

Bölüm 2

Mantık ve İspatlar (Logic and Proofs)



Mantık (Logic)

- Mantık (Logic) = doğru çıkarımı elde etme çalışmasıdır
- Mantiğin kullanımı
 - Matematikte kullanımı:
 - Teoremleri ispatlamak
 - Bilgisayar Bilimlerinde kullanımı:
 - Programların kendilerinden beklenen sonucu üretip üretmediğinin kontrolüdür

Önermeler (Propositions)

- Sonucu doğru (true) veya yanlış (false) olan ifadelere proposition (önerme) denir.

- Örnekler:

- “Cüneyt programcıdır” bu bir önermedir
- “Keşke bilge kişi olsaydım” bu bir önerme değildir

Birleştiriciler (Connectives)

Önermeleri (propositions) göstermek için p, q, r, s, t, \dots gibi değişkenler kullanılır.

En çok kullanılan birleştiriciler:

■ Conjunction AND	Sembol \wedge
■ Inclusive disjunction OR	Sembol \vee
■ Exclusive disjunction OR	Sembol $\underline{\vee}$
■ Negation	Sembol \sim
■ Implication	Sembol \rightarrow
■ Double implication	Sembol \leftrightarrow

AND (conjunction) doğruluk tablosu

- p ve q bir önerme ise, conjunction ($p \wedge q$) veya (p and q) olarak gösterilir
- *Conjunction* doğruluk tablosu

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- Sadece p ve q nun her ikisinin de doğru olduğu durumda $p \wedge q$ doğrudur

p = "kaplan vahşi bir hayvandır" q = "balina bir sürüngendir"

$p \wedge q$ = "kaplan vahşi bir hayvandır **and** balina bir sürüngendir " Yanlış

OR (disjunction) doğruluk tablosu

□ p ve q bir önerme ise, *disjunction* ($p \vee q$) veya (p or q) olarak gösterilir

□ *Disjunction* doğruluk tablosu

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

□ Sadece p ve q nun her ikisinin de yanlış olduğu durumda

$p \vee q$ yanlıştır

□ Örnek: p = "Cüneyt programcıdır", q = "Zeynep avukattır"

□ $p \vee q$ = " Cüneyt programcıdır or Zeynep avukattır " Doğru

Exclusive disjunction OR(XOR)

- p ve q bir önerme ise, *exclusive disjunction OR* (xor) $p \underline{\vee} q$ olarak gösterilir
- *Exclusive disjunction* doğruluk tablosu

p	q	$p \underline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Sadece p doğru ve q yanlış ise, veya p yanlış ve q doğru ise $p \underline{\vee} q$ doğrudur
- Örnek: p = “Cüneyt programcıdır”, q = “Zeynep avukattır”
- $p \underline{\vee} q$ = “Ne Cüneyt programcıdır ne de Zeynep avukattır” Yanlış

Tersi (Negation)

- p ' nin tersi: $\sim p$ veya p ' ile gösterilir

p	$\sim p$
T	F
F	T

p doğru iken $\sim p$ yanlıştır

p yanlış iken $\sim p$ doğrudur

- Örnek: p = "Cüneyt programcıdır"
 $\sim p$ = "Cüneyt programcı değildir"

Birden Fazla Önermenin Birleştirilmesi

- p, q, r basit önermeler olsun
- Birleştirilmiş ifadeleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz
 - $(p \vee q) \wedge r$
 - $p \vee (q \wedge r)$
 - $(\sim p) \vee (\sim q)$
 - $(p \vee q) \wedge (\sim r)$
 - ve diğer durumlar...

Örnek: $(p \vee q) \wedge r$ nin doğruluk tablosu

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Şartlı Önermeler ve Mantıksal Denklik (Conditional Propositions and Logical Equivalence)

- Şartlı önerme (*conditional* proposition)

“If p then q ”

şeklinde gösterilir

- Sembolü: $p \rightarrow q$

- Örnek:

- p = " Cüneyt programcıdır "

- q = " Zeynep avukattır "

- $p \rightarrow q$ = "If Cüneyt programcıdır then Zeynep avukattır Doğru

$p \rightarrow q$ 'nın Doğruluk Tablosu

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Sadece p ve q 'nın her ikisinde doğru veya p 'nin yanlış olduğu durumlarda $p \rightarrow q$ önermesi doğrudur

Hipotez ve Sonuç

(Hypothesis and conclusion)

- $p \rightarrow q$ şartlı önermesinde
 p *antecedent veya hypothesis*
 q *consequent or conclusion*
 olarak adlandırılır.
- “if p then q” mantıksal olarak “p only if q” ile aynıdır

Gereklilik ve Yeterlilik (Necessary and Sufficient)

- Gerekli şart (*necessary condition*) sonuç (*conclusion*) tarafından ifade edilir
- Yeterli şart (*sufficient condition*) hipotez (*hypothesis*) tarafından ifade edilir

- Örnek:

If Cüneyt programcıdır then Zeynep avukattır

- Necessary condition: “Zeynep avukattır”
- Sufficient condition: “Cüneyt programcıdır”

Mantıksal Denklik (Logical Equivalence)

- Doğruluk tablosundaki değerleri aynı olan iki önerme için aralarında mantıksal denklik vardır denir

p	q	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Örnek: $\sim p \vee q$ önermesi $p \rightarrow q$ ile *logically equivalent* 'dir. Yani aralarında mantıksal denklik vardır

Yer deđiřtirme (Converse)

- $p \rightarrow q$ 'nun *converse* $q \rightarrow p$ dir

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

- Bu iki önerme arasında mantıksal denklik mevcut değildir (not logically equivalent)

Contrapositive (Devrik)

□ $p \rightarrow q$ önermesinin *contrapositive* $\sim q \rightarrow \sim p$ şeklinde gösterilir

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

□ Bu önermeler logically equivalent'dır

Çift Yönlü Önerme (Biconditional Proposition)

- Çift Yönlü önerme (*biconditional proposition*)

“p if and only if q” olarak tanımlanır

$p \leftrightarrow q$ sembolü ile gösterilir

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

- $p \leftrightarrow q$, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ‘nun logically equivalent’dir

Totoloji-Tutarlılık (Tautology)

■ Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için doğru sonuç (true) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *tautology* 'dir

■ Örnek: $p \rightarrow p \vee q$

p	q	$p \rightarrow p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Çelişki (Contradiction)

- Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için yanlış sonuç (false) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *contradiction* 'dır
- Örnek: $p \wedge \sim p$

p	$p \wedge (\sim p)$
T	F
F	F

De Morgan Kanunu

□ Aşağıdaki önerme çiftleri birbirleri ile mantıksal olarak denktir

■ $\sim (p \vee q) \rightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

■ $\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

Nicelikler (Quantifiers)

- **$P(x)$** , x değişkeni ile ilişkili bir önerme olsun

Örneğin, $P(x)$: $2x$ çift tamsayı

- D 'de içerisindeki her x değeri için, $P(x)$ 'i önerme yapan bir küme olsun

Örneğin: x , tamsayılar kümesinin bir elemanıdır

- D , $P(x)$ 'nin ayrıntılı bilgi alanı (domain of discourse) olarak adlandırılır

-
- D 'deki her x değeri, $P(x)$ 'i sonucu doğru veya yanlış olan bir önerme yapar

Örneğin: $P(n)$: n^2+2n tek sayıdır

D kümesi pozitif tam sayılardan oluşsun

if n tek sayı then n^2+2n tek sayıdır

if n çift sayı then n^2+2n tek sayı değildir

- Bu sınıftakiler 18 yaşından büyüktür

D kümesi, sınıftaki öğrenciler olsun

Öğrencilerin bazıları önermeyi doğru, bazıları da yanlış yapar

Her ve Bazı

(For every and for some)

- Matematik ve Bilgisayar Bilimlerindeki çoğu ifadede *for every* ve *for some* kullanılır
- Örneğin:
 - *For every* triangle T, the sum of the angles of T is 180 degrees.

Evrensel/Genel Niteliyiciler (Universal Quantifier)

Bilgi

- The *universal quantification* of $P(x)$ is the proposition “ $P(x)$ is true for all values of x in the universe of discourse.”

$P(x)$ önermesi, D kümesi içerisindeki her x değeri için doğru olmalıdır.

$\forall x P(x)$ veya

for all $x P(x)$ veya

for every $x P(x)$ şeklinde yazılır

- En az bir x değeri için doğru değilse, $P(x)$ yanlış olur

“Every student in this class has studied calculus”

$P(x) \rightarrow$ “ x has studied calculus”

$\forall x P(x)$

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – x_1, x_2, \dots, x_n – it follows that the universal quantification $\forall x P(x)$ is the same as the conjunction $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$, since the conjunction is true if and only if $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ are all true.

Önerme fonksiyonunun doğruluğu

- $\forall x P(x)$ ifadesi
 - Doğrudur. Eğer $P(x)$ doğruysa for every $x \in D$
 - Yanlıştır. Eğer $P(x)$ doğru değilse for some $x \in D$

- Örneğin: $P(n)$ propositional bir fonksiyon
ve $P(n): n^2 + 2n$ tek bir sayıdır.
 $\forall n \in D = \{\text{bütün tam sayılar}\}$

- $P(n)$ sadece n tek sayı olduğunda doğrudur.
 $P(n)$ n çift sayı ise yanlıştır

-
- For every real number x , $x^2 \geq 0$ TRUE
 - For every real number x , if $x > 1$ then $x+1 > 1$ TRUE
 - For every real number x , if $x \geq 0$ then $x+1 > 1$ FALSE
 - For every positive integer n , if n is even then
 n^2+n+19 prime FALSE

Soru : Verilen cümleyi mantıksal ifadeler ile yazınız.

'You can not ride the roller coaster if you are
under 4 feet tall unless you are older than 16 years old'

q : you can ride the roller coaster

r : you are under 4 feet tall

s : you are older than 16 years old

$$(r \wedge \sim s) \rightarrow \sim q$$

$$(\sim r \vee s) \rightarrow q$$

Varoluşsal Niteleyiciler (Existential Quantifier)

- The *existential quantification* of $P(x)$ is the proposition “There exists an element x in the universe of discourse such that $P(x)$ is true”

$P(x)$ önermesi, D kümesi içerisindeki en az bir x değeri için doğru olmalıdır.

$\exists x P(x)$ veya

“There is an x such that $P(x)$ ” veya

“There is at least one x such that $P(x)$ ”

şeklinde yazılır.

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – x_1, x_2, \dots, x_n – the existential quantification $\exists x P(x)$ is the same as the disjunction

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n),$$

since this disjunction is true if and only if at least one of $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ is true.

□ For some real number x , $x/(x^2+1) = 2/5$ TRUE

□ For some positive integer n , if n is prime then $n+1$, $n+2$, $n+3$ and $n+4$ are not prime TRUE $n=23$

Translating Sentences into Logical Expressions

Cümlemiz “**Everyone has exactly one best friend**” olarak verilmiş olsun.

$B(x,y)$ ifadesi “ y is the best friend of x ”.

Cümlemiz ne diyor ?

for every person x there is another person y such that y is the best friend of x

and that if z is a person other than y , then z is not the best friend of x .

Cümleyi mantıksal ifadeler ile yazalım

$$\forall x \exists y \forall z (B(x, y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z)))$$

Cümlemiz “**If somebody is female and is a parent, then this person is someone’s mother**” olarak verilsin.

$F(x)$ ifadesi “ x is female”,

$P(x)$ ifadesi “ x is a parent”, ve

$M(x,y)$ ifadesi de “ x is the mother of y ” olsun.

Cümlemizi matematiksel ifadeler ile yazalım.

$$\forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x, y))$$

Counterexample

- Eğer $\exists x \in D$, $P(x)$ 'i yanlış yaparsa universal statement $\forall x P(x)$ 'de yanlış olur
- $\forall x P(x)$ ifadesindeki, $P(x)$ yanlış yapan x değeri *counterexample* olarak adlandırılır
 - Örnek: $P(x)$ = “her x değeri bir asal sayıdır”, for every tamsayı x .
 - Fakat eğer $x = 4$ (bir tamsayı) bu x sayısı asal sayı değildir. Öyleyse 4 değeri bir counterexample olup $P(x)$ 'i yanlış yapar

Lojik için Genelleştirilmiş De Morgan Kanunu

$$\sim(\forall x \ P(x)) \rightarrow \exists x \ \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x \ P(x)) \rightarrow \forall x \ \sim P(x)$$

“Every student in the class has taken a course in calculus”

$\forall x \ P(x),$

$P(x)$: “x has taken a course in calculus”

$\sim P(x)$: **“It is not the case that every student in the class has taken a course in calculus”**

Sınıftaki her öğrencinin kalkülüs dersi alması söz konusu değildir

$\sim \forall x \ P(x) \Leftrightarrow \exists x \ \sim P(x)$

“There is a student in the class who has not taken a course in calculus”.

Sınıfta kalkülüs dersi almamış öğrenci var

“There is a student in this class who has taken a course in calculus”.

$\exists x Q(x)$

$Q(x)$: **“x has taken a course in calculus”**

$\sim Q(x)$: **“It is not the case that there is a student in this class who has taken a course in calculus”**

Bu sınıfta kalkülüs dersi almış bir öğrenci olması söz konusu değildir

$\forall x \sim Q(x)$

“Every student in this class has not taken calculus”

Negating Quantifiers

<i>Negation</i>	<i>Equivalent Statement</i>	<i>When is negation true?</i>	<i>When false?</i>
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) is false for every x	There is an x for which P(x) true
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which P(x) is false	P(x) is true for every x

İspatlar (Proofs)

- Bir matematik sistemi
 - Tanımlanmamış terimler (Undefined terms)
 - Tanımlar (Definitions)
 - Aksiyomlar (Axioms)

Tanımlanmamış Terimler (Undefined Terms)

- *Tanımlanmamış terimler* bir matematik sisteminin temel taşını oluşturur. Bu terimler bir matematiksel sistemin başlangıç kavramları olarak da kabul edilebilir.
- Örnek: Euclidean geometride tanımlanmamış terimler
 - Nokta (Point)
 - Doğru (Line)

Tanımlar (Definitions)

- *Tanım (definition)*, yeni bir kavram yaratmak amacıyla önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir proposition oluşturmaktır

Örnek: Euclidean geometrideki tanımlar:

- Eğer iki üçgenin karşılıklı kenarları ve açıları birbirinin aynı ise bu iki üçgen eş üçgendir
- İki açının toplamı 180 derece ise bu açılara birbirini tamamlayan açılar denir

Aksiyomlar (Axioms)

- ❑ Aksiyom (*axiom*), matematiksel bir sistem içerisinde ispat yapmaksızın doğru kabul edilen proposition'dır

- ❑ Matematikteki aksiyomlara örnek:
 - Örnek: Euclidean geometrideki aksiyomlar
 - ❑ İki nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan geçen bir doğru her zaman mevcuttur.
 - ❑ Bir doğru ve doğru üzerinde yer almayan bir nokta mevcut olsun. Bu noktadan geçen doğruların bir tanesi verilen doğruya mutlaka paraleldir.

Teoremler (Theorems)

- *Teorem*, Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve p nin doğru olduğunu farzederek doğruluğu önerilebilen $p \rightarrow q$ formundaki proposition'a denir

İspat Çeşitleri

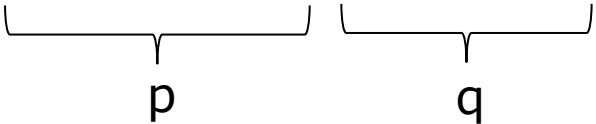
- *İspat (proof)*, Teoremin doğruluğunu belirlemek için önermeleri kullanan bir seri işlemden oluşan mantıksal çıkarımdır
- *Doğrudan ispat (Direct proof):* $p \rightarrow q$
 - q önermesinin doğruluğunu elde etmek amacıyla ispatlanmış teoremleri, aksiyomları ve p önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmadır
- *Dolaylı/Olmayana Ergi ispat (Indirect proof):*
 $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
 - $p \rightarrow q$ önermesinin çelişkisinden çözüme ulaşmaktır

Doğrudan İspat

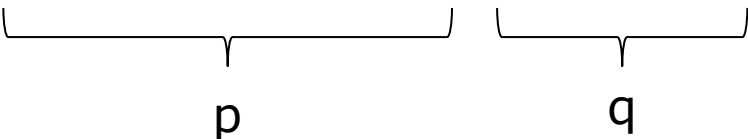
$p \rightarrow q$ durumunda kullanılır.

p 'nin doğru olduğu kabul edilerek, çıkarım kuralları kullanılarak, q 'nın da doğru olduğu gösterilir.

n tek sayı ise, n^2 tektir



m ve n çift sayı ise, $m+n$ çifttir



Not : p önermesi n , m gibi sade eşitlikler olmalıdır.
 n^2 , $m+n$ gibi durumlarda doğrudan ispat yapılmaz.

Adımlar:

1. $p \rightarrow q$ için p doğru kabul edilir
 2. q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır
 3. $p \rightarrow q$ nun doğruluğu söylenir
-

Örnek

n çift sayı ise n^2 de çift sayıdır önermesini ispat ediniz.

1. $n=2k$, $k \in \mathbb{Z}$ doğru kabul edilir
2. $n^2=4k^2= 2(2k^2)$

$P \in \mathbb{Z}$, $p=2k^2$ için, $n^2=2p$ olur

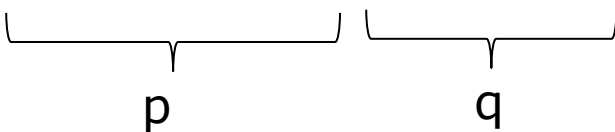
3. $n^2=2p$ bir çift sayı formunda olduğundan n^2 de çift sayıdır

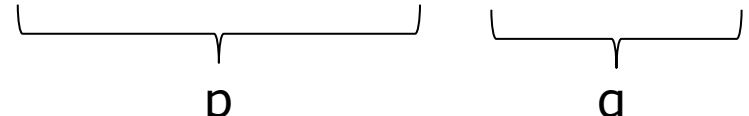
Not : $m+n$ çift sayı ise, m ve n çift sayıdır önermesi doğrudan ispat yöntemi ile ispat edilemez

Dolaylı İspat / Olmayan Ergi / Indirect İspat

$p \rightarrow q$ durumlarında doğrudan ispat ile ispatın mümkün olmadığı durumlarda dolaylı ispat kullanılır

Örnek

n^2 tek sayı ise, n tektir


$m+n$ tek sayı ise, m ve n tektir


Bir önermenin $p \rightarrow q$ karşıt tersi (contrapositive) karşılığı bulunur ve bu karşılık doğrudan ispat ile elde edilir

$p \rightarrow q$ için 'contrapositive' $q' \rightarrow p'$ alınır ve doğrudan ispat yapılır

Örnek

n^2 tek sayı ise n' de tek sayıdır önermesini ispat ediniz.

p : n^2 tek sayıdır p' : n^2 çift sayıdır
 q : n tek sayıdır q' : n çift sayıdır

Önermenin yeni hali: ' **n çift sayı ise n^2 çift sayıdır**'

Yeni önermeyi doğrudan ispat ile ispatlayalım

1. n çift sayı ise n^2 çift sayıdır
2. $n=2k$, $k \in \mathbb{Z}$ doğru kabul edilir
3. $n^2=(2k)^2= 4k^2$

$u \in \mathbb{Z}$, $u=2k^2$ için, $n^2=4k^2=2*2k^2=2u$ olur

Karşıt tersi doğru olunca, kendisi de doğrudur.
 n^2 tek sayı ise n' de tek sayıdır

Örnek

n bir tam sayı ve $3n+2$ tek ise, n 'nin tek olduğunu ispatlayınız

Önce doğrudan ispat yapalım:

$3n+2$ tek sayı ise, her hangi bir k tam sayısı için $3n+2 = 2k+1$

$$3n+2 = 2k+1$$

$3n+1 = 2k$ olduğunu görüyoruz, fakat n değerinin
tek olduğunu gösteremeyiz

Şimdi de dolaylı ispat yapalım:

n çift ise, $3n+2$ ' de çift sayıdır

Her hangi bir k tam sayısı çift $n = 2k$ ise $3n+2 = 3(2k)+2$ çift sayıdır

$3n+2 = 6k + 2 = 2(3k+1)$ olur, bu da bize $3n+2$ 'nin
çift sayı olduğunu söyler

Koşullu önermenin sonucunun negatifi, hipotezin yanlış olduğunu
gerektirdiği için orijinal koşullu önerme doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarma (Tümevarımsal ispat / Mathematical induction)

- $\forall n \in A, S(n)$ formundaki ifadenin ispatına bakalım
 - * N , pozitif tamsayılar veya doğal sayılardan oluşan bir küme
 - * A , N 'nin bir alt kümesi
 - * $S(n)$ de bir önerme olsun

Genel olarak özdeşliklerin ispatında kullanılır

-
- ❑ Her pozitif tamsayının, $S(n)$ önermesini doğru veya yanlış yaptığını farzedelim
 - 1. $S(1)$ doğru olduğunu teyit et (ilk eleman ile)
 - 2. n keyfi seçilmiş pozitif bir tamsayı olsun
 i pozitif bir tamsayı olup, $i < n$ olarak belirle
 - 3. $S(i)$ 'nin doğruluğundan yola çıkarak, $S(i+1)$ 'in doğru olduğunu göster
 - $S(i) \rightarrow S(i+1)$
 - 4. Sonuç olarak, tüm pozitif tamsayılar için $S(n)$ doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarım: terminoloji

- *Temel adım (basis step):*
 $S(1)$ 'in doğruluğunun gösterilmesi
- *Tümevarımsal adım (Inductive step):*
 $S(i)$ 'nin doğru farzedilmesi
İspat $S(i) \rightarrow S(i+1)$
if $S(i)$ is true, for all $i < n+1$, then $S(n+1)$ is true
- *Sonuç (Conclusion):*
Bütün pozitif tamsayılar için $S(n)$ 'nin doğruluğu

Örnek

İlk n adet pozitif tamsayının toplamı S_n olup, $S_n = 1+2+3+\dots+n$ olarak gösterilsin.

S_n 'nin $n=1,2,3\dots$ için **$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$** olduğunu ispatlayınız.

1. $n=1$ için, $1=1(1+1)/2=1$ (doğru)
2. $n=2$ için, $1+2 = (2*3)/2=3$ (doğru)
- $n=k$ için, $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (doğru kabul edilir)
3. $n=k+1$ için,

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{Doğrudur}$$

Örnek

İlk n adet pozitif tek sayının toplamı n^2 olduğunu ispatlayınız.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots = n^2$$

1. $n=1$ için, $1=1^2=1$ (doğru)
2. $n=2$ için, $1+3 = 2^2=4$ (doğru)
 $n=k$ için, $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ (doğru kabul edilir)
3. $n=k+1$ için,

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{k^2}$$

$$+ (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$

Doğrudur

Örnek

n pozitif tamsayı iken (n^3-n) 'nin 3'e tam olarak bölünebildiğini ispatlayınız.

$$S_n = (n^3 - n) / 3 = \text{mod}((n^3 - n), 3) = 0$$

1. $n=1$ için, $1^3 - 1 = 0$ ($0/3 = 0$ doğru)

1. $n=2$ için, $(8-2)/3 = 6/3 = 2$ (tam bölünüyor)

$n=k$ için, $(k^3 - k) / 3$ (tam olarak bölündüğü kabul edilir)

3. $n=k+1$ için,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\&= (k^3 + 3k^2 + 3k - k + 1 - 1) \\&= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) = (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\&= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)\end{aligned}$$

Her ikisi de 3'e bölünebiliyorsa Doğrudur