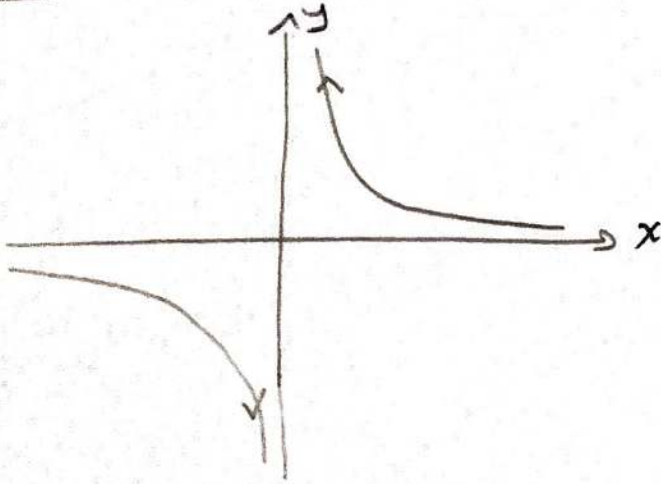


Sonuç Limitler

Ör: $y=f(x)$, $f(x)=\frac{1}{x}$



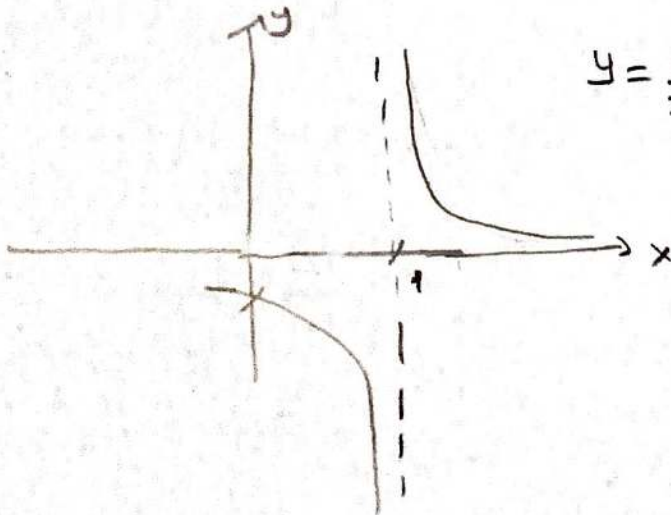
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ yoktur.}$$

Ör:



$$y = \frac{1}{x-1}, y = f(x)$$

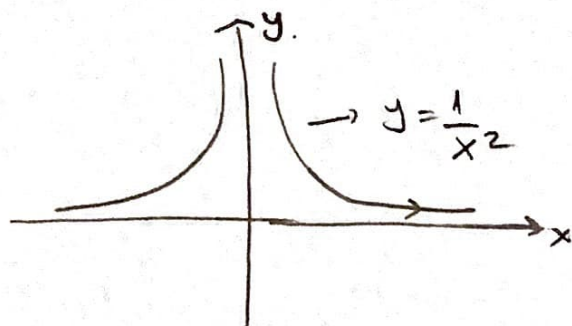
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ yoktur.}$$

Ön: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $y = f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

★
★

Ön:

$$a.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4}$$

$$b.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$c.) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} = -\infty$$

$\begin{matrix} +\infty & -\frac{1}{4} \\ \underbrace{1}_{x-2} & \underbrace{x-3}_{x+2} \end{matrix}$

$$d.) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} = +\infty$$

$\begin{matrix} -\infty & -\frac{1}{4} \\ \underbrace{1}_{x-2} & \underbrace{x-3}_{x+2} \end{matrix}$

$$e.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \quad \text{limit yok}$$

$$f.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

Süreklilik

* Bir Noktada Süreklilik

(iç nokta)
Tanım: c noktası $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktası olmak üzere eğer.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

ise $f(x)$ fonksiyonu c iç noktasında süreklidir.

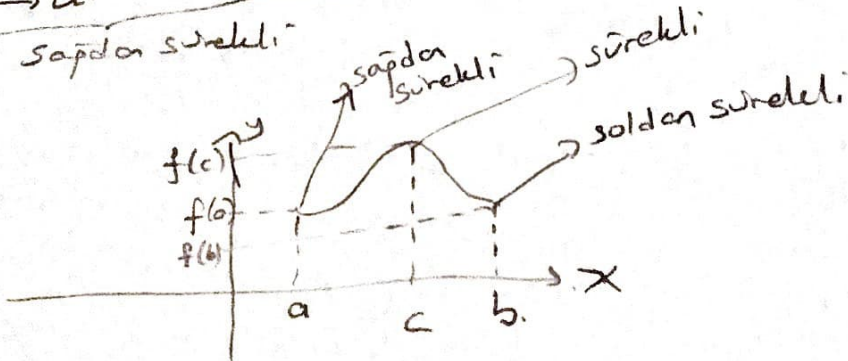
*NOT: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ \rightarrow $f(x)$ $x=c$ 'de tanımlı.
 \rightarrow $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ limiti mevcut
 \rightarrow $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Tanım: (uç nokta)
Bir $y=f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşullarda tanım kümesinin bir sol uç noktası a 'da süreklidir veya bir sağ uç noktası b 'de süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ veya } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

sıradan süreklilik soldan süreklilik

*NOT



Süreklilik Testi

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa bir $x=c$ noktasında sürekli

i.) $f(c)$ vardır. (c , f 'in tanım kümesindedir.)

ii.) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ mevcuttur.

iii.) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

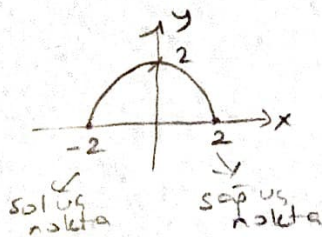
* NOT: Eğer bir f fonksiyonu bir c noktasında sürekli değilse f fonksiyonu c 'de sürekli değildir.

Eğer f fonksiyonu için

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow$ tanım aralığının $x=c$ noktasında sağdan sürekli.

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) \Rightarrow$ tanım aralığının $x=c$ noktasında soldan sürekli.

Örn: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında sürekli midir?



* $\forall c \in (-2, 2)$ için $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-c^2}$ olduğu için.

$f(x)$ fonksiyonu tüm iç noktalarda sürekli.

* $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2) \Rightarrow$ sağdan sürekli

* $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2) \Rightarrow$ soldan sürekli

dolayısıyla $[-2, 2]$ aralığında $f(x)$ sürekli.

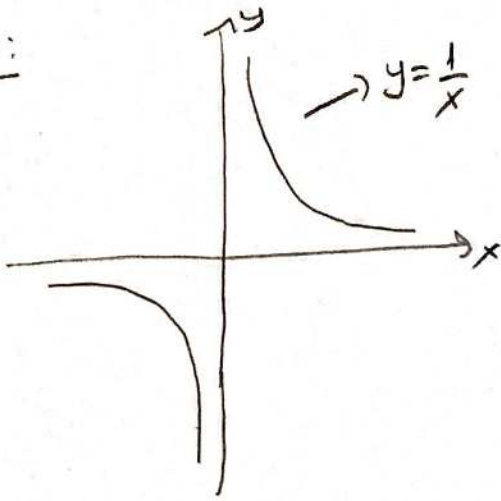
-2: sol uç nokta
2: sağ uç nokta

$(-2, 2)$: iç noktalar

* Sürekli Fonksiyon

Bir fonksiyonun bir aralıkta sürekli olması için gerek ve yeter şart aralığın her noktasında sürekli olmasıdır.

* Ör:



fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur sadece $x=0$ noktasında süreksizdir.

* Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x=c$ de sürekli ise. aşağıdaki işlemlerde $x=c$ 'de süreklidir.

i.) $f(x) \pm g(x)$

iv.) $f(x) \cdot g(x)$

ii.) $k \cdot f(x)$, (k herhangi bir sayı)

v.) $[f(x)]^n$, ($n \in \mathbb{Z}^+$)

iii.) $f(x)/g(x)$

vi.) $\sqrt[n]{f(x)}$, ($n \in \mathbb{Z}^+$; c 'yi içeren açık aralıkta tanımlı olmak koşuluyla)

* Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu c 'de sürekli ve g fonksiyonu $f(c)$ de sürekli ise o zaman $g \circ f$ de c 'de süreklidir.

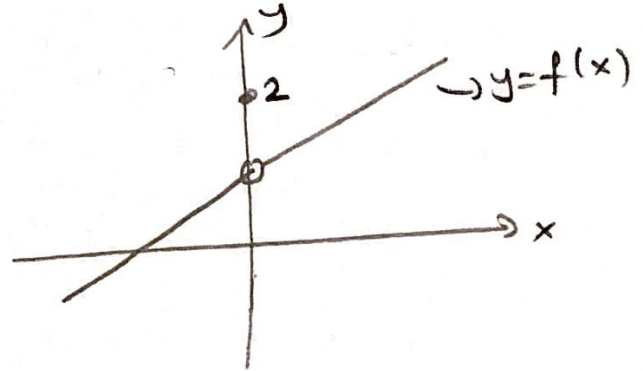
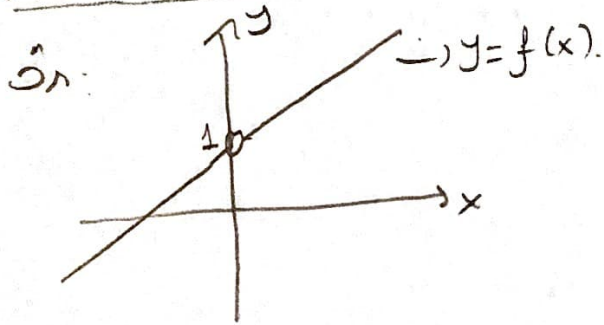
Ör: Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerinin tamamında sürekli olduklarını gösteriniz.

i.) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$ ve $g(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonlarının bileşkesidir tanım kümesinde sürekli'dir.

ii.) $y = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right|$, $x \neq \pm\sqrt{2}$ için sürekli'dir. Mutlak değer ve bölüm fonksiyonunun bileşkesidir.

Sürekli'lik Çeşitleri

*Kaldırılabilir Sürekli'lik

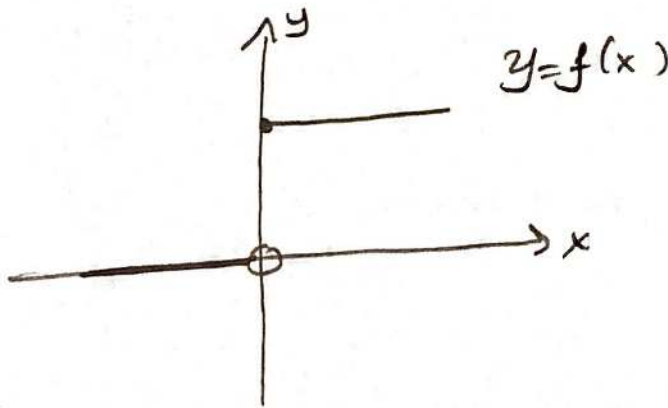


" $x=0$ noktasında sürekli'z kaldırılabilir sürekli'lik"

✱ Bir $f(x)$ fonksiyonu bir $x=a$ noktasında limiti mevcut fakat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ veya $f(a)$ tanımlanmamış ise $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında kaldırılabilir sürekli'liğe sahiptir deriz

* Sıramalı Süreksizlik

Ön:



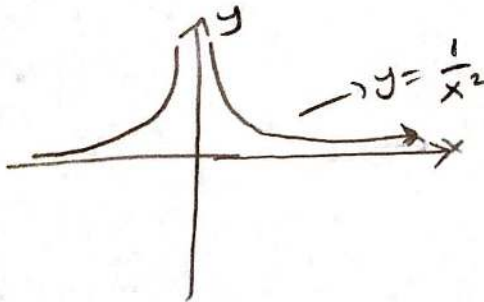
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limit yok.

" $x=0$ noktasında fonksiyon sıramalı süreksizliğe sahiptir"

* Bir fonksiyonun ^{bir noktada} tek taraflı limitleri var fakat değerleri birbirinden farklı ise fonksiyon 0 noktada süreksizdir. bu türden süreksizliğe sıramalı süreksizlik denir.

* Sonsuz Süreksizlik

Ön:



" $x=0$ noktasında fonksiyon sonsuz süreksizliğe sahiptir"

* Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti $+\infty$ veya $-\infty$ ise bu türden süreksizliğe sonsuz süreksizlik denir

Örn:

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$
noktasında sürekli midir?

i.) $f(0) = 2 \checkmark$

ii.) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2+x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ olduğu için}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ mevcut değil. dolayısıyla $x=0$
noktasında sürekli değildir.

Ör:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ noktasında sürekli
midir? Süreksiz ise
süreksizlik geldi?

i.) $f(0)=2 \checkmark$

ii.) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \checkmark$

iii.) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 2 = f(0)$

dolayısıyla $x=0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu
süreksizdir. Kaldırılabilir süreksizlik var.

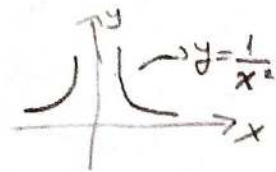
Ör: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? süreksiz ise
geldi?

i.) $f(0)$ da tanımlı

ii.) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



$x=0$ 'da sonsuz = sonsuz süreksizlik var.

Bir Noktaya Doğru Sıralı Fonksiyonlar

Örn: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x=0$ noktası dışında
her noktada sürekli bir fonksiyondur.

Eğer

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{eğer } x, f \text{ in tanım kümesinde} \\ L, & \text{eğer } x=c \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x)$, $x=0$ 'da ~~da~~
sürekli olacaktır.

tanım kümesini genişletmek mümkün. $F(x)$ 'le $f(x)$ 'in
 $x=0$ 'da sürekli genişlemesi denir.

Örn:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ noktasında
sürekli midir?
sürekliyse genişletir?
sürekli bir genişlemesidir?

i) $f(0)=2$, ✓

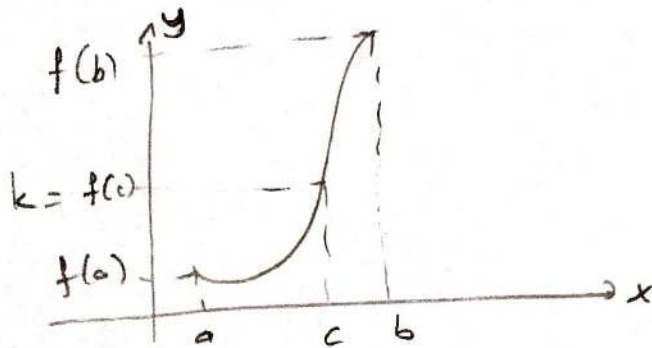
ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$ ✓

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0) \Rightarrow$ sürekli değildir. (kaldırılabilir
sürekli)

* $F(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$, $x=0$ da sürekli hale
getirilir

Sürekli Fonksiyonlar İçin Ara Değer Teoremi

Eğer f , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ve k da $f(a)$ ve $f(b)$ arasında herhangi bir değer ise bu durumda $k = f(c)$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığında bazı c 'ler vardır.



* Kök bulmak için bir sonuç.

Örn: $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin 1 ve 2 arasında bir kökünü olduğunu gösteriniz.

* $f(x) = x^3 - x - 1$, $[1, 2]$ aralığında sürekli

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1, \quad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5.$$

$k = 0$, $f(1)$ ve $f(2)$ arasında kalan bir değerdir

yani $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 5$ olduğundan Ara Değer

Teoremine göre $1 < c < 2$ olacak üzere $f(c) = 0$

olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.