(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ karakteri?

I. Yol Oran Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^2 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(2n+3).n^2}{(n+1)^2.(2n+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$ Geo. seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2.2^n}$ de yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p = \frac{1}{3} < 1$ ıraksak seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} (1+\ln n) = \infty \Rightarrow$$

Limit Testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de ıraksaktır.

(*) $\dfrac{1+2\ln 2}{\underbrace{9}_{\substack{4+5 \\ \uparrow \\ n=2}}} + \dfrac{1+3\ln 3}{\underbrace{14}_{\substack{9+5 \\ \uparrow \\ n=3}}} + \dfrac{1+4\ln 4}{\underbrace{21}_{\substack{16+5 \\ \uparrow \\ n=4}}} + \cdots$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \cdots$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçelim. Harmonik Seridir, ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\overset{0}{\frac{1}{n}}+\overset{\infty}{\ln n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\underset{0}{\frac{5}{n^2}}\right)} = \infty \Rightarrow$$

Limit Tes. göre $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de ıraksak

---

(*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$

$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$a=1 \quad r=\frac{1}{6}$

$|r| = \frac{1}{6} < 1$

$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$

(14) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1 \Rightarrow$$ oran testinden seri yakınsak

(15) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1+\sin n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1$$ $\Rightarrow$ oran testinden seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ olsun. $f(x)$ $[1,\infty)$ da

→ pozitiftir $(f(x)>0)$

→ Azalandır $(f'(x)<0)$

→ Süreklidir ($[1,\infty)$ da süreksizlik noktası yoktur)

integral Testi kullanılabilir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Arctan} u \Big|_0^{\ln R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\ln R \end{array}$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\underbrace{\operatorname{Arctan}(\underbrace{\ln R}_{\infty})}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{Arctan} 0}_{0})$$

$= \pi/2 \Rightarrow$ improper integral yakınsak

integral Testine göre; $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ karakteri?

Kök testini düşünürsek:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}}_{1} = 1 \rightarrow \text{Kök Testi Sonuç vermez} \times$$

Limit Testini düşünürsek:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ seçelim. $p=3>1$ yakınsaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^n \cdot \cancel{n^3}}}{\frac{1}{\cancel{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0,\infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ de yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ karakteri?

Kök testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{e^2}} = e > 1$$

Kök Testine göre seri ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisinin karakteri?

I. Yol Mukayese Testi ile:

$\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{n.2^n} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{Yakınsak}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{r}^{n-1} \Rightarrow$$ Geo. Seri $|r| = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak.

O halde Muk. Testine göre $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisi de yakınsak

---

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ geo. serisini seçelim. $|r| = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\ln n}{n+1}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{2^n}$ yak. olduğundan $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

III. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{\ln n}{(n+1).2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2^n}{2^{n+1}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \overbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}^{1} = \boxed{\frac{1}{2}} < 1$$

∞/∞ L'Hopital $\Downarrow$ $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}}_{1}$

Oran testine göre yakınsak

* $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$ karakteri?

$n>3$ için $n > \ln n$ dir.

$n > \ln n \Rightarrow \ln n > \ln(\ln n) \Rightarrow n > \ln n > \ln(\ln n)$ sağlanır.

$n > \ln(\ln n) \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ $\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak

ve $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ olduğundan Mukayese testine göre $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$ ıraksaktır.

---

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n!\, n!}{2.(2n)!}$ serisinin karakteri?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{5^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{2.(2n+2)!}}{\dfrac{5^n.\, n!\, n!}{2.(2n)!}} = \frac{5.(n+1).(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$$

Oran Testine göre Seri Iraksak

---

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ karakteri?

I. Yol Kök Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} = 2 > 1$$

Seri kök testine göre ıraksaktır.

$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$

II. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1} . 2 = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ Seri oran testine göre ıraksaktır

(*) a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\cdots$

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots$

} serilerinin karakterini belirleyiniz.

---

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{(n+1)^2}=2\neq 0,\infty$$

iki seri aynı karakterli. $\sum\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de ıraksak

---

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (yakınsak ($r=\frac{1}{2}$)) geometrik serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n(1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0})}=1\neq 0,\infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum\frac{1}{2^n-1}$ de yakınsak

(*) $\underbrace{\frac{1+2\ln 2}{9}}_{\substack{4+5\\ n=2}}+\underbrace{\frac{1+3\ln 3}{14}}_{\substack{9+5\\ n=3}}+\underbrace{\frac{1+4\ln 4}{21}}_{\substack{16+5\\ n=4}}+\cdots$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n\ln n}{n^2+5}=\frac{1+2\ln 2}{9}+\frac{1+3\ln 3}{14}+\cdots$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ seçelim. Harmonik Seridir, ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(\overset{0}{\frac{1}{n}}+\overset{\infty}{\ln n})}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{0})}=\infty \Rightarrow$$

Limit Tes. göre $\sum\frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum\frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de ıraksak

b) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. *(9+9 puan)*

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$= e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$ old. YAK.
(Kök Testine göre)

ii) $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$

Limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.
(her iki seri aynı karakterde)

Başarılar dilerim.

15

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ karakteri?

$[2,\infty)$ da $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ sürekli, pozitif, azalan ✓ int. Testi uygulanabilir.

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln R}\frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln R}\right]$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$= \lim_{R\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{1}{\ln R}}_{0}+\frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$ yakınsak

dolayısıyla integral testine göre $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n}}{1}} = 1 \neq 0,\infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum n^{-(1+\frac{1}{n})}$ ıraksak

13

* $1+\frac{1}{10}+\frac{1.2}{10^2}+\frac{1.2.3}{10^3}+\dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty>1$

olduğundan Oran testine göre seri ıraksaktır.

* $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\dots$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$ Oran testine göre seri yakınsak

* Genel terimi $a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\tan\frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}\cdot\tan\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left.\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right\}1}{\left.\frac{\tan\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right\}1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}<1$$

Seri Yakınsak (Oran Testine göre)

* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{n^{-7/6}}_{b_n}$ serisini seçelim. $p=\frac{7}{6}>1$ seri yakınsak.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}\cdot n^{7/6}=1\neq 0,\infty$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$ yakınsak.

SORU 1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim, $p=\frac{1}{3}<1$ (p-serisi) olduğundan seçilen seri ıraksak. Limit ~~mukayese~~ testine göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{5/3}}{2+n^{5/3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{5/3}}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\xrightarrow{}0 +1\right)}{\cancel{n^{5/3}}\left(\frac{2}{n^{5/3}}\xrightarrow{}0+1\right)} = 1$$ olduğundan her iki seri aynı karakterde yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisi de ıraksak.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ karakteri?

$\frac{1+\cos n}{1+n^2} \leq \frac{2}{1+n^2} < \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}}_{p=2>1 \text{ yak.}} \Rightarrow$ Mukayese Testine göre $\sum \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ de yak.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(\sqrt[n]{n})^2}^{1}}{\underbrace{e^n+n}_{\infty}} = 0<1$$ ⇒ Kök Testine göre seri yakınsak

---

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}+1}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$ yak.) serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e^{n^2}+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{n^2}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{\cancel{2}}}{2\cancel{n}e^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n\, e^{n^2}} = 0 \Rightarrow$$

∞/∞ L'Hopital, ∞/∞ L'Hopital

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{n^2}$ yak. olduğundan $\sum \frac{n}{e^{n^2}+1}$ de yak.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$ serisinin yakınsak olduğunu integral testi ile gösteriniz.

$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}$ $[1,\infty)$ → $f(x)$, $[1,\infty)$ da pozitiftir

→ $f(x)$, $[1,\infty)$ da süreklidir.

→ $f'(x)=\frac{e^{x^2}-2x^2e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}<0 \Rightarrow$ $f(x)$ $[1,\infty)$ da azalandır.

integral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{x}{e^{x^2}}dx$$

$x^2=u$ $2x\,dx=du$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=R \Rightarrow u=R^2$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R^2}\frac{1}{2}e^{-u}du=\lim_{R\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_1^{R^2}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\underbrace{-\frac{1}{2}.e^{-R^2}}_{0}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$$ → int. yakınsak

$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx$ integrali yakınsak olduğundan, integral testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$ serisi de yakınsaktır.

1. vize 4. uygulama

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisinin karakteri?

I. Yol

$$\frac{n!}{(n+2)!+1} < \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{n!}\ 1}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n^2+3n+2} \quad (*)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ serisinin karakterini incelemek için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ seçelim. ($p=2>1$ yakınsak seridir)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+3n+2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$$ $\Rightarrow$ Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir. O halde $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ de yakınsaktır.

(*) 'a göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}}_{\text{Yakınsak}}$ dir.

Mukayese Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisi yakınsaktır.

Not: Oran Testini kullansaydık:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{(n+3)!+1} \cdot \frac{(n+2)!+1}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{(n+2)!}\left(1+\overset{0}{\frac{1}{(n+2)!}}\right)}{\underset{n+3}{\cancel{(n+3)!}}\left(1+\underset{0}{\frac{1}{(n+3)!}}\right)} = 1$$

Test Sonuç vermezdi!!!

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$) yakınsak seçersek:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n+2)!+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \cancel{n!}}{\underset{(n+2)(n+1)}{\cancel{(n+2)!}}\left(1+\underset{0}{\frac{1}{(n+2)!}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli $\sum \frac{n!}{(n+2)!+1}$ de yakınsak