Olasılıksal Robotik

Dr. Öğr. Üyesi Erkan Uslu

6

2B Düzlemde Hareket Modeli

- **Filtrelerde robot hareketi ile ilgili prediction adımında kullandığımız modeller → Hareket Modelleri**

$$p(x_t | u_t, x_{t-1})$$

- **2B düzlemdeki holonomik olmayan (saf y yönünde hız verilemeyen) robotlar ile ilgili genel hareket modelleri**
  - Hız tabanlı
  - Odometri tabanlı

2B Düzlemde Hareket Modeli

- **Hız modeli : kontrol edilen parametreler**
  - Gövde doğrusal x hızı
  - Gövde açısal z hızı
- **Odometri modeli : kontrol parametreleri → Teker dönüşlerinin ölçümüne dayalı olarak**
  - Kat edilen mesafe
  - Yapılan dönüş

2B Düzlemde Hareket Modeli

- **Hız modeli : komutlar yürütülmeden bellidir**
- **Hız modeli : hareket planlaması, engel kaçınımı için kullanılabilir**
- **Odometi modeli : hareket tamamlandığında hesaplanabilir**
- **Odometri modeli : Hareket tahmini için kullanılabilir, fakat planlama için kullanılamaz.**

Hareket Modeli

- **Hareket modelinin çıktısı; hareket komutu yürütüldükten sonra, robotun hangi durumda olduğunun olasılığının hesaplanmasıdır**
- **Bu işlem Olasılık Hata yayılımı ile kapalı formda yapılabileceği gibi**
- **Örnekleme temelli olarak da yapılabilir**

Hız Modeli

- **Hız modelinde kontrol işareti gövde doğrusal x hızı (v) ve gövde açısal z hızı (w) ‘dan oluşur**

$$u = \begin{pmatrix} \nu \\ \omega \end{pmatrix}$$

Hız Modeli – Örnekleme Temelli

$$\hat{\nu} = \nu + sample\left(\alpha_1 \cdot |\nu| + \alpha_2 \cdot |\omega|\right)$$
$$\hat{\omega} = \omega + sample\left(\alpha_3 \cdot |\nu| + \alpha_4 \cdot |\omega|\right)$$
$$\hat{\gamma} = sample\left(\alpha_5 \cdot |\nu| + \alpha_6 \cdot |\omega|\right)$$

Hız Modeli – Örnekleme Temelli (veya)

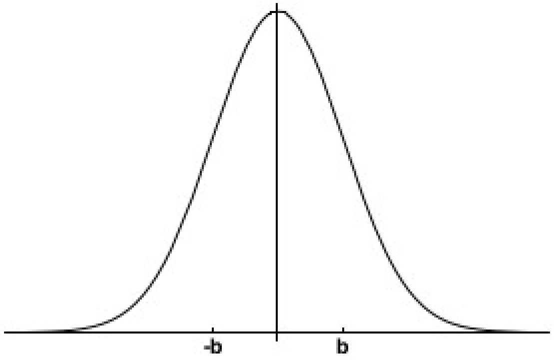
$$\hat{\nu} = \nu + sample\left(\alpha_1 \cdot \nu^2 + \alpha_2 \cdot \omega^2\right)$$

$$\hat{\omega} = \omega + sample\left(\alpha_3 \cdot \nu^2 + \alpha_4 \cdot \omega^2\right)$$

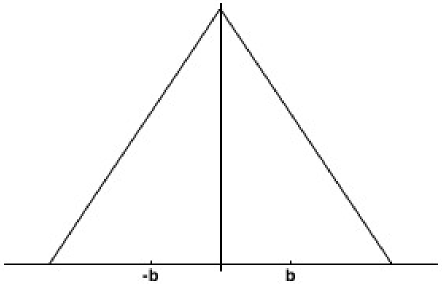
$$\hat{\gamma} = sample\left(\alpha_5 \cdot \nu^2 + \alpha_6 \cdot \omega^2\right)$$

Hız Modeli – Örnekleme Temelli (veya)

$$sample(b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12} rand(-b, b)$$



$$sample(b) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[rand(-b, b) + rand(-b, b)\right]$$

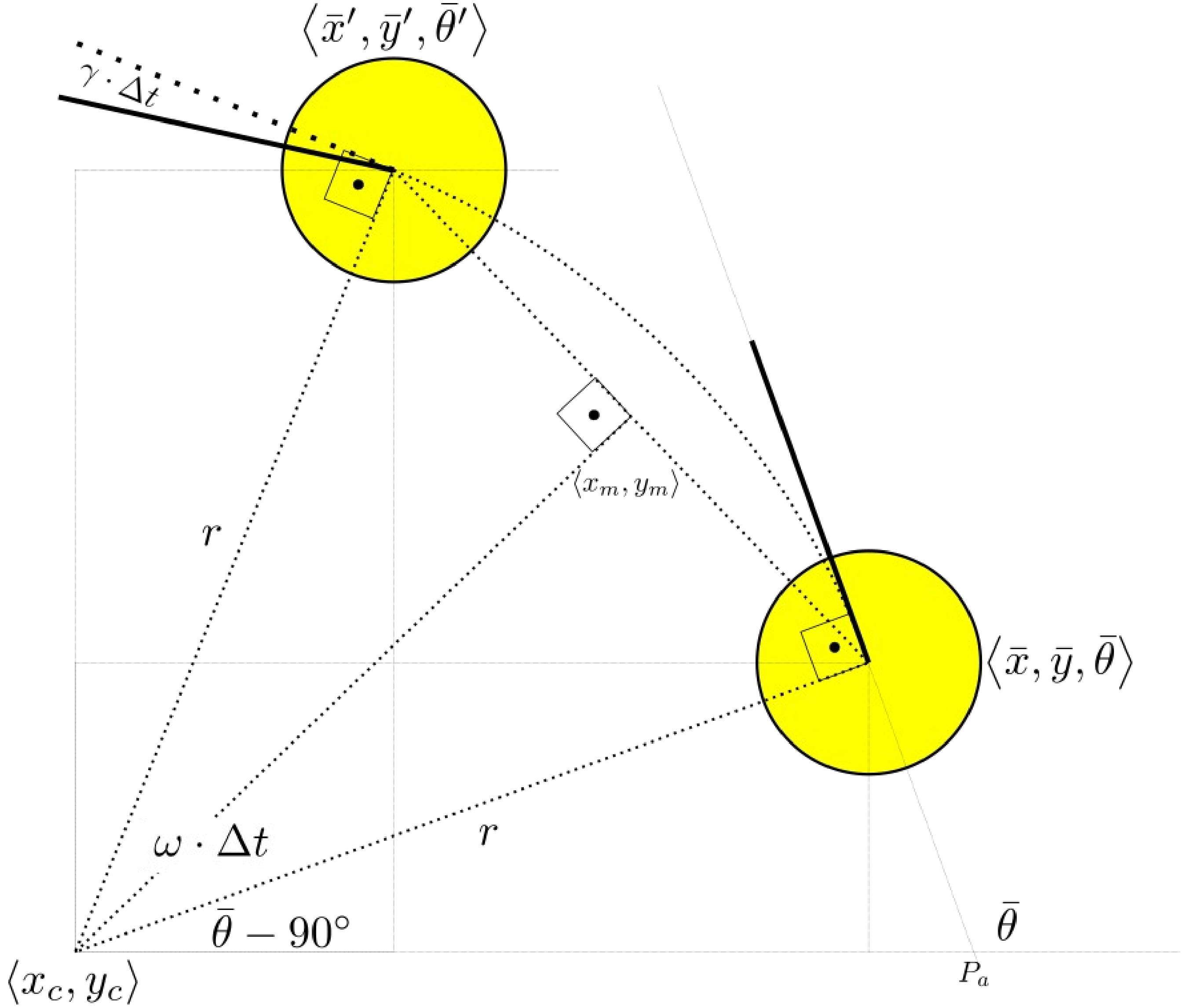


Hız Modeli – Örnekleme Temelli

- **v, w ve γ hatalı hız komutları hesaplandıktan sonra mobil robotun bulunabileceği tahmini konumlar**

$$
\begin{aligned}
x' &= \bar{x} - \frac{\hat{\nu}}{\hat{\omega}} \sin \bar{\theta} + \frac{\hat{\nu}}{\hat{\omega}} \sin\left(\bar{\theta} + \hat{\omega} \cdot \Delta t\right) \\
y' &= \bar{y} + \frac{\hat{\nu}}{\hat{\omega}} \cos \bar{\theta} - \frac{\hat{\nu}}{\hat{\omega}} \cos\left(\bar{\theta} + \hat{\omega} \cdot \Delta t\right) \\
\theta' &= \bar{\theta} + \hat{\omega} \cdot \Delta t + \hat{\gamma} \cdot \Delta t
\end{aligned}
$$

Hız Modeli – Kapalı Form



Hız Modeli – Kapalı Form

$$\left|\bar{P}'\bar{P}\right| \perp \left|P_c P_m\right|$$
$$\left|P_a\bar{P}\right| \perp \left|P_c\bar{P}\right|$$

$$x_m = \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}$$
$$y_m = \frac{\bar{y} + \bar{y}'}{2}$$

$$\frac{y_m - y_c}{x_m - x_c} \cdot \frac{\bar{y}' - \bar{y}}{\bar{x}' - \bar{x}} = -1$$
$$\tan\theta \cdot \frac{\bar{y} - y_c}{\bar{x} - x_c} = -1$$

Hız Modeli – Kapalı Form

$$x_c = \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2} - \mu\left(\bar{y}' - \bar{y}\right)$$

$$y_c = \frac{\bar{y} + \bar{y}'}{2} - \mu\left(\bar{x}' - \bar{x}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2}\,\frac{(\bar{x} - \bar{x}')\cos\theta + (\bar{y} - \bar{y}')\sin\theta}{(\bar{y} - \bar{y}')\cos\theta - (\bar{x} - \bar{x}')\sin\theta}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\bar{x}' - x_c\right)^2 + \left(\bar{y}' - y_c\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\bar{x} - x_c\right)^2 + \left(\bar{y} - y_c\right)^2} \end{aligned}$$

Hız Modeli – Kapalı Form

$$\Delta\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y}' - y_c}{\bar{x}' - x_c}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y} - y_c}{\bar{x} - x_c}\right)$$

$$\hat{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\hat{\nu} = \frac{\Delta\theta \cdot r}{\Delta t}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\bar{\theta}' - \bar{\theta}}{\Delta t} - \omega$$

Hız Modeli – Kapalı Form

$$\forall\ \bar{x}', \bar{y}', \bar{\theta}' \longrightarrow \hat{\nu}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}$$

$$\begin{aligned} p(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\theta}') = &prob(\nu - \hat{\nu}, \alpha_1 \cdot |\nu| + \alpha_2 \cdot |\omega|) \\ &\cdot prob(\omega - \hat{\omega}, \alpha_3 \cdot |\nu| + \alpha_4 \cdot |\omega|) \\ &\cdot prob(\hat{\gamma}, \alpha_5 \cdot |\nu| + \alpha_6 \cdot |\omega|) \end{aligned}$$

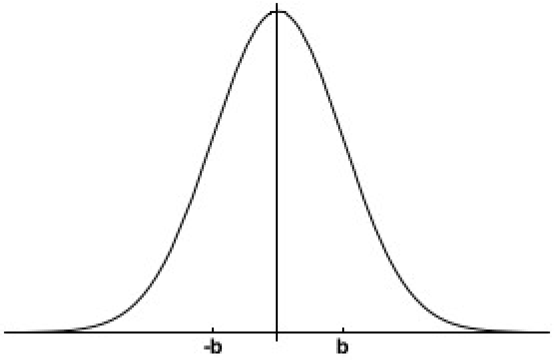
Hız Modeli – Kapalı Form (veya)

$$\forall\ \bar{x}', \bar{y}', \bar{\theta}' \ \longrightarrow \hat{\nu}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}$$

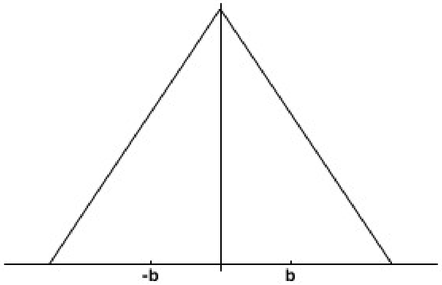
$$\begin{aligned} p(\bar{x}', \bar{y}', \bar{\theta}') =& prob(\nu - \hat{\nu}, \alpha_1 \cdot \nu^2 + \alpha_2 \cdot \omega^2) \\ & \cdot prob(\omega - \hat{\omega}, \alpha_3 \cdot \nu^2 + \alpha_4 \cdot \omega^2) \\ & \cdot prob(\hat{\gamma}, \alpha_5 \cdot \nu^2 + \alpha_6 \cdot \omega^2) \end{aligned}$$

Hız Modeli – Kapalı Form (veya)

$$prob(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$$



$$prob(a,b) = \max\left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}b} - \frac{|a|}{6b^2}\right\}$$



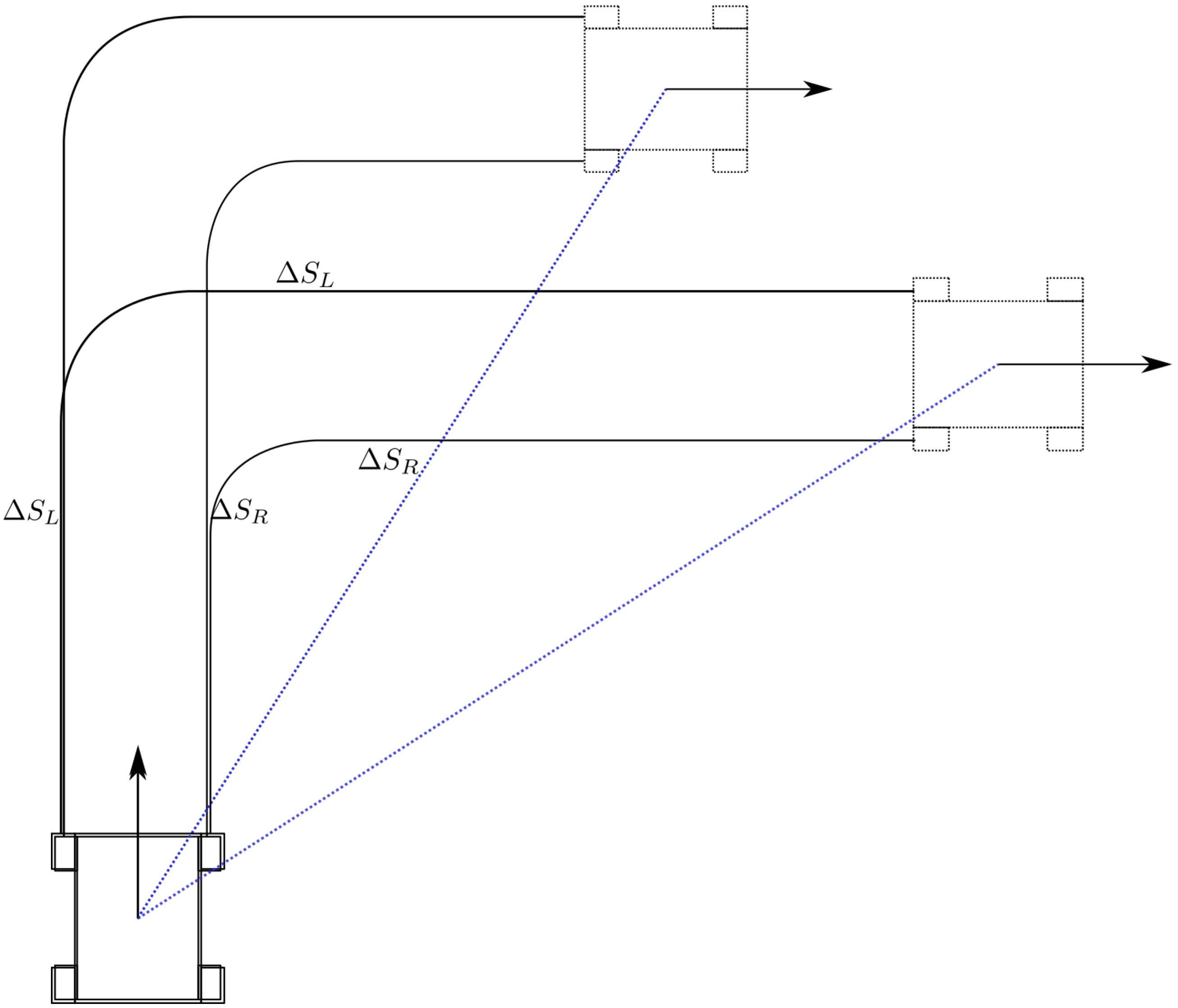
Odometri

- Tekerlek enkoder bilgisinden (tekerlek dönüş miktarı) üretilir
- Enkoder bilgisinin integrali olarak elde edilir
- Bir çeşit sensör bilgisidir
- Robotun ne kadar hareket ettiği bildirir
- Sensör bilgisi olsa da hareket komutu gibi düşünülebilir kullanılabilir

Odometri

- **Kontrol değişkenleri**
  - sağ teker dönüş miktarı
  - sol teker dönüş miktarı
- **Teker dönüş miktarları kısa aralıklarla (Δt) değerlendirilerek odometri hesaplanır**

Odometri



- Odometri doğal olarak her Δt değeri için hatalıdır
- Δt küçüldükçe toplam hata azalır

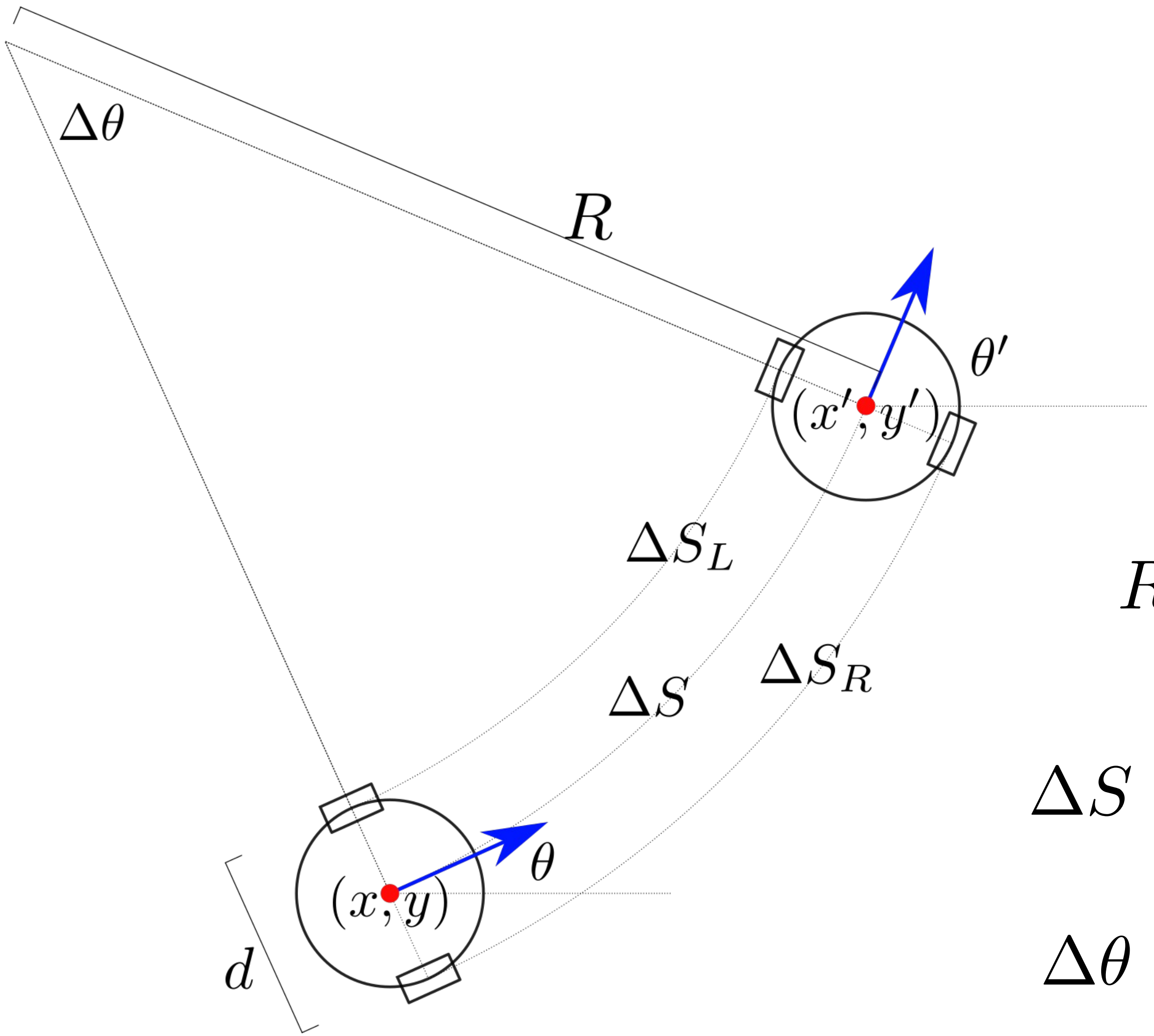
Odometri

- **Küçük Δt aralığında** robotun ne kadar ilerlediği **ve kafa açısının ne kadar değiştiği odometri bilgisi ile hesaplanabilir**

Odometri – Diferansiyel Sürüşlü Robot

- **Örneğin diferansiyel sürüşlü bir robotta ΔS_R ve ΔS_L sırasıyla sağ ve sol tekerlekler için Δt aralıkta kat ettikleri mesafe ise gövdenin ne kadar yol katettiği ΔS ve kafa açısının ne kadar değiştiği $\Delta \theta$ hesaplanabilir**

Odometri – Diferansiyel Sürüşlü Robot



$$\Delta S_L = \left(R - \frac{d}{2}\right)\Delta\theta$$

$$\Delta S_R = \left(R + \frac{d}{2}\right)\Delta\theta$$

$$\Delta S = R\Delta\theta$$

$$R = \frac{d}{2}\frac{(\Delta S_R + \Delta S_L)}{(\Delta S_R - \Delta S_L)}$$

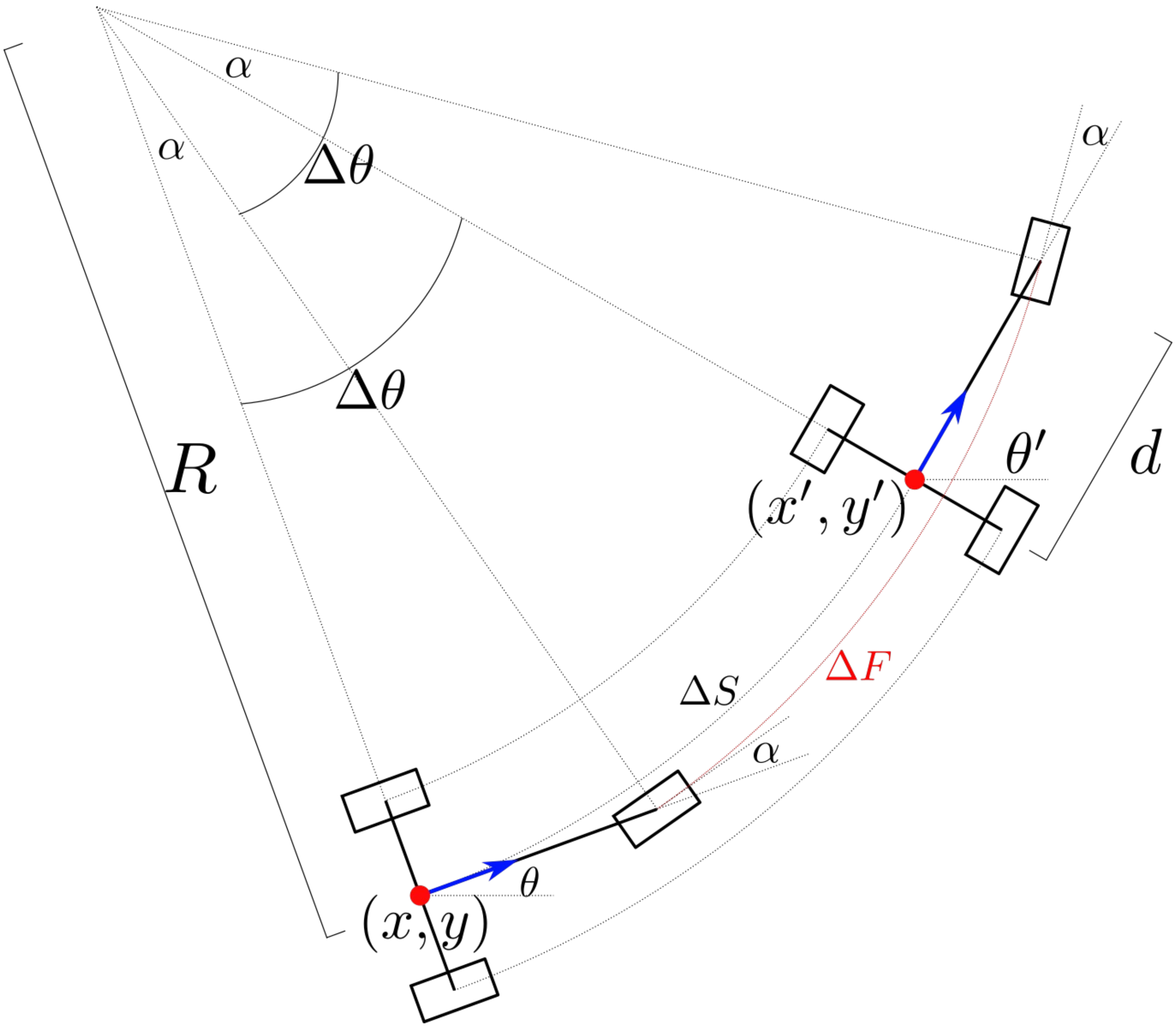
$$\Delta S = \frac{\Delta S_R + \Delta S_L}{2}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S_R - \Delta S_L}{d}$$

Odometri - Tricycle

- **Üç tekerlekli sürüşe sahip (tricycle) bir robotta ΔF ön tekerleğin Δt aralıkta kat ettiği mesafe ve α bu süre boyunca ön tekerleğin açısı olmak üzere gövde merkezinin ne kadar yol katettiği ΔS ve gövde açısının ne kadar değiştiği Δθ hesaplanabilir**

Odometri - Tricycle



$$\tan \alpha = \frac{d}{R}$$

$$\Delta S = \Delta\theta R$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta F \sin \alpha}{d}$$

$$\Delta S = \Delta F \cos \alpha$$

Trigonometri

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 0 = 0$$

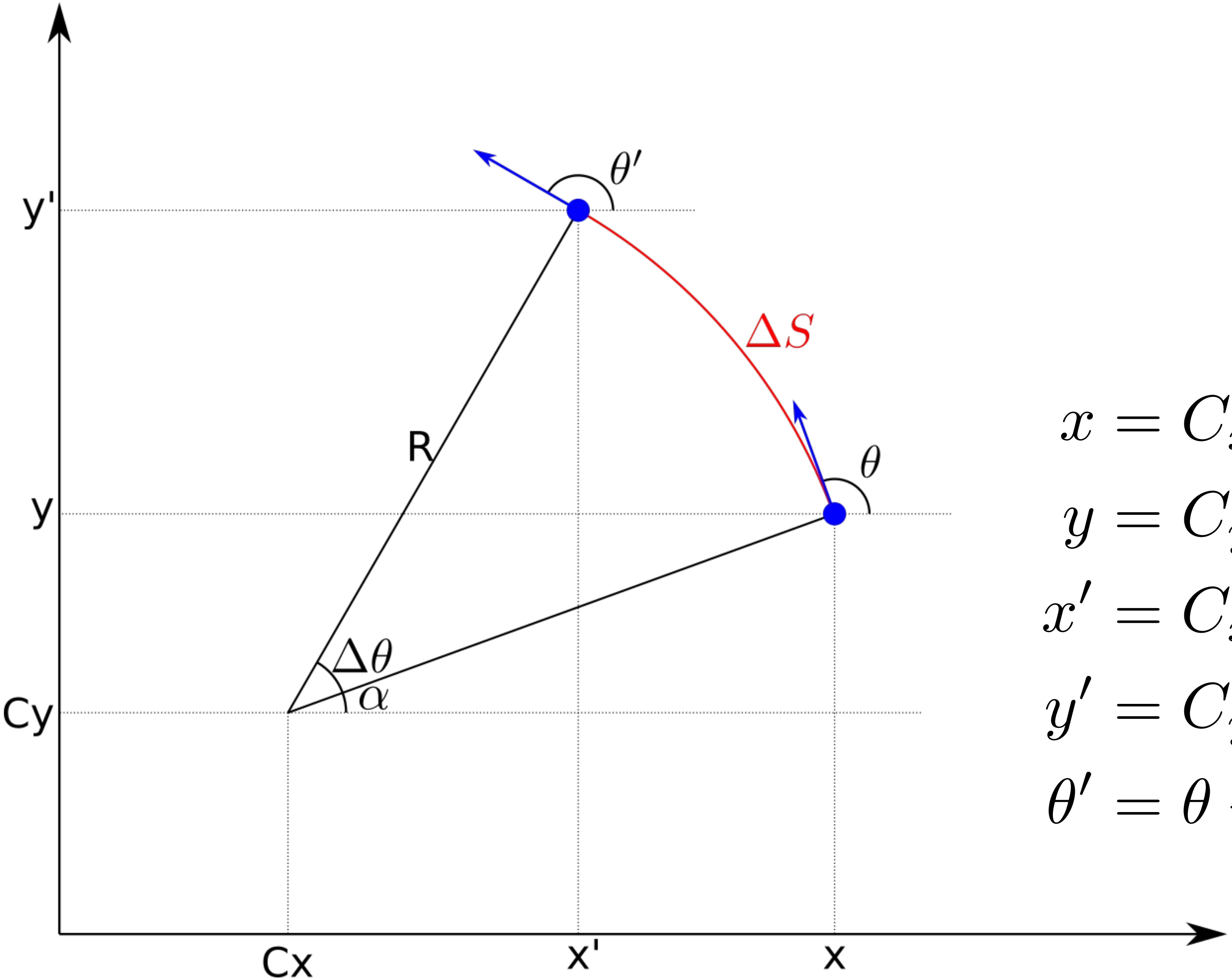
$$\cos 0 = 1$$

Odometri – Dış Kinematik

- **Gövde kafa açısı değişimini ve gövde hareket miktarını bulduktan sonra; noktasal bir cisim olarak kabul edebileceğimiz robot için dış kinematik değerleri hesaplanabilir**
- **Robotun bir çember yayı üzerinde, $\Delta\theta$ açısını taradığı ve bu sürede ΔS mesafe katettiği biliniyor**
- **Dönüş merkezi kontrol işaretlerine göre belirlenmektedir**

Dış Kinematik

x,y,θ,ΔS,Δθ biliniyor x’,y’,θ’ bulunacak



$$R = \frac{\Delta S}{\Delta \theta}$$

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$x = C_x + R\cos\alpha$$

$$y = C_y + R\sin\alpha$$

$$x' = C_x + R\cos(\alpha + \Delta\theta)$$

$$y' = C_y + R\sin(\alpha + \Delta\theta)$$

$$\theta' = \theta + \Delta\theta$$

Dış Kinematik
x,y,θ,ΔS,Δθ biliniyor x’,y’,θ’ bulunacak

$$\Delta x = x - C_x$$
$$\Delta y = y - C_y$$
$$\Delta x' = x' - C_x$$
$$\Delta y' = y' - C_y$$

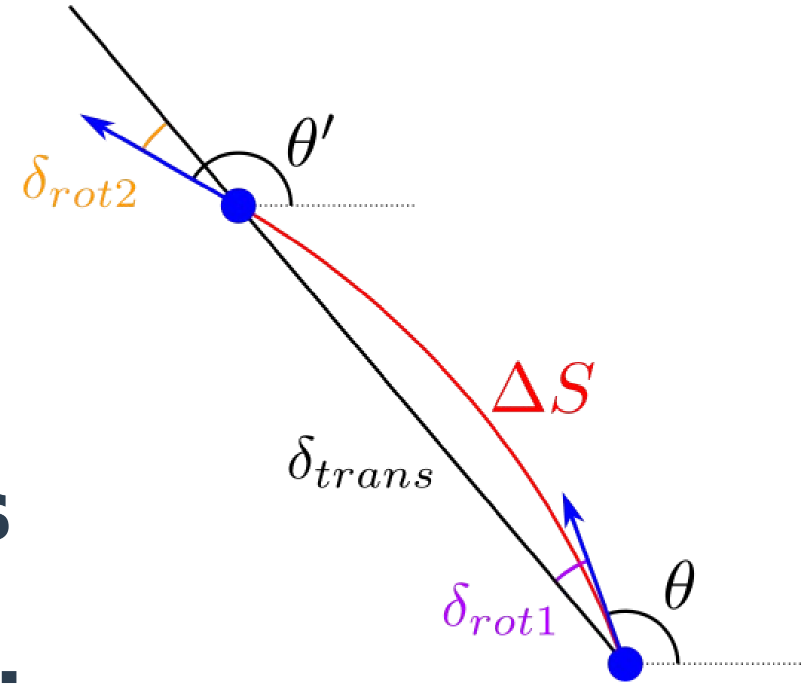
$$\begin{aligned}\Delta x &= R\sin\theta \\ \Delta y &= -R\cos\theta \\ \Delta x' &= R\sin\theta\cos\Delta\theta + R\cos\theta\sin\Delta\theta \\ &= \Delta x\cos\Delta\theta - \Delta y\sin\Delta\theta \\ \Delta y' &= -R\cos\theta\cos\Delta\theta + R\sin\theta\sin\Delta\theta \\ &= \Delta y\cos\Delta\theta + \Delta x\sin\Delta\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos\theta \\ \cos\alpha &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x' \\ \Delta y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\Delta\theta & -\sin\Delta\theta \\ \sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}$$

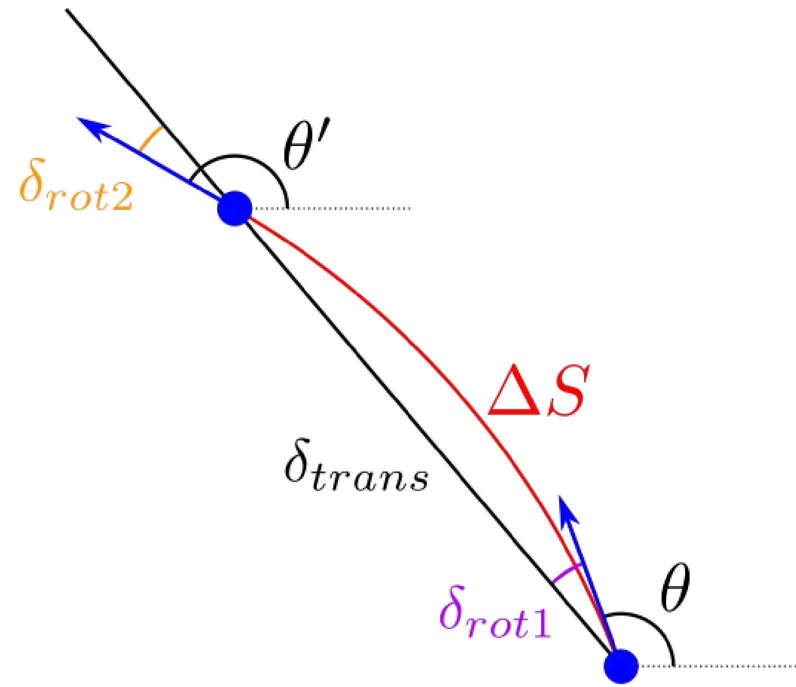
Odometri

- **Öyleyse robot kinematiği, uyguladığımız kontrol işareti ve bilinen bir başlangıç konumuna göre; iç kinematik ve dış kinematik hesabıyla sonraki konum tahminini odometri temelli olarak bulabiliyoruz**



Odometri

- **Odometriden gelen ardışık konum tahminleri kullanılarak; robot kinematiğinden soyutlanmış noktasal robot kontrol işaretleri belirlenebilir**
- $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{\theta}')-(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta}) \rightarrow \delta_{rot1}, \delta_{trans}, \delta_{rot2}$



Odometri Modeli

- **Odometri modelinde kontrol işareti; hedefe doğru dönüş miktarı (δ_{rot1}), hedefe doğru ilerleme miktarı (δ_{trans}) ve hedef kafa açısına dönüş miktarı (δ_{rot2}) değerlerinden oluşur**

$$u = \begin{pmatrix} \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{\theta}' \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{rot1} \\ \delta_{trans} \\ \delta_{rot2} \end{pmatrix}$$

Odometri Modeli – Örnekleme Temelli

- **Ardışık iki odometri bilgisi ($\bar{x}'$,$\bar{y}'$,$\bar{\theta}'$) ve ($\bar{x}$,$\bar{y}$,$\bar{\theta}$) kullanılarak dolaylı kontrol işaretleri hesaplanır**

$$\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$$

$$\delta_{rot_1} = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y}' - \bar{y}}{\bar{x}' - \bar{x}}\right) - \bar{\theta}$$

$$\delta_{rot_2} = \bar{\theta}' - \bar{\theta} - \delta_{rot_1}$$

Odometri Modeli – Örnekleme Temelli (veya)

- **Dolaylı kontrol işaretleri için bir olasılık dağılımına göre gürültü eklenir**

$$\hat{\delta}_{rot_1} = \delta_{rot_1} + sample\left(\alpha_1 \cdot |\delta_{rot_1}| + \alpha_2 \cdot \delta_{trans}\right)$$

$$\hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} + sample\left(\alpha_3 \cdot \delta_{trans} + \alpha_4 \cdot \left(|\delta_{rot_1}| + |\delta_{rot_2}|\right)\right)$$

$$\hat{\delta}_{rot_2} = \delta_{rot_2} + sample\left(\alpha_1 \cdot |\delta_{rot_2}| + \alpha_2 \cdot \delta_{trans}\right)$$

Odometri Modeli – Örnekleme Temelli (veya)

- **Dolaylı kontrol işaretleri için bir olasılık dağılımına göre gürültü eklenir**

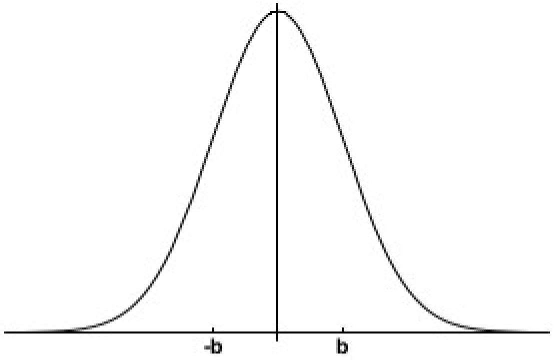
$$\hat{\delta}_{rot_1} = \delta_{rot_1} + sample\left(\alpha_1 \cdot \delta^2_{rot_1} + \alpha_2 \cdot \delta^2_{trans}\right)$$

$$\hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} + sample\left(\alpha_3 \cdot \delta^2_{trans} + \alpha_4 \cdot \left(\delta^2_{rot_1} + \delta^2_{rot_2}\right)\right)$$

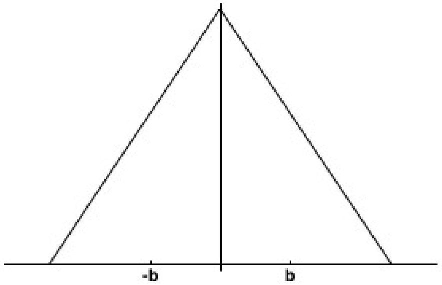
$$\hat{\delta}_{rot_2} = \delta_{rot_2} + sample\left(\alpha_1 \cdot \delta^2_{rot_2} + \alpha_2 \cdot \delta^2_{trans}\right)$$

Odometri Modeli – Örnekleme Temelli (veya)

$$sample(b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12} rand(-b, b)$$



$$sample(b) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[rand(-b, b) + rand(-b, b)\right]$$



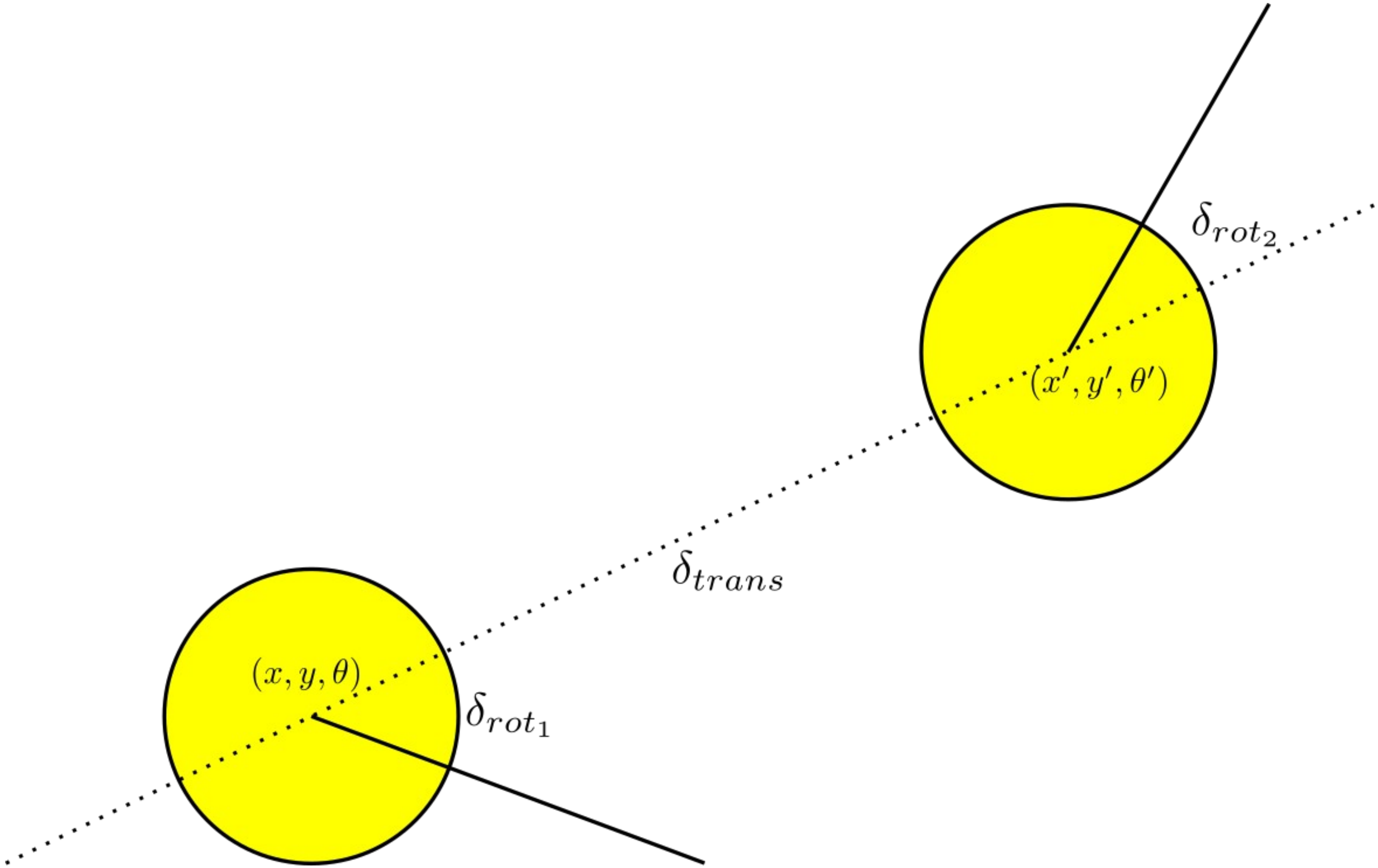
Odometri Modeli – Örnekleme Temelli

$$x' = x + \hat{\delta}_{trans} \cdot \cos\left(\bar{\theta} + \hat{\delta}_{rot_1}\right)$$

$$y' = y + \hat{\delta}_{trans} \cdot \sin\left(\bar{\theta} + \hat{\delta}_{rot_1}\right)$$

$$\theta' = \theta + \hat{\delta}_{rot_1} + \hat{\delta}_{rot_2}$$

Odometri Modeli – Kapalı Form



Odometri Modeli – Kapalı Form

- **Elimizde odometri bilgisi $\bar{x}_t=(\bar{x}',\bar{y}',\bar{\theta}')$ ve $\bar{x}_{t-1}=(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta})$, önceki konum bilgisi $x_{t-1}=(x,y,\theta)$ var. Olası tüm sonraki $x'=(x',y',\theta')$ konumları için bulunabilme olasılığı hesaplamak istiyoruz**

$$\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$$

$$\delta_{rot_1} = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{y}' - \bar{y}}{\bar{x}' - \bar{x}}\right) - \bar{\theta}$$

$$\delta_{rot_2} = \bar{\theta}' - \bar{\theta} - \delta_{rot_1}$$

Odometri Modeli – Kapalı Form

- **Olası tüm sonraki x'=(x',y',θ') konumları için**

$$\hat{\delta}_{trans} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

$$\hat{\delta}_{rot_1} = \tan^{-1}\left(\frac{y'-y}{x'-x}\right) - \theta$$

$$\hat{\delta}_{rot_2} = \theta' - \theta - \hat{\delta}_{rot_1}$$

Odometri Modeli – Kapalı Form (veya)

- **Olası tüm sonraki x'=(x',y',θ') konumları için**

$$p(x', y', \theta') =$$

$$prob\left(\delta_{rot_1} - \hat{\delta}_{rot_1}, \alpha_1 \cdot |\delta_{rot_1}| + \alpha_2 \cdot \delta_{trans}\right)$$

$$\cdot\, prob\left(\delta_{trans} - \hat{\delta}_{trans}, \alpha_3 \cdot \delta_{trans} + \alpha_4 \cdot (|\delta_{rot_1}| + |\delta_{rot_2}|)\right)$$

$$\cdot\, prob\left(\delta_{rot_2} - \hat{\delta}_{rot_2}, \alpha_1 \cdot |\delta_{rot_2}| + \alpha_2 \cdot \delta_{trans}\right)$$

Odometri Modeli – Kapalı Form (veya)

- **Olası tüm sonraki x'=(x',y',θ') konumları için**

$$p(x', y', \theta') =$$

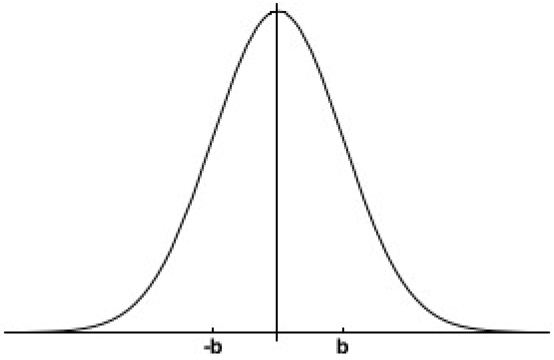
$$prob\left(\delta_{rot_1} - \hat{\delta}_{rot_1}, \alpha_1 \cdot \delta^2_{rot_1} + \alpha_2 \cdot \delta^2_{trans}\right)$$

$$\cdot\, prob\left(\delta_{trans} - \hat{\delta}_{trans}, \alpha_3 \cdot \delta^2_{trans} + \alpha_4 \cdot \left(\delta^2_{rot_1} + \delta^2_{rot_2}\right)\right)$$

$$\cdot\, prob\left(\delta_{rot_2} - \hat{\delta}_{rot_2}, \alpha_1 \cdot \delta^2_{rot_2} + \alpha_2 \cdot \delta^2_{trans}\right)$$

Odometri Modeli – Kapalı Form (veya)

$$prob(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$$



$$prob(a,b) = \max\left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}b} - \frac{|a|}{6b^2}\right\}$$