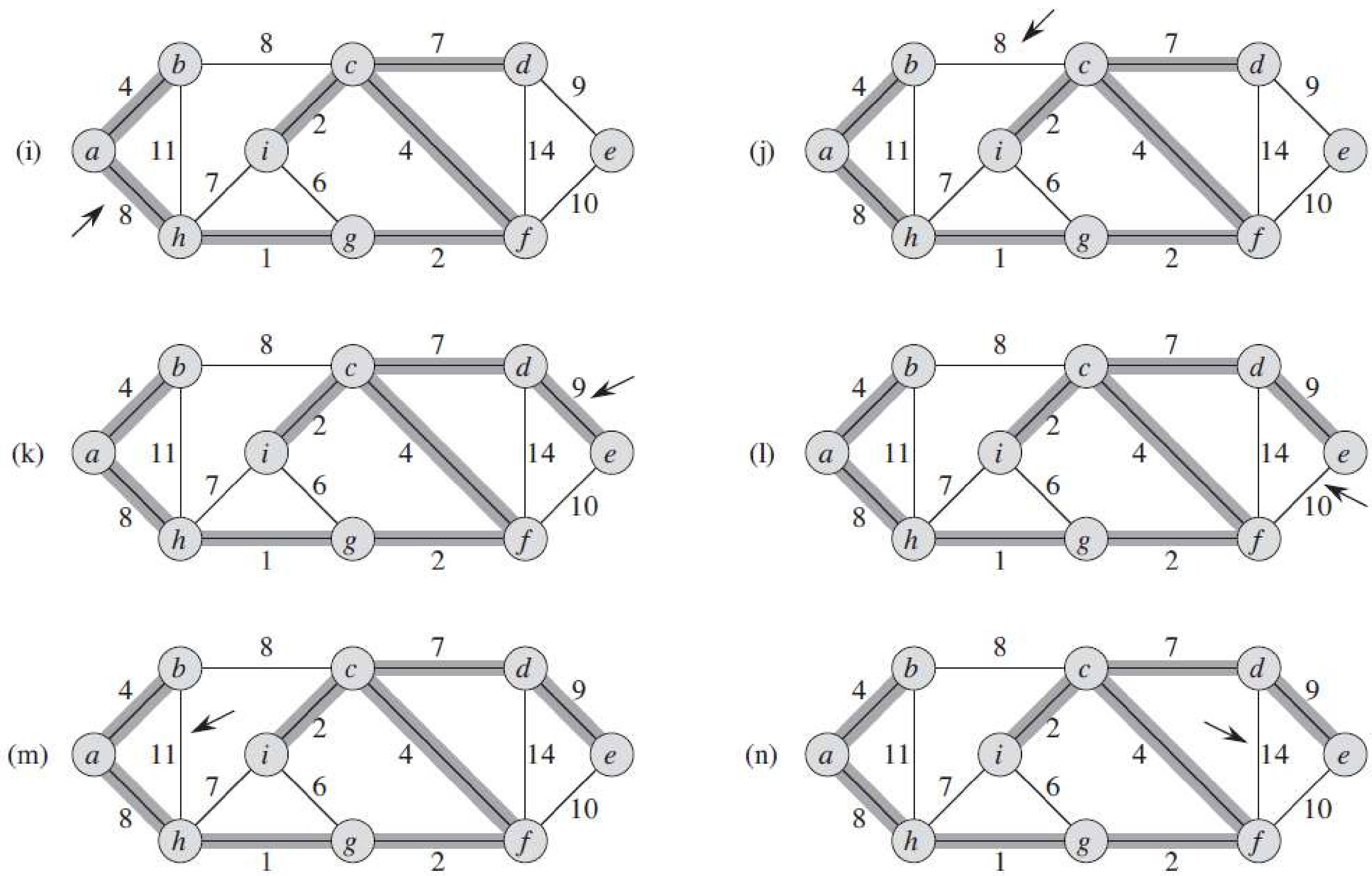
      UNION(u, v)

return A

Kruskal’ın MST Algoritması



Kruskal’ın MST Algoritması



Kruskal MST Karmaşıklık Analizi

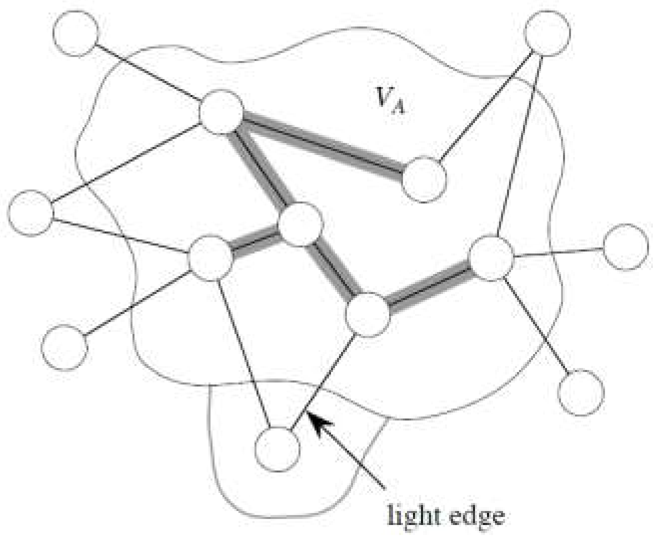
- Init A: O(1)
- İlk for döngüsü: |V| (MAKE_SET)
- E'ye göre sıralama: O(E lgE)
- İkinci for döngüsü: O(E) FIND_SET ve UNION

- O(E lg V)

- Eğer kenarlar sıralıysa, O(E a(V)), neredeyse lineer

PRIM MST

Prim’in MST Algoritması



- Tek bir ağaç oluşturur.
  - A her zaman bir ağaçtır.
- Keyfi bir r kökü ile başlar.
- Her adımda, kesimler arasında bir

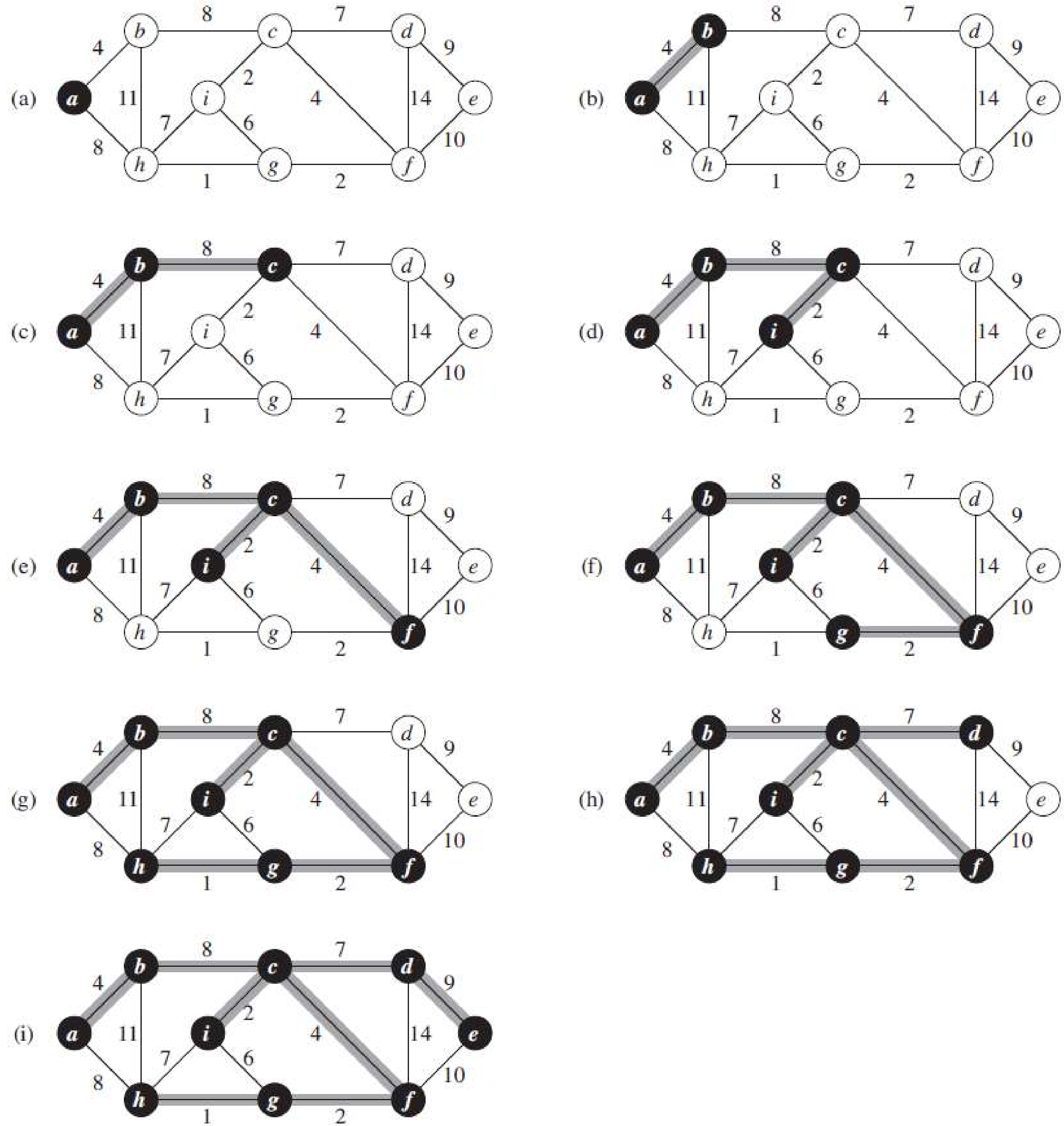
hafif kenar bularak ağaca ekler. (V_A, V-V_A)

- Hafif kenar nasıl bulunabilir? Öncelikli Kuyruk ile.
  - Kuyruktaki elemanlar V-V_A kümesindeki düğümlerdir.
  - Elemanların anahtarları, ağırlık değerleridir.
  - EXTRACT_MIN ile (V_A, V-V_A) arasındaki hafif kenar geçişi bulunur.
  - Eğer düğüm V_A’daki düğümler ile komşu değilse, ağırlığı sonsuzdur.
- A’nın kenarları, r köküne sahip bir ağaç oluşturacaktır.
  - r başlangıcı verilir ama esasen herhangi bir düğüm olabilir.
  - Her düğüm, ağaçtaki ebeveynini (p[v]) bilir.
  - Algoritma ilerledikçe V_A büyür, V boş küme olduğunda (tüm düğümlere erişildiğinde) sonlanır.

Prim'in MST Algoritması

```
PRIM(V, E,w, r )
Q ← ∅
for each u ∈ V
   do key[u]←∞
      π[u] ← NIL
      INSERT(Q, u)
DECREASE-KEY(Q, r, 0)  key[r ] ← 0
while Q != ∅
   do u ← EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ Adj[u]
         do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
               then π[v] ← u
                    DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Prim'in MST Algoritması



Prim MST Karmaşıklık Analizi

- Q binary heap ile yapılmış olsun.
- Init Q ve ilk for döngüsü: O(V lgV)
- R anahtar değerinin azaltılması: O(lgV)
- While döngüsü
  - |V| Extract_min çağrısı → O(V lgV)
  - <= |E| Decrease_key çağrısı → O(E lgV)

- O(E lg V)

- Eğer (fibonacci heap kullanarak) Decrease_key O(1)'de yapılırsa, O(V lgV + E)