MAT 1072 / Matematik 2

Diziler / Seriler

(1) $\{a_n\} = \left\{ n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n}) \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\ln e^n - \ln\sqrt{1+e^{2n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right)$$

$(\infty - \infty)$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right) - \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right) = 0$$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ise $\left\{\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+a_n-4}{a_n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+a_n}+2} = \frac{1}{4}$$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e^n+n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Kök testine göre yakınsaktır.}$$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(2n-1)!}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(2n+1)!}}{\frac{n^3}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n+1)\cdot 2n \cdot \cancel{(2n-1)!}} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Oran testine göre yakınsaktır

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n^2}{n+n^4}$ serisinin karakteri?

$\left(\frac{2}{n+n^4} < \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to\,\text{ıraksak}} \Rightarrow \text{test sonuç vermez}\right)$

$$\cos n^2 \le 1 \Rightarrow \frac{1+\cos n^2}{n+n^4} \le \frac{1+1}{n+n^4} = \frac{2}{n+n^4} < \frac{2}{n^4}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1+\cos n^2}{n+n^4} < \underbrace{\sum \frac{2}{n^4}}_{\text{yakınsak}} \quad p=4>1 \Rightarrow \text{Mukayese testine göre yakınsak}$$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ serisinin karakteri?

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ n-terim testine göre ıraksak

⑦ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^9+1}}$ Serisinin karakteri?

$\sum \frac{1}{k^{3-1}} = \sum \frac{1}{k^2}$ (p=2, yakınsak) serisi ile limit testi uygulayalım.

$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^9+1}}}{\frac{1}{k^2}} = 2 \neq 0, \infty$ ⇒ Seriler aynı karakterli

⇒ limit testine göre yakınsak

⑧ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ → arc tan'in türevine benzio serisinin karakteri? (Mukayese, limit, oran, n. terim testleri sonuç vermez)

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ → pozitif, → sürekli, → azalan $(f'(x)<0)$ } integral testi kullanılabilir.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} \right) = \lim_{R\to\infty} \arctan u \Big|_{\ln 2}^{\ln R}$$

$\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$

$x=2 \Rightarrow u = \ln 2$

$x=R \Rightarrow u = \ln R$

$= \lim_{R\to\infty} (\arctan \underbrace{\ln R}_{\infty} - \arctan \ln 2)$

$= \frac{\pi}{2} - \arctan \ln 2$ (sayı)

integral yakınsak olduğundan seri yakınsaktır.

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ serisinin karakteri?

$\frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}}$ $\quad r = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ yakınsak

Mukayese testine göre seri yakınsaktır

$\left(\frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{n} \right.$ fakat $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan sonuç vermez$\left. \right)$

(10) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}}$ serisinin karakteri?

$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}} = \infty$ ve $\sum_{k=1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ $p=\frac{1}{3}<1$ ıraksak olduğundan limit testine göre seri ıraksaktır.

$\left(\frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}} < \frac{1+k}{\sqrt[3]{k}} \leq \frac{k+k}{\sqrt[3]{k}} = k^{2/3} \right.$ $\sum k^{2/3}$ n. terim testine göre ıraksak $\Rightarrow$ Mukayese testi sonuç vermez)

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ile limit testi uygulayalım.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0, \infty$ seriler aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan limit testine göre seri ıraksaktır.

(12) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisinin karakteri?

$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2\ln k}}{\frac{1}{k^2}} = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $p=2>1$ yakınsaktır

Limit testine göre seri yakınsaktır

$\Big($ $\ln k < k \Rightarrow \frac{1}{k^2\ln k} > \frac{1}{k^3}$ $\sum \frac{1}{k^3}$ yakınsak $\Rightarrow$ mukayese testi sonuç vermez

$k=2$ için $\ln k \not> 1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \ln k} < \frac{1}{k^2}$ eşitsizliği $\forall k$ için sağlanmaz.

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2\ln k} = \frac{1}{4\ln 2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ şeklinde yazılırsa

mukayese testinden yakınsak olduğu söylenebilir$\Big)$

(*) $k>e$ iken $\ln k > 1$ 'dir.

(13) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ serisinin karakteri? (Kök testinde $L=1$ olacağından sonuç vermez)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterli}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $p=3>1$ yakınsak $\Rightarrow$ Limit testine göre seri yakınsaktır.

(14) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{oran testinden seri yakınsak}$$

(15) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{oran testinden seri yakınsak}$$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{kök testinden seri yakınsak}$$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+e^n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n+e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}\left(\frac{n}{e^n}+1\right)} = 1 \Rightarrow n\text{. terim testinden ıraksak}$$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$ serisinin karakteri?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{n-1} \text{ : geometrik seri }, \quad |r| = \frac{1}{\ln 2} > 1 \Rightarrow \text{ıraksak}$$

$$0 = \ln 1 < \ln 2 < \ln e = 1$$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot n^3$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-n} \cdot n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{=1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{kök testinden yakınsak}$$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$ serisinin karakteri?

$$\frac{2}{1+e^n} < \frac{2}{e^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n} < 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} \quad |r| = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

$\Rightarrow$ Mukayese testinden seri yakınsak

(21) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ serisinin karakteri?

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ pozitif, azalan, sürekli $\Rightarrow$ integral testi uygulanabilir

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln R}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \text{integral yakınsak}$$

$\Rightarrow$ seri yakınsak

(22) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ serisinin karakteri?

$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ n. terim testinden ıraksaktır

(23) $\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayın.

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \Rightarrow S_n = \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)!} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+1+1-1}{(n+2)!} = \frac{n+2}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2!} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{(n+1)!}} - \frac{1}{(n+2)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ seri yakınsaktır.

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln((n+1)(n+2)) - \ln(n(n+3)) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$$

$$\begin{aligned} S_n = &\cancel{\ln 2} + \ln 3 - \overset{0}{\ln 1} - \cancel{\ln 4} \\ &+ \ln 3 + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 5} \\ &+ \cancel{\ln 4} + \cancel{\ln 5} - \cancel{\ln 3} - \ln 6 \\ &\vdots \\ &+ \ln(n+1) + \ln(\cancel{n+2}) - \cancel{\ln n} - \ln(n+3) \end{aligned}$$

$$S_n = \ln 3 + \ln(n+1) - \ln(n+3)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\ln 3 - \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)\right)$$

$$= \ln 3$$

(25) 5,232323.... sayısının serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$5,232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots$$

$$= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \qquad a = \frac{23}{100} \qquad r = \frac{1}{100}$$

$$|r| = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$$

(Seri yakınsak)

$$5,232323\ldots = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

(26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \frac{(1+n)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \sum_{n=1} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^3}} - \cancel{\frac{1}{3^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3^3}} - \cancel{\frac{1}{4^3}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)^3}} - \cancel{\frac{1}{n^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = 1$$

(27) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayınız.

$$S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdots \frac{\cancel{n-1}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Seri $-\infty$'a ıraksar.

(28) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ serisinin karakteri?

Mutlak yakınsak mı? Yani, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçelim. $\left(p=\frac{1}{2}>1 \text{ ıraksak}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0, \infty \Rightarrow$ Limit testine göre iki seri aynı karakterli olup, $\sum \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ ıraksaktır.

Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ mutlak yakınsak değildir.

Şartlı yakınsak mı?

- $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} > 0$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}\cdot n}}{\frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} = 0$

olduğundan Alterne seri testine göre seri yakınsaktır, mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos n\pi}{2n+3}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos n\pi}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{2n+3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{100}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$ yakınsak mı?

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = 50 \neq 0, \infty$, $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak

olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$ serisi ıraksaktır $\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{100}{2n+3}$ mutlak yakınsak değildir.

- $a_n = \frac{100}{2n+3} > 0$

- $a_{n+1} = \frac{100}{2n+5} < \frac{100}{2n+3} = a_n$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{100}{2n+3} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{2n+3}$ yakınsaktır.

Mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

30) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3+2^n}$ serisinin mutlak/şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3+2^{n+1}} \cdot \frac{3+2^n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\left(\frac{3}{2^n}+1\right)}{\cancel{2^n}\left(\frac{3}{2^n}+2\right)} \cdot |x| = \frac{|x|}{2} < 1$$

$\Rightarrow -2 < x < 2$: mutlak yak. aralığı

$x=2$ için;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\left(\frac{3}{2^n}+1\right)} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ n. terim testine göre ıraksaktır.

$x=-2$ için;

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = 1 \neq 0$ olduğundan alterne seri testine göre ıraksaktır.

Mutlak yakınsak : $(-2,2)$

Şartlı yakınsak : yok

Iraksak : $\mathbb{R} - (-2,2)$

31) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin mutlak/şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini bulunuz.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \ln k}{(3-2x)^k} \right| = |3-2x| \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \right)$$

$$= |3-2x| \cdot 1 \cdot 1 = |3-2x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3-2x < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$x=1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi;

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $p=2>1$ (yakınsak) $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0$ ve $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan limit testine göre $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi de yakınsaktır.

$x=2$ için $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k}$ alterne serisi, $\sum_{k=2}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ yakınsak olduğundan mutlak yakınsaktır.

Mutlak yakınsak : $[1,2]$

Şartlı yakınsak : yok

Iraksak : $\mathbb{R} - [1,2]$

(32) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $|x|<1$ serisini kullanarak $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+3k+2)x^{k+3}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \xrightarrow[\text{çarp}]{x^2 \text{ ile}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad |x|<1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)x^{k+1} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \quad |x|<1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^{k} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x|<1$$

$$\xrightarrow[\text{çarp}]{x^3 \text{ ile}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^{k+3} = \frac{2x^3}{(1-x)^3}, \quad |x|<1$$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+2}{3}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{n-1} \qquad a = \frac{x+2}{3}, \quad |r| = \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1 \Rightarrow -3 < x+2 < 3$$

$$\Rightarrow \boxed{-5 < x < 1}$$

yakınsaklık aralığı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \boxed{\frac{x+2}{1-x}}$$

(toplamı) yakınsadığı fonk.

(34) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+3}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1 \xrightarrow[\text{çarp}]{x^3 \text{ ile}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x}, \quad |x|<1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}, \quad |x|<1$$

$$\xrightarrow[\text{çarp}]{x \text{ ile}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+3} = \underbrace{\frac{3x^3(1-x)+x^4}{(1-x)^2}}_{\text{toplamı}}, \quad \underbrace{|x|<1}_{\text{yak. aralığı}}$$

(35) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x|<1$ ifadesinden yararlanarak $f(x) = x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

- $x \to -x^2$ dönüşümü ile, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, $|-x^2|<1$ $\Rightarrow |x|<1$.

- integral alınırsa, $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $|x|<1$

$-1<x<1$ olduğundan $x=0$ seçilebilir.

$x=0 \Rightarrow c=0$.

- $x \to \frac{x}{2}$ dönüşümü ile, $\arctan\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)}$, $\left|\frac{x}{2}\right|<1 \Rightarrow |x|<2$

- x ile çarpılırsa, $f(x) = x\arctan\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(2k+1)}$, $|x|<2$

(36) $f(x) = xe^{-2x}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız. Elde ettiğimiz seriden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ toplamını bulunuz

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$$

$$f(x) = xe^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$$

$x=1$ yazılırsa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} = 1.e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

(37) $f(x)=\sinh 2x$ ve $g(x)=\cosh 2x$ fonksiyonlarının Maclaurin serilerini yazınız.

$$f(x)=\sinh 2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!} \quad \text{ve} \quad e^{-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sinh 2x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}\left(1-(-1)^n\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=2m+1 & \text{ise} & 1-(-1)^n=2 \\ n=2m & \text{ise} & 1-(-1)^n=0 \end{array}\right\} \sinh 2x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$g(x)=\cosh 2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}\left(1+(-1)^n\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=2m+1 & \text{ise} & 1+(-1)^n=0 \\ n=2m & \text{ise} & 1+(-1)^m=2 \end{array}\right\} \cosh 2x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m}x^{2m}}{(2m)!}$$

(38) $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun $x=\frac{\pi}{4}$ noktasında 3. mertebe Taylor polinomunu yazınız.

$$f(x)=\tan x, \quad f'(x)=\sec^2 x, \quad f''(x)=2\sec^2 x\tan x$$

$$f'''(x)=4.\sec x.\sec x\tan x.\tan x+2\sec^2 x.\sec^2 x = 4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=1, \quad f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=2, \quad f''\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=4, \quad f'''\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=16$$

$$P_3(x)=1+2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)+\frac{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{16\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}$$

$$P_3(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(x-a)+\frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(x)}{3!}(x-a)^3$$

Not: $f(x)=\tan x$ Maclaurin serisi:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=2 \\ f^{(IV)}(0)=0 \\ f^{(V)}(0)=16 \\ \vdots \end{array}\right\} f(x)=\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots$$

(39) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ fonksiyonunun Maclaurin açılımının genel terimini bulunuz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$x \to -t^2 \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = \frac{1-\left(1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\cdots\right)}{t^2} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \cdots$$

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \cdots\right)dt = t - \frac{t^3}{3.2!} + \frac{t^5}{5.3!} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3.2!} + \frac{x^5}{5.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!}$$

(40) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2!.4}-\frac{x^8}{3!.8}+\cdots\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} - \cdots}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8}$$

(41) $$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \tan x}{\tan x + 3x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right) - \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\cdots\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\cdots\right)+3x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{6} - \cdots}{3x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1+\cancel{\frac{x}{6}}^{\,0} - \cancel{\cdots}^{\,0}\right)}{3x^2\left(1+\cancel{\frac{x}{9}}_{\,0}+\cancel{\cdots}_{\,0}\right)} = \frac{1}{3}$$

(42) $f(x) = e^x - e^{-x}$ ise $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = ?$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}\right\}$$

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(1+\cancel{\frac{x^2}{3!}}^{\,0}+\cancel{\frac{x^4}{5!}}^{\,0}+\cancel{\cdots}^{\,0}\right)}{x}$$

$$= 2$$