TAYLOR VE MACLAURIN SERİLERİ

Soru: Yakınsaklık aralığı içindeki bir kuvvet serisi toplamının her mertebeden türevi olan bir sürekli fonk. olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur? Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa o aralıkta fonksiyonu bir kuvvet serisi ile ifade edebilir miyiz? Eğer yapabilirsek bu kuvvet serisinin katsayıları için ne söylenebilir?

Son soruyu, eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz. I yakınsaklık aralığının içindeki terimleri tek tek türevlersek;

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\dots+n(x-a)^{n-1}+\dots$$

$$f''(x)=1.2a_2+2.3.a_3(x-a)+3.4.a_4(x-a)^2+\dots$$

$$f'''(x)=1.2.3.a_3+2.3.4.a_4(x-a)+3.4.5.a_5(x-a)^2+\dots$$

$\vdots$

Tüm n'ler için genel olarak şöyle yazabiliriz:

Bu denklemler $x=a$ da geçerli olduklarından;

$$f'(a)=a_1,\quad f''(a)=1.2.a_2,\quad f'''(a)=1.2.3.a_3,\dots, f^{(n)}(a)=n!\,a_n$$

elde ederiz. Böylece; eğer böyle bir seri varsa bir tanedir ve n. katsayısı $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şeklindedir.

Dolayısıyla f'in bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \qquad (*)$$

Şimdi, eğer $x=a$ merkezli bir I aralığında her mertebeden türevi olan herhangi bir f fonksiyonu ile başlarsak ve bu fonksiyonu $(*)$ daki seriyi üretmek için kullanırsak, bu seri I daki her x için $f(x)$'e yakınsar mı?
Cevap "belki" dir. Bazı fonksiyonlar için doğru / bazıları için ise yanlıştır.

Taylor Serisi: f fonksiyonu, bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonk. olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor Serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

Maclaurin Serisi: f tarafından üretilen Maclaurin Serisi;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

olarak tanımlanır. Yani Maclaurin Serisi $x=0$ daki Taylor Serisidir.

Taylor Polinomları: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta n. mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f tarafından $x=a$ da üretilen n. mertebe Taylor Polinomu: $P_n(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

* Yüksek mertebeden Taylor Polinomları, f in a civarındaki en iyi polinom yaklaşımlarını verir.

(43)

(*) $f(x)=e^x$ tarafından üretilen $x=0$ daki Taylor Serisini ve Taylor Polinomunu bulunuz.

$f(x)=e^x \rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=e^x \rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=e^x \rightarrow f''(0)=1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=e^x \rightarrow f^{(n)}(0)=1$

Taylor Serisi $\Rightarrow f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Taylor Polinomu $\Rightarrow P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

(*) $f(x)=\cos x$ in $x=0$ daki Taylor Serisi ve Polinomu?

$f(x)=\cos x \rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x \rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x \rightarrow f'''(0)=0$

$\vdots$

$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x \rightarrow f^{(2n)}(0)=(-1)^n$

$f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sin x \rightarrow f^{(2n+1)}(0)=0$

Taylor Serisi $\Rightarrow f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots=1+0x+\frac{x^2}{2!}+0.x^3+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\dots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylor Polinomu $\Rightarrow P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\left(f^{(2n+1)}(0)=0 \text{ olduğundan } P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)\right)$

(*) $\sqrt[3]{1,2}$ için, 2. mertebe Taylor polinomunu kullanarak yaklaşık değer bulun.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=1$ olsun.

$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3} \Rightarrow f(1)=1 \quad f'(1)=\frac{1}{3} \quad f''(1)=-\frac{2}{9}$

$f(x)\approx P_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}\frac{(x-1)^2}{2!}$

$f(1,2)\approx P_2(1,2)=1+\frac{1}{3}.0,2-\frac{1}{9}.(0,2)^2=\underline{\underline{1,062}}$

Sık Kullanılan Maclaurin Serileri

① $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots \qquad (-1<x<1)$

② $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2+\dots \qquad (-1<x<1)$

③ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

④ $\operatorname{Sin}x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\dots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

⑤ $\operatorname{Cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$

⑥ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\dots \qquad (-1<x\leq 1)$

⑦ $\operatorname{ArcTan}x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\dots \qquad (-1\leq x\leq 1)$

---

④ $e^{-x^2/3}$ ün Maclaurin Serisi?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n n!} = 1-\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\,\frac{x^4}{3^2}+\dots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

(*) $\sin^2 x$ in Maclaurin Serisi genel terimi? (48)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} \cdots\right)$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad (\forall x \text{ için})$$

(*) $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ nin Maclaurin Serisi genel terimi?

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} \cdots \qquad (\forall t \text{ için})$$

$$E(x) = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \cdots\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{\underset{5.2!}{\underline{10}}} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} \quad (\forall x \text{ için})$$

(*) $I = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ için Maclaurin Serisi genel terimi?

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$I = \int_0^x \frac{1 - \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right)}{t^2} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \cdots\right) dt$$

$$= \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3.4!} + \frac{t^5}{5.6!} - \cdots \Big|_0^x = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3.4!} + \frac{x^5}{5.6!} \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+2)!}$$

$\circledast$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ limitini seri açılımı ile hesaplayın. (49)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} - \overbrace{\frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} \cdots}^{0}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$\circledast$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1) \cdot \ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \Rightarrow \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} \cdots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots \Rightarrow \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} \cdots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1) \cdot \ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots - \cancel{1}\right) \cdot \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} \cdots\right)}{\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{9x^2}{2} - \frac{3^4x^4}{4!} \cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \cdots}{\left(\frac{9x^2}{2} - \frac{3^4x^4}{4!} + \cdots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \overbrace{2x + \cdots}^{0}}{\left(\frac{9}{2} - \underbrace{\frac{3^4x^2}{4!} + \cdots}_{0}\right)^2} = 2 \cdot \frac{4}{81} = \underline{\underline{\frac{8}{81}}}$$