

# Diziler

## • *Donem Hak. Bilg.*

- diziler olmadan seriler olmaz.
- kuvvet serileri çok önemli.
- kısa başlık: parametrik denklemler.
- Kutupsal koordinat formülü.
- vektörler kartesiyen çarpımları ile. Uzayda doğrular üzerinde duracağız.
- vektör değerli matrislere dayalı.
- çok değişkenli fonksiyonlar uzun soluklu. farklı ve zor.
- limit türev kartesiyen matrisler ile.
- katli integraller. aralıkları kartesiyen çarpımları ile. dikdörtgen veren integraller vs. hacim ve alan hesapları
- Kaynak aynı.

## • *Sonsuz Dizi*

- **Tanım:** pozitif doğal sayılar üzerinde tanımlanmış fonk.

$$b_n = \frac{1}{n-1} \implies \{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \dots\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{n-1} \implies \{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \dots\right\}$$

- Dizinin bütün elemanları bir sayıdan küçükse **üstten sınırlı**.  
tam tersi ise **alttan sınırlı**. ikisi de söz konusu ise **sınırlı** denir.
- **dizilerin yakınsaklığı:** sonsuza limiti alınır ve ona göre yakınsaklığı hesaplanır. 0'e yaklaşıp kartesiyen.
- *latex*
- **dizinin tekliği:** limiti varsa tektir.
- **yakınsaklığı:** limit varsa yakınsaktır. ( limit yok demek +-sonsuz ya da sınırsız demek )

◦ **Onemli limitler:**

$$r > 0 \text{ ise, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^{1/n} = 1$$

$$r > 1 \text{ ise, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

$$|r| < 1 \text{ ise, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$$

◦ **Limit teoremleri:**

- dizinin limitini alinirken diziyi fonksiyon gibi dusunup onun limiti alinir. ( istisna var )
- usttekinin tersi dogru degil. Diziden fonka gecemeyiz.

- **Yakinsak iki dizinin toplami ve farki yakinsak.** ( bi zahmet ). iraksakta dogru degildir.  
*Asagidaki ornek iki iraksak fonkun toplamini yakinsak oldugnu gosterir*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1$$

◦ **Diziler sikistirma kurali.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \text{ gosterelim,}$$

$$n \geq 1 \text{ icin } n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n < 1 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^{n-1}$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ durumunda,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

- **icine alma kurali:** fonk surekliyse icine limit alınabilir. ( triglar loglar vs. )

- Monoton Diziler: daima artan veya azalan dizilere denir.  $a_n - a_{n+1}$  ya da turevi alinir.

# Seriler

- **Sonsuz Seriler.**

- Bir dizinin terimlerinin toplamidir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

- Bu toplami bir terimde sonlandirirsak artik elimizde yepyeni bir dizi olmus olur. ( kısmi toplamlar dizisi. )
- Bu dizinin karakteri de serinin karakterini de verecek.
- Kısmi toplamlar dizisinin limiti varsa yakınsak olduğu söylenir. Ve toplami bulunabilir.
- Seri, bir dizinin toplamı.
- Karakteri irksagi ve yakınsaklığı.
- Sonsuz toplam yerine sonlu toplam yapıp yorum yapacağız.
- Kısmi toplamlar dizisi bir limite sahipse yakınsak.
- Yakınsak bir serinin toplamı farkı yakınsaktır.
- Yakınsak bir serinin bir sayıyla carpimi yakınsaktır.
- Teleskopik seri: Bu yöntem özellikle ardisik gelenler icin kullanilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k-1} - a_k) = a_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\sum (a_k)$$

serisi yakınsak ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani, bir dizinin limiti 0 ise ondan oluşan bir seri yakınsak olabildiği gibi iraksak da olabilir.

**NOT:** Bir serinin genel teriminin limiti mevcut ise ve 0 değilse o dizi *iraksaktır*.  
0 çıkarsa bir test uygulayıp durumu değerlendireceğiz.

## Harmonik ve Geometrik Seri

- HARMONİK SERİ İRAKSAKTIR !!
- Harmonik serileri iraksaktır. Payın derecesi paydanın derecesinden 1 küçük olan serilere harmonik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

- Geometrik seri sınavda her zaman çıkar.
- Geometrik serinin ilk teriminin r'nin kuvveti 0 olacak. Olmazsa ona göre ayarlarız.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

- $|r| < 1$  iken  $a/(1-r)$  sayısına *yakınlar*,  $|r| \geq 1$  ise *iraksar*.

## Integral testi

- Sürekli azalan ve pozitif bir fonk için kullanılır.

- İmparator integralin bir sayı ise o sayı serinin toplamını ifade etmez. Sadece serinin karakterini belirler.
- Bir serinin impropri integralinin karakteri ve kendisinin karakteri aynıdır.

## p-serisi

- $p$  pozitif bir reel sayı olmakla beraber,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

- $p$  1'den büyük olduğu zaman sadece yakınsaktır.

## Mukayese Testi

- Eğer bir serinin genel terimini başka bir serinin genel terimiyle mukayese edebiliyorsanız ve o serinin karakterini biliyorsanız mukayese testi elverişlidir.
- Orjinal serimiz  $a_k$  olsun öbür serimiz ise  $b_k$  olsun.
  - Eğer  $a_k$  nin bütün terimleri  $b_k$  ninkinden **küçük** kalıyorsa ve  $b_k$  serisinin karakteri yakınsaksa  $a_k$  da yakınsaktır.
  - Eğer  $a_k$  nin bütün terimleri  $b_k$  ninkinden **büyük** kalıyorsa ve  $b_k$  serisinin karakteri iraksaksa  $a_k$  da iraksaktır.

### Limit Mukayese Testi:

- $$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$
- Eğer  $L > 0$  ise her iki seri de yakınsar ya da iraksar.
- Eğer  $L = 0$  ise ve  $b_k$  yakınsak ise,  $a_k$  serisi de yakınsaktır.
- Eğer  $L = \infty$  ise ve  $b_k$  iraksak ise,  $a_k$  serisi de iraksaktır.

## Alterne Serilerde Yakınsaklık:

- Bir alterne serinin mutlak değerini alınca  $(-1)^n$  terimi kalkar. Bu durumda,  $a_n$  kalır ve bu seri de yakınsak ise mutlak yakınsak denir.
- Üstteki test başarısız ise ve alttak şartları sağlıyorsa:
  - Seri azalandır.
  - Serinin her bir elemanı pozitiftir.
  - Genel terim limiti 0'dir.sartlı yakınsaktır.

## Kuvvet Serileri

$$\sum a_k x^k$$

dizisi için sıfırdan farklı  $c$  sayısı için yakınsak ise

$$|x| < |c|$$

sağlayan bütün  $x$ 'ler için yakınsaktır.

## Yakınsaklık yarıçapı ve aralığı:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$\rho = 0, \quad x = x_0 \quad \text{icin yakınsar}$$

$$\rho = c, \quad |x| < |c| \quad \text{icin yakınsar}$$

$$\rho = \infty, \quad x = R \quad \text{icin yakinsar}$$

- bulunan araliklari uc noktali ayrica kontrol edilmelidir.

## Kuvvet serileri ve fonksiyonlar.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad |x| < 1$$

- verilen denklemi bu formata gore ayarlayip geometrik serinin ozelliklerinden faydalanacagiz.  
NOT: Bir serinin p gibi bir yakinsaklik yariçapina sahipse, bu fonksiyonun turevi de integrali de ayni p'ye sahiptir. ( aralik degisebilir )

## Serinin Turevi ve integrali.

- Her ne kadar bir serinin yakinsadigi aralik turev veya integral alinca degismese de uc noktali kontrol edilmelidir.

## Kutupsal Koordinatlar

- $\cos$  iceren kardioidler kutup eksenine , yani x-ekseni, gore simetrikler.
- $\sin$  iceren kardioidler normal eksene , yani y-ekseni, gore simetrikler.
- Bazi kesisim noktali denklemlerden gorulemedigi icin gradige bakarak daha iyi yorum yapabiliriz.

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

- Ustteki formulu kullanarak bir egrinin kutupsal koordinattaki egimini bulabilecegiz. bu da kesilen noktali ogrenmekte epeyce faydali olacaktir.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

- Ustteki formulu kullanip kutbu bakis acisina alarak alan hesabi yapacagiz.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

- Ustteki formulu kullanip kutupsal koordinatlarda olan bir yayin uzunlugunu bulacagiz.

## Vektorler

`Konum Vektoru:' Orjinden baslayip belli bir yere kadar giden vekotre konum vektoru denir.

Paralel Vektorler:

$$a = \lambda b$$

[click me](#)

02:32:42 / 02:54:55

## Uzayda Dogrular

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- $\mathbf{v}$  ile gosterilen vektor bizim icin cok onemlidir.
- Eger iki dogru birbirinin paraleli ise bu yon vektorlerinin paralel oldugunu gosterir.
- ustte verilen  $a$ ,  $b$  ve  $c$  nin herhangi birisinin 0 olmasi durumunda denklem simetrik olamaz .
- Bunlardan herhangi birisinin 0 gelmesi durumunda tabana 0 yazmayacagiz. Tavani 0'a esitleyeceigiz. Bu durum bizi  $0/0$  tanimsizligina goturur.



# Düzlemler

- Sunu hayal edelim, elimizde iki nokta var:  $p$  ve  $p_0$ . Bu iki noktayı birleştirerek bir vektör çizelim.
- Çizilen bu vektör öyle bir  $n$  vektörüyle noktasal çarpılsın ki sonuç 0 versin.
- Bu  $n$  vektörüne normal vektör adını vereceğiz.

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Nasıl doğrularda  $v$  değeri çok önemli ise düzlemlerde normal doğru da  $n$  o kadar da önemli.
- Eğer iki düzlemin normal doğruları birbirine dikse,  $n_1 \cdot n_2 = 0$  ise bu iki düzlem birbirine diktir.
- Eğer iki düzlemin normal doğruları paralelse,  $n_1 \times n_2 = 0$  ise bu iki düzlem birbirine paraleldir.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$$

- üstteki formülün yardımıyla aradaki açıyı bulabiliriz.
- Eğer bir doğrunun yönlü vektörü  $v$  ve bir düzlemin  $n$  normal doğrusu birbirine dikse o doğru ve düzlem birbirine paraleldir.
- Eğer bir doğrunun yönlü vektörü  $v$  ve bir düzlemin  $n$  normal doğrusu birbirine paralelse o doğru ve düzlem birbirine diktir.
- Bir doğru boyunca kesilen düzlemler ailesine düzlemler demeti denir. Düzlemlerin genel terimleri 0 esitlenir.  
ve birisi bir katsayı ile çarpılıp diğeri ile toplanır.
- Birlikte türevleri sıfır olmayan eğriye düzgün eğri denir.

$$L = \int_a^b \{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2\}^{\frac{1}{2}} dt$$

- Üstteki formül yardımıyla yay uzunluğunu bulabileceğiz.