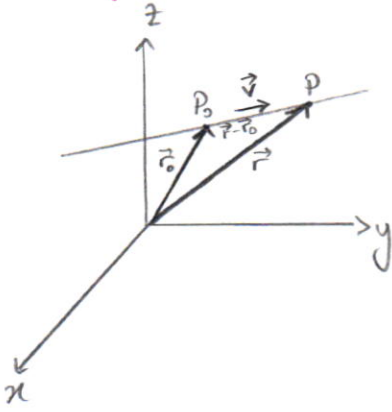


## UZAYDA DOĞRULAR ve DÜZLEMLER

### Uzayda Doğrular ve Doğru Parçaları



$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$   $P_0$  noktasının yer vektörü ve  
 $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  sıfırdan farklı bir vektör olsun.  
Bu durumda,  $P_0$  dan geçen ve  $\vec{v}$  ye paralel  
olan tek bir doğru vardır.

Eğer  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  bu doğru üzerinde başka bir  $P$  noktasının yer vektörü  
ise o zaman  $\vec{r} - \vec{r}_0$  bu doğru boyunca utarır ve dolayısıyla  $\vec{v}$  ye paraleldir.  
Bu durumda bir  $t \in \mathbb{R}$  iain,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{v}$$

olur.

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} = P_0$  dan geçen ve  $\vec{v}$  ye paralel olan doğrunun vektörel denklemi

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\ \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P_0(x_0, y_0, z_0) \text{ dan geçen } \vec{v} = \langle a, b, c \rangle \text{ ye} \\ \text{paralel olan doğrunun parametrik denklemi} \end{array} \right.$$

\*  $\vec{v}$  vektörüne doğrunun yön vektörü denir.

\*  $t$  parametresi  $(-\infty, \infty)$  aralığında değerler alır.

\* İki doğru paralel ise yön vektörleri de paraleldir.

Bir doğru denklemi iain parantezler:

Doğru üzerinde nokta  
 $(x_0, y_0, z_0)$

Doğruya paralel vektör  
 $\langle a, b, c \rangle$

$$\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}$$

Örnek:  $(-2, 0, 4)$ 'ten geçen ve  $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$  vektörüne paralel doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

$$\begin{array}{lcl} x = x_0 + at & \text{Nokta: } (x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 4) & \\ y = y_0 + bt & \text{vektör: } \langle a, b, c \rangle = \langle 2, 4, -2 \rangle & \\ z = z_0 + ct & & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 2t \end{array} \right.$$

Örnek:  $P(-3, 2, -3)$ ,  $Q(1, -1, 4)$  noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

$$\vec{v} = \vec{PQ} = \langle \underset{a}{4}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{7} \rangle \quad (\text{yön vektörü})$$

$$x = x_0 + at = -3 + 4t$$

$$y = y_0 + bt = 2 - 3t$$

$$z = z_0 + ct = -3 + 7t$$

NOT: Eğer doğrunun parametrik denklemleri verilmişse,  $t$  nin katsayıları bize yön vektörünü verir.

İki noktayı birleştiren doğru parçasını parametrize etmek:

- 1) İki noktadan geçen doğru parametrize edilir.
- 2) Bu noktalar için  $t$  değerleri bulunur ve  $t$ , bu değerlerle sınırlı kapalı bir aralıktır kısıtlanır.

Örnek:  $P(-3, 2, -3)$  ve  $Q(1, -1, 4)$  noktalarını birleştiren doğru parçasını parametrize ediniz.

$$1) \quad x = -3 + 4t$$

$$y = 2 - 3t$$

$$z = -3 + 7t$$

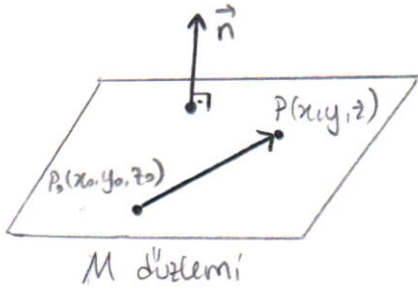
$$2) \quad P(-3, 2, -3) \text{ için } \left. \begin{array}{l} -3 = -3 + 4t \\ 2 = 2 - 3t \\ -3 = -3 + 7t \end{array} \right\} t = 0$$

$$Q(1, -1, 4) \text{ için } \left. \begin{array}{l} 1 = -3 + 4t \\ -1 = 2 - 3t \\ 4 = -3 + 7t \end{array} \right\} t = 1$$

Doğru parçasını şu şekilde parametrize ederiz:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 7t \end{array} \quad 0 \leq t \leq 1}$$

## Uzayda Düzlemler



M düzlemi bir  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından geçen ve sıfırdan farklı  $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$  normaline sahip bir düzlem olsun. Bu durumda M düzlemi,  $\vec{P_0P}$  vektörünün  $\vec{n}$  ye dik olmasını sağlayacak tüm  $P(x, y, z)$  noktalarının kümesidir. 0 halde,  
 $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$  ' dir.

Düzlemin denklemi:

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{vektörel denklem})$$

$$\Rightarrow \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle \cdot \langle A, B, C \rangle = 0$$

$$\Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$\text{Sadeleştirilirse, } Ax + By + Cz = \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0}_D$$

$$\Rightarrow \boxed{Ax + By + Cz = D}$$

Bir düzlem denklemini için parametreler:

Düzlem üzerinde nokta  
 $(x_0, y_0, z_0)$

Normal vektör  
 $\langle A, B, C \rangle$

Örnek:  $P_0(-3, 0, 7)$  noktasından geçen ve normali  $\vec{n} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  olan düzlemin denklemini bulunuz.

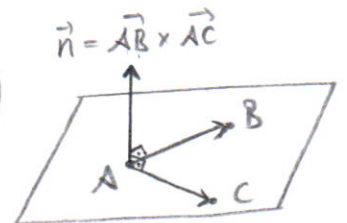
$$\left. \begin{array}{l} (x_0, y_0, z_0) = (-3, 0, 7) \\ \langle A, B, C \rangle = \langle 5, 2, -1 \rangle \end{array} \right\} \text{Denklem} = 5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 2y - z = -22$$

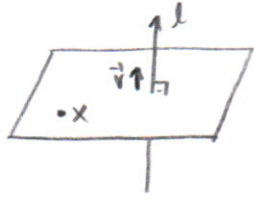
Örnek:  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(0, 3, 0)$  noktalarından geçen düzlem için bir denklem bulunuz.

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \quad \text{düzleme dik (normal) vektör}$$

$$A(0, 0, 1) \Rightarrow 3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 6z = 6$$

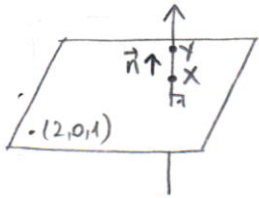


Örnek:  $X(2,1,4)$  noktasından geçen ve  $l = \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3 \end{cases}$  doğrusuna dik düzlemin denklemini bulunuz.



$$\vec{n} = \vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot (x-2) + 2(y-1) + 0 \cdot (z-4) = 0 \\ x+2y=4 \end{array} \right.$$

Örnek:  $(2,0,1)$  den geçen ve  $X(1,1,0)$  ve  $Y(4,-1,-2)$  noktalarından geçen doğruya dik düzlemin denklemini bulun.



$$\vec{XY} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 2z = 4$$

### Paralel ve Kesişen Doğrular / Düzlemler

⊛ Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. Paralel olmayan iki düzlem bir doğrudan kesişir.

⊛ Normal vektörleri dik olan iki düzlem diktir.

⊛ İki düzlem arasındaki açı, normalleri arasındaki açıya eşittir:  $\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$

⊛ Bir düzlemin normali  $\vec{n}$ , bir doğrunun yön vektörü  $\vec{v}$  olsun.

- $\vec{n} \parallel \vec{v}$  ise doğru ile düzlem diktir
- $\vec{n} \perp \vec{v}$  ise doğru ile düzlem paraleldir.

Örnek:  $x-2y+5z=1$  düzlemi ile  $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$  doğrusu paralel midir?

$$x-2y+5z=1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$$

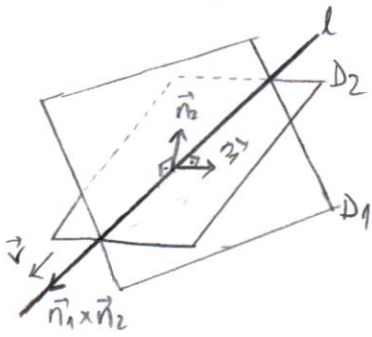
$$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle \quad (t \text{ nin katsayıları})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \\ \text{olduğundan düzlem ile doğru} \\ \text{paraleldir.} \end{array} \right.$$

⊛ İki doğrunun kesişimi nokta, iki düzlemin kesişimi doğru, bir doğru ile bir düzlemin kesişimi noktadır.



## Kesim Doğruları



(arakesit)  
iki düzlemin kesim doğrusu, düzlemlerin normal vektörleri  $\vec{n}_1$  ve  $\vec{n}_2$  nin ikisine de diktir.  
Dolayısıyla kesim doğrusu  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  ye paraleldir.

$$\left. \begin{array}{l} l \rightarrow D_1 \text{ in üzerinde} \Rightarrow l \perp \vec{n}_1 \\ l \rightarrow D_2 \text{ nin üzerinde} \Rightarrow l \perp \vec{n}_2 \end{array} \right\} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

↳  $\vec{v}$  nm yön vektörü

Örnek:  $3x - 2y + z = 2$  ve  $x - y + 3z = 8$  ile verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemlerini yazınız.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 2 \rightarrow \vec{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle \\ x - y + 3z = 8 \rightarrow \vec{n}_2 = \langle 1, -1, 3 \rangle \end{array} \right\} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle -5, -8, -1 \rangle$$

a b c

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} -2y + z = -1 \\ -y + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow (1, 2, 3) \text{ arakesit doğrusu üzerinde bir nokta}$$

$x_0, y_0, z_0$

$$l: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 - 8t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

( $x=1$  seçmek keyfidir, farklı seçimler aynı doğrunun farklı parametrisasyonunu verir)

Örnek:  $3x - 6y - 2z = 15$  ve  $2x + y - 2z = 5$  düzlemlerinin kesim doğrusuna paralel olan bir vektör ve bu doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = \langle 3, -6, -2 \rangle \\ \vec{n}_2 = \langle 2, 1, -2 \rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} l \perp \vec{n}_1 \\ l \perp \vec{n}_2 \end{array} \Rightarrow l \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \langle 14, 2, 15 \rangle$$

( $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  nm sıfırdan farklı bir skaler katı da aynı işi görür.)

$$z=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow l = \begin{cases} x = 3 + 14t \\ y = -1 + 2t \\ z = 15t \end{cases}$$

Örnek:  $x = \frac{8}{3} + 2t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 1+t$  doğrusunun  $3x + 2y + 6z = 6$  düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.

Verilen doğru koordinatları düzlem denklemini sağlarsa düzlem üzerindedir. Yani,

$$3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1+t) = 6 \Rightarrow 8t = -8 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow (x, y, z)|_{t=-1} = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$