MATRİSLER

Tanım 1.1: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir ***matris*** veya kısaca $m \times n$-matris denir. $m \times n$ ye ***matrisin mertebesi*** denir. Elemanları a_{ij} ler olan bir A matrisi $A = [a_{ij}]$ şeklinde gösterilir. a_{ij} ler reel sayı ise A ya ***reel matris***, kompleks sayı ise A ya ***kompleks matris*** denir.

Tanım 1.3: Bir tek satırdan oluşan matrise ***satır matrisi*** denir. Satır matrisin mertebesi $1 \times n$ şeklindedir. B matrisi satır matrisdir.
$B = [\ 6 \ \ 7 \ \ 0 \ \ -8\ ]$

Tanım 1.4: Bir tek sütundan oluşan matrise ***sütun matrisi*** denir. Sütun matrisin mertebesi m×1 şeklindedir.

$$D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tanım 1.5: Her elemanı sıfır olan matrise ***sıfır matrisi*** denir. G matrisi 2×3 mertebesinden bir sıfır matrisidir. Sıfır matris 0 ile gösterilir.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 1.6: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise ***kare matris*** denir. C matrisi 3×3 mertebeden, kare matristir.

$$C=\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & \pi/2 & e \\ 5 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A=[\,a_{ij}\,]$, $n\times n$ mertebesinden bir kare matris ise $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elemanlarına A nın ***asal köşegen elemanları*** denir. Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına da ***kare matrisin iz***'i denir. Yani $izA = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ dir.

Tanım 1.7: $A=[\,a_{ij}\,]$, $n\times n$ mertebesinden bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise ***köşegen matris*** denir. Köşegen matrislere örnek olarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ matrisini verebiliriz.

Tanım 1.8: Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{nn}=k$ ise matrise ***skaler matris*** denir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisi skaler matristir.

Tanım 1.9: Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 ise matrise ***birim matris*** denir. $n\times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 1.10: Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere ***eşit matrisler*** denir. $m\times n$ mertebeden $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri eşit ise $A=B$ şeklinde yazılır.

Örnek 1.11:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & t & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & y \\ 2 & -6 & z \end{bmatrix}$$ matrislerinin eşit

olması için gerek ve yeter koşul

$x=2$, $y=-7$, $z=3$, $t=-6$ olmasıdır.

Tanım 1.12: Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen , aynı mertebeden bir matristir. Yani $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$, $m\times n$ mertebesinden iki matris ise bunların ***toplamı*** $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$, $m\times n$-matrisidir. Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

Örnek 1.13:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 6 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 4 & 7 & -6\\ 0 & -3 & 0 & 1\\ 9 & 4 & 2 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 0 & 5\end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}5+8 & -3+4 & 0+7 & 2+(-6)\\ -1+0 & 0+(-3) & 6+0 & 2+1\\ 0+9 & -2+4 & 1+2 & 4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 1 & 7 & -4\\ -1 & -3 & 6 & 3\\ 9 & 2 & 3 & 9\end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Ancak $A+C$ ve $B+C$ tanımlı değildir.

Tanım 1.14: A bir matris ve λ bir skaler olmak üzere , λA skaler çarpımı A'nın her bir elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen bir matristir. $(-1)A$ çarpımı $-A$ ile gösterilir. Eğer A ve B aynı mertebeden iki matris ise bu iki ***matrisin farkı***

$$A-B=A+(-B)=A+(-1)B \quad \text{dir.}$$

Örnek 1.15:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -4\\ 0 & 2 & 8\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad 2A=\begin{bmatrix}2 & 10 & -8\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}$$

ve

$$B=\begin{bmatrix}3 & 7 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A-B=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -4\\ -4 & -3 & 2\end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılarak, matrislerde toplama ve skalerle çarpmanın özellikleri aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 1.16: A, B, C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

i-) $A + B = B + A$ (değişme özelliği)
ii-) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (birleşme özelliği)
iii-) $A + 0 = A$ (etkisiz eleman)
iv-) $A - A = 0$
v-) $\lambda_1 (A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$
vi-) $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
vii-) $(\lambda_1 \lambda_2) A = \lambda_1 (\lambda_2 A)$

özellikleri vardır.

Tanım 1.17: $A = [a_{ij}]$ bir $m \times r -$ matris ve $B = [b_{ij}]$ bir $r \times n -$matris ise bunların ***çarpımı*** $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ için,

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ir} b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

olmak üzere $AB = [c_{ij}]$, $m \times n -$ matrisidir.

Herhangi iki matris her zaman çarpılamaz. İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

Örnek 1.18:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 & -1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 17 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Matrislerin toplama, çarpma ve skalerle çarpma tanımlarından aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.19: A $m{\times}n$ matris, B ve C $n{\times}r$ matrisler, D $r{\times}t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i-) $A (B D) = (A B) D$
ii-) $A (B + C) = A B + A C$
iii-) $(B + C) D = B D + C D$
iv-) $\lambda (A B) = (\lambda A) B = A (\lambda B)$
v-) $A0 = 0$
vi-) $AI = IA = A$
vii-) Genellikle $A B \neq B A$ dır.(A ve B iki kare matris olmak üzere $A B = B A$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B ye ***değişmeli***dir denir.)

Örnek 1.20:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ matrisleri için}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix} \text{ ve } BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \text{ olup } AB \neq BA \text{ dir.}$$

Tanım 1.21: A bir kare matris olsun. A nın n defa kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen matrise A nın ***n*. *kuvveti*** denir. Yani

$$\underbrace{A.A.....A}_{n} = A^n$$

dir. Ayrıca,

$$A^k A^l = A^{k+l} \quad \text{ve} \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (k,l \in N) \qquad \text{dir.}$$

Tanım 1.22: Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarını yer değiştirerek elde edilen matrise A nın ***transpozesi (devriği)*** denir ve A^t, A^T ya da A' ile gösterilir. Buna göre $A=[a_{ij}]$, $m\times n$ - matrisi ise A^t = $[a_{ji}]$ $n\times m$ - matrisidir.

Örnek1.23:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 5 & 0\end{bmatrix} \text{ ise } \qquad A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\end{bmatrix} \text{ ise } \qquad B^t=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 5\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$C=\begin{bmatrix}7\end{bmatrix} \quad \text{ise} \qquad C^t=\begin{bmatrix}7\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem 1.24: A , B aynı mertebeden iki matris ve λ bir skaler olmak üzere

i-) $(A+B)^t = A^t + B^t$

ii-) $(A^t)^t = A$

iii-) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

iv-) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere $(AB)^t = B^t A^t$ dir.

Tanım 1.25: $A^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine ***simetrik matris*** denir. Eğer $A=[a_{ij}]$ bir simetrik matris ise her i, j için $a_{ij}=a_{ji}$ dir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$ bir simetrik matristir.

Tanım 1.26: $A^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ***ters simetrik matris*** (***anti-simetrik matris***) denir. Eğer $A=[a_{ij}]$ bir ters simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Şu halde bir ters simetrik matriste asal köşegen elemanları hep sıfırdır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ bir ters simetrik matristir.