

LINEERLEŞTİRME

Türevlenebilir bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) 'daki lineerleştirilmesi :

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

dir. $f(x,y) \approx L(x,y)$ dir ve $L(x,y)$ yaklaşımı f in (x_0, y_0) 'daki lineer yaklaşımıdır.

$z = L(x,y)$ düzlemi, (x_0, y_0) noktasında $z = f(x,y)$ yüzeyine teğettir.

Tek değişkenli bir fonksiyonun lineerleştirilmesinin teğet - doğru yaklaşımının benzeri olarak, iki değişkenli bir fonksiyonun lineerleştirilmesi de teğet - düzlem yaklaşımıdır.

✳ 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 'daki lineerleştirilmesi

$$L(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \text{ 'dir.}$$

$$f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$$

Örnek: $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ fonksiyonunun $(3,2)$ 'daki lineerleştirilmesini bulun.

$$f(3,2) = 8 \quad f_x(3,2) = (2x - y)|_{(3,2)} = 4 \quad f_y(3,2) = (-x + y)|_{(3,2)} = -1$$

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(3,2) + f_x(3,2)(x-3) + f_y(3,2)(y-2) = 8 + 4(x-3) + (-1)(y-2) \\ &= 4x - y - 2 \end{aligned}$$

Örnek: $(1,1)^2 + (2,5)^3$ sayısı için yaklaşık bir değer bulunuz.

$$f(x,y) = x^2 + y^3 \quad x_0 = 1, y_0 = 2 \Rightarrow f(1,2) = 9$$

$$f_x(1,2) = 2x|_{(1,2)} = 2 \quad f_y(1,2) = 3y^2|_{(1,2)} = 12$$

$$L(x,y) = 9 + 2(x-1) + 12(y-2)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx L(x,y) \Rightarrow f(1,1, 2,5) &= L(1,1, 2,5) = 9 + 2 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,5 \\ &= 15,2 \end{aligned}$$

DİFERANSİYEL

Eğer (x_0, y_0) noktasından yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek f 'nin lineerleştirilmesinden elde edilen değişim

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

f 'nin tam diferansiyeli olarak adlandırılır. ($dx \approx \Delta x = x - x_0$, $dy \approx \Delta y = y - y_0$
 $df \approx \Delta f$)

Örnek: Yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 12 cm olan silindirik bir konserve kutusunun yarıçapının ve yüksekliğinin sırasıyla $dr = 0,08$ ve $dh = -0,3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki değişimi bulunuz.

$$V = \pi r^2 h \quad \Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0) dr + V_h(r_0, h_0) dh$$

$$\begin{aligned} V_r &= 2\pi r h \Rightarrow V_r(3, 12) = 72\pi \\ V_h &= \pi r^2 \Rightarrow V_h(3, 12) = 9\pi \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} dV &= 72\pi(0,08) + 9\pi(-0,3) = 3,06\pi \approx 9,61 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right.$$

Örnek: 8m yüksekliğinde ve 2m yarıçapında dik dairesel silindir depolama tankları imal edilmektedir. Tankların hacimleri yükseklik ve yarıçaptaki küçük değişimlere ne kadar hassastır?

$$V = \pi r^2 h \quad dV = V_r(2, 8) dr + V_h(2, 8) dh$$

$$= (2\pi r h)(1/2, 8) dr + (\pi r^2)(1/2, 8) dh$$

$$= 32\pi dr + 4\pi dh$$

→ Hacim, r 'deki değişime 8 kat daha duyarlıdır.

Bu durumda, r deki 1-birimlik değişim V 'yi 32π ^{birim} civarında değiştirecektir, h 'deki 1-birimlik değişim V 'yi 4π birim civarında değiştirecektir.

Örnek: $(2,05) \cdot e^{(2,05)^2 - 3,9}$ değerini a) lineerizasyon b) diferansiyel hesap ile yaklaşık olarak hesaplayın.

$$f(x,y) = x e^{x^2 - y}$$

$$f_x = e^{x^2 - y} + 2x^2 e^{x^2 - y} = (1 + 2x^2) e^{x^2 - y}$$

$$f_y = -x e^{x^2 - y}$$

$$a) x_0 = 2, y_0 = 4 \Rightarrow f(2,4) = 2$$

$$L(x,y) = f(2,4) + \underbrace{f_x(2,4)}_{=9}(x-2) + \underbrace{f_y(2,4)}_{=-2}(y-4)$$

$$f(x,y) \approx L(x,y) = 2 + 9(x-2) + (-2)(y-4)$$

$$f(2,05, 3,9) \approx 2 + 9(2,05-2) - 2(3,9-4) = 2,65$$

$$b) df = f_x(2,4)dx + f_y(2,4)dy$$

$$x = 2,05 \quad y = 3,9$$

$$x_0 = 2 \quad y_0 = 4$$

$$dx \approx \Delta x = x - x_0 = 2,05 - 2 = 0,05$$

$$dy \approx \Delta y = y - y_0 = 3,9 - 4 = -0,1$$

$$df \approx \Delta f = f(2,05, 3,9) - f(2,4) = f(2,05, 3,9) - 2 \\ \approx 9 \cdot (0,05) - 2 \cdot (-0,1)$$

$$f(2,05, 3,9) \approx 2 + 0,45 + 0,2 = 2,65$$

⊗ 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunda x, y ve z değerleri x_0, y_0, z_0 'dan dx, dy, dz küçükle miktarları kadar değişiyorsa aşağıdaki toplam diferansiyel

$$df = f_x(x_0, y_0, z_0)dx + f_y(x_0, y_0, z_0)dy + f_z(x_0, y_0, z_0)dz$$

f değer değişimin iyi bir yaklaşımını verir.