

DİZİLER

①

Bir dizi dediğimiz zaman $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ şeklinde belli bir düzene göre verilmiş sayıları kastediyoruz.

* Örneğin: $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$ dizisinde ilk terim $a_1=2$, ikinci $a_2=4$ ve genel olarak n . terim $a_n=2n$ dir.

* Buradaki n tamsayısına indis denir. Listede a_n teriminin kaçınca sırada olduğunu ifade eder.

* a_n 'e dizinin genel terimi (n . terimi) denir.

* Bir dizi, $\{a_n\}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

* Bir diziyi aynı zamanda, pozitif tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak da düşünebiliriz.

$$n \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{f(n)=\{a_n\}} a_n \in \mathbb{R} \quad f(n)=\{a_n\}: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(*) \{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\} = \{\sqrt{n}\}$$

$$(*) \{a_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\} = \{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\}$$

$$(*) \{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\} = \{(-1)^{n+1}\}$$

(*) $a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ ile tanımlı $\{a_n\}$ dizisinin ilk 6 terimini bulunuz.

$$a_1=1 \quad a_2=1$$

$$a_3 = a_{1+2} = a_1 + a_2 = 1+1 = 2$$

$$a_4 = a_{2+2} = a_2 + a_3 = 1+2 = 3$$

$$a_5 = a_{3+2} = a_3 + a_4 = 2+3 = 5$$

$$a_6 = a_{4+2} = a_4 + a_5 = 3+5 = 8$$

$$\Rightarrow \{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

Diziler ile İşlemler

(2)

$\{a_n\}, \{b_n\}$ iki dizi ve α bir sabit olmak üzere:

$$\textcircled{1} \alpha \{a_n\} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \dots\} = \{\alpha a_n\}$$

$$\textcircled{2} \{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n, \dots\} = \{a_n \pm b_n\}$$

$$\textcircled{3} \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots \right\} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } b_n \neq 0)$$

Dizilerle İlgili Bazı Özellikler

1) Sınırlı Diziler:

* Eğer bütün n indisi için $a_n \leq M$ şartını sağlayacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır denir. $M, \{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Eğer $M, \{a_n\}$ için bir üst sınır ise ve M den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için üst sınır değilse M 'ye "EKÜS" denir.

* Eğer bütün n indisi için $a_n \geq m$ şartını sağlayacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlıdır denir. $m, \{a_n\}$ için bir alt sınırdır. Eğer $m, \{a_n\}$ için bir alt sınır ise ve m den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse m 'ye "EBAS" denir.

* Eğer $\{a_n\}$ hem alttan hem de üstten sınırlı ise $\{a_n\}$ 'e "sınırlı dizi" denir. $\{a_n\}$ sınırlı değilse ona "sınırsız dizi" denir.

* $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dizisi alttan 1 ve 1 'den küçük her reel sayı ile sınırlıdır. EBAS'ı 1 dir. Dizi üstten sınırlı değildir. Dolayısıyla sınırlı değildir. Sınırsız dizi dir.

③ $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ dizisi sınırlı mıdır? ③

EBAS $\{a_n\} = ?$ EKÜS $\{a_n\} = ?$

Dizi alttan $\frac{1}{2}$, üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla sınırlıdır.

EBAS $\{a_n\} = \frac{1}{2}$ EKÜS $\{a_n\} = 1$ dir.

② Monoton Dizi:

Eğer bütün n indisi için $a_n \leq a_{n+1}$ oluyorsa $\{a_n\}$ dizisine "azalmayan dizi", tersine $a_n \geq a_{n+1}$ oluyorsa $\{a_n\}$ 'e artmayan dizi denir. Eğer $\{a_n\}$ azalmayan veya artmayan ise ona "Monoton Dizi" denir.

④ $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisi monoton mudur?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \text{Dizi azalmayan} \\ \Downarrow \\ \text{Monoton dizi}$$

⑤ $\{a_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$ dizisi monoton mudur?

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \text{Dizi artmayandır} \\ \Downarrow \\ \text{Monoton dizidir}$$

Bir Dizinin Limiti

(4)

Dizilerdeki limit kavramı, fonksiyonlardaki limit kavramının bir özel durumudur.

Tanım: $\{a_n\}$ bir dizi olsun. Eğer her reel pozitif ε sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L limitine yakınsar denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ile gösterilir. L 'ye dizinin limiti denir.

* Eğer böyle bir L sayısı mevcut değilse $\{a_n\}$ dizisine "ıraksak dizi" denir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ $\begin{cases} \rightarrow L \text{ (bir reel sayı)} \Rightarrow \{a_n\} \text{ yakınsak dizi} \\ \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \text{Dizi } \pm \infty \text{ 'a ıraksar. (dizi ıraksaktır)} \\ \rightarrow \text{Limit yok} \Rightarrow \text{Dizi ıraksaktır.} \end{cases}$

* Fonksiyonlardaki limit kuralları (çarpım, toplam vs...) dizilerde de geçerlidir.

* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu limit tanımını ile gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ o.s. bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı var mı?

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \text{ olur. } N' \text{ yi } \frac{1}{\varepsilon} \text{ den büyük}$$

herhangi bir tamsayı olarak seçersek sonras tüm $n \geq N$ ler için sağlanır.

* $\{a_n\} = \left\{ \frac{n-1}{n} \right\}$ dizisi verilsin. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ o.s. $N = N(\varepsilon)$ var mı?

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \text{ olur. } N \text{ yi } \frac{1}{\varepsilon} \text{ dan büyük}$$

herhangi bir tamsayı olarak seçersek sonuç tüm $n \geq N$ için sağlanır.

Limit Kuralları:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ (A, B reel sayı) ise:

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot a_n = k \cdot A$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)

④ Sandvich Teoremi: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ birer dizi olsunlar.

Eğer $n \geq N$ iken $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ dir.

⑤ Sürekli Fonksiyon Teoremi: $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi

olsun. Eğer $a_n \rightarrow L$ ise ve f fonksiyonu her a_n de tanımlı ve L 'de sürekli ise o zaman $f(a_n) \rightarrow f(L)$ dir.

⑥ Bir dizinin limiti varsa tektir:

* $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dizi $+\infty$ 'a ıraksar. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ dur.

* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ dizisi ıraksaktır. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

limiti mevcut değildir.

* Yakınsak dizi sınırlıdır. Ancak tersi doğru değildir.

Yani sınırlı bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir!

* $\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ dizisinin limitini sıkıştırma teoremi ile bulun.

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ dir.

* $\{a_n\} = \{\sqrt{n^2+2n} - n\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+2n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1)} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Dizi yakınsak}$$

L'Hopital Kuralını Kullanmak

Aşağıdaki teorem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ile $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ arasındaki bağlantıyı somutlaştırır. Bu da bazı dizilerin limitlerini hesaplarken L'Hopital kuralını kullanmamızı sağlar.

Teorem: $f(x)$ in her $x > n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olduğunu ve $\{a_n\}$ 'in de her $n > n_0$ için $a_n = f(n)$ şartını sağlayan bir dizi olduğunu varsayalım. O zaman,

$$\star \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ dir. } \star$$

* $\{a_n\} = \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$: düşünelim.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ yakınsaktır}$$

\downarrow
 ∞/∞ \rightarrow L'Hop.

* $\{a_n\} = \{\sin n\pi\}$ dizisi yakınsak mıdır?

Yanlış Çözüm

($x \in \mathbb{R}$)

$f(x) = \sin \pi x$ olarak düşünersek: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \pi x$ limiti mevcut

değildir. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi$ mevcut değildir. Dizi iraksaktır. \times

Doğru Çözüm:

$\{a_n\} = \{\sin n\pi\} = \{0, 0, 0, \dots\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow$ Dizi yakınsaktır. \checkmark

Monoton Dizi Teoremi:

a) Bir $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlı ve artmıyorsa $\left\{ \begin{array}{l} \text{Yakın-} \\ \text{sağır!} \end{array} \right.$
b) Bir $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve azalmıyorsa

* Üstten sınırlı, azalmayan bir dizinin ~~limiti vardır.~~
EKÜS'ü ~~limiti vardır.~~ dizinin yakınsadığı sayıdır.

* Altan sınırlı, artmıyan bir dizinin ~~limiti vardır.~~
EBAS'ı, ~~limiti vardır.~~ dizinin yakınsadığı sayıdır.

* $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisinin monotonluğunu, sınırlılığını, EBAS ve

EKÜS'ü inceleyin.

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \text{Dizi azalmayan} \\ \Downarrow \\ \text{Monoton dizi.}$$

Dizi alttan $\frac{1}{2}$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır.

EBAS = $\frac{1}{2}$ dir.

Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ dir. O halde EKÜS = 1 dir.

Sıkça Karşılaşılan Limitler

(8)

$$① \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$⑥ \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty \quad (x > 1)$$

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

$$③ \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

$$④ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x \text{ için})$$

$$⑤ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$⑦ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0$$

$$⑧ \left\{ \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \right\} \text{ dizisi yakınsak mıdır?}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow \text{dizi yakınsaktır.}$$

$$⑨ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\frac{1}{3^{1/n}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1} = 1$$

$$⑩ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$⑪ \{a_n\} = \left\{ \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2^n}\right) \right\} \text{ dizisi yakınsak mıdır?}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)}_2 \cdot \underbrace{\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)}_3 = 6 \rightarrow \text{Dizi yakınsak}$$