

(Doğrusal) Lineer Denklemler Sistemi

- * Bütün bilinmeyenler 1. derece ve bilinmeyenlerin birbirleriyle çarpılmadığı denklemler sistemi \rightarrow Lineer
- * Birden fazla ise \rightarrow Lineer denklemler sistemi
- * Matrisler \rightarrow Denklemler sistemlerini görmek için ortaya çıktı.

Denklemler Sisteminin Matrisler ile Gösterimi ^{Parametre adı}

$$\begin{array}{l} 2x - 3y = 10 \\ x + 4y = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \boxed{A \cdot x = b}$$

$A \cdot x = b$

- * Bir bilinmeyenli denklemlerin birinde olmasaydı katsayılar matrisine sıfır yazılır.

Genişletilmiş Katsayılar Matrisi (Augmented matrix)

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{bilinmeyenlerin adı} \\ \text{her bir tek kutuda birleşmesi} \end{array}$$

Elementer (Temel) Satır İşlemleri

- * Matrisin üzerinde denklemler sistemini görmek için yapmamızın mümkün olduğu işlemlerdir, 3 tanedir.

① "Genişletilmiş katsayılar matrisinde" istediğimiz satırı, istediğimiz sayı ile çarpmak

$4S_1 \rightarrow S_1$ veya $4R_1 \rightarrow R_1$ (sağıdaki yeni oluşan satırı 4 ile çarpmış demek)

② "Satırların yerleri değişebilir ($S_1 \leftrightarrow S_2$ veya $R_1 \leftrightarrow R_2$)"

③ "Bir satır diğer bir satıra eklenebilir veya çıkarılabilir. Bir satır bir sayı ile çarpıldıktan sonra da diğer bir satıra eklenebilir veya çıkarılabilir.

$R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ (Yeni satır 2)

Satır biri satır ikine eklendi.

Satırca Denk Matrisler (Row equivalent matrix)

* Elementer satır işlemleri uygulayarak elde ettiğimiz matris ile baştaki matris birbirine satırca denktir

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

2 ana başlıkta toplanır

① Denklem sayısı = bilinmeyen sayısı ise

1- Gauss yok etme metodu

2- Gauss Jordan yok etme metodu

3- Cramer metodu

4- A^{-1} yardımıyla (ters matris) çözme metodu

5- Satırca eselon forma getirerek

6- Satırca indirgenmiş eselon forma getirerek

② Denklem sayısı \neq bilinmeyen sayısı ise

1- Satırca eselon forma getirerek

2- Satırca indirgenmiş eselon forma getirerek

Gauss Yok Etme Metodu

1. adım) genişletilmiş (gkm) katsayılar matrisi haline getir

2. adım) Elementer satır işlemleri ile gkm 'yi üst üçgen matris (upper triangular) yap

* Üst üçgen matris yapmak \rightarrow katsayıların olduğu bölüme köşegen getirip altına kalanları sıfır yapmak

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ -S_1 + S_3 \rightarrow S_3}} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{9}{2}S_2 + S_3} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{bmatrix}$$

İlk satırı sıfır yap kullanarak $2x = -3 \Rightarrow x = -1.5$

Sonra bunu sıfır yap kullanarak $y = 1$

2. satırı kullanarak $x = 5$

Gauss Jordan Yöntemi

Gauss metoduna ek olarak köşegendeki sayıları 1 yapmamız ve üst tarafta 0'ları da 0'a yapmamız (S₂ kullan) (S₃'ü kullanarak 0'ları)

Adımları takip et

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(uygun sayılarla çarpıp hepsini 1 yap)

① $-\frac{1}{2}S_1 + S_2 \rightarrow S_2$ $-\frac{3}{2}S_1 + S_3 \rightarrow S_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

③ $\frac{1}{2}S_1 \rightarrow S_1$ $-\frac{1}{9}S_3 \rightarrow S_3$ $S_3 + S_2 \rightarrow S_2$ $-S_3 + S_1 \rightarrow S_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

⑤ $-4S_2 + S_1 \rightarrow S_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$
 $x_2 = 1$
 $x_3 = -2$

Lineer Denklemlerin Çözüm Durumları

3 seçenek var

tek çözüm
(unique solution)
misal $x=1$ $y=2$ $z=3$

sonsuz çözüm
(infinitely solution)
 $x=a+5$ $y=2a-1$ $z=a+3$

çözüm yok
(no solution)

Çözümü olan sistemler \rightarrow Tutarlı sistem (consistent system)

• tek çözüm olduğunu anlama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k sıfır haricinde bir sayı ise

• sonsuz çözüm olduğunu anlama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En alt satır komple sıfır ise

- x ve y temel değişken
 z serbest değişken
- Gözlemsiz olduğunu anlama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Katsayıların hepsi sıfırken
 sonuç kısmının sıfır olmaması.

• Bu 3 durum matris üst üçgen matris halindeyken değerlendirilir

- Üst üçgen matris halinden sonra köşegen üzerindeki; sıfır değilse \rightarrow temel değişken
 sıfırsa \rightarrow serbest değişken
- serbest değişkene harf atılır ve diğer bilinmeyenler onun türünden bulunur (sonuçta gözömlüde)

\rightarrow satıra indirgenmiş formu?

Eşelon Matris (row echelon form)

- Tamamen sıfırdan oluşan satırlar varsa en aşağı satırlara yazılmalı.
- Her satırın ilk elemanı (sıfırdan farklı) 1 olmalı. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
- Bunun altında kalan tüm elemanlar sıfır olmalı
- Birer satır atladıkça sağ sütunlara yönelmeli. (Birer birer olmak zorunda değil basamak gibi)

ör $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ eşelon matris değil

ör $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ matris eşelon haline getir

$S_1 \leftrightarrow S_2$ $2 \cdot S_1 + S_2 \rightarrow S_2$ ve $-3S_1 + S_3 \rightarrow S_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

$3 \cdot \frac{1}{5} S_2 \rightarrow S_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

$4S_2 + S_3 \rightarrow S_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$5 \cdot \frac{1}{3} S_3 \rightarrow S_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşelon

NOT serbest degisten varsa sarsuz gormelidir

NOT kontrol etmek için enson buldugun degerleri
bir denklemden yerine yaz

lineer denklem sisteminin cozumu?

*denklemler bilinmeyen ise
 x_1 ve $x_3 \rightarrow$ temel d.
 x_2 ve $x_4 \rightarrow$ serbest d.

$x_2 \rightarrow k$ $x_4 \rightarrow m$ dersek

$x_1 = 12 + 3k - 3m$ $k, m \in \mathbb{R}$
 $x_3 = m - 2$

x_1, x_2, x_3, x_4

indirgenmis Eşelon Matrisi

* Eşelon matris kuralı + her pivotun üst tarafı da
sıfır yapılmalı

* Pivot \rightarrow her satırın sıfırdan farklı ilk 0 olan elemanı

ör) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini satırca indirgenmiş eşelon
matris haline getir $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

1) $-2S_1 + S_2 \rightarrow S_2$
 $3S_1 + S_3 \rightarrow S_3$

2) $\frac{1}{3}S_2 \rightarrow S_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{3}S_2$ kullanılarak
 S_2 kullanılarak

* sıfır sıfır geldiğinden
pivot olabilecek 1'e
bölünmüştür 2. satırda
geç

3) $S_2 + S_3 \rightarrow S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 29/3 \end{bmatrix}$ $\frac{3}{29}S_3 \rightarrow S_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\frac{3}{29}S_3 \rightarrow S_3$

5) $\frac{1}{3}S_3 + S_2 \rightarrow S_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $-\frac{8}{3}S_3 + S_1 \rightarrow S_1$

Matris Nedir $a_{21} \rightarrow$ 2. satır 1. sütun ifade eden

$m =$ satır sayısı (denklemler)
 $n =$ sütun sayısı (bilinmeyenler)
 $m \times n \rightarrow$ boyut (garpilmaz, böyle yazılır)

* Matrisler büyük harfler ile isimlendirilir (A, B, ...)

* Matrisin boyutları bu harflerin sağ alt köşesine yazılır

Matris Geçitleri

Sıfır matrisi

- matrisin içindeki tüm elemanlar sıfıra

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kare matris

- Satır sayısı = sütun sayısı ise $A = [3]_{1 \times 1}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$
- sadere kare matrislerin determinantı vardır
- sadere kare matrislerin tersi alınabilir (A^{-1})

Köşegen matris (diagonal matrix)

- bir kare matristir ve sadere kare matrislerde vardır
- Köşegeni dışındaki tüm elemanları sıfır ise $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
- determinantı = köşegenlerindeki elemanların çarpımı

alt üçgen ve üst üçgen matris

- Köşegenin üstünde kalanlar sıfıra \rightarrow alt üçgen m.
- altında kalanlar sıfıra \rightarrow üst üçgen m.

- köşegenlerindeki elemanların çarpımı = determinant (1 kişi 1 kişi de)

birim matris (identity matrix)

- kare matristirler
- köşegendeki tüm elemanlar 1 olan ve diğer elemanları

sıfır olan köşegen matristir

- I ile gösterilir $I_1 = [1]$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Çarpmada etkisizdir. ($A \cdot I = A$)

- matrislerin tersini bulmamızı sağlar ($A \cdot A^{-1} = I$)
(inverse m.)

simetrik matris

- köşegenin alt ve üst tarafında kalanlar birbirine eşittir.
- kare matristir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

ters simetrikte $A^t = -A$

* Yer değiştirme işleminde satırdaki tüm ifadeler yer değişir (ilk halindeki birim farkı yeri de değişir)
onunla birlikte

* Bir matrisi bir sayıyla çarpmak \rightarrow içindeki tüm elemanları o sayıyla çarpmak

Bir Matrisin Devriği (Transpose)

* Matrisin satırları sütun haline getirilir

* A^T veya A' şeklinde gösterilir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Matrislerde Toplama Çıkarma Çarpma

Toplama ve Çıkarma

• Boyutlar aynı olmalı ($m \times n$)

$$\text{ÖR} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad A+B \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 4 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-B \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Çarpma

• ilk matrisin sütun sayısı = ikinci matrisin satır sayısı olmalı,
 $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$ (ilk matrisin sütun s. x ikinci matrisin satır s.)
 $m \times k \rightarrow$ yeni boyut

$$\text{ÖR} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 33 & 17 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

- 1. matrisin satırları ile 2. matrisin sütunları çarpılır
- Herkes kendi sırasındaki sayıyla çarpılır (o değerler toplanır)
- satırla diğerlerini çarptıktan sonra sırayla satırları yaz
- Çarpmanın değişme özelliği yok ($A \cdot B \neq B \cdot A$)
- bir matrisle birim matrisin çarpımı kendisidir, ($A \cdot I = A$)
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $A \cdot A^{-1} = I$

* A^{-1} 'in boyutuna göre birim matris kullanılır

Matrislerin Tersini Bulma

sadece kare matrislerin tersi var (hepsinin olmak zorunda değil)

$$[A | I] \xrightarrow{\text{Birim m.}} [I | A^{-1}]$$

terci alınacak matris \rightarrow matrisin tersi

satır olmalı
den önce
kontrol et

$$\text{ÖR} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

burayı
birim
matrisi
çarpma

matrisin tersini bul

- 1 \rightarrow köşegen dışı ilk sütunun altındaki 0 yap
- 2 \rightarrow köşegendeki 1 yap
- 3 \rightarrow köşegenin üstte kalan 0 yap

çarpımı
ortada \rightarrow

sayılan medikal bunu pek kullanma

$$\begin{array}{l} -3S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2S_2 + S_1 \rightarrow S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right] \\ \text{I} \quad \text{A}^{-1} \end{array}$$

Ters Matris Yardımıyla Lineer Denklemler Sist. Gözetim

* denklemler sayısı = bilinmeyen sayısı ise kullanılabilir

• 1. adım \rightarrow denklemler sist. $A \cdot x = b$ formatında yazılır

• 2. adım $\rightarrow A^{-1}$ bulunur

$\rightarrow A$, tersi alınabilir bir matris olmalı. Yoksa ya çözümü yok ya da sonsuz çözümü var

• 3. adım $\rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$ yani $x = A^{-1} \cdot b$ olur

* b denklemin sonucunu ifade ediyor

OR) $x - 2y = 10$ ters matris yoluyla çözünüz
 $2x + y = 8$

* 1. adım $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 10 \\ 2 & 1 & 8 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$

* 2. adım $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 10 \\ 2 & 1 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{-2S_2 + S_1 \rightarrow S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & -2 \end{array} \right]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{array} \right] \xrightarrow{2S_2 + S_1 \rightarrow S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{array} \right] \xrightarrow{A^{-1}}$$

* 3. adım $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/5 \\ -12/5 \end{bmatrix} \quad x = \frac{24}{5} \quad y = -\frac{12}{5}$

NOT $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A_{\text{yeni}}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{\text{yeni}}$$

$$I_{\text{yeni}} \cdot A = A_{\text{yeni}}$$

Her pivotun altına sıfır larda için pivotun bulunduğu satır kullanılmalı,

NOT

• İki satır yer değiştirilerek oluşturulan elementer matrisin tersi kendisidir

• Bir sayı ile çarpılmış elementer matrisin tersi

• 0 satırın 0 sayıya bölünmüş hali. ($2S_1 \rightarrow S_1$ ise $\frac{1}{2}$ satırı 2'ye böl)

• Bir satırın bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenmesiyle oluşan elementer matrisin tersi;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Değişenleri eski haline getirilerek

Homogen Lineer Denklemler Sistemi

• $A \cdot x = 0$ formatında olan denklemler sistemidir

• Yani sıfır baskımları sıfır olmalı

• Her zaman tutarlıdır (çözümü var) \rightarrow tek çözüm

• Doğal bir çözüme sahiptir. Her zaman için sıfır çözümüne (trivial solution). Yani bütün bilinmeyenlere sıfır verirse denklemler sağlanır

• Denklemler tek çözüme sahipse 0 sıfır çözümdür

• Sonsuz çözüme sahipse sıfır çözümleri dışında çözümlere non-trivial çözüm denir

• Bilinmeyen, denklemler sayısından fazla ise \rightarrow sonsuz ç.

• Bilinmeyen = denklemler sayısı ise \rightarrow tek çözüm

• Denklemler sayısı > bilinmeyen sayısı ise \rightarrow sonsuz ç.

• Çözümü bulmak için denklemler sistemi eselon formuna getirilip pivotlar bulunur

• Pivot sayısı, gerçek denklemler sayısını gösterir

α pivot sayısı ve bilinmeyen sayısı eşitse tek

çözüm vardır ve homojen olduğundan diğer çözümler

ör $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ homojen lineer denklemler ss. çözümleri

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

Her sütunda pivot olduğu için

tek çözüm var

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2S_1 + S_2 \rightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2S_2 + S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/5 S_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ör $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ homojen lineer d.s.'ni çözen
4 bilinmeyen
2 denklemler \rightarrow sonsuz ç.

$$\xrightarrow{1/3 S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5S_1 + S_2 \rightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & -2/3 & -23/3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3/5 S_2 \rightarrow S_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 23/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_3 = a \\ x_4 = b \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_2 + \frac{a}{4} + \frac{23b}{8} = 0 \\ x_2 = -\frac{a}{4} - \frac{23b}{8} \end{matrix}$$

$$x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4b}{3} = 0 \quad \begin{matrix} \text{vesaire} \\ \text{vesaire...} \end{matrix}$$

* Tps simetrik ise $A^T = -A$

$$\left. \begin{aligned} (AB)(B^T A^T) &= A(B \cdot B^T) \cdot A^T = A \cdot A^T = I \\ (B^T A^T)(AB) &= B^T(A^T A)B = B^T \cdot B = I \end{aligned} \right\} \text{sonuç} \quad (AB)^{-1} = B^T A^T$$

Idempotent Matris

(A^2)

* A = kare matris olmak üzere $A.A = A$ ise idempotent matristir

* idempotent matrisin rank 'i trace 1'e esittir

* $A, n \times n$ idempotent matris ve $\text{rank}(A) = n$ ise A matrisi birim matristir

* rank : eselen formdaki matristeki pivot sayısı

* iz: Asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin toplamı

* Birim matrisler idempotent matrislerdir

* idempotent matrislerin özdeğerleri 0 veya 1'den oluşur

* A kare matris olmak üzere;

• $A^3 = A$ ise \rightarrow tripotent matris

• $A^n = 0$ $n \in \mathbb{N}$ olan bir n sayısı varsa \rightarrow nilpotent m.
 $n \rightarrow$ bu matrisin indeksi (derecesi)

Reel ve Kompleks Matris

* Reel m. \rightarrow tüm elemanları reel sayı ise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -4 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

* Kompleks m. \rightarrow elemanlarından en az biri "i" sanal birimi içeriyorsa

$$B = \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ \frac{1}{4} & 3i \end{bmatrix}$$

Kompleks Matrisin Eslenik Derrigi

$$\alpha A^* = \overline{A^T}$$

Devirigini bulduktan sonra bir de eslenigini aliriz
 $\rightarrow z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$ (i 'li kısım işaret degıştirir)

ör) $A = \begin{bmatrix} 3+7i & 0 \\ 2i & 4-i \end{bmatrix}$ ise A^* ?

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{3+7i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{4-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-7i & 0 \\ 0 & 4+i \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha (A^*)^* &= A \\ \alpha (A \pm B)^* &= A^* \pm B^* \\ \alpha (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} \cdot A^* \\ \alpha (A \cdot B)^* &= B^* \cdot A^* \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} A \text{ ve } B \text{ kompleks matris ve} \\ \lambda \text{ bir kompleks sayı olmak} \\ \text{üzere} \end{array}$$

Hermitian Matris

Özel tanımlanmış bir "kare" matris

α Bir matrisin eslenik devirigi kendisine eşitse hermitian matristir ($A^* = A$ ise)

α Reel matrislerde $A = A^T$ ise A simetrik

\rightarrow Simetrik tüm reel matrisler hermitian matristir

α Reel sayıların eslenigi yine kendisidir

ör) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ hermitian mi? evet

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

α kompleks sayılarda hermitian olduğunun ^(kısaca) anlamsı
 \rightarrow köşegenler reel olmalı, ^(kare değilse zaten olamaz)
 \rightarrow simetrik olmaları eslenik olmalı

$(\bar{A})^* = -A$ ise A ters Hermitian matristir

\rightarrow köşegen elemanları ya sıfır ya da sanal sayılar

$\det A = 0$ ise A singular matrix

* $\det A \neq 0$ ise A non singular matrix

Bir Matrisin Tersinin Varolma Şartları

1- Kare matris olmalı

2- Determinanti sıfırdan farklı olmalı ($\det A \neq 0$)

NOT Determinant Hesaplama ($\det A$, $|A|$) gösterimden

* 1×1 matrisinde kendisine eşittir

* 2×2 matrisinde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det A = a \cdot d - b \cdot c$

* 3×3 matrisinde Sarrus yöntemi ile. (ilk iki satır sonuna tekrar eklenip sağa doğru olan çarpım toplamlarından - sola olanları çıkar)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \det \rightarrow \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array} \begin{array}{l} a \cdot e \cdot k + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f \\ - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - k \cdot b \cdot d \end{array}$$

* bütün matrislerin determinantını bulmanızı sağlayan yöntem \rightarrow ^(es. çarpım) kofaktörler ile determinant hesaplama

• $A_{21} \rightarrow a_{21}$ elemanının kofaktörünü temsil eder

• $A_{mn} = (-1)^{m+n} \cdot \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$ \rightarrow ^{m. satır ve n. sütun atıldıktan sonra kalan kısmın determinantı (an elemanının minörü)}

ÖR) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ise $A_{31} = ?$

$$(-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 = 8$$

• kofaktör ile determinant hesaplama:.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \det = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ \text{(bir sütun veya satır seçip bu)} \\ \text{işlemi yaparsak} \end{array}$$

\rightarrow Laplace Açılımı

Determinant özellikleri

1-Bir matriste tamamen sıfırdan oluşan satır veya sütun varsa o matrisin determinanti sıfırdır

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ için } \det = 0 \quad \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ için } \det = 0$$

2-Bir matriste bir satır veya sütun başka bir satır veya sütunun aynısı ise (satu-satu, sütun-sütun) veya katı ise determinanti sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \text{ için } \det = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ için } \det = 0$$

3-Bir matriste iki satır veya iki sütun yer değiştirilirse determinantın işareti değişir

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \text{ için } \det = m \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ için } \det = -m$$

4-Bir matrisin bir satırı veya bir sütunu bir sayı ile çarpılırsa determinanti da o sayı ile çarpılır

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ için } \det = m \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} \text{ için } \det = 2m$$

5-Bir "satır" bir başka satıra eklenir veya çıkarılır, bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenir veya çıkarılırsa determinant değişmez

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2012 & 2013 \end{vmatrix} \det = ? \quad \begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \det = -2$$

ikinci satırdan ilk satırı çıkararak

6-Köşegen matris, Alt köşegen matris, üst köşegen matris
determinantları köşegendeki elemanların çarpımıdır
est
det hesaplamak matrisi bu hallerden birine getirip
de hesaplayabiliriz

$\det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$ köşegen matris ya da
 → det. mirant değerinin -1 ile çarpılması, $\begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix}$

7- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

8- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

9- $\det(A^T) = \det A$

10- $\det(A^n) = (\det A)^n$

11- $\det(k \cdot A) = k^{\text{satr sayisi}} \cdot \det A = k^n \cdot \det A$

ÖR) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı?
 $R_1 \leftrightarrow R_7$ (-1 ile $\det A$ çarp)
 $R_2 \leftrightarrow R_6$ "
 $R_3 \leftrightarrow R_5$ "
 3×7 yukarıdaki işlemlerin sonucu
 $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \det A = -1$ köşegen matris olur

→ Satır sayısı, ters köşegenlerdeki elemanların çarpımının etkisi.
 determinanta eşit. direkt

ÖR) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı
 -3 ise $\det B = ?$ $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g+2a & h+2b & k+2c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$
 $S_2 \leftrightarrow S_3$ sonra $3S_3$ sonra S_2 'ye $2S_1$ eklenmiş
 $-\det A \rightarrow -3\det A \xrightarrow{\text{değişmez}} -3\det A \rightarrow -3\det A = \det B$
 $9 = \det B$

α Bir determinantın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları,
 başka bir satırın (ya da sütunun) elemanlarının köfaktörleriyle çarpılarak
 elde edilen terimlerin toplamı sıfırdır

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ için $d \cdot G + e \cdot H + f \cdot K = 0$

adj ^{adjoint} \times ek matris : $E_k A$

Bir $k \times k$ matrisin elemanlarını yerine o elemanların eş garpanlarını yaz. Sonra onun transpozisini al

$$\times A^{-1} = \frac{E_k A}{|A|}$$

$\times |A| = 0$ ise A matrisinin tersi yoktur

$$\times |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

\rightarrow Örnekte her matrisin birleştirilmiş hali

\times regüler matris \rightarrow terslenebilir matris ($\det A \neq 0$)

$$\times (B)^{-1} = A \text{ ise } (B)^{-1})^{-1} = (A)^{-1} \text{ yani } B = A^{-1} \text{ olur}$$

$$\times \begin{vmatrix} x+y & z+t \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & t \\ a & b \end{vmatrix}$$

$\text{ör.} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rangı = 2 olması için $m = ?$

(2×2) için $\det \neq 0$ olur
 (3×3) için $\det = 0$

m 'in içinde bulunduğu 3×3 'lük parça alıp $\det = 0$ için buluyoruz

inversi = tersi

NOT

- $a_{11}, a_{22} \rightarrow$ Kare matrisin köşegenleri \rightarrow Asal köşegen elemanları
- $i_2 A \rightarrow$ Kare matrisin $i_2 i$ \rightarrow Asal köşegen elemanlarının toplamı
- \rightarrow köşegen matrisin asal köşegen elemanları birbirine eşitse \rightarrow skaler matris
- $\rightarrow A=B$ eşit matrisler böyle ifade edilir
- \rightarrow Bir matris bir skaler ile çarpıldığında her bir eleman o skaler ile çarpılır
- $\rightarrow \lambda \cdot (A+B) = \lambda A + \lambda B$ $\lambda =$ skaler sayı
- $\rightarrow A(BD) = (AB)D$ $\rightarrow A(B+C) = AB + AC$
- $\rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $\rightarrow AB=BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B değişmelidir
- \rightarrow Transpoz A^T ya da A' ile gösterilir
- $\rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$ $\rightarrow (A^T)^T = A$
- $\rightarrow (\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$ $\rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $\rightarrow A^T = -A$ ise A ters simetrik matris (anti-simetrik matris)
- \rightarrow A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak bir pozitif p tam sayısı varsa, A matrisi \rightarrow periyodik matris
- p ise A matrisinin periyodudur
- $\rightarrow A^2 = I$ ise A kare matrisi \rightarrow involut matris
- $\rightarrow \bar{A} =$ Eşlenik matris gösterimi
- $\rightarrow (\lambda A) = \lambda \bar{A}$ $\lambda =$ skaler $\rightarrow (\bar{A+B}) = \bar{A} + \bar{B}$
- $\rightarrow (\overline{A \cdot B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- $\rightarrow AB=BA=I_n$ ise B matris A matrisinin tersi
- $\rightarrow H_{ij} =$ satır değişimi $\rightarrow K_{ij} =$ sütun değişimi
- $\rightarrow H(\lambda) =$ satırı λ skaleriyle çarpma $\rightarrow K(\lambda) =$ sütunu λ skaleri ile çarpma

→ $H_{ij}(\lambda) = j$ satırı λ ile çarpıp i satırına ekle

→ $K_{ij}(\lambda) = j$ sütununu λ ile çarpıp i sütununa ekle

→ $A \sim B$ Satırcı (veya Sütuncı) denk matris gösterimi

→ Hem satırcı hem sütuncı indirgenmiş esolan formda ise $\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_k & \\ \hline 0 & \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], I_k$ Bunlardan birine denk

→ Bunlardan herhangi biri seklinde yapmak → normal forma getirmek

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✗ Ortogonal matris $A^{-1} = A^T$

tersi bulma sırası $\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & m & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

- 1-a'yı 1 yap
- 2-d ve g'yı sıfır yap
- 3-e'yı bir yap
- 4-b ve h'yı sıfır yap
- 5-m'yı bir yap
- 6-c ve f'yı sıfır yap

✗ Kofaktör yöntemiyle tersini bulmak → Ek matris kullanarak

Cramer Metodu

Bilinmeyen sayısı = denklemler sayısı olmalı (genelde det kullanır)
1 → $Ax = B$ formunda yaz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$2 \rightarrow x = \frac{|\Delta x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|A|}$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Sütunlara
b. ifade
gelmis
hali

VEKTÖRLER

$\vec{A}(1,5,7)$ bilig noktası

Ekserum yer vektörü

başlangıç noktası orjin

\vec{AB} $\vec{B}-\vec{A}$

$A(1,5,7)$ $B(3,1,-2)$

• $B-A$ yapılırsa ekserum yer vektörü bulunur

vektör uzunluğu (modül)

$|\vec{v}|$ veya $\|\vec{v}\|$ şeklinde gösterilir

$$\vec{v} = (x, y, z) \text{ ise } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Birim vektör yapma

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

→ kendisi ile aynı yönde ve doğrultularda birim vektörü bulmamızı sağlar

$$-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

→ kendisi ile zıt yönde ama aynı doğrultularda birim vektörü bulmamızı sağlar

Birim baz vektörler

$$i = e_1 = (1, 0, 0)$$

$$j = e_2 = (0, 1, 0)$$

$$k = e_3 = (0, 0, 1)$$

İç çarpım (skaler)

$\alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$ veya $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ şeklinde gösterilir

$\alpha \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ise $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

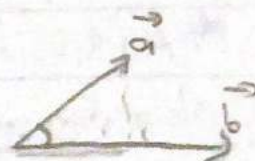
paralellik şartı

$$\alpha \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\alpha \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \text{ olmak}$$

dik izdüşüm vektörünü bulma

$$\alpha \text{ dik izdüşüm vektörü uzunluğu} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$



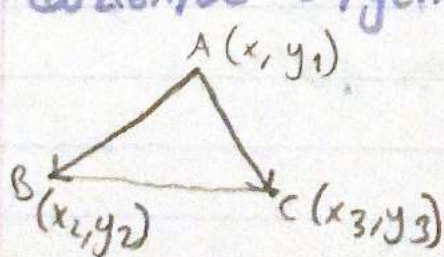
$$\alpha \text{ dik izdüşüm vektörü} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

ÖR) $\vec{A} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{B} = (3, 1, 1)$ ise A vektörünün B vektörü üzerine dik izdüşüm vektörünü bulunuz

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{3+2-1}{\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{11}} \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(3, 1, 1)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\frac{12}{11}, \frac{4}{11}, \frac{4}{11} \right)$$

düzlemde üçgen alanı



$$\vec{AB} = B - A \quad \vec{AC} = C - A$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{pmatrix} \right|$$

ÖR) $A(1, -3)$, $B(2, 1)$ ve $C(4, 3)$ olan ABC üçgeninin alanı?
 $\vec{AB} = (1, 4)$ $\vec{AC} = (3, 6)$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |6 - 12| = 3$$

vektörel çarpım

$$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(C)
 yeni oluşan vektör
 A ve B'ye diktir
 $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$
 $\vec{B} \cdot \vec{C} = 0$
 skaler çarpımdan

ÖR) $\vec{A} = (1, 2, 3)$ $\vec{B} = (2, 1, -1)$ ise $\vec{A} \times \vec{B} = ?$

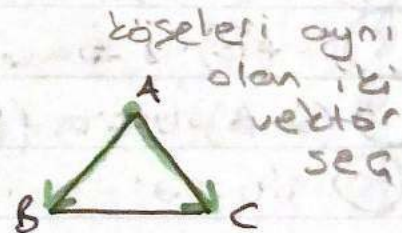
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2i + 4j + 6k) - (4k + 3i - j) = -5i + 7j - 3k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-5, 7, -3)$$

Uzayda üçgen alanı

α Vektör yardımıyla bulunur

$$\alpha A(ABC) = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2}$$



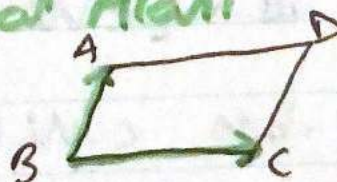
ÖR) ABC bir üçgen. $\vec{CA} = (1, 2, -1)$ ve $\vec{CB} = (3, 4, 1)$ ise alan nedir?

$$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (6, -4, -2)$$

$$\text{Alan} = \frac{\|\vec{CA} \times \vec{CB}\|}{2} = \frac{\sqrt{36 + 16 + 4}}{2}$$

Uzayda Paralelkenar Alanı

$$A(ABCD) = \|\vec{BA} \times \vec{BC}\|$$



V = vektör uzayı $\vec{0}$ = sıfır vektörü

Vektör Uzayı

- ✓ Vektör uzayı, boş olmayan bir kümedir
- ✓ İçindeki elemanlar belli şartları yerine getirmeli.
- ✓ Toplama ve çarpma işlemleriyle ilgili şartlar var

$u, v, w \in V$ herhangi üç eleman

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sabit skaler sayı

1- $u + v \in V$

2- $u + v = v + u$ toplamada değişme özelliği

3- $(u + v) + w = u + (v + w)$ birleşme özelliği

4- $u + \vec{0} = u$ toplamada etkisiz elemana sahip mi

5- Her elemanın toplamaya göre tersi olmalı $u + (-u) = \vec{0}$

6- $\alpha \cdot u \in V$

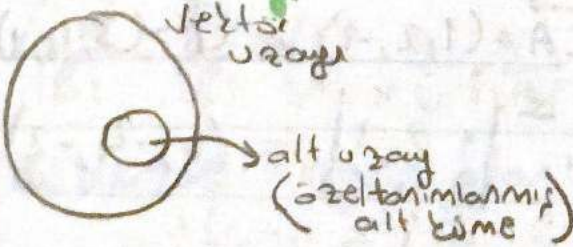
7- $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$

8- $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u$

9- $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

10- $1 \cdot u = u$

ALT Uzay



öylesine simge

Alt uzay olma şartları, (W = alt uzay)

1- $w_1 \in W$ ve $w_2 \in W$ iken $w_1 + w_2 \in W$

2- $w_1 \in W$ iken $c \cdot w_1 \in W$
 $c \in \mathbb{R}$

1 → toplama işlemine kapalı olması
2 → çarpma " " " "

ÖR $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$ kümesi \mathbb{R}^3 'ün bir alt uzayı mıdır?

1. şart) $(\underline{0}, x_2, x_3) \in W$ $(\underline{0}, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$
 $(\underline{0}, y_2, y_3) \in W$ şartı sağladı

2. şart) $(\underline{0}, x_2, x_3) \in W$
 $c \in \mathbb{R}$ $c \cdot (0, x_2, x_3)$
şartı sağladı $\rightarrow (\underline{0}, cx_2, cx_3) \in W$

yani W kümesi \mathbb{R}^3 'ün bir alt uzayıdır

ÖR $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2\}$ kümesi \mathbb{R}^3 'ün

1. şart) bir alt uzayı mı? değil

$$(x_1, x_2, x_3) \in V \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$(y_1, y_2, y_3) \in V \quad y_1 + y_2 = 2$$

$$(\underbrace{x_1 + y_1}_2, \underbrace{x_2 + y_2}_2, x_3 + y_3) \notin V \rightarrow x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 2$$

olmalıydı

NOT

$\odot \rightarrow$ skaler çarpım $\oplus \rightarrow$ vektörel toplama

$\rightarrow V$ vektör uzayındaki elemanların toplamsal inversleri vardır

$k \rightarrow \text{skaler}$ $t \rightarrow \text{skaler}$

Vektörler kitap not

$$\alpha \quad |k\vec{a}| = |k| |\vec{a}|$$

$$\alpha \quad k(t\vec{a}) = t(k\vec{a}) = (k.t)\vec{a}$$

$$\alpha \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{kartezyen baz cinsinden ifade}$$

$\rightarrow x, y$ ve $z \rightarrow$ bileşenler

$$\alpha \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\alpha \quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\alpha \quad k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$\alpha \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ise } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\alpha \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (\text{Schwarz eşitliği})$$

$$\alpha \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

$$\alpha \quad \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \text{ veya } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{vektörel çarpım gös ferimi}$$

$$\rightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \text{ ve } \vec{c} \perp \vec{b} \text{ olur}$$

$$\alpha \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

$$\alpha \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$$

$$\alpha \quad k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$$

$$\alpha \quad |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \vec{a} \text{ ve } \vec{b} \text{ vektörleri üzerine kurulan paralelkenar}$$

$$\alpha \quad \text{iki vektör paralelse } \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$$

$$\alpha \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \rightarrow \text{karma çarpım}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$= \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzünün hacmi

$$\alpha \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \rightarrow \text{iki kat vektörel çarpım}$$

$$\alpha \quad \text{genelde } \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$$

$$\alpha \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

skaler
çarpım
için

$$\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

vektörel
çarpım
için