Ters Türev

Bir I aralığındaki her x için $F'(x)=f(x)$ ise I aralığındaki $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in ters türevi denir.

★ Eğer F, I aralığında f fonksiyonunun bir ters türevi ise f in I üzerindeki en genel ters türevi:

$F(x)+c$ dir. (c: keyfi sabit)

Örneğin:

Fonksiyon		Genel Ters Türevi
x^n	$\longrightarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$
$\sin kx$	$\longrightarrow$	$-\frac{\cos kx}{k}+c$
$\cos kx$	$\longrightarrow$	$\frac{\sin kx}{k}+c$
$\sec^2 kx$	$\longrightarrow$	$\frac{\tan kx}{k}+c$

Belirsiz İntegral:

$f(x)$ in tüm ters türevlerinin kümesine "$f(x)$ in x'e göre belirsiz integrali" denir.

$\int f(x)dx$ ile gösterilir.

İntegral Tablosu

① $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$, $\int k\,dx = kx + c \quad$ (k: bir sayı)

② $\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + c \qquad \frac{\sin kx}{k} + c$

③ $\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + c \qquad -\frac{\cos kx}{k} + c \qquad \frac{\tan kx}{k} + c$

④ $\int \sec^2 kx\,dx = \int (1+\tan^2 kx)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 kx}\,dx = \frac{\tan kx}{k} + c$

⑤ $\int \operatorname{cosec}^2 kx\,dx = \int (1+\cot^2 kx)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 kx}\,dx = -\frac{\cot kx}{k} + c \qquad -\frac{\cot kx}{k} + c$

⑥ $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c \qquad -\ln|\cos x| + c$

⑦ $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c \qquad \ln|\sin x| + c$

⑧ $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \qquad \ln|\sec x + \tan x|$

⑨ $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c \qquad -\ln|\csc x + \cot x|$

⑩ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

⑪ $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$

⑫ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

⑬ $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$

⑭ $\int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$

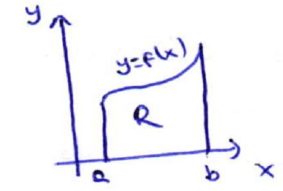
⑮ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

⑯ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

BELİRLİ İNTEGRAL

Riemann Toplamı

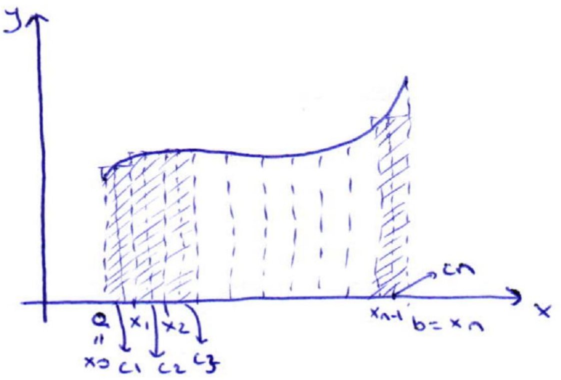
$y=f(x)$ sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere; f in grafiği altında, x-ekseninin üstünde, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulalım:



* $[a,b]$ aralığını keyfi olarak $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ noktaları ile keyfi n alt aralığa bölelim.

$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ kümesine $[a,b]$ nin bir bölüntüsü denir.

$[x_{i-1},x_i]$ $(1\le i\le n)$ alt aralıklarına da P bölümünün alt aralıkları denir. Her $[x_{i-1},x_i]$ alt aralığının uzunluğunu Δx_i ile gösterelim; yani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun. Bu alt aralıkların içinden birer keyfi c_i noktası seçelim:



$[a,b]$

$[x_0,x_1]$	$[x_1,x_2]$	...	$[x_{n-1},x_n]$
↓	↓		↓ (uzunluk)
Δx_1	Δx_2	— — —	Δx_n
↓	↓		↓
c_1	c_2	— — —	c_n
↓	↓		↓
$f(c_1)$	$f(c_2)$	— — —	$f(c_n)$
↓	↓		↓
$f(c_1).\Delta x_1$	$f(c_2)\Delta x_2$	— — —	$\underbrace{f(c_n)}_{\text{küçük dikdörtgenin uzun kenarı}} . \underbrace{\Delta x_n}_{\text{kısa kenar}}$

Bu durumda her bir dikdörtgenin alanı $f(c_i).\Delta x_i$ olur.

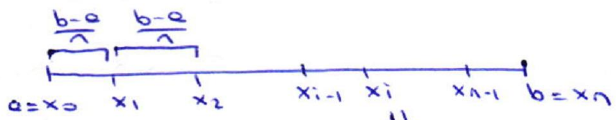
$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$ toplamına "f fonksiyonu ve P bölüntüsü için Genel Riemann Toplamı" denir.

Alt aralıkların en büyüğü sıfıra gidecek şekilde alt aralıkların sayısını sınırsız arttırırsak ($n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$ için limit alırsak):

$$\boxed{R'\text{nin Alanı} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i} \quad \text{olur.}$$

★ R nin alanı $[a,b]$ nin nasıl bölündüğü ve c_i'lerin nasıl seçildiğinden bağımsızdır. Dolayısıyla çeşitli P bölüntüleri ve c_i seçimine bağlı birçok Riemann Toplamı yazılabilir.

★ Eğer $[a,b]$ yi eşit n parçaya böler ($\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ olur) ve c_i yi her aralığın:



$$\Downarrow$$

$$x_i = a + i\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_{i-1} = a + (i-1)\cdot\frac{b-a}{n}$$

a) Sağ uç noktası alırsak:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{a + i\cdot\frac{b-a}{n}}_{c_i}\Big)\cdot\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}$$

b) Sol uç noktası alırsak:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{a + (i-1)\cdot\frac{b-a}{n}}_{c_i}\Big)\cdot\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}$$

Riemann Toplamlarını elde ederiz.

Alt ve Üst Riemann Toplamları

$f(x)$ fonksiyonu ve P bölüntüsü için:

* Alt Riemann Toplamı : $L(f,P)$

Üst Riemann Toplamı: $U(f,P)$ ile gösterilir.

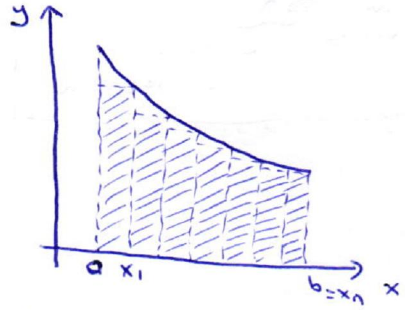
* l_i: her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının minimumu

u_i: " " " maksimumu olmak üzere:

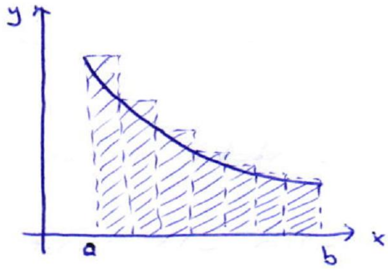
$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i).\Delta x_i = f(l_1).\Delta x_1 + \dots + f(l_n).\Delta x_n \Rightarrow$$ Aralığın min. noktaları baz alınır

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i).\Delta x_i = f(u_1).\Delta x_1 + \dots + f(u_n).\Delta x_n \Rightarrow$$ Aralığın max noktaları baz alınır

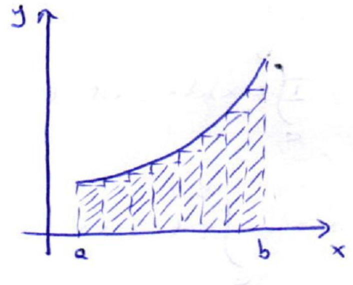
ile tanımlanır.



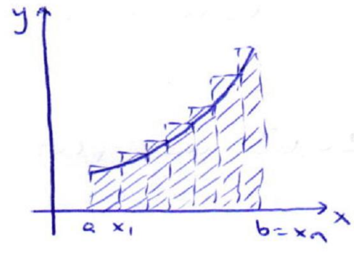
Azalan fonk. için
Alt Riemann toplamında
sağ uç noktalar baz alınır



Azalan fonk. için Üst Rie. Toplamında sol uç noktalar baz alınır



Artan fonk için
Alt Riemann toplamında
sol uç noktalar baz alınır



Artan fonk. için Üst Riemann Toplamında sağ uç noktalar baz alınır

Belirli integral

Eğer her seferinde birbirlerine daha yakın ve daha çok sayıda noktaya sahip P bölümleri için, $L(f,P)$ ve $U(f,P)$ toplamlarını hesaplarsak limit durumunda bu toplamlar ortak bir değere yakınsarlar; ki bu değer, $f(x)\geq 0$ ise : $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ ile sınırlı bölgenin alanıdır.

☆ Her P bölünmesi için, $L(f,P)\leq I\leq U(f,P)$ olacak şekilde bir tek I sayısı varsa f integre edilebilirdir.

Bu I sayısına "f in $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali" denir.

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} L(f,P)=\lim_{n\to\infty} U(f,P)=\lim_{n\to\infty} \underbrace{S_n}_{\text{Genel Rie. Toplam.}}}$$

☆ f in $[a,b]$ deki integrali bir sayıdır.

☆ a : integralin alt sınırı

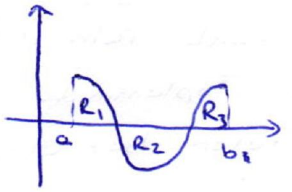
b : integralin üst sınırı

dx : x in diferansiyeli (Riemann toplamındaki Δx yerine gelir)

x : integrasyon değişkenidir.

☆ $[a,b]$ nin tüm P bölümleri için $L(f,P)\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P)$ dir.

☆ Eğer $[a,b]$ de $f(x)\leq 0$ ise R nin Alanı $=-\int_a^b f(x)\,dx$ dir.

☆ 

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = R_1+R_3-R_2$$

* Genel Riemann Toplamı ile Belirli İntegral:

a) $[a,b]$ eşit n parçaya bölünür ve c_i ler sağ uçtan seçilirse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i.\frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n}\right\}$$ formülü ile hesaplanır.

b) $[a,b]$ eşit n parçaya bölünür ve c_i ler sol uçtan seçilirse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1).\frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n}\right\}$$ formülü ile hesaplanır.

Toplam formülleri

① $$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

② $$\sum_{i=1}^{n} a = a+a+\dots+a = a.n$$

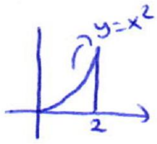
③ $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+2^2+\dots+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

④ $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$$

⊛ $f(x)=x^2$ için $[0,2]$ aralığının bir bölüntüsünü $P=\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ alarak alt ve üst toplamları bulunuz.

$[0,2] \to [0,\frac{1}{2}]$ $[\frac{1}{2},1]$ $[1,\frac{3}{2}]$ $[\frac{3}{2},2]$ $\to$ 4 Aralık

$\Delta x_k = \frac{1}{2}$ $(k=1,2,3,4)$



Fonksiyon artan. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı için:

$U_k = x_k \to$ Aralığın maksimumu sağ uçta

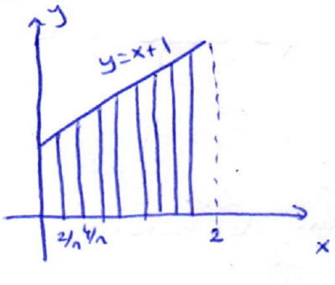
$l_k = x_{k-1} \to$ " minimumu sol uçta

$[0,\frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2},1]$	$[1,\frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2},2]$
$u_1=\frac{1}{2} \to f(u_1)=\frac{1}{4}$	$u_2=1$ $f(u_2)=1$	$u_3=\frac{3}{2}$ $f(u_3)=\frac{9}{4}$	$u_4=2$ $f(u_4)=4$
$l_1=0 \to f(l_1)=0$	$l_2=\frac{1}{2}$ $f(l_2)=\frac{1}{4}$	$l_3=1$ $f(l_3)=1$	$l_4=\frac{3}{2}$ $f(l_4)=\frac{9}{4}$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{4} f(l_i).\Delta x_i = \frac{1}{2}.0+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.\frac{9}{4} = \frac{14}{8} \to \text{Alt Toplam}$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{4} f(u_i).\Delta x_i = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.\frac{9}{4}+\frac{1}{2}.4 = \frac{30}{8} \to \text{Üst Toplam}$$

⊛ $y=x+1$ doğrusu altında, x-ekseninin üstünde, $x=0$ ve $x=2$ arasında kalan bölgenin alanını üst Riemann toplamı ile bulunuz.



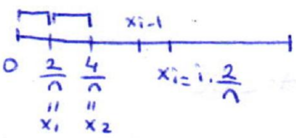
I. Yol

$[0;2]$ aralığını eşit n parçaya bölelim.

Bu durumda her bir aralığın uzunluğu

$\Delta x_i = \frac{2}{n}$ $(i=1,..,n)$ olur.

$[x_{i-1}, x_i]$ temel aralığının maksimumu, fonk. artan olduğu için, sağ uç olan x_i noktasında olur.



$$x_i = \frac{2i}{n} \rightarrow f(x_i) = f\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{2i}{n} + 1$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(\frac{2i}{n} + 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} \cdot i + \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n} \cdot n$$

$$= 2 \cdot \frac{(n+1)}{n} + 2$$

$$\lim_{n \to \infty} U(f,P) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n+1)}{n} + 2 = \underline{\underline{4}}$$

II. Yol

$y = x+1$ $[0,2]$ aralığında artandır. Her bir aralığın maksimumu sağ uçta olur.

$[0,2]$ aralığını eşit n parçaya böler ve sağ uç formülü kullanılırsa:

$$\lim_{n \to \infty} U(f,P) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{2-0}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right) \right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1\right)$$

$\Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad f(x) = x+1$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \left[\cancel{\frac{2}{n}} \cdot \cancel{\frac{n(n+1)}{2}} + n \right]$$

$x_i = \frac{2i}{n}$

$$= \underline{\underline{4}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} + 1\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$\frac{2}{n}\left(\cancel{\frac{2}{n}} \cdot \cancel{\frac{n(n+1)}{2}} + n \right)$$

$$\frac{2(2n+1)}{n}$$

$$\frac{4n+1}{n} = 4$$

Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri :

Eğer f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise f in $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeri:

$$ort(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ dir.}$$

Belirli İntegralin Özellikleri :

① $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

② $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

③ $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

④ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

⑤ $[a,b]$ de $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$[a,b]$ de $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

⑥ Eğer $\max f$ ve $\min f$, f in $[a,b]$ deki max ve min değerleri ise:

$\min f.(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f.(b-a)$ dır. Bu özelliğe Max-Min Eşitsizliği denir.

(112)

* Belirli integralin özelliklerini kullanarak $\int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx$ integralinin değerinin $\sqrt{2}$ ye eşit veya daha küçük olduğunu gösteriniz.

$\sqrt{1+\cos^3 x}$ in $[0,1]$ aralığındaki maksimum değeri $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ dir. Belirli integralin max-min eşitsizliği özelliğine göre

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx \leq \underbrace{\max f}_{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(1-0)}_{1} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx \leq \sqrt{2} \text{ dir.}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2} \cdot 1$$