

MAT1071 MATEMATİK-I ALIŞTIRMALAR-6
L'HOSPITAL KURALI VE EKSTREMUM
NOKTALAR

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^{100}}{x^{99} \sin 2x} = ?$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-1} = ?$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1 - e^x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x}} = ?$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos^2 x}{x^2} \right) \right] = ?$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} (1 - \cos^2 x)}{\frac{\frac{\pi}{2} \sin^2 x}{x^2}}$$

$$\frac{\pi \cdot \sin 2x}{4x}$$

$$\frac{+\pi \cos x \cdot \sin x}{2x}$$

$$\sin \left(\frac{2\pi \cdot \cos 2x}{4} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 //$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2^x - 1} = ?$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$2^x \cdot \ln 2$$

$$\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = ?$$

$$\ln y = \frac{\ln(e^x + \sin x)}{2x}$$

$$\boxed{y=e}$$

$$\frac{e^x + \cos x}{2(e^x + \sin x)} \rightarrow \frac{1+1}{1+0}$$

$$1$$

7. $y = \log_{(x^2+2)}(x^2+5)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$\frac{\ln(x^2+5)}{\ln(x^2+2)} = \frac{\frac{2x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+2) - \frac{2x}{x^2+2} \cdot \ln(x^2+5)}{\ln^2(x^2+2)}$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x} = ?$

$$\frac{\ln \cot x}{\ln x} \quad \frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{-x \cdot \csc^2 x}{\cot x}$$

$$-x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{-x}{\sin x \cdot \cos x} \quad 0$$

$$\frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad -\frac{1}{1} = -1$$

$$\ln y = -1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e}}$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\arctan x} - x}{\ln(1+x^2) + x} = ?$

$$\frac{2^{\arctan x} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) - 1}{\frac{2x}{1+x^2} + 1}$$

$$\frac{2^{\arctan x} \cdot \ln 2 - 1 - x^2}{x^2 + 2x + 1} = -1 //$$

10. $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ fonksiyonunun ekstremum (mutlak ve yerel) değerlerini bulunuz.

$$f'(x) = 1 + \ln|x+1|$$

$$\ln|x+1| = -1$$

$$|x+1| = \frac{1}{e}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3} = ?$$

$$\frac{e^x - (1 + x)}{3x^2}$$

$$\frac{e^x - x - 1}{3x^2} \rightarrow \frac{e^x - 1}{6x}$$

$$\frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} = ? \quad \sim 1,$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$$

$$3x^2 \quad x^3$$

13. $f(x) = (x-2)^{2/3}(2x+1)$ fonksiyonunun kritik noktalarını belirleyiniz.

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x-2} \cdot (2x+1) + (x-2)^{2/3} \cdot 2$$

$$\frac{10x-10}{3\sqrt[3]{x-2}} = 0 \quad \begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline + \quad - \quad + \\ \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \end{array}$$

14. $f(x) = x^2(x-2)^2$ fonksiyonu için hangileri doğrudur?

- a) $(0, 1) \cup (2, \infty)$ 'da azalandır. \times
- b) $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$ 'da artandır. \times
- c) Yerel maksimum değerlerinden biri 0 dır.
- d) Yerel maksimum değerlerinden biri 0 dır.

1

$$x^2(x^2-4x+4)$$

$$f(x) = (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline - \quad + \quad - \quad + \\ \searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \end{array}$$

$$4x \begin{pmatrix} x^2 & -3x & +2 \\ x & & -2 \\ x & & -1 \end{pmatrix}$$

$$4x(x-2)(x-1)$$

15. $f(x) = 2x^2 - \ln|x|$ fonksiyonu için hangileri doğrudur?

a) Kritik noktalarının kümesi $\{-1/2, 0, 1/2\}$ dir. ~~X~~

b) $(-\infty, -1/2] \cup (0, 1/2]$ 'da artandır. ~~X~~

c) $[-1/2, 0) \cup [1/2, \infty)$ 'da azalandır. ~~X~~

☒ Hiçbiri.

$$x \rightarrow 0^+ \quad 4x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{4x^2 - 1}{x} = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

~~x=0~~

$$x \rightarrow 0^- \quad 4x + \frac{1}{x}$$

$$\frac{4x^2 + 1}{x} = 0$$

$$\cancel{x=0}$$

16. $f(x) = (x+1)^{1/3} - (x-1)^{1/3}$ fonksiyonunun $[0, 1]$ 'da en büyük değeri nedir?

$$1 - (-1) = 2$$

$$\sqrt[3]{2} -$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

17. $a > 0$ olmak üzere $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$ fonksiyonu sırasıyla $x = p$ ve $x = q$ da maksimum ve minimum değerlerine sahipse ve $p^2 = q$ eşitliği varsa a nedir?

$$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$$

$$a^2 = 2a$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$x^2 - 3ax + 2a^2$$

$$\begin{array}{cc} x & -2a \\ x & -a \end{array}$$

$$x = 2a$$

$$x = a$$

18. $1 + x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq \sqrt{1 + x^2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

19. $f(x) = 1 + x\sqrt{3-x}$ fonksiyonunun ekstremum (mutlak ve yerel) değerlerini bulunuz.

$$h'(x) = f'(x) - 2f(x) \cdot f'(x) + 3f(x)^2 \cdot f'(x)$$

$$h'(x) = f'(x) (1 - 2f(x) + 3f(x)^2)$$

20. Her x reel sayısı için $h(x) = f(x) - [f(x)]^2 + [f(x)]^3$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

- I. f 'nin artan olduğu aralıkta h fonksiyonu da artandır. ✓ $3x^2 - 2x + 1$
- II. f 'nin azalan olduğu yerde h fonksiyonu artandır. ✗ $4 - 4,3,1$
- III. f 'nin azalan olduğu yerde h fonksiyonu da azalandır. ✓ $4 - 12 < 0$
- IV. Genel olarak bir şey söylenemez. ✗