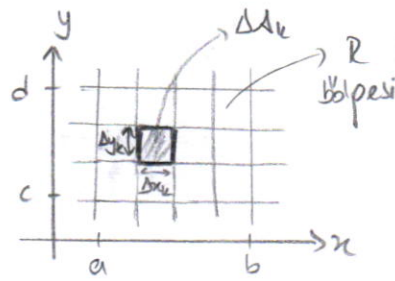
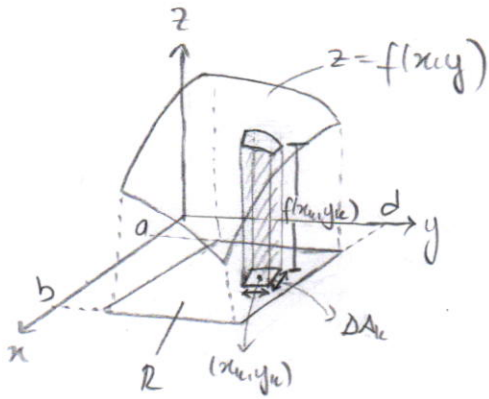


İKİ KATLI İNTEGRALLER

Dikdörtgenler üzerinde İki Katlı İntegraller

$z=f(x,y)$ yüzeyi ile üstten, xy -düzleminde bir dikdörtgensel R bölgesi ile alttan sınırlı üç boyutlu bir katı bölgenin hacmi, f nin R bölgesi üzerinde iki katlı integrali ile hesaplanır.



$$\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$$

n adet dikdörtgensel parçaya böldüğümüzü varsayalım.

Dikkey kutunun hacmi: $f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$

Dikkey kutuların toplam hacmi: $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$

Katı cismin hacmi: $V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x,y) dA = \iint_R f(x,y) dy dx$

Ardışık
integral

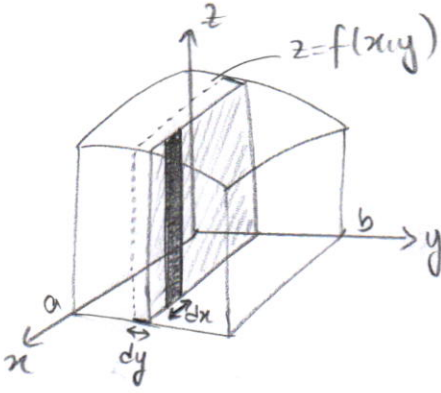
$z=f(x,y)$ fonksiyonunun R bölgesinde iki katlı integrali
integrasyon bölgesi

Fubini Teslemi (Birinci Şekil) = Eğer $f(x,y)$, $R = a \leq x \leq b$ ve $c \leq y \leq d$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ise,

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

Bu teorem, dikdörtgenler üzerindeki iki katlı integrallerin ardışık integraler olarak hesaplanabileceğini belirtir. Yani iki katlı bir integrali her defasında bir değişkene göre integral alarak hesaplayabiliriz. Teorem aynı zamanda, iki katlı integrali herhangi bir sırada hesaplanabileceğimizi söyler.

⑧ Katı cismin hacmini, bölgeyi dik kesitlere bölerek de hesaplayabiliriz. (dilimleyerek)



Konu taralı dilimlerin alanı = $f(x,y)dx$

Dik kesitın alanı = $\int_0^a f(x,y)dx$ (y-değerine karşılık gelen seridin alanı)

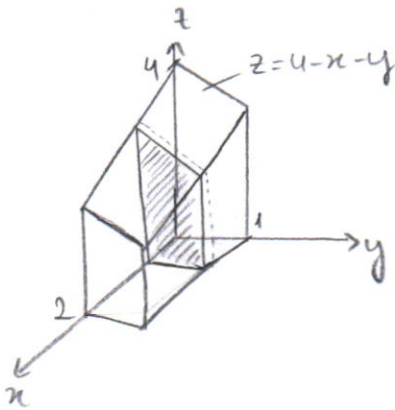
Kesiti "üç boyutlu hale getirmişsek" (dy derinliğini eklersek),

Dik kesitın hacmi = $\int_0^a f(x,y)dx dy$

Katı cismin hacmi = $\int_0^b \int_0^a f(x,y)dx dy$

(Aynı işlemler x-eksenine dik kesitlerle de yapılabilir)

Örnek: $z=4-x-y$ düzlemi altındaki ve xy -düzleminde $R: 0 \leq x \leq 2$ $0 \leq y \leq 1$ bölgesi üzerindeki hacmi hesaplayalım.

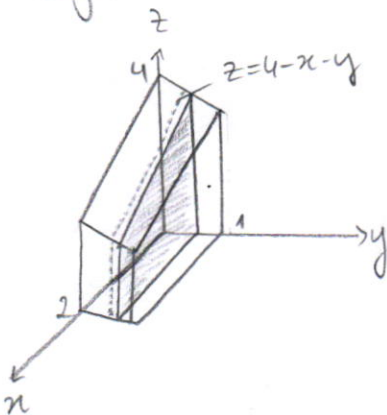


Taralı kesitın alanı = $\int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)dy$ (x sabit y'ye göre mt.)

$$V = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)dy dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 (4-x-y)dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - x \right) dx = 5$$

veya



Taralı kesitın alanı = $\int_{x=0}^{x=2} (4-x-y)dx$ (y sabit x'e göre mt.)

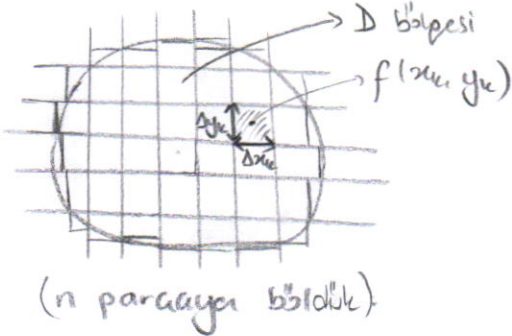
$$V = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2} (4-x-y)dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (4-x-y)dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(4x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_0^2 dy = \int_0^1 (6 - 2y) dy = 5$$

⑨ Her iki ardışık integral de iki katlı integralin değerini vermektedir.

Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun dikdörtgensel olmayan sınırlı bir D bölgesi üzerinde iki katlı integralini tanımlamak için D 'yi dikdörtgensel hücrelere böleriz.



Taralı dikdörtgenin alanı: $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$

Dikdörtgen üzerindeki kutunun hacmi:

$$f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

$$\text{Kutuların toplam hacmi: } \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_D f(x,y) dA = z=f(x,y) \text{ fonksiyonunun } D \text{ bölgesi üzerinde iki katlı integrali}$$

D bölgesinin çevresi üzerinde üstten $z=f(x,y)$ alttan $z=0$ düzleminin sınırladığı bölgenin hacmi

integrasyon bölgesi

⊗ Eğer D , $y=p_1(x)$, $y=p_2(x)$ eğrileri ve kenarlardan $x=a$, $x=b$ doğrularıyla sınırlı bir bölge ise hacmi yine dik kesitlere bölerek hesaplayabiliriz.

Fubini Teoremi (kapsamlı şekli): $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

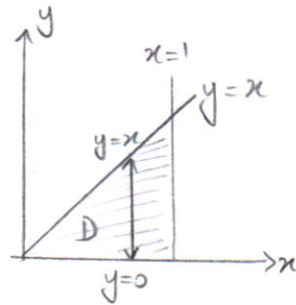
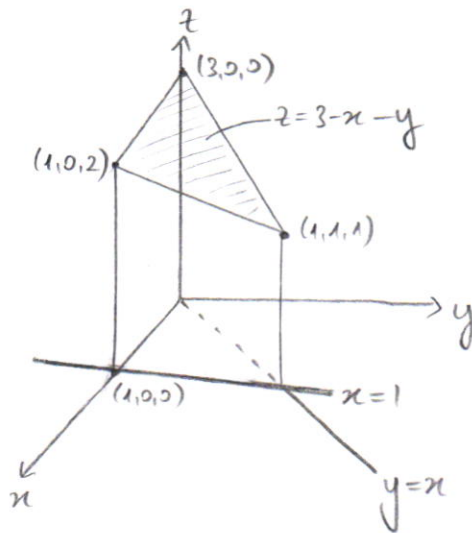
1) $D = a \leq x \leq b$, $p_1(x) \leq y \leq p_2(x)$ ise

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \int_{p_1(x)}^{p_2(x)} f(x,y) dy dx$$

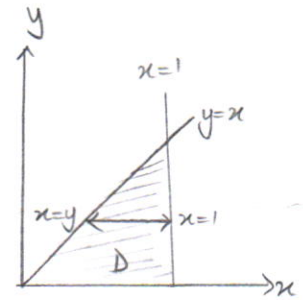
2) $D = c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ ise

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

Örnek: Tabanı xy -düzleminde olan ve x -ekseni, $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlanan ve üstten $z=3-x-y$ ile sınırlanan prizmanın hacmini bulun.



(1)



(2)

$$(1) \quad V = \int_0^1 \int_0^x (3-x-y) dy dx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = 1$$

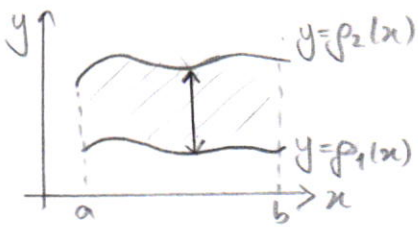
$$(2) \quad V = \int_0^1 \int_y^1 (3-x-y) dx dy = \int_0^1 \left(3x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_y^1 dy = \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = 1$$

Düzgün Bölge: Eğer D bölgesinin çevresi, eksenlere dik doğrularla en çok 2 noktada kesiliyorsa böyle bölgeye düzgün bölge denir.

İntegrasyon Sınırlarını Bölme

Dik kesitleri kullanmak:

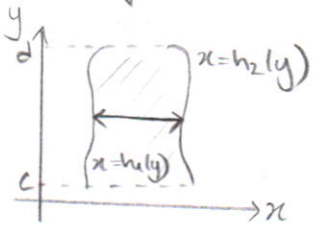
- * Bölge x' e göre düzdür
- * Bölge x' e dik doğrularla taranır. \updownarrow
- * $dydx$ sıralaması ile integral alınır.



$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) dy dx$$

Yatay kesitleri kullanmak:

- * Bölge y' ye göre düzdür
- * Bölge y' ye dik doğrularla taranır. \leftrightarrow
- * $dx dy$ sıralaması ile integral alınır.



$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

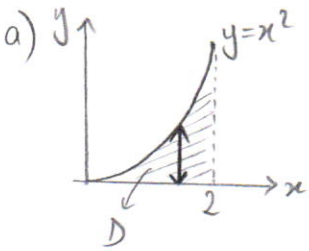
İki katlı İntegrallerin Özellikleri: f ve g , sınırlı D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

- 1) $\iint_D c f(x,y) dA = c \iint_D f(x,y) dA$ (c : sayı)
- 2) $\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y)) dA = \iint_D f(x,y) dA \pm \iint_D g(x,y) dA$
- 3) $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise $\iint_D f(x,y) dA \geq \iint_D g(x,y) dA$
- 4) $D = D_1 \cup D_2$ ve $D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow \iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$

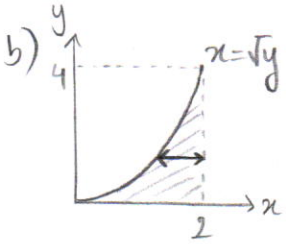
Örnek: $D = \begin{cases} y=0 \\ x=2 \\ y=x^2 \end{cases}$ integrasyon bölgesi üzerinde $\iint_D y \, dx \, dy$ integralini

a) κ' e göre dərpin bölmə

b) y' ye " " " alarak hesaplayın.

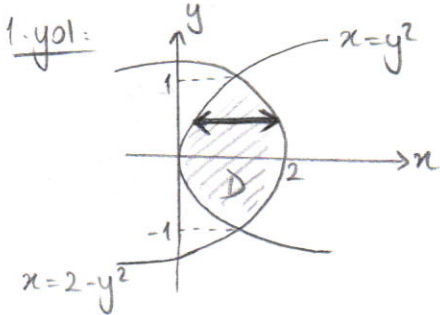


$$\int_0^2 \int_{y=0}^{y=x^2} y \, dy \, dx = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^2 = \frac{32}{10}$$



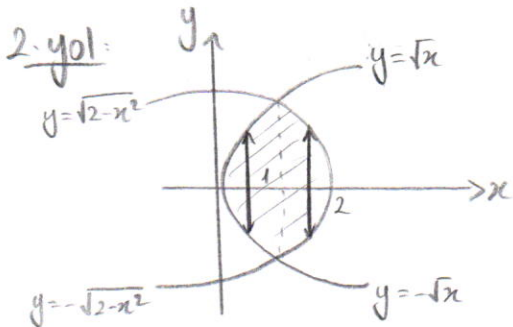
$$\int_0^4 \int_{x=\sqrt{y}}^2 y dx dy = \int_0^4 (yx|_{\sqrt{y}}^2) dy = \int_0^4 (2y - y^{3/2}) dy = \frac{32}{10}$$

Örnek: $D = \begin{cases} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{cases}$ bölgesinde $f(x,y) = 1+5y$ fonksiyonunun integralini hesaplayın.



$$\begin{cases} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{cases} \Rightarrow y=\pm 1, x=1$$

$$\iint_D (1+5y) dA = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} (1+5y) dx dy \quad (y'ye \text{ göre } dx'ın \text{ b'şöyle alabile})$$

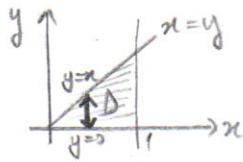


$$\iint_D (1+5y) dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+5y) dy dx + \int_1^2 \int_{1-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+5y) dy dx$$

(x' e göre d'ye göre bölge aldık)

Örnek: $I = \int_0^1 \int_0^1 \sin x^2 dx dy = ?$ ($\int_0^1 \sin x^2 dx$ hesaplanamayacağı için integrasyon sırası değiştirilmeli)

$D: y=0 \quad x=y$
 $y=1 \quad x=1$



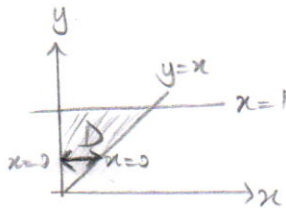
$$I = \int_0^1 \int_0^x \sin x^2 dy dx = \int_0^1 y \sin x^2 \Big|_0^x dx = \int_0^1 x \sin x^2 dx$$

$x^2 = u \quad 2x dx = du \quad x=1 \rightarrow u=1$
 $x=0 \rightarrow u=0$

$$I = \int_0^1 \frac{\sin u}{2} du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

Örnek: $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx = ?$

$D: x=0 \quad y=x$
 $x=1 \quad y=1$

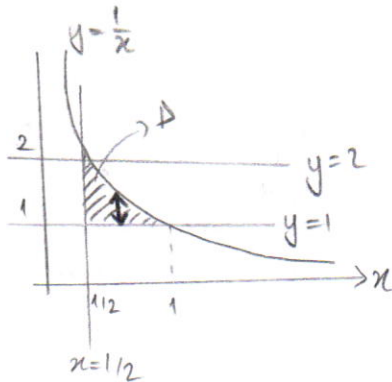


$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{x/y} dx dy = \int_0^1 \frac{e^{x/y}}{1/y} \Big|_0^y dy = \int_0^1 (e y - y) dy$$

$$= \frac{e y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Örnek: $\int_1^2 \int_{1/2}^{1/y} e^{\ln x - x} dx dy = ?$

$D: y=1 \quad x=1/2$
 $y=2 \quad x=1/y$



$$\int_1^2 \int_{1/2}^{1/y} e^{\ln x - x} dx dy = \int_{1/2}^1 \int_1^{1/x} e^{\ln x - x} dy dx$$

$$= \int_{1/2}^1 (e^{\ln x - x} \cdot y \Big|_1^{1/x}) dx$$

$$= \int_{1/2}^1 e^{\ln x - x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx$$

$\ln x - x = u$
 $\left(\frac{1}{x} - x \right) dx = du$

$$= e^{\ln x - x} \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

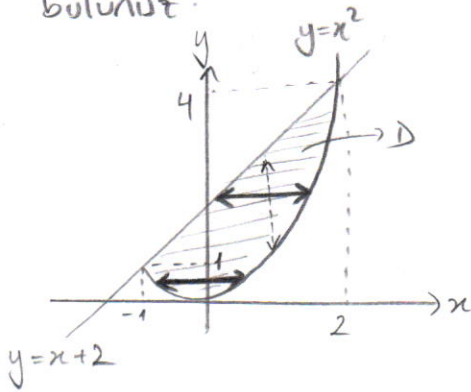
İki Katlı İntegral ile Alan Hesabı

$\iint_D f(x,y) dx dy$ integralinde $f(x,y)=1$ ise $\iint_D dx dy$ integrali D

bölgesinin alanını verir. (Yüksekliği 1 olan cismin hacmi, taban alanına eşittir)

$$A = \iint_D dA = \iint_D dx dy$$

Örnek: $y=x^2$ ve $y=x+2$ doğrusu ile çevrelenen D bölgesinin alanını bulunuz.



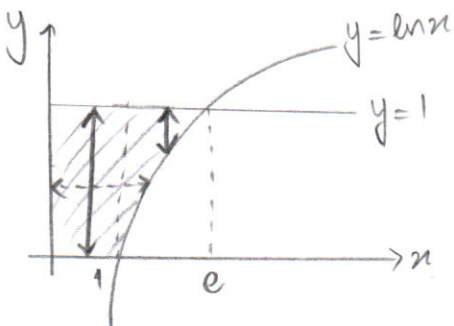
⊗ x' e göre düzgen bölge alırsak,

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dy dx = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx = \int_{-1}^2 y \Big|_{x^2}^{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

⊗ y' ye göre düzgen bölge alırsak,

$$A = \int_0^1 \int_{-y}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy = \frac{9}{2}$$

Örnek: $y=\ln x$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ eğrilerinin sınırladığı alanı veren iki katlı integrali yazınız.



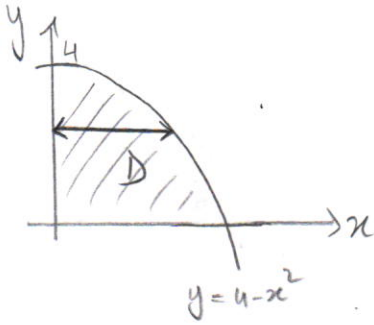
⊗ x' e göre düzgen bölge,

$$A = \int_0^1 \int_0^1 dy dx + \int_1^e \int_{\ln x}^1 dy dx$$

⊗ y' ye göre düzgen bölge,

$$A = \int_0^1 \int_0^{e^y} dx dy$$

Örnek: D bölgesi, 1. bölgede $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$ arasında kalan bölge ise $\iint_D \frac{xe^{2y}}{4-y} dA$ integralini hesaplayınız.



$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^4 (4-y) \frac{e^{2y}}{4-y} dy = \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^4 = \frac{e^8 - 1}{2}$$

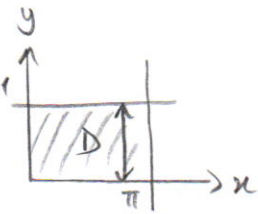
($dA=dydx$ sıralaması ile integral çalışılmaz!)

İki Katlı İntegraller ile Ortalama Değer Teoremi

Bir D bölgesi üzerinde integrallenebilir $f(x,y)$ fonksiyonunun ortalama değeri:

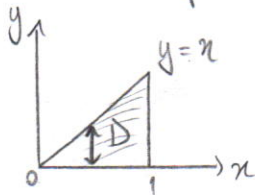
$$\bar{f} = \frac{1}{D\text{'nin alanı}} \iint_D f(x,y) dA$$

Örnek: $f(x,y) = x \cos xy$ fonksiyonunun $D: 0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ dikdörtgeni üzerinde ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy dy dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin xy \Big|_0^1 dx = \frac{1}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

Örnek: Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ de olan dik üçgende x^2+y^2 fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2) dy dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^x \right) dx = 2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{2}{3}$$

*) Eğer f , D bölgesini kaplayan bir levhanın sıcaklığı ise, f nin D üzerinde iki katlı integralinin D nin alanına bölümü, levhanın ortalama sıcaklığıdır.

Kutupsal Formda İki Katlı İntegraller (Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Dönüştürmek)

$\iint_D f(x,y) dx dy$ integralinde D bölgesi, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ dönüşümleri ile $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$ eğrileri ve $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ doğrularının sınırladığı bölgeye dönüşür. Bu dönüşümle, $dx dy = dy dx = r dr d\theta$ ve

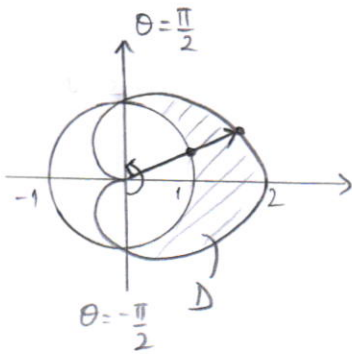
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

elde edilir.

İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

- 1) D bölgesi çizilir.
- 2) Orijinden çıkan bir ışının D 'ye girdiği ve çıktığı yerdeki r değerleri belirlenir. Bu değerler integrasyonun r sınırlarıdır.
- 3) D 'yi sınırlayan en küçük ve en büyük θ değerleri bulunur. Bunlar integrasyonun θ sınırlarıdır.

Örnek: $r=1+\cos\theta$ kardiyoidinin içinde ve $r=1$ dairenin dışında kalan D bölgesi üzerinde $f(r,\theta)$ nin integralini almak için integrasyon sınırlarını bulunuz.



$$\iint_D f(r,\theta) dA = \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta) r dr d\theta$$

Kutupsal Koordinatlarda Alan

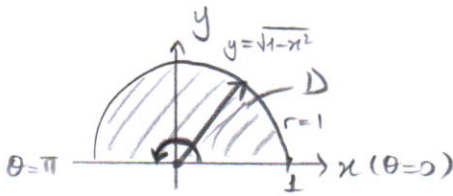
Kutupsal koordinat düzleminde kapalı ve sınırlı bir D bölgesinin alanı:

$$A = \iint_D r dr d\theta$$

*) Yukarıdaki örnekte, D bölgesinin alanı = $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta$

Örnek: $D = \begin{cases} y=0 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ ile sınırlanan yarı dairesel bölge olmak üzere,

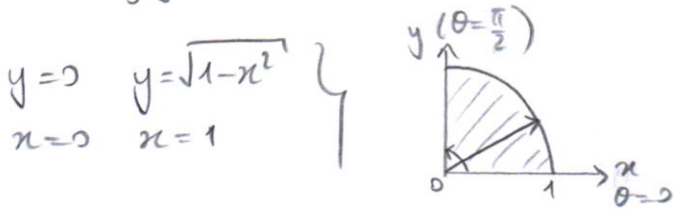
$$\iint_D e^{x^2+y^2} dy dx = ?$$



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ dx dy = r dr d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{D bölgesi} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dy dx = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (e-1) d\theta = \frac{(e-1)\pi}{2}$$

Örnek: $\iint_D (x^2+y^2) dy dx$ integralini hesaplayınız.



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Örnek: İki katlı integrallerde hacim hesabı:

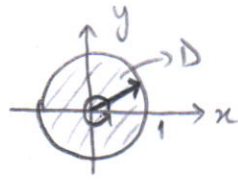
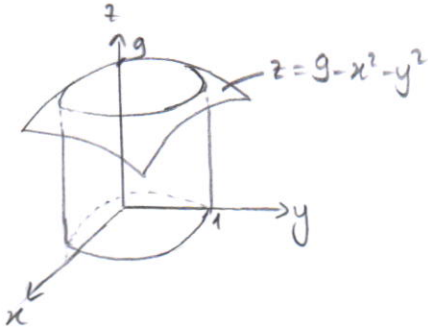
1) Üstten $z=f(x,y)$, alttan $z=0$ ile sınırlı cismin, bir D bölgesi üzerinde oluşturduğu cismin hacmi;

$$V = \iint_D f(x,y) dA$$

2) Eğer cisim üstten $z=f_1(x,y) \geq 0$, alttan $z=f_2(x,y)$ ile sınırlı ve bu yüzeylerin xy -düzlemi üzerindeki izdüşümü D bölgesi ise, oluşan cismin hacmi;

$$V = \iint_D (f_1(x,y) - f_2(x,y)) dA \quad \text{iki yüzey arasındaki hacim}$$

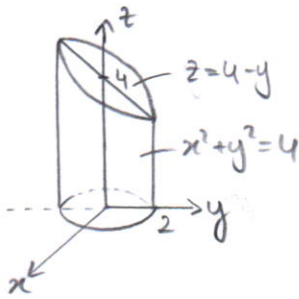
Örnek: Üstten $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve alttan xy -düzlemindeki birim çemberle sınırlı katı cismin hacmini hesaplayınız.



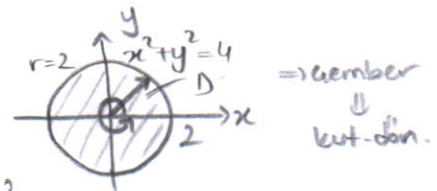
$$V = \iint_D (9 - x^2 - y^2) dA$$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9 - r^2) r dr d\theta = \frac{17\pi}{2}$$

Örnek: $x^2 + y^2 = 4$ silindiri, $y + z = 4$ ve $z = 0$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.



D: izdüşüm bölgesi



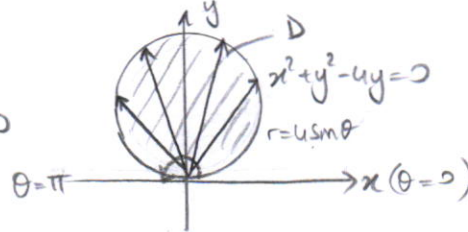
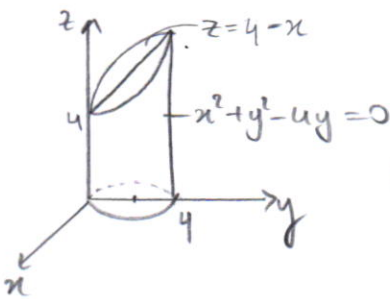
$$V = \iint_D (4 - y) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta$$

$$= 8\theta + \frac{8}{3} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 16\pi$$

Örnek: $x^2 + y^2 - 4y = 0$ silindiri, $x + z = 4$, $z = 0$ düzlemleri arasındaki cismin hacmini veren iki katlı integrali yazınız.

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (0, 2) \text{ merkezli } z \text{ boyunca uzanmış silindir}$$

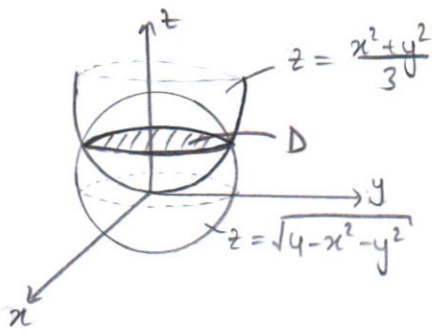


$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} r^2 - 4r \sin \theta = 0 \\ \Rightarrow r = 4 \sin \theta \end{array}$$

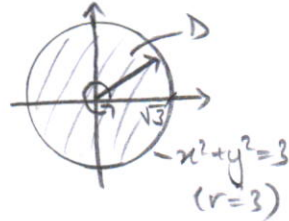
($r = 2$ değil! θ 'ya göre uzunluk değişiyor!)

$$V = \iint_D (4 - x) dxdy = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \theta} (4 - r \cos \theta) r dr d\theta$$

Örnek: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 'in altında $3z = x^2 + y^2$ nm üstünde kalan cismin hacmini hesaplayınız



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \quad z > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \\ \text{D bölgesi (izdüşüm bdl.)} \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right.$$

$$V = \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{3} \right) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{3} \right) r dr d\theta = \frac{19}{6} \pi$$

İki Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Jakobien Determinantı

$x=p(u,v)$ ve $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün Jakobien determinantı veya Jakobien'i şöyledir:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Jakobien aynı zamanda, $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ olarak da gösterilebilir.

$$\textcircled{*} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} \text{ dir.}$$

Değişken Dönüşümü

$\iint_D f(x,y) dx dy$ integralinde $x=p(u,v)$, $y=h(u,v)$ değişken dönüşümü yapılırsa D bölgesi bir G bölgesine dönüşür. Bu durumda,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_G f(p(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| du dv$$

⊕ Jakobien, D bölgesi G bölgesine dönüştürülürken, D de bir noktanın civarındaki alanın dönüşümde ne kadar genişlediğini veya büzüldüğünü gösterir.

Örnek: $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ kutupsal dönüşümü ile $dx dy = r dr d\theta$ olduğunu gösteriniz.

$$\left. \begin{matrix} x=p(r,\theta) \\ y=h(r,\theta) \end{matrix} \right\} J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$dx dy = |J(r,\theta)| dr d\theta = r dr d\theta$$

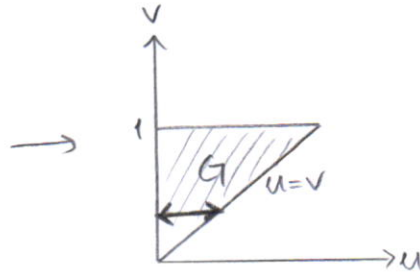
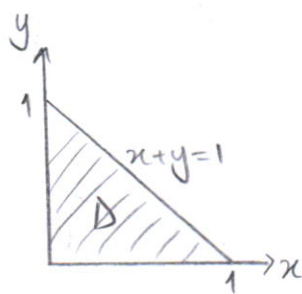
Örnek: $D = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ olmak üzere, $\iint_D e^{\frac{x}{x+y}} dx dy = ?$

$\begin{cases} x=u \\ x+y=v \end{cases}$ dönüşümü yapalım

$\frac{D}{x=0} \rightarrow \frac{G}{u=0}$

$y=0 \rightarrow x=v \Rightarrow u=v$

$x+y=1 \rightarrow v=1$



$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$dx dy = |J(u,v)| du dv = du dv$

$$\iint_D e^{\frac{x}{x+y}} dx dy = \iint_G e^{u/v} du dv = \int_0^1 \int_0^v e^{u/v} du dv = \int_0^1 \frac{e^{u/v}}{\frac{1}{v}} \Big|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1) dv = \frac{v^2}{2}(e-1) \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Örnek: $\int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$ integralini $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ dönüşümünü

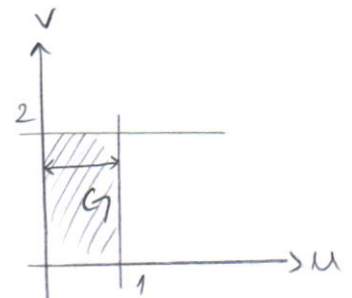
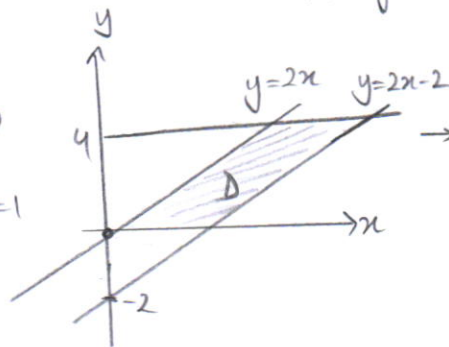
uygulayarak hesaplayın.

$\frac{D}{x=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2x} \rightarrow \frac{G}{u+v=v \Rightarrow u=0}$

$x=\frac{y}{2}+1 \Rightarrow y=2x-2 \rightarrow u+v=v+1 \Rightarrow u=1$

$y=0 \rightarrow 2v=0 \Rightarrow v=0$

$y=4 \rightarrow 2v=4 \Rightarrow v=2$



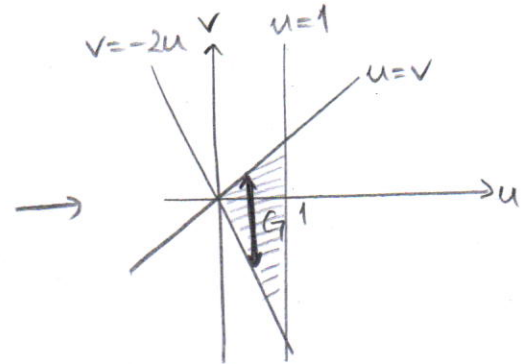
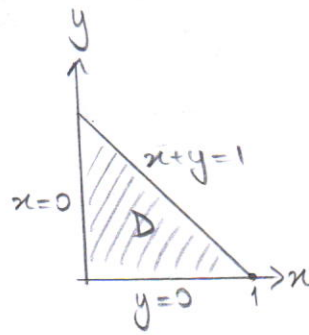
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow I = \iint_G u |J(u,v)| du dv = \int_0^2 \int_0^1 2u du dv = \int_0^2 u^2 \Big|_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

Örnek: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} (y-2x)^2 dy dx$ integralini hesaplayınız.

$u = x+y$
 $v = y-2x$ dönüşümü yapalım.

D	G
$y = 1-x \Rightarrow x+y = 1 \rightarrow u = 1$	
$x = 0 \rightarrow u = v$	
$y = 0 \rightarrow v = -2u$	

$x=1 \rightarrow$ sınır değil, nokta



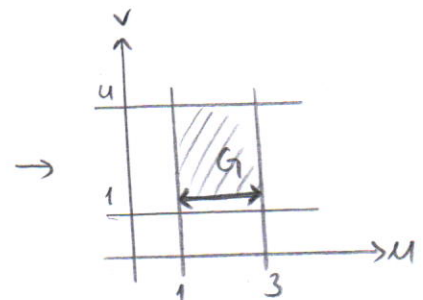
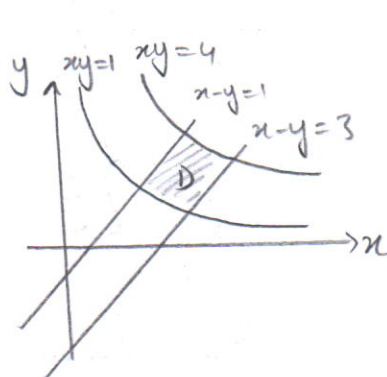
$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \iint_G \sqrt{u} v^2 \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_0^1 \int_{-2u}^u \sqrt{u} v^2 dv du$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u} \frac{v^3}{3} \Big|_{-2u}^u du = \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2} (u^3 + 8u^3) du = \int_0^1 u^{7/2} du = \frac{2}{9}$$

Örnek: $D: \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=3 \\ xy=1 \\ xy=4 \end{cases}$ eğerlerinin sınırladığı 1. bölgede $\iint_D (x^2-y^2) dx dy = ?$

$x-y=u$
 $xy=v$ dönüşümü ile

D	G
$x-y=1 \rightarrow u=1$	
$x-y=3 \rightarrow u=3$	
$xy=1 \rightarrow v=1$	
$xy=4 \rightarrow v=4$	



$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x+y} \Rightarrow \iint_D (x^2-y^2) dx dy = \iint_G (x^2-y^2) \cdot \frac{1}{x+y} du dv$$

$$= \iint_G (x-y) du dv = \int_1^4 \int_1^3 u du dv = 12$$