

SONSUZ DİZİLER ve SERİLER

DİZİLER

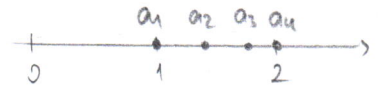
Tanım: Belirli bir kurala göre sıralanmış sayılar topluluğuna dizi denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a_n : genel terim (n -terim) \rightarrow dizinin kuralını belirler

n : indis $\rightarrow a_n$ teriminin dizideki kaçıncı eleman olduğunu belirtir.

Örneğin; $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$



⊗ Her dizi, \mathbb{Z}^+ üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Yani, $f(n) = \{a_n\} : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto a_n$

Örnekler:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

2) $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ n ilk 6 terimini yazın.

\hookrightarrow tekrarlama kuralı

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = 5$$

$$a_6 = 8$$

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\} \rightarrow \text{Fibonacci Dizisi}$$

5) $a_1 = 1, n > 1, a_n = n \cdot a_{n-1}$ ise $\{a_n\}$ n ilk 4 terimini yazın.

\hookrightarrow tekrarlama kuralı

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$$

$$\{a_n\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\} \rightarrow \text{Faktöriyel Dizisi}$$

Yakınsama ve İraksama:

Bazen bir dizinin indis sayısı (n) arttıkça dizideki sayılar belli bir değere yakınsar.

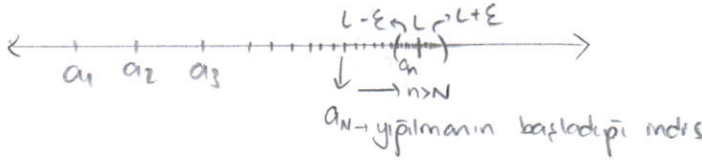
Örneğin, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler 0'a yaklaşıyor,

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots\}$ dizisinde terimler 1'e yaklaşıyor,

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$ gibi dizilerde ise tek bir değere yakınsayamaz.

Tanım: Her ε pozitif sayısı için $n > N$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir N tamsayısı bulunuyorsa, $\{a_n\}$ dizisi L 'ye yakınsar. Eğer böyle bir L yoksa $\{a_n\}$ dizisi iraksar.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi L 'ye yakınsıyorsa L 'ye dizinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ile gösterilir.



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
 → sayı = dizi yakınsaktır $\{\frac{1}{n}\}$
 → $\pm \infty$ = dizi iraksaktır ($\pm \infty$ 'a iraksar) $\{\sqrt{n}\}$
 → limit mevcut = dizi iraksaktır. $\{(-1)^{n+1}\}$ değil

Dizilerin Limitlerinin Hesaplanması:

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ birer reel sayı dizisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ olsun.

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (k sabit)
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ ise)

(Fonksiyonlardaki limit kuralları diziler için de geçerlidir)

Örnek: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4/n^6)-7}{1+(\frac{3}{n^6})} = \frac{0-7}{1+0} = -7$

Örnek: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$

Diziler için Sandvich Teoremi: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Eğer belli bir N sayısından büyük bütün n 'ler için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ dir.

Örnek: $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Örnek: $(-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$

Diziler için Sürekli fonksiyon teoremi: $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun.

Eğer $a_n \rightarrow L$ ise ve f fonksiyonu her a_n 'de tanımlı olup L 'de sürekli ise, $f(a_n) \rightarrow f(L)$ dir.

Örnek: $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 1$ olduğunu gösteriniz.

$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ old-nu biliyoruz. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $L=1$ alınırsa $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$ dir.

Teorem: Her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde $\{a_n\}$ dizisi ve $f(x)$ fonksiyonu mevcut olsun. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ dir.}$$

\swarrow sayı \searrow ∞

* Dolayısıyla bazı dizilerin limitlerini hesaplamak için L'Hopital kuralını kullanabiliriz.

Örnek: $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyim.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \text{dizi yakınsaktır.}$$

Örnek: $\{ \sin n\pi \}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 0$ mevcut değildir, ancak dizi iraksaktır diyemeyiz.

$$\{ \sin n\pi \} = \{ 0, 0, 0, \dots, 0, \dots \} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{dizi yakınsaktır.}$$

\downarrow
 sabit dizi

* Yukarıdaki teorem limitin mevcut olması durumunda geçerlidir. 13

Sınırlı Diziler:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ 'e üstten sınırlı dizi denir. M sayısı, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır.

⊗ Bir dizinin (varsa) birden fazla üst sınırı vardır.

⊗ M , $\{a_n\}$ için bir üst sınır ve M 'den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır değilse M 'ye "en küçük üst sınır" (EÜS) denir.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \geq m$ olacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$ 'e alttan sınırlı dizi denir. m sayısı, $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır.

⊗ Bir dizinin (varsa) birden fazla alt sınırı vardır.

⊗ m , $\{a_n\}$ için bir alt sınır ve m 'den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse m 'ye "en büyük alt sınır" (EBAŞ) denir.

Bir dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise $\{a_n\}$ 'e sınırlı dizi denir. $\{a_n\}$ sınırlı değilse sınırsız dizi denir.

Monoton Diziler:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

a) $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizedir. ($\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ azalmayan)

b) $a_{n+1} \leq a_n$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizedir. ($\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \{a_n\}$ artmayan)

Eğer $\{a_n\}$ dizisi azalmayan veya artmayan bir dizi, ise "monoton" dizedir.

Örnek: 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ azalmayan bir dizedir, çünkü $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
($\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ olduğundan aynı zamanda iraksaktır)

2) $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$ artmayan bir dizedir: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan yakınsaktır)

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ dizisi monoton değildir.

($\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ limiti mevcut olmadığından iraksaktır)

Monoton Dizi Teslemi: Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise yakınsaktır.

Not: Her yakınsak dizi sınırlıdır, fakat her sınırlı dizi yakınsak olmayabilir.

Örneğin: $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ dizisi sınırlıdır ancak limiti mevcut olmadığından yakınsak değildir.

Örnek: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin

- a) yakınsaklığını
 - b) monotonluğunu
 - c) sınırlılığını
 - d) EBAS, EKÜS
- } inceleyim.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow$ dizi azalmayan dizedir. (monoton dizi)

c) yakınsak olduğu için sınırlıdır.

⊗ Alttan sınırlı ve artmayan dizi EBAS'a, üstten sınırlı ve azalmayan dizi EKÜS'e yakınsar.

d) Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır. \Rightarrow EKÜS = 1.

Dizi alttan $\frac{1}{2}$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır \Rightarrow EBAS = $a_1 = \frac{1}{2}$

Sıkça Karşılaşılan Limitler:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x \text{ iken})$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty \quad (x > 1)$

$x > 1 \Rightarrow L = \infty$
 $x < -1 \Rightarrow L \text{ mevcut değil}$

Örnek: 1) $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

2) $\{\sqrt[n]{3n}\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{=1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{=1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

SERİLER

Tanım: Bir kurala bağlı sayılar dizisinin terimlerinin toplanmasıyla elde edilen ifadeye seri denir.

Yani, $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ile gösterilir

Örnek: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

3) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

5) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$

6) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)^2+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Not: Bir serinin ilk indisinin 1'den başlama zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda indis, uygun bir dönüşümle istenilen sayıdan başlatılabilir.

Örneğin; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $n=m-2$ dönüşümü ile $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazılabilir.

Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

\vdots

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

\vdots

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ \vdots \end{array} \right\} \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi, S_n 'ye de serinin n. kısmi toplamı denir.

Eğer $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ ise) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve L toplamına sahiptir.

Bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = L$ ile ifade edilir.

Eğer $\{S_n\}$ ıraksak ise seri de ıraksaktır.

ÖZET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamını bulmak için:

1) $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bulunur, yakınsaklığı incelenir.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \begin{cases} \rightarrow \text{sayı} = L \text{ ise seri yakınsaktır ve toplamı } L \text{ dir.} \\ \rightarrow = +\infty \text{ ise seri } +\infty \text{ a ıraksar} \\ \rightarrow \text{limit mevcut değilse seri ıraksar} \end{cases}$

Geometrik Seri

n. terimi $a_n = ar^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki seriye

geometrik seri denir. Burada a ve r , $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır.

Geometrik serinin ilk terimi a sayıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$ dir.

Geometrik serinin yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisinin n. kısmi toplamı S_n 'i hesaplayalım.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ - rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n = a(1 - r^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

1. durum: $r=1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \dots + a + \dots$ serisi elde edilir.

Bu durumda, $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \begin{cases} +\infty (a > 0) \\ -\infty (a < 0) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır. (Yani $r=1$ iken seri toplanamaz)

2. durum: $r \neq 1$ ise $(1-r)S_n = a(1-r^n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

a) $|r| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-\overset{\approx 0}{r^n})}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ elde edilir.

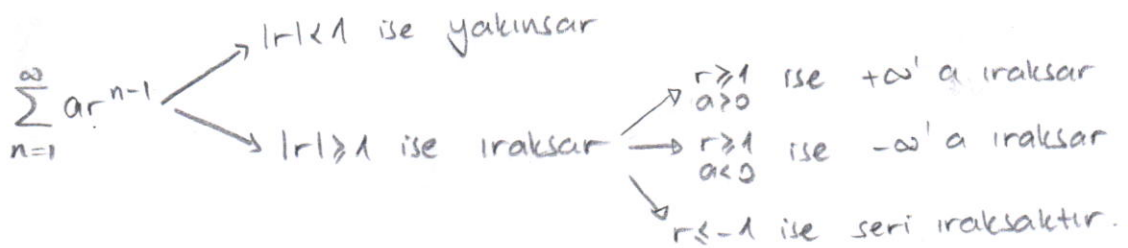
Dolayısıyla seri yakınsaktır ve toplamı $\frac{a}{1-r}$ dir.

b) $r > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-\overset{\approx \infty}{r^n})}{1-r} \begin{cases} = +\infty (a > 0 \text{ ise}) \\ = -\infty (a < 0 \text{ ise}) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır.

c) $r \leq -1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ mevcut olmadığından $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ limiti de mevcut değildir. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

ÖZET:



Örnek: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ toplamını bulun.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \begin{matrix} a=1 \\ r=\frac{1}{2} \Rightarrow |r|=\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsak} \end{matrix}$$

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{seri } 2 \text{ 'ye yakınsar yani } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Örnek: $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots$ toplamını bulun.

$$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi \left(1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{matrix} a=\pi \\ r=-\frac{e}{\pi} \end{matrix}$$

$$|r| = \left|-\frac{e}{\pi}\right| = \frac{e}{\pi} \stackrel{\approx 2,7}{\approx 3,14} < 1 \Rightarrow \frac{a}{1-r} = \frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{e+\pi} \text{ 'ye yakınsar.}$$

Örnek: $1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = ?$

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} > 1 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \text{ seri } +\infty \text{ a } \text{ıraksar}$$

Örnek: $x = 0,323232\dots = 0.\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.

$$\begin{aligned} x = 0,3232\dots &= \frac{32}{100} + \frac{32}{(100)^2} + \frac{32}{(100)^3} + \dots = \frac{32}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{32}{100}}_a \underbrace{\left(\frac{1}{100} \right)^{n-1}}_{r < 1} \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{32}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{99}$$

Teleskopik Seri

Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak elde edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{toplamı hesaplanamaz.}$$

Seri teleskopik seridir ve basit kesirlere ayrılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow A=1, B=-1 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{4}{n^2+4n+3}$!

$\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow A=2, B=-2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} \right)$

$S_n = 1 - \frac{2}{4} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{4} - \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{5}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3}$

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$

$S_n = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{9} + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$!

$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$

$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln \frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Serilerde İlgili Bazı Teoremler

- 1) $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ ise $\sum a_n + b_n = A+B$, $\sum k a_n = k \sum a_n$ (k bir sayı)
- 2) $\sum a_n$ ıraksak ise $k \sum a_n$ serisi de ıraksaktır.
- 3) $\sum a_n$ ıraksak, $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n + b_n$ serisi de ıraksaktır.
- 4) $\sum a_n$ ıraksak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n + b_n$ serisi ıraksak veya yakınsak olabilir.
- 5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya çıkarmak serinin karakterini değiştirmez.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ve $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{S_n}$ olsun. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ dir.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{\substack{\parallel \\ S \quad \parallel \\ S}} = 0$$

(n çok büyük olduğu zaman)

(Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ise seri iraksak olabilir)

n. terim testi: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi iraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre iraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut olmadığından n. terim testine göre iraksaktır.

Örnek: Aşağıdaki serilerin toplamalarını bulunuz.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{2} < 1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{3} < 1}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 8$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

7) Yeniden İndislem: Terimlerin sırasını değiştirmedikçe bir seriyi yeniden indiseleyebiliriz. Bu işlem yakınsaklığı etkilemez.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Örneğin: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$