LİNEERLEŞTİRME

Türevlenebilir bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0)'daki lineerleştirmesi :

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

dır. $f(x,y) \approx L(x,y)$ dır ve $L(x,y)$ yaklaşımı f in (x_0,y_0) daki lineer yaklaşımıdır.

$z = L(x,y)$ düzlemi, (x_0,y_0) noktasında $z=f(x,y)$ yüzeyine teğettir. Tek değişkenli bir fonksiyonun lineerleştirmesinin teğet-doğru yaklaşımının benzeri olarak, iki değişkenli bir fonksiyonun lineerleştirmesi de teğet-düzlem yaklaşımıdır.

(*) 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki lineerleştirmesi

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$ 'dir.

$f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$

Örnek: $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ fonksiyonunun $(3,2)$ deki lineerleştirmesini bulun.

$f(3,2) = 8 \qquad f_x(3,2) = (2x-y)\big|_{(3,2)} = 4 \qquad f_y(3,2) = (-x+y)\big|_{(3,2)} = -1$

$$L(x,y) = f(3,2) + f_x(3,2)(x-3) + f_y(3,2)(y-2) = 8 + 4(x-3) + (-1)(y-2)$$
$$= 4x - y - 2$$

Örnek: $(1,1)^2 + (2,5)^3$ sayısı için yaklaşık bir değer bulunuz.

$f(x,y) = x^2 + y^3 \qquad x_0 = 1,\ y_0 = 2 \quad \Rightarrow f(1,2) = 9$

$f_x(1,2) = 2x\big|_{(1,2)} = 2 \qquad f_y(1,2) = 3y^2\big|_{(1,2)} = 12$

$L(x,y) = 9 + 2(x-1) + 12(y-2)$

$f(x,y) \approx L(x,y) \Rightarrow f(1{,}1,\ 2{,}5) = L(1{,}1,\ 2{,}5) = 9 + 2\cdot 0{,}1 + 12\cdot 0{,}5$
$= 15{,}2$

DİFERANSİYEL

Eğer (x_0, y_0) noktasından yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek f nin lineerleştirilmesinden elde edilen değişim

$$df = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

f nin tam diferansiyeli olarak adlandırılır. ($dx \approx \Delta x = x - x_0$, $dy \approx \Delta y = y - y_0$
$df \approx \Delta f$)

Örnek: Yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 12 cm olan silindirik bir konserve kutusunun yarıçapının ve yüksekliğinin sırasıyla $dr = 0{,}08$ ve $dh = -0{,}3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki değişimi bulunuz.

$V = \pi r^2 h \qquad \Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)\,dr + V_h(r_0, h_0)\,dh$

$V_r = 2\pi r h \Rightarrow V_r(3,12) = 72\pi$

$V_h = \pi r^2 \Rightarrow V_h(3,12) = 9\pi$

$\Big\}\; dV = 72\pi(0{,}08) + 9\pi(-0{,}3) = 3{,}06\pi \approx 9{,}61 \text{ cm}^3$

Örnek: 8m yüksekliğinde ve 2 m yarıçapında dik dairesel silindir depolama tankları imal edilmektedir. Tankların hacimleri yükseklik ve yarıçaptaki küçük değişimlere ne kadar hassastır?

$V = \pi r^2 h \qquad dV = V_r(2,8)\,dr + V_h(2,8)\,dh$

$= (2\pi r h)\big|_{(2,8)}\,dr + (\pi r^2)\big|_{(2,8)}\,dh$

$= 32\pi\,dr + 4\pi\,dh$ → Hacim, r'deki değişime 8 kat daha duyarlıdır.

Bu durumda, r deki 1-birimlik değişim V yi 32π birim civarında değiştirecektir, h'daki 1-birimlik değişim V'yi 4π birim civarında değiştirecektir.

Örnek: $(2{,}05) \cdot e^{(2{,}05)^2 - 3{,}9}$ değerini a) lineerizasyon b) diferansiyel hesap ile yaklaşık olarak hesaplayın

$f(x,y) = x e^{x^2-y}$

$f_x = e^{x^2-y} + 2x^2 e^{x^2-y} = (1+2x^2)\,e^{x^2-y}$

$f_y = -x e^{x^2-y}$

a) $x_0 = 2$, $y_0 = 4 \Rightarrow f(2,4) = 2$

$$L(x,y) = f(2,4) + \underbrace{f_x(2,4)}_{=9}(x-2) + \underbrace{f_y(2,4)}_{=-2}(y-4)$$

$$f(x,y) \approx L(x,y) = 2 + 9(x-2) + (-2)(y-4)$$

$$f(2{,}05,\ 3{,}9) \approx 2 + 9(2{,}05-2) - 2(3{,}9-4) = 2{,}65$$

b) $df = f_x(2,4)dx + f_y(2,4)dy$

$x = 2{,}05 \quad y = 3{,}9$

$x_0 = 2 \quad y_0 = 4$

$dx \approx \Delta x = x - x_0 = 2{,}05 - 2 = 0{,}05$

$dy \approx \Delta y = y - y_0 = 3{,}9 - 4 = -0{,}1$

$df \approx \Delta f = f(2{,}05,\ 3{,}9) - f(2,4) = f(2{,}05,\ 3{,}9) - 2$

$\approx 9.(0{,}05) - 2.(-0{,}1)$

$f(2{,}05,\ 3{,}9) \approx 2 + 0{,}45 + 0{,}2 = 2{,}65$

(*) 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunda x, y ve z değerleri x_0, y_0, z_0'dan dx, dy, dz küçük miktarları kadar değişiyorsa aşağıdaki toplam diferansiyel

$$df = f_x(x_0,y_0,z_0)dx + f_y(x_0,y_0,z_0)dy + f_z(x_0,y_0,z_0)dz$$

f deki değişimin iyi bir yaklaşımını verir.