

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$D \neq \emptyset$ olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D 'deki her (x,y) nokta çiftini bir $z=f(x,y)$ reel sayısına eşleyen f kuralına iki değişkenli fonksiyon denir.

D : tanım bölgesi (kümesi)

$z=f(x,y)$ değerlerinin kümesi - değer kümesi

$z=f(x,y)$: 2 değişkenli fonksiyon

x,y : bağımsız değişken

z : bağımlı değişken

$f(x,y,z)$ şeklinde kapalı formda da ifade edilebilir.

⊗ Geometrik olarak $z=f(x,y)$ fonksiyonu uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatını temsil eder.

⊗ Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $w=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindedir.

x_1, x_2, \dots, x_n : bağımsız değişken

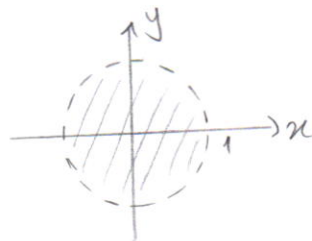
w : bağımlı değişken

Örnek:

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$z=\sqrt{y-x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z=\frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$z=\sin xy$	Düzlemin tümü	$[-1, 1]$
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Uzayın tümü	$[0, \infty)$
$w=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0, \infty)$
$w=xy \ln z$	$z > 0$	$(-\infty, \infty)$

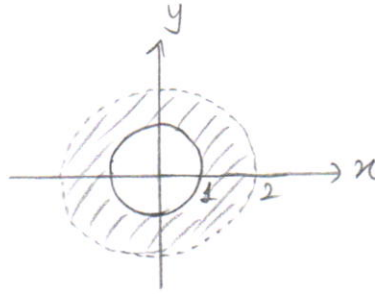
Örnek: $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup çiziniz.

$$1-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$$



Örnek: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ tanım bölgesini bulup, çiziniz.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &\geq 0 & 4 - x^2 - y^2 &> 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 1 & x^2 + y^2 &< 4 \\ & & 1 \leq x^2 + y^2 &< 4 \end{aligned}$$



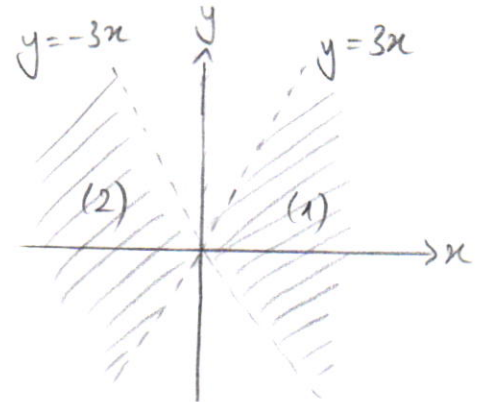
Örnek: $z = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - y^2}}$ tanım bölgesini bulup çiziniz.

$$9x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow (3x - y)(3x + y) > 0$$

+	+	(1)
-	-	(2)

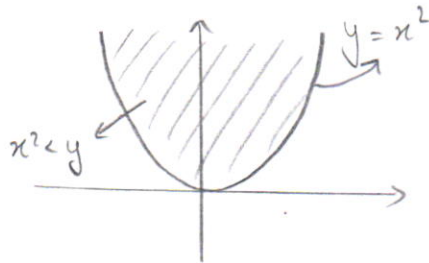
$$(1) \begin{cases} 3x - y > 0 \\ 3x > y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y > 0 \\ y > -3x \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 3x - y > 0 \\ 3x > y \end{matrix}} \right\} -3x < y < 3x$$

$$(2) \begin{cases} 3x - y < 0 \\ 3x < y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y < 0 \\ y < -3x \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 3x - y < 0 \\ 3x < y \end{matrix}} \right\} 3x < y < -3x$$



Örnek: $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ tanım bölgesini bulup çiziniz.

$$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq y$$



Seriy e Eğrileri

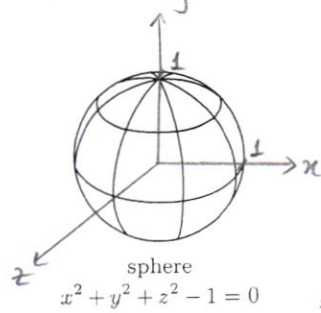
Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir $f(x, y) = c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi, f nin seriy e eğrisi olarak adlandırılır.

f nin tanım kümesindeki (x, y) için uzaydaki bütün $(x, y, f(x, y))$

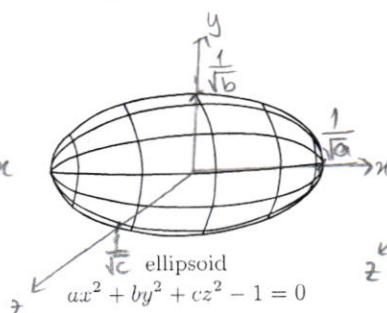
noktaları kümesi f nin grafiğidir. f nin grafiğine $z = f(x, y)$

yüzeyi de denir.

Genel denklem:
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
 (R yarıçapı küre)



Genel denklem:
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Genel denklem:
 $x^2 + z^2 = r^2$ (y-boyunca uzanan silindir)

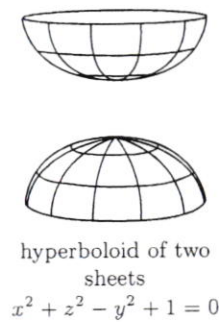
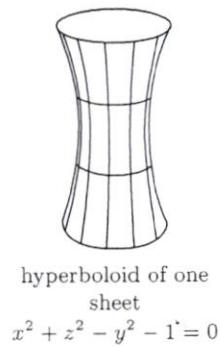
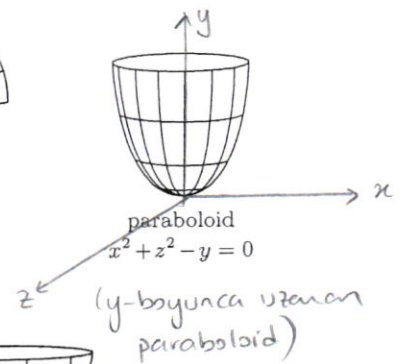
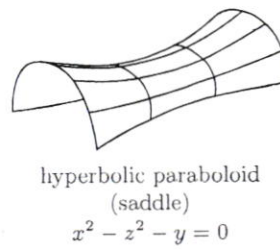
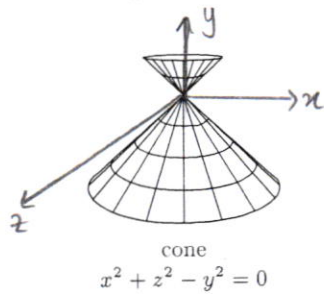
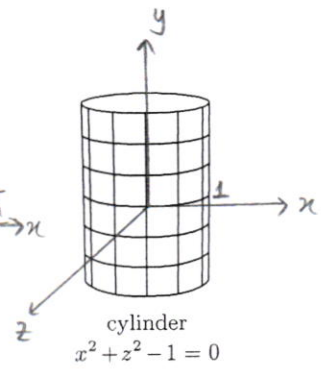
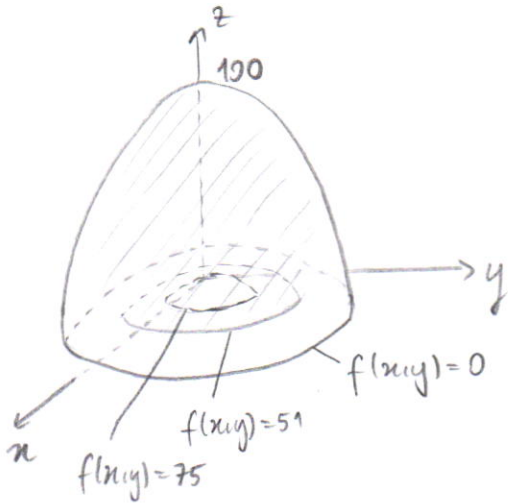


Figure 13.1: The important quadric surfaces.

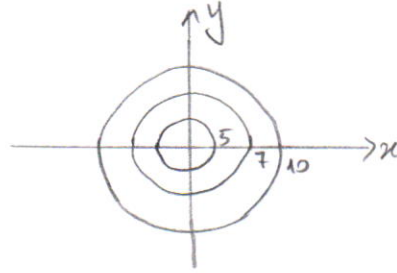
Örnek: $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ nm grafiğini çiziniz ve $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 51$ ve $f(x,y) = 75$ seviye eğrilerini gösteriniz.



$$f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \text{ çemberi}$$

$$f(x,y) = 51 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 \text{ çemberi}$$

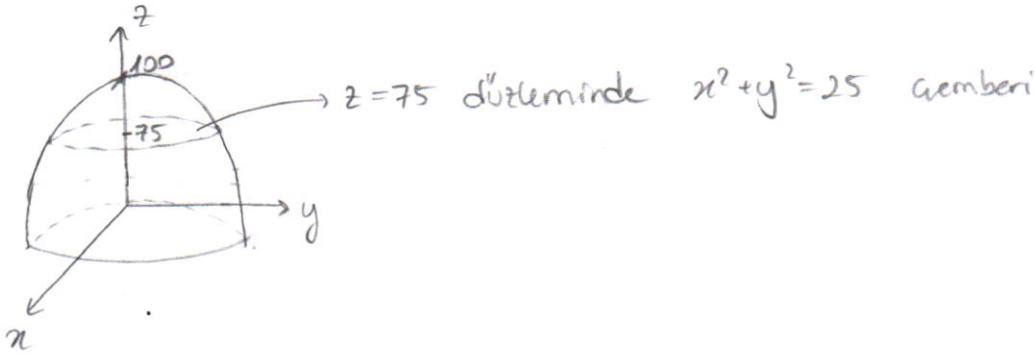
$$f(x,y) = 75 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \text{ çemberi}$$



Kontur Eğrisi

Uzayda $z = c$ düzleminin bir $z = f(x,y)$ yüzeyini keşfi eğri, $f(x,y) = c$ değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y) = c$ kontur eğrisi denir.

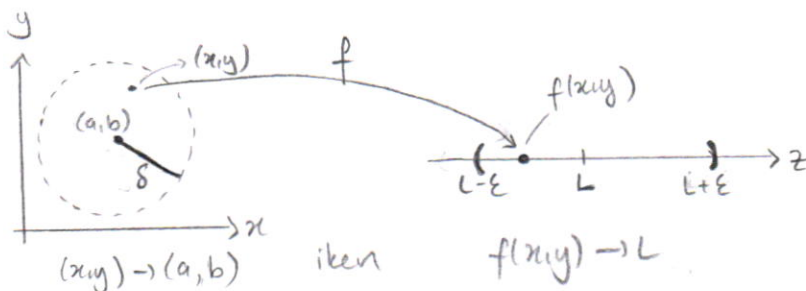
Örnek: $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyinin $f(x,y) = 75$ kontur eğrisi



İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT ve SÜREKLİLİK

Limit

Her ϵ pozitif sayısı için $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x,y) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı mevcutsa $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir denir ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ ile gösterilir.



δ yarıçaplı bir daire içindeki tüm (x,y) 'lerin görüntüsü olan $f(x,y)$, $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ aralığının içinde kalır.

⊛ Limit varsa teklerir.

⊛ $y=f(x)$ in $x=a$ 'da limiti varsa a nin hem sağ hem de sol limiti birbirine eşittir. $z=f(x,y)$ nin bir (a,b) noktasında limitinin olması için (a,b) 'ye nasıl yaklaşırsak yaklaşıalım, limitin sonucu aynı olmalıdır.

Limit Kuralları: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} p(x,y) = M$ ise

1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) \pm p(x,y)) = L \pm M$

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{p(x,y)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k f(x,y) = kL$ (k : sabit)

4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y))^n = L^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Örnek: $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y}{x+y^2} = \frac{1}{3}$

Örnek: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\underbrace{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}_{=x-y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$

Örnek: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Her $\epsilon > 0$ için $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{bilinen}} < \delta$ iken $\underbrace{\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right|}_{\text{olması istenen}} < \epsilon$ olacak şekilde bir $\underbrace{\delta = \delta(\epsilon) > 0}_{\text{bulunacak}}$ sayısı var mı?

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{4y^2}{x^2+y^2} |x| \leq \frac{4(x^2+y^2)}{x^2+y^2} |x| = 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = \epsilon$$

$\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{4} > 0 \Rightarrow$ Yani $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ 'dır.

İki Kat Limit (Ardışık Limit)

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ için, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = L_1$ ve $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = L_2$ olsun.

a) $L_1 = L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında iki kat limiti vardır.

(Bunu söylemek $f(x,y)$ nin (a,b) 'de limitinin var olduğunu garanti etmez)

b) $L_1 \neq L_2$ ise $f(x,y)$ nin (a,b) noktasında iki kat limiti yoktur, dolayısıyla limiti yoktur.

Limitin Olmadığını Göstermek için Gift Yol testi:

Eğer bir (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşırsa farklı limitleri varsa $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ mevcut değildir.

Örneğin, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limitinin mevcut olmadığını göstermek için,

1.yol: İki kat limitin mevcut olmadığını gösterilebilir.

2.yol: $\left. \begin{array}{l} y=x \\ y=x^2 \\ y=x^3 \\ \vdots \end{array} \right\}$ yollarından ikisi boyunca alınan limitlerin farklı olduğu gösterilebilir.

3.yol: $\left. \begin{array}{l} y=kx \\ y=kx^2 \\ y=kx^3 \\ \vdots \end{array} \right\}$ yollarından biri ile alınan limitin sonucunun k 'ya bağlı olduğu gösterilerek limitin mevcut olmadığını söylenilebilir.

Örnek: $f(x,y) = \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2}$ $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

1.yol: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2} \right) = 3$
 $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 + x^2} \right) = -\frac{1}{3}$ \neq iki kat limit olmadığından mevcut değil

2.yol: $y=x$ boyunca limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x^2}{3x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$
 $y=x^2$ boyunca limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x^4}{3x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 - x^2)}{x^2(3x^2 + 1)} = 3$ \neq Limit mevcut değil

3. yol: $y=kx$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - k^2 x^2}{3k^2 x^2 + x^2} = \frac{3-k^2}{3k^2+1}$: sonucu k 'ya bağlı, limit mevcut değil

Örnek: $f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

$y=kx^2$ için $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 k x^2}{x^4 + k^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k x^4}{x^4 (1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$: sonucu k 'ya bağlı, limit mevcut değil.

Süreklilik

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu ;

- (1) (a,b) noktasında tanımlı
(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ mevcut
(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$
- ise (a,b) noktasında sürekli.

* Bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise, o fonksiyon Sürekli.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki sürekliliğini araştırınız.

(1) $f(0,0) = 0$ olduğundan $(0,0)$ 'da tanımlı

(2) $y=kx$ boyunca limite bakalım: (iki kat limit sonucu vermediğinden)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x k x}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k x^2}{x^2 (1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$ olduğundan limit k 'ya bağlı olup mevcut değildir.

Dolayısıyla $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ 'da sürekli değildir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da sürekli olduğunu gösteriniz. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ old. gösterilmeli

(1) ✓

(2) Her $\epsilon > 0$ için $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ iken $\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$ o.ş. $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ var mı?

$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x| |x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} < \frac{|x| (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$

$\Rightarrow \delta = \epsilon > 0$ seçilirse $L=0 \Rightarrow$ sürekli ✓

Bileşkeleğin Sürekliliği: Eğer f fonksiyonu (a,b) 'de sürekli ve p de $f(a,b)$ 'de sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise $h(x,y) = p(f(x,y))$ ile tanımlanan bileşke fonksiyon $h = p \circ f$, (a,b) 'de sürekliğir.

Örneğin, e^{x-y} , $\cos \frac{xy}{x^2+1}$, $\ln(1+x^2y^2)$ her (x,y) noktasında sürekliğir.

İki'den fazla değişkenli fonksiyonlar: İki değişkenli fonksiyonlar için yapılan limit ve süreklilik tanımları ile soruları ũa veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerliğir.

Örneğin, $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{2}$

$\ln(x+y+z)$ ve $\frac{y \sin z}{x-1}$ gibi fonk-lar tanım kümeleri boyunca sürekliđir.