DETERMİNANT

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Determinant

Determinantın matematiksel tanımını vermeden önce, 2×2 ve 3×3 türünden matrislerin determinantını nasıl bulacağımızı kısaca açıklayalım. Başlangıç olarak vereceğimiz bu determinant hesaplamaları, daha büyük boyutlu kare matrisler için geçerli değildir. Bu nedenle hem bilgisayar programlama ve uygulamaları için, hem de determinant hesabının diğer yöntemleri için genel tanımını bilmemiz bize çok büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

Tanım

(2×2 Türünden Matrisin Determinantı)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Çözüm

$\det A = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 13$ *bulunur.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Türünden Matrisin Determinantı

Tanım

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı :

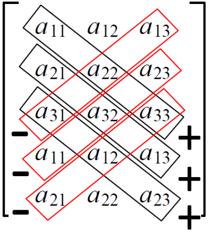
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

biçiminde tanımlanır. Bu ifadeyi ezberlemek yerine Sarrus kuralını bilmek daha kolaydır.

Matrisin Determinantı

Tanım

3×3 türündeki matrislerin determinantını hatırlamak ve hesaplamayı kolaylaştırmak için **Sarrus Kuralı** olarak bilinen aşağıdaki kural uygulanabilir. Matrisin ilk iki satırı matrisin altına tekrar yazılarak, asal köşegene paralel olan üçlülerin çarpımı pozitif, diğer köşegene paralel olan üçlülerin çarpımı da negatif alınarak, tüm değerler toplanır ve determinant bulunur.



Örnek

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

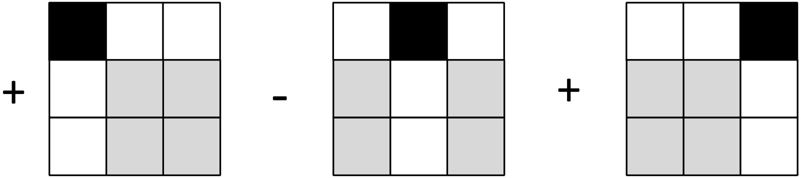
Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Problem

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

NOT : 3×3 bir matrisin determinantını hesaplamanın bir diğer pratik yolu da, daha sonra göreceğimiz Kofaktör yöntemidir. Aşağıdaki görsel olarak belirtildiği gibi, birinci satırdaki her koyu kare içindeki eleman, diğer taralı karelerle oluşan 2×2 türündeki matrisin determinantıyla çarpılır. Daha sonra, bulunan determinantların birincisi ve sonuncusu toplanıp, ikincisi çıkarılır.



Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Problem

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

DİKKAT !

Sarrus kuralının sadece 3×3 matrislerde geçerli olduğunu, başka hiçbir kare matriste bu kuralın uygulanamayacağını asla unutmayınız.
Örneğin 4×4 bir matriste bu kural uygulanamaz. 4×4 bir matrisin determinantını farklı yöntemlerle bulabiliriz.
Bunun için genel determinant tanımını verip, determinant özelliklerini iyi bilmemiz gerekir.

Determinantın genel tanımını vermeden önce, determinant tanımında kullanacağımız permütasyon ve permütasyonun işareti kavramları üzerinde biraz duracağız.

Permütasyon

Tanım

A kümesi $n > 1$ elemanlı sonlu bir küme olsun. $\sigma : A \to A$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise, σ fonksiyonuna bir **permütasyon** denir. A kümesinden, kendisine $n!$ tane permütasyon tanımlanabilir. Bir permütasyonu,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde veya kısaca $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)...\sigma(n)$ şeklinde gösteririz. Ayrıca, $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinde tanımlanan tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

Örnek

$A = \{1,2,3\}$ kümesini gözönüne alalım. Bu kümede 3! permütasyon tanımlanabilir. Bunlar :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 123, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 132, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 213,$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 231, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 312, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 321$$

şeklindedir. Bu permütasyonlara göre, örneğin σ_2 permütasyon fonksiyonu için,

$$\sigma_2(1) = 1, \sigma_2(2) = 3, \ \sigma_2(3) = 2$$

olur. Bir permütasyon fonksiyonunu, gösterim kolaylığı açısından $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)...\sigma(n)$ şeklinde sadece sıralı elemanların görüntüsünü yazarak göstereceğiz. Örneğin,
$\sigma_2 = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 3\ 2}$ yerine sadece $\sigma_2 = 132$,
$\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{1\ 3\ 4\ 5\ 2}$ yerine sadece $\sigma = 13452$
yazacağız. Kısaca, üstteki sıralı sayıları her defasında yazmayacağız.

Bir Permütasyonun İşareti, Tek ve Çift Permütasyon

Tanım

Herhangi bir $\{1, 2, ..., n\}$ kümesindeki birim permütasyon olarak isimlendirilen $123...n$ permütasyonuna çift permütasyon diyeceğiz. Bu permütasyonda elemanların yerlerini değiştirerek yeni permütasyonlar elde edebiliriz. $123...n$ permütasyonunda k defa iki elemanın yeri değiştirilmiş olsun, k tek ise elde edilen yeni permütasyona **tek**, k çift ise elde edilen yeni permütasyona **çift permütasyon** diyeceğiz. Bir permütasyonun çift veya tek olduğunu anlamak için, permütasyonda her defasında iki elemanın yeri değiştirilerek birim permütasyon elde edilmeye çalışılır. Tek sayıda adımda bunu yapabilirsek permütasyon tek, aksi halde çifttir. $\varepsilon(\sigma)$ ile σ permütasyonunun işaretini göstereceğiz. σ bir çift permütasyon ise $\varepsilon(\sigma) = +1$, aksi halde yani σ bir tek permütasyonsa $\varepsilon(\sigma) = -1$ şeklinde ifade edeceğiz.

Örnek

Örneğin, $\sigma = 23514$ permütasyonuna bakalım.

$$23514 \longrightarrow 13524 \longrightarrow 12534 \longrightarrow 12354 \longrightarrow 12345$$

Görüldüğü gibi, 4 adımda (ok) birim permütasyona ulaştık. O halde, bu permütasyon çifttir.

Örnek

S_7 kümesinde verilen $\sigma = 6271543$ permütasyonunun işaretini bulunuz.

Problem

Aşağıdaki permütasyonların işaretini bulunuz.

a) $\sigma_1 = 32451 \in S_5$ *b)* $\sigma_2 = 324165 \in S_6$ *c)* $\sigma_3 = 3426517 \in S_7$

En genel Halde Determinant Tanımı

Tanım

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin **determinantı**, $\det A$ veya $|A|$ ile gösterilir. $\sigma \in S_n$ bir permütasyon ve $\varepsilon(\sigma)$, σ permütasyonunun işaretini göstermek üzere,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde tanımlanır.

Determinant Oyunu

Determinant tanımı biraz sudokuna benzer. Biraz açıklayalım. $n \times n$ bir matris verilsin.
* Matrisin her satırından ve sütunundan sadece 1 eleman alarak, matrisin n tane elemanını alalım. Örneğin, 4 satırdan 1 eleman alırsak o satırdan başka eleman almamalıyız. Ya da, 3. sütundan 1 eleman aldıysak, artık o sütundan başka eleman alamayız. Sonra aldığımız bu n elemanı birbiriyle çarpalım.
* Bu şekilde mümkün tüm çarpımları hesaplayalım. Tüm çarpımların sayısı $n!$ olacaktır. Çünkü ilk satırdan n eleman seçilebilir. İkinci satırdan, ilk satırdaki elemanın bulunduğu sütundan eleman seçemeyeceğimiz için $n-1$ eleman seçilebilir. Bu şekilde, her defasında seçebileceğimiz eleman sayısı 1 azalacağından, İstenen şekilde $n!$ eleman seçilebilir. Yani, $n!$ tane çarpım elde edilebilir.
* Herhangi bir çarpımda, ilk satırdan itibaren her elemanın bulunduğu sütunu sırasıyla yazarak bir permütasyon elde edelim. Bunun işaretine göre, seçilen n sayının çarpımını bu işaretle çarpalım.
* Elde edebilecek tüm çarpımları işaretleriyle birlikte hesapladıktan sonra bunları toplayalım. İşte elde edilen bu değer deteminanttır.

Örnek

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & \mathbf{5} \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ matrsinin determinantını bu mantıkla hesaplayalım. Sudoku oyunundakine benzer düşünün. Her satır ve sütundan bir sayı alma hakkımız var. İlk satırdan seçilebilecek tek eleman 3'tür. Diğerleri sıfır olduğu için çarpım her zaman 0 olur. İkinci satırda ise ya **2** veya **5** değerlerini alabiliriz. 4'ü alamayız. Çünkü o sütundan ilk satırda 3'ü alarak hakkımızı kullandık. Geriye son satır kaldı. İkinci satırdan 2 alındıysa son satırdan 7, ikinci satırdan 5 alındıysa son satırdan 8 seçilebilir. Yani, seçebileceklerimi koyu yazarak

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & 5 \\ 8 & 9 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \qquad \text{veya} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 2 & 4 & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buna göre, 2 çarpım elde ederiz. $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ ve $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$. Bunların işaretlerini de bulalım. Sırasıyla sütun numaralarına bakıyoruz. 3,2,7 sırasıyla 2,1 ve 3'üncü sütunda, yani $\sigma_1 = 213$ ve $\varepsilon(\sigma_1) = -1$ olur. $3, 5, 8$ ise, 2,3,1 inci sütunda. $\sigma_2 = 231$ ve $\varepsilon(\sigma_2) = 1$ olur. O halde, $\det A = -42 + 120 = 78$ bulunur.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını tanımından yararlanarak bulunuz.**

Örnek

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını tanımından yararlanarak bulunuz.**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını tanımı kullanarak bulunuz.**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını, determinant tanımını kullanarak bulunuz.**

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Örnek

Permütasyonlu determinant tanımını kullanarak,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulunuz.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$ *matrisinde sadece sıfırdan farklı olan elemanlar* a_{ij} *formunda yazılmıştır. Determinant tanımını kullanarak bu matrisin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Herhangi İki Satır Yer Değiştirirse

Bu bölümde kare matrislerin determinantlarının hesaplanmasını kolaylaştıracak bazı özellikler verilecektir.

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi iki satırı (sütunu) yer değiştirildiğinde elde edilen matris B ise

$$det(B) = -det(A)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 100 & 101 & 102 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Herhangi Bir Satırın Bir Katı Alınırsa

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi bir satırındaki tüm elemanlar bir λ sayısıyla çarpıldığında elde edilen matris B ise
$\det B = \lambda \det A$ *olur.*

Kanıt.

$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{r\sigma(r)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ olsun. A matrisinin $r-inci$ satırındaki, tüm elemanları λ ile çarpılarak elde edilen matris B olsun.

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(\lambda a_{r\sigma(r)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \lambda \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(a_{r\sigma(r)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \lambda \det A
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ matrisinin determinantı 2'dir. A matrisinin 2'inci satırı 3 ile çarpılırsa yeni matrisin determinantı ne olur?

Çözüm

Sadece bir satır 3 ile çarpıldığından, yeni matrisin determinantı $3\det A = 3 \cdot 2 = 6$ *olur.*

Örnek

$\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{5\times 5}$ **matrisinin determinantı 3 ise** $\det(\mathbf{2A}) = ?$

Çözüm

A matrisinin 2 ile çarpılması demek, bütün satırların 2 ile çarpılması demektir. 5 satır olduğundan, $\det(2A) = 2^5 \det A = 32 \cdot 3 = 96$ *olur.*

Problem

$\det A = 5$ *olan* $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ *matrisi önce* 2 *ile çarpılıyor, sonra da üçüncü satırı 4'e bölünüyor. Elde edilen son matrisin determinantı kaçtır?*

Herhangi İki Satır Orantılıysa

Teorem

Bir kare matrisin herhangi iki satırı (veya sütunu) **aynı** *ya da* **orantılı** *ise determinantı sıfırdır.*

Kanıt.

Bir A matrisinin iki satırının aynı olduğunu kabul edelim. A matrisinin herhangi iki satırının yeri değiştiğinde, determinantın işaret değiştirdiğini ilk teoremde görmüştük. Diğer taraftan, aynı olan iki satırın yerini değiştirdiğimizde matris, dolayısıyla da determinant değişmez. O halde,

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

elde edilir. Şimdi de, iki satırın orantılı olduğunu kabul edelim. Matrisin, $s - inci$ satırı, $r - inci$ satırın λ katı olsun. Buna göre, Teorem 13'den, λ determinantın dışına çıkarılabilir. Böylelikle, matrisin determinantı, iki satırı aynı olan bir matrisin determinantının λ katı olur. İki satır aynı ise determinant sıfır olacağından, matrisin determinantı $\lambda \cdot 0 = 0$ elde edilir. □

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Üçüncü satır, ikinci satırın katı olduğundan, yani matrisin iki satırı orantılı olduğundan determinant sıfırdır.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Bir Satır k Elemanın Toplamı ise k tane Determinant Toplamı Olarak Yazılabilir

Teorem

Bir kare matrisin herhangi bir satırının (veya sütununun) tüm elemanları sıfır ise determinantı sıfırdır.

Teorem

Bir A matrisinin r'inci satırındaki her eleman, k tane terimin toplamı şeklindeyse, $\det A$, *k tane determinantın toplamına eşittir.*

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 101 & 102 & 103 & 104 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ **determinantının 100'e bölünebildiğini gösteriniz.**

Herhangi Bir Satırın k Katı Başka Satıra Eklenirse

Teorem

Bir A kare matrisinin herhangi bir satırı (sütunu) λ gibi bir sayıyla çarpılıp, başka bir satırına (sütununa) eklendiğinde elde edilen matris B ise

$$\det(B) = \det(A)$$

olur.

Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *matrisinin* $r-$ *inci satırını* λ *ile çarpıp,* $s-$ *inci satırına ekleyelim. Bu matris* $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ *olsun. Burada,* $i = s$ *için,* $b_{sj} = a_{sj} + \lambda a_{rj}$ *ve* $i \neq s$ *için,* $b_{ij} = a_{ij}$*'dir. Determinantın s'inci satırındaki her bir eleman 2 elemanın toplamı olduğundan,* $\det B$ *'yi iki determinantın toplamı olarak*

$$\det B = \det [b_{ij}] = \det [a_{ij}] + \det C$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer yandan, buradaki C *matrisinin s'inci satırı, r'inci satırının* λ *katıdır ve* $\det C = 0$ *olur. Böylece,* $\det B = \det A$ *olur.*

Satırlar Birbirine Bağımlıysa

Teorem

Bir matrisin herhangi bir satırı diğer satırlar cinsinden yazılabiliyorsa, yani bir satır diğer satırlara bağımlı ise, bu matrisin determinantı sıfırdır.

NOT : Bu teorem sayesinde, bir matrisin determinantını daha kolay hesaplayabiliriz. Buna göre, bir matrisi **üçüncü satır operasyonu ile basitleştirerek**, determinantını hesaplamak kolaylaştırılabilir. Yani, herhangi bir satırdan veya kolondan başka bir satırın bir katının çıkarılması determinantı değiştirmeyecektir.

Örnek

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \mathbf{a} & \mathbf{y} & \imath \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Sonuç

Bir kare matrise yapılan elemanter operasyonlar determinantı aşağıdaki gibi etkiler.

1. *İki satırın yer değiştirilmesi determinantı etkiler ve determinant işaret değiştirir.*

2. *Bir satırın bir λ reel sayısı ile çarpılması determinantı etkiler ve yeni matrisin determinantı, eski matrisin determinantının λ katı olur.*

3. *Bir satırın bir λ katının başka bir satıra ilave edilmesi, determinantı değiştirmez.*

Örnek

4×4 türünde verilen bir A matrisinin determinantı 3'tür. A matrisi 2 ile çarpılarak B matrisi elde ediliyor. B matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak C, D ve E matrisleri elde ediliyor.

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to S_2 - 3S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_2 \longleftrightarrow S_3} \boxed{D} \xrightarrow{S_1 \to 3S_2 + 2S_3} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Problem

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ ve $\det A = 6$ *olmak üzere,* A *matrisi* $1/2$ *ile çarpılarak* B *matrisi elde ediliyor.* B *matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak* C, D *ve* E *matrisleri elde ediliyor.*

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to S_2 + 4S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_2 \to 2S_2 + S_3} \boxed{D} \xrightarrow{S_3 \longleftrightarrow S_4} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Problem

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ ve $\det A = 2$ *olmak üzere, A matrisinin devriği alınarak B matrisi elde ediliyor. B matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak C, D ve E matrisleri elde ediliyor.*

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to 2S_2 + S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_3 \longleftrightarrow S_4} \boxed{D} \xrightarrow{S_2 \to 2S_4 + S_3} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 13 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 19 \end{bmatrix}$$ **simetrik matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 11 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Örnek

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Problem

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ **matrisinin A_{23}, A_{31}, A_{33} kofaktörlerini bulunuz.**

Problem

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisinin kofaktörlerini bulunuz.*

Kofaktörle Determinant Hesabı

Teorem

A_{rs} , $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *kare matrisinin* a_{rs} *elemanının kofaktörü olsun. Buna göre,*

$$\det A = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}A_{rs} = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} \ \textit{(r-inci satır açılımı)}$$

veya

$$\det A = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs} = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns} \ \textit{(s-inci sütun açılımı)}$$

şeklindedir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{x} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı 30 ise x =?**

Çözüm

İkinci sütuna göre kofaktör açılımı yapalım.

$$\det A = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & x & 2 \end{bmatrix}$$

Şimdi $S_1 \to S_1+S_2$, $S_4 \to S_4+S_2$ *işlemi yapalım*

$$=(-2)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x & 6 \end{bmatrix}$$

İlk satıra göre açalım.

$$=(-2)(5)(-1)^{1+4}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

İlk satıra göre açalım.

$$=10(-3)(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$$

$$=30(x-1)$$

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını hesaplayınız.**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını hesaplayınız.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{e} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Üçgensel Bir Matrisin Determinantı

Teorem

Alt üçgensel ya da üst üçgensel bir matrisin determinantı köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

Kanıt.

A matrisi bir üst üçgensel matris olsun. Buna göre,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Determinant tanımına göre, birinci kolondan sadece a_{11}, ikinci kolondan sadece a_{22}, ve bu şekilde devam ederek n'inci kolondan sadece a_{nn} değerlerini alıp çarpabiliriz. Burada, permütasyonumuz ise $\sigma = 123...n$ birim permütasyonu olduğundan işareti $+1$'dir. O halde, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ olur. $\square$

Kanıt.

2. Kanıt. Bu kez determinant açılımını kullanabiliriz. Determinantı sürekli ilk sütuna göre açarak, determinantın derecesini küçültebiliriz. Buna göre,

$$\det A = a_{11}\,(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{n-2} \begin{vmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}_{2\times 2} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

elde edilir. Alt üçgensel matrisler için de benzer şekilde yapılabilir. □

Bir Kare Matrisin Transpozesinin Determinantı

Teorem

Bir A kare matrisinin transpozesi'nin determinantı, A matrisinin determinantına eşittir. Yani $\det(A) = \det(A^T)$ *dir.*

Kanıt.

Determinant açılımını kolona veya satıra göre yapabiliriz. Determinant değişmez. Buna göre, A matrisinde k'ıncı satıra göre yapılan bir determinat hesabı, A^T matrisinde k'ıncı kolona göre yapılan bir determinant hesabıdır. O halde,

$$\det(A) = \det(A^T)$$

olur. $\square$

Örnek

A, $n \times n$ türünden bir ters simetrik matris olsun. n tek sayı ise $\det A = 0$ olacağını gösteriniz.

Elemanter Satır Operasyonlarıyla Determinantın Değişimi

Teorem

$n \times n$ tipinden bir A matrisine bir elemanter satır operasyonu uygulanarak B matrisi elde edilsin. A matrisine uygulanan elemanter satır operasyonuna karşılık gelen matris E olsun. Buna göre, $\det B = (\det E)(\det A)$ *olur.*

Kanıt.

Her bir elemanter satır operasyonu için ayrı ayrı kanıtlayalım.

i. İki satırın yer değiştirilmesi işlemi : Bu durumda, $\det B = -\det A$ olur. Diğer yandan, birim matrisin determinantı 1 olduğundan, iki satırın yer değiştirilmesiyle elde edilen E matrisinin determinantı -1 olur. Buna göre, $\det B = (\det E)(\det A)$ eşitliği sağlanır.

2. Bir satırın bir λ reel sayısı ile çarpılması işlemi : Bu durumda, $\det B = \lambda \det A$ olur. Diğer yandan, birim matrisin determinantı 1 olduğundan, birim matrisin herhangi bir satırını λ ile çarparak elde edilen E matrisinin determinantı da λ olur. Buna göre,
$\det B = \lambda \det A = (\det E)(\det A)$ eşitliği sağlanır.

3. Bir satırın bir λ katının başka bir satıra ilave edilmesi işlemi : Bu durumda, $\det B = \det A$ olur. Diğer yandan, birim matriste, herhangi bir satırın λ katının, başka bir satıra ilave edilmesiyle elde edilen E matrisinin determinantı değişmeyeceğinden 1'dir. Buna göre, $\det B = 1 \cdot \det A = (\det E)(\det A)$ eşitliği yine sağlanır.

Sonuç olarak, tüm elemanter operasyonlar için $\det B = (\det E)(\det A)$ eşitliği sağlanacaktır. $\square$

İki Kare Matrisinin Çarpımının Determinantı Çarpımlarının Determinantıdır

Teorem

A ve B, $n \times n$ türünden iki kare matris ise

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$\det A = 0$ kabul edelim. Bu durumda A matrisinin tersi yoktur. Diğer yandan, A'nın tersi yoksa, AB matrisinin de tersi yoktur. O halde, $\det(AB) = 0$ olur ve $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ eşitliği sağlanır. Şimdi, $\det A \neq 0$ kabul edelim. O halde A^{-1} vardır. Bu durumda, $E_1, E_2, ..., E_k$, A elemanter satır operasyonlarına karşılık gelen matrisler olmak üzere, $A = E_k \cdots E_2 E_1$ şeklinde yazılabilir. Buradan, bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için, $\det(AB) = \det(E_k \cdots E_2 E_1 B)$ eşitliğinde, üstteki teorem kullanılırsa

$$\det(AB) = \det(E_k \cdots E_2 E_1 B) = \det(E_k \cdots E_2 E_1)\det B = \det A \det B$$

olduğu görülür. □

Örnek

$\det A \neq 0$ olmak üzere, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ olduğunu kanıtlayınız.

Örnek

$\det A \neq 0$ olmak üzere,

$$\det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$$\det\left(A^n\right) = \det\left(A \cdot A \cdots A\right) = \det A \det A \cdots \det A = \left(\det A\right)^n$$

olur.

Örnek

A, B ve C matrisleri, 5×5 türünde matrisler olmak üzere,

$$\det A = 5, \quad \det B = -12 \quad \text{ve} \quad \det C = 3$$

olduğuna göre, $2AB^{-2}C^3$ matrisinin determinantı kaçtır?

Örnek

Ortogonal bir matrisin determinantının 1 veya -1 olduğunu, fakat determinantı ± 1 olan bir matrisin ortogonal matris olmayabileceğini gösteriniz.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin tersinin determinantı kaçtır?*

Problem

A, B, C *matrisleri* 4×4 *türünden üç matristir.* $\det A = 3$, $\det B = 4$ *ve* $\det C = 1/2$ *olduğun göre,* $\det\left(2A^3B^{-3}C^{-2}\right)$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Problem

A *ve* B, 3×3 *türünden matrislerdir.* $\det A = 4$ *ve,* $\det(2AB) = 96$ *olduğuna göre* $\det B = ?$

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz. (Vandermonde[a] Determinantı)**

[a] Vandermonde Determinantı : İsmini Alexandre-Théophile Vandermonde adlı Fransız matematikçiden alan,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1=i<j\leq n} (x_j - x_i)$$

formundaki determinantlardır.

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^3$$ **olduğunu kanıtlayınız.**

Örnek

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ **determinantını çarpanlara ayırınız.**

Çözüm

İlk satırı, ikinci satıra ilave edersek, ikinci satır $a+b+c$'nin bir katı olacaktır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

İlk kolonu diğerlerinden çıkaralım.

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \\ b^2+c^2 & a^2-b^2 & a^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b)$$ *olduğunu gösteriniz. (3'üncü mertebeden Vandermonde determinantı)*

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix} = \prod_{1=i<j\leq 5} (x_j - x_i)$$

olduğunu gösteriniz. (5'inci mertebeden Vandermonde determinant)

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a) \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Problem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)^2$$ *olduğunu gösteriniz.*

Problem

$$\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix} = -8 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Problem

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$$ *determinantının,* $c^2(2b+c)(4a+2b+c)$

olduğunu gösteriniz.

Problem

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b \\ c & c & 1+c & c \\ d & d & d & 1+d \end{vmatrix} = a+b+c+d+1 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Problem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ x & y & -1 & 1 \\ y & x & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - x^2 - y + y^2$$ *olduğunu gösteriniz.*

Problem

A, 4×4 türünden ortogonal bir matristir. Buna göre,

$$S = \det A^T + \det A^{-1} + \det(-A) + \det A + \det A^2 + \det 2A$$

ifadesinin değeri kaç olabilir.

Problem

A, 3×3 türünden ortogonal bir matristir. Buna göre,

$$S = \det A^T + \det A^{-1} + \det(-A) + \det A + \det A^2 + \det 2A$$

ifadesinin değeri kaç olabilir.

Farklı Satırın Kofaktörleriyle Başka Bir Satırın Elemanlarının Çarpımı

Teorem

A_{rs} , $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *kare matrisinin* a_{rs} *elemanının kofaktörü olsun. Buna göre,*

$$\det A = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}A_{ms} = a_{r1}A_{m1} + a_{r2}A_{m2} + ... + a_{rn}A_{mn} = 0$$

veya

$$\det A = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rm} = a_{1s}A_{1m} + a_{2s}A_{2m} + ... + a_{ns}A_{nm} = 0$$

şeklindedir. (Kısaca bir satırın elemanları, farklı bir satırın kofaktörleriyle çarpılıp toplanırsa sıfır bulunur.)

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **için,** $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} + a_{24}A_{34}$ **değerinin 0 olduğunu görünüz.**

Bir Matrisin Ek Matrisi, Adjoint Matris

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verilsin. A_{ij}, a_{ij} elemanının kofaktörü olmak üzere

$$[A_{ij}]^T$$

matrisine, yani kofaktörlerin oluşturduğu matrisin transpozesine, A **matrisinin eki, ek matris veya adjoint matris** denir. **Ek**A veya **Adj**A ile gösterilir. Biz bu kitapta **Ek**A gösterimini kullanacağız.

Bir Matrisin Tersinin Ek Matrisle Bulunması

Teorem

$\det A \neq 0$ *ise,* A^{-1} *vardır ve* $A^{-1} = \dfrac{\mathbf{Ek}A}{\det A}$ *ile bulunur.*

Kanıt.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ olmak üzere, $A(\mathbf{Ek}A)$ çarpımını inceleyelim.

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} = \det A \qquad \text{ve} \qquad a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \ldots + a_{rn}A_{sn} = 0$$

olduğundan $A(\mathbf{Ek}A)$ çarpımı :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n} & A_{2n} & \cdots & A_{n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)\, I_n$$

elde edilir. □

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini, ekini hesaplayarak bulunuz.**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini, ekini hesaplayarak bulunuz.**

Problem

$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ *matrisinin ek matrisini ve tersini bulunuz.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin ek matrisini ve tersini bulunuz.*

Lineer Denklem Sistemlerinin Tek Çözümü ve Determinant

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir matris olmak üzere,

$$AX = 0$$

biçimindeki n bilinmeyenli homojen lineer denklem sistemi için, $\det A \neq 0$ *ise,* A^{-1} *vardır. Buna göre,*

$$X = A^{-1}0 = 0$$

denklemin tek çözümüdür.

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir matris olmak üzere, $AX = B$ biçimindeki n bilinmeyenli lineer denklem sistemi için, $\det A \neq 0$ *ise,* A^{-1} *vardır. Buna göre,*

$$X = A^{-1}B$$

denklemin tek çözümüdür.

Lineer Denklem Sistemlerinin Sonsuz Çözümü ve Determinant

Teorem

n bilinmeyenli, n denklemden oluşan

$$AX = B$$

biçimindeki bir lineer denklem sisteminin çözümü varsa, sonsuz çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $\det A = 0$ *olmasıdır.*

Teorem

n bilinmeyenli, n denklemden oluşan

$$AX = 0$$

biçimindeki bir homojen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $\det A = 0$ *olmasıdır.*

Örnek

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 3y + kz = 0 \end{cases}$$ denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre $k = ?$

Örnek

$$\left\{\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x - y + kz &= 3 \end{aligned}\right.$$

denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için k =?

Cramer Kuralı

Teorem

$x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenli, n lineer denklem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

olarak veriliyor. Bu sistemi de $AX = B$ formunda yazabiliriz. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir karesel matristir. Eğer, $\triangle = \det [a_{ij}]_{n\times n} \neq 0$ ise, bu sistemin tek çözümü vardır.
Ayrıca, $\triangle_k$, $[a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin $k-\imath nc\imath$ kolonunun $[b_i]_n$ sütunuyla değiştirilmesiyle elde edilen matrisin determinantını göstermek üzere,

$$x_k = \frac{\triangle_k}{\triangle} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ olmak üzere, $\det A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda A^{-1} vardır ve $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\triangle}$ ile bulunabilir. Buna göre sistemin tek çözümü,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\triangle} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\triangle} \begin{bmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\triangle} \begin{bmatrix} \triangle_1 \\ \triangle_2 \\ \vdots \\ \triangle_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle_1 / \triangle \\ \triangle_2 / \triangle \\ \vdots \\ \triangle_n / \triangle \end{bmatrix}.$$

elde edilir. $\square$

Örnek

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x-2y+w=1 \\ x-y+w=2 \\ y-z+2w=1 \end{cases}$$

denklem sistemine göre, $y=?$

Problem

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$ *denklem sistemini Cramer kuralını kullanarak çözünüz.*

Problem

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-2y+w=1 \\ x-y+z=0 \\ y-z+2w=1 \end{cases}$$

denklem sistemine göre, y kaçtır?

Problem

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \\ x+w=3 \\ x+t=4 \\ x+y+z+w+t=5 \end{cases}$$ *denklem sisteminde x'in değerini Cramer kuralını kullanarak bulunuz.*

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünün Olmaması ve Determinant

Teorem

n bilinmeyenli, n denklemden oluşan

$$AX = B$$

biçimindeki bir lineer denklem sisteminin çözümünün olmaması için gerek ve yeter koşul

$$\triangle = 0 \qquad ve \qquad \triangle_k \neq 0$$

olmasıdır.

Özel Sorular

Örnek

$\mathbf{101} \times \mathbf{101}$ türünden ters simetrik

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 99 & 100 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 98 & 99 \\ -2 & -1 & 0 & \cdots & 97 & 98 \\ -3 & -2 & -1 & \cdots & 96 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -99 & -98 & -97 & \cdots & 0 & 1 \\ -100 & -99 & -98 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

Özel Sorular

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} = ?$$

Özel Sorular

Örnek

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b & b \\ b & b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

Özel Sorular

Problem

$$\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b & b & b \\ b & a+b & \cdots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b & b & b \\ b & b & \cdots & b & a+b & b \\ b & b & \cdots & b & b & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}$$

determinantının $(a+nb)\,a^{n-1}$ *olduğunu gösteriniz.*

Problem

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{10\times 10}$$

determinantının $3 \cdot 2^{11}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 97 & 98 & 99 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 96 & 97 & 98 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 95 & 96 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 97 & 96 & 95 & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ 98 & 97 & 96 & \cdots & 2 & 1 & 2 \\ 99 & 98 & 97 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 7 & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 9 & 8 & 7 & \cdots & 1 & 2 \\ 10 & 9 & 8 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ *determinantının* $-11 \cdot 2^8$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\det\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\cdots+\mathbf{A}^{100}\right)$ determinantı kaçtır?

Çözüm

$A^2 = A$ olduğu kolayca görülebilir. (Idempotent matris)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}.$$

Buna göre, $A^n = A$ olacağından,

$$\begin{aligned} &\det\left(I+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}\right) = \det\left(I+100A\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} 401 & -100 \\ 1200 & -301 \end{bmatrix} (K_1 \to K_1 + 4K_2) = \det\begin{bmatrix} 1 & -100 \\ -4 & -301 \end{bmatrix} = -701 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ **matrisi üçüncü dereceden bir nilpotent matristir. Yani,** $\mathbf{A}^3 = 0$ **eşitliği sağlanır. Buna göre,** $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = 1 + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots$ **exponensiyel matrisini bulunuz.** $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ **matrisi için**

$$\det(\mathrm{Ek}A) = (\det \mathbf{A})^{n-1}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem

$\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{n \times n}}$ **matrisi için**

$$(\mathbf{Ek}\,(\mathbf{Ek}A)) = (\det \mathbf{A})^{\mathbf{n-2}}\,\mathbf{A}$$

olduğunu gösteriniz.

İpucu : $A\,(\mathbf{Ek}A) = (\det A)\,I_n$ eşitliğinde A gördüğümüz yere $(\mathbf{Ek}A)$ yazınız ve bir üstteki

Örnek

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + kz = m \end{cases}$$

denklem sistemi veriliyor.

a) Sistemin sonsuz çözümü olması için $k = ?$ ve $m = ?$

b) Sistemin çözümü yoksa k ve m ne söylenebilir?

c) $k = 1$ ve $m = 2$ için sistemin çözümünü bulunuz.

SORU

$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı kaçtır?

A) 2 **B)** 0 **C)** 4 **D)** -4 **E)** 5

SORU

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı kaçtır?

A) -4 **B)** 16 **C)** 4 **D)** -8 **E)** 11

SORU

S_5 de tanımlanan aşağıdaki permütasyonların hangisinin işareti pozitiftir?

A) 12354 **B)** 21345 **C)** 21453
D) 31452 **E)** 24135

SORU

Determinant tanımına göre

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantının hesaplanmasında işareti gerekli olan tek permütasyon hangisidir?

A) 2341 **B)** 4123 **C)** 1342 **D)** 1243 **E)** 3412

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$$

A) 43 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 32

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersi yoksa a kaçtır?

A) -1 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $1/2$ **E)** $-1/2$

SORU

$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoksa $a \in \mathbb{R}^+$ kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** 2 **D)** 1 **E)** 3

SORU

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı sıfır ise $a =$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı sıfır ise $a = ?$

A) -1 **B)** 2 **C)** 1 **D)** 3 **E)** $1/2$

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 30 & 40 & 50 \\ 11 & 33 & 55 & 55 \\ 5 & 15 & 25 & 30 \end{vmatrix} = ?$$

A) 110 **B)** 1100 **C)** 550 **D)** 1650 **E)** 0

SORU

A ve B, 3×3 türünden matrisler olmak üzere, aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\det(A+B) = \det A + \det B$

II. $\det(AB) = \det A \det B$

III. $\det(2A) = 2 \det A$

IV. $\det A^{-1} = -\det A$

V. $\det A^{T} = \det A$

A) 3 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

Aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Ters simetrik matrislerin determinantı sıfırdır.

B) Ters simetrik matrislerin tersi yoktur.

C) Simetrik matrislerin tersi yoktur.

D) Ortogonal Matrisin determinantı ± 1'dir.

E) Ortogonal matrislerin tersi yoktur.

SORU

A bir ortogonal matris olmak üzere,

$$\det A + \det A^T + \det A^{-1} + \det A^2 = x$$

ise x'in olabileceği değerlerin toplamını bulunuz

A) 6 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times4}$, $B = [b_{ij}]_{4\times4}$ olmak üzere, $\det A = 3$ ve $\det B = 2$ ise aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\det(AB) = 6$,
II. $\det\left(A^{-1}B^2\right) = 4/3$,
III. $\det(A + B) = 5$,
IV. $\det\left(A^{-1}B^T\right) = 1/6$,
V. $\det(2AB) = 12$

A) 0 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 2

SORU

$\det A = 12$ olan $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ matrisinin önce tersi alınıyor, sonra tersi 2 ile çarpılıyor ve devriği alınıyor ve elde edilen son matrisin üçüncü satırı 6 ile çarpılarak bir B matrisi elde ediliyor. B matrisinin determinantı kaçtır?

A) 8 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 3 **E)** 1

SORU

Bir A matrisine aşağıdaki elemanter satır operasyonları yapılıyor. Bunlardan hangisi determinantı değiştirmez?

A) Bir satırı 2 ile çarpmak.

B) İki satırın yerini değiştirmek

C) Herhangi bir satırın 2 katını başka bir satıra eklemek.

D) Matrisi 2 ile çarpmak

E) Herhangi bir satırın yerine başka bir satırı yazmak.

SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesinin determinantı sıfırdır?

I. Herhangi bir satırının tamamı 0 olan A matrisi.

II. Herhangi iki satırı orantılı olan B matrisi.

III. Herhangi bir satırı farklı iki satırının toplamı olan C matrisi.

IV. Tek sayıda satıra sahip D ters simetrik matrisi.

V. Ortogonal E matrisi.

A) 5 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

$$\begin{vmatrix} 13 & 39 & 65 \\ 11 & 33 & 33 \\ 14 & 49 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

A) 2002 **B)** 3003 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 0

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\det\left(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}\right)$ determinantı kaçtır?

A) 100 **B)** 0 **C)** 101 **D)** 1 **E)** 99

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

A) $5!$ **B)** $-5!$ **C)** 0 **D)** 1 **E)** 30

SORU

$$A = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ise, } \det\left(2A\left(A^{-1}\right)^{T}\right) + \det\frac{A^2}{2} \text{ kaçtır?}$$

A) 25 **B)** 24 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 26

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

A) 16 **B)** -16 **C)** 12 **D)** -12 **E)** 0

SORU

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

A) 24 **B)** $a+b$ **C)** $ab+2$ **D)** 0 **E)** $a+b+ab$

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

A) 56 **B)** 48 **C)** 72 **D)** -80 **E)** -72

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = ?$$

A) 0 **B)** 18 **C)** -12 **D)** 20 **E)** 12

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos x & \cos y \\ 1 & \cos x & 1 & \cos z \\ 1 & \cos y & \cos z & 1 \end{vmatrix} = 0$$ olacak şekilde, $[0, 2\pi]$ aralığında kaç x açısı vardır?

A) 4 **B)** 6 **C)** 3 **D)** 0 **E)** 2

SORU

4×4 türünde verilen bir A matrisinin determinantı 5'tir. A matrisinin dördüncü satırının yerine ikinci satırının 2 katı ile üçüncü satırının 3 katının toplamı yazılırsa, determinantı ne olur?

A) 10 **B)** 5 **C)** 30 **D)** 0 **E)** 15

SORU

A, B, C matrisleri 4×4 türünden matrislerdir. $\det A = 48$, $\det B = 12$, $\det C = -3$ ise, $\det\left(3AB^{-2}C^{-3}\right)$ determinantının değeri kaçtır?

A) 1 **B)** -1 **C)** $1/27$ **D)** $-1/27$ **E)** -2

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\begin{vmatrix} x^3 & x & y \\ y^3 & y & x \\ 1 & 1 & xy \end{vmatrix}$ determinantının çarpanlarından biri değildir?

A) $x+y$ **B)** $x-y$ **C)** $x+1$ **D)** $y-1$ **E)** $x+y+1$

SORU

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$$ denklem sistemine göre, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ determinantının, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinantına oranı hangisine eşittir?

A) x **B)** y **C)** z **D)** $x+y$ **E)** Hiçbiri

SORU

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + ky - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$ denklem sisteminin sonsuz çözümü varsa $k + m = ?$

A) 4 **B)** 6 **C)** 3 **D)** 0 **E)** 2

SORU

Hangisi $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ determinantının bir çarpanı değildir.

A) $b-c$ **B)** $a-c$ **C)** $a-b$ **D)** $(a+b+c)^2$ **E)** $a+c$

SORU

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

A) 384 **B)** 144 **C)** 64 **D)** 128 **E)** 281

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A) 4 **B)** 6 **C)** 3 **D)** 0 **E)** -3

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

A) 4 **B)** 0 **C)** 3 **D)** -12 **E)** 1

SORU

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

A) 4 **B)** 16 **C)** 48 **D)** 0 **E)** 2

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

A) 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 0 **E)** 2

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.