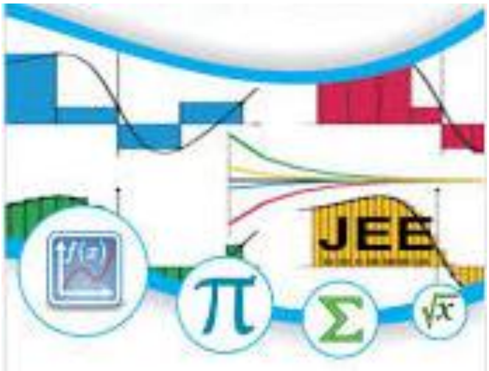

# SAYISAL INTEGRAL




Yıldız Teknik Üniversitesi- Banu Diri

# Sayısal Integrasyon Kavramı ve Çeşitleri

$$\int_a^b f(x).dx \approx \text{yaklaşık hesaplama}$$

fikirlerinin bütününe **sayısal integrasyon** denir

Sayısal Analiz dersinde Newton Cotes formüllerine odaklanacağız

$$\int_a^b f(x).dx \approx \int_a^b f_n(x).dx \approx$$

polinom $f_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

$f_n$ dediğim şey bir polinom

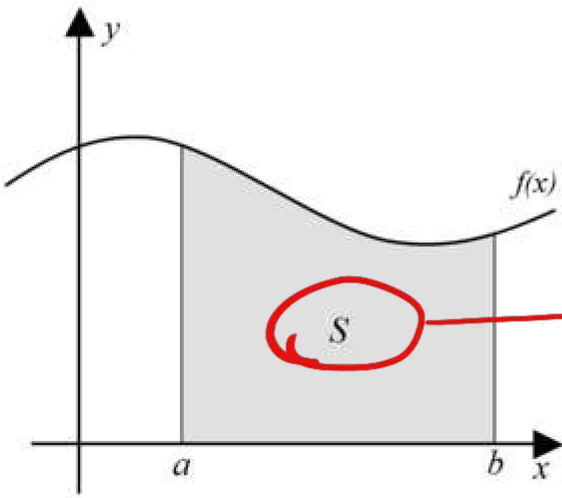
fonk. polinom cinsinden yazmaya çalışıcam

Polinomu doğru, parabol, kübik bir ifade olarak uydurabiliriz. Bunların her biri de Newton Cotes için bir alt başlıktır

Burda fonksiyonun integralini yaklaşık olarak hesaplıyorum eğer polinomumun derecesi 1 ise bir doğru 2. dereceden ise bir parabol 3. dereceden ise bir kübik geçirmiş oluruz

Sonra ben burdaki fonksiyonu bir polinoma çevirmeye çalışıyorum

integral demek alan demektir




$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup, değeri y=f(x) eğrisinin altında ve x=a ile x=b doğruları arasında kalan alana eşittir

fonksiyondan
geçiri-

Burda fo... bir parabol ...yoruz

# Sayısal Integral Çeşitleri

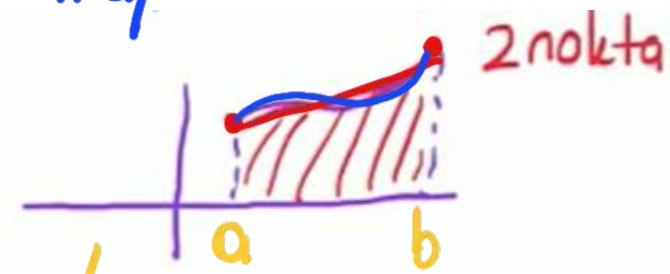
Burdan sorumlu değiliz

## Doğru Uydurma

$$f_n(x) = a_0+a_1x$$

YAMUK Kuralı
(Trapezoidal Rule)

Trapez kuralı




Trapez kuralında 2 nokta var

## Parabol Uydurma

$$f_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$$

Simpson's 1/3 kuralı


parabolün en alt noktasına denk gelir.

## Kübik Polinom Uydurma

$$f_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

Simpson's 3/8 kuralı


3 parçaya bölünür

Sayısal integral çeşitlerinde newton-Cotes formüllerini kullanıyoruz

# TRAPEZ (YAMUK) YÖNTEMİ

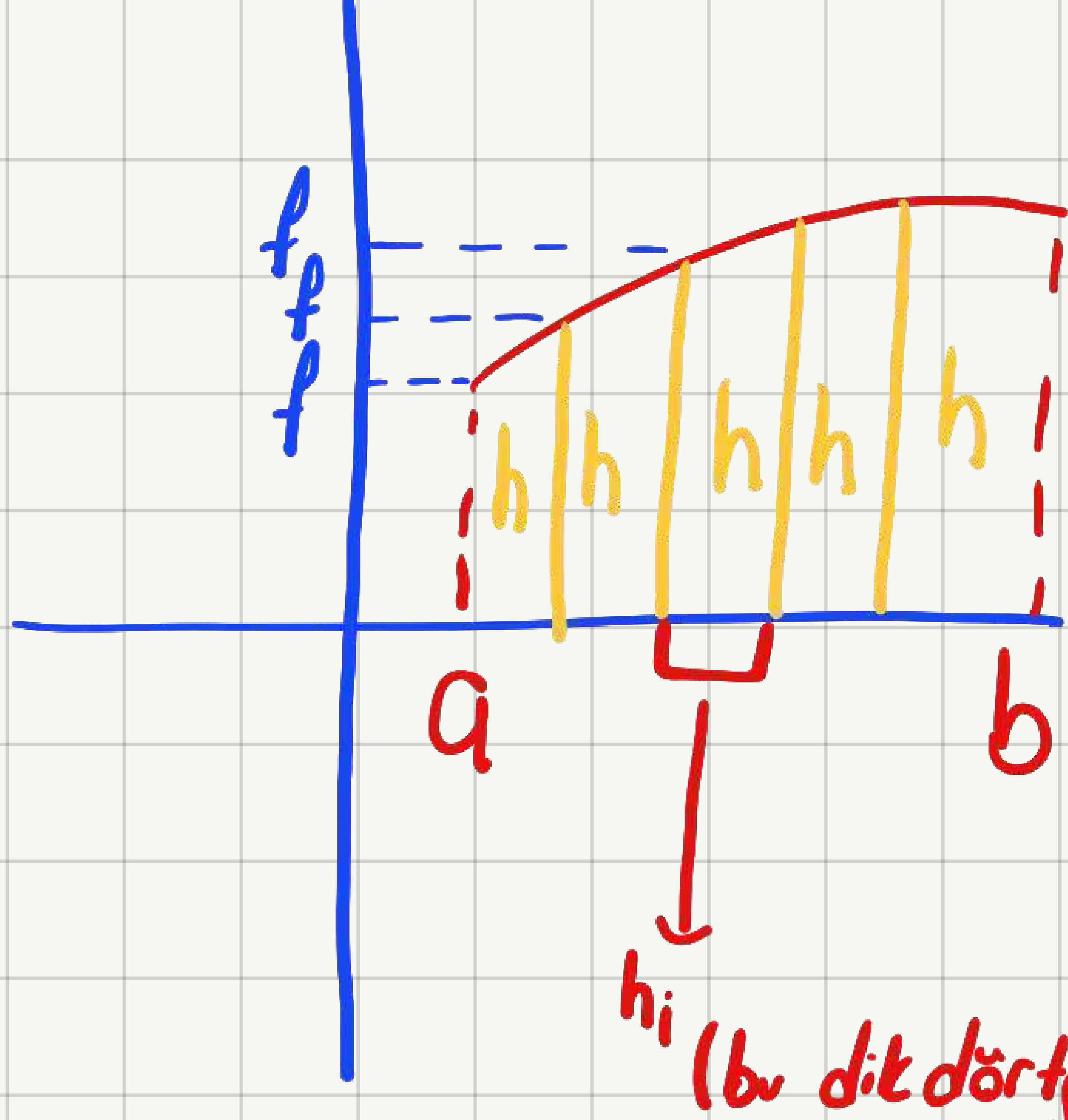
Bu yöntemde integral **n** sayıda dikdörtgen kullanılarak hesaplanır
N ne kadar büyük ise gerçek değere o kadar yakın sonuç elde edilir

$$I = \sum h_i f_i$$

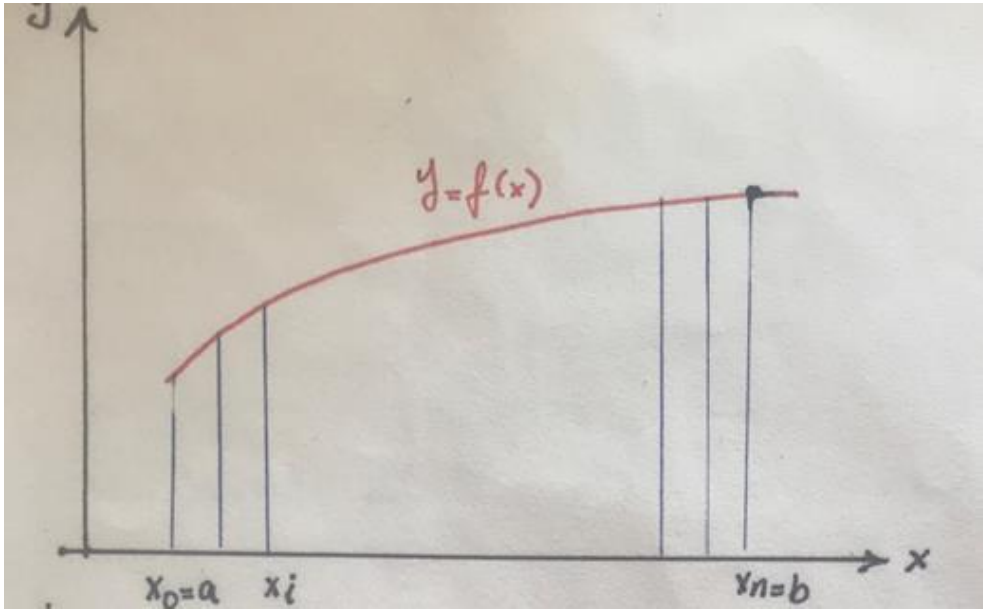
$f_i \rightarrow f(x_i)$
$h_i \rightarrow$ i. dikdörtgenin genişliği

$h_i = x_{i+1} - x_i$ olarak tanımlanır

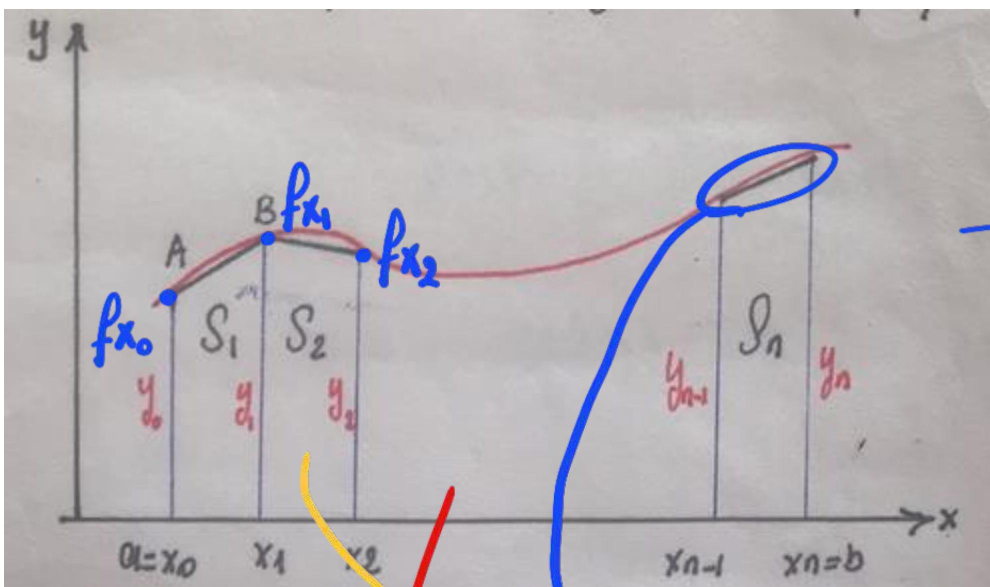
Eğer dikdörtgenlerin genişliği sabit olduğundan $\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$ olarak yazılır




$h_i$ (bu dikdörtgenlerin genişliği $h_i$ deniyor)




I = $\int_a^b f(x).dx$ integralinin değerini hesaplamak üzere [a, b] kapalı aralığını **n** eşit parçaya ayıralım




Biz bu kısmının altında kalan alanı hesaplamaya çalışıyoruz

Trapez yöntemi eğeri bir doğruyla

birleştiriyoruz

Bu trapez yöntemi uygulanan alan n eşit parçaya ayrılmıştır n sayısı arttıkça gerçek değere daha fazla yaklaşılır

Bunlar bir yamuktur biz buradaki bütün yamukları topladığımızda integralimizin alanını bulmuş oluruz

Yamuğun alanı $= \frac{a.b}{2}.h$

$$S_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} . \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h}$$

$$S_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h}$$

Her bölme noktasından (xi) dik doğrular çıkarak, diklerin f(x) eğrisini kestiği noktaları birer doğru ile birleştirerek **n** tane yamuk elde edebiliriz

$x_0ABx_1$ dik yamuğunun alanı :

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\, h(y_0 + y_1)$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\, h(y_1 + y_2)$$

$$S_3 = \tfrac{1}{2}\, h(y_2 + y_3)$$

...............

$$S_n = \tfrac{1}{2}\, h(y_{n-1} + y_n)$$

Toplam Alan $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ olacağından

$$S = \tfrac{1}{2}\, h(y_0 + y_1) + \tfrac{1}{2}\, h(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}\, h(y_2 + y_3) + \ldots + \tfrac{1}{2}\, h(y_{n-1} + y_n)$$

$$S = h/2\, [\, y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$S = h\left[\frac{(y_0 + yn)}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right]$$

trapez

$$S = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$a \rightarrow x_0$ $b \rightarrow x_n$ $h = \Delta x = (x_n - x_0)/n$ olarak kabul edersek

$$S = \Delta x\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k\Delta x)\right]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\ x^2}\ dx$$

İntegralini n=4 alarak Trapez yöntemi ile hesaplayınız.

$x_0 = 0 \quad x_n = 1 \qquad h = (1 - 0)\ /4 = 0{,}25$

| | x | f(x) |
|---|---|---|
| x0 | 0 +0,25 | 1 |
| x1 | 0,25 +0,25 | 0,94118 |
| x2 | 0,5 +0,25 | 0,8 |
| x3 | 0,75 +0,25 | 0,64 |
| x4 | 1 | 0,5 |

$$S = 0{,}25\left[\frac{1+0{,}5}{2} + \ (0{,}9412 + 0{,}8 + 0{,}64)\right]$$

$S$ = 0,78279 br²

Bu fonksiyon için gerçek integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \text{arctg}\,(x) \Big|_0^1 = \text{arctg}(1) - \text{arctg}\,(0) = 45^{o}$$

$I = \pi/4 = 0{,}78539$

Hata = |0,78539 – 0,78279| = 0,0026

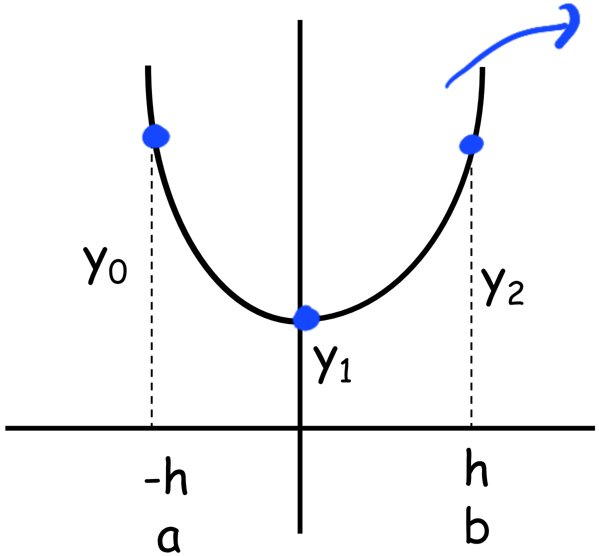
n=9 alınsaydı     I= 0,78488 olurdu

Hata = |0,78539 – 0,78488| = 0,00051

→ Burda 2. dereceden bir polinom geçiricem

# SIMPSON YÖNTEMİ (1/3 kuralı)

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ şeklinde verilmiş ise




Burda gösterildiği gibi 3 tane nokta geçiricez

$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c)dx$$

Analitik olarak incelersek

$$S = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-h}^{h} = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - [-a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} - ch]$$

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Trapez yönteminde doğru geçirmiştik burda parabol geçircez

Benim fonk. şu şekilde $\rightarrow ax^2+bx+c$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini $y_0$, $y_1$, $y_2$ cinsinden bulalım

| | | |
|---|---|---|
| $x = -h$ | için | $f(x) = y_0 = ah^2 - bh + c$ |
| $x = 0$ | için | $f(x) = y_1 = c$ |
| $x = h$ | için | $f(x) = y_2 = ah^2 + bh + c$ |

$$y_0 + y_2 = ah^2 - bh + c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 2c$$

$c = y_1$ olduğundan:

$$2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2$$
$$2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$$S = h/3\,(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

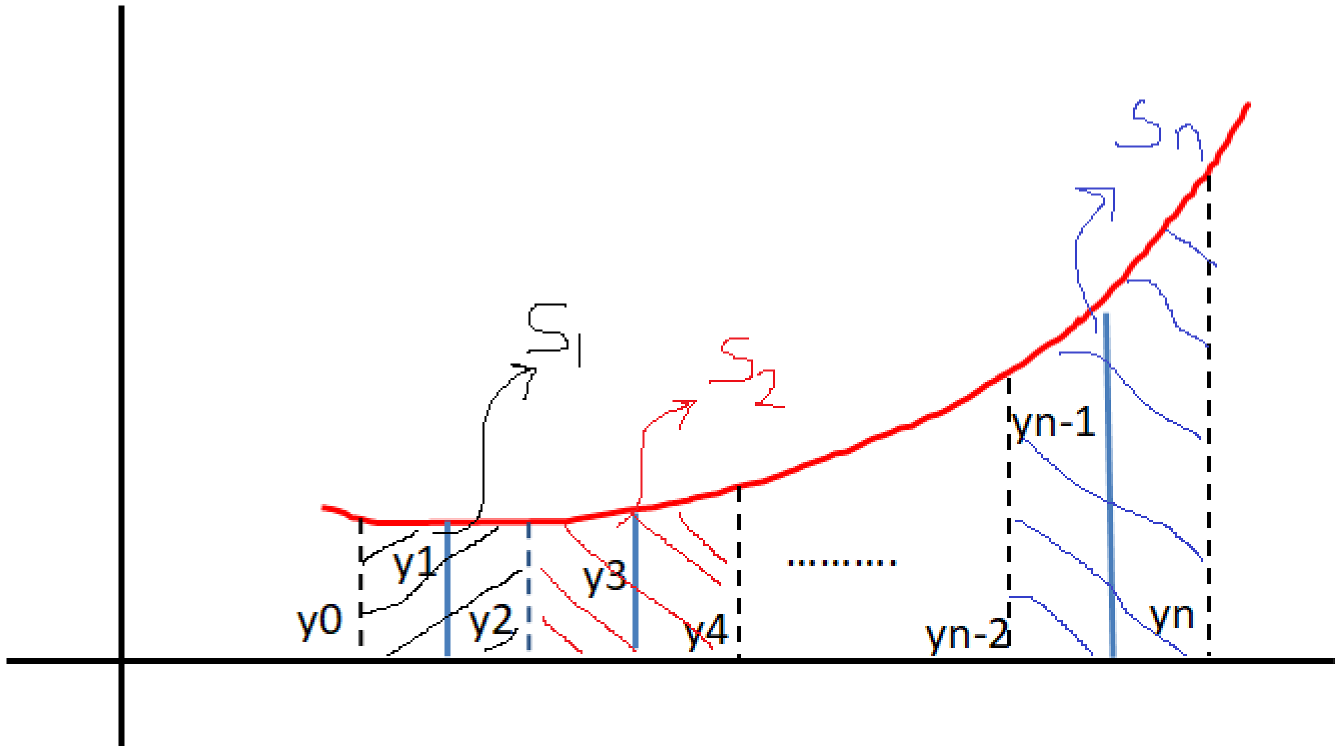
$$S = h/3\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S = h/3\,(2ah^2 + 6c)$$

ilk slaytta $\delta$'i böyle hesaplamıştık burdaki $2ah^2$ yerine bulduğumuz ifadeyi koyarsak

$$\delta = \frac{h}{3}\left(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1\right)$$

$$\delta = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$




$S_1 = h/3\ (y_0 + 4y_1 + y_2)$
$S_2 = h/3\ (y_2 + 4y_3 + y_4)$
……………………………………
$S_n = h/3\ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

$S = \Sigma\ S_i$ toplamı hesaplanacak integralin değeridir

!!!!! Simpson yönteminde çubuklar ikişer ikişer alındığından aralık sayısı **ÇİFT** olmalıdır

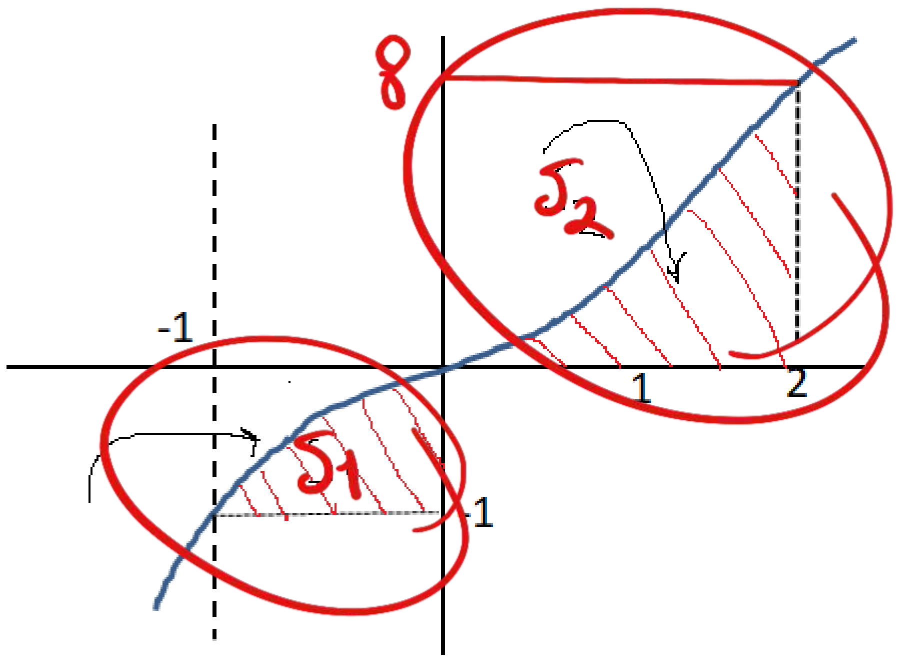
Simpson formülünde $h = (x_n - x_0) / n$ alınarak

$S_1 = h/3\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$
$S_2 = h/3\,(y_2 + 4y_3 + y_4)$
……………………………………
$S_n = h/3\,(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

$S = \Sigma\, Si = h/3\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$


$$S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h)\right]$$

$y = x^3$ eğrisinin x=-1, x=2 ve Ox ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$S_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

n=4 h=0,25

| | x | f(x) |
|---|---|---|
| x0 | -1 | 1 |
| x1 | -0,75 | 0,4218 |
| x2 | -0,5 | 0,125 |
| x3 | -0,25 | 0,0156 |
| x4 | 0 | 0 |

$S_1$ = 0,25/3 [(1 + 0) + 2*(0,125) + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,2499

$$S_2 = \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

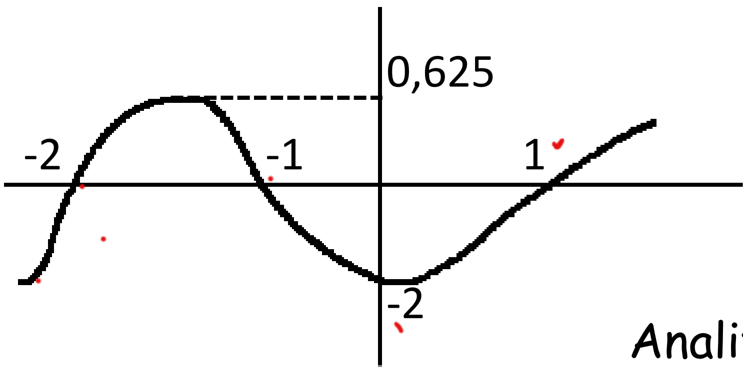
n=4 h=0,5

| | x | f(x) |
|---|---|---|
| x0 | 0 | 0 |
| x1 | 0,5 | 0,125 |
| x2 | 1 | 1 |
| x3 | 1,5 | 3,375 |
| x4 | 2 | 8 |

S = 4 + 0,2499 = 4,25 $br^2$

$S_2$ = 0,5/3 [(0 + 8) + 2*1 + 4*(0,125 + 3,375)] = 4

f(x) = $(x^2 - 1)(x + 2)$ eğrisinin altında ve Ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını bulunuz n=4 alarak bulunuz.




Analitik çözüm

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)\,dx$$

$$I = \tfrac{1}{4}x^4 + 2/3\,x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x \Big|_{-2}^{-1} = 0{,}41 \text{ br}^2$$

# Trapez Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^{1} (x^2 - 1)\,(x+2)\,dx$$

n=4 h=(-1-(-2))/4 = 0,25

| | x | f(x) |
|---|---|---|
| x0 | -2 | 0 |
| x1 | -1,75 | 0,5156 |
| x2 | -1,50 | 0,625 |
| x3 | -1,25 | 0,4218 |
| x4 | -1 | 0 |

$$S_T = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$S_T = 0{,}25\left[\frac{0+0}{2} + (0{,}5156 + 0{,}625 + 0{,}4218)\right]$$

$S = 0{,}391\ br^2$

Hata = $|0{,}41 - 0{,}391| = 0{,}019\ br^2$

## Simpson Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^{1} (x^2 - 1)\,(x + 2)dx$$

n=4 h=(-1-(-2))/4 = 0,25

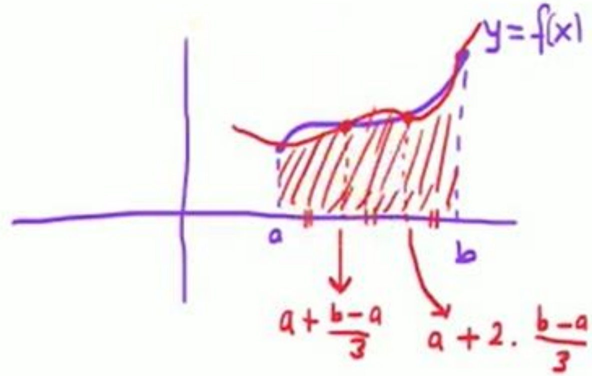
| | x | f(x) |
|---|---|---|
| x0 | -2 | 0 |
| x1 | -1,75 | 0,5156 |
| x2 | -1,50 | 0,625 |
| x3 | -1,25 | 0,4218 |
| x4 | -1 | 0 |

$$S_s = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k*h) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i*h)\right]$$

Ss = 0,25/3 [(0 + 0) + 2*0,625 + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,4166 br$^2$

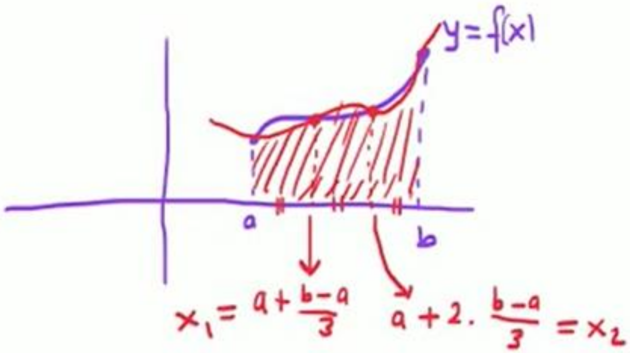
# Simpson's 3/8 kuralı

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$




$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx = \boxed{(b-a)\,.\,\frac{f(a)+3.f(x_1)+3.f(x_2)+f(b)}{8}}$$

$n=1$ için




$n=2$ için $$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx$$

Ör: $\int_0^6 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ ile verilen integralin sayısal çözümünü Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ile $n=1$ ve $n=2$ için yapınız.

$n=1 \Rightarrow \int_0^6 \frac{1}{1+x^4}\,dx \cong (\overset{6}{b}-\overset{0}{a}) \cdot \frac{f(\overset{0}{a})+3f(\overset{2}{x_1})+3f(\overset{4}{x_2})+f(\overset{6}{b})}{8}$

$\frac{6-0}{3}=2$

$x_1 = 0+2=2$

$x_2 = 0+2.2=4$

$\cong 6 \cdot \frac{1+3.(1/17)+3.(1/257)+\frac{1}{1297}}{8}$

$\cong 0,8917$

$$n=2 \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_3^6 \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \frac{6-3}{3}=1$$

$$\frac{3-0}{3}=1$$

$$3\cdot\frac{f(0)+3\cdot f(1)+3f(2)+f(3)}{8} + 3\cdot\frac{f(3)+3f(4)+3\cdot f(5)+f(6)}{8}$$

$$= 3\cdot\frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{82}}{8} + 3\cdot\frac{\frac{1}{82}+3\cdot\frac{1}{257}+3\cdot\frac{1}{626}+\frac{1}{1297}}{8}$$

$$1{,}0082 \qquad\qquad 0{,}0110$$

$$\cong 1{,}0192$$

# İki Katlı Integralin Sayısal Çözümü

I = $\int_2^3 \int_x^{2x^3} (x^2 + y)\,dy\,dx$

I = $\int_2^3 g(x)\,dx$          n=4

h = (b-a)/n = (3-2)/4 = 0,25

| | x | g(x) |
|---|---|---|
| x0 | 2 | g0 |
| x1 | 2,25 | g1 |
| x2 | 2,5 | g2 |
| x3 | 2,75 | g3 |
| x4 | 3 | g4 |

1.Adım

$x_0$=2 için

I = $\int_2^{16} ({x_o}^2 + y)\,dy$          h = (16-2)/4 = 3,5

| | y | f(y) |
|---|---|---|
| y0 | 2 | 6 |
| y1 | 5,5 | 9,5 |
| y2 | 9 | 13 |
| y3 | 12,5 | 16,5 |
| y4 | 16 | 20 |

$g_0$ = 3,5/3 [(6 + 20) + 2*13 + 4*(9,5 + 16,5)] = 182

2.Adım

$x_1$=2,25 için

I = $\int_{2,25}^{22,78} (x_1{}^2 + y)dy$ h = (22,78-2,25)/4 = 5,13

$g_1$ = 5,13/3 [(7,31 + 27,76) + 2*17,57 + 4*(12,44 + 22,7)]

$g_1$ = 360,417

| | y | f(y) |
|---|---|---|
| y0 | 2,25 | 7,31 |
| y1 | 7,38 | 12,44 |
| y2 | 12,51 | 17,57 |
| y3 | 17,64 | 22,7 |
| y4 | 22,77 | 27,76 |

3.Adım

$x_2$=2,5 için

I = $\int_{2,5}^{31,25} (x_2{}^2 + y)dy$ h = (31,25-2,5)/4 = 7,19

$g_2$ = 7,19/3 [(8,75 + 37,51) + 2*23,13 + 4*(15,94 + 30,32)]

$g_2$ = 665,22

| | y | f(y) |
|---|---|---|
| y0 | 2,5 | 8,75 |
| y1 | 9,69 | 15,94 |
| y2 | 16,88 | 23,13 |
| y3 | 24,07 | 30,32 |
| y4 | 31,26 | 37,51 |

4.Adım
$x_3$=2,75 için

I = $\int_{2,75}^{41,59} (x_3{}^2 + y)dy$ h = (41,59-2,75)/4 = 9,71

| | y | f(y) |
|---|---|---|
| y0 | 2,75 | 10,31 |
| y1 | 12,46 | 20,02 |
| y2 | 22,17 | 29,73 |
| y3 | 31,88 | 39,44 |
| y4 | 41,59 | 49,15 |

$g_3$ = 9,71/3 [(10,31 + 49,15) + 2*29,73 + 4*(20,02 + 39,44)]
$g_3$ = 1154,7

5.Adım
$x_4$=3 için

I = $\int_{3}^{54} (x_4{}^2 + y)dy$ h = (54-3)/4 = 12,75

| | y | f(y) |
|---|---|---|
| y0 | 3 | 12 |
| y1 | 15,75 | 24,75 |
| y2 | 28,5 | 37,5 |
| y3 | 41,25 | 50,35 |
| y4 | 54 | 63 |

$g_4$ = 12,75/3 [(12 + 63) + 2*37,5 + 4*(24,75 + 50,35)]
$g_4$ = 1912,5

$Ss = h/3\ [\ g_0 + g_4 + + 4*(g_1 + g_3) + 2*g_2]$

$Ss = 0{,}25/3\ [182 + 1912{,}5 + 4*(360{,}417 + 1154{,}7) + 2*665{,}22] = 790{,}451$

$S_{analitik} = 790{,}55$
$Ss = 790{,}451$

Hata = $|790{,}451 - 790{,}55| = 0{,}099$