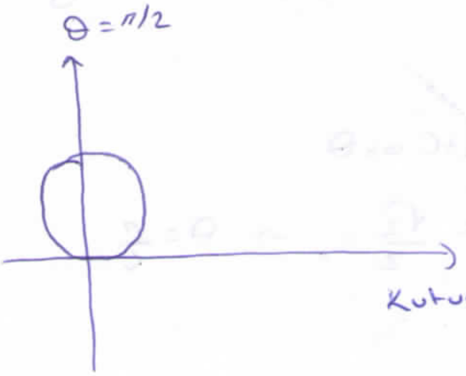
(*) $r=\sqrt{2}\sin\theta$ ile sınırlı bölgenin alanı?

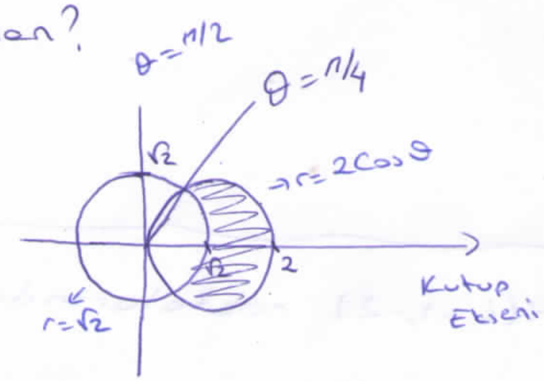


$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{4}\qquad \boxed{A=\frac{\pi}{2}}$$

(*) a) $r=2\cos\theta$ eğrisinin içinde $r=\sqrt{2}$ nin dışında kalan alan?



$$2\cos\theta=\sqrt{2}\ \rightarrow\ \boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(2\cos\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sqrt{2})^2\,d\theta$$

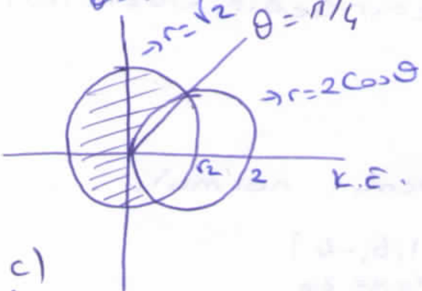
$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/4}(4\cos^2\theta-2)\,d\theta\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}2\cos 2\theta\,d\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A=1}$$

b)

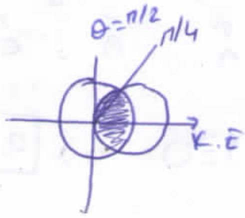
☆ $r=2\cos\theta$ nın dışında, $r=\sqrt{2}$ nin içinde kalan alanı veren integral:



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi}(\sqrt{2})^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\cos\theta)^2\,d\theta$$

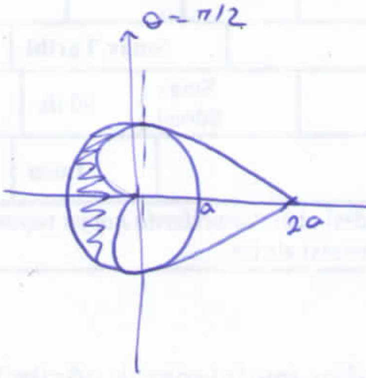
c)

☆ Ortak Alanı veren integral:



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sqrt{2})^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\cos\theta)^2\,d\theta$$

2) $a>0$ olmak üzere $r=a(1+\cos\theta)$ kardiyoidinin dışında, $r=a$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız. (Şekil çiziniz)



$$\frac{A}{2}=\int_{\pi/2}^{\pi} a^2-(a+a\cos\theta)^2\,d\theta=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(-2a^2\cos\theta-a^2\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\right)d\theta$$

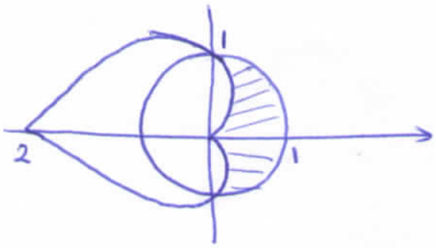
$$=-2a^2\sin\theta-a^2\frac{\theta}{2}-\frac{a^2}{4}\sin 2\theta\,\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=-a^2\frac{\pi}{2}-\left(-2a^2-a^2\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{a^2\pi}{2}+2a^2+\frac{a^2\pi}{4}$$

$$=2a^2-\frac{\pi}{4}a^2$$

6

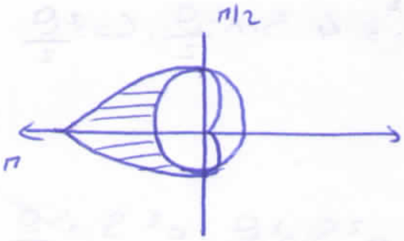
* $r=1$ çemberinin içinde, $r=1-\cos\theta$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını veren integral?



$$\frac{A}{2}=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$A=\int_{0}^{\pi/2}\left(1-(1-\cos\theta)^2\right)d\theta$$

b) çemberin dışı, kardiyoidin içi:

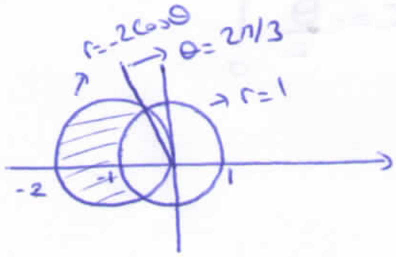


$$\frac{A}{2}=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,(1-\cos\theta)^2\,d\theta-\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta$$

$$A=\int_{\pi/2}^{\pi}\left((1-\cos\theta)^2-1\right)d\theta$$

---

* $r=-2\cos\theta$ çemberinin içinde, $r=1$ çemberinin dışında kalan alan?



$$-2\cos\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(-2\cos\theta)^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}1^2\,d\theta$$

$$A=\int_{2\pi/3}^{\pi}(4\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos2\theta}{2}}-1)\,d\theta=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+2\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\theta+\sin2\theta\Big|_{2\pi/3}^{\pi}=\pi-\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

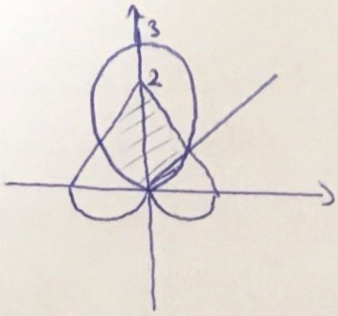
⊛ a) $r=3\sin\theta$, $r=1+\sin\theta$ ortak alan?

b) $r=3\sin\theta$ içi, $r=1+\sin\theta$ dışı alan?

c) $r=3\sin\theta$ dışı, $r=1+\sin\theta$ içi alan?

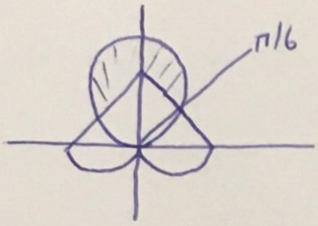
$3\sin\theta = 1+\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

a)



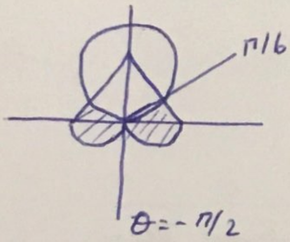
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (3\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1+\sin\theta)^2 d\theta$$

b)



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2 \, d\theta$$

c)



$\theta = -\pi/2$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1+\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (3\sin\theta)^2 d\theta$$

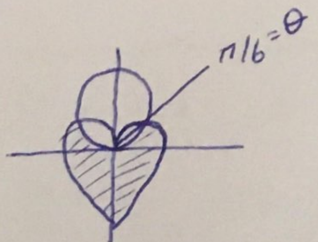
⊛ a) $r=1-\sin\theta$ içi $r=\sin\theta$ dışı alan?

b) $r=1-\sin\theta$ dışı $r=\sin\theta$ içi alan?

$1-\sin\theta = \sin\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

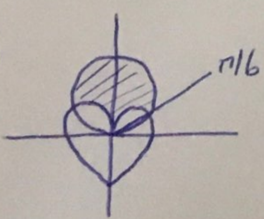
a)



$\theta = -\pi/2$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1-\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sin\theta)^2 d\theta$$

b)



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left((\sin\theta)^2 - (1-\sin\theta)^2\right) d\theta$$

(*) $r = a\sin^2\frac{\theta}{2}$ eğrisinin $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığındaki uzunluğu? $(a>0)$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\theta$$

$$r^2 = a^2 \sin^4\frac{\theta}{2}$$

$$r' = a.2.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2} = a.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$(r')^2 = a^2.\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$r^2+(r')^2 = a^2.\sin^4\frac{\theta}{2} + a^2\sin^2\frac{\theta}{2}.\overbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}^{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cancel{a^2\sin^4\frac{\theta}{2}} + a^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \cancel{a^2\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

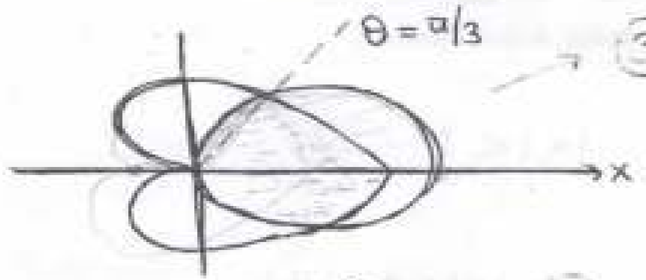
$$\sqrt{r^2+(r')^2} = \sqrt{a^2.\sin^2\frac{\theta}{2}} = a.\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{\pi} a.\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{\pi} a.\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -2a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \boxed{2a}$$

15

4. a) $r = 3\cos\theta$ ve $r = 1 + \cos\theta$ eğrilerinin içinde kalan (ortak) bölgenin alanını veren integrali yazınız. (İntegral hesaplanmayacak.)



a)

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3.\cos\theta)^2\, d\theta$$

b) Kardiyoid içi, çember dışı

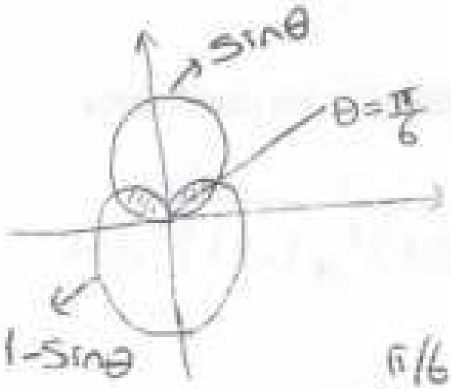
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3\cos\theta)^2\, d\theta$$

c) Çember içi kar. dışı

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\, d\theta$$

---

b) $\rho = 1 - \sin\theta$ kardiyoidi ve $\rho = \sin\theta$ çemberinin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını bulunuz .(12p)



$$1 - \sin\theta = \sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sin\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\sin\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}(3 - 4\sin\theta - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$A = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\ \text{br}^2$$

(*) P(1,2,1) ve Q(2,0,1) den geçen ve $3x-y+z=6$ düzlemine dik olan düzlem?

$3x-y+z=6 \Rightarrow \vec{n_1}=\langle 3,-1,1\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n_1}$

$\vec{PQ}=\langle 1,-2,0\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{PQ}$ — $\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{n_1}$

$$\vec{PQ}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&0\\3&-1&1\end{vmatrix}=\langle \overset{A}{-2},\overset{B}{-1},\overset{C}{5}\rangle \qquad P(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{2},\overset{z_0}{1})$$

$$\underline{-2(x-1)-(y-2)+5(z-1)=0}$$

(*) (2,0,1) den geçen ve x(1,1,0), y(4,-1,-2) noktalarından geçen doğruya dik olan düzlem?

$\vec{n}=\vec{xy}=\langle \overset{A}{3},\overset{B}{-2},\overset{C}{-2}\rangle \qquad (\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{1}) \Rightarrow 3.(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$

$$\boxed{3x-2y-2z=4}$$

(*) A(1,6,-4) noktasından geçen ve $x=1+2t,\ y=2-3t,\ z=3-t$ doğrusunu içeren düzlemin denklemi? (2016-bütünleme sorusu)

$$\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\y=2-3t\\z=3-t\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$$

doğru üzerinde bir nokta: B(1,2,3)

$\vec{AB}=\langle 0,-4,7\rangle$ ve $\vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$ düzlem üzerindedir. Düzlemin normali $\vec{AB}\times\vec{v}$ ye paraleldir.

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-4&7\\2&-3&-1\end{vmatrix}=\underset{A}{25}\vec{i}+\underset{B}{14}\vec{j}+\underset{C}{8}\vec{k}$$ → düzlemin normali

$A(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{6},\underset{z_0}{-4})$

$$25.(x-1)+14(y-6)+8(z+4)=0 \Rightarrow \boxed{25x+14y+8z=77}$$

(*) $x-y+2z=3$ ile $2x+y+z=0$ ın arakesit acısı?

$\vec{n_1}=\langle 1,-1,2\rangle \quad \vec{n_2}=\langle 2,1,1\rangle \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{2-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{3}{6}$

$\Downarrow \quad \cos\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

(*) $x_1=(1,1,2)$, $x_2=(0,2,3)$, $x_3=(2,1,1)$ den geçen düzlem?

- $\vec{v_1}=\overrightarrow{x_1x_2}=\langle -1,1,1\rangle \quad \vec{v_2}=\overrightarrow{x_1x_3}=\langle 1,0,-1\rangle$

$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}=-\vec{i}-\vec{k}$

$x_1=(1,1,2) \quad \vec{n}=-\vec{i}-\vec{k} \Rightarrow -1.(x-1)+0.(y-1)-1(z-2)=0$

$\Downarrow$

$-x-z=-3 \rightarrow \boxed{x+z=3}$

---

b) $(2,-1,-1)$ noktasından geçen, $x+y=0$ ve $x-y+2z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$n_1=\langle 1,1,0\rangle$ (1)

$n_2=\langle 1,-1,2\rangle$ (1) ; $n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\langle 2,-2,-2\rangle$ (1)

$n=\langle 2,-2,-2\rangle=v$ (istenen doğrunun yönlü vektörü) ; (2)

istenilen doğrunun parametrik denklemleri

$\left.\begin{aligned} x&=2+2t \\ y&=-1-2t \\ z&=-1-2t \end{aligned}\right\}$ (2) şeklindedir

(8)

Soru 4. $x+y=1$ ve $2x+y-2z=2$ düzlemleri veriliyor.

a) Bu düzlemlerin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz. ***(13puan)***

b) Bu düzlemlerin kesişim doğrusuna dik olan ve $P(3,1,-1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz. ***(12puan)***

a) $x+y=1 \qquad 2x+y-2z=2$

$\vec{n}_1=\vec{i}+\vec{j} \qquad \vec{n}_2=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$

$z=0 \Rightarrow -x-y=-1$

$2x+y=2$

$x=1 \Rightarrow y=0$

$A(1,0,0)$

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$$

b)

$-2(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0$

$$\boxed{-2x+2y-z=-3}$$

(*) $x_1=(1,2,1)$ ve $x_2=(2,1,0)$ noktalarından geçen doğru ile $y_1=(3,-1,0)$ ve $y_2=(4,-3,0)$ noktalarından geçen doğru $(2,1,0)$ noktasında kesişmektedir. Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem bu noktadan geçsin, hem de her iki doğruya da dik olsun.

$\vec{v_1}=\overrightarrow{x_1x_2}=\langle 1,-1,-1\rangle \qquad \vec{v_2}=\overrightarrow{y_1y_2}=\langle 1,-2,0\rangle$

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&-1\\1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\vec{v}=\langle \overset{a}{-2},\overset{b}{-1},\overset{c}{-1}\rangle \rightarrow$ doğrunun yön vektörü

$(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{0}) \rightarrow$ doğru üzerinde bir nokta

$$\boxed{\begin{aligned}x&=2-2t\\y&=1-t\\z&=-t\end{aligned}}$$

(*) $\begin{cases}x=2t^2+3\\y=t^4\end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $t=-1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$t=-1 \Rightarrow \begin{matrix}x=5\\y=1\end{matrix} \Rightarrow (5,1)$ den geçen teğetin denklemi:

$$\boxed{y-1=f'(5).(x-5)}$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3}{4t}=t^2 \Rightarrow f'(5)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=1$$

$y-1=x-5$

$\boxed{y=x-4}$

Teğet denklemi

(*) $x = 4\sin t \quad y = 2\cos t$ eğrisinin $t = \frac{\pi}{4}$ deki

teğeti ?

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin t}{4\cos t}\Bigg|_{t=\pi/4} = -\frac{1}{2}$$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_0 = 2\sqrt{2} \quad y_0 = \sqrt{2}$

Teğet Denklemi $\Rightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}}$$

(*) $x + 2y + z = 1$ ile $2x + 2y - z = 1$ düzlemlerinin arakesitine paralel ve $(1,0,2)$ den geçen doğru?

$x + 2y + z = 1$ in normali $\Rightarrow n_1 = \langle 1, 2, 1\rangle$

$2x + 2y - z = 1$ " " $\Rightarrow n_2 = \langle 2, 2, -1\rangle$

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \langle \underset{a}{-4}, \underset{b}{3}, \underset{c}{-2} \rangle$$

$\begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{matrix}$
$(1, 0, 2) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at = 1 - 4t \\ y &= y_0 + bt = 3t \\ z &= 2 - 2t \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 4t \\ y &= 3t \\ z &= 2 - 2t \end{aligned}}$$

S.4 **a)** $x + 2y + 3z = 5$ düzleminin $x - 2y + z = 3$ düzlemine dik olup olmadığını araştırınız.(7p)

Düzlemlerin normolleri sırasıyla

$\vec{n_1} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ olup $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 - 4 + 3 = 0$

$\vec{n_2} = \langle 1, -2, 1 \rangle$

olduğundan verilen düzlemler diktir.

b) $x - 2y + 5z = 1$ düzleminin $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = t - 1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.(7p)

Doğrunun yönlü vektörü $\vec{V} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ olup

Düzlemin normal vektörü $\vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$

$\vec{V} \cdot \vec{n} = -1 - 4 + 5 = 0$ olduğundan doğru düzleme paraleldir.

c) $t, [-1,0]$ aralığında değişken, $x(t) = t^2, y(t) = 1 - t^2$ ile çizilmiş yolun uzunluğunu bulunuz.(10p)

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} |t|\, dt = -2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} t\, dt = \sqrt{2} \text{ br}$$

16