MAT1072/ Matematik 2

Kısmi Türev / Yönlü Türev / Teğet Düzlem – Normal Doğru

1) $f\left(\frac{x}{z}\right) = yz$ ise $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ olduğunu gösteriniz.

z = bağımlı

x, y = bağımsız

$$F = f\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{z}\cdot f'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2}f'\left(\frac{x}{z}\right) - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-z}{-\frac{x}{z^2}f'\left(\frac{x}{y}\right) - y}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right) - yz}{-\frac{x}{z^2}f'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = z$$

2) Kabul edelim ki z, x ve y nin sabit olmayan bir fonksiyonudur ve $\varphi(2x - z^2, y - \frac{1}{3}z^3) = 0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanmıştır. Buna göre $\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$ olduğunu gösterin.

$$F: \varphi(\underbrace{2x - z^2}_{u}, \underbrace{y - \tfrac{1}{3}z^3}_{v}) = 0$$

$u = 2x - z^2$

$v = y - \frac{1}{3}z^3$

$\varphi \xrightarrow{\partial} u, v \xrightarrow{\partial} x, y, z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\varphi_u \cdot 2 + \varphi_v \cdot 0}{\varphi_u \cdot (-2z) + \varphi_v(-z^2)} = \frac{2\varphi_u}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot 1}{\varphi_u \cdot (-2z) + \varphi_v(-z^2)} = \frac{\varphi_v}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v}$$

$$\Rightarrow \frac{2\varphi_u}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} + \frac{z\varphi_v}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} = \frac{1}{z}$$

3) z nin x ve y nin türevlenebilen bir fonksiyonu olarak $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağladığını kabul edelim. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ nın alacağı şekli bulunuz

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "\partial"'] \arrow[rr, bend left, "\partial"] & x,y \arrow[r, "\partial"'] & r,\theta \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\,r\cos\theta = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

4) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^4}$ ile verilen f fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini (mevcut iseler) bulunuz.

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cos\sqrt{x^2+y^4} \Rightarrow f_x(0,0) = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Türev mevcut değil diyemeyiz!}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0^-} -\frac{\sin h}{h} = -1$$

Türev mevcut değil

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\sqrt{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h^2}{h}\cdot\frac{h}{h} = 0$$

5) $f(x,y) = \ln xy^2$ fonksiyonu için f_x türevini türev tanımı ile bulun.

$$f_x = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln((x+h)y^2) - \ln xy^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{1}{x}h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}h\right)^{1/h}}_{e^{1/x}} = \frac{1}{x}$$

$$* \lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = e^a \quad * \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

6) $z=f(x,y)$ ve $z = xy - \cos(z^2-1)$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ türevinin $P(2,1,1)$ noktasındaki değerini bulun.

$$z_x = y + \sin(z^2-1) \cdot 2z \cdot z_x$$

$$z_{xx} = \left(\cos(z^2-1) \cdot 2z \cdot z_x\right) \cdot 2z \cdot z_x + \sin(z^2-1) \cdot \left(2z_x \cdot z_x + 2z \cdot z_{xx}\right)$$

$$= \cos(z^2-1)\,(2z \cdot z_x)^2 + \sin(z^2-1)\,(2z_x^2 + 2z \cdot z_{xx})$$

$$z_x\big|_P = 1 + \sin 0 \cdot 2z_x = 1$$

$$z_{xx}\big|_P = 1 \cdot (2 \cdot 1)^2 = 4$$

7) $z = z(x,y)$ ve φ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $2z - x^2 = \varphi(2z-y^2)$ olsun. $y \cdot z_x + x \cdot z_y = xy$ olduğunu gösteriniz.

$$2z_x - 2x = 2z_x \cdot \varphi'(2z-y^2) \Rightarrow z_x = \frac{x}{1-\varphi'(2z-y^2)}$$

$$2z_y = (2z_y - 2y)\,\varphi'(2z-y^2) \Rightarrow z_y = \frac{-y\varphi'(2z-y^2)}{1-\varphi'(2z-y^2)}$$

$$\Rightarrow y z_x + x z_y = \frac{yx}{1-\varphi'} - \frac{yx\varphi'}{1-\varphi'} = \frac{xy(1-\varphi')}{1-\varphi'} = xy$$

8) f diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $x,y>0$ için $z=f\left(\ln\frac{y}{x}, \frac{y}{x}\right)$ ise $xz_x + yz_y = 0$ olacağını gösteriniz.

$z = f(u,v)$, $u = \ln\frac{y}{x} = \ln y - \ln x$, $v = \frac{y}{x}$

$$z \xrightarrow{\partial} u,v \xrightarrow{\partial} x,y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{x}$$

$$xz_x + yz_y = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

9) $w = f(\overbrace{2xz - y - x^2}^{u}, \overbrace{y - z^2}^{v}, \overbrace{z - x}^{r})$ olmak üzere $\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(z)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ eşitliğini sağlayan h fonksiyonunu bulunuz

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x + f_r \cdot r_x = f_u \cdot (2z - 2x) + f_r(-1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y + f_r \cdot r_y = f_u(-1) + f_v \cdot 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_u\, u_z + f_v \cdot v_z + f_r \cdot r_z = f_u \cdot (2x) + f_v(-2z) + f_r \cdot 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + h(z)\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$2zf_u - 2xf_u - f_r + h_z(-f_u + f_v) + 2xf_u - 2zf_v + f_r = 0$$

$$-2z(-f_u + f_v) + h(z)(-f_u + f_v) = 0$$

$$(-f_u + f_v)(h(z) - 2z) = 0 \quad \begin{cases} -f_u + f_v \neq 0 \Rightarrow h(z) = 2z \\ -f_u + f_v = 0 \Rightarrow h(z) = \varphi(z) \end{cases}$$

10) $f(x,y) = 2xy - 3y^2$ fonksiyonunun $P_0(5,5)$ noktasında $\vec{u} = \langle 4,3 \rangle$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$$\nabla f = 2y\vec{i} + (2x - 6y)\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{P_0} = 10\vec{i} - 20\vec{j}$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle \qquad (D_{\vec{u}} f)_{P_0} = \nabla f|_{P_0} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle 10, -20 \rangle \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle = 8 - 12 = -4$$

11) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ fonksiyonunun $P(1,-1,2)$ noktasında $\vec{u} = \langle 3, 6, -2 \rangle$ vektörü yönündeki türevini bulun.

$$\nabla f = \langle y+z, x+z, y+x \rangle \Rightarrow \nabla f|_P = \langle 1, 3, 0 \rangle$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left\langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7} \right\rangle \qquad (D_{\vec{u}} f)_P = \nabla f|_P \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle 1, 3, 0 \rangle \left\langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7} \right\rangle = \frac{3}{7} + \frac{18}{7} = 3$$

12) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ olsun.

i) f fonksiyonu $P(-2,1)$ noktasında $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ vektörü yönünde artıyor mu azalıyor mu?

$\nabla f = \langle 2x+y, x+2y \rangle \Rightarrow \nabla f|_P = \langle -3, 0 \rangle$

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rangle \qquad (D_{\vec{v}} f)_P = \nabla f|_P \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle -3, 0 \rangle \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rangle = -\frac{3}{\sqrt{3}} < 0$

$\Rightarrow$ azalıyor

ii) Hangi yönde f fonksiyonunun $P(-2,1)$ noktasında değişimi yoktur?

$\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ olsun. $\vec{u}$ birim vektör olduğundan $u_1^2 + u_2^2 = 1$

$D_{\vec{u}} f|_P = 0 \Rightarrow \langle -3, 0 \rangle . \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow -3u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$

$u_1^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow u_2^2 = 1 \Rightarrow u_2 = \mp 1$

$\vec{u} = \langle 0, 1 \rangle$ ve $\vec{u} = \langle 0, -1 \rangle$.

13) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$ olsun. Aşağıdaki şartlarda $\vec{u}$ yönlerini ve $D_u f|_{(1,-1)}$ değerlerini bulunuz.

a) $D_u f|_{(1,-1)}$ en büyük b) $D_u f|_{(1,-1)}$ en küçük c) $D_u f|_{(1,-1)} = 0$

$\nabla f = \langle 2x-y, -x+2y-1 \rangle \qquad \nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$

a) $D_u f|_{(1,-1)}$ en büyük $\nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$ yönünde olur. Yani,

$\vec{u} = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \rangle$ tir. $D_u f|_{(1,-1)} = |\nabla f| = 5$

b) $D_u f|_{(1,-1)}$ en küçük $\nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$ ün ters yönünde olur. Yani,

$\vec{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ tır. $D_u f|_{(1,-1)} = -|\nabla f| = -5$ tir.

c) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ olsun. $\vec{u}$ birim vektör olduğundan $a^2 + b^2 = 1$

$(D_u f)_{(1,-1)} = 0 \Rightarrow \langle a, b \rangle \langle 3, -4 \rangle = 0 \Rightarrow 3a - 4b = 0 \Rightarrow a = \frac{4b}{3}$

$\frac{16b^2}{9} + b^2 = 1$

$\Rightarrow b = \mp \frac{3}{5}$

$\Rightarrow a = \mp \frac{4}{5}$

$\vec{u_1} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}, \quad \vec{u_2} = -\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

14) Hangi yönlerde $f(x,y)=xy$ ile tanımlı fonksiyonun $(2,0)$ noktasındaki yönlü türevi -1 olur?

$$(D_u f)_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \cdot \vec{u} = -1$$

$$\nabla f = y\vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{(2,0)} = 2\vec{j}$$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ olsun. Birim vektör olduğundan $\sqrt{a^2+b^2}=1$

$$\Rightarrow (2\vec{j})(a\vec{i}+b\vec{j}) = -1 \Rightarrow 2b=-1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \longrightarrow a^2+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow a=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

15) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$ fonksiyonunun $P(1,0)$ da en hızlı artan ve en hızlı azalan olduğu yönleri bulunuz.

$$\nabla f = (2xy + ye^{xy}\sin y)\vec{i} + (x^2 + xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y)\vec{j}$$

$$\nabla f|_{(1,0)} = 2\vec{j}$$

f en hızlı ∇f yönünde artar : $\vec{u} = \vec{j}$ ($\vec{u}$: birim vektör)

f en " $-\nabla f$ " azalır : $\vec{u} = -\vec{j}$

16) $y \neq 0$ olmak üzere $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - yz$ ile verilen f fonksiyonu $P(4,1,1)$'de en hızlı hangi yönlerde değişir ve bu yönlerdeki değişim oranları (hızları) nelerdir?

$$\nabla f = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} - z, -y \right\rangle \Rightarrow \nabla f|_P = \langle 1, -5, -1 \rangle$$

f en hızlı $\nabla f = \vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar ve en hızlı $-\nabla f = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ yönünde azalır.

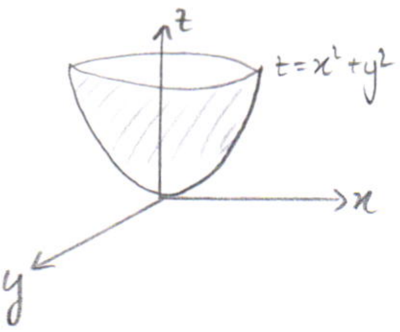
$\longrightarrow \left\langle \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}} \right\rangle$ yönü

$\downarrow$ $\left\langle -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right\rangle$ yönü

Bu yönlerde değişim oranları (hızları) sırasıyla

$$D_u f|_P = |\nabla f| = 3\sqrt{3} \quad \text{ve} \quad -|\nabla f| = -3\sqrt{3}$$

17) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$ fonksiyonunun $(1,1,2)$ noktasındaki seviye yüzeyini belirleyip çiziniz.



$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z = c$$

$$\Rightarrow f(1,1,2) = 1^2+1^2-2 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-z = 0$$

18) $u = u(v,w)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$ ise $\nabla u = u_v \nabla v + u_w \nabla w$ olduğunu gösteriniz.

$$u \xrightarrow{\partial} v,w \xrightarrow{\partial} x,y,z$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial v}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\nabla v} + \frac{\partial u}{\partial w}\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\nabla w}$$

$$= u_v \nabla v + u_w \nabla w$$

19) $\cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ yüzeyinin $P(0,1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini yazınız.

$$F(x,y,z) = \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz - 4 = 0$$

$$\nabla F = \left(-\pi\sin(\pi x) - 2xy + ze^{xz}\right)\vec{i} + \left(-x^2+z\right)\vec{j} + \left(xe^{xz}+y\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \nabla F\Big|_{(0,1,2)} = \underset{A}{2}\vec{i} + \underset{B}{2}\vec{j} + \underset{C=1}{\vec{k}}$$

Düzlem denklemi: $2(x-0) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0$

$$2x+2y+z = 4$$

20) $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$ yüzeyi ile $x^2+y^2+z^2=11$ küresi bir E eğrisinde kesişiyorlar. $P(1,1,3)$ noktasında E eğrisine teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$F: x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$$

$$G: x^2+y^2+z^2-11=0$$

Teğet doğru (ℓ)

yüzeye teğet $\downarrow$ ∇F yüzeye dik $\Downarrow$ $\nabla F \perp \ell$

küreye teğet $\downarrow$ ∇G küreye dik $\Downarrow$ $\nabla G \perp \ell$ $\Rightarrow$ $\ell \parallel \nabla F \times \nabla G$

$$\nabla F = \langle 3x^2+6xy^2+4y,\ 6x^2y+3y^2+4x,\ -2z\rangle \Rightarrow \nabla F|_P = \langle 13, 13, -6\rangle$$

$$\nabla G = \langle 2x, 2y, 2z\rangle \Rightarrow \nabla G|_P = \langle 2, 2, 6\rangle$$

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 13 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \langle 90, -90, 0\rangle$$

$$\ell: \begin{cases} x = 1+90t \\ y = 1-90t \\ z = 3 \end{cases}$$

21) $z=x^2+y^2$ yüzeyinin hangi noktasındaki teğet düzlemi $P(1,2,3)$, $Q(2,1,4)$ ve $R(-1,2,5)$ noktalarından geçen bir düzleme paralel olur? Bulduğunuz bu noktada yüzeye teğet olan düzlemin denklemini yazınız.

$$\vec{n}_1 = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \langle -2, -4, -2\rangle$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z=0 \Rightarrow \vec{n}_2 = \nabla f = \langle 2x, 2y, -1\rangle$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x=-2\lambda \\ 2y=-4\lambda \\ -1=-2\lambda \end{array}\right\} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2},\ y=-1,\ z=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2=\frac{5}{4}$$

$$A\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \vec{n}_2 = \nabla f|_A = \langle -1, -2, -1\rangle \xRightarrow{\text{düzlem denklemi}} -\left(x+\frac{1}{2}\right)-2(y+1)-\left(z-\frac{5}{4}\right)=0$$

$$\Rightarrow x+2y+z=-5/4$$

22) f fonksiyonu, tek değişkenli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında, yüzeye teğet olan düzlemin orijinden geçtiğini gösteriniz.

$$F = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z = 0$$

$$F_x = 1 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + \left(-\frac{y}{x^2}\right) f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x \Rightarrow F_x(P_0) = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_y = x \cdot \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow F_y(P_0) = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_z = -1$$

Teğet düzlem; $F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$

$$\Rightarrow \left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)(x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0) - \left(z - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) = 0$$

$(0,0,0)$ da sağlamalıdır:

$$-\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) x_0 + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(-y_0) + x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$= \cancel{-f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) x_0} + \cancel{\frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) x_0} \cancel{- f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y_0} + \cancel{x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)} = 0 \checkmark$$

23) $g(x,y) = y^2 e^{2x}$ fonksiyonunun $(2,-1)$ noktasındaki en büyük ve en küçük yönlü türevlerini ve hangi birim vektör yönünde bu değerlere sahip olacağını bulunuz.

$$\nabla g = \langle 2y^2 e^{2x}, 2y e^{2x} \rangle \Rightarrow \nabla g|_{(2,-1)} = \langle 2e^4, -2e^4 \rangle$$

En büyük yönlü türev değeri: $|\nabla g| = \sqrt{(2e^4)^2 + (-2e^4)^2} = \sqrt{8}\, e^4$

Yönü: $\vec{u} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{\langle 2e^4, -2e^4 \rangle}{\sqrt{8}\, e^4} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

En küçük yönlü türev değeri: $-|\nabla g| = -\sqrt{8}\, e^4$

Yönü: $\vec{u} = -\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

24) Bir düzlemin bir noktasındaki sıcaklık $T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^2+1}$ fonksiyonu ile veriliyor.

a) T nin seviye eğrilerinin şekli nedir?

b) Düzlemin en sıcak olduğu yer neresidir? Bu noktadaki sıcaklık nedir?

c) (3,2) noktasında sıcaklığın en çok arttığı yönü bulun. Bu artışın büyüklüğü nedir?

d) (3,2) noktasında sıcaklığın en çok azaldığı yönü bulun.

e) (3,2) noktasında sıcaklığın artma veya azalma göstermediği yönü bulun.

a) $T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^2+1} = c \Rightarrow x^2+y^2 = \underbrace{\frac{100}{c} - 1}_{r^2}$: çember denklemi

b) En sıcak yer, paydanın en küçük olduğu yer olacaktır. Bu nokta ise $(x,y)=(0,0)$ noktasıdır (x^2+y^2 değerini en küçük yapan nokta) $T(0,0)=100$.

c) $\nabla T = \left\langle \frac{-200x}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{-200y}{(x^2+y^2+1)^2} \right\rangle \Rightarrow \nabla T|_{(3,2)} = \left\langle \frac{-600}{196}, \frac{-400}{196} \right\rangle$

$$= \frac{50}{49}\langle -3,-2\rangle$$

Sıcaklık en çok $\nabla T = \frac{50}{49}\langle -3,-2\rangle$ yönünde $\left(\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\rangle \text{ yönünde}\right)$ artar.

Artışın büyüklüğü, $|\nabla T| = \frac{50}{49}\sqrt{9+4} \approx 3,68$

Yani, (3,2) noktasından $\langle -3,-2\rangle$ yönünde (orijine doğru) hareket edildiğinde sıcaklık, uzaklık birimi başına 3,68 derecelik bir oranla artar.

d) Sıcaklık en hızlı $-\nabla T = \langle 3,2\rangle$ yönünde $\left(\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\rangle \text{ yönünde}\right)$ azalır.

e) $\nabla T \perp \vec{u}$ olduğu durumda sıcaklık değişim göstermez.

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \Rightarrow \nabla T \cdot \vec{u} = 3a+2b = 0 \Rightarrow 3a = -2b$

$\Downarrow$

$a^2+b^2=1 \Rightarrow \frac{4b^2}{9} + b^2 = 1 \Rightarrow 13b^2 = 9 \Rightarrow b = \mp\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow a = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}$

$$\vec{u}_1 = \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle, \quad \vec{u}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

25) $z=\sin(x+y^2)$ yüzeyinin $(\pi,0)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemlerini bulun.

$x=\pi,\ y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow (\pi,0,0)$ noktası

$F: \sin(x+y^2)-z=0 \Rightarrow \nabla F|_{(\pi,0,0)} = \cos(x+y^2)|_{(\pi,0,0)}\vec{i} + 2y\cos(x+y^2)|_{(\pi,0,0)}\vec{j} - \vec{k}$

$= -\vec{i} - \vec{k}$ → teğet düzleme dik
↳ normal doğruya paralel

Teğet düzlem: $-1(x-\pi)+0(y-0)-1(z-0)=0 \Rightarrow -x+\pi-z=0 \Rightarrow x+z=\pi$

Normal doğru: $\left.\begin{array}{l} x=\pi-1\cdot t \\ y=0+0t \\ z=0-1\cdot t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\pi-t \\ y=0 \\ z=-t \end{array}$

26) f türevlenebilir bir fonksiyon, $f(0)=2$ olsun. $z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulun.

$F: xyf\left(\frac{y}{x}\right)-z=0$

$F_x = yf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow F_x|_P=0$

$F_y = xf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow F_y|_P=2$

$F_z=-1$

$\nabla F|_{(1,0,0)} = 0\cdot\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k} = 2\vec{j}-\vec{k}$

Düzlem denklemi: $0\cdot(x-1)+2(y-0)-1\cdot(z-0)=0 \Rightarrow 2y=z$

27) $z=\arctan(x^2-xy)$ yüzeyinin $(0,-1)$ deki teğet düzlemini bulun.

$x=0,\ y=-1 \Rightarrow z=0 \Rightarrow (0,-1,0)$ noktası

$F: \arctan(x^2-xy)-z=0$

$F_x = \dfrac{2x-y}{1+(x^2-xy)^2} \Rightarrow F_x|_{(0,-1,0)}=1$, $F_y=\dfrac{-x}{1+(x^2-xy)^2} \Rightarrow F_y|_{(0,-1,0)}=0$, $F_z=-1$

$\nabla F|_{(0,-1,0)} = \vec{i}-\vec{k}$

Düzlemin denklemi: $1(x-0)+0(y+1)-1(z-0)=0 \Rightarrow x=z.$