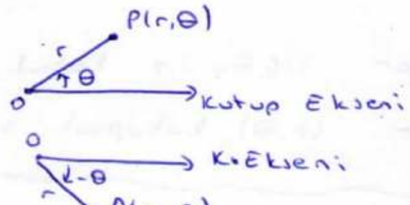
KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

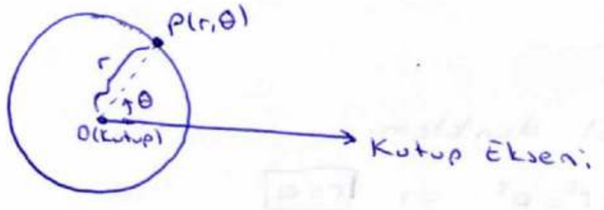
Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktadan çıkan bir ışın seçelim. Noktaya kutup, ışına ise kutup ekseni denir. Bu durumda düzlemdeki herhangi bir P noktasını $(r;\theta)$ kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz. Burada r, P'nin orjine olan yönlü uzaklığı; θ'da kutup ekseni ile OP arasındaki yönlü açıdır.



Pozitif $\theta \rightarrow$ Saatin tersi yönünde
Negatif $\theta \rightarrow$ Saat yönünde ölçülür.

★ (r,θ) kutupsal koordinatına karşılık gelen P noktasını göstermek için aşağıdaki yol izlenir:

(r,θ) : Kutup eksenine θ derece açı ile duran doğru üzerinde, kutuptan r birim uzaklıkta bulunan noktadır.



r: Kutuptan P'ye olan yönlü uzaklık

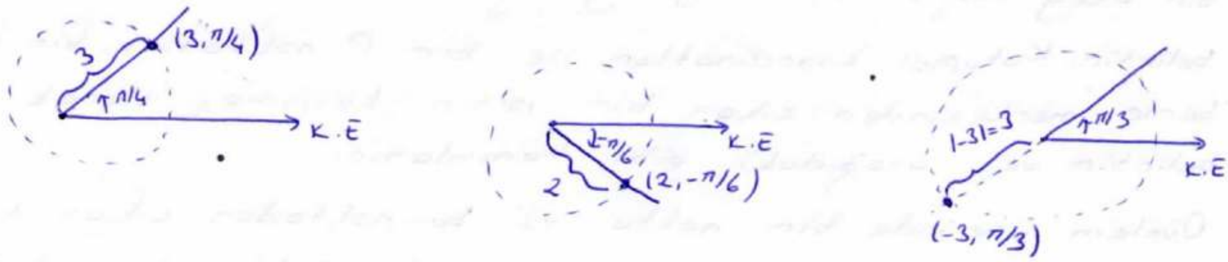
θ: Kutup ekseninden OP'ye olanan yönlü açı

★ Bir noktayı temsil eden sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

★ Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

★ Eğer $r<0$ ise: P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta+\pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

* $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ noktalarını kutupsal koordinat düzleminde gösteriniz.

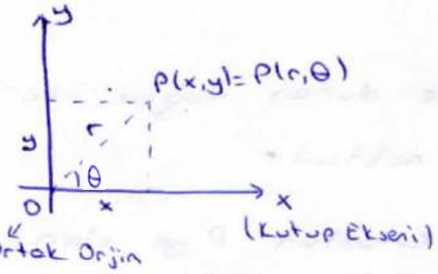


* $(r,\theta) = (-r, \theta+\pi) = (-r, \theta+3\pi) = \dots = (-r, \theta+(2k+1)\pi)$

* $(r,\theta) = (r, \theta+2\pi) = (r, \theta+4\pi) = \dots = (r, \theta+2k\pi)$

* Eğer $0 \le \theta \le 2\pi$, $r > 0$ kabul edilirse düzlemin her noktasına tek bir (r,θ) kutupsal çifti karşılık gelir.

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koor. Arasındaki Bağıntılar



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

* $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi?

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2 = r^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{r=a}$

* $r^2 = a^2\cos 2\theta$'nın kartezyen denklemi?

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

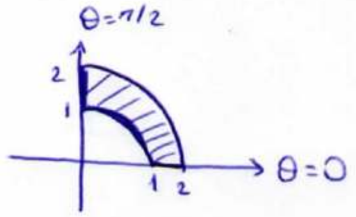
$$r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right) = \frac{a^2}{r^2}(x^2-y^2)$$

$(r^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad r^2 = x^2+y^2$ olduğundan

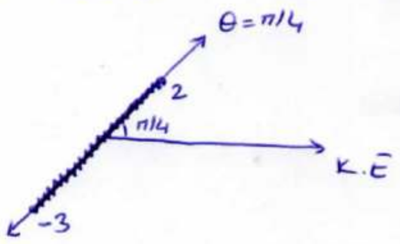
$$\boxed{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)}$$

(*) Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz. K:3

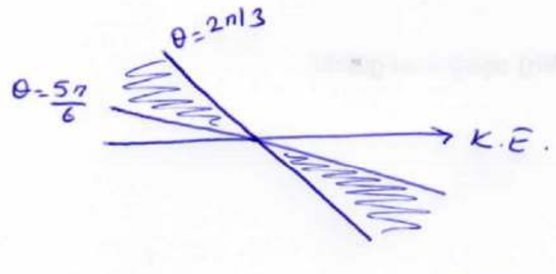
a) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



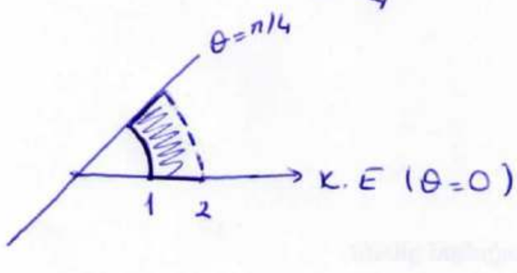
b) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$



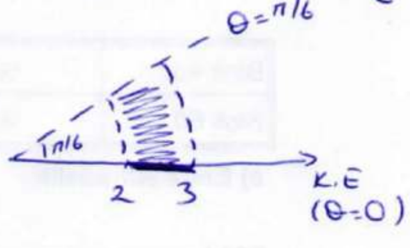
c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



d) $1 \leq r < 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



e) $2 < r < 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



Ⓚ $(x-a)^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi?

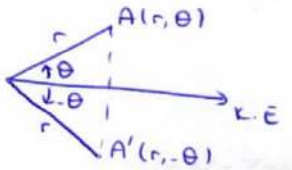
$x^2-2xa+a^2+y^2=a^2 \Rightarrow x^2-2xa+y^2=0$ $\qquad x=r\cos\theta$, $\quad y=r\sin\theta$

$$r^2\cos^2\theta-2ar\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$$

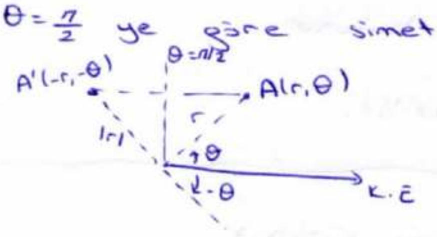
$$r^2=2ar\cos\theta \Rightarrow \boxed{r=2a\cos\theta}$$

Simetri Özellikleri

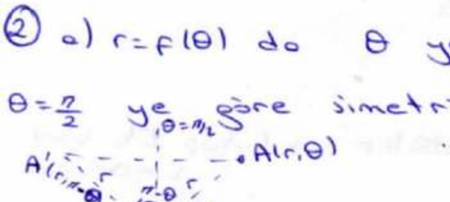
① a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazdığımızda $f(-\theta)=f(\theta)=r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



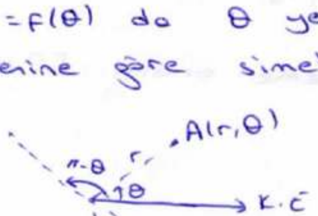
b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazılınca $f(-\theta)=-f(\theta)=-r$ oluyor ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



② a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=f(\theta)=r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



③ a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi+\theta$ yazılınca $f(\pi+\theta)=f(\theta)=r$ ise orjine (kutuba) göre simetri vardır.

b) (r,θ) eğri üzerinde iken $(-r,\theta)$ da eğri üzerinde ise orjine göre simetri vardır.

$A'(r,\pi+\theta)=A'(-r,\theta)$

Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

$r=f(\theta)$ nın grafiğini çizerken:

① Eğri periyodik ise periyodu bulunur.

② Simetri durumu incelenip çizim aralığı belirlenir.

③ $r=f(\theta)$ nın değişimi türev yardımıyla incelenir.

④ Bazı θ'lar için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.

⑤ θ, r, r' içeren tablo yapılıp eğri çizilir.

ⓧ $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

① Periyod : 2π $\to [0,2\pi]$ de çizilir.

② $\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta)=a(1+\cos(-\theta))=a(1+\cos\theta)=f(\theta)=r \Rightarrow$ Kutup Ek. göre simetri var

$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta)=a(1+\cos(\pi-\theta))=a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 2. simetri özelliği yok

$\theta \to \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta)=a(1+\cos(\pi+\theta))=a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 3. " " "

Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $[0,\pi]$

③ $f'(\theta)=-a\sin\theta<0$ $(\theta\in(0,\pi)$ için$)$

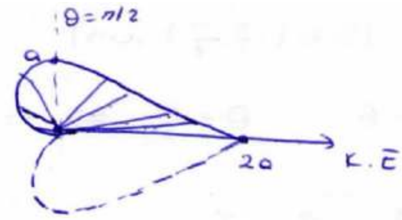
④ $\theta=0 \Rightarrow r=2a$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=a$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$	$-$	
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



K. 6

---

* $r = a(1-\sin\theta)$ $(a>0)$ eğrisini çiziniz.

1) Periyod: $2\pi \to [0, 2\pi]$ de çizelim.

2) $\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1-\sin(-\theta)) = a(1+\sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. S. YOK

$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1-\sin(\pi-\theta)) = a(1-\sin\theta) = f(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var

$\theta = \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1-\sin(\pi+\theta)) = a(1+\sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3.S. YOK

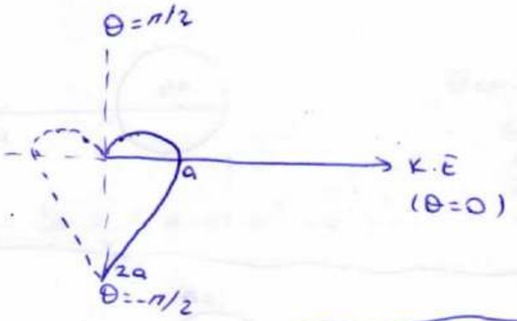
$\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3) $f'(\theta) = -a\cos\theta < 0$ $\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right.$ için$)$

4) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$ $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$ $\theta = 0 \Rightarrow r = a$

5)

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'		$-$	$-$
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



---

* $r = 2 - 4\sin\theta$ eğrisini çizin.

$\theta \to -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 2 - 4\sin(-\theta) = 2 + 4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. simetri yok

$\theta \to \pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta) = 2 - 4\sin(\pi-\theta) = 2 - 4\sin\theta = f(\theta)$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre s. var.

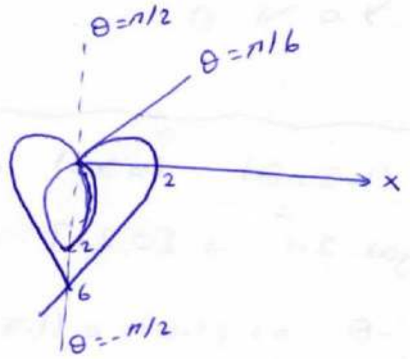
$\theta = \pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta) = 2 - 4\sin(\pi+\theta) = 2 + 4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3. Sim. yok.

Periyod 2π, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var $\Rightarrow$ inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$r' = -4\cos\theta < 0$ $\quad (\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için$)$

$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6 \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2 \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 0 \qquad \theta = 0 \Rightarrow r = 2$

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
r'		$-$		$-$		$-$	
r	6	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

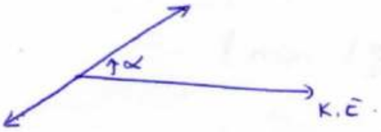


Temel Şekiller

① $r = a \Rightarrow$

Yarıçapı $|a|$ olan merkezil çember
$(x^2 + y^2 = a^2)$

② $\theta = \alpha \Rightarrow$



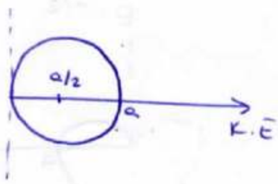
Eğimi α olan doğru

③ $r = a\cos\theta$

$r^2 = a^2\cos^2\theta$

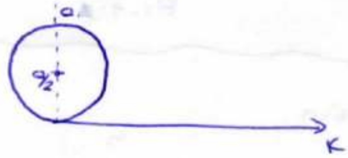
$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \frac{x^2}{r^2}$

$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 \qquad x^2 + y^2 = ax \rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



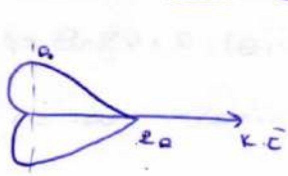
Kutup ve $(a,0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember
$\left((x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\right.$ çemberi$)$

④ $r = a\sin\theta$



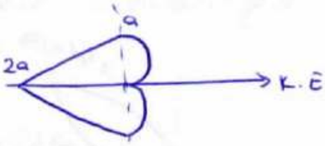
Kutup ve $(a, \frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember
$\left(x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}\right.$ çemberi$)$

⑤ $r = a(1 + \cos\theta)$
$(a > 0)$



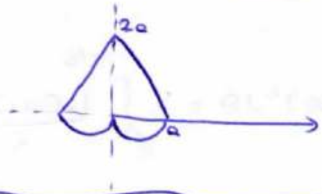
x-ekseni boyunca uzanan sivri ucu x-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

6) $r = a(1-\cos\theta)$
$(a>0)$



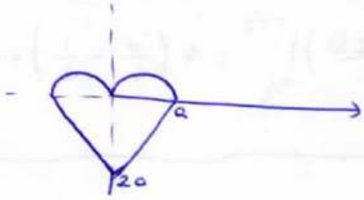
x-ekseni boyunca uzanan, sivri ucu x-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid

7) $r = a(1+\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

8) $r = a(1-\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid.

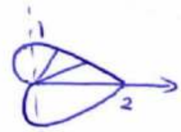
9) $r\cos\theta = a \Rightarrow x = a$ doğrusu
$r\sin\theta = b \Rightarrow y = b$ doğrusu

Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

$r=f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğrinin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ doğrularıyla sınırlandığı alan:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$$ formülü ile hesaplanır.

(*) $r = 1+\cos\theta$ eğrisinin alanı?

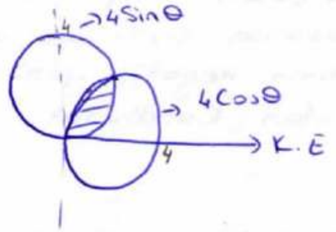


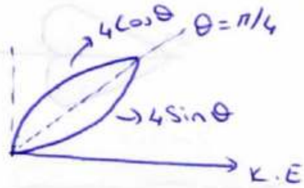
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\pi}{2}}$$

(*) $r = 4\cos\theta$ ile $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alan? (9)





$\cos\theta = \sin\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (4\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 d\theta = 8\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta + 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

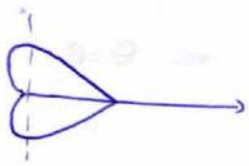
$$= 4\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} + 4\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi - 4$$

Yay Uzunluğu

$r = f(\theta)$ denklemli eğrinin $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ arasındaki yay uzunluğu

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$ formülü ile bulunur.

(*) $r = 1 + \cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$r = 1 + \cos\theta \qquad r' = -\sin\theta$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta$$

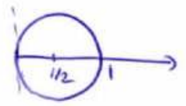
$$= 2 + 2\left[2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right] = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_\pi^{2\pi} \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 4\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi} - 4\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_\pi^{2\pi} = \boxed{8}$$

(*) $r = \cos\theta$ çemberinin uzunluğu?



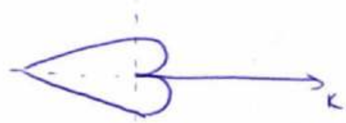
$r = \cos\theta \qquad r' = -\sin\theta$

$r^2 + (r')^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 1$

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

(*) $r = 1 - \cos\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$r = 1 - \cos\theta \qquad r' = \sin\theta$

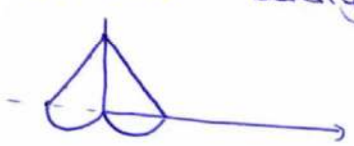
$r^2 + (r')^2 = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$

$= 2 - 2\left[1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

(*) $r = 1 + \sin\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$r = 1 + \sin\theta \qquad r' = \cos\theta$

$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= 2(1 + \sin\theta)$

$= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) =$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right| \qquad = 2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) - 1\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$

$$\frac{S}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$= -4\left[0 - 1\right] = 4 \qquad \boxed{S = 8}$