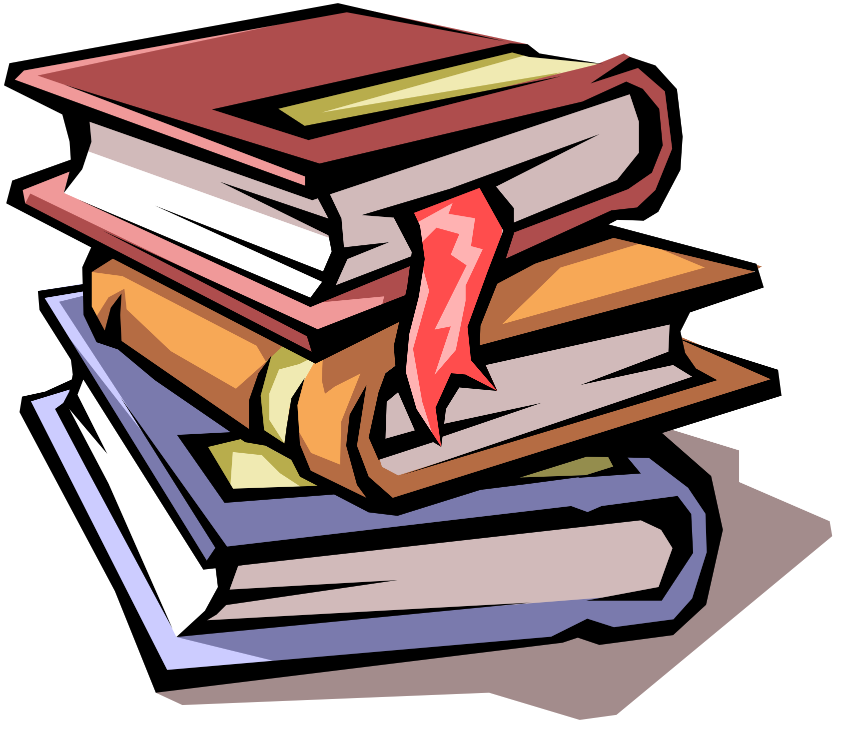
# Bölüm 4
# Matematik Dili



# Kümeler

- *Küme(Set) =* ayrık nesnelerden oluşmuş topluluğa küme denir
- Kümenin elemanları element olarak adlandırılır
- Kümeler nasıl gösterilir
  - Liste şeklinde
    - Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$
  - Tanım şeklinde
    - Örnek: $B = \{x \mid x = 2k + 1, 0 \leq k \leq 3\}$

# Sonlu ve Sonsuz Kümeler (Finite and İnfinite Sets)

- *Sonlu kümeler (Finite* sets)
  - Örnekler:
    - A = {1, 2, 3, 4}
    - B = {x | x is an integer, 1 $\leq$ x $\leq$ 4}
- *Sonsuz kümeler (Infinite* sets)
  - Örnekler:
    - Z = {integers} = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}
    - S={x| x is a real number and 1 $\leq$ x $\leq$ 4} = [0, 4]

# Bazı önemli kümeler

- Boş küme (*empty* set $\varnothing$ veya { }), elemanı olmayan küme

  Note: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

  *null set* veya *void set adını da alırlar*
- *Evrensel küme (Universal* set): Bahsettiğimiz guruptaki bütün elemanları içine alır
- Örnekler:
  - U = {all natural numbers}
  - U = {all real numbers}
  - U = {x| x is a natural number and $1 \leq x \leq 10$}

# Kardinalite

- Bir A kümesinin kardinalitesi o A kümesinin eleman sayısıdır. |A| olarak gösterilir
- Örnekler:

  If $A = \{1, 2, 3\}$ then $|A| = 3$

  If $B = \{x \mid x$ is a natural number and $1 \leq x \leq 9\}$

  then $|B| = 9$
- Sonsuz (Infinite) kardinalitisi
  - Sayılabilir (Countable) (örnek, natural numbers, integers)
  - Sayılamayan (Uncountable) (örnek, real numbers)

If $S = \{1,2,3\}$ $|S| = 3.$

If $S = \{3,3,3,3,3\}$ $|S| = 1.$

If $S = \varnothing$ $|S| = 0.$

If $S = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \}$ $|S| = 3.$

If $S = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $|S|$ sonsuzdur

# Altkümeler (Subsets)

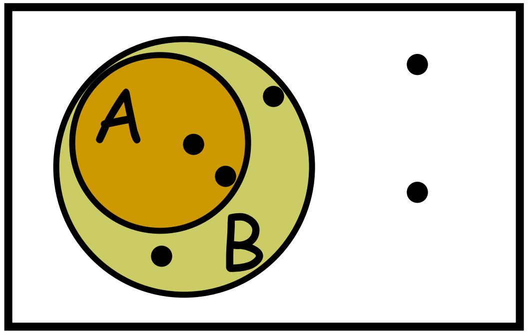
- Eğer ***X*** kümesinin bütün elemanları ***Y*** kümesi içerisinde yer alıyorsa ***X***'e ***Y*** kümesinin bir alt (*subset) kümesidir denir*

  (in symbols $X \subseteq Y$)
- *Eşitlik(Equality)*: $X = Y$ if $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$

- Eğer ***X*** kümesi, ***Y*** kümesinin bir alt kümesi iken ***Y*** kümesi, ***X*** kümesinin bir alt kümesi değilse (x#y); ***X*** kümesi, ***Y*** kümesinin bir öz-alt kümesidir (proper subset) denir
- if $X \subseteq Y$ but $Y \not\subseteq X$
  - Gözlem: $\varnothing$ her kümenin bir alt kümesidir

$x \in S$ anlamı "x , S kümesinin bir elemanıdır."
$x \notin S$ anlamı "x , S kümesinin bir elemanı değildir."
$A \subseteq B$ anlamı "A, B nin bir alt kümesidir."

or, $\forall x\ ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$.




Venn Diagram

# Power set

- ***X*** kümesinin *power set* ‘i, ***X*** kümesinin bütün alt kümelerinin kümesi olup, *P*(X) ile gösterilir
  - $P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$
  - Örnek: if $X = \{1, 2, 3\}$,

    then $P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

- <u>Teorem</u> : If $|X| = n$, then $|P(X)| = 2^n$

If S is a set, then the *power set* of S is

$$2^S = \{ x : x \subseteq S \}.$$

If $S = \{a\}$ $2^S = \{\varnothing, \{a\}\}.$

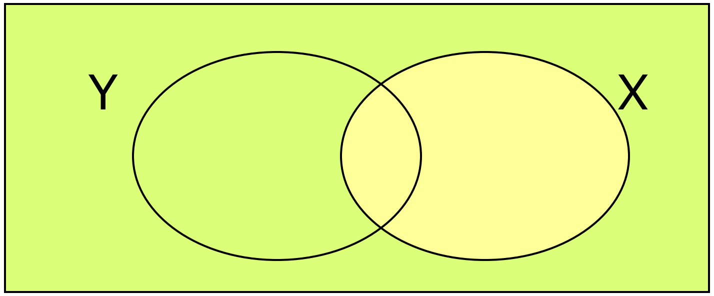
If $S = \{a,b\}$ $2^S = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$

If $S = \varnothing$ $2^S = \{\varnothing\}.$

If $S = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ $2^S = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.$

Fact: if S is finite, $|2^S| = 2^{|S|}$. (if $|S| = n$, $|2^S| = 2^n$)

# Venn şemaları (diagrams)



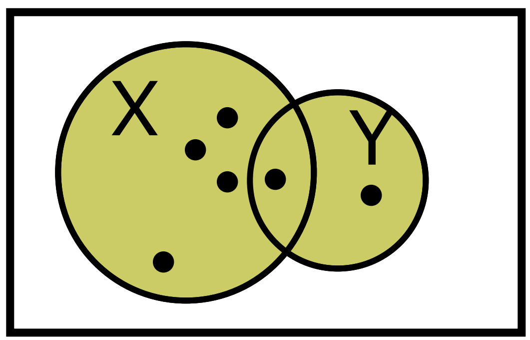

- Bir venn şeması verilen iki kümenin grafik olarak gösterilimini sağlar
- Bir kümenin birleşimi(union), kesişimi (intersection), farkı (difference), simetrik farkı (symmetric difference) ve tümleyeni (complement) tanımlanabilir

# Küme İşlemleri (Set operations):
## Birleşim (Union)

***X*** ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** kümesinin birleşimi (*union*)

$$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$




If X = {Ayşe, Lale, Zeynep},
and Y = {Lale, Deniz}, then

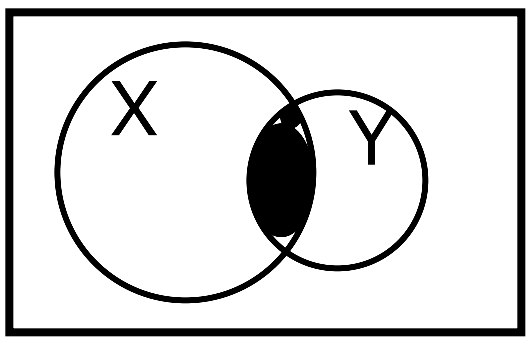
$X \cup Y$ = {Ayşe,Lale,Zeynep,Deniz}

# Küme İşlemleri (Set operations):
## Kesişim (Intersection)

***X*** ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** kümesinin kesişimi (*intersection)*

$$X \cap Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$$



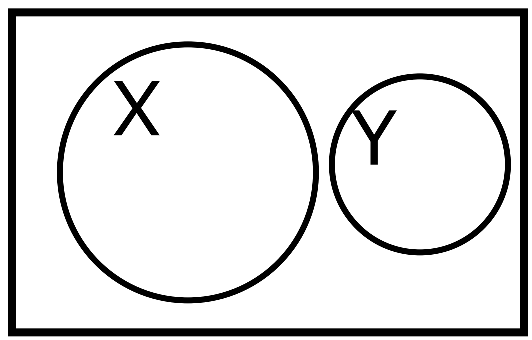

If X = {Ayşe, Lale, Zeynep},
and Y = {Lale, Deniz}, then

$X \cap Y = \{Lale\}$

***X*** ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** gibi iki kümenin kesişimi boş küme ise ***X*** ve ***Y*** kümeleri *ayrık* (*disjoint-pairwise) kümeler* olarak adlandırılır

if $X \cap Y = \varnothing$




If X = {z : z rektördür}, and Y = {z : z bu sınıfta oturuyor}, then

$X \cap Y$ = {z : z bu sınıfta oturan bir rektördür} = $\varnothing$

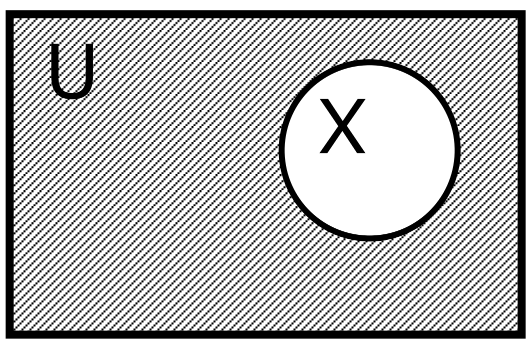
# Tümleyen

Bir X kümesinin Tümleyeni:

$$X = \{ z : z \notin X \}$$

If $X = \{z : z$ uzun boyludur$\}$, then

$X = \{z : z$ uzun boylu değildir.$\}$




$\overline{\varnothing} = U$

ve

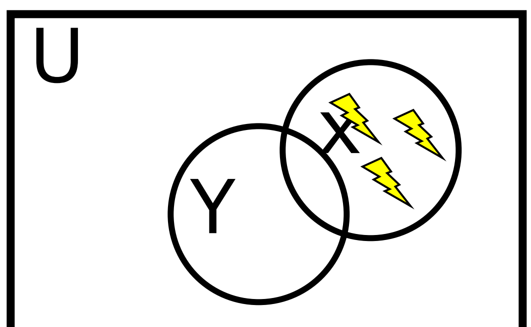
$\overline{U} = \varnothing$

# İki KümeninFarkı (Difference)

- İki kümenin farkı

$$X - Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$$

*Fark*(*difference*), ***X*** kümesine göre ***Y***'nin *göreceli tümleyeni* (*relative complement )* *olarak da adlandırılır*

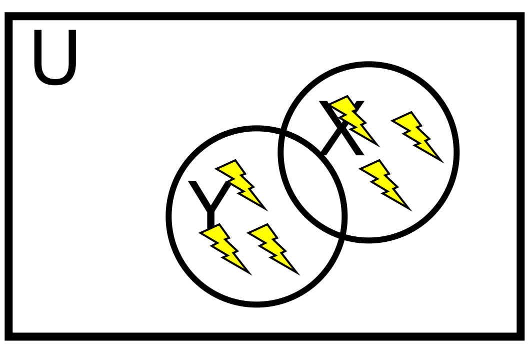


- *Simetrik Fark (Symmetric difference )*

$$X \oplus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

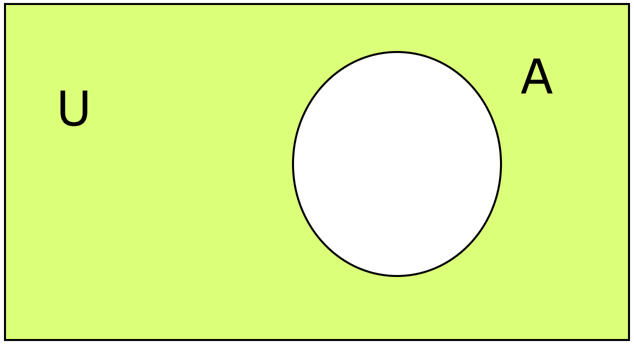
like "exclusive or"

$$X \oplus Y = \{ z : (z \in X \wedge z \notin Y) \vee (z \in Y \wedge z \notin X)\}$$



- Evrensel küme (universal set ) içerisinde yer alan A kümesinin *tümleyeni* (*complement*) $A^c = U – A$ şeklinde gösterilir

Sembolü $A^c = U - A$



# Küme işlemlerinin özellikleri (1)

Theorem : U, evrensel bir küme; A, B ve C evrensel kümenin bir alt kümesi olduğunda aşağıdaki özellikler mevcuttur

a) Birleşim(Associativity): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

b) Değişim(Commutativity): $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

# Küme işlemlerinin özellikleri(2)

c) Dağılma (Distributive):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d) Özdeşlik (Identity):

$A \cap U = A$ $\quad\quad$ $A \cup \varnothing = A$

e) Tümleyeni(Complement):

$A \cup A^c = U$ $\quad\quad$ $A \cap A^c = \varnothing$

# Küme işlemlerinin özellikleri(3)

f) Idempotent:

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

g) Bound laws:

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

h) İçine alma (Absorption):

$A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

# Küme işlemlerinin özellikleri(4)

i) Gerektirme (Involution): $(A^c)^c = A$

j) 0/1 kanunu: $\varnothing^c = U$ $\qquad U^c = \varnothing$

k) Kümeler için De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

# Kartezyen Çarpım (Cartesian Product)

- Verilen iki kümenin kartezyen çarpımı (cartesian product)

  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

şeklinde gösterilir

- $A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| . |B|$

If A = {Celal, Lale, Lamia}, and B = {Banu, Vedat}, then

A x B = {<Celal, Banu>, <Lale, Banu>, <Lamia, Banu>, <Celal, Vedat>, <Lale, Vedat>, <Lamia, Vedat>}

# Genelleştirilmiş birleşim ve kesişim

- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümelerinin birleşimi
  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup, \ldots, A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$

- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümelerinin kesişimi
  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap, \ldots, A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$

- Birleşim ve Kesişim kümelerinin eleman sayısı
  $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

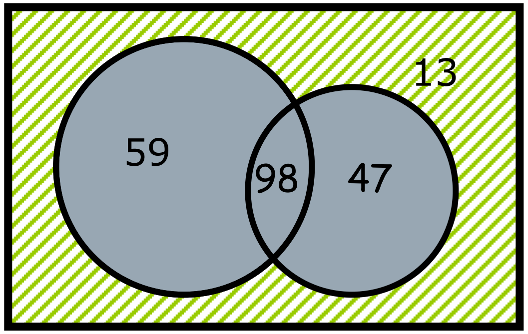
Örnek:

Bilgisayar Bilimlerinde 217 öğrenci var.

157 kişi cs125 kodlu dersi alıyor.

145 kişi cs173 kodlu dersi alıyor.

98 kişi her iki derside alıyor.

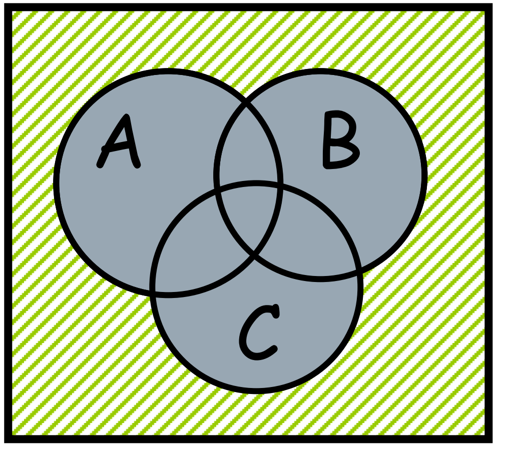



Kaç kişi her iki dersi de almıyor?

217 - (157 + 145 - 98) = 13

Farzedelim:

Bilmek istiyorum $|A \cup B \cup C|$




$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

# Bit stringleri ile küme işlemleri

Örnek:. If $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$A = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$, ve $B = \{x_2, x_3, x_6\}$,

$A \cup B$ ve $A \cap B$ bulmak istediğimizde...

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | $B$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Bit-wise OR | $A \cup B$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Bit-wise AND | $A \cap B$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# Düzenli Seriler ve Dizgiler (Sequences and Strings)

- *Düzenli Dizi* (*sequence)* Sıralı bir listeyi göstermek için kullanılan ayrık yapıya denir. N elemanlı bir dizinin gösterilimi

  $s_n$ = *n*'nin bir fonksiyonu olup *n = 1, 2, 3,...*
- Eğer *s* sıralı bir diziyse $\{s_n | n = 1, 2, 3, \ldots\}$,
  - $s_1$ birinci elemanı gösterir,
  - $s_2$ ikinci elemanı gösterir,…
  - $s_n$ n. elemanı gösterir…
- {n} düzenli bir serinin indeksidir. N doğal sayılardan oluşur veya bu kümenin sonlu bir alt kümesidir

# Düzenli serilere (sequences) örnek

Örnekler:

1. $s = \{s_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$s_n = 1/n \text{ , for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sequence'ın ilk birkaç elementi: 1, ½, 1/3, ¼, 1/5,1/6,…

2. $s = \{s_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$s_n = n^2 + 1, \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sequence'ın ilk birkaç elementi : 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50,…

# Artan ve Azalan Diziler (Increasing and Decreasing)

$s = \{s_n\}$ için aşağıdakiler söylenebilir

- ***increasing*** if $s_n \leq s_{n+1}$
- ***decreasing*** is $s_n \geq s_{n+1}$,

  for every n = 1, 2, 3,…

Örnekler:

- $S_n = 4 - 2n$, n = 1, 2, 3,… azalan:

  2, 0, -2, -4, -6,…

- $S_n = 2n - 1$, n = 1, 2, 3,… artan:

  1, 3, 5, 7, 9, …

# Düzenli altseriler (Subsequences)

- Bir *s* sequence’ının $s = \{s_n\}$, alt sequence’ı $t = \{t_n\}$ ile gösterilir ve sıralama düzeni aynı kalmak şartıyla *s* sequence’ının elemanlarından elde edilir
  - Örnek: $s = \{s_n = n \mid n = 1, 2, 3,\ldots\}$
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,…
  - $t = \{t_n = 2n \mid n = 1, 2, 3,\ldots\}$
    - 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…
    - *t*, *s*’nin bir düzenli altserisidir (Subsequences)

# Toplam (Sigma) gösterilimi

- Eğer $\{a_n\}$ bir sequence ise, bu sequence'ın toplamı

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

Bu toplam gösterilimi (sigma notation), olup Yunan alfabesindeki $\Sigma$ ile gösterilir

# Çarpım (Pi) gösterilimi

- Eğer $\{a_n\}$ bir sequence ise, bu sequence'ın çarpımı

$$\prod_{k=1}^{m} a_k = a_1 a_2 \ldots a_m$$

Bu çarpım gösterilimi (pi notation), olup Yunan alfabesindeki $\prod$ ile gösterilir

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k \quad =1$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij \quad = \sum_{i=1}^{4} i + 2i + 3i = \sum_{i=1}^{4} 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

# Dizgi-Katar (String)

- ***X*** sonlu elemanlardan oluşan bir küme olsun
  - Örnek: if X = {a, b, c}
  - $\alpha$ = bbaccc      **X** kümesi üzerinden tanımlanmış olsun
  - Gösterilim: bbaccc = $b^2ac^3$
  - $\alpha$ string'inin uzunluğu (*length*) $\alpha$ string'inin eleman sayısını verir ve $|\alpha|$ ile gösterilir.
  - Eğer $\alpha = b^2ac^3$ ise $|\alpha| = 6$.
- Eğer bir string eleman içermiyorsa *boş string* (*null string)* adını alır ve Yunan alfabesindeki $\lambda$ (lambda) ile gösterilir

- $X^* = \{$all strings over X dahil $\lambda\}$
- $X^+ = X^* - \{\lambda\}$, the set of all non-null strings
- $\alpha$ ve $\beta$ gibi iki string'in birleşimi (*concatenation*), $\alpha$ ve arkasına $\beta$'nın eklenmesiyle elde edilen $\alpha\beta$ string'i şeklindedir.
- Örnek: $\alpha$ = bbaccc ve $\beta$ = caaba,

  $\alpha\beta$ = bbaccccaaba = $b^2ac^4a^2ba$

  Kısaca, $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$

# Sayı Sistemleri (Number systems)

- *İkili (Binary)* sayılar: 0 ve 1, *bits adını alır.*
- *Binary (base 2)*, *hexadecimal (base 16)* ve *octal (base 8)* sayı sistemleri

*Decimal(base 10) sistem*:

- Örnek: 45,238

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | bir | 8 x 1 = | 8 |
| 3 | on | 3 x 10 = | 30 |
| 2 | yüz | 2 x 100 = | 200 |
| 5 | bin | 5 x 1000 = | 5000 |
| 4 | on bin | 4 x 10000 = | 40000 |

# İkili (Binary) sayı sistemi

- Binary'den decimal'a:
- İki tabanındaki sayı 1101011 olsun
  - 1 bir $1 \times 2^0 =$ 1
  - 1 iki $1 \times 2^1 =$ 2
  - 0 dört $0 \times 2^2 =$ 0
  - 1 sekiz $1 \times 2^3 =$ 8
  - 0 on-altı $0 \times 2^4 =$ 0
  - 1 otuz-iki $1 \times 2^5 =$ 32
  - 1 almış-dört $1 \times 2^6 =$ 64

107 (taban 10)

# Decimal’den binary’e

- Decimal sayı $73_{10}$ olsun
  - $73 = 2 \times 36 + \text{kalan } \underline{1}$
  - $36 = 2 \times 18 + \text{kalan } \underline{0}$
  - $18 = 2 \times 9 + \text{kalan } \underline{0}$
  - $9 = 2 \times 4 + \text{kalan } \underline{1}$
  - $4 = 2 \times 2 + \text{kalan } \underline{0}$
  - $2 = 2 \times \underline{1} + \text{kalan } \underline{0}$

$$\Rightarrow 73_{10} = 1001001_2$$

(kalanlar ters sırada yazılır)

# İkili (Binary) toplama (addition) tablosu

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 10 |

# İkili (binary) sayılarda toplama

- Örnek: add $100101_2 + 110011_2$

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1\ 1\ \ \ } \leftarrow \text{elde birler} \\
100101_2 \\
\underline{110011}_2 \\
1011000_2
\end{array}
$$

# Hexadecimal sayı sistemi

| Decimal sistem | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
| **Hexadecimal sistem** | | | | | | | | | | | | | | | |

# Hexadecimal'den decimal'e

- Hexadecimal sayımız $3A0B_{16}$ olsun

$$
\begin{array}{rr}
11 \times 16^0 = & 11 \\
0 \times 16^1 = & 0 \\
10 \times 16^2 = & 2560 \\
3 \times 16^3 = & \underline{\quad 12288} \\
 & 14859_{10}
\end{array}
$$

# Decimal'den hexadecimal'e

Verilen sayı $2345_{10}$ olsun

$$2345 = 146 \times 16 + \text{remainder } \underline{9}$$

$$146 = \underline{9} \times 16 + \text{remainder } \underline{2}$$

$$\mathbf{2345_{10} = 929_{16}}$$

# Hexadecimal sayılarda toplam

Toplam $23A_{16} + 8F_{16}$

$$
\begin{array}{rr}
 & 23A_{16} \\
+ & \underline{8F_{16}} \\
 & 2C9_{16}
\end{array}
$$

# Bağıntılar (Relations)

- ***X*** ve ***Y*** verilen iki küme olsun, bunların *Kartezyen Çarpımı* (*Cartesian Product)* ***X***x***Y*** olup, (x,y) çiftlerinden oluşur, $x \in X$ ve $y \in Y$
  - $XxY = \{(x, y) \mid x \in X \text{ and } y \in Y\}$
- ***R***, XxY kartezyen çarpımının bir alt kümesi olup, *X*'den *Y*'ye, bir *ikili bağıntı* (*binary relation)* olarak verilmiş olsun
  - Örnek: X = {1, 2, 3} ve Y = {a, b}
  - *R* = {(1,a), (1,b), (2,b), (3,a)} *X* ve *Y* arasında bir bağıntıdır

# Tanım ve Değer Kümesi (Domain and Range)

***X***'den ***Y***'ye verilen bir ***R*** bağıntısında,

- *R*'nin tanım kümesi (domain)

  Dom(*R*) = $\{ x \in X \mid (x, y) \in R$ for some $y \in Y\}$

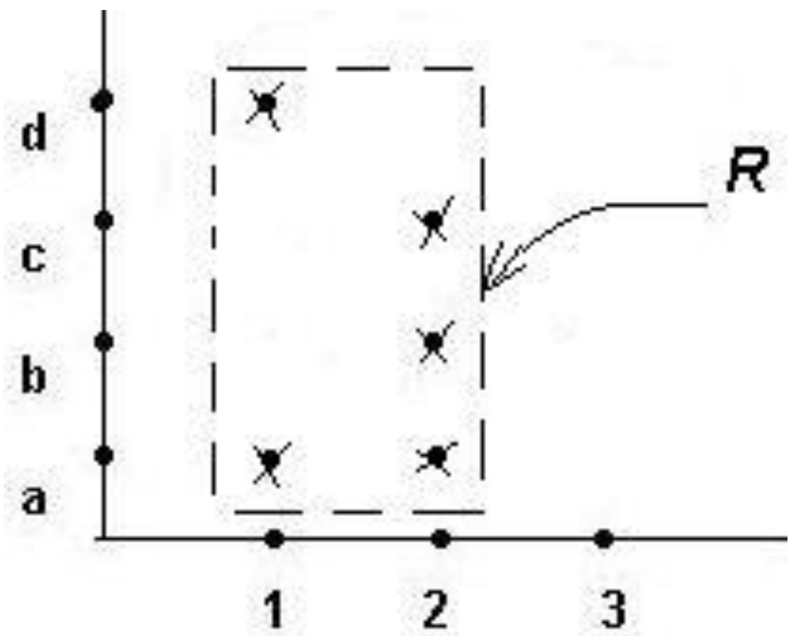
- *R*'nin değer kümesi (range)

  Rng(*R*) = $\{ y \in Y \mid (x, y) \in R$ for some $x \in X\}$

- Örnek:
  - $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b\}$
  - $R = \{(1,a), (1,b), (2,b)\}$
  - Dom(*R*)= {1, 2}, Rng(*R*) = {a, b}

# Bağıntılara örnek

- X = {1, 2, 3} ve Y = {a, b, c, d}
- *R* = {(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)}
- Verilen bağıntıyı graf kullanarak çizersek:



# Bağıntıların özellikleri

*R,* **A** kümesi üzerinde bir bağıntı olsun

Örnek: *R*, **A**x**A** kartezyen çarpımının bir alt kümesi

- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***reflexive*** (*yansıma*) if $(x,x) \in R$ for every element $x \in$ **A.**
- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***nonreflexive*** if $(x,x) \notin R$ for some element $x \in$ **A.**
- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***irreflexive*** if $(x,x) \notin R$ for every element $x \in$ **A.**

- A relation **R** on a set **A** is called ***symmetric*** (*simetrik*)

  if [(y,x) $\in$ R whenever (x,y) $\in$ R] or

  [(y,x) $\notin$ R whenever (x,y) $\notin$ R] or

  (x=y), for x,y $\in$ **A**.

- A relation **R** on a set **A** such that (x,y) $\in$ R and (y,x) $\in$ R only if x=y, for x,y $\in$ **A**, is called ***antisymmetric*** (*antisimetrik*).

- A relation **R** on a set **A** is called ***transitive*** (*geçişkenlik*) if whenever $(x,y) \in R$ and $(y,z) \in R$ then $(x,z) \in R$, for $x,y,z \in$ **A**

**Örnek:** if $a=b^2$, $(a,b) \in R$ $A=\{1,2,3,4\}$

İlgili bağıntıyı yazınız ve hangi özelliklerin mevcut olduğunu söyleyiniz.

$R=\{(1,1),(4,2)\}$

| | |
|---|---|
| Reflexive | Yok |
| Nonreflexive | Var |
| Irreflexive | Yok |
| Symmetric | Yok |
| Antisymmetric | Var |
| Transitive | Var |

$A=\{\ \}$ Transitive ? EVET

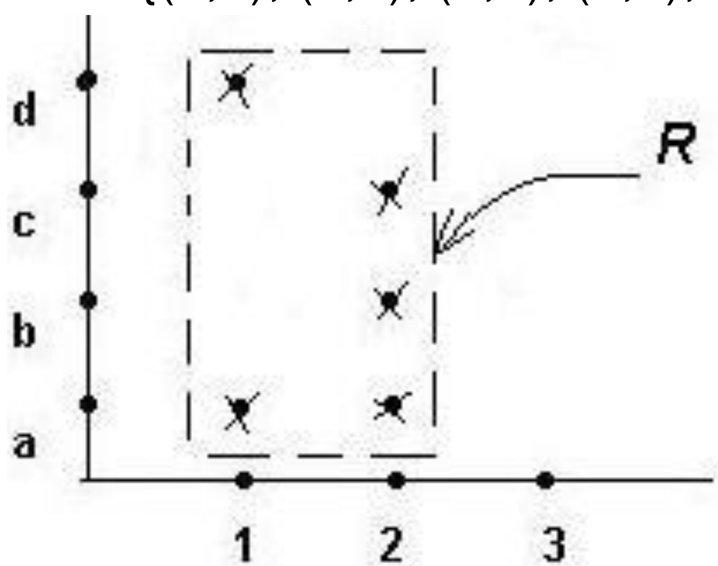
# Bağıntının tersi

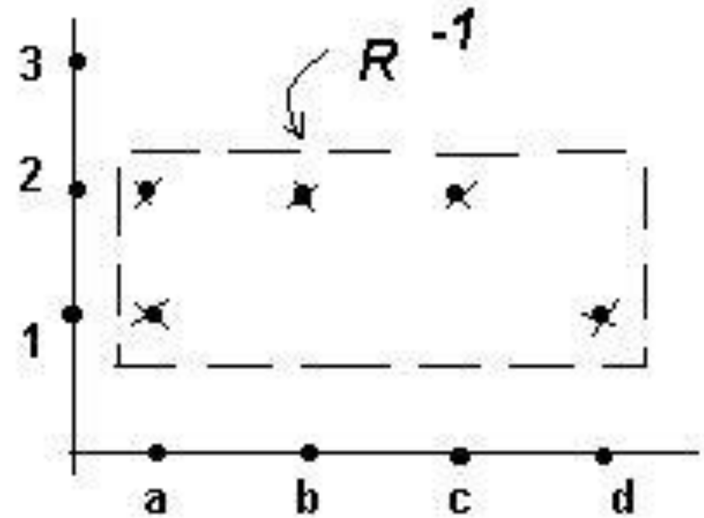
*X*'den *Y*'ye bir *R* bağıntısı verilmiş olsun, bu bağıntının *tersi (inversi) Y*'den *X*'e olup $R^{-1}$ ile gösterilir

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

- Örnek: Eğer $R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$ ise

$R^{-1} = \{(a,1), (d,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$



# Bağıntının Bileşkesi(Composition)

- Tanım

  $R^1 = R$

  $R^2 = R \circ R$

  $R^3 = R^2 \circ R$

  ...................

  $R^n = R^{n-1} \circ R$

Örnek: R={(1,1) (2,1)(3,2)(4,3)} için $R^2$ ve $R^3$ bulunuz.

$R^2 = R \circ R = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,2)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,1)\}$

A={1,2,3,4}

{(2,2)(2,3)(2,4)(3,2)(3,3)(3,4)} NR,NS,NAS,T

{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)(3,3)(4,4)} R,S,NAS,T

{(2,4)(4,2)} IR,S,NAS,NT

{(1,2)(2,3)(3,4)} IR,NS,AS,NT

{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)} R,S,AS,T

{(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,1)(3,4)} IR,NS,NAS,NT

# Denklik Bağıntısı (Equivalence Relation)

*X* bir küme, *R*'de *X* üzerindeki bir bağıntı olsun

- *R* bağıntısı üzerinde reflexive, symmetric ve transitive özellikleri mevcut ise bu bir *denklik bağıntısı* (*equivalence relation)* olup X $\Leftrightarrow$ *R* şeklinde gösterilir

R={(1,1) (2,2)(3,3)(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)(2,3)(3.2)}

| | |
|---|---|
| Reflexive ? | Var |
| Symmetric ? | Var |
| Transitive ? | Var |
| Antisymmetric ? | Yok |

EQUIVALANCE RELATION ?

EVET

- Örnek: X = {integers} ve X kümesi üzerinde tanımlı olan *R* bağıntısı da $xRy \Leftrightarrow x - y = 5$ olarak verilsin. R'nin *equivalence relation* olup olmadığını gösteriniz.

X={1,6}

R={(6,1)}

Irreflexive

Antisymmetric

Transitive

Denklik Bağıntısı değildir.

**Örnek:**

X={1,2,3,4,5,6}

R={(1,1)(1,3)(1,5)(3,1)(3,3)(3,5)(5,1)(5,3)(5,5)(2,2)(2,6)(6,2)(6,6)(4,4)}

EQUIVALENCE RELATION ?

EVET

Reflexive – Symmetric - Transitive

# Sıralama Bağıntısı (Partial Order Relation)

*X* bir küme, *R*'de *X* üzerindeki bir bağıntı olsun

- *R* bağıntısı üzerinde reflexive, antisymmetric ve transitive özellikleri mevcut ise bu bir *sıralama bağıntısı* (*partial order relation)* dır
- Hasse Diyagramları *(partial order öz.)*

**Örnek:**

R: if x divides y $(x,y) \in R$ $A=\{1,2,3,4\}$ $x,y \in A$

$R=\{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,4)(3,3)(4,4)\}$

PARTIAL ORDER ?

EVET

Reflexive – Antisymmetric - Transitive

# Hasse Diyagramları

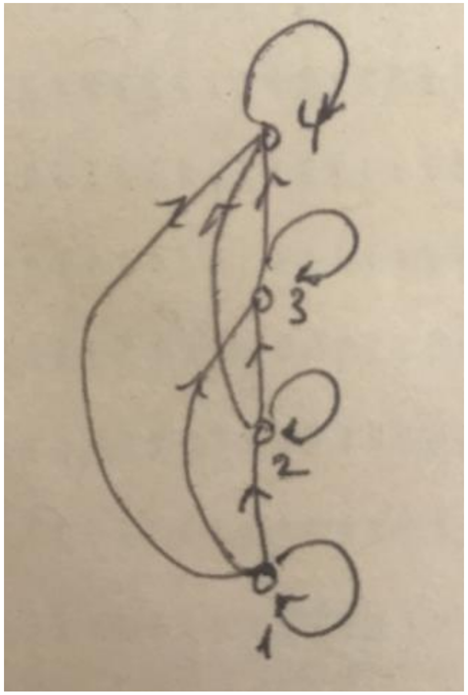
(Alman Matematikçi Helmut Hasse tarafından geliştirilmiştir)

Sıralama Bağıntısı Özelliğini Sağlarlar

## Örnek

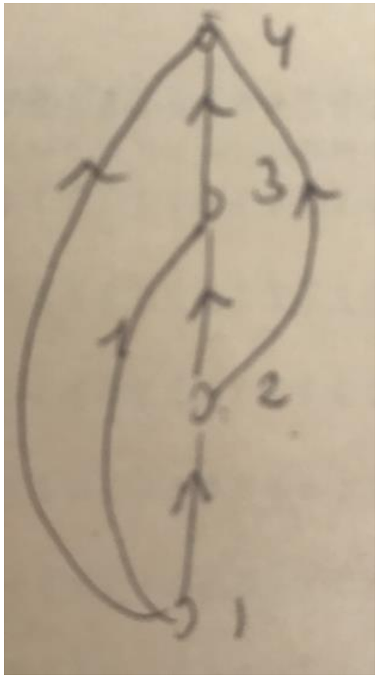
R: {(a, b) | a ≤ b,  a ∈ X, b ∈ X}    X={1, 2, 3, 4}

R={(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)}

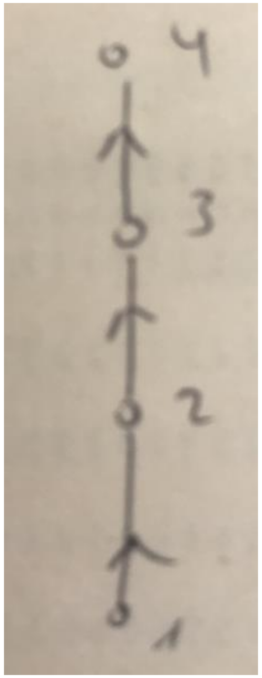



$\left.\begin{array}{l}\text{Reflexsive}\\ \text{Antisymmetric}\\ \text{Transitive}\end{array}\right\}$ Partial Order

Önce Yansıma Öz. Çıkaralım




Sonra Geçişgenlik Öz. Çıkaralım



# Kapalılık (Closure)

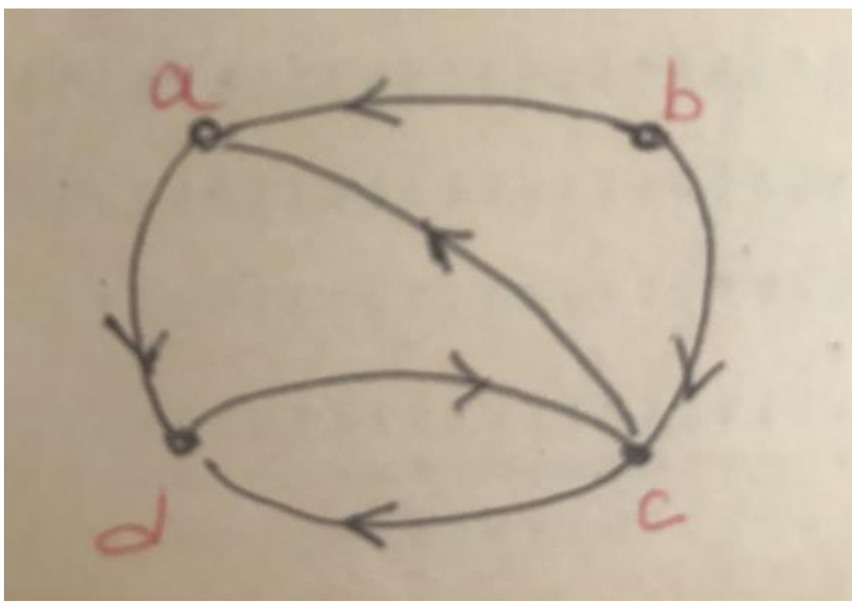
- Verilmiş olan bağıntı üzerinde reflexive, symmetric ve transitive özellikleri mevcut değilse bağıntının bu özelliklere sahip olabilmesini sağlama işlemidir.

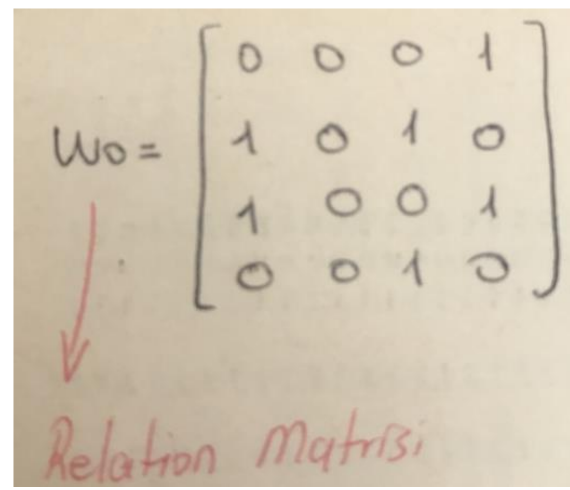
• Transitive closure

• Warshall algoritması (by Stephen Warshall)

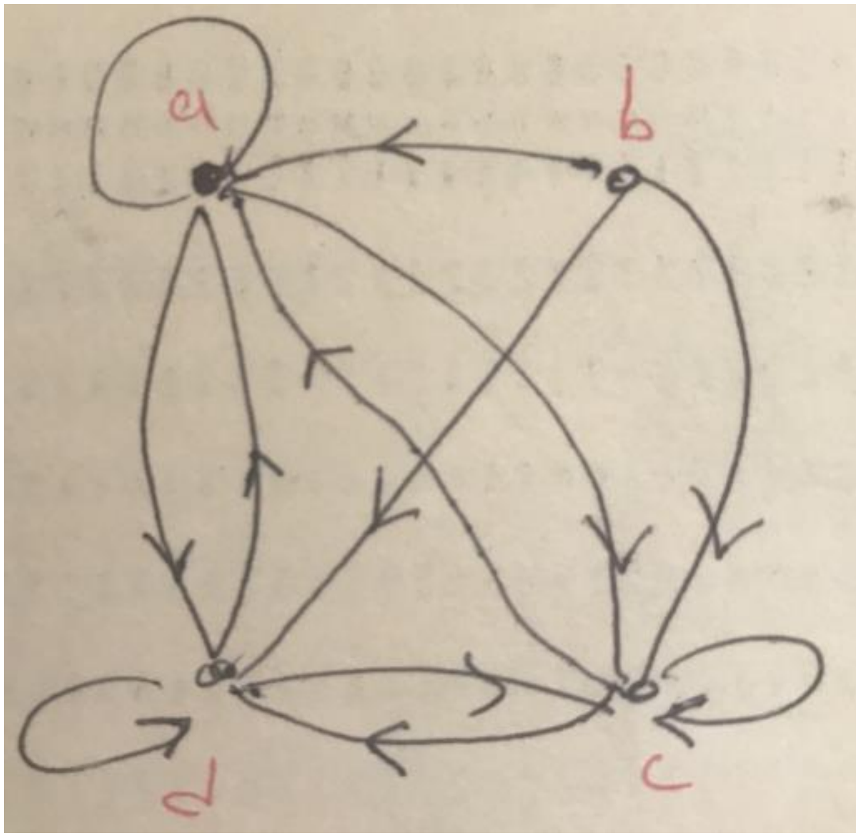
Verilen bağıntının Transitive özelliğini sağlamadığı görülmektedir
Bu bağıntıya Transitive özelliği eklemek için ne yapabiliriz?

R={(b,a)(b,c)(c,a)(c,d)(d,c)(a,d)}



# Warshall algoritması




$k=1$

$$W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$k=2$

$$W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$k=3$

$$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$k=4$

$$W_4=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

## Yansıma ve simetri özelliklerini taşıyan küme içi bağıntılar

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ Farklı ülkelerden kişiler

$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ Beş ayrı dil

Kim hangi dili konuşuyor?

$$M_\alpha = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Hangi diller kimler tarafından konuşuluyor?

$$M_\alpha^{-1} = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Kim kiminle konuşabiliyor?

$$M_{\alpha\alpha^{-1}} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

# Matris Bağıntıları

- *X* ve *Y* bir küme, *R*'de *X*'den *Y*'ye bir bağıntı olsun. Aşağıdaki bağıntılardan matris A = ($a_{ij}$) yazılır
  - X kümesinin elemanları, A matrisinin satırlarını oluşturur
  - Y kümesinin elemanları, A matrisinin kolonlarını oluşturur
  - i. satırdaki X'in elemanları ile j. kolondaki Y'nin elemanları birbirleriyle ilişkili değilse, $a_{i,j} = 0$ dır
  - i. satırdaki X'in elemanları ile j. kolondaki Y'nin elemanları birbirleriyle ilişkili ise, $a_{i,j} = 1$ dir

# Matris bağıntıları (1)

Örnek:

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

R bağıntısının matrisi:

A =

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Matris Bağıntıları (2)

- Eğer *R* bağıntısı, *X* kümesinden *X* kümesine ise bu bağıntının matrisi bir kare matristir

Örnek:

X = {a, b, c, d} ve *R* = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)}

A =

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | 0 |
| c | 0 | 0 | 1 | 0 |
| d | 0 | 0 | 0 | 1 |

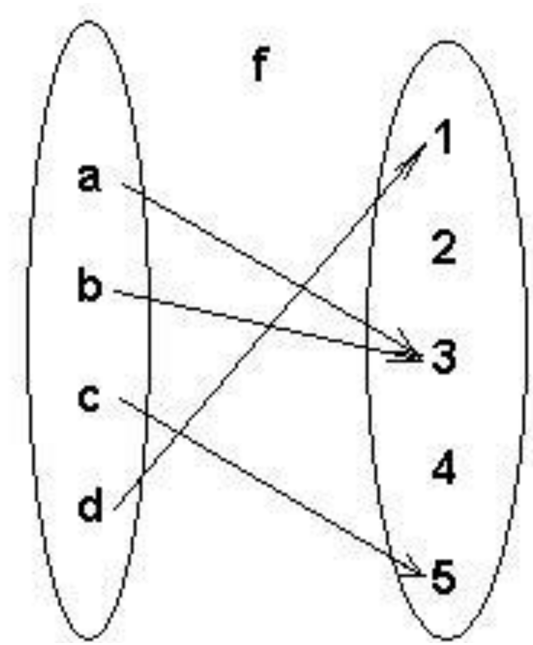
# Fonksiyonlar (Functions)

- *Fonksiyon* bağıntının özel bir şeklidir.
- Bir ***f*** fonksiyonunun, *X*'den *Y*'ye bir bağıntısı olsun (f : X → Y)

  Let A and B are sets. A *function* ***f*** from A to B is an assignment of exactly one element of B to each element of A.
- *X*'e ***f***'nin tanım kümesi (domain)

  Dom(f) = X
- *Y*'e ***f***'nin değer kümesi (range)

  Rng(f) = Y
  - Örnek:
    Dom(f) = X = {a, b, c, d},
    Rng(f) = Y = {1, 3, 5}
    f(a) = f(b) = 3, f(c) = 5, f(d) = 1




X=Dom(f) Y=Rng(f)

$f_1(x)=x^2 \quad f_2(x)=x-x^2$

$f_1 + f_2 = ?$ $\quad x^2 + x - x^2 = x$

$f_1 * f_2 = ?$ $\quad x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$

X={1,2,3} Y={a,b,c}

R={(1,a)(2,b)(3,a)} Bir fonksiyon mudur ? EVET

X={1,2,3} Y={a,b,c}

R={(1,a)(2,b)(3,c)(1,b)} Bir fonksiyon mudur ? HAYIR

# Bire-Bir Fonksiyonlar (One-to-one functions-injective)

- Bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ bire-bir (*one-to-one)* $\Leftrightarrow$

  her $y \in Y$ sadece bir $x \in X$ değerine karşılık gelir.

- Alternatif tanım: $f : X \rightarrow Y$, *one-to-one* $\Leftrightarrow$ X kümesindeki her x değeri $x_1, x_2 \in X$ , Y kümesindeki $y_1, y_2 \in Y$ gibi farklı iki değere karşılık gelir. $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ gibi

  Örnekler:

  - 1. $f(x) = 2^x$ (from the set of real numbers to itself) one-to-one
  - 2. $f : R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x^2$ <u>not</u> one-to-one

    çünkü for every real number x, $f(x) = f(-x)$.

# Örten Fonksiyonlar (Onto functions-surjective)

Bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ *örten* (*onto)* $\Leftrightarrow$

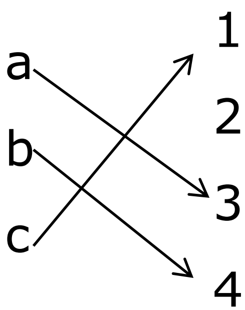
Her $y \in Y$ için en az bir tane $x \in X$ mevcuttur

# Bijective Fonksiyonlar

Bir fonksiyon $f : X \to Y$ bijective $\Leftrightarrow$

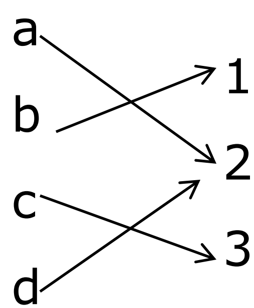
*f* fonksiyonu one-to-one ve onto'dur

- Örnekler:
  - 1. Lineer bir fonksiyon $f(x) = ax + b$ bijective fonksiyondur (from the set of real numbers to itself)
  - 2. Bir $f(x) = x^3$ bijective fonksiyondur (from the set of real numbers to itself)



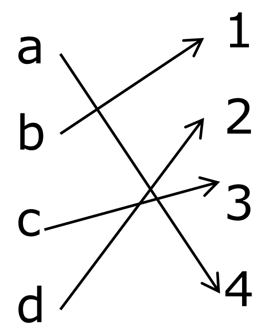

one to one

not onto



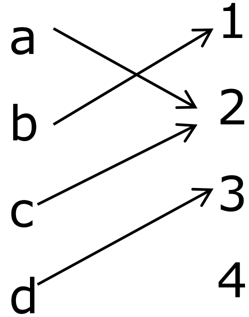

not one to one

onto



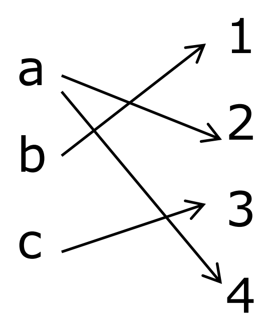

one to one

onto




Neither onto nor

one to one




not a function

# Ters Fonksiyon (Inverse function)

- $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi(inverse) $f^{-1}$ olup $\{(y, x) \mid y = f(x)\}$ olarak sembolize edilir.

- $f^{-1}$ in bir fonksiyon olması gerekmez
  - Örnek: if $f(x) = x^2$, then $f^{-1}(4) = \sqrt{4} = \pm 2$, tek bir değer olmadığından tersi bir fonksiyon değildir

- Eğer bir fonksiyon bijective (*onto ve one to one*) ise tersi de bir fonksiyondur f={(1,a)(2,c)(3,b)}

$f^{-1}$={(a,1)(c,2)(b,3)}

f(x)=x+1

$f^{-1}$= x-1

$f(x) = ax + b$

$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

$f^{-1}$=?

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$f(x) = ax^2$+bx+c

$f^{-1}(x) = x \text{ yalnız bırakılacak}$

y = $x^2 - 6$x + 13
y = $x^2 - 6$x + 9 + 4
y = $(x-3)^2$+4
y - 4 = $(x-3)^2$
$\sqrt{y-4}$ =x-3
x = $\sqrt{y-4}$ + 3

$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{y-4}$

# Fonksiyonların Bileşkesi

- Verilen iki fonksiyon $g : X \rightarrow Y$ ve $f : Y \rightarrow Z$ olup, bileşkesi $f \circ g$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$f \circ g\,(x) = f(g(x)) \text{ for every } x \in X.$$

  - Örnek: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 3x + 5$. Then

    $f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 5 = (3x^2 + 2)$

- Fonksiyon bileşkesinde birleşim öz.:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

- Fakat değişme özelliği yoktur:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

# Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar (Exponential and Logarithmic Functions)

- $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = \log_2 x = \lg x$
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\lg x) = 2^{\lg x} = x$
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = \lg 2^x = x$
- Üstel ve Logaritmik fonksiyonlar birbirinin tersidir

# String'in tersi (inverse)

X herhangi bir küme olsun

X üzerindeki tüm string'lerin kümesi de X* olsun

Eğer $\alpha = x_1 x_2 \ldots x_n \in X^*$

$f(\alpha) = \alpha^{-1} = x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1$

String'in inversi alınırken ters sırada yazılır

$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \lambda$

# Floor ve Ceiling Fonksiyonları

x'in *FLOOR*'u $\lfloor x \rfloor$ olarak gösterilir.

x'e EŞİT veya ondan KÜÇÜK EN BÜYÜK tamsayıyı verir.

x'in *CEILING*'i $\lceil x \rceil$ olarak gösterilir.

x'e EŞİT veya ondan BÜYÜK EN KÜÇÜK tamsayıyı verir.

$\lceil -8 \rceil = -8$

$\lfloor -1/2 \rfloor = -1$

$\lceil 7 \rceil = 7$

$\lfloor 8.3 \rfloor = 8$

$\lfloor 3.1 \rfloor = 3$

$\lceil 1/2 \rceil = 1$

$\lfloor -8.7 \rfloor = -9$

$\lceil -1/2 \rceil = 0$

$\lfloor 1/2 \rfloor = 0$

$\lceil -11.3 \rceil = -11$

$\lceil 6 \rceil = 6$

$\lceil 3.1 \rceil = 4$

$\lfloor 7 \rfloor = 7$