

SAYISAL TÜREV

Türev benim x fonksiyonunun zamana göre değişimidir



TÜREV NEDİR ?

- Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.

- Newton'un ikinci yasası temel bir örnek olup, bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

- Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.

- Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine göre bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimi göre ifade edilir.

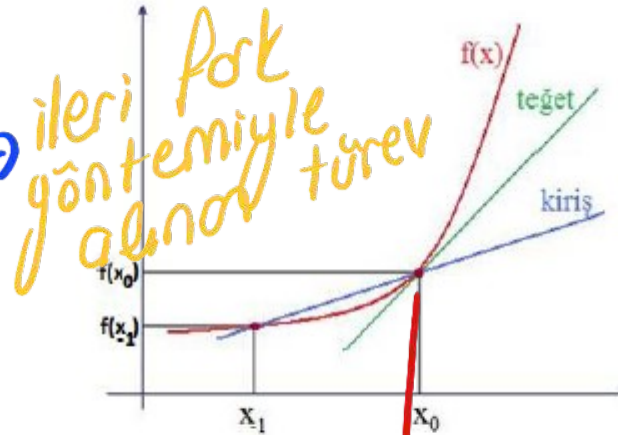
$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Bagimsiz degişken perilişim, okum gibi niceelikler
n Bagimli degişken zamandır

- ❑ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ❑ Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- ❑ Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir x noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle x noktasındaki teğetin eğimi olarak görülebilir.

$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



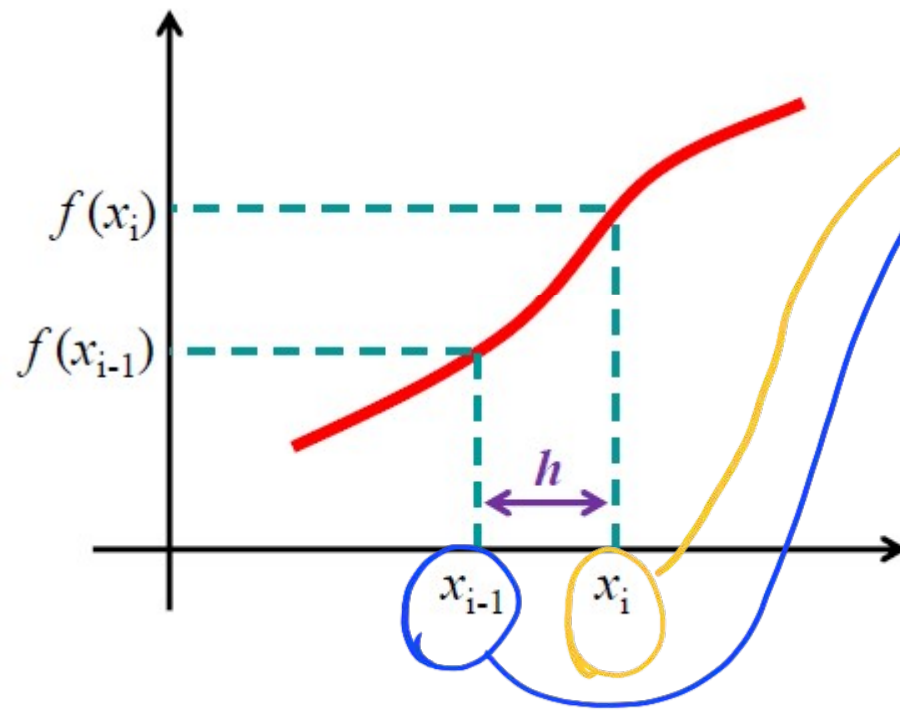
- ❑ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

Türevini almak fonksiyonun o noktadaki zordun veya zoldan limiti'nin 0'a yaklaşması demek

Ben bir noktanın türevini alabilmek
için fonksiyonun o noktadaki tegetinin
eğimini bulmam yeterli

yardımı

Geri Farklar İle Sayısal Türev

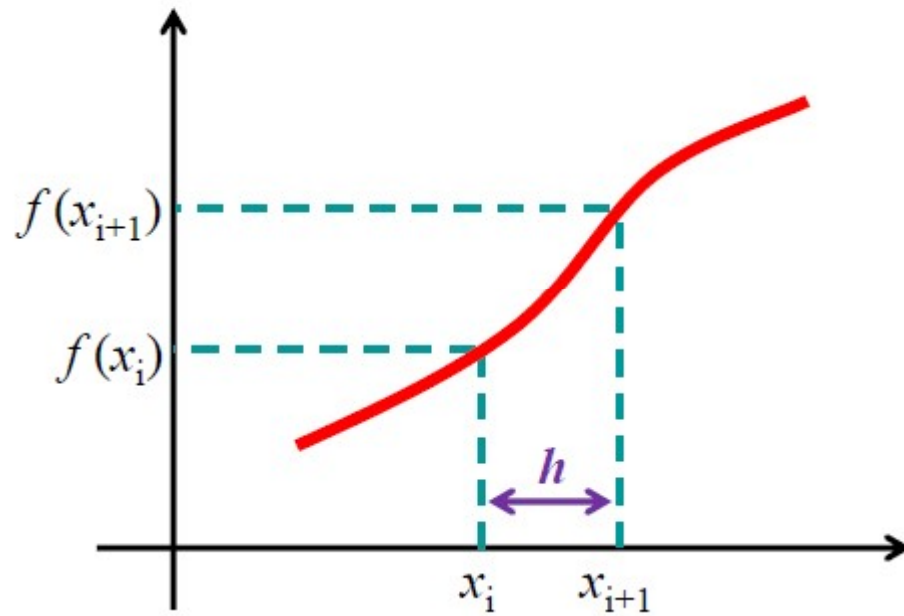


$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

* $f(x_{i-1}) \rightarrow f(x_i - h)$

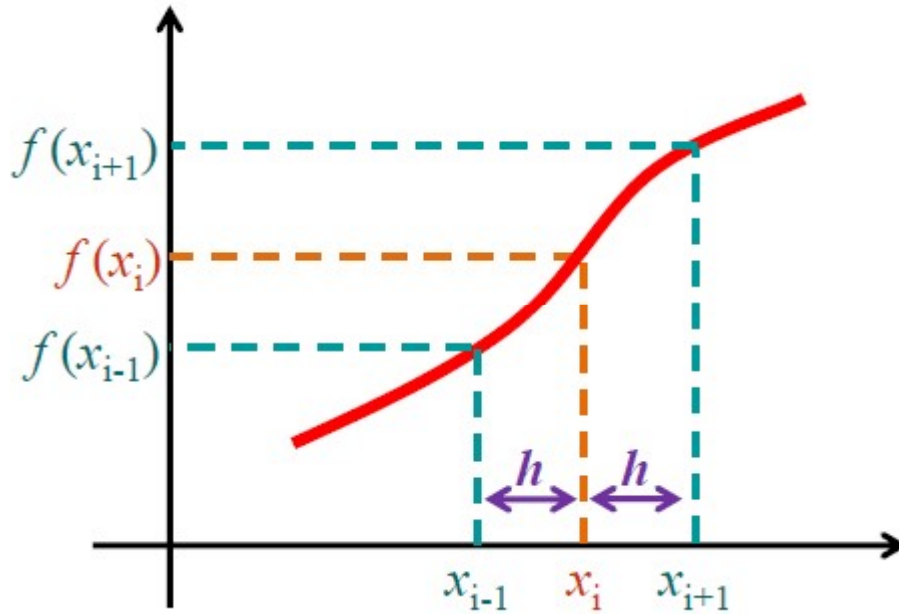
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



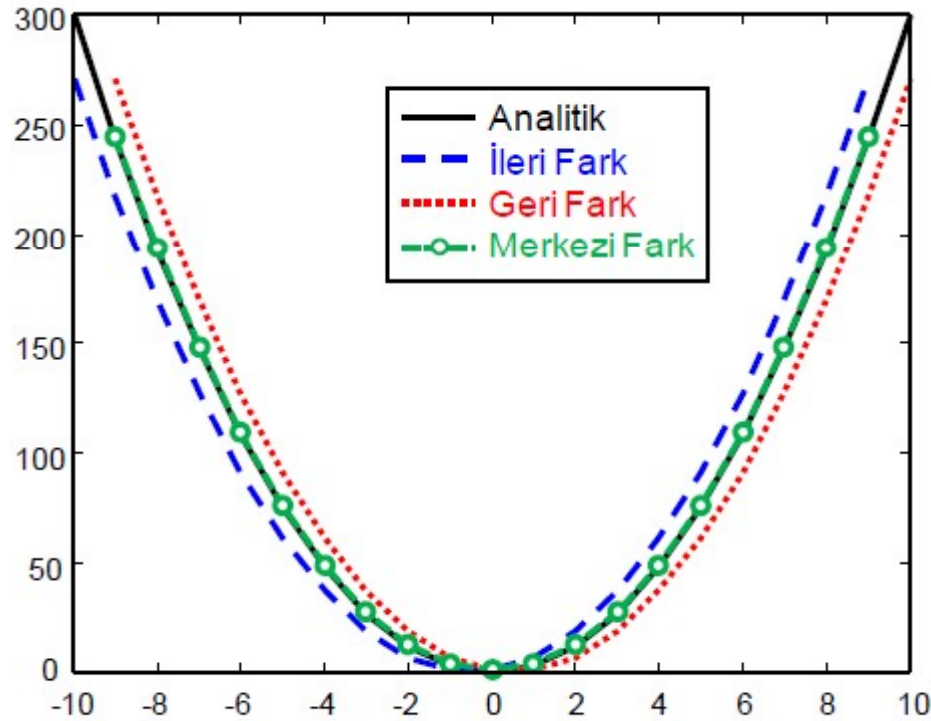
$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

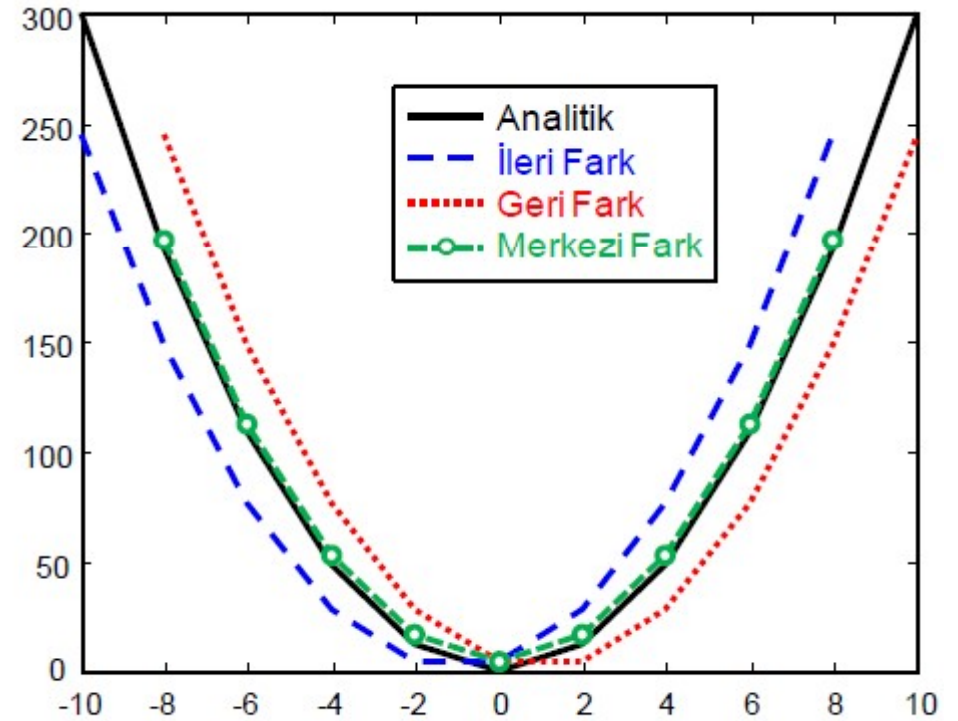
Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$h = 0.1$



$h = 2$





❑ $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

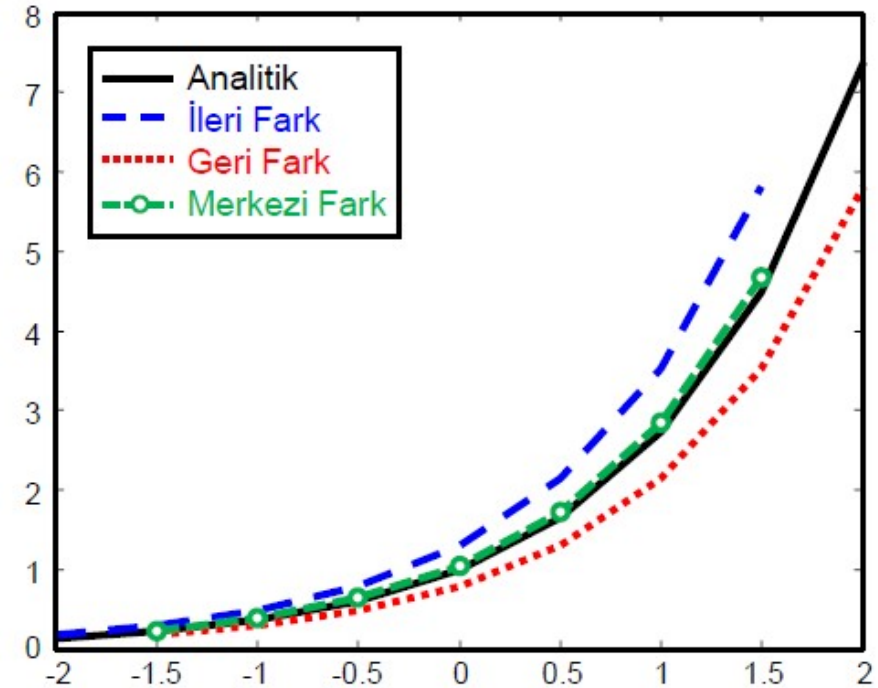
❑ **Çözüm:**

❑ Geri farklar

❑ İleri farklar

❑ Merkezi farklar

❑ Analitik Çözüm



$$f(x) = e^x$$

2.7183

İleri Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{e^{1.1} - e^1}{0.1} = \underline{\underline{2.86}}$$

Geri Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1) - f(1-0.1)}{0.1} = \frac{e^1 - e^{0.9}}{0.1} = \underline{\underline{2.59}}$$



Merkezi Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x} = \frac{e^{1.1} - e^{0.9}}{0.2} = \underline{\underline{2.72}}$

Analitik: $y = e^x$ $y' = e^x$ $y' = e^1 = 2.72$ (merkezi farka yakın)



- ☐ $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?
- ☐ **Çözüm:**
 - ☐ Geri farklar
 - ☐ İleri farklar
 - ☐ Merkezi farklar
 - ☐ Analitik Çözüm



Biz burda Taylor serisi kullanarak
türev hesaplıyoruz

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- ❑ Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- ❑ Bir fonksiyonun $x_i + \Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- ❑ Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx ' in mertebesine eşit olur.
- ❑ Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

yeni mesela
burda elimde
 $f(5)$ değeri var
 $f(6)$ 'yi bulmaya
çalışıyorum

Taylor serisi açılırken türelden yararlanıyordu

Donucu en çok etkileyen baştaki ilk 3 terim
ondan sonra eklenen her terim donucu çok
az etkiliyor

Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

$$-4 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-4f(x_i + h) = -4f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

Burdaki 2. dereceden türevler birbirini götürür

Bu iki ifadenin toplamı aşağıdaki gibidir

Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f''(x_i)$ yi çekelim.

$$-2 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

Birinci türevler
birbirini götürür

$$-2f(x_i + h) = -2f(x_i) - 2h \cdot f'(x_i) - h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h \cdot f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

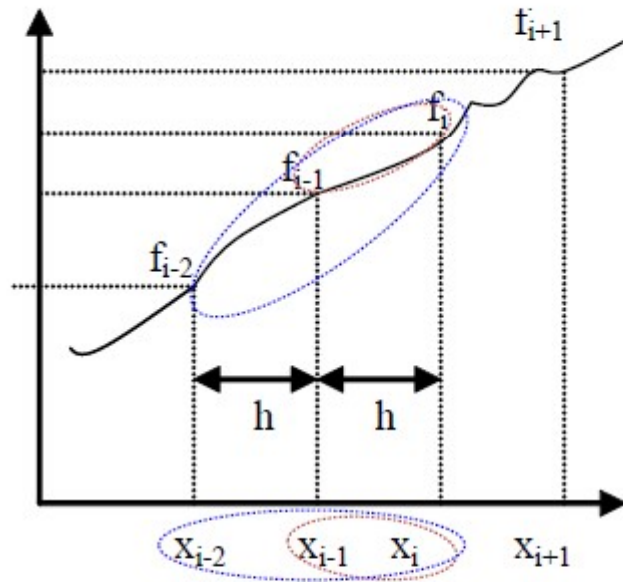
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile \Rightarrow

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}] //$$

Taylor Serisi İle Geri Fark Yöntemi

- İleri fark yöntemindeki işlemler $f(x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile



$$f'_i = \frac{1}{2h} [3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Homework

1

- Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.

$$f_i' = \frac{1}{6h} [-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}]$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}]$$

$$f_i''' = \frac{1}{h^3} [-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}]$$

Homework

2

❑ **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ fonksiyonunun $x=2$ yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. $h=0.1$ ve analitik çözüm $f'(2)=8$

❑ **Çözüm:**

❑ Basit ileri farkla çözüm

❑ Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

KAYNAKLAR

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*”, Seçkin Yayıncılık
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi

