Olasılıksal Robotik

Dr. Öğr. Üyesi Erkan Uslu
2

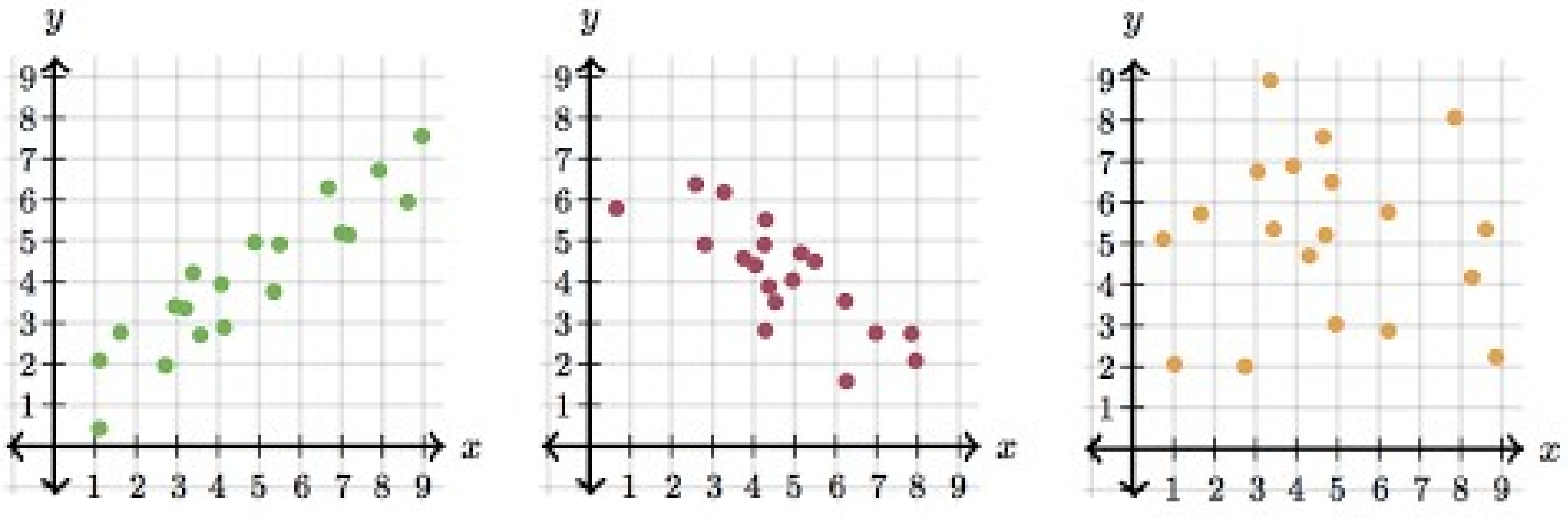
Temel Olasılık

- **Kovaryans**

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY}^2 &= cov X, Y \\
&= E\left\{\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)p(x, y)\ dx\ dy \\
&= E\left\{XY\right\} - \mu_X \mu_Y
\end{aligned}
$$

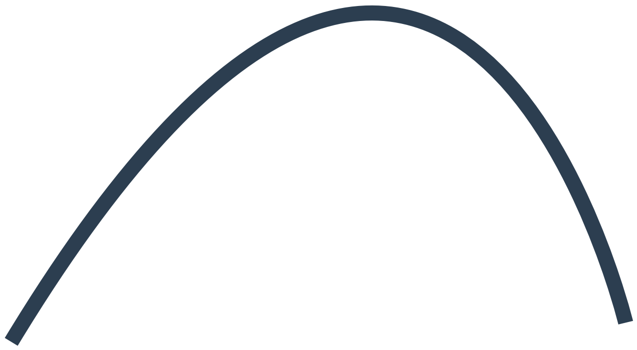
Temel Olasılık

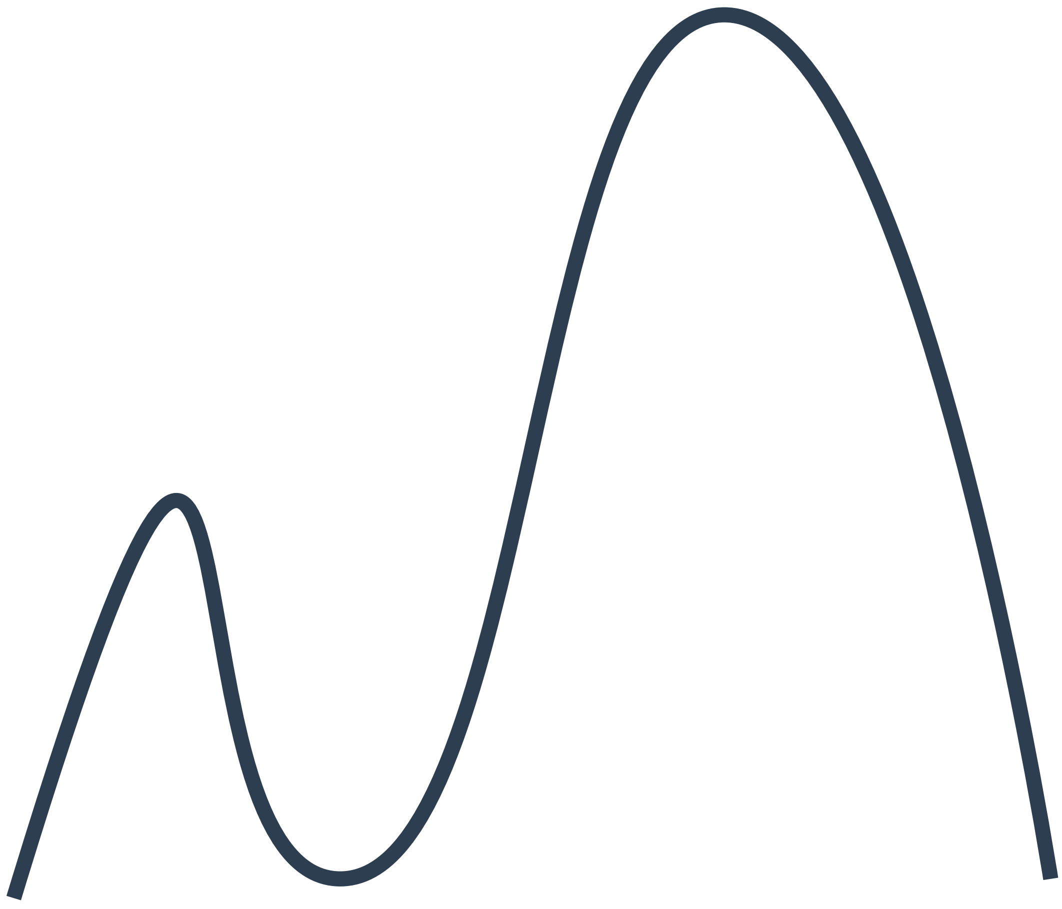
- **Scatter plot – yayılım grafikleri:**



$cov(x, y) > 0$ $cov(x, y) < 0$ $cov(x, y) \approx 0$

Temel Olasılık



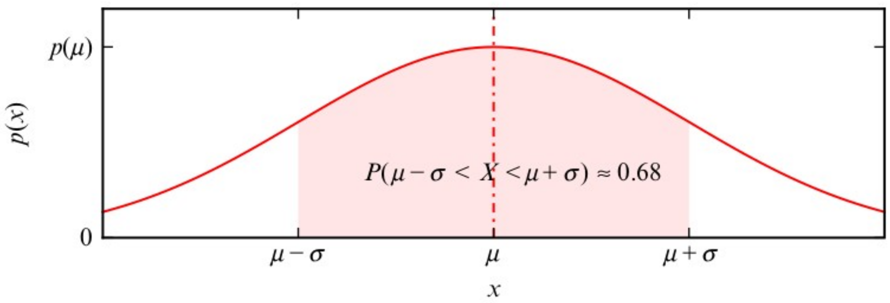


Unimodal **Multimodal**

Normal Dağılım

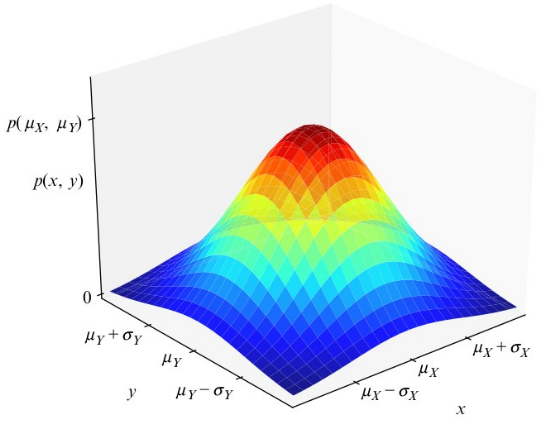
- **1B Normal Dağılım**

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- **2B Normal Dağılımı**

$$p(\boldsymbol{x}) = det\,(2\pi\boldsymbol{\Sigma})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$



Örnek - Correction

- **X rassal değişkenine dair 2 bağımsız tahmin verilmiştir. İlk tahmin x_1 olup varyansı σ_1^2 , ikinci tahmin x_2 olup varyansı σ_2^2 olarak verildiğine göre, bu iki tahmin edicinin minimum varyanslı doğrusal birleşimi nasıl elde edilebilir?**

Örnek

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$\hat{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{x}}^2 &= E\left[\left(\hat{x} - E\left[\hat{x}\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - E\left[\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - \omega_1 E\left[x_1\right] - \omega_2 E\left[x_2\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\omega_1\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right) + \omega_2\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Örnek

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\hat{x}}^2 &= E\left[\left(\omega_1\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right) + \omega_2\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\omega_1^2\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right)^2 + \omega_2^2\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)^2 + 2\omega_1\omega_2\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right)\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)\right] \\
&= \omega_1^2 E\left[\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right)^2\right] + \omega_2^2 E\left[\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)^2\right] + 2\omega_1\omega_2 E\left[\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right)\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)\right] \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2 E\left[\left(x_1 - E\left[x_1\right]\right)\left(x_2 - E\left[x_2\right]\right)\right] \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

Örnek

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{x}}^2 &= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 \\ &= \omega_1^2\sigma_1^2 + \left(1-\omega_1\right)^2\sigma_2^2\end{aligned}$$

$$\arg\min_{\omega_1}\left\{\sigma_{\hat{x}}^2\right\} = \omega_1\Big|_{\frac{\partial\sigma_{\hat{x}}^2}{\partial\omega_1}=0}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\hat{x}}^2}{\partial\omega_1} = 0$$

$$2\omega_1\sigma_1^2 - 2\left(1-\omega_1\right)\sigma_2^2 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\ \omega_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Örnek

- **Tahmin edicilerin lineer bir birleşimi olarak elde edilecek en küçük varyanslı tahmin edicinin tahmini ve varyansı:**

$$\hat{x} = \frac{x_1\sigma_2^2 + x_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{-1}$$

Örnek

- **Yorumu:**
- **Varyansı daha küçük olan tahmin edici sonuca daha fazla katkı yapar**
- **Her iki tahmin ediciden de daha keskin bir tahmin yapılmış olur (her iki tahmin ediciden de daha küçük varyans)**

Örnek

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$
$$\hat{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$$

$$\hat{x} = x_1 + \omega_2 \left(x_2 - x_1\right)$$

$$\omega_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \left(1 - \omega_2\right) \sigma_1^2$$

Örnek - Prediction

- **Başlangıç durumu için tahmin ve varyans değerlerinin sırasıyla x ve σ^2 olduğu biliniyor olsun. Başlangıç durumundayken belirsizliği σ^2_u olan bir u kontrol işareti uygulandığında ulaşılan durum için tahmin x' ve varyansı σ'^2 ne olur?**

Örnek

- **Sonraki durum için tahmin başlangıç durumuna kontrol işaretinin uygulanmasıdır**

$$x^{'} = x + u$$

Örnek

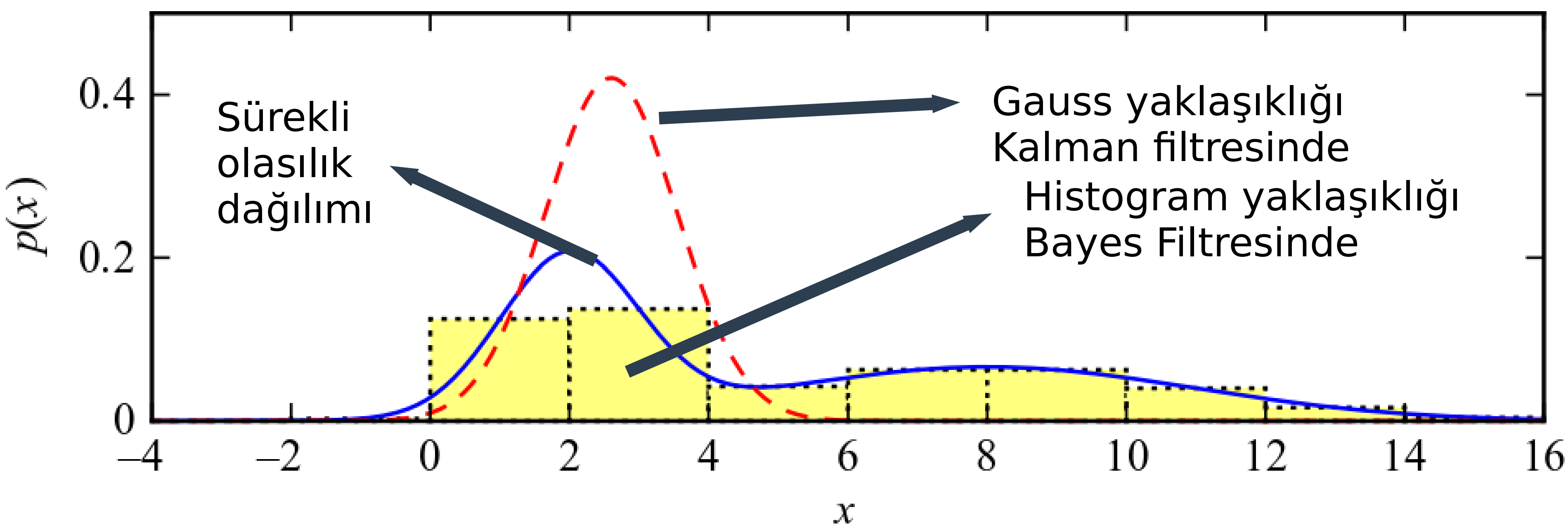
- **Sonraki durum varyansı:**

$$\begin{aligned}
\sigma'^2 &= E\left[\left(x' - E\left[x'\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(x + u - E\left[x + u\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(x - E\left[x\right] + u - E\left[u\right]\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(x - E\left[x\right]\right)^2 + \left(u - E\left[u\right]\right)^2 + 2\left(x - E\left[x\right]\right)\left(u - E\left[u\right]\right)\right] \\
&= \sigma^2 + \sigma_u^2
\end{aligned}$$

Örnek

- **Yorumu:**
- **Hem başlangıç durumu hem de kontrol işaretinden daha yüksek bir varyans oluştu**

Gaussian Yak. Vs Histogram Yak.



Gaussian Rassal Değişken(ler)

- **Gaussian rassal değişkenin doğrusal bir fonksiyonun olasılık dağılımı**

$$\begin{matrix} X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \\ Y = aX + b \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$$

- **İki Gaussian rassal değişkenin olasılık çarpımının dağılımı**

$$\begin{matrix} X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad p(X_1)p(X_2) \sim N\left(\frac{\sigma_2^2\mu_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + \frac{\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$$

Gaussian Rassal Değişken(ler)

- **İki Gaussian rassal değişkenin toplamının olasılık dağılımı**

$$\begin{array}{l} X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

Kalman Filtresi

- **Bayes filtresinin özel bir halidir**
- **Lineer sistemlerde (durum geçişleri doğrusal fonksiyon) durum tahmini**
- **Gürültüler normal dağılımla modellenir**
- **Prediction ve Correction adımları ile yürütülür**
- **İki adet Gauss fonksiyonun çarpımı yine bir Gauss fonksiyonu verir**

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Ayrık zamanlı lineer sistem durum denklemi ve ölçüm denklemi**

$$x_t = a x_{t-1} + b u_t$$

$$z_t = c x_t$$

- **a, b, c skalar**

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Yarıçapı 50 cm olan 100 cm uzunluğundaki silindirik bir su tankına her t anında sabit bir miktar (1 lt) su ekleniyor. Tankın kapağında bulunan bir ultrasonik sensör ise tpeden su seviyesine kadar olan mesafeyi ölçebiliyor. Tanktaki su seviyesine (cm) ilişkin fiziki modeli yazınız.**

$$x_t = x_{t-1} + \frac{1000}{2500\pi} u_t$$

$$z_t = -x_t + 100$$

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Ayrık zamanlı lineer sistem durum denklemi ve ölçüm denklemi**

Kontrol işaretinin
durum geçişine etkisi

Gürültülü durum tahmini

Gürültülü kontrol işareti

Önceki durumun
sonraki duruma etkisi

$$x_t = a x_{t-1} + b u_t + \omega_t$$

$$z_t = c x_t + \nu_t$$

Sıfır ortalamalı
R varyanslı beyaz gürültü

Durumun
ölçüme etkisi

Sıfır ortalamalı
Q varyanslı beyaz gürültü

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Durum tahmini PREDICTION ve CORRECTION adımlarından oluşacak: Bayes Filtresinde olduğu gibi**
- $(\overline{\mu}_t, \overline{\sigma}_t) = \mathrm{PREDICTION}(\mu_{t-1}, \sigma_{t-1}, u_t)$
- $(\mu_t, \sigma_t) = \mathrm{CORRECTION}(\overline{\mu}_t, \overline{\sigma}_t, z_t)$

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Prediction**

$$\bar{\mu}_t = a\mu_{t-1} + b\mu_{u\,t}$$
$$\bar{\sigma}_t^2 = a^2\sigma_{t-1}^2 + b^2\sigma_{u\,t}^2 + R_t$$

- **Correction**

$$K_t = \frac{c\bar{\sigma}_t^2}{c^2\bar{\sigma}_t^2 + Q_t} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t\left(z_t - c\bar{\mu}_t\right) \\ \sigma_t^2 = (1 - cK_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{array}$$

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **Prediction**

$$\bar{\mu}_t = a\mu_{t-1} + b\mu_{u\,t}$$
$$\bar{\sigma}_t^2 = a^2\sigma_{t-1}^2 + b^2\sigma_{u\,t}^2 + R_t$$

Kontrol işareti deterministikse

$$\bar{\mu}_t = a\mu_{t-1} + bu_t$$
$$\bar{\sigma}_t^2 = a^2\sigma_{t-1}^2 + R_t$$

- **Correction**

$$K_t = \frac{c\bar{\sigma}_t^2}{c^2\bar{\sigma}_t^2 + Q_t} \Rightarrow \begin{array}{c} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t\left(z_t - c\bar{\mu}_t\right) \\ \sigma_t^2 = (1 - cK_t)\bar{\sigma}_t^2 \end{array}$$

z/c ve $\bar{\mu}$ için tahmin

Örnek Kalman Filtresi

- 1B uzayda hareket edebilen bir robot için ilk konum, bilinmediğinden geniş bir tahmin ile verilmiştir.

$$\hat{x}_0 = 3,\ \sigma_0^2 = 100$$

- Robot başlangıçtan itibaren 5 kontrol işaretini de sabit bir belirsizlikle yürütmüştür.

$$u_{0:4} = (2, 3, 2, 1, 1)\,,\ \sigma_u^2 = 2$$

- Robot başlangıçtan itibaren 5 ölçümü de sabit bir belirsizlikle yürütmüştür.

$$z_{1:5} = (2, 5, 7, 8, 9)\,,\ \sigma_z^2 = 4$$

Örnek

- **Robot önce hareket komutu yürütüp sonra ölçüm almaktadır**
- **Ölçümler x=0 noktasına uzaklığı ölçebilen bir sensör ile yapılmaktadır**
- **Robotun her adım sonrasındaki konum inancını Kalman filtresi yardımıyla belirleyiniz**

Örnek

$$\hat{x}_1^{'} = \hat{x}_0 + u_0$$

$$\sigma^2_{\hat{x}_1^{'}} = \sigma^2_{\hat{x}_0} + \sigma^2_{u_0}$$

$$3 + 2 = 5$$

$$100 + 2 = 102$$

$$\omega = \frac{\sigma^2_{\hat{x}_1^{'}}}{\sigma^2_{\hat{x}_1^{'}} + \sigma^2_{z_1}}$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^{'} + \omega \left(z_1 - \hat{x}_1^{'} \right)$$

$$\sigma^2_{\hat{x}_1} = (1 - \omega)\, \sigma^2_{\hat{x}_1^{'}}$$

$$\frac{102}{102 + 4} = 0.962$$

$$5 + 0.962(2 - 5) = 2.113$$

$$(1 - 0.962)\, 102 = 3.849$$

Örnek

	Tahmin	Varyans
Prediction0	5.00	102.5
Correction1	2.11	3.85
Prediction1	5.11	5.85
Correction2	5.05	2.38
Prediction2	7.05	4.38
Correction3	7.02	2.09
Prediction3	8.02	4.09
Correction4	8.01	2.02
Prediction4	9.01	4.02
Correction5	9.01	2.01

Kalman Filtresi – Matris Form

- **Ayrık zamanlı lineer sistem durum denklemi ve ölçüm denklemi**

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$
$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

- **A, B, C matris**
- **x, u, z vektör**

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **2B uzayda doğrusal hareket yapan bir robotun sağ ve sol teker hızları kontrol edilebilmektedir. Robot üzerindeki sensörle 4 noktadan ölçüm yapılabilmektedir. Buna göre robotun konum tahmininde Kalman Filtresi kullanılacaksa durum denklem katsayılarının boyutları nasıl oluşur.**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\ell \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Skalar Kalman Filtresi (1B Kalman)

- **2B uzayda doğrusal hareket yapan bir robotun sağ ve sol teker hızları kontrol edilebilmektedir. Robot üzerindeki sensörle 4 noktadan ölçüm yapılabilmektedir. Buna göre robotun konum tahmininde Kalman Filtresi kullanılacaksa durum denklem katsayılarının boyutları nasıl oluşur.**

$$\mathbf{x}_{3\times 1} = \mathbf{A}_{3\times 3}\mathbf{x}'_{\mathbf{3}\times\mathbf{1}} + \mathbf{B}_{\mathbf{3}\times\mathbf{2}}\mathbf{u}_{\mathbf{2}\times\mathbf{1}}$$

$$\mathbf{z}_{4\times 1} = \mathbf{C}_{4\times 3}\mathbf{x}_{3\times 1}$$

Kalman Filtresi

- A_t (nxn) önceki durumun sonraki duruma etkisi
- B_t (nxl) kontrol işaretinin durum geçişine etkisi
- C_t (kxn) durumun ölçüme etkisi
- δ_t Sıfır ortalamalı R kovaryanslı rassal değişken
- ε_t Sıfır ortalamalı Q kovaryanslı rassal değişken

Kalman Filtresi

- **Başlangıç durumu için de inanç normal dağılıma uyacak şekilde tanımlanabilir**

$$bel(x_0) \sim N\left(x_0; \mu_0, \sigma_0^2\right)$$

$$bel(\mathbf{x_0}) \sim N\left(\mathbf{x_0}; \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{0}\right)$$

Kalman Filtresi

- **Hareket modeli / sistem dinamiği durum, kontrol ve hatanın doğrusal bir fonksiyonudur**

$$\boxed{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t}$$

$$\boxed{p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right) \quad \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right)$$

Kalman Filtresi

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \qquad bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right) \quad \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{bel}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1}(x_{t-1} - \mu_{t-1})\right\} dx_{t-1}$$

$$\overline{bel}(x_t) = \begin{cases} \bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{cases}$$

Kalman Filtresi

- **Gözlem modeli durum ve hatanın doğrusal bir fonksiyonudur**

$$\boxed{z_t = C_t x_t + \delta_t}$$

$$\boxed{p(z_t \mid x_t) = N\left(z_t ; C_t x_t , Q_t\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} bel(x_t) = & \eta & p(z_t \mid x_t) & \overline{bel}(x_t) \\ & & \Downarrow & \Downarrow \\ & & \sim N\left(z_t ; C_t x_t , Q_t\right) & \sim N\left(x_t ; \overline{\mu}_t , \overline{\Sigma}_t\right) \end{array}}$$

Kalman Filtresi

$$bel(x_t) = \quad \eta \quad p(z_t \mid x_t) \qquad\qquad \overline{bel}(x_t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(z_t; C_t x_t, Q_t\right) \qquad \sim N\left(x_t; \bar{\mu}_t, \bar{\Sigma}_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$bel(x_t) = \eta \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1}(z_t - C_t x_t)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - \bar{\mu}_t)^T \bar{\Sigma}_t^{-1}(x_t - \bar{\mu}_t)\right\}$$

$$bel(x_t) = \begin{cases} \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t C_t)\bar{\Sigma}_t \end{cases} \qquad \text{with} \quad K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

Kalman Filtresi

1. **Algorithm Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2. **Prediction:**
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$

5. **Correction:**
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$

9. **Return** μ_t, Σ_t

Kalman Filtresi