MAT1071 MATEMATİK 1

ALIŞTIRMALAR 3 – SÜREKLİLİK, TÜREV TANIMI

1. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ \frac{1}{4}, & x=0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$ fonksiyonunun sürekliliğini araştırınız.

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ise fonksiyon süreklidir.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1$

$\neq$ olduğundan limit yoktur. Dolayısıyla $f(x)$ $x=0$ da süreksizdir.

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}, & x<0 \\ c, & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx^{3/2}}, & x>0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olabilmesi için a,b,c sayıları ne olmalıdır?

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(a+1)x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin(a+1)x}{x\,.(a+1)}.(a+1) + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\underbrace{\frac{\sin(a+1)x}{(a+1).x}}_{1}.(a+1) + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\right] = a+1+1 = a+2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx^{3/2}} \cdot \frac{(\sqrt{x+bx^2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+bx^2}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}+\cancel{b}x^2-\cancel{x}}{\cancel{b}x^{3/2}.(\sqrt{x+bx^2}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^{3/2}}.\cancel{\sqrt{x}}.(\sqrt{1+bx}+1)} = \frac{1}{2}$$

$f(0) = c = \frac{1}{2} = a+2$ $\quad \underline{c=\frac{1}{2}}$ $\quad \underline{a=-\frac{3}{2}}$

$x>0$ için $f(x)$ in tanımlı olabilmesi için $\underline{b\neq 0}$ olmalıdır.

3. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & , x\leq 1 \\ 6-5x & , 1<x<3 \\ x-3 & , x\geq 3 \end{cases}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

$x=1$ için araştıralım;

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 1^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{5}(2x^2+3) = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (6-5x) = 1 \end{array}\right] =$$ olduğundan $x=1$ de $f(x)$ sürekli.

$x=3$ için araştıralım;

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 3^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0 = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} (6-5x) = -9 \end{array}\right] \neq$$ olduğundan $x=3$ de $f(x)$ süreksizdir.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$ olduğundan $x=3$ de $f(x)$ sağdan süreklidir.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ olduğundan $x=3$ de $f(x)$ sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sin^2 x}{3\cos^2 x} & , \ x < \dfrac{\pi}{2} \\ a & , \ x = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2} & , \ x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonunun $x=\frac{\pi}{2}$ de sürekli olabilmesi için a ve b ne olmalıdır?

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1-\sin^2 x}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\cos^2 x}}{3\cancel{\cos^2 x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}$$

$x=\frac{\pi}{2}+h$ dönüşümü yapalım.

$x\to \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow h\to 0^+$ olur.

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{b\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]}{\left[\pi-2.\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]^2}$$

$\left[\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \cos h\right]$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{b(1-\cos h)}{4h^2} \cdot \frac{(1+\cos h)}{(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{b}{4} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 h}{h^2}}_{1} \cdot \frac{1}{(1+\cos h)}$$

$$= \frac{b}{8}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{b}{8} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{8} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{b = \frac{8}{3}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{3}}$$

5. $f(x)$, $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(\frac{1}{2})=2$ ise $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}\right)=?$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} = \frac{1}{2}$ dir. $f(x)$, $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan $x=\frac{1}{2}$ de de süreklidir. Sürekli fonksiyonun özelliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$ olur.

[* Eğer g, bir b noktasında sürekli ve $\lim_{x\to c} f(x)=b$ ise

$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$ olur.]

6. $$f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos 10x}{x^2}, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{625+\sqrt{x}}-25}, & x>0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olabilmesi için a ne olmalıdır?

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ olmalıdır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{625+\sqrt{x}}-25} \cdot \frac{(\sqrt{625+\sqrt{x}}+25)}{(\sqrt{625+\sqrt{x}}+25)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{625+\sqrt{x}}+25)}{\cancel{\sqrt{x}}} = 50 = f(0) = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos 10x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin^2 5x}{x^2 . 25} . 25 = \lim_{x\to 0^-} 50 . \Big(\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{1}\Big)^2 = 50$$

$a=50$

7. $f(x) = \begin{cases} ax^2+b, & 0 \leq x < 1 \\ x+3, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ de süreksiz olması için a, b nasıl seçilmelidir?

$$\lim_{x \to 1^+} x+3 = 4 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} (ax^2+b) = a+b \Rightarrow \underbrace{a+b \neq 4}$$ olmalıdır.

!8. $f(x) = \dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{\cot 2x}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$ şeklinde verilen $f(x)$ fonksiyonunun her yerde sürekli olabilmesi için $f(\frac{\pi}{4})$ nasıl seçilmelidir?

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$ olmalıdır.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4}-x)}{\cot 2x} \qquad \left(\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a . \tan b} \right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{(1+\tan\frac{\pi}{4} . \tan x) . \cot 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{(1+\tan x)} . \tan 2x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{(1+\tan x)} . \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \left(\tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x . \tan x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{(1-\tan x)}}{(1+\tan x)} . \frac{2\tan x}{\cancel{(1-\tan x)}(1+\tan x)} = \frac{2}{2.2} = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}}$$ olmalıdır.

9. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ve $f(x) = 1 + x \cdot g(x) \cdot G(x)$ olsun.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = a$, $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = b$ olmak üzere ,

$f'(x) = k\, f(x)$ eşitliğini sağlayan k sayısı nasıl seçilmelidir? $(k, a, b \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x).f(h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\,(f(h) - 1)}{h} = f(x). \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$f(x). \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{h}\, g(h).G(h) - \cancel{1}}{\cancel{h}} = f(x) \lim_{h \to 0} g(h).G(h)$$

$\Rightarrow f'(x) = a.b.f(x) \Rightarrow \underline{k = a.b}$ olmalıdır.

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} & , x \neq a \\ b & , x = a \end{cases}$ fonksiyonunun $x = a$ da sürekli olabilmesi için b ne olmalıdır?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2 + ax + a^2)}{\cancel{(x-a)}} = 3a^2$$

$f(a) = b \Rightarrow \underline{b = 3a^2}$ olmalıdır.

11. $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & , x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olabilmesi için a ve b ne olmalıdır?

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ve $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ olmalıdır.

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} 2\sin x = -2 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) = -a+b$

$\Big\rangle\ b-a=-2$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = a+b$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Big\rangle\ a+b=0$

$$\begin{array}{r} b-\cancel{a}=-2 \\ b+\cancel{a}=0 \\ \hline 2b=-2 \\ \boxed{b=-1} \end{array}$$

$b+a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

12. $f(x)=\begin{cases} |x-3| & , x \ge 1 \\ \frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{13}{4} & , x<1 \end{cases}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a) $x=1$ de sürekli, $x=1$ de türevli değildir.

b) $x=1$ de hem sürekli hem de türevlidir.

c) $x=1$ de türevli değildir.

d) $x=1$ de sürekli değildir.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$ $x=1$ de $f(x)$ süreklidir. $f'_+(1) \overset{?}{=} f'_-(1)$

$f'_+(1) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{|1+h-3|-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\cancel{2}-\cancel{h}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = -1$

$f'_-(1) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\frac{(1+h)^2}{4}-\frac{3(1+h)}{2}+\frac{13}{4}-2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\cancel{1}+h^2+2h-\cancel{6}-6h+\cancel{13}-\cancel{8}}{4h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(h-4)}{4\cancel{h}} = -\frac{4}{4} = -1$

$\Big\rangle =$

Dolayısıyla $f(x)$, $x=1$ de sürekli ve türevlidir.

13. $f(x)=\cos(3x-2)$ olmak üzere $f'(x)$ 'i türev tanımını kullanarak bulunuz.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \left(f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x+3h-2)-\cos(3x-2)}{h} \qquad (\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x-2).\cos 3h-\sin(3x-2).\sin 3h-\cos(3x-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(3x-2)\underbrace{\frac{[\cos 3h-1]}{3.h}}_{0}.3-\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin 3h}{3.h}}_{1}.\sin(3x-2).3$$

$$f'(x)=-3\sin(3x-2)$$

14. $$\lim_{h\to 1}\frac{f(2h-1)-f(h)}{h^2-1}=?$$ ($f(x)$ in $x=1$ de türevi mevcut)

$h-1=u$ dönüşümü yapalım.

$h\to 1 \Rightarrow u\to 0$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(2(u+1)-1)-f(u+1)}{u.(u+2)}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u+1+u)-f(u+1)}{(u+2).u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{(u+2)}.\left[\frac{f(u+1+u)-f(u+1)-f(1)+f(1)}{u}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u+2}.\left(\frac{f(2u+1)-f(1)}{u.2}.2\right)-\lim_{u\to 0}\frac{1}{(u+2)}.\frac{f(u+1)-f(1)}{u}.$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}.f'(1)-\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}f'(1)$$

15. $f(x)=\begin{cases} 2 & , x=0 \\ \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} & , 0<x<1 \\ 1 & , x=1 \end{cases}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında sürekliliğini inceleyiniz.

$f(x)$ in $[a,b]$ kapalı aralıkta sürekli olabilmesi için;

i) (a,b) açık aralığında sürekli,

ii) $x=a$ da sağdan sürekli,

iii) $x=b$ de soldan sürekli

olmalıdır.

i) $c\in(0,1)$ için $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{c^2}{1-\sqrt{1-c^2}}$ olduğundan $(0,1)$ de sürekli.

ii) $x=0$ da $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}.(1+\sqrt{1-x^2})}{\cancel{x^2}}=2=f(0)$$

olduğundan $x=0$ da sağdan süreklidir.

iii) $x=1$ de $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ olmalı.

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=1=f(1)$ olduğundan $x=1$ de soldan süreklidir.

Dolayısıyla $f(x)$, $[0,1]$ kapalı aralığında süreklidir.

16. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

I. f, x=1 de süreklidir.

II. f, x=1 de sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

III. f, x=1 de sonsuz süreksizliğe sahiptir.

IV. f, x=1 de kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

f(x), x=1 için paydası sıfır olduğu için tanımsızdır dolayısıyla süreksizdir.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{(x-1)}}=4 \quad \rightarrow \text{limit mevcut.}$$

Eğer $f(1)=4$ alınırsa ; $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$ → sürekli genişlemesi

şeklinde yazılırsa f(x) x=1 de sürekli olur.

Dolayısıyla f(x), x=1 de kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

17. $4x^3-6x^2+3x-2=0$ denkleminin 1 ve 2 arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.

Ara-Değer Teoremi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında sürekli ve k, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bulunan bir reel sayı ise, $f(c)=k$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ reel sayısı mevcuttur.

$f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$ olsun. $f(x)$ polinom olduğundan her yerde sürekli dolayısıyla $[1,2]$ aralığında da süreklidir.

$f(1)=4-6+3-2=-1<0$

$f(2)=4.8-6.4+3.2-2=12>0$

Ara-Değer Teoremi gereği;

$c\in(1,2)$ olmak üzere

$$f(1)=-1<f(c)=0<f(2)=12$$

şartını sağlayan en az bir $c\in(1,2)$ sayısı vardır.

18. $f(x)=\begin{cases}\tan(\sin x) & , x\geq 0\\ \frac{1}{x}\sin x^2 & , x<0\end{cases}$ fonksiyonunun türevlenebilirliğini inceleyiniz.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\tan(\sin x)=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cdot\sin(x^2)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x=0 \Rightarrow$ sürekli

$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\tan(\sin h)-0}{h\,.\,\sin h}\cdot\sin h=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{h}\sin h^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sin h^2}{h^2}=1$

$f'_+(0)=f'_-(0)$ olduğundan $f(x)$, $x=0$ da türevlenebilirdir.