Fourier Series:

* $x(t)$ işaretini bilinen işaretler cinsinden yazmak için kullanılır.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \Phi_k) \Big\} \text{decomposition}$$

* Bu işaretlere $x(t)$'nin harmoniği denir.

f_0 = fundamental freq. $f_k = k \cdot f_0$ $f = 0$ ise DC

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \Phi_k)$$
→ harmonik frek.

$f_0 = \text{OBEB}(f_1, f_2, f_3 \ldots f_n)$

* Zamana göre bu frek. değişebilir.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi k/T_0)t} dt \Big\{ \begin{array}{l}\text{fourier}\\ \text{serisi}\\ \text{integrali}\end{array}$$

$e^{jw} = \cos w + j\sin w \Big\}$ euler formülü

* Fourier serisi olabilmek için bir T boyunca işlem yapılmalıdır. Bu yüzden fourier serisi periyodik işaretlerde yapılır. Periyodik olmayan işaretlerde fourier transformu yapılır.

* Frekansın genliğe göre değişimi bulunmuş olur.

$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$

$e^{-jwt} = \cos(wt) - j\sin(wt)$

$\dfrac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} = \cos(wt)$ reel $\dfrac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} = \sin(wt)$ imajinel

* Doppler Radar sinyali eksi frekanslı sinyallere örnektir.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \text{Re}\{X_k e^{j2\pi f_k t}\}$$

$X_k = A_k e^{j\Phi_k}$ $\text{Re}\{z\} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^*$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \{\tfrac{1}{2}X_k e^{j2\pi f_k t} + \tfrac{1}{2}X_k^* e^{-j2\pi f_k t}\}$$

NOT: Pek çok durumda dif. denk. ile çözüm yapmak fourier'den daha zordur.

· fundamental freq. (f_0)
· Amplitudes (A_k) } bu bileşenlerle
· Phases (Φ_k) hesap yapılır.

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k w_0 t + \Phi_k)$$

Complex Exponential Form

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(1w_0 t + \Phi_1) + A_2 \cos(2w_0 t + \Phi_2)$$
↳ Amp. phase form

euler formülü $\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}[e^{j\theta} + e^{-j\theta}]$

$$x(t) = A_0 + \underbrace{\left(\frac{A_1}{2} e^{j\Phi_1} e^{j1w_0 t}\right.}_{C_1} + \underbrace{\left.\frac{A_1}{2} e^{-j\Phi_1} e^{-j1w_0 t}\right)}_{C_{-1}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{A_2}{2} e^{j\Phi_2} e^{j2w_0 t}\right.}_{C_2} + \underbrace{\left.\frac{A_2}{2} e^{-j\Phi_2} e^{-j2w_0 t}\right)}_{C_{-2}}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk w_0 t}$$
↳ complex exp. form

$$x(t) = A_0 + \underbrace{\left(A_1 \cos\Phi_1 \cos(1w_0 t)\right.}_{a_1} - \underbrace{\left.A_1 \sin\Phi_1 \sin(1w_0 t)\right)}_{b_1}$$

$$+ \underbrace{\left(A_2 \cos\Phi_2 \cos(2w_0 t)\right.}_{a_2} - \underbrace{\left.A_2 \sin\Phi_2 \sin(2w_0 t)\right)}_{b_2}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k w_0 t) + b_k \sin(k w_0 t)]$$
↳ sine-cosine form

exp → sine-cosine   *
$a_0 = C_0$
$a_k = 2\text{Re}\{C_k\}$ $b_k = -2\text{Im}\{C_k\}$

amp. → sine-cosine
$a_0 = C_0 = A_0$
$a_k = A_k \cos(\Phi_k)$
$b_k = -A_k \sin(\Phi_k)$

* Fourier serisi katsayılarını bulmak için aşağıdaki denklem kullanılır. (exp. form'da)

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jkw_0t}\,dt$$

T = periyot
$w_0 = 2\pi f_0 \rightarrow$ fund. frekans
t_0 = herhangi bir an
$K = (-\infty, \infty)$ hepsi

$K=0$'da $\left\{ C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \right\}$ DC offset değeri

* Sine-cosine bulmak için:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \quad \}DC$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(kw_0t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(kw_0t)\,dt$$

NOT: işaret çift sinyalse cos bileşenleri mevcuttur. Bu yüzden;
$b_k = 0 \qquad C_k =$ are real $\quad \theta_k = \pm\pi$

NOT: işaret tek sinyalse cos bileşeni olmayışın bileşeni olur. Bu yüzden
$a_k = 0 \qquad C_k$ are Imag. $\theta_k = \pm\pi/2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k\neq0$

Fourier Series Spectrum
* Neg. ve poz. frekanslar için çizilebilir.
* freq = amp. olabilir, phase-freq. spectrum olabilir. (A_k, D_k gerekir)

NOT: Neg. frekanslar grafikte çizilmez. Single sided spectrum denir. (Trig. spectrum)

$k = 0, 1, \ldots$

---

* Eğer neg. frek. değerleri de çizilmek istenirse double sided denir. (exp. spectrum)
$k = (-\infty, \infty)$

* $|C_k|$ ve $\angle c_k$ gerekir.
$\downarrow$ $\searrow$
y eksenine göre   orijine göre simetrik
simetrik

NOT: En yüksek genlik düşük frekanslarda olur.

Fourier Transform:
* Periyodik olmayan sinyallerin hesaplanmasında kullanılır.

$\rightarrow$ zaman domain''
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{jwt}\,dw$$

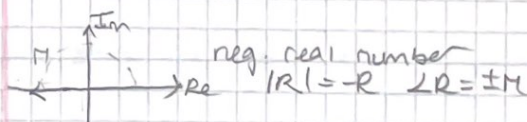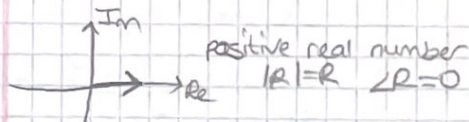C_k gibi e^{jkw_0t} gibi

* Fourier integrali ya da ters fourier dönüşümü olarak adlandırılır.

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}\,dt$$
$\downarrow$ frekans domain''i

NOT: $X(w)$ complex bir fonk.
$|X(w)| \qquad \angle X(w)$

$x(t) \rightarrow X(w)$ $\Big\}$ dönüşüm gösterimleri
$x(t) \rightarrow X(f)$

positive real number
$|R| = R \qquad \angle R = 0$

neg. real number
$|R| = -R \qquad \angle R = \pm\pi$

NOT: $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$ sönümlenerek gider.

$-\infty < t < \infty, 1$ $\qquad 2\pi\delta(\omega)$

$u(t)$ $\qquad \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$

$-0.5 + u(t)$ $\qquad 1/j\omega$

$\delta(t)$ $\qquad 1, -\infty < \omega < \infty$

$\cos(\omega_0 t)$ $\qquad \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

$\sin(\omega_0 t)$ $\qquad j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$

$e^{j\omega_0 t}$ $\qquad 2\pi\delta(\omega-\omega_0), \omega_0$ real

$\sin(\omega_0 t)x(t)$ $\qquad \dfrac{j}{2}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)]$

$\cos(\omega_0 t)x(t)$ $\qquad \dfrac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)]$

$\dfrac{d^n\, x(t)}{dt^n}$ $\qquad (j\omega)^n X(\omega), \ n=1,2,3,\cdots$

$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow$
$\begin{cases} x(t-c) = X(\omega)e^{-jc\omega} \\[4pt] x(at) = \dfrac{1}{|a|}X(\omega/a) \\[4pt] x(-t) = X(-\omega) \end{cases}$

$e^{-bt}u(t), \ b>0$ $\qquad \dfrac{1}{j\omega+b}, \ b>0$

Sampling and Aliasing

$\hat\omega = \omega T_s = \underbrace{\dfrac{2\pi\ell}{f_s}}_{} + \underbrace{2\pi\ell}_{\text{aliasing}}$

↓ digital frek. ↘ normalized freq.

Uniform sampling:
$t = n.T_s = \dfrac{n}{f_s}$ $\qquad x[n] = x(n.T_s) = x(n/f_s)$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \to x[n] = x(nT_s)$

$x[n] = A\cos(\omega nT_s + \phi) = A\cos(\omega T_s n + \phi)$

$x[n] = A\cos(\hat\omega n + \phi)$

$0 \le \hat\omega \le 2\pi$ $\qquad\qquad 0 \le f \le f_s$

Laplace

$e^{-j\omega t} \xrightarrow{} e^{-\overbrace{(\sigma+j\omega)}^{s}t} = e^{-st}$ $\qquad s = \underset{R}{\sigma} + \underset{Im}{j\omega}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t)\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = X(s)$

$*\ \sigma = 0$ ise LT=FT

<u>NOT:</u> Eğer hem LT hem FT olduğundan eminsek LT'deki s yerine jω yazarak işlemsiz FT düzlemine geçebiliriz.

ROC özellikler:
• Eğer ROC jω eksenini kapsarsa FT vardır.
• $s = -a$ için sonuç sonsuzdur. Buna sistemin kutbu denir. X
• LT'de payı sıfır yapan değerler sistemin zero'sudur. O
• Eğer x(t) sağ taraflı ise ROC en büyük kutbun sağındadır.
• "   "   "   sol   "   "   "   "   en küçük kutbun solundadır.
• ROC pole içermez, zero içerebilir.

<u>NOT:</u> $x(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s)$

<u>NOT:</u> $\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s)$

<u>NOT:</u> $\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \dfrac{1}{s}X(s)$

$x(at)$ $\qquad \dfrac{1}{a}X\left(\dfrac{s}{a}\right)$

$t^n x(t)$ $\qquad (-1)^n \dfrac{d^n X(s)}{ds^n}$

$$e^{\alpha t} x(t) \qquad X(s-a)$$

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \qquad \frac{j}{2}\left[X(s+j\omega_0)-X(s-j\omega_0)\right]$$

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \qquad \frac{j}{2}\left[X(s+j\omega_0)+X(s-j\omega_0)\right]$$

<u>NOT:</u> $x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(s)\, H(s)$

transfer func.

<u>NOT:</u> Transfer function is a generalization of freq. response ($H(\omega)$)

$$\mathcal{L}\{a\} \qquad a/s$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} \qquad n!/s^{n+1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} \qquad 1/(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} \qquad \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} \qquad \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot t\} \qquad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt}\sin(at)\} \qquad \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{bt}\cos(at)\} \qquad \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\cdot\sin(at)\} \qquad \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)\cdot(-1)^n$$

<u>NOT:</u> Bu kurallar ters laplace için tersten geçerlidir. ($\mathcal{L}^{-1}\{a/s\}=a$)

---

türev

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} \qquad s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\ldots -f^{(n-1)}(0)$$

<u>NOT:</u> Sistemin sağ yarı düzleminde kutup varsa sistem kararsızdır.

<u>NOT:</u> ROC jw eksenini kapsıyorsa BIBO kararlıdır.

<u>NOT:</u> pole jw eksenine yaklaştıkça $H(s)$ etkisi fazla old. için daha keskin çıkışlar olur.