

# ENTERPOLASYON

Basit olarak interpolasyon işlemi, tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.

Genel anlamda ise interpolasyon; bilinmeyen bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gibi ayrık noktalarda verilen  $f_0, f_1, \dots, f_n$  değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun başka basit ve bilinen bir  $F(x)$  fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan  $F(x)$  fonksiyonuna "**Interpolasyon Fonksiyonu**" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.

Genelde interpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Entropolasyon fonksiyonunun seçiminde iki teorem kullanılır.  
1. Eğer  $f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ise  
entropolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir.  
Bu aralıkta

$$|f(x) - F(x)| \leq \epsilon \quad \text{esitliđi sađlanır.}$$

2. Periyodu  $2\pi$  olan sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

gibi sonlu bir trigonometrik açılım, entropolasyon  
fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir  $n$  değeri  
 $|f(x) - F(x)| < \epsilon$  sađlanabilir.

## DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona **doğrusal (lineer) enterpolasyon** denir.

Eğer  $x$  değisteri  $[a, b]$  aralığında bir  $f(x)$ 'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak :

$$F(x) = Ax + B \text{ seçilirse,}$$

$$f(a) = F(a)$$

$$f(b) = F(b)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa + B = f(a)$$

$$Ab + B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

yazılır.

$F(x)$  fonksiyonu ise :

$$F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

olur.

# GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n \binom{k}{i} \Delta^i f_0$  olarak verilir. Bu formül açıl-

duğınca;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$  olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$  konulursa;



$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$F(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}}{1!} \Delta f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right) \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 2 \right)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{x_i - x_0 - 2h}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + 2h)}^{x_2}}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)(x_2 - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$  ve  $x_0=0$  alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$h=1$  ve  $x_0=0$  alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x_i \rightarrow x$  alınırsa

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

II ÖRNEK:

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	<u>-4</u>			
1	-2	<u>2</u>		
2	14	16	<u>14</u>	
3	62	48	32	<u>18</u>
4	160	98	50	18
5	326	166	68	18
6	578	252	86	

$$x_0 = 0$$

$$h = 1$$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$$F(4) = 160$$



11  
D.R.N.E.L.

<u>x</u>	<u>f(x)</u>
2	<u>10</u>
4	50
6	122
8	226
10	362

$\Delta f(x)$

40  
72  
104  
136

$\Delta^2 f(x)$

32  
32  
32

$x_0 \neq 0$   
 $h \neq 1$

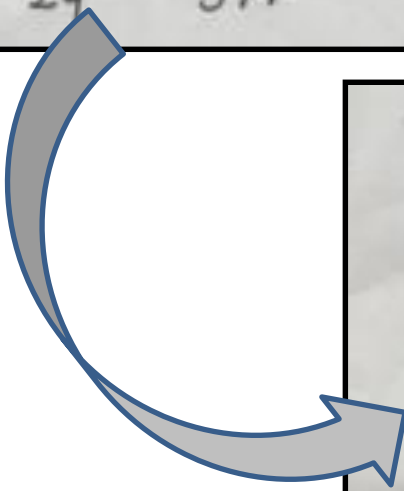
$$F(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{2} \overset{20}{40} + \frac{(x-2)(x-4)}{4} \cancel{32}^8$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \Rightarrow F(8) = 226$$

Değişken dönüşümü yapılarak ayırık noktaların eşit aralıklı yapılması:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u><math>\Delta f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^2 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^3 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^4 f(x)</math></u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>			
0	1	9	<u>10</u>	<u>26</u>	
3	10	55	46	60	<u>24</u>
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				



<u><math>\tau</math></u>	<u><math>x</math></u>	<u><math>\Delta x</math></u>	<u><math>\Delta^2 x</math></u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

<u>z</u>	<u>F(z)</u> <u>x</u>	<u>Δx</u>	<u>Δ<sup>2</sup>x</u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 x = -1 + z \cdot 1 + \frac{z^2 - z}{2} \cdot 2$$

$$x = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u><math>\Delta f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^2 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^3 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^4 f(x)</math></u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>10</u>		
0	1	9	<u>46</u>	<u>26</u>	
3	10	55	60	<u>24</u>	
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \frac{5}{2} \frac{z(z-1)}{2} + \frac{6}{6} \frac{z(z-1)(z-2)}{6} + \frac{24}{24} \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}$$

$$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2 \quad \text{Ara Interpolasyon Formülü}$$

$$f(x) = (\pm \sqrt{x+1})^4 - 2(\pm \sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

II ÖRNEK:

$x$	$z$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$z$	$x$	$\Delta x$
0	2	2
1	4	2
2	6	2
3	8	2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$



$x$	$z$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \cancel{\frac{8}{2}} \frac{z(z-1)}{2} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4 \left( \frac{x-2}{2} \right)^2 + 3 \Rightarrow F(x) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(x) = x^2 - 4x + 7$$

II. 301

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!} \Delta^2 f_0$$

# LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun,  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  gibi ayrı noktalarındaki bilinen  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  değerleri varsa (bu noktaların aralıkları eşit olsun olmasın) ve  $f(x)$  fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna  $g(x)$  dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i \text{ şeklindedir.}$$

$L_i(x)$  katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Örnek:

Bir  $y = f(x)$  fonksiyonunun  $x_i$ 'ler için  $y_i$  değerleri şöyle olsun.

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$n=2$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x_0-x_0}} \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \\ &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow L_0(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{\cancel{x-x_1}}{\cancel{x_1-x_1}} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} \Rightarrow L_1(x) = -\frac{1}{2} (x^2-3x) \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0} \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6} (x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2-3x)(1) + \frac{1}{6} (x^2-x)(25)$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x - 5 \text{ bulunur.} \Rightarrow g(1) = 1 \quad g(2) = 11$$

QUESTION:

$i$	$x$	$y$
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$$n=3$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)$$

$$g(x) = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22) + \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)(-8) - \frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)(-22) + \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)(-9)$$

$$g(4) = -1.0296854$$

$$g(10) = -14.973684$$