ÖZDEĞER, ÖZVEKTÖR ve UYGULAMALARI

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Özdeğer ve Özvektör

Bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu lineer dönüşüm, bir dönme, bir izdüşüm, bir diferansiyel denklem vb. bir dönüşüm olabilir. Eğer, bu lineer dönüşümün matrisi ne kadar kolaysa, hesaplamalar da o ölçüde kolaylaşır. Örneğin, matris bir köşegen matris ise, hem lineer dönüşümle elde edilecek sonuca ulaşmak hem de bu dönüşümünün n-kere uygulanması durumundaki sonuca ulaşmak kolaylaşır. Köşegen bir matrisin kuvvetini hesaplamak da kolaylaşacağından, lineer dönüşümünün n kere uygulanması durumundaki sonuca da çok kolay ulaşabiliriz. Peki bir matrisi köşegen bir matris türünden nasıl yazabiliriz. İşte bu noktada, bize özdeğer ve özvektörler büyük kolaylık sağlacayaktır.
Özdeğer ve özvektörler, bir matrisin köşegenleştirilerek herhangi bir kuvvetinin daha kolay hesaplanmasında, bir matrisin exponansiyelinin bulunmasında, lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde, uzayda dönme matrislerinin hangi eksen etrafında döndüğünün belirlenmesinde ve buna benzer problemlerin çözümünde kullanılan, dolayısıyla lineer dönüşümlerle birlikte uygulama alanı oldukça geniş olan bir konudur. Bu uygulamalarda nasıl kullanıldığını, özdeğer ve özvektör kavramını matematiksel olarak tanımladıktan sonra örneklerle vereceğiz.

Bir Lineer Operatör Hangi Vektörün Doğrultusunu Değiştirmez?

(Bir Matris Hangi Vektörle Çarpılırsa, Vektörün Doğrultusu Değişmez?)
Özdeğer ve özvektör tanımını vermeden önce, bu bölüme bir problemle başlayalım.

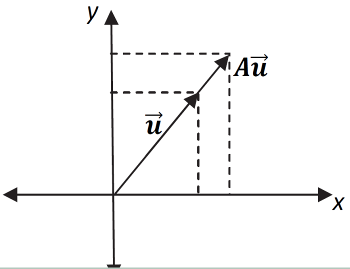
Örnek

Herhangi bir $n \times n$ türünden A kare matrisi verilsin. Sıfır vektöründen farklı, öyle vektörler bulunuz ki, A matrisiyle çarpımı, yine bu vektör doğrultusunda bir vektör versin. Kısaca, problemimiz $\mathbb{R}^n$ uzayından, yine $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlanmış bir dönüşümün hangi vektörlerin doğrultusunu değiştirmediği problemidir.

Bu soruyu 2×2 türünden matris için çözelim. Bir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi alalım. $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$ olsun.
$A\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ doğrultusunda olmasını istiyoruz.



Örnek

O halde, bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$ olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

veya

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü sıfırdan farklı bir vektör olduğuna göre, buradan elde edilecek homojen denklem sisteminin, sıfırdan farklı bir (u_1, u_2) çözümünün olması için ancak ve ancak

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right) = 0$$

olması gerekir. Buradan,

$$\det\begin{bmatrix}\lambda - 1 & -2\\ -3 & \lambda - 1\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \text{veya} \quad \lambda_2 = -1$$

elde edilir. Yani, istenilen şekildeki vektörler için, λ değeri ya 4, ya da -1 olabilir.

Örnek

Buna göre, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünü bulalım. Önce $\lambda = 4$ için, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünü belirlemeye çalışalım.

$$A\overrightarrow{\mathbf{u}} = 4\overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4u_1 \\ 4u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 - 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, $u_1 = 2u_2/3$ elde edilir. Buna göre, $u_2 = 3t$ alınırsa, $u_1 = 2t$ olur ki,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (2t, 3t) = t\,(2, 3)$$

vektörü, problemin koşulunu sağlar. Böylece, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (2, 3)$ alabiliriz.

Örnek

Şimdi de, $\lambda = -1$ için, bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü bulalım.

$$A\overrightarrow{\mathbf{u}} = -\overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 + 3u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $u_1 = -u_2$ olur. $u_2 = t$ ise $u_1 = -t$ dir ve

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-t, t) = t(-1, 1)$$

vektörü problemin koşulunu sağlar. Buna göre, problemin koşulunu sağlayan bir başka vektör de $\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (-1, 1)$ alınabilir. Böylece, 2×2 bir matris için, istenen koşulu sağlayan iki lineer bağımsız vektör bulmuş olduk.

Özdeğer - Özvektör - Karakteristik Polinom - Spektrum

Tanım

A, $n \times n$ türünden bir matris olmak üzere, λ skaleri ve sıfırdan farklı bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü için,

$$A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliği sağlanıyorsa, λ sayısına A matrisinin **özdeğeri (karakteristik değeri),** $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne de λ sayısına karşılık gelen A matrisinin **özvektörü (karakteristik vektörü)** denir. Yani, bir A matrisinin, çarpıldığında doğrultusunu değiştirmediği vektörlere o matrisin özvektörleri denir. Bu tanımı, "$\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı bir lineer dönüşümün doğrultusunu değiştirmediği vektörlere, bu dönüşümün özvektörleri denir" şeklinde de ifade edebiliriz. $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$ eşitliğini,

$$A\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\lambda I_n)\overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow (\lambda I_n - A)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$$

şeklinde yazarak, bir homojen denklem sistemi elde ederiz. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü sıfırdan farklı bir vektör olduğundan, böyle bir homojen denklem sisteminin sıfırdan, yani aşikar çözümden farklı çözümlerinin olabilmesi için, $\det(\lambda I_n - A) = 0$ olması gerekir. A matrisi $n \times n$ türünden olduğu için, bu eşitlik bize n'inci dereceden bir polinom denklem verir.

NOT : Bir özdeğerin sıfır olabileceğini ama, bir özvektörün daima sıfır vektöründen farklı olması gerektiğini unutmayınız.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (3, -2)$ **vektörünün,** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin bir özvektörü olduğunu gösteriniz. Bu özvektör hangi özdeğere karşılık gelir.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{bmatrix}$ **matrisinin bir özvektörü** $\overrightarrow{u} = (3, 4)$ **ise k kaçtır?**

Örnek

$T(x,y) = (x + my, nx + 2y)$ dönüşümü $\overrightarrow{u} = (-3,2)$ ve $\overrightarrow{v} = (-1,1)$ vektörlerinin doğrultusunu değiştirmiyorsa, bu lineer dönüşümü bulunuz.

Problem

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin bir özvektörü* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-1, 1, 1)$ *ise, bu özvektöre karşılık gelen özdeğeri kaçtır?*

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ için, $\det(\lambda I_n - A) = 0$ denkleminin kökleri, A matrisinin özdeğerleridir.

Örnek

$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin özdeğerlerini bulunuz.**

Problem

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Problem

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ **için,** $\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{det}(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ **polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir.**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ *matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$ *matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin tüm özdeğerleri reeldir. Bu özdeğerlerin toplamını bulunuz.*

Problem

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerinin çarpımını bulunuz.*

Bir Matrisin Karakteristik Polinomunun Sabit Terimi

Teorem

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin karakteristik polinomunun sabit terimi

$$(-1)^n \det A$$

değerine eşittir.

Kanıt.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ karakteristik polinomunda, $P(0)$ değeri, bize sabit terimi verir. Buna göre,

$$\begin{aligned} P(0) &= \det(0I - A) \\ &= \det(-A) \\ &= (-1)^n \det A \end{aligned}$$

olur. $\square$

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin karakteristik polinomunun sabit terimi kaçtır?**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin karakteristik polinomunun sabit terimi kaçtır?*

Özdeğer Ne Zaman Sıfır Olur?

Teorem

$\lambda = 0$ değerinin, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin singüler, yani tersi olmayan bir matris olmasıdır.

Kanıt.

$\lambda = 0$ özdeğer ise, karakteristik polinom, $P(\lambda) = \lambda Q(\lambda)$ şeklinde yazılabilir. Yani, $P(0) = 0$'dır. Buna göre,

$$P(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A = 0$$

olduğundan, $\det A = 0$ bulunur. Bu A matrisinin singüler olduğunu gösterir. Tersine, A matrisi singüler ise, $\det A = 0$'dır.

$$0 = \det A = \det(0I_n - A) = P(0)$$

eşitliği $\lambda = 0$ değerinin $P(\lambda)$ polinomunu sağladığını gösterir. Yani, λ bir özdeğerdir. □

Örnek

$\lambda = 0$ değerinin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özdeğeri olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$$S_1 + S_2 = (5, 5, 5, 5)\,,$$
$$S_3 + S_4 = (5, 5, 5, 5)$$

aynı olduğundan $\det A = 0$*'dır ve* 0 *bu matrisin bir özdeğeridir.*

Bir Üçgensel Matrisin Özdeğerleri

Teorem

Bir üçgensel matrisin özdeğerleri, asal köşegen üzerindeki sayılardır.

Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *bir üst üçgensel matris olsun. Bu durumda,* $\lambda I_n - A$ *matrisi de bir üst üçgensel matristir ve determinantı asal köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir. Buna göre,*

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

olacağından, özdeğerler, $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ *olur.*

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$ **matrisinin özdeğerlerinin çarpımı kaçtır?**

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin özdeğerlerini bulunuz.*

Bir Matrisin Trasnpozesinin Özdeğerleri

Teorem

Bir kare matris ile bu matrisin transpozesinin özdeğerleri aynıdır.

Kanıt.

$\det B = \det B^T$ ve

$$(B + \lambda C)^T = B^T + \lambda C^T$$

olduğunu kullanacağız.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= \det(\lambda I_n - A)^t \\ &= \det\left(\lambda I_n^t - A^T\right) \\ &= \det\left(\lambda I_n - A^T\right) \end{aligned}$$

Bu eşitlik, A ve A^T matrislerinin aynı karakteristik polinoma sahip olduğunu gösterir. Yani, özdeğerleri eşittir. $\square$

Simetrik ve Ters Simetrik Matrislerin Özdeğerleri

Teorem

Reel girdili simetrik matrislerin özdeğerleri reel sayıdır. Reel girdili, ters simetrik matrislerin özdeğerleri 0 *veya sadece sanal sayılardan oluşan kompleks sayılardır.*

Örnek

Aşağıdaki matrislerden hangisinin karakteristik polinomu, x eksenini üç noktada keser?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Çözüm

Hepsinin karakteristik polinomları üçüncü derecedendir ve x *eksenini 3 noktada kesebilmesi için, 3 tane reel kökü olmalıdır. C) seçeneğindeki matris simetrik bir matristir ve özdeğerleri kesinlikle reel sayıdır. Yanıt C.*

Özvektörlerin Bulunması ve Özuzaylar

Özdeğerlerin nasıl bulunacağını gördük. Şimdi de, özvektörlerin nasıl bulunacağını inceleyelim. Bir λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denilince, $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}$ eşitliğini sağlayan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü anlaşılır. Açıktır ki, bu eşitliği sağlayan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün sıfırdan farklı katları da, bu eşitliği sağlayacaktır. Örneğin, $2\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü de, $A\left(2\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = 2\lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$ eşitliğini sağlar. Kısaca, özvektör denilince,

$$A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliğini sağlayan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörlerinin doğrultusunu temsil eden bir vektör anlaşılır. Bütün bu $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörlerinin oluşturduğu uzay, $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ vektörü ile birlikte bir altuzaydır. Bu uzaya **özuzay** denilir. Aşağıdaki, teoremi inceleyiniz.

Özuzay

Teorem

$\mathbb{V}_\lambda$ ile, bir $n \times n$ türünden kare matrisin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin kümesini gösterelim. $\mathbb{V}_\lambda \cup \{0\}$ kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altuzayıdır. Bu uzaya, λ özdeğerine karşılık gelen **özuzay** *denir ve $\mathbb{V}_\lambda^0$ ile gösterilir.*

Kanıt.

$\mathbb{V}_\lambda = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n : A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\}$ olsun. $\mathbb{V}_\lambda^0 = \mathbb{V} \cup \{0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ altuzayı olduğunu göstermek için, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}_\lambda$ ve $c \in \mathbb{R}$ için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}_\lambda$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de,

$$A(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \lambda(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}})$$

eşitliği sağlanmalıdır. $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}_\lambda$ olduğundan, $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $A\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}$ olduğunu kullanabiliriz. Buna göre,

$$A(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}}) = A\overrightarrow{\mathbf{u}} + cA\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\lambda\overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}})$$

olduğundan, $\mathbb{V}_\lambda^0$ kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altuzayıdır. $\square$

Bir Matrisin özvektörlerinin bulunması

Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi verilsin.
1. Öncelikle $\det(\lambda I_n - A) = 0$ eşitliğinden, λ özdeğerlerinin bulunması gerekir.
2. Her bir λ değeri için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ olmak üzere, $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}$ yani,

$$(\lambda I - A)\overrightarrow{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$$

eşitliği kullanılarak, $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenleri bulunur. ve parametreye bağlı iseler buna göre ifade edilir. Bu denklem sisteminin, katsayılar matrisi $(\lambda I - A)$ olan bir homojen denklem sistemi olduğuna dikkat ediniz. Bu katsayılar matrisi çoğu zaman elemanteer satır operasyonlarıyla basitleştiririlir.
3. $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, λ özdeğerine karşılık gelen herhangi bir özvektör olmak üzere,

$$\mathbb{V}_\lambda^0 = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}\, t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

uzayı, λ özdeğerine karşılık gelen özuzaydır ve $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altuzayıdır. Bu kümedeki, $\vec{0}$ vektörü dışındaki her vektör, λ özdeğeri için bir özvektördür.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **matrisinin özvektörlerini bulunuz.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin özvektörlerini bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin özvektör uzaylarını bulunuz.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **matrisinin özvektörlerini bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin özvektör uzaylarını bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin özvektörlerini bulunuz.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **matrisinin özvektörlerini bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisinin özuzaylarını bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin reel özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *matrisinin özvektörlerini bulunuz.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **matrisinin özvektörlerini bulunuz.**

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin özvektörlerini bulunuz.*

Benzer Matrisler

Tanım

A ve B, $n \times n$ türünden iki matris olmak üzere,

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde, tersinir bir P matrisi varsa, A ve B matrislerine **benzer matrisler** denir ve

$$A \sim B$$

şeklinde yazılır. P matrisi bir tek değildir.

Benzer Matrislerin İzi ve Determinantı

Teorem

A ve B benzer matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

a) $\det A = \det B$ **b)** $izA = izB$.

Kanıt.

$A \sim B$ ise, $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir P matrisi vardır. Buna göre,

a) Determinant özelliklerinden,

$$\det(B) = \det\left(P^{-1}AP\right) = (\det P)^{-1}(\det A)(\det P) = \det A$$

elde edilir.

b) Bir matrisin izinin özellikleri kullanılırsa,

$$izB = iz\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = iz\left(\left(AP^{-1}\right)P\right) = iz\left(A\left(P^{-1}P\right)\right) = izA$$

olduğu görülür. □

Benzer Matrislerin Özdeğerleri Aynıdır

Teorem

Benzer matrislerin özdeğerleri aynıdır.

Çözüm

A ve B benzer matrisler olsun. A ve B'nin özdeğerlerinin aynı olduğunu göstermek için, $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - B)$ *olduğunu göstermemiz yeterlidir. $A \sim B$ ise $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde bir P matrisi vardır. Buna göre,*

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_n - B) &= \det\left(\lambda I_n - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I - A)P\right) \\
&= \det P^{-1}\det(\lambda I - A)\det P \\
&= \det(\lambda I - A)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özdeğerleri Aynı Olan İki Matris Benzer Olmayabilir

NOT : Bu teoreme göre, özdeğerleri farklı olan iki matrisin kesinlikle benzer olamayacağını söyleyebiliriz. Fakat, bu teoremin tersi doğru değildir. Yani, özdeğerleri aynı olan iki matris benzer olmayabilir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerini alalım. Her iki matrisin de, karakteristik polinomları $P(\lambda) = \lambda^2$ ve özdeğerleri 0'dır. Fakat, A ve B matrisleri benzer değildir. Çünkü, her P tersinir matrisi için,

$$P^{-1}AP = 0$$

olacağından, $P^{-1}AP = B$ olabilmesi mümkün değildir.
NOT : Benzer matrislerin özvektörleri farklı olabilir. Fakat, iki matrisin özdeğerleri farklı ise benzer olamazlar.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **ve** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **matrislerinin benzer olmadığını kanıtlayınız.**

Özdeğerlerin Toplamı ve Çarpı

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir matris olmak üzere, özdeğerleri tekrar edenler de dahil olmak üzere, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olarak veriliyor. Buna göre,

a) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ **b)** $izA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

eşitlikleri sağlanır.

Çözüm

a) *A matrisinin karakteristik polinomu,*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, $P(0) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 'dir. Diğer yandan,

$$P(0) = \det(0 I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

olduğundan, $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ *elde edilir*

Cayley - Hamilton Teoremi ve Uygulamaları

Cayley - Hamilton teoremini vermeden bir soru çözelim.

Örnek

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.**

b) $\mathbf{A^2 - 4A - 5I_2}$ **matrisini bulunuz.**

c) a) ve b)'yi karşılaştırarak bir sonuç çıkarınız.

Çözüm

b)

$$A^2 - 4A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

c) *A matrisinin karakteristik polinomu*

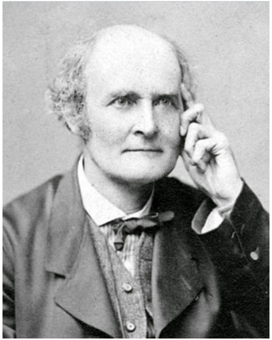
$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

'dir. Diğer yandan, A matrisi kendi karakteristik polinomunda yerine yazılırsa, sıfır matrisi elde edilir. Bu durum, A matrisinin, kendi karakteristik polinomunun bir kökü olduğunu gösterir.

Örnekten de sonuç olarak çıkardığımız bu durum aslında tüm $n \times n$ türünden kare matrisler için geçerli bir durumdur. Bu kullanışlı ve şık sonucu, adını Arthur Cayley ve William Rowan Hamilton adlı matematikçilerden alan Cayley-Hamilton Teoremi ile ifade edeceğiz. Cayley-Hamilton teoremi,

bir matrisin tersini bulmada, ya da bir matrisin herhangi bir kuvvetini hesaplamada

bize pratik çözümler sağlar.



Cayley - Hamilton Teoremi

Teorem

Her kare matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür. Yani, her kare matris kendi karakteristik polinomunu sağlar.

Örnek

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^2 - 2\lambda - 1$'dır ve

$$A^2 - 2A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır

Cayley Hamilton Teoremini Kullanarak Bir Matrisin Tersini Bulmak

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $\det A \neq 0$ olsun. Bu durumda tersinden söz edebiliriz.
A matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda) = \lambda^n + (trA)\,\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + (-1)^n \det A$$

biçimindedir. Buna göre, Cayley-Hamilton teoremine göre

$$A^n + (trA)\,A^{n-1} + \cdots + c_1 A + (-1)^n (\det A)\, I$$

eşitliği sağlanacağından, $(-1)^{n-1} (\det A)\, I = A^n + (trA)\, A^{n-1} + \cdots + c_1 A$ yazılabilir. Bu eşitliği A^{-1} ile çarpıp, A^{-1} yalnız bırakılırsa,

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(\det A)} \left(A^{n-1} + (trA)\, A^{n-2} + \cdots + c_2 A + c_1 I\right)$$

eşitliği elde edilir.

Örnek

Cayley - Hamilton teoremini kullanarak $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini veren bağıntıyı bulunuz.

Çözüm

A matrisinin karakteristik polinomunun $\lambda^2 - 4\lambda - 5$ *olduğunu bir önceki örnekte bulmuştuk. Buna göre,*

$$\begin{aligned} A^2 - 4A - 5I = 0 &\Rightarrow 5I = A^2 - 4A \\ &\Rightarrow 5A^{-1} = A - 4I \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{A - 4I}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Problem

Cayley - Hamilton teoremini kullanarak $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini veren bağıntıyı bulup, tersini bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini, Cayley - Hamilton teoremini kullanarak bulunuz.*

Cayley Hamilton Teoremiyle Bir Matrisin Kuvvetini Hesaplamak

Kısa Bilgi

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda) = \lambda^n + (trA)\,\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + (-1)^n \det A$$

olsun. Bu durumda,

$$A^n = -(trA)\,A^{n-1} - \cdots - c_1 A - (-1)^n (\det A)\, I$$

olduğu kullanılarak, matrisin herhangi bir kuvveti hesaplanabilir.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **ise $\mathbf{A}^9$ matrisini bulunuz.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **ise $\mathbf{A}^{10}$ matrisini bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *ise* A^{12} *matrisini bulunuz.*

Köşegenleştirilebilir Matris

Tanım

Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verilsin. Eğer, D bir köşegen matris olmak üzere,

$$P^{-1}AP = D$$

olacak biçimde tersinir bir P matrisi bulunabiliyorsa, A matrisine **köşegenleştirilebilir matris** denir.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{köşegen matris}$$

Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi

Teorem

Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *kare matrisi verilsin.* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *reel sayıları* A *matrisinin farklı olmaları gerekmeyen özdeğerleri ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ *bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsun.* $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{R}^n$ *vektörleri lineer bağımsız ise,* A *matrisi köşegenleştirilebilir.*

$$P = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 & \cdots & \overrightarrow{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times n} \quad ve \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $P^{-1}AP = D$ *şeklinde yazılabilir.*

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{v}}_1$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$, ..., $\overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir tabanıdırlar ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ ise, $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = c_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + c_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} A\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) &= A\left(c_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + c_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\right) \\ &= c_1 A\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1\right) + c_2 A\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) + \cdots + c_n A\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n\right) \\ &= \lambda_1 c_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 c_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \lambda_n c_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n \end{aligned}$$

olacaktır. □

Köşegenleştiriliebilme ve Özvektör Sayısı

Teorem

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel sayı girdili bir kare matris olsun. A matrisi köşegenleştirilebilirse, A matrisinin lineer bağımsız n tane özvektörü vardır.

Teorem

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel sayı girdili bir kare matris olsun. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ reel sayıları, A matrisinin özdeğerleri ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ vektörleri de, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsun. Özdeğerlerin tamamı birbirinden farklı ise,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$$

özvektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek

$A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2-4\right)$$

olduğuna göre, aşağıdakilerin doğru ya da yanlış olduklarını belirtiniz.

1. **A matrisinin 4 tane özvektörü vardır.**
2. **A matrisinin özvektörleri lineer bağımsızdır.**
3. **A matrisinin özvektörleri $\mathbb{R}^4$ için bir tabandır.**
4. **A matrisi köşegenleştirilebilir.**
5. **$\left(A^2-I\right)\left(A^2-4I\right)=0$ eşitliği sağlanır.**

Çözüm

Tamamı doğrudur.

Köşegenleştirme Adımları

Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verilsin.

1. Adım : A matrisinin karakteristik polinomunun tüm köklerinin, yani özdeğerlerin reel sayı olup olmadığını kontrol et.

2. Adım : i) Tüm kökleri reel sayı değilse, A matrisi köşegenleştirilemez.
ii) Tüm kökleri reel sayı ise, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bul.

3. Adım : i) Bulunan özvektörler $\mathbb{R}^n$ in tabanı değilse A matrisi köşegenleştirilemez.
ii) Bulunan özvektörler $\mathbb{R}^n$ in tabanı ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

4. Adım : Özdeğerleri kullanarak, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ matrisini oluştur.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri sütun olarak yazarak, $P = \left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 \ \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 \ \ldots \ \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\right)$ matrisini oluştur.

Bir matrisin bir kuvvetini, köşegenleştiriliyorsa nasıl hesaplayabiliriz?

Kısa Bilgi

P matrisi yardımıyla, $P^{-1}AP$ matris çarpımıyla A matrisi köşegenleştirilebilir ve D matrisi elde edilebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} D^n &= \left(P^{-1}AP\right)^n \\ &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

olduğundan, $A^n = PD^nP^{-1}$ 'dir.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisini köşegenleştiren P matrisini bulunuz.** $\mathbf{A}^n$ **matrisini hesaplayınız.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisini köşegenleştiren P matrisini bulunuz.** $\mathbf{A}^n$ **matrisini hesaplayınız.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **ise $\mathbf{A}^n$ matrisini köşegenleştirerek hesaplayınız.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ *ise* A^n *ve* A^9 *matrisini bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *ise* A^n *matrisini bulunuz.*

Özdeğer ve Özvektörlerin Bazı Uygulamaları

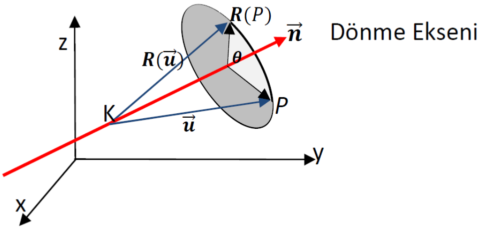
Bu bölümde, özdeğer ve özvektörlerin üç uygulaması üzerinde duracağız. Uzaydaki bir dönme hareketinin eksenini bulmada, bir reel katsayılı lineer denklem sisteminin çözümünde ve herhangi bir kare matrisin exponensiyelinin hesaplanmasında özdeğer ve özvektörlerin nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz.

Uzayda Dönme Ekseninin Bulunması

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir dönme, bir eksen etrafında gerçekleşir. Bu eksene **dönme ekseni** denir. Bu eksen üzerindeki bir vektör, **R** dönme dönüşümü altında değişmez. Yani $\mathbf{R}(\overrightarrow{\mathbf{n}}) = \overrightarrow{\mathbf{n}}$ koşulunu sağlar. Bu **R** dönme dönüşümüne karşılık gelen matrisin bir özdeğerinin 1 olduğu anlamına gelir. Bu durumda, $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ vektörü de **R** dönüşümünün özvektörüdür. Böylece, bir dönme dönüşümünde, dönme matrisinin 1'e kaşılık gelen özvektörü bulunursa, dönme ekseni belirlenmiş olur. Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki herhangi bir **R** dönme matrisinin belirttiği dönme açısı :

$$1 + 2\cos\theta = iz\mathbf{R}$$

eşitliğinden bulunur.



Dönme Ekseni 1 özdeğerine karşılık gelen özvektördür

$R\left(\overrightarrow{n}\right)=\overrightarrow{n}$ koşulunu sağlayan vektör, yani $\lambda=1$ özdeğerine karşılık gelen özvektör dönme eksenidir.

Örnek

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

ile verilen dönme matrisi, $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir noktayı hangi eksen etrafında döndürür?

Problem

Siz de, $\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ *ve* $\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *matrislerinin, sırasıyla* x *ekseni ve* y *ekseni etrafında bir noktayı* θ *açısı kadar döndürdüklerini görünüz.*

Örnek

$R = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -8 \\ -7 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisi bir noktayı bir $\overrightarrow{n}$ ekseni etrafında θ açısı kadar döndüren bir dönme dönüşümünün matrisidir. $\overrightarrow{n}$ dönme ekseniyle, θ dönme açısını bulunuz.**

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi Uygulamaları

Tanım

Bu bölümde, reel katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde özdeğer ve özvektörlerin nasıl kullanıldığını göreceğiz. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

formundaki diferansiyel denklem sistemine, birinci dereceden n değişkenli **reel katsayılı diferansiyel denklem sistemi** denir. Bu denklemi kısaca,

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad ve \qquad A = X' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $X' = AX$ biçiminde yazabiliriz.

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü

Teorem

$X' = AX$ formunda verilen bir diferansiyel denklem sisteminin çözümleri, λ_i, A matrisinin bir özdeğeri ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i$, λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör olmak üzere,

$$* \qquad X(t) = C_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_k e^{\lambda_k t} + \cdots + C_k \overrightarrow{\mathbf{u}}_k e^{\lambda_k t}$$

biçimindedir.

Kanıt.

Verilen diferansiyel denkleminin bir çözümü, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i$, sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere $X(t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t}$ olsun. Buna göre,

$X(t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow X'(t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_i \lambda e^{\lambda_i t}$ $(*)$ (Türev aldık)

$X(t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow AX(t) = A\overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t}$ $(**)$ (Her iki tarafı A ile çarptık)

eşitliklerinden, $X' = AX$ olması için gerek ve yeter koşulun $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i \lambda e^{\lambda_i t} = A\overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t}$ olduğunu görürüz. Bu eşitliğe göre de $e^{\lambda_i t} \neq 0$ olduğundan, $A\overrightarrow{\mathbf{u}}_i = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}_i$ olması gerekir. Bu ise, λ'nın bir özdeğer, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i$ vektörünün ise, λ özdeğerine karşılık gelen özvektör olması demektir. Diğer yandan, $X(t) = \overrightarrow{\mathbf{u}}_i e^{\lambda_i t}$ bir çözüm ise, $X(t) = C_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_k \overrightarrow{\mathbf{u}}_k e^{\lambda_k t}$ toplamı da bir çözümdür. □

Örnek

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$ **diferansiyel denklem sistemini çözünüz.**

Problem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$$ *diferansiyel denklem sistemini çözünüz.*

Problem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z \end{cases}$$ *diferansiyel denklem sistemini çözünüz.*

Bir Matrisin Exponansiyelinin Hesaplanması

Bir matrisin exponansiyeli, özellikle bilgisayar ve makine mühendisliğinde karşılaşılan bazı problemlerin çözüm aşamasında kullnılmaktadır. Bunun yanında, dönme matrislerinin elde edilmesinde kullanılır. Örneğin, A bir ters simetrik matris olmak üzere, $e^{\theta A}$ matrisi, $\mathbb{R}^2$ de orjin, $\mathbb{R}^3$ de bir eksen etrafında θ açısı kadar dönmeyi gösteren bir dönme matrisidir. Bir matrisin exponensiyeli,

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

seri açılımı kullanılarak hesaplanabilir. Bu seri daima yakınsak olduğundan, iyi tanımlıdır ve sonuçta bir matris elde edilir.

Bir Matrisin Exponansiyelinin Hesaplanması

A matrisi köşegenleştirilebiliyorsa, yani D özdeğerlerden oluşan bir köşegen matris ve P özvektörlerin oluşturduğu matris olmak üzere, $A = PDP^{-1}$ şeklinde yazılabiliyorsa,

$$\left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$

olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} e^A &= PIP^{-1} + PDP^{-1} + \frac{PD^2P^{-1}}{2!} + \frac{PD^3P^{-1}}{3!} + \frac{PD4P^{-1}}{3!} + \cdots \\ &= P\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^DP^{-1} \end{aligned}$$

eşitliğinden, e^A matrisi elde edilebilir.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere, e^A matrisini bulunuz.

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *olmak üzere,* e^A *matrisini bulunuz.*

Bölüm Sonu Tekrar Testi (Özdeğer - Özvektör)

Bölüm Sonu Tekrar Testi (Özdeğer - Özvektör)

SORU

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$ **B)** $\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ **C)** $\{1, -1\}$ **D)** $\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ **E)** $\{0, 1\}$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} v$**B)** $\{1, 5\}$ **C)** $\{1, -1\}$ **D)** $\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ **E)** $\{0, 1\}$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, -1\}$ **B)** $\{1, 7\}$ **C)** $\{0, -1\}$ **D)** $\{0, 7\}$ **E)** $\{0, 1\}$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 6

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 6

SORU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisinin özdeğerlerinin çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 6

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, -2, 1)$ vektörü $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özvektörü olduğuna göre, bu özvektöre karşılık gelen özdeğer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 **B)** 2 **C)** -1 **D)** 1 **E)** 6

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1,1,1)$ vektörü

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin bir özvektörü olduğuna göre, bu özvektöre karşılık gelen özdeğer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 **B)** 2 **C)** -1 **D)** 1 **E)** 3

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 1$ **B)** $\lambda^3 - 1$ **C)**$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$ **D)** $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1$ **E)** $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 0 **B)** 2 **C)** -1 **D)** 1 **E)** 3

SORU

Aşağıdaki matrislerden hangisinin özdeğerlerinden biri 0'dır?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

Aşağıdaki matrislerden birinin üç reel özdeğeri yoktur? Bu matris hangisdir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin kaç tane özvektörü vardır?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özvektörüdür?

A) $(1,2)$ **B)** $(0,1)$ **C)** $(2,1)$ **D)** $(1,1)$ **E)** $(-1,2)$

SORU

$A = [a_{ij}]_{6\times 6}$ matrisinin özdeğerlerinin tamamı reel sayı ve $1, 2, 3, 4$ olduğuna göre, $\det A$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 360 **B)** 144 **C)** 120 **D)** 0 **E)** 168

SORU

$A = [a_{ij}]_{6\times 6}$ matrisinin özdeğerlerinin tamamı reel sayı ve $1, 2, 3, 4$ olduğuna göre, izA aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 14 **B)** 19 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 20

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi sıfır matrisidir?

A) $A^2 + 3A$ **B)** $A^2 - 2A - I$ **C)** $A^2 - 3A - I$ **D)** $A^2 - 3A$ **E)** $A^2 - A - I$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{A-2I}{2}$ **B)** $\dfrac{A+2I}{2}$ **C)** $\dfrac{A-3I}{2}$ **D)** $\dfrac{3I-A}{2}$ **E)** $\dfrac{A+3I}{2}$

SORU

Aşağıdaki matrislerden hangisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisine benzer bir matristir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$$\frac{dx}{dt} = x + y,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x,$$

$x'(0) = 0$, $y'(0) = 3$ diferansiyel denklem sisteminine göre, $2x(1) + y(1) = ?$

A) $3e^2$ **B)** $-e^{-1}$ **C)** $2e^{-1}$ **D)** $-e^2$ **E)** $e^2 - e^{-1}$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için, A^n matrisinin izi aşağıdakilerden hangisidir?

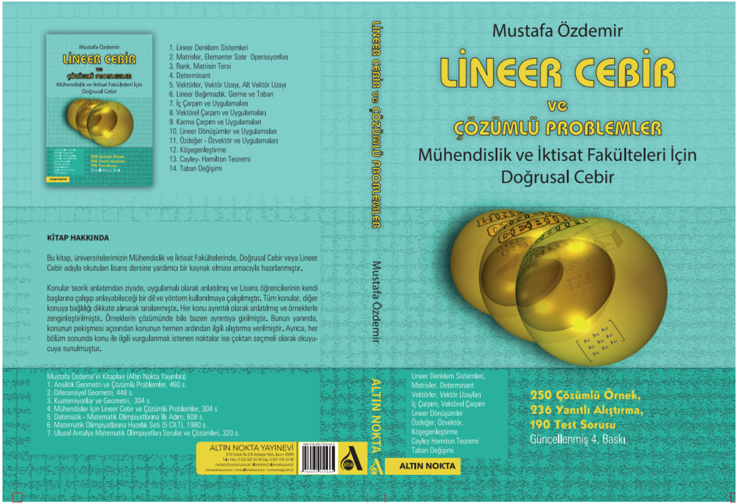
A) $(5-1)^n$ **B)** $1+5^n$ **C)** 5^n **D)** 5^n-1 **E)** $(-1)^n+5^n$

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için, $C = A^n = [c_{ij}]$ matrisinin $5c_{11}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2)^n + 3^n$ **B)** $2(-2)^n + 3 \cdot 3^n$ **C)** 5^n **D)** $2(-2)^n - 3(-3)^n$ **E)** $2(-2)^n + 3 \cdot 3^n$

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.



https://www.altinnokta.com.tr/tr/162_mustafa-ozdemir