

## Taylor ve Maclaurin Serileri

Yakınsaklık aralığının içindeki bir kuvvet serisi toplamının, her mertebeden türevi olan sürekli bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur?

Eğer bir  $f(x)$  fonksiyonunun bir  $I$  aralığında her mertebeden türevi varsa bu fonksiyon bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir mi? Eğer edilebilirse bu kuvvet serisinin katsayıları ile ne söylenilebilir?

Şimdi soruyu, eğer  $f(x)$  fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz.  $I$  yakınsaklık aralığı içindeki terimleri tek tek türevlersek;

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5(x-a)^2 + \dots$$

⋮

Tüm  $n$ 'ler için genel olarak;

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (x-a) \text{ ortak çarpanını içeren bazı terimler.}$$

Bu denklemler  $x=a$  'da geçerli olduklarından,

$$f'(a) = a_1$$

$$f''(a) = 2! \cdot a_2$$

$$f'''(a) = 3! \cdot a_3$$

⋮

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Yani, eğer böyle bir seri varsa bir tanedir ve  $n$ -katsayısı

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ şeklindedir.}$$

Doğrıyla  $f$  nin bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (*)$$

Şimdi eğer  $x=a$  merkezli bir  $I$  aralığında her mertebeden türevi olan herhangi bir  $f$  fonksiyonu ile başlarsak ve bu fonksiyonu  $(*)$  serisini üretmek için kullanırsak, bu seri  $I$  daki her  $x$  için  $f(x)$ 'e yakınsar mı? Cevap "belki" dir, bazı fonksiyonlar için doğru bazıları için yanlıştır.

Taylor Serisi:  $f$  fonksiyonu bir  $a$  noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  tarafından  $x=a$  noktasında üretilen Taylor serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Maclaurin Serisi:  $f$  tarafından üretilen Maclaurin serisi;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Yani, Maclaurin serisi  $x=0$  daki Taylor serisidir.

Taylor Polinomları:  $f$  fonksiyonu bir  $a$  noktasını içeren bir aralıkta  $n$ -mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda,  $f$  tarafından  $x=a$  da üretilen  $n$ -mertebe Taylor polinomu  $T_n(x)$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$T_n(x)$ ,  $x=a$  civarında  $f(x)$  in en iyi polinom yaklaşımını verir.

(38. alıştırma'yı gözet)

Örnek:  $f(x) = e^x$  in Maclaurin serisini ve Maclaurin polinomunu bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x \text{ in Maclaurin açılımı: } 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$n. \text{ mertebe Maclaurin polinomunu: } P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Örnek:  $f(x) = \frac{1}{x}$  tarafından  $a=2$  de üretilen Taylor serisini bulunuz.

Hangi noktalarda seri  $\frac{1}{x}$  'e yakınsar?

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2! x^{-3}, \dots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}, \quad f''(2) = \frac{1}{2^3}, \dots, \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\text{Taylor serisi: } f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!} (x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{2-x}{2} \right)^n \Rightarrow \text{geometrik seri} \quad a = \frac{1}{2} \quad r = \frac{2-x}{2}$$

$$\Rightarrow |r| = \left| \frac{2-x}{2} \right| < 1 \quad \text{iam yakınsaktır, yani } \boxed{0 < x < 4}$$

Toplamı;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{2-x}{2} \right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2-x}{2}} = \frac{1}{x}$$

(Yani bu seri  $a=2$  iam sadece  $(0,4)$  aralığında  $\frac{1}{x}$  'e, yani kendini üreten fonksiyona yakınsıyor.)

Örnek:  $f(x) = \cos x$  fonksiyonu tarafından  $x=0$  da üretilen Taylor serisini bulunuz.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x \rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \sin x \rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \rightarrow f^{(4)}(0) = 1 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} f^{(2n+1)}(0) = 0, f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Yani bu seri, her  $x$  için  $\cos x$ 'e yakınsar. (Oran testinden görülebilir)

Bazı Önemli Maclaurin Serileri:

$$1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$2) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$3) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$4) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$5) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$6) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

$$7) \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$



Örnek:  $f(x) = e^{-x^2/3}$  in Maclaurin serisini bulun.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \rightarrow -\frac{x^2}{3}$$

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n \cdot n!} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{3^2} - \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Örnek:  $f(x) = \sin^2 x$  in Maclaurin serisinin genel terimini bulun.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \dots \right) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

**Elementer Olmayan İntegrallerin Hesaplanması:** Taylor serileri, elementer olmayan integralleri seriler cinsinden ifade etmek için kullanılabilir.

Örnek:  $\int \sin x^2 dx$  integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \xrightarrow{x \rightarrow x^2} \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \int \sin x^2 dx = c + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$$

Örnek:  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  nin Maclaurin serisinin genel terimini bulun?

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \dots \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

**Belirsizlik Durumundaki Limitleri Hesaplamak:** Bazen belirsiz durumdaki limitleri hesaplamak için fonksiyonların Taylor serilerinden faydalanabiliriz.

**Örnek:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow x-1} \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \dots \right) = 1$$

**Örnek:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left( -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

**Örnek:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

**Örnek:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}{x \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left( \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)} = 0$$

**Örnek:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln(1+x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} = ?$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 2x} e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow 3x} \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xrightarrow{x \rightarrow x^3} \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \dots \right) \cdot \left( x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots \right)}{\left( \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \dots \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \dots}{\left( \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \dots \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (2 + 2x + \dots)}{x^4 \left( \frac{9}{2} - \frac{3^4 x^2}{4!} + \dots \right)^2} = \frac{81}{4}$$