Mesleki Terminoloji

DERSİ VEREN: ARŞ. GRV. DR. GÖKSEL BİRİCİK

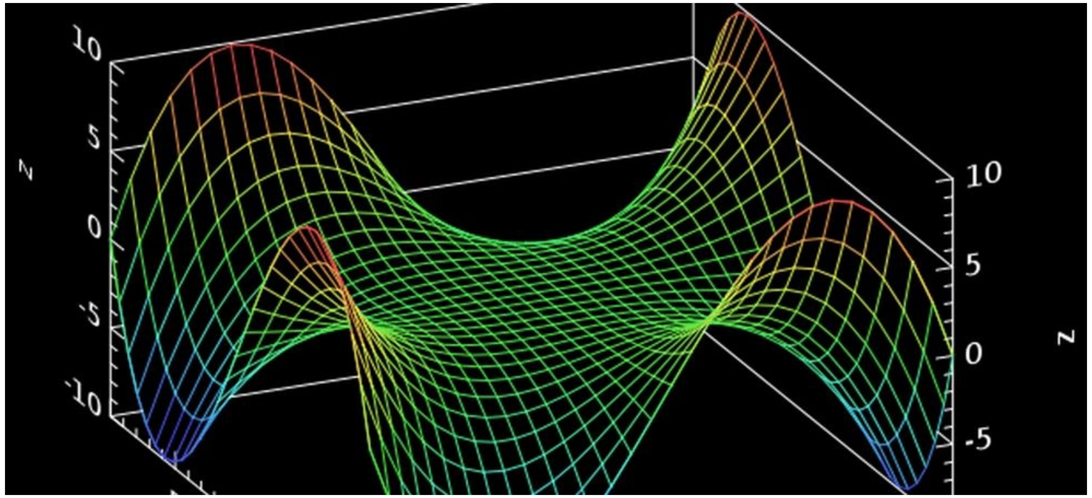
Sayısal Analiz

MEHMET EMRE ÖNDER - 12011061

DOĞAÇ CEM İŞOĞLU - 11011074

Sayısal Analiz Nedir?

- Sayısal analiz, yada diğer adıyla numerik analiz, klasik matematiğin bir dalıdır. Matematiğin analitik çözüm üretemediği veya ürettiği çözümün uygulama açısından çok karmaşık olduğu durumlarda veya deneye-ölçüme dayalı problemlerde numerik analiz yöntemlerine başvurulur.
- Karmaşık yerine basit
- Doğrusal
- Sonlu bilinmeyen
- Yaklaşık çözüm getirdiği avantajlardan bazılarıdır.



Dezavantajlar

- Nümerik metotların çoğu belli bir hesap kuralının, belki yüzlerce binlerce kez, tekrarlanması ile adım adım sonuca varırlar(iterasyon). Bir tek sayının hesaplanması için binlerce hatta milyonlarca adımda bulunabilir. Bu nedenle el hesaplarına uygun değildir.
- Nümerik çözüm yaklaşıktır, bir miktar kabul edilebilir hata içerir.
- Nümerik metotlar öğrenmek ve çözüm üretmek için temel matematik ve mekanik bilgisi yanında bilgisayar ve programlama bilgisi de gerekebilir.

Tarihçe

- Bugünkü bulgulara göre, sayısal analiz metotlarının tarihi yaklaşık 3650 yıl önce başlamıştır.
- M.ö. 1650 yıllarına ait bir papirüs, basit bir denklemin kökünün sayısal çözümünü açıklamaktadır.
- Milat öncesinin en büyük matematikçisi olarak kabul edilen Arşimet eğrisel yüzeyli cisimlerin alanını, hacmini ve pi sayısını hesaplamış ve nümerik en küçük kavramını kullanmıştır.

Nümerik analizin temellerini atanlar

John **Napier** (1550-1617), Isaac **Newton** (1643-1727), Gottfried **Leibniz** (1646–1716), Leonhard **Euler** (1707-1783), Joseph-Louis **Lagrange** (1736-1813), Pierre-Simon-Marquis de **Laplace**(1749-1827), Karl Friedrich **Gauss** (1777-1855), James Joseph **Sylvester**(1814 -1897).

Tarihçe

- Numarik analizde adı sık geçenler

Nümerik analiz yöntemlerinde adı sıkça geçenler

Niels Henrik **Abel** (1802-1829), Alexander Craig **Aitken** (1895 - 1967), Bernard **Bolzano**(1781-1848) George **Boole**(1815-1864), Isaac **Barrow**(1630-1677), Leonard **Bairstow**(1880-1963), Augustin Louis **Cauchy**(1789-1857),
Pafnuty Lvovich **Chebyshev**(1821-1894) , Prescott Duran **Crout** (1907-1984), Mayric Hascall **Doolittle**(1830-1913), André-Louis **Cholesky**(1875-1918), Gabriel **Cramer**(1704-1752), Roger **Cotes**(1682-1716), Arthur **Cayley**(1821-1895), Ferdinand Georg **Frobenius**(1849-1917), Leonardo **Fibonacci**(1170-1250), Joseph **Fourier**(1768-1830), Jørgen Pedersen **Gram**(1850-1916), Hermann **Grassmann**(1809-1877), Charles **Hermite**(1822-1901), David **Hilbert**(1862-1943), Alston Scott **Householder**(1904–1993), C. A. R. **Hoare**(1934 -), Carl Gustav Jacob **Jacobi**(1804-1851), Marie Ennemond Camille **Jordan**(1838-1922), Wilhelm **Jordan**(1842-1899), Martin Wilhelm **Kutta**(1867-1944) , Joseph-Louis **Lagrange** (1736 –1813), Adrien Marie **Legendre**(1752-1833), Cornelius **Lanczos**(1893-1974), Richard Edler von **Mises**(1883-1953), David E. **Müller**(1924 -), Lewis Fry **Richardson**(1881-1953), Carl David Tolmé **Runge**(1856-1927), Werner **Romberg**(1909-2003), Thomas **Simpson**(1710-1761), Ludwig von **Seidel**(1821-1896), Erhard **Schmidt**(1876-1959), Johan Frederik **Steffensen** (1873–1961), James Hardy **Wilkinson(1919-1986)**.

Tarihçe

- 1930-1945 li yıllarda ilk bilgisayarın ortaya çıkması sayısal analiz yöntemleri önem kazanmaya başladı.
- Modern numerik analizin 1947 yılında John Neumann ve Herman Goldstine tarafından yayınlana «Numerical Inverting of Matrices of High Order, Bulletin of the AMS, Nov.1947» ile başladığı kabul edilir.
- Bu yayında yuvarlama hataları ilk kez araştırılmıştır.
- Günümüzde kullanılan numerik analiz yöntemlerinin çoğu 1950-1970 yıllarında geliştirilmiştir.
- Bilgisayarların ve programlama dillerinin giderek gelişmesi, devrim yaratan ve günümüz vazgeçilmez numerik metodu olan «sonlu elemanlar metodu-SEM» nun 1960'lı yıllarda doğmasına neden oldu.

Konular

- NÜMERİK HESAPLAMALAR VE HATALAR
- KÖK BULMA YÖNTEMLERİ
  - 1-Grafik
  - 2-Yarıya Bölme
  - 3-Regula False
  - 4-Newton Raphson
  - 5-Kiriş Yöntemi(Secant)
  - DOĞRUSAL DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ
  - Dolaysız Yöntemler
    - 1)Cramer Yöntemi
    - 2)Yok Etme Yöntemleri(Eleminasyon)
      - Gauss Jordan Eleminasyon Yöntemi(Matrisin Inversinin Alınması)
      - Gauss Eleminasyon Yöntemi
    - 3)Yoğunlaştırılmış Yok Etme
      - Cholesky Yöntemi
  - Dolaylı Yöntemler
    - Jacobi Yöntemi
    - Gauss-Seidel Yöntemi
- SAYISAL İNTEGRAL
  - Trapez Yöntemi
  - Simpson Yöntemi
- SAYISAL TÜREV
  - İleri Fonksiyon ile
  - Geri Fonksiyon ile
  - Merkezi Fonksiyon ile
- EĞRİ UYDURMA
  - Enterpolasyon
    - Gregory Newton Enterpolasyon
    - Lagrange
  - Regresyon
- Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

KÖK BULMA YÖNTEMLERİ
1) GRAFİK YÖNTEMİ:

- İşleme fonksiyonun değişkenine yaklaşık bir değer verilerek başlanır. Başlangıç değerimiz X_0 ise bir sonraki değer de $X_0 + \Delta x$ olup fonksiyonun yeni değeri hesaplanır.
- Fonksiyonun işaret (+/-) değiştirip değiştirmediği kontrol edilir. İşaret değişiyorsa, bu aralıkta kalmak şartıyla fonksiyona yeni bir X_0 değeri verilir.
- $\Delta x \leftarrow \Delta x/2$, Δx artımı olarak bir önceki değerin yarısı alınır. (f(x) işaret değiştirene kadar)
- Kök veya F(X) değerleri arasındaki fark < **ε** olana kadar işlem devam eder.
    - $|x_{i+1}-x_i| <= \varepsilon$
    - $|f(x_{i+1})-f(x_i)| <= \varepsilon$

Örnek:

- $F(x) = x^2 - 6x + 5$
- $X_0 = 1.5$ $\Delta x = 0,75$ **ε = 0,094**

$\Delta x = 0,75$

X	F(X)
1,50	-1,75
2,25	-3,43
3,00	-4,00
3,75	-3,43
4,50	-1,75
5,25	1,0625

$\Delta x = 0,375$

X	F(X)
4,50	-1,75
4,875	-0,4844
5,25	1,0625

$\Delta x = 0,1875$

X	F(X)
4,875	-0,4844
5,0625	0,2539

$\Delta x = 0,094$

X	F(X)
4,875	-0,4844
4,969	-0,1230
5,063	0,2559

- ε → 5,063-4,969 = 0,094
- Soruda verilen epsilon değerine denk geldi daha küçük olsaydı yine işlem sonlanacaktı.

2) YARIYA BÖLME(BİSECTİON)

- Başlangıçta kökü içerisine alan iki aralık belirlenir.
  - $x=a \rightarrow f(a)$
  - $x=b \rightarrow f(b)$
- $f(a)*f(b) >= 0$ olup olmadığı kontrol edilir.
  - Büyükse bu aralıkta kök yoktur.
  - Sıfıra eşitse ya a ya da b veya ikisi de kök olabilir.
  - Küçükse bu aralıkta kök var demektir.
- Ve yeni bir değer hesaplanır.
  - $x_c=(x_a+x_b)/2 \rightarrow f(c)$
- F(c)'nin değeri 0 veya **ε** 'dan küçük ise kök c değeridir.
- NOT: $f(a)*f(c)> 0$ ise $x_a \leftarrow x_c$,x_a'nın yeni değeri x_c'dir.

Örnek:

- $y=x^3-5x-7$ $\varepsilon=0,0006$

  $X_a= 2,5$ $X_b=3$

a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	
2,50	-3,875	3	5	2,75	0,046875	
2,5	-3,875	2,75	0,046875	2,625	-2,037109	
2,625	-2,037109	2,75	0,046875	2,6875	-1,026611	
2,6875	-1,026611	2,75	0,046875	2,71875	-0,497833	
2,71875	-0,497833	2,75	0,046875	2,734375	-0,227482	
2,734375	-0,227482	2,75	0,046875	2,742188	-0,090806	
2,742188	-0,090806	2,75	0,046875	2,746094	-0,022091	
2,746094	-0,022091	2,75	0,046875	2,748047	-0,012361	
2,746094	-0,022091	2,748047	-0,012361	2,74707	-0,004873	
2,74707	-0,004873	2,748047	-0,012361	2,747559	0,003742	
2,74707	-0,004873	2,747559	0,003742	2,747314	-0,000566	<ε
						ε=0,0006

↑

YAKLAŞIK KÖK= 2,747314

3) REGULA FALSE(Yanlış Nokta/Yer Değiştirme)

- Yarıya bölme yönteminin(Bisection) yönteminin alternatif bir yöntemidir.
- Yarıya bölmede sadece kök değeri kullanılırken bu yöntemde kök değerinin yanı sıra fonksiyonun aldığı değer de kullanılır.
  - Alt ve üst sınır belirlenerek işleme başlanır. f(a) ile f(b) ters işaretli ise verilen aralıkta bir kök var demektir.
  - c= (b*f(a)-a*f(b))/(f(a)-f(b) olarak yeni c değeri hesaplanır.

Örnek:

- $y=x3-5x-7$ $\varepsilon=0,0006$
- $X_a= 2,5$ $X_b=3$

a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	
2,50	-3,875	3	5	2,71831	-0,505391	
2,71831	-0,505391	3	5	2,744169	-0,055984	
2,744169	-0,055984	3	5	2,747002	-0,006085	
2,747002	-0,006085	3	5	2,747309	-0,00066	
2,747309	-0,00066	3	5	2,747342	-0,000072	$<\varepsilon$
						$\varepsilon=0,0006$

YAKLAŞIK KÖK= 2,747342

4) NEWTON RAPHSON YÖNTEMİ

- y=f(x) fonksiyonunda $x=x_0$ alınarak y0=f(x0)=p0 hesaplanır. P(0) noktasından çizilen teğetin eğimi → $\tan a=f(x_0)/(x_0-x_1)=y_0/(x_0-x_1)$
- Eğim aynı zamanda fonksiyonun bu noktadaki türevine eşit olacağından $f'(x_0)=f(x_0)/(x_0-x_1)$ şeklinde yazabiliriz.
- x_1 i yalnız bırakırsak formül,
- $x_1=x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ haline gelecektir.
- GENEL FORMÜL → $x_{k+1}=x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ şeklinde yazabiliriz.
- Newton Raphson yönteminde iterasyona son vermek için bulunan x değerinin $y=f(x_0)$ fonksiyonunu 0(sıfır)'a yaklaştırmasına veya ardışık iki kök arasındaki mutlak değerce farkın ε'dan küçük eşit olmasına bakılır.
- $|x_1-x_0|< \varepsilon$

Örnek:

- $f(x)= x^2-4x+3$ $x_0=0$
- $\varepsilon=0.001$

$x_{k+1}=x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

x_0	x_1	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
0	0,75	3	-4	0,75	
0,75	0,975	0,5625	-2,5	0,225	
0,975	0,999695	0,050625	-2,05	0,24695	
0,999695	1	0,00061	-2,00061	0,000305	$< \varepsilon = 0.001$

DOĞRUSAL DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ Dolaylı Yöntemler

- 1) Gauss Jordan Eleminasyon Yöntemi(Matrisin Inversinin Alınması)
  - $[A][I] \rightarrow [I][A^{-1}]$

Seri Dönüşüm Formülü

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 5.000000 & 2.000000 & -4.000000 \\ 1.000000 & 4.000000 & 2.000000 \\ 2.000000 & 3.000000 & 6.000000 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM

Eski Matris(Birim Matrise Donustu)

$$\begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

Ters Matris(Eski Birim Matris)

$$\begin{bmatrix} 0.169811 & -0.226415 & 0.188679 \\ -0.018868 & 0.358491 & -0.132075 \\ -0.047170 & -0.103774 & 0.169811 \end{bmatrix}$$

- 2) Gauss Eleminasyon Yöntemi
- Bu yöntemde A katsayılar matrisi bir üst üçgen matris haline getirilir.
- $\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} * x_j\right) = c_j \quad j = (1,2..,n)$
- En son aşamada en sondaki denklemden başlayarak, geriye doğru yapılacak yerine koyma işlemi ile tüm kök değerlerini bulabiliriz.

Örnek:

- $3.6x_1+2.4x_2-1.8x_3=6.3$
- $4.2x_1 -5.8x_2 +2.1x_3=7.5$
- $0.8x_1+3.5 x_2 +6.5x_3=3.7$

$$\begin{bmatrix} 3.6 & 2.4 & -1.8 \\ 4.2 & -5.8 & 2.1 \\ 0.8 & 3.5 & +6.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.3 \\ 7.5 \\ 3.7 \end{bmatrix}$$

Adımlar

1. 1.Satır a_{11} ile bölünür.
2. 2.Satır a_{21} ile bölünür.2 satırdan 1. Satır çıkarılır. 2. Satır a_{21} ile çarpılır.
3. 3.Satır a_{31} ile bölünür, 3.satırdan 1.satır çıkarılır. 3.satır a_{31} ile çarpılır.
4. 2. Satır a_{22}'ye bölünür.
5. 3. Satır a_{32}'ye bölünür. 3.satırdan 2. Satır çıkarılır, 3. Satır a_{32} ile çarpılır.
6. 3. Satırı a_{33} ile böl.

Örnek Devam

- Sonuç olarak elde edilen matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.667 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Şeklinde olacaktır.

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} * \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} * x_j) \right)$$

i=3 ve i=2 için x_2 ve x_3 değerlerini buluruz. Herhangi bir denklemde yerine koyarak da x_1'i elde edebiliriz.

SAYISAL İNTEGRAL

- Newton-Cotes integral formülleri tablo şeklinde düzenlenmiş verilerin integralini almayı kolaylaştırır.

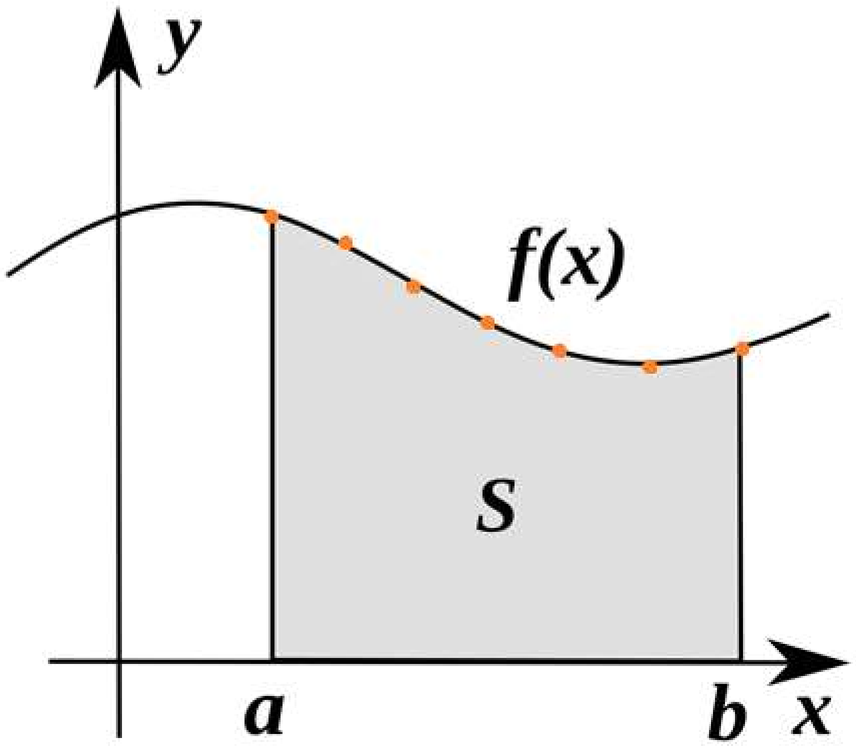
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx$$

$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ şeklinde yazılan bir polinomdur.

İntegral formüllerinin kapalı ve açık olmak üzere iki formu vardır.

Kapalı Formlar

- Kapalı formlarda integral sınırlarının başlangıç ve bitiş noktaları bellidir.



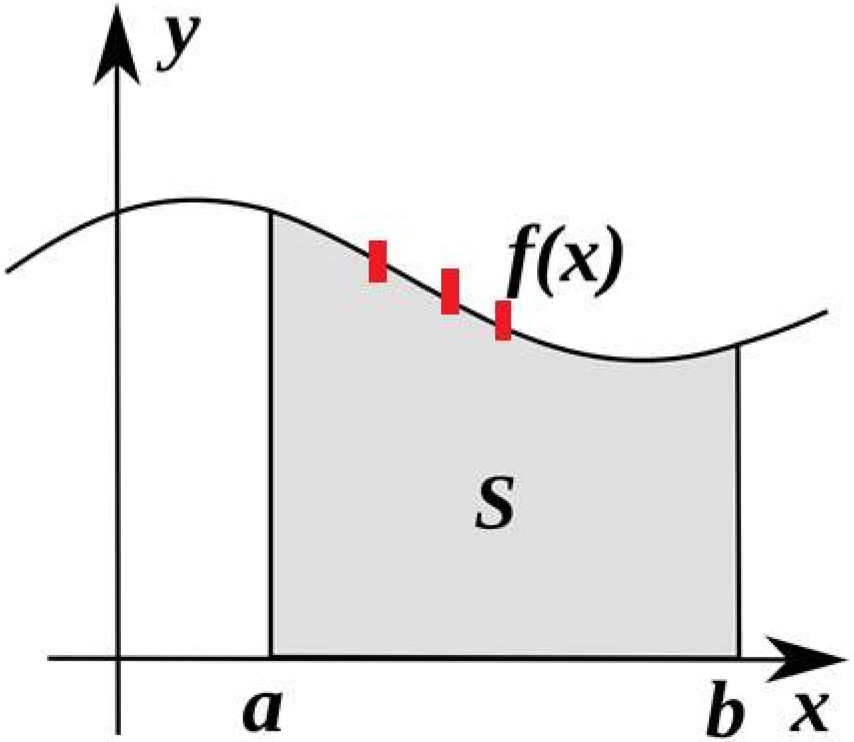
Nümerik integral,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integralinin değerini yaklaşık olarak bulma işlemidir. İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit bir sayı ve fonksiyon sürekli ise integralin sonucu da sabit olup y=f(x) eğrisinin altında kalan alandır.

Açık Formlar

- Açık formlarda ise verilerin dışında kalan integral sınırları mevcuttur.



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Trapez Yöntemi

- Bu yöntemde integrali alınacak alan N eşit parçaya bölünür.
- $I = \sum h_i * f_i$
- $h_i \rightarrow$ *i. Yamuğun genişliği*
- $f_i \rightarrow f(x_i)$
- $h_i = x_{i+1} - x_i$
- $h = \frac{b-a}{N}$

Sayısal Türev

- Analitik olarak integral veya türev almak mümkün olamadığı durumlarda sayısal türev ve sayısal integral işlemleri kullanılması gereklidir. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- İleri fark ile türev
- $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$
- Geri fark ile türev
- $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$
- Merkezi fark ile türev
- $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}$

Referanslar

- YTÜ Sayısal Analiz Ders Notları, Doç. Dr. Banu DİRİ
- Ahmet TOPÇU, Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,2014

TEŞEKKÜRLER