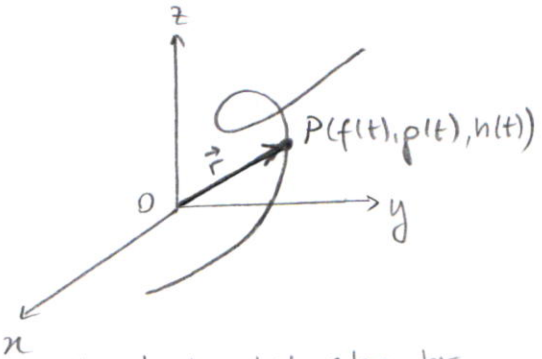
VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Uzaydaki bir cisim bir I zaman aralığında hareket ederken, cismin koordinatlarını I aralığında tanımlanan bir fonksiyon olarak düşünürüz:



Uzayda hareket eden bir parçacığın $\vec{r}$ konum vektörü, zamanın bir fonk.udur.

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in I$.

$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ noktalarının uzayda meydana getirdiği eğriye parçacığın yolu denir. Bu durumda parçacığın t zamanındaki konum vektörü

$$\vec{r}(t) = \vec{OP} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

olur. Bu şekilde tanımlanmış $\vec{r}(t)$ fonksiyonuna "vektör değerli (vektörel) fonksiyon" denir.

Limit ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, tanım bölgesi D olan vektör-değerli bir fonksiyon ve $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$ bir vektör olsun.

* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ iken $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = L_2$, $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = L_3$,

yani,

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right)\vec{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)\vec{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right)\vec{k}$$

dır.

Örnek: $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k} \Rightarrow \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \sin t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} t\right)\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

* Eğer $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$, $t_0 \in D$ noktasında süreklidir.

Türev

Eğer f, g ve h fonksiyonları t'de türevlenebilir ise $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ fonksiyonu da t'de türevlenebilirdir. Türev aşağıdaki vektör fonksiyonudur.

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}$$

* Eğer bir $\vec{r}$ vektör fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise, ona türevlenebilir denir.

* Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ise ve asla 0 olmuyorsa (yani f, g ve h'ın aynı anda 0 olmayan 1. mertebe türevleri varsa) $\vec{r}$ tarafından çizilen eğri düzgündür.

* Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü olsun:

1) Hız, konumun türevidir: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

2) Sürat, hızın büyüklüğüdür: Sürat $= |\vec{v}|$

3) İvme, hızın türevidir: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

4) $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektörü birim teğet vektördür. t zamanında hareketin yönüdür.

* Hız = sürat . yön $= |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{v}$

Örnek: Uzayda hareketi $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 5\cos^2 t\,\vec{k}$ konum vektörü ile verilen parçacığın hızını, süratini ve ivmesini bulun ($t = \frac{7\pi}{4}$'teki)

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} - 10\cos t \sin t\,\vec{k} = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} - 5\sin 2t\,\vec{k}$

$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = -2\cos t\,\vec{i} - 2\sin t\,\vec{j} - 10\cos 2t\,\vec{k}$

Sürat: $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (-5\sin 2t)^2} = \sqrt{4 + 25\sin^2 2t}$

$t = \frac{7\pi}{4}$ için $\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 5\vec{k}$, $\left|\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{29}$, $\vec{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$

Türev Alma Kuralları

$\vec{u}(t)$ ve $\vec{v}(t)$ türevlenebilir vektörel fonksiyonlar, $f(t)$ türevlenebilir keyfi bir skaler fonksiyon olsun.

1) $\frac{d}{dt}(\vec{u} \mp \vec{v}) = \vec{u}'(t) \mp \vec{v}'(t)$

2) $\frac{d}{dt}\left(f(t)\vec{u}(t)\right) = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$

3) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t).\vec{v}(t)\right) = \vec{u}'(t)\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\vec{v}'(t)$

4) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)\right) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$

5) $\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(f(t))\right] = f'(t)\,\vec{u}'(f(t))$ (Zincir kuralı)

6) Eğer $\vec{r}$ sabit uzunluklu ($|\vec{r}(t)| = c = \text{sabit}$) bir vektörel fonksiyon ise $\vec{r}.\vec{r}' = 0$ 'dır (yani $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ 'dir)

Çünkü, $\vec{r}(t).\vec{r}(t) = c^2 \rightarrow \vec{r}'(t).\vec{r}(t) + \vec{r}(t).\vec{r}'(t) = 2\vec{r}(t)\vec{r}'(t) = 0$

$\Rightarrow \vec{r}(t)\vec{r}'(t) = 0$.

Bir Uzay Eğrisi Boyunca Yay Uzunluğu

Bir $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$\vec{r}(t)$ bir parçacığın konum vektörü olarak düşünülürse, $L = \int_a^b |\vec{v}(t)|\,dt$ olur.

Örnek: Bir planör $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ eğrisi (heliks) boyunca tırmanışa geçiyor. Planörün $t=0$ 'dan $t=2\pi$ 'ye kadar aldığı yolun uzunluğunu bulunuz.

$$L = \int_a^b |\vec{v}|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi$$