Ör: $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Fonksiyonun artan / azalan aralıklarını belirleyiniz ve extremum değerlerini bulunuz.

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow$ Tanım kümesi: $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x=0$, $f'(x)$ tanımsız $\Rightarrow \underbrace{x=-1}_{\text{çift kat kök}}$

$x=0 \quad x=-2$

fakat $\notin$ Tanım kümesi dolayısıyla kritik nokta değil.

Kritik Noktalar: $x=0$, $x=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	Φ	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↘		↗	

$x=-2$ yerel max nokta

$f(-2)=-4$ yerel max değer

$x=0$ yerel min nokta.

$f(0)=0$ yerel min değer.

$(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$ aralığında fonksiyon artan

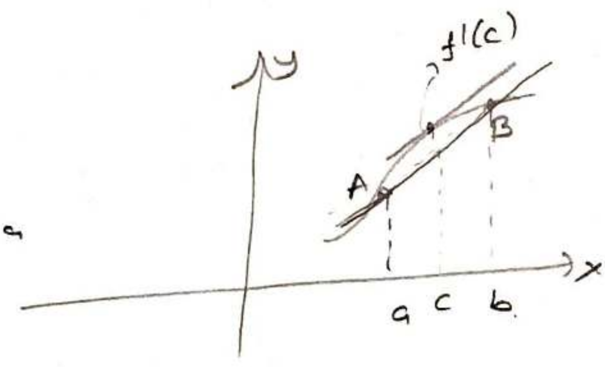
$[-2,-1)\cup(-1,0]$ aralığında " azalandır.

* Ortalama Değer Teoremi.

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ise

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.



Geometrik olarak Ortalama Değer Teoremi a ve b arasında AB kirişine paralel en az bir teğetinin bulunduğunu söyler.

Ör: $f(x)=x^2$ fonksiyonu için $[0,2]$ aralığında Ortalama Değer Teoremini gerçekleyiniz.

$f(x)=x^2 \rightarrow [0,2]$ aralığında sürekli

$f'(x)=2x \rightarrow (0,2)$ " türevlenebilir

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4-0}{2}=2$$

$2c=2 \Rightarrow c=1.$ $\quad c=1\in(0,2)$ vardır.

Ör: $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ fonksiyonu için $[0,3]$ aralığında Ortalama Değer Teoremini gerçekleyiniz

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1} \rightarrow [0,3]$ aralığında sürekli

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(x+1)-(x^2-x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2x^2}+2x-x-1-\cancel{x^2}+x}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \rightarrow (0,3)$ aralığında türevlenebilir

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{\frac{6}{4}-0}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{c^2+2c-1}{(c+1)^2}=\frac{1}{2}. \Rightarrow 2c^2+4c-2=c^2+2c+1$$

$$c^2+2c-3=0$$

$$\begin{array}{cc} c & +3 \\ c & -1 \end{array} \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} c_1=-3 \\ c_2=1 \end{array}$$

$c_1=-3 \notin (0,3)$

$c_2=1 \in (0,3)$

Ör: $0<a<b$ için $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < \sqrt{b}$

eşitsizliğinin sağlandığını Ortalama Değer Teoremini

kullanarak gösteriniz.

$f(x)=\sqrt{x}$, $[a,b]$ alalım.

$f(x)=\sqrt{x}$, $[a,b]$ aralığında sürekli

($x \geq 0$ için sürekli $0<a<b$ olduğu için).

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$ için türevlenebilir. $0<a<b$ olduğu

için (a,b) aralığında türevlenebilir

Dolayısıyla $[a,b]$ de sürekli (a,b) de türevlenebilir

olduğu için Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır.

$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$ dır $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

*) $c>a$ olduğu için $\sqrt{c}>\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

$\frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{a} > 2\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a}) > \sqrt{a}$ (1)

* $c<b$ olduğu için $\sqrt{c}<\sqrt{b} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} > \frac{1}{2\sqrt{b}}$

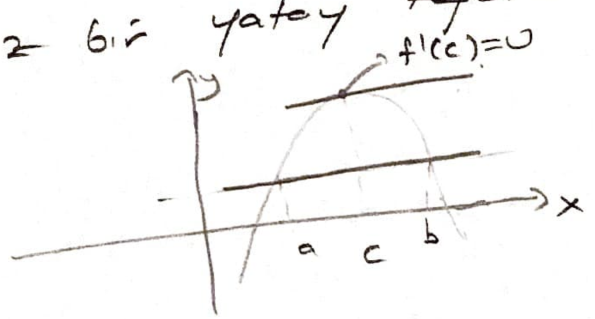
$2\sqrt{b} > \sqrt{b}+\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{b} > \frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$ (2)

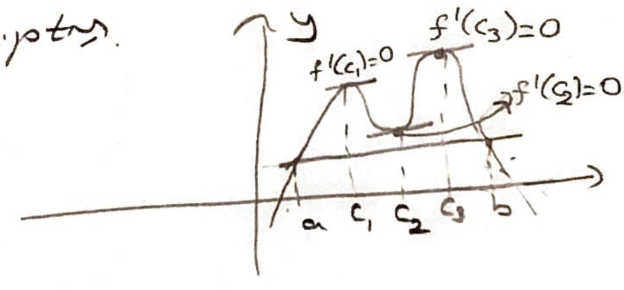
(1) ve (2) den $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a}) < \sqrt{b}$ bulunur.

Rolle Teoremi

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli, (a,b) açık aralığının her noktasında türevlenebilir ve $f(a)=f(b)$ ise. $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

Geometrik olarak Rolle Teoremi bir eğrinin yatay bir doğruyu kestiği iki nokta arasında en az bir yatay teğete sahiptir.





Ör: $f(x)=x^2-2x+3$ fonksiyonuna $[0,2]$ de Rolle Teoremi uygulayınız

$f(x)=x^2-2x+3 \longrightarrow [0,2]$ de sürekli,

$f'(x)=2x-2 \longrightarrow (0,2)$ de türevlenebilir ve

$f(0)=3$, $f(2)=4-4+3=3$, $f(0)=f(2)=3$ dür

Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=0 \Rightarrow 2c-2=0$ $\quad c=1\in(0,2)$ vardır.