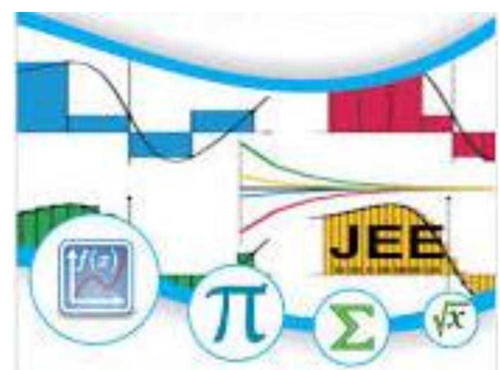
SAYISAL TÜREV



Yıldız Teknik Üniversitesi- Banu Diri

TÜREV NEDİR ?

• Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.

• Newton'un ikinci yasası temel bir örnek olup, bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

• Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.

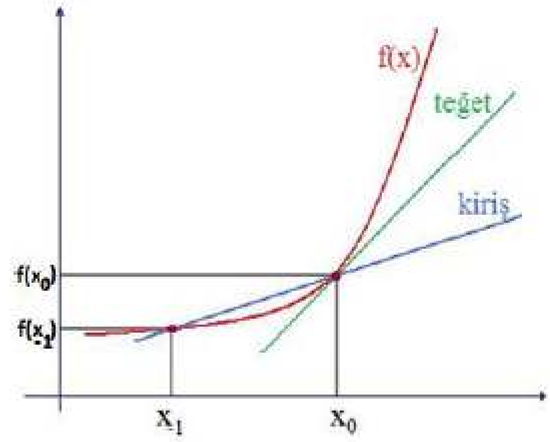
• Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine gör bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimi göre ifade edilir.

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

- **Türev,** bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir x noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle x noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.

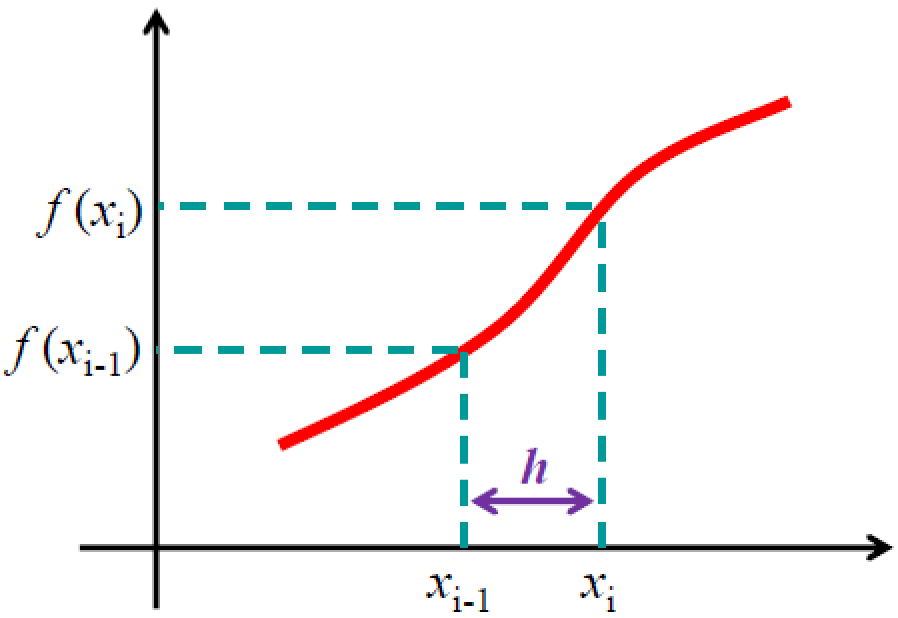
$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- **Sayısal türev,** bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

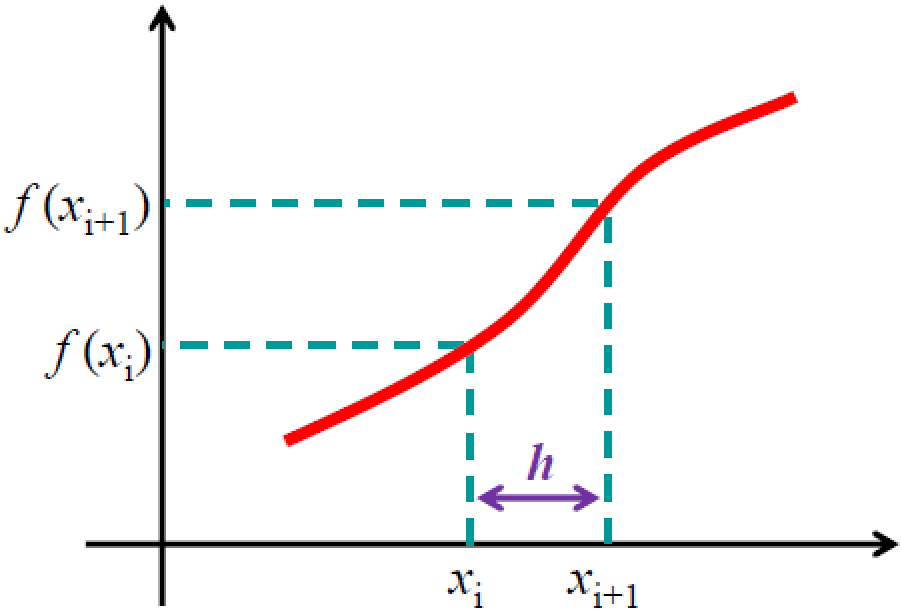
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\nabla f(x)}{\nabla x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\nabla f(x)}{\nabla x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

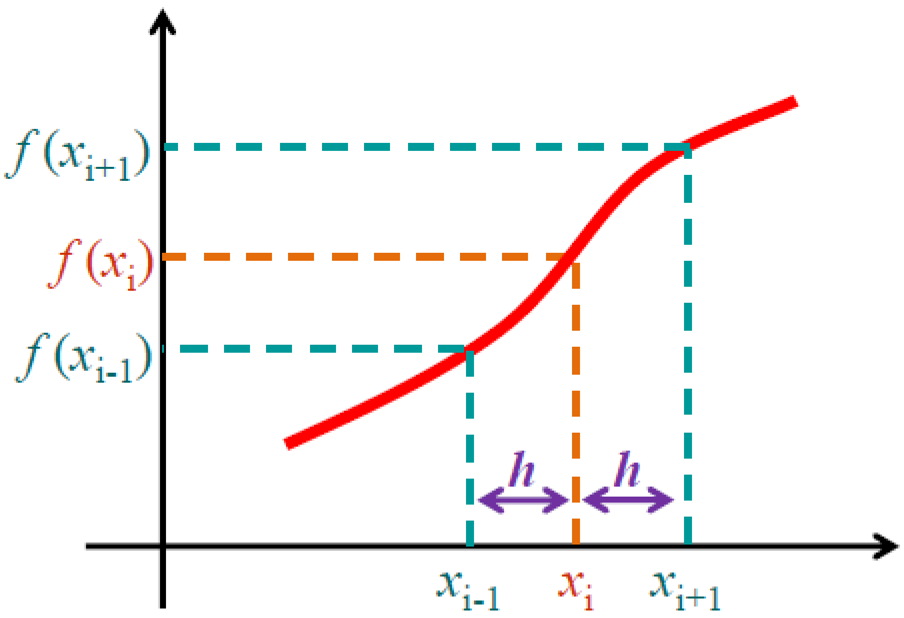
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



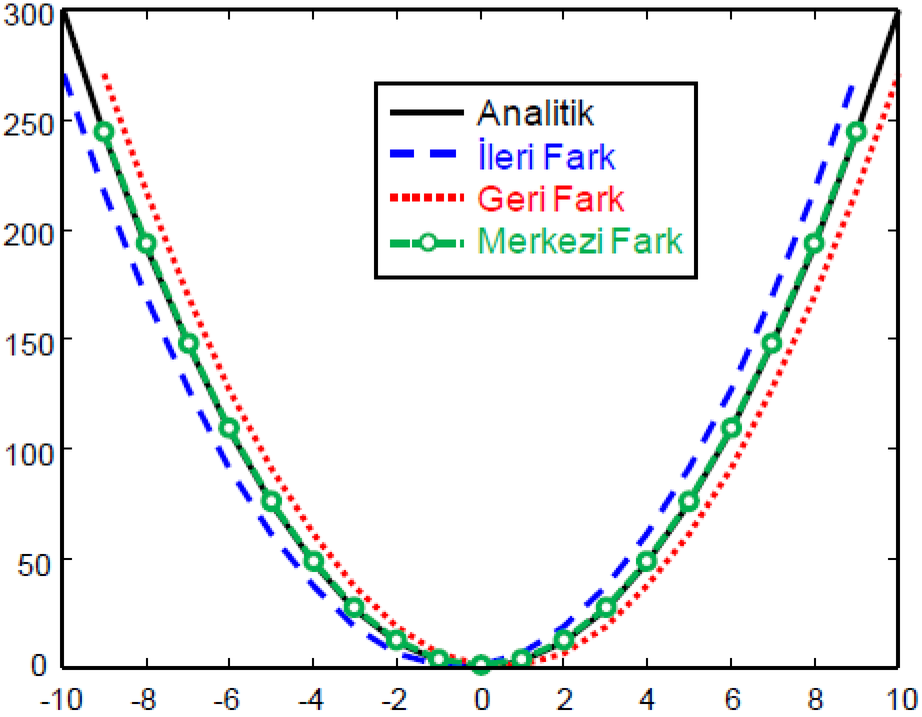
$$f(x_i)' = \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

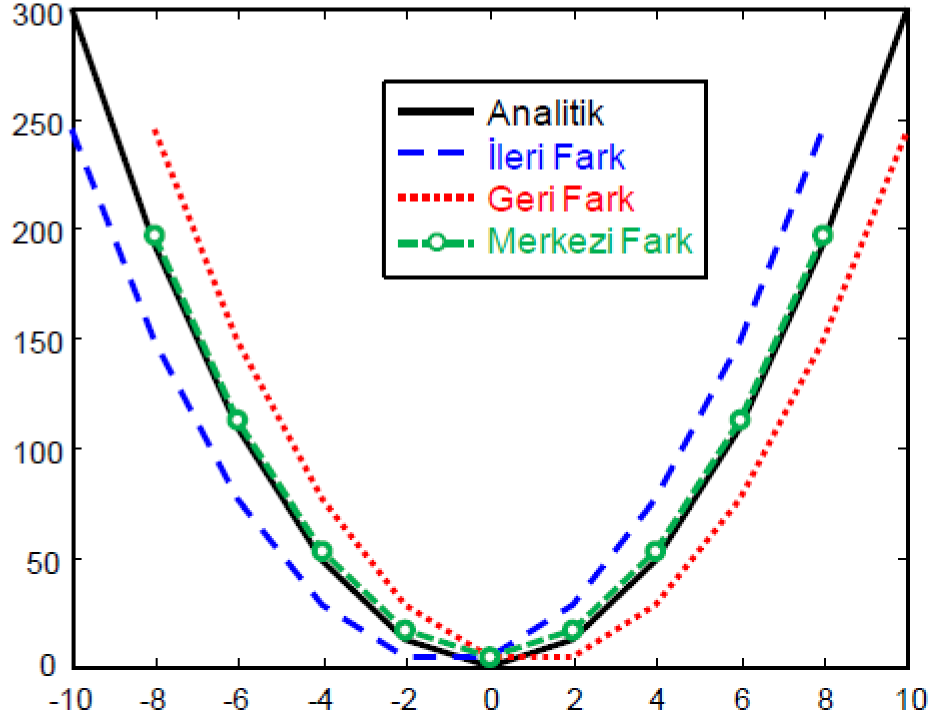
Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$$h = 0.1$$



$$h = 2$$



- f(x) = e^x fonksiyonunun x=1 noktasındaki türevini h=0,1 kullanarak her üç yöntem ile hesaplayınız.

- **Çözüm:**

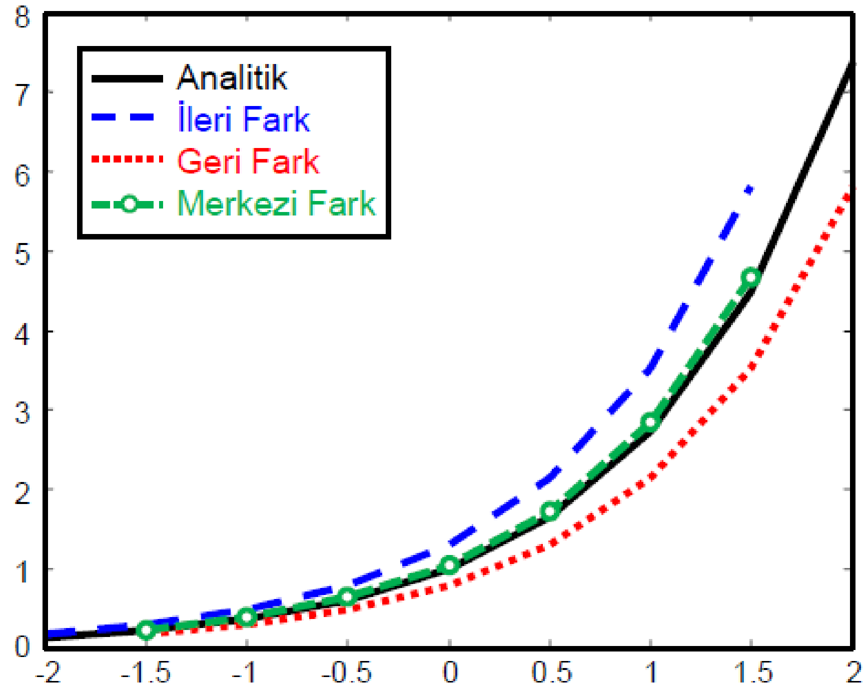
  - **Geri farklar**

  - **İleri farklar**

  - **Merkezi farklar**

  - **Analitik Çözüm**

2.7183



$$f(x) = e^x$$

İleri Fark ile $y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1+0.1)-f(1)}{0.1} = \frac{e^{1.1}-e^{1}}{0.1} = \underline{\underline{2{,}86}}$$

Geri Fark ile $y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1)-f(1-0.1)}{0.1} = \frac{e^{1}-e^{0.9}}{0.1} = \underline{\underline{2{,}59}}$$

Merkezi Fark ile $y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x} = \frac{e^{1.1}-e^{0.9}}{0.2} = \underline{\underline{2{,}72}}$

Analitik: $y=e^x$ $y'=e^x$ $y'=e^1= 2{,}72$ (merkezi farka yakın)

- $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

- **Çözüm:**

  - **Geri farklar**

  - **İleri farklar**

  - **Merkezi farklar**

  - **Analitik Çözüm**

Taylor Serisi İle Sayısal Türev

- **Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.**
- **Bir fonksiyonun $x_i+\Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.**

$$f(x_i+\Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- **Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx' in mertebesine eşit olur.**
- **Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.**

Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

-4

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-4f(x_i+h) = -4f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_i) + 4f(x_i+h) - f(x_i+2h)\right]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile ⟹

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- **$f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f''(x_i)$ yi çekelim.**

-2

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-2f(x_i+h) = -2f(x_i) - 2h.f'(x_i) - h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

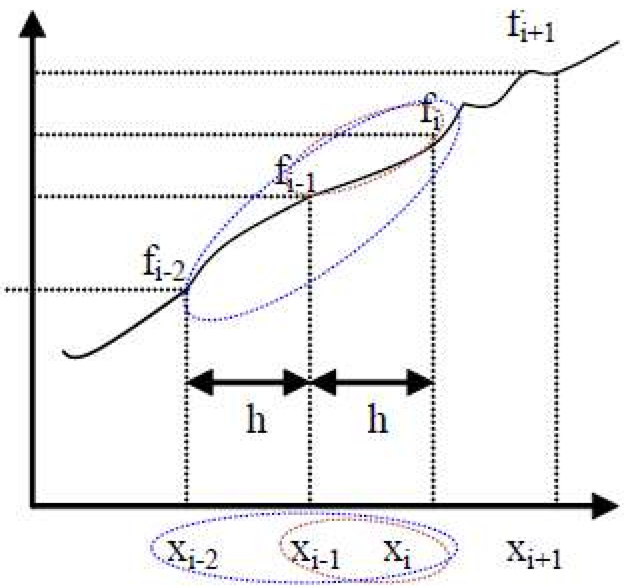
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_i) - 2f(x_i+h) + f(x_i+2h)\right]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile →

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi İle Geri Fark Yöntemi

- İleri fark yöntemindeki işlemler $f\ (x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-$2h$ civarındaki değerlerini $f\ (x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

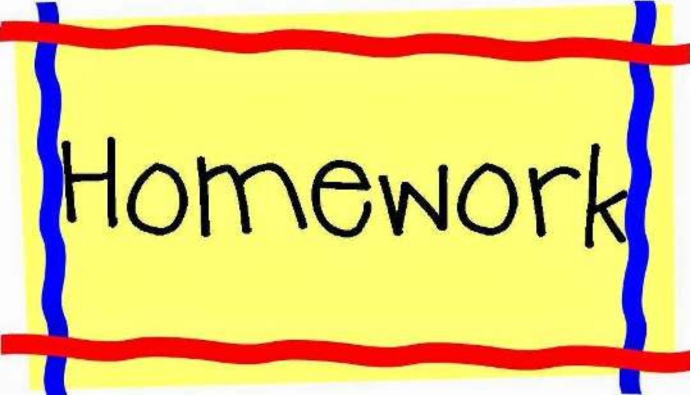
Homework 1

- Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.

$$f_i' = \frac{1}{6h}\left[-11 f_i + 18 f_{i+1} - 9 f_{i+2} + 2 f_{i+3}\right]$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2}\left[2 f_i - 5 f_{i+1} + 4 f_{i+2} - f_{i+3}\right]$$

$$f_i''' = \frac{1}{h^3}\left[- f_i + 3 f_{i+1} - 3 f_{i+2} + f_{i+3}\right]$$



2

- **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ **fonksiyonunun** $x=2$ **yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız.** $h=0.1$ **ve analitik çözüm** $f'(2)=8$

- **Çözüm:**

- **Basit ileri farkla çözüm**

- **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

KAYNAKLAR

- **Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**
- **Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, "*MATLAB ile Meslek Matematiği*", Seçkin Yayıncılık**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**