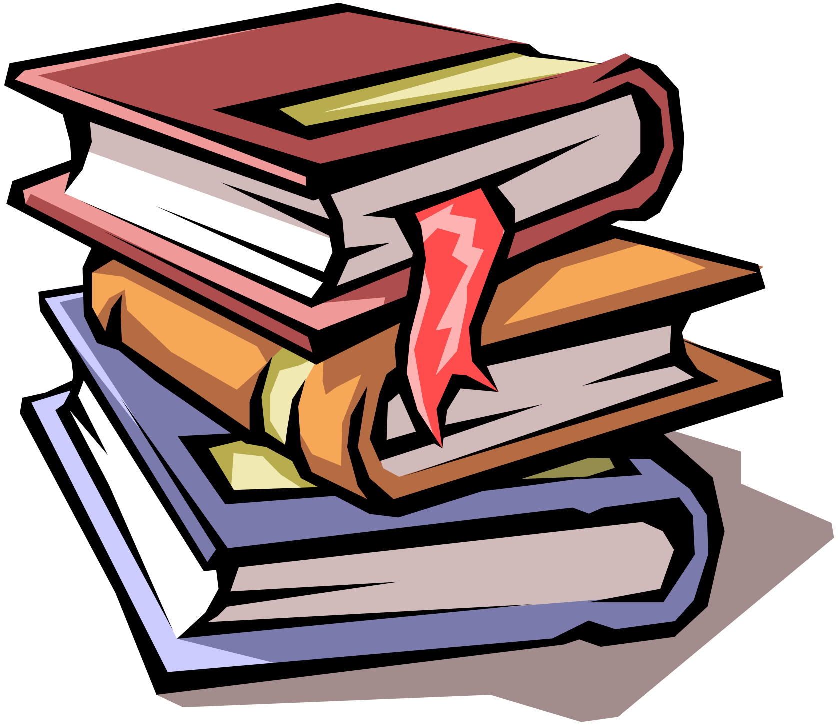
Bölüm 4
Matematik Dili



Kümeler

- *Küme(Set)* = ayrık nesnelerden oluşmuş topluluğa küme denir
- Kümenin elemanları element olarak adlandırılır
- Kümeler nasıl gösterilir
  - Liste şeklinde
    - Örnek: A = {1,3,5,7}
  - Tanım şeklinde
    - Örnek: $B = \{x \mid x = 2k + 1, 0 \leq k \leq 3\}$

| , : öyle ki
such that

Sonlu ve Sonsuz Kümeler (Finite and İnfinite Sets)

- *Sonlu kümeler (Finite* sets)
  - Örnekler:
    - A = {1, 2, 3, 4}
    - B = {x | x is an integer, $1 \leq x \leq 4$}

- *Sonsuz kümeler (Infinite* sets)
  - Örnekler:
    - Z = {integers} = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}
    - S={x| x is a real number and $1 \leq x \leq 4$} = [0, 4]

kümedir

Bazı önemli kümeler

Bu boş

Bu ikisi farklı değer

- Boş küme (*empty* set ∅ veya { }), elemanı olmayan küme
  null set veya *void set adını da alırlar*

  Note: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- *Evrensel küme (Universal* set): Bahsettiğimiz guruptaki bütün elemanları içine alır
- Örnekler:
  - U = {all natural numbers}
  - U = {all real numbers}
  - U = {x| x is a natural number and 1≤ x≤10}

Bu bir kümedir eleman sayısı 1'dir

Kardinalite

- Bir A kümesinin kardinalitesi o A kümesinin eleman sayısıdır. |A| olarak gösterilir
- Örnekler:

  If A = {1, 2, 3} then |A| = 3

  If B = {x | x is a natural number and $1 \leq x \leq 9$}

  then |B| = 9
- Sonsuz (Infinite) kardinalitisi
  - Sayılabilir (Countable) (örnek, natural numbers, integers)
  - Sayılamayan (Uncountable) (örnek, real numbers)

If $S = \{1,2,3\}$ $|S| = 3.$

If $S = \{3,3,3,3,3\}$ $|S| = 1.$

If $S = \emptyset$ $|S| = 0.$

If $S = \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \}$ $|S| = 3.$

If $S = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $|S|$ sonsuzdur

Altkümeler (Subsets)

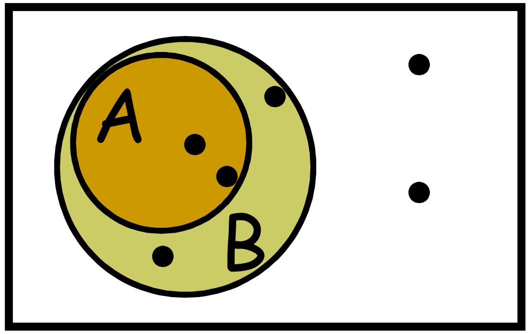
- Eğer ***X*** kümesinin bütün elemanları ***Y*** kümesi içerisinde yer alıyorsa ***X***'e ***Y*** kümesinin bir alt (*subset) kümesidir denir*

  (in symbols $X \subseteq Y$)
- *Eşitlik(Equality)*: $X = Y$ if $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$

- Eğer ***X*** kümesi, ***Y*** kümesinin bir alt kümesi iken ***Y*** kümesi, ***X*** kümesinin bir alt kümesi değilse (x#y); ***X*** kümesi, ***Y*** kümesinin bir öz-alt kümesidir (proper subset) denir
- if $X \subseteq Y$ but $Y \not\subseteq X$
  - Gözlem: $\varnothing$ her kümenin bir alt kümesidir

$x \in S$ anlamı "x , S kümesinin bir elemanıdır."
$x \notin S$ anlamı "x , S kümesinin bir elemanı değildir."
$A \subseteq B$ anlamı "A, B nin bir alt kümesidir."

or, $\forall x\ ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$.



Venn Diagram

kuvvet
kümesi

Power set

- ***X*** kümesinin *power set* 'i, ***X*** kümesinin bütün alt kümelerinin kümesi olup, $P(X)$ ile gösterilir
  - $P(X)= \{A \mid A \subseteq X\}$
  - Örnek: if $X = \{1, 2, 3\}$,

    then $P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

- <u>Teorem</u> : If $|X| = n$, then $|P(X)| = 2^n$

If S is a set, then the *power set* of S is

$$2^S = \{ x : x \subseteq S \}.$$

If $S = \{a\}$ $2^S = \{\emptyset, \{a\}\}.$

If $S = \{a,b\}$ $2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$

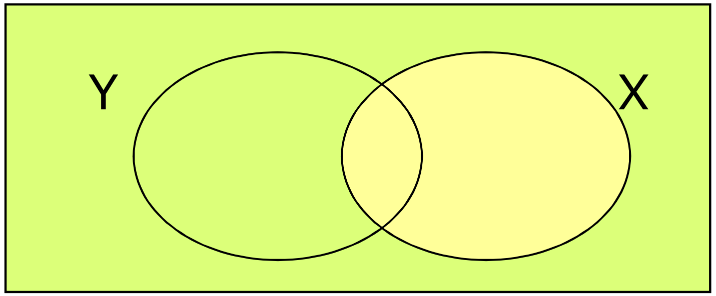
If $S = \emptyset$ $2^S = \{\emptyset\}.$

If $S = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ $2^S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}.$

Fact: if S is finite, $|2^S| = 2^{|S|}$. (if $|S| = n$, $|2^S| = 2^n$)

entity

Venn şemaları (diagrams)



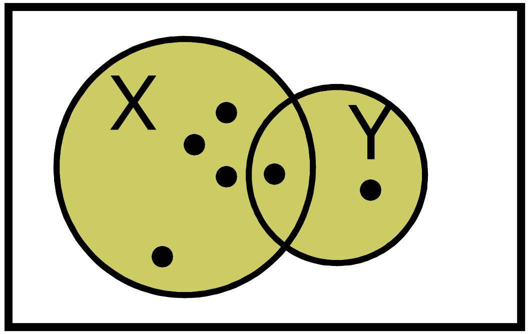
- Bir venn şeması verilen iki kümenin grafik olarak gösterilimini sağlar
- Bir kümenin birleşimi(union), kesişimi (intersection), farkı (difference), simetrik farkı (symmetric difference) ve tümleyeni (complement) tanımlanabilir

Küme İşlemleri (Set operations):
Birleşim (Union)

X ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** kümesinin birleşimi (*union*)

$$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$



If X = {Ayşe, Lale, Zeynep},
and Y = {Lale, Deniz}, then

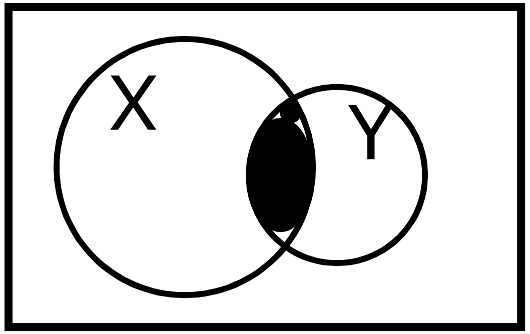
$X \cup Y$ = {Ayşe,Lale,Zeynep,Deniz}

Küme İşlemleri (Set operations):
Kesişim (Intersection)

X ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** kümesinin kesişimi (*intersection)*

  $X \cap Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$



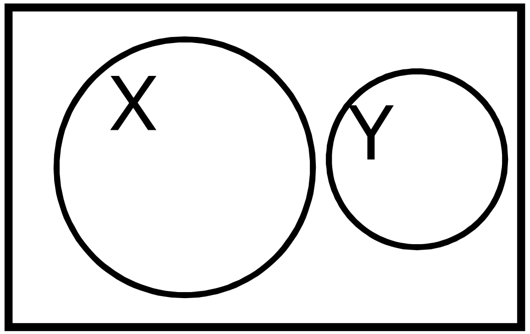
If X = {Ayşe, Lale, Zeynep},
and Y = {Lale, Deniz}, then

$X \cap Y = \{Lale\}$

X ve ***Y*** verilen iki küme olsun

- ***X*** ve ***Y*** gibi iki kümenin kesişimi boş küme ise ***X*** ve ***Y*** kümeleri *ayrık* (*disjoint-pairwise) kümeler* olarak adlandırılır

if $X \cap Y = \emptyset$



If $X = \{z : z$ rektördür$\}$, and $Y = \{z : z$ bu sınıfta oturuyor$\}$, then

$X \cap Y = \{z : z$ bu sınıfta oturan bir rektördür$\} = \emptyset$

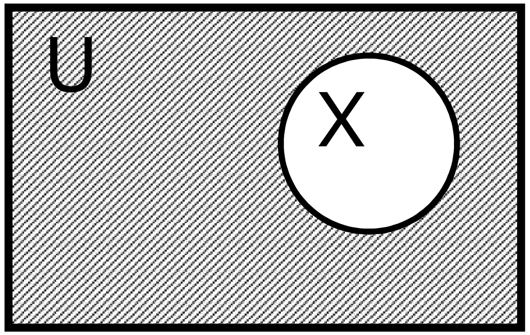
Tümleyen

Bir X kümesinin Tümleyeni:

$X = \{ z : z \notin X\}$

If X = {z : z uzun boyludur}, then

X = {z : z uzun boylu değildir.}



$\overline{\varnothing} = U$

ve

$\overline{U} = \varnothing$

$x > 3$

bunun

değili

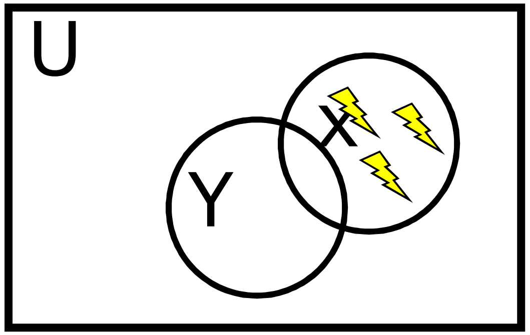
$x \leq 3$

İki KümeninFarkı (Difference)

- İki kümenin farkı

$$X - Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$$

Fark(*difference*), ***X*** kümesine göre ***Y***'nin *göreceli tümleyeni* (*relative complement)* *olarak da adlandırılır*



$a'b + b'a$

XOR

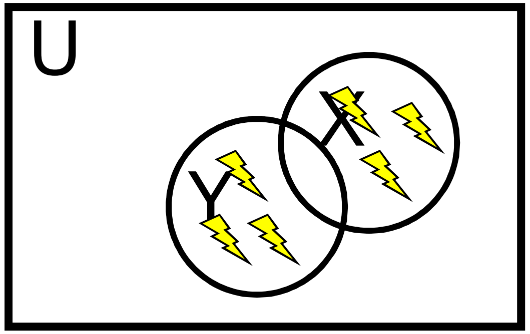
- *Simetrik Fark (Symmetric difference)*

$$X \oplus Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

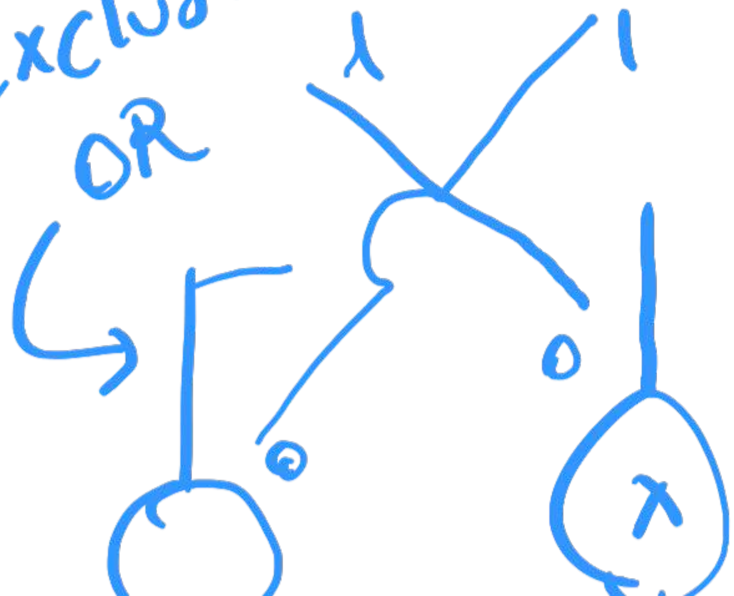
01
10

like "exclusive or"

$$X \oplus Y = \{ z : (z \in X \wedge z \notin Y) \vee (z \in Y \wedge z \notin X)\}$$



exclusive OR

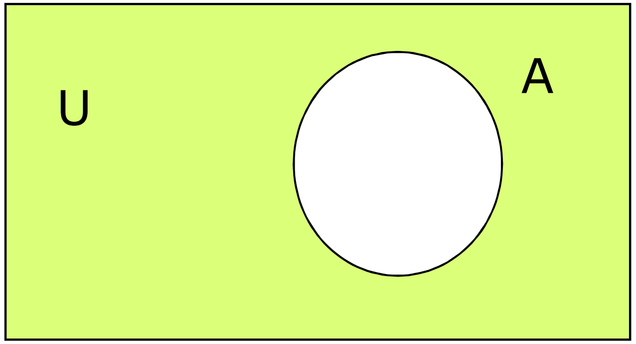


$S_1=0$ $S_2=1$

$S_1=1$ $S_2=0$

- Evrensel küme (universal set) içerisinde yer alan A kümesinin *tümleyeni* (*complement*) $A^c = U - A$ şeklinde gösterilir

Sembolü $A^c = U - A$



Küme işlemlerinin özellikleri (1)

Theorem : U, evrensel bir küme; A, B ve C evrensel kümenin bir alt kümesi olduğunda aşağıdaki özellikler mevcuttur

a) Birleşim(Associativity): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

b) Değişim(Commutativity): $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Küme işlemlerinin özellikleri(2)

c) Dağılma (Distributive):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d) Özdeşlik (Identity):

$A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup \emptyset = A$

e) Tümleyeni(Complement):

$A \cup A^c = U$ $\qquad$ $A \cap A^c = \emptyset$

Küme işlemlerinin özellikleri(3)

U:1
Ø:0

f) Idempotent:

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

g) Bound laws:

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

h) İçine alma (Absorption):

$A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

Küme işlemlerinin özellikleri(4)

i) Gerektirme (Involution): $(A^c)^c = A$

j) 0/1 kanunu: $\emptyset^c = U$ $\quad U^c = \emptyset$

k) Kümeler için De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Kartezyen Çarpım (Cartesian Product)

- Verilen iki kümenin kartezyen çarpımı (cartesian product)

  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

şeklinde gösterilir

- $A \times B \neq B \times A$
- $|A \times B| = |A| . |B|$

Sıralı ikili olduğu için değişme özelliği yok

$3.2 + 5.8$

$R \times 2$ $R \times R$

Reel sayılarla veya yukarıdaki işlemler yapılabilir mi

yukarıdakileri yapabiliriz

If A = {Celal, Lale, Lamia}, and B = {Banu, Vedat}, then

A x B = {<Celal, Banu>, <Lale, Banu>, <Lamia, Banu>, <Celal, Vedat>, <Lale, Vedat>, <Lamia, Vedat>}

Kartezyen yapabiliyorsak fonksiyon yapabiliriz

fonksiyon yapabiliyorsak işlem yapabiliriz

Genelleştirilmiş birleşim ve kesişim

- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümelerinin birleşimi

  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup, \ldots, A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$ → OR

- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümelerinin kesişimi

  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap, \ldots, A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ → AND

- Birleşim ve Kesişim kümelerinin eleman sayısı

  $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

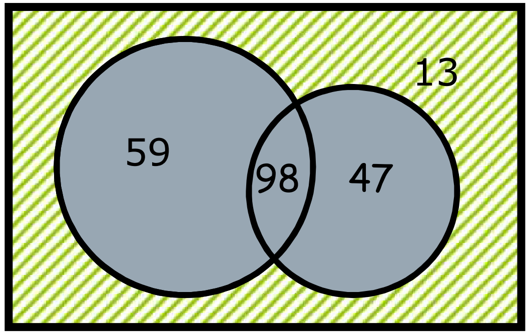
Örnek:

Bilgisayar Bilimlerinde 217 öğrenci var.

157 kişi cs125 kodlu dersi alıyor.

145 kişi cs173 kodlu dersi alıyor.

98 kişi her iki derside alıyor.

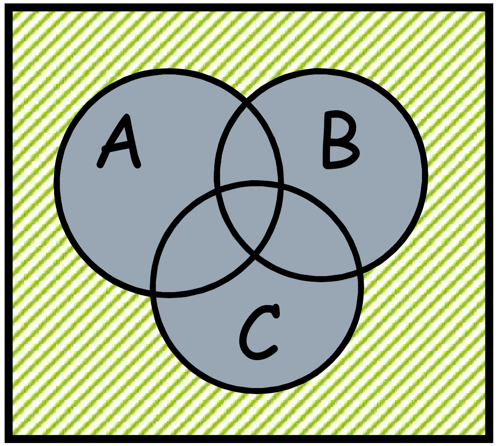


Kaç kişi her iki dersi de almıyor?

217 - (157 + 145 - 98) = 13

Farzedelim:

Bilmek istiyorum $|A \cup B \cup C|$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

Bit stringleri ile küme işlemleri

Örnek:. If $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$A = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$, ve $B = \{x_2, x_3, x_6\}$,

$A \cup B$ ve $A \cap B$ bulmak istediğimizde...

	A	1	0	1	0	1	1
	B	0	1	1	0	0	1
Bit-wise OR	$A \cup B$	1	1	1	0	1	1
Bit-wise AND	$A \cap B$	0	0	1	0	0	1

Düzenli Seriler ve Dizgiler (Sequences and Strings)

- *Düzenli Dizi* (*sequence)* Sıralı bir listeyi göstermek için kullanılan ayrık yapıya denir. N elemanlı bir dizinin gösterilimi

  s_n = *n*'nin bir fonksiyonu olup *n = 1, 2, 3,...*
- Eğer *s* sıralı bir diziyse $\{s_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$,
  - s_1 birinci elemanı gösterir,
  - s_2 ikinci elemanı gösterir,…
  - s_n n. elemanı gösterir…
- {n} düzenli bir serinin indeksidir. N doğal sayılardan oluşur veya bu kümenin sonlu bir alt kümesidir

Düzenli serilere (sequences) örnek

Örnekler:

1. $s = \{s_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$s_n = 1/n \text{ , for } n = 1, 2, 3,\ldots$$

Sequence'ın ilk birkaç elementi: 1, ½, 1/3, ¼, 1/5,1/6,…

2. $s = \{s_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$s_n = n^2 + 1, \text{ for } n = 1, 2, 3,\ldots$$

Sequence'ın ilk birkaç elementi : 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50,…

Artan ve Azalan Diziler (Increasing and Decreasing)

s = $\{s_n\}$ için aşağıdakiler söylenebilir

- ***increasing*** if $s_n \leq s_{n+1}$
- ***decreasing*** is $s_n \geq s_{n+1}$,

  for every n = 1, 2, 3,…

Örnekler:

- $S_n = 4 - 2n$, n = 1, 2, 3,… azalan:

  2, 0, -2, -4, -6,…

- $S_n = 2n - 1$, n = 1, 2, 3,… artan:

  1, 3, 5, 7, 9, …

Bu kuralı bozan arada sadece 1 değer bile olsa artan ve azalan değildir

Düzenli altseriler (Subsequences)

- Bir *s* sequence'ının $s = \{s_n\}$, alt sequence'ı $t = \{t_n\}$ ile gösterilir ve sıralama düzeni aynı kalmak şartıyla *s* sequence'ının elemanlarından elde edilir
  - Örnek: $s = \{s_n = n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$
    - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,…
  - $t = \{t_n = 2n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$
    - 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…
    - *t*, *s*'nin bir düzenli altserisidir (Subsequences)

Toplam (Sigma) gösterilimi

- Eğer $\{a_n\}$ bir sequence ise, bu sequence'ın toplamı

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

Bu toplam gösterilimi (sigma notation), olup Yunan alfabesindeki Σ ile gösterilir

Çarpım (Pi) gösterilimi

- Eğer $\{a_n\}$ bir sequence ise, bu sequence'ın çarpımı

$$\prod_{k=1}^{m} a_k = a_1 a_2 \ldots a_m$$

Bu çarpım gösterilimi (pi notation), olup Yunan alfabesindeki Π ile gösterilir

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k \quad =1$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij \quad = \sum_{i=1}^{4} i + 2i + 3i = \sum_{i=1}^{4} 6i = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

Dizgi-Katar (String)

- ***X*** sonlu elemanlardan oluşan bir küme olsun
  - Örnek: if X = {a, b, c}
  - α = bbaccc **X** kümesi üzerinden tanımlanmış olsun
  - Gösterilim: bbaccc = b^2ac^3
  - α string'inin uzunluğu (*length*) α string'inin eleman sayısını verir ve $|\alpha|$ ile gösterilir.
  - Eğer $\alpha = b^2ac^3$ ise $|\alpha| = 6$.
- Eğer bir string eleman içermiyorsa *boş string* (*null string)* adını alır ve Yunan alfabesindeki λ (lambda) ile gösterilir

- $X^* = \{\text{all strings over } X \text{ dahil } \lambda\}$
- $X^+ = X^* - \{\lambda\}$, the set of all non-null strings
- α ve β gibi iki string'in birleşimi (*concatenation*), α ve arkasına β'nın eklenmesiyle elde edilen $\alpha\beta$ string'i şeklindedir.
- Örnek: α = bbaccc ve β = caaba,

  $\alpha\beta = bbaccccaaba = b^2ac^4a^2ba$

  Kısaca, $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$

Sayı Sistemleri (Number systems)

- *İkili (Binary)* sayılar: 0 ve 1, *bits adını alır.*
- *Binary (base 2)*, *hexadecimal (base 16)* ve *octal (base 8)* sayı sistemleri

Decimal(base 10) sistem:

- Örnek: 45,238

8	bir	8 x 1 =	8
3	on	3 x 10 =	30
2	yüz	2 x 100 =	200
5	bin	5 x 1000 =	5000
4	on bin	4 x 10000 =	40000

İkili (Binary) sayı sistemi

- Binary’den decimal’a:
- İki tabanındaki sayı 1101011 olsun
  - 1 bir $1 \times 2^0 =$ 1
  - 1 iki $1 \times 2^1 =$ 2
  - 0 dört $0 \times 2^2 =$ 0
  - 1 sekiz $1 \times 2^3 =$ 8
  - 0 on-altı $0 \times 2^4 =$ 0
  - 1 otuz-iki $1 \times 2^5 =$ 32
  - 1 almış-dört $1 \times 2^6 =$ 64

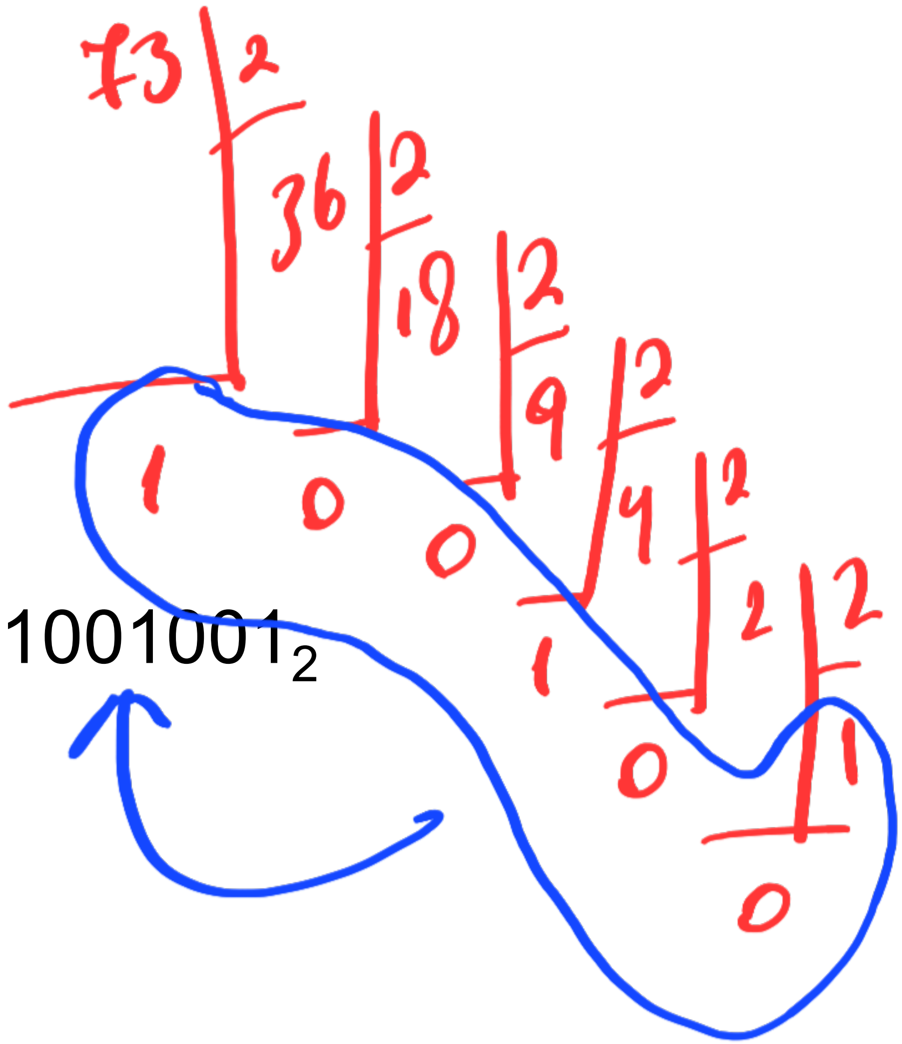
107 (taban 10)

Decimal'den binary'e

- Decimal sayı 73_{10} olsun
  - $73 = 2 \times 36 +$ kalan $\underline{1}$
  - $36 = 2 \times 18 +$ kalan $\underline{0}$
  - $18 = 2 \times 9 +$ kalan $\underline{0}$
  - $9 = 2 \times 4 +$ kalan $\underline{1}$
  - $4 = 2 \times 2 +$ kalan $\underline{0}$
  - $2 = 2 \times \underline{1} +$ kalan $\underline{0}$

$$\Rightarrow 73_{10} = 1001001_2$$

(kalanlar ters sırada yazılır)



İkili (Binary) toplama (addition) tablosu

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	10

İkili (binary) sayılarda toplama

- Örnek: add $100101_2 + 110011_2$

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1\ 1}\quad \leftarrow \text{elde birler} \\
100101_2 \\
\underline{110011}_2 \\
1011000_2
\end{array}
$$

Hexadecimal sayı sistemi

Decimal sistem															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Hexadecimal sistem															

Hexadecimal'den decimal'e

- Hexadecimal sayımız $3A0B_{16}$ olsun

$$
\begin{array}{rr}
11 \times 16^0 = & 11 \\
0 \times 16^1 = & 0 \\
10 \times 16^2 = & 2560 \\
3 \times 16^3 = & \underline{12288} \\
 & 14859_{10}
\end{array}
$$

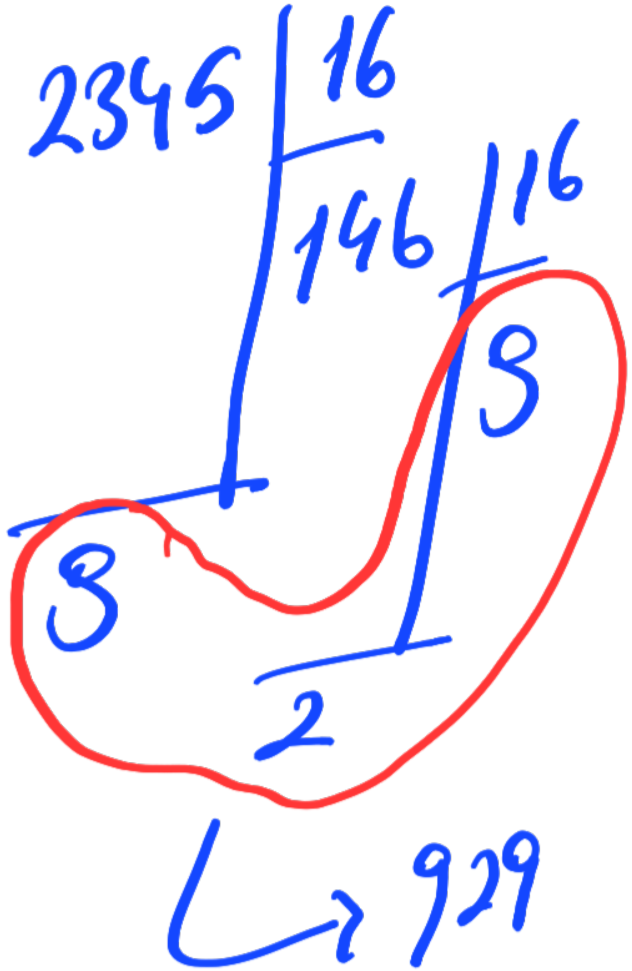
Decimal'den hexadecimal'e

Verilen sayı 2345_{10} olsun

2345 = 146x16 + remainder 9

146 = 9x16 + remainder 2

$2345_{10} = 929_{16}$



Hexadecimal sayılarda toplam

Toplam $23A_{16} + 8F_{16}$

$$\begin{array}{r} 23A_{16} \\ + \quad 8F_{16} \\ \hline 2C9_{16} \end{array}$$

Bağıntılar (Relations)

- ***X*** ve ***Y*** verilen iki küme olsun, bunların *Kartezyen Çarpımı* (*Cartesian Product)* ***X***x***Y*** olup, (x,y) çiftlerinden oluşur, x∈X ve y∈Y
  - XxY = {(x, y) | x∈X and y∈Y}

- ***R***, XxY kartezyen çarpımının bir alt kümesi olup, *X*'den *Y*'ye, bir *ikili bağıntı* (*binary relation)* olarak verilmiş olsun
  - Örnek: X = {1, 2, 3} ve Y = {a, b}
  - *R* = {(1,a), (1,b), (2,b), (3,a)} *X* ve *Y* arasında bir bağıntıdır

Tanım ve Değer Kümesi (Domain and Range)

X'den ***Y***'ye verilen bir ***R*** bağıntısında,

- *R*'nin tanım kümesi (domain)

  Dom(R) = $\{ x \in X \mid (x, y) \in R$ for some $y \in Y\}$

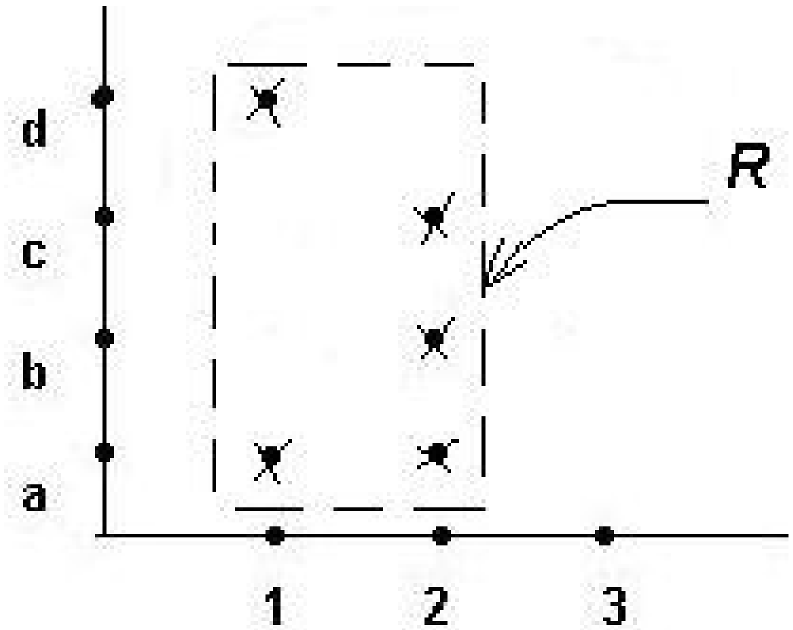
- *R*'nin değer kümesi (range)

  Rng(R) = $\{ y \in Y \mid (x, y) \in R$ for some $x \in X\}$

- Örnek:
  - $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b\}$
  - $R = \{(1,a), (1,b), (2,b)\}$
  - Dom(R)= $\{1, 2\}$, Rng(R) = $\{a, b\}$

Bağıntılara örnek

- X = {1, 2, 3} ve Y = {a, b, c, d}
- R = {(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)}
- Verilen bağıntıyı graf kullanarak çizersek:



Bağıntıların özellikleri

R, **A** kümesi üzerinde bir bağıntı olsun

Örnek: *R*, **A**x**A** kartezyen çarpımının bir alt kümesi

- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***reflexive*** (*yansıma*) if $(x,x) \in R$ for every element $x \in$ **A**.

- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***nonreflexive*** if $(x,x) \notin R$ for some element $x \in$ **A**.

- A relation ***R*** on a set ***A*** is called ***irreflexive*** if $(x,x) \notin R$ for every element $x \in$ **A**.

- A relation **R** on a set **A** is called ***symmetric*** (*simetrik*)

  if [(y,x) $\in$ R whenever (x,y) $\in$ R] or

  [(y,x) $\notin$ R whenever (x,y) $\notin$ R] or

  (x=y), for x,y $\in$ **A**.

- A relation **R** on a set **A** such that (x,y) $\in$ R and (y,x) $\in$ R only if x=y, for x,y $\in$ **A**, is called ***antisymmetric*** (*antisimetrik*).

- A relation **R** on a set **A** is called ***transitive*** (*geçişkenlik*) if whenever $(x,y) \in R$ and $(y,z) \in R$ then $(x,z) \in R$, for $x,y,z \in$ **A**

AxA

16 tane kartezyen çarpım kümesi var

Örnek: if $a=b^2$, $(a,b) \in R$ $A=\{1,2,3,4\}$

İlgili bağıntıyı yazınız ve hangi özelliklerin mevcut olduğunu söyleyiniz.

R={(1,1),(4,2)} 2,4 5

(2,4)

Reflexive	Yok
Nonreflexive	Var
Irreflexive	Yok
Symmetric	Yok
Antisymmetric	Var

Transitive Var

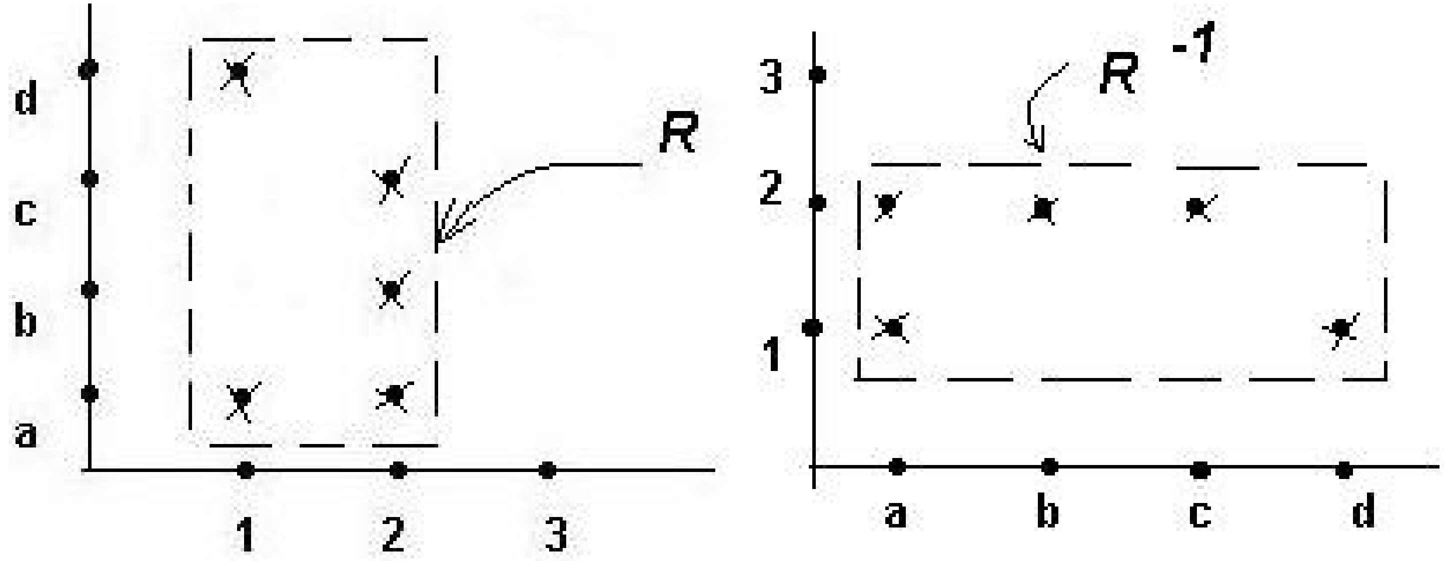
A={ } Transitive ? EVET

Bağıntının tersi

X’den *Y*’ye bir *R* bağıntısı verilmiş olsun, bu bağıntının *tersi (inversi) Y*’den *X*’e olup R^{-1} ile gösterilir

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

- Örnek: Eğer $R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$ ise
  $R^{-1} = \{(a,1), (d,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$



Bağıntının Bileşkesi(Composition)

- Tanım

  $R^1 = R$

  $R^2 = R \circ R$

  $R^3 = R^2 \circ R$

  ....

  $R^n = R^{n-1} \circ R$

Örnek: $R=\{(1,1)\ (2,1)(3,2)(4,3)\}$ için R^2 ve R^3 bulunuz.

$R^2 = R \circ R = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,2)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,1)\}$

11,22 olucak
sonra bakıcan

ilave de
şeyler

A={1,2,3,4}

{(2,2)(2,3)(2,4)(3,2)(3,3)(3,4)} NR,NS,NAS,T

{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)(3,3)(4,4)} R,S,NAS,T

{(2,4)(4,2)} IR,S,NAS,NT

{(1,2)(2,3)(3,4)} IR,NS,AS,NT

{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)} R,S,AS,T

{(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,1)(3,4)} IR,NS,NAS,NT

reflexif ... 11 22 gibi ... simetrik olmayıp bir ifade yok IR

11, 22 varsa simetrik yoksa IYR

(1,3), (3 1), (1 1)

AS → 11, 22 gibi şeyler ... ında

Denklik Bağıntısı (Equivalence Relation)

pr haric hicbiri simetrik olmıcak

X bir küme, *R*’de *X* üzerindeki bir bağıntı olsun

- *R* bağıntısı üzerinde reflexive, symmetric ve transitive özellikleri mevcut ise bu bir *denklik bağıntısı* (*equivalence relation)* olup X ⇔ *R* şeklinde gösterilir

R={(1,1) (2,2)(3,3)(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)(2,3)(3.2)}

Reflexive ?	Var
Symmetric ?	Var
Transitive ?	Var
Antisymmetric ?	Yok

equavalance denklik bağıntısı

Hasse

partial order

EQUIVALANCE RELATION ?

EVET

reflexive,

Anti

symmetric transitive

- Örnek: X = {integers} ve X kümesi üzerinde tanımlı olan *R* bağıntısı da x*R*y ⇔ x - y = 5 olarak verilsin.

R'nin *equivalence relation* olup olmadığını gösteriniz.

X={1,6}

R={(6,1)} (1,5)

Irreflexive −

Antisymmetric +

Transitive +

Denklik Bağıntısı değildir.

çünkü transitive kuralı bozan bir eleman extra yok

Örnek:

X={1,2,3,4,5,6}

R={(1,1)(1,3)(1,5)(3,1)(3,3)(3,5)(5,1)(5,3)(5,5)(2,2)(2,6)(6,2)(6,6)(4,4)}

EQUIVALENCE RELATION ?

EVET

Reflexive – Symmetric - Transitive

Sıralama Bağıntısı (Partial Order Relation)

X bir küme, *R*'de *X* üzerindeki bir bağıntı olsun

- *R* bağıntısı üzerinde reflexive, antisymmetric ve transitive özellikleri mevcut ise bu bir *sıralama bağıntısı* (*partial order relation)* dır
- Hasse Diyagramları *(partial order öz.)*

Örnek:

R: if x divides y $(x,y) \in R$ $A=\{1,2,3,4\}$ $x,y \in A$

$R=\{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,4)(3,3)(4,4)\}$

PARTIAL ORDER ?

EVET

Reflexive – Antisymmetric - Transitive

Hasse Diyagramları

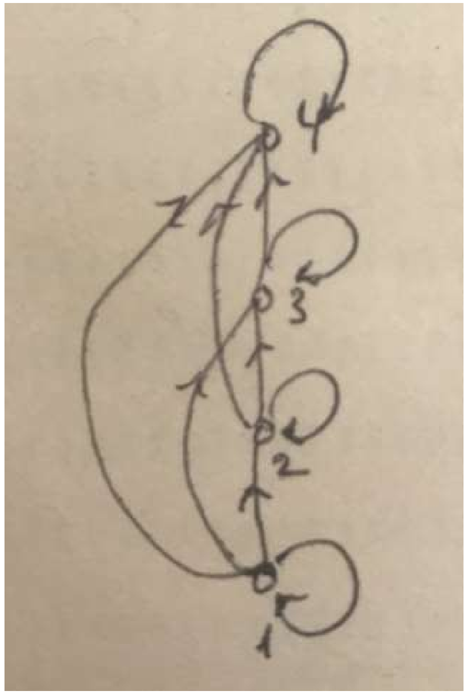
(Alman Matematikçi Helmut Hasse tarafından geliştirilmiştir)

Sıralama Bağıntısı Özelliğini Sağlarlar

Örnek

R: {(a, b) | a ≤ b, a ∈ X, b ∈ X}   X={1, 2, 3, 4}

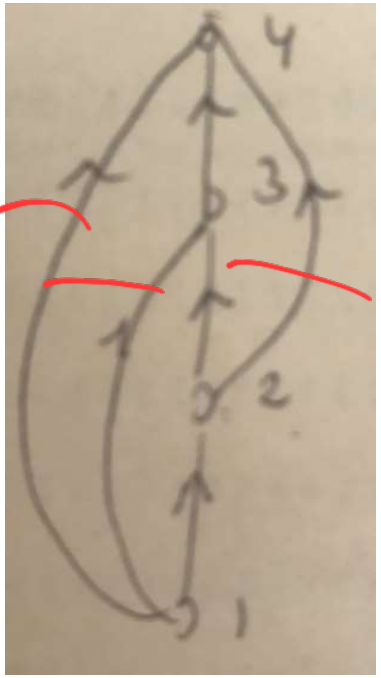
R={(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)}



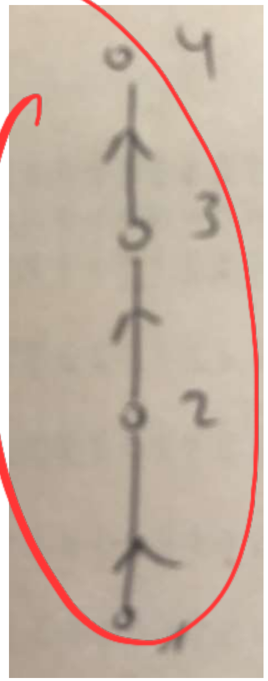
Reflexsive
Antisymmetric
Transitive

} Partial Order

Önce Yansıma Öz. Çıkaralım



Sonra Geçişgenlik Öz. Çıkaralım



Hasse

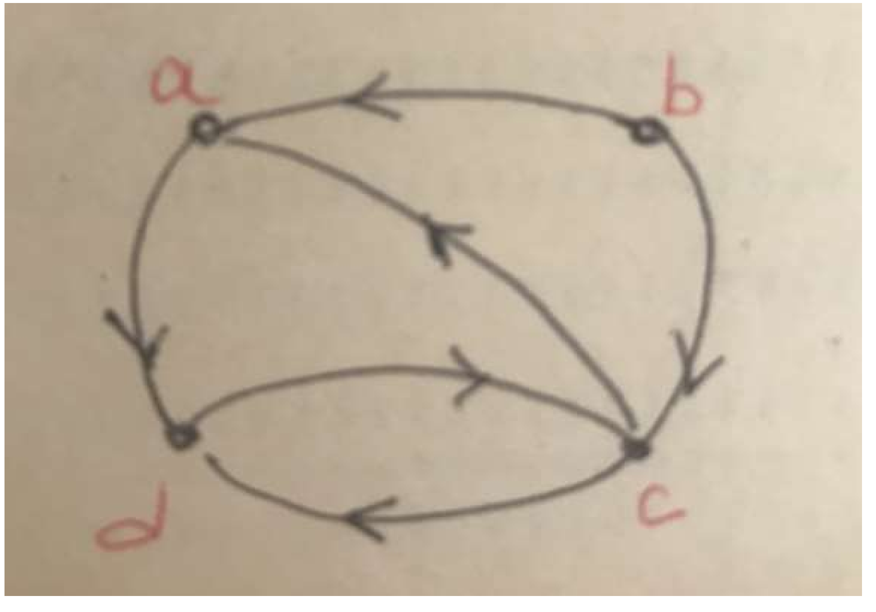
Kapalılık (Closure)

❑ Verilmiş olan bağıntı üzerinde reflexive, symmetric ve transitive özellikleri mevcut değilse bağıntının bu özelliklere sahip olabilmesini sağlama işlemidir.

- Transitive closure
- Warshall algoritması (by Stephen Warshall)

Verilen bağıntının Transitive özelliğini sağlamadığı görülmektedir
Bu bağıntıya Transitive özelliği eklemek için ne yapabiliriz?

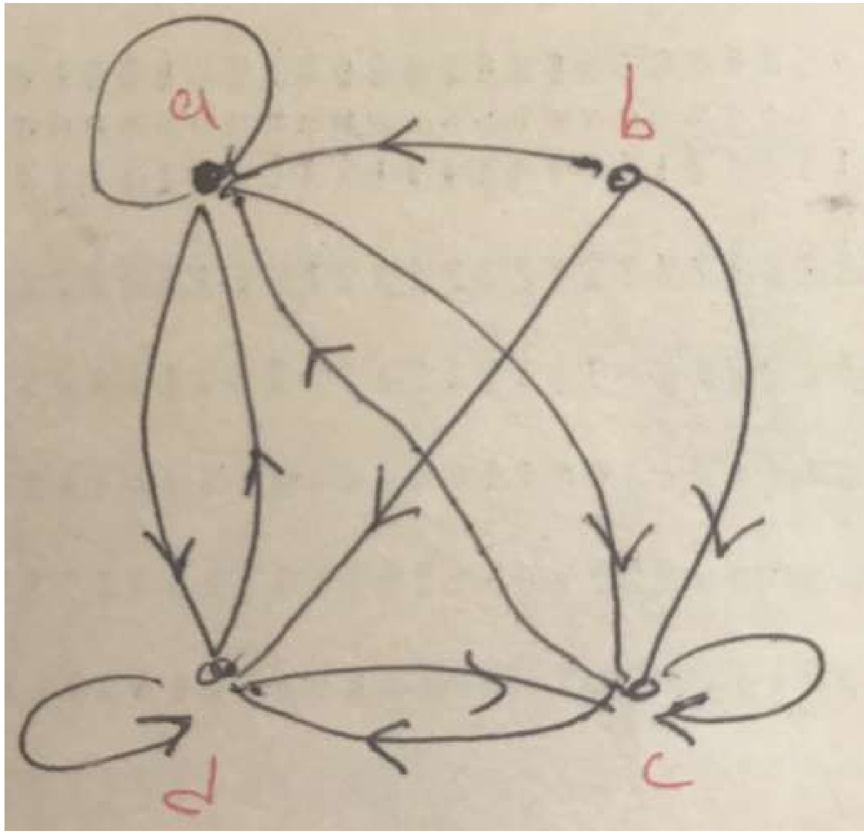
R={(b,a)(b,c)(c,a)(c,d)(d,c)(a,d)}



$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relation Matrisi

Warshall algoritması



$k=1$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=2$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=3$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=4$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Yansıma ve simetri özelliklerini taşıyan küme içi bağıntılar

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ Farklı ülkelerden kişiler

$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ Beş ayrı dil

Kim hangi dili konuşuyor?

$$M_\alpha = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Hangi diller kimler tarafından konuşuluyor?

$$M_\alpha^{-1} = \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Kim kiminle konuşabiliyor?

$$M_{\alpha\alpha^{-1}} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Matris Bağıntıları

- *X* ve *Y* bir küme, *R'*de *X'*den *Y'*ye bir bağıntı olsun. Aşağıdaki bağıntılardan matris A = (a_{ij}) yazılır
  - X kümesinin elemanları, A matrisinin satırlarını oluşturur
  - Y kümesinin elemanları, A matrisinin kolonlarını oluşturur

  - i. satırdaki X'in elemanları ile j. kolondaki Y'nin elemanları birbirleriyle ilişkili değilse, $a_{i,j}$ = 0 dır
  - i. satırdaki X'in elemanları ile j. kolondaki Y'nin elemanları birbirleriyle ilişkili ise, $a_{i,j}$ = 1 dir

Matris bağıntıları (1)

Örnek:

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(1,a), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

R bağıntısının matrisi:

A =

	a	b	c	d
1	1	0	0	1
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0

Matris Bağıntıları (2)

- Eğer *R* bağıntısı, *X* kümesinden *X* kümesine ise bu bağıntının matrisi bir kare matristir

  Örnek:

  X = {*a*, b, c, d} ve *R* = {(a,*a*), (b,b), (c,c), (d,d)}

  A =

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

Fonksiyonlar (Functions)

- *Fonksiyon* bağıntının özel bir şeklidir.
- Bir ***f*** fonksiyonunun, *X*'den *Y*'ye bir bağıntısı olsun (f : X → Y)

  Let A and B are sets. A *function* ***f*** from A to B is an assignment of exactly one element of B to each element of A.
- *X*'e ***f***'nin tanım kümesi (domain)

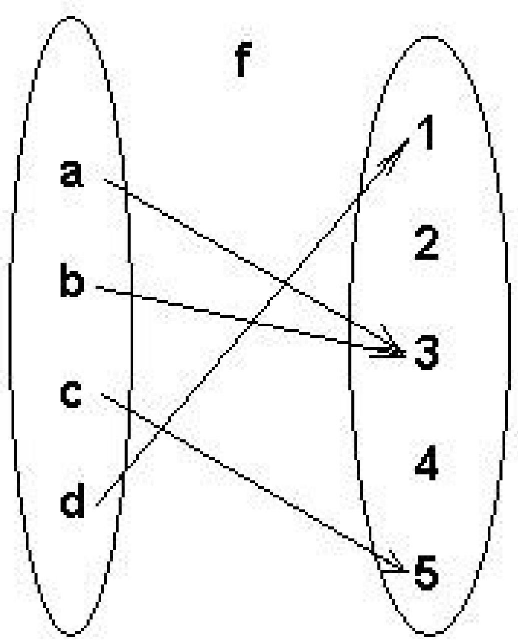
  Dom(f) = X
- *Y*'e ***f***'nin değer kümesi (range)

  Rng(f) = Y
  - Örnek:

    Dom(f) = X = {a, b, c, d},

    Rng(f) = Y = {1, 3, 5}

    f(a) = f(b) = 3, f(c) = 5, f(d) = 1



X=Dom(f) Y=Rng(f)

$f_1(x)=x^2 \quad f_2(x)=x-x^2$

$f_1 + f_2 = ?$ $\quad x^2 + x - x^2 = x$

$f_1 * f_2 = ?$ $\quad x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$

X={1,2,3} Y={a,b,c}

R={(1,a)(2,b)(3,a)} Bir fonksiyon mudur ? EVET

X={1,2,3} Y={a,b,c}

R={(1,a)(2,b)(3,c)(1,b)} Bir fonksiyon mudur ? HAYIR

Bire-Bir Fonksiyonlar (One-to-one functions-injective)

- Bir fonksiyon $f : X \to Y$ bire-bir (*one-to-one*) $\Leftrightarrow$ her $y \in Y$ sadece bir $x \in X$ değerine karşılık gelir.
- Alternatif tanım: $f : X \to Y$, *one-to-one* $\Leftrightarrow$ X kümesindeki her x değeri $x_1, x_2 \in X$, Y kümesindeki $y_1, y_2 \in Y$ gibi farklı iki değere karşılık gelir. $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ gibi

Örnekler:

- 1. $f(x) = 2^x$ (from the set of real numbers to itself) one-to-one
- 2. $f : R \to R$ defined by $f(x) = x^2$ <u>not</u> one-to-one

  çünkü for every real number x, $f(x) = f(-x)$.

Örten Fonksiyonlar (Onto functions-surjective)

Bir fonksiyon $f : X \to Y$ *örten* (*onto*) $\Leftrightarrow$

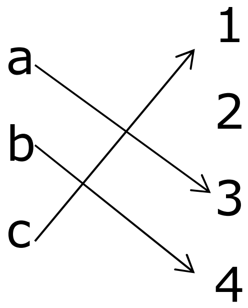
Her $y \in Y$ için en az bir tane $x \in X$ mevcuttur

Bijective Fonksiyonlar

Bir fonksiyon $f : X \rightarrow Y$ bijective $\Leftrightarrow$

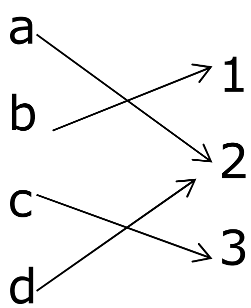
f fonksiyonu one-to-one ve onto'dur

- Örnekler:
  - 1. Lineer bir fonksiyon $f(x) = ax + b$ bijective fonksiyondur (from the set of real numbers to itself)
  - 2. Bir $f(x) = x^3$ bijective fonksiyondur (from the set of real numbers to itself)



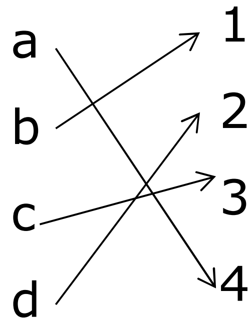
one to one

not onto



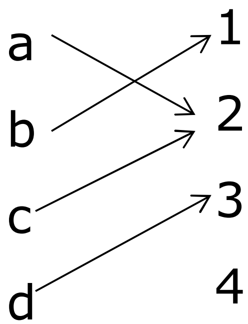
not one to one

onto



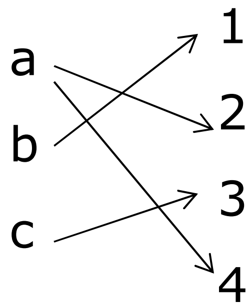
one to one

onto



Neither onto nor

one to one



not a function

Ters Fonksiyon (Inverse function)

- $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi(inverse) f^{-1} olup $\{(y, x) \mid y = f(x)\}$ olarak sembolize edilir.

- f^{-1} in bir fonksiyon olması gerekmez
  - Örnek: if $f(x) = x^2$, then $f^{-1}(4) = \sqrt{4} = \pm 2$, tek bir değer olmadığından tersi bir fonksiyon değildir

- Eğer bir fonksiyon bijective (*onto ve one to one*) ise tersi de bir fonksiyondur

$f=\{(1,a)(2,c)(3,b)\}$

$f^{-1}=\{(a,1)(c,2)(b,3)\}$

$f(x)=x+1$

$f^{-1}= x-1$

$f(x) = ax + b$

$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

$f^{-1}=?$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$f(x) = ax^2+bx+c$

$f^{-1}(x) = x \ yaln\imath z \ b\imath rak\imath lacak$

$y = x^2 - 6x + 13$
$y = x^2 - 6x + 9 + 4$
$y = (x-3)^2+4$
$y - 4 = (x-3)^2$
$\sqrt{y-4} = x-3$
$x = \sqrt{y-4} + 3$

$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{y-4}$

Fonksiyonların Bileşkesi

- Verilen iki fonksiyon $g : X \to Y$ ve $f : Y \to Z$ olup, bileşkesi $f \circ g$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$f \circ g\ (x) = f(g(x)) \text{ for every } x \in X.$$

  - Örnek: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 3x + 5$. Then

    $f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 5 = (3x^2 + 2)$

- Fonksiyon bileşkesinde birleşim öz.:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

- Fakat değişme özelliği yoktur:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar (Exponential and Logarithmic Functions)

- $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = \log_2 x = \lg x$
  - $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\lg x) = 2^{\lg x} = x$
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = \lg 2^x = x$
- Üstel ve Logaritmik fonksiyonlar birbirinin tersidir

String'in tersi (inverse)

X herhangi bir küme olsun

X üzerindeki tüm string'lerin kümesi de X* olsun

Eğer $\alpha = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$

$f(\alpha) = \alpha^{-1} = x_nx_{n-1}\ldots x_2x_1$

String'in inversi alınırken ters sırada yazılır

$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \lambda$

Floor ve Ceiling Fonksiyonları

x'in *FLOOR*'u $\lfloor x \rfloor$ olarak gösterilir.

x'e EŞİT veya ondan KÜÇÜK EN BÜYÜK tamsayıyı verir.

x'in *CEILING*'i $\lceil x \rceil$ olarak gösterilir.

x'e EŞİT veya ondan BÜYÜK EN KÜÇÜK tamsayıyı verir.

$\lceil -8 \rceil = -8$

$\lfloor -1/2 \rfloor = -1$

$\lceil 7 \rceil = 7$

$\lfloor 8.3 \rfloor = 8$

$\lfloor 3.1 \rfloor = 3$

$\lceil 1/2 \rceil = 1$

$\lfloor -8.7 \rfloor = -9$

$\lceil -1/2 \rceil = 0$

$\lfloor 1/2 \rfloor = 0$

$\lceil -11.3 \rceil = -11$

$\lceil 6 \rceil = 6$

$\lceil 3.1 \rceil = 4$

$\lfloor 7 \rfloor = 7$