EKSTREMUM DEĞERLER ve EYER NOKTALARI

$f(x)$ fonksiyonu (eğri) → yatay teğet doğrusuna sahip noktalar → yerel min., yerel max. ve büküm noktaları

$f(x,y)$ fonksiyonu (yüzey) → yatay teğet düzleme sahip noktalar → yerel min, yerel max ve eyer noktaları

Tanımlar: $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasını içeren bir R bölgesinde tanımlı olsun. Eğer (a,b) nin uygun bir komşuluğundaki tüm (x,y) ler için,

1) $f(x,y) \leq f(a,b)$ ise (a,b) noktası f nin bir yerel maksimum noktasıdır. ($f(a,b)$ noktası da f nin bir yerel maks. değeridir)

2) $f(x,y) \geq f(a,b)$ ise (a,b) noktası f nin bir yerel minimum noktasıdır. ($f(a,b)$ noktası da f nin bir yerel min. değeridir)

$f(x,y)$ nin maksimum - minimum değerlerine ekstremum değerler denir.

Yerel Ekstremum Değerler için Birinci Türev Testi:

Eğer $f(x,y)$, bir (a,b) noktasında yerel ekstremuma sahipse ve aynı noktada 1. mertebe kısmi türevleri mevcutsa, $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$ dır.

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktadır.

a) $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$

b) $f_x(a,b)$ veya $f_y(a,b)$ mevcut değildir.

(A) $f(x,y)$ fonksiyonu ekstremum değerlerini sadece kritik noktalarda ve sınır noktalarında alır, fakat her kritik nokta bir yerel eks. meydana getirmez.

(*) Bir (a,b) kritik noktası ve yeterince küçük her h,k sayısı için;

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq 0 \Rightarrow f, (a,b)$ de bir yerel minimuma

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0 \Rightarrow f, (a,b)$ de bir yerel maksimuma sahiptir.

Tanım: $f(x,y)$ bir (a,b) kritik noktasında yerel ekstremuma sahip değilse bu noktaya eyer noktası denir.

Örnek: $f(x,y) = x^2+y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} (0,0): \text{kritik nokta}$$

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^2+k^2 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel minimum

Örnek: $f(x,y) = (x+y)^2 + y^4$ kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

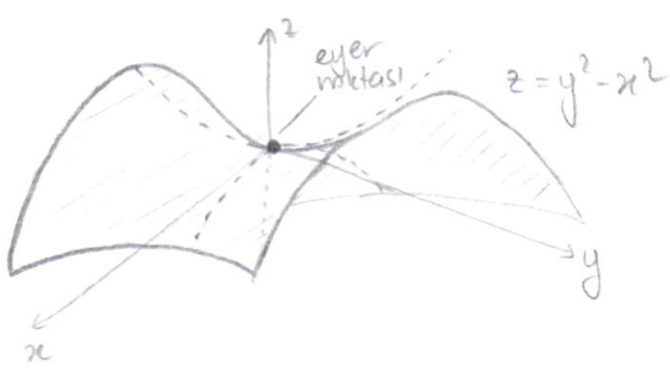
$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x+2y = 0 \\ f_y = 2x+2y+4y^3 = 0 \end{array}\right\} 4y^3 = 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0): \text{kritik nokta}$$

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = (h+k)^2 + k^4 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel minimum

Örnek: $f(x,y) = y^2 - x^2$ kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} (0,0): \text{kritik nokta}$$

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = k^2 - h^2 \geq 0$ veya ≤ 0 olabilir $\Rightarrow (0,0)$ = eyer noktası



$f(x,0) = -x^2 \Rightarrow (0,0)$: yerel max

$f(0,y) = y^2 \Rightarrow (0,0)$: yerel min.

x ve y yönleri, noktanın max veya min olması noktasında gelişirler.

Bu yüzden $(0,0)$ yerel max/min olamaz.

Yerel Ekstremum Değerler için İkinci Türev Testi:

$f(x,y)$'nin kendi tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında kritik noktaya sahip olduğunu kabul edelim. $f(x,y)$ ile onun 1. ve 2. mertebe türevleri sürekli ve $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$A = f_{xx}(a,b) \quad , \quad B = f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) \quad , \quad C = f_{yy}(a,b)$$

olmak üzere,

i) $B^2 - AC < 0$ ve $A > 0$ ise f, (a,b) de bir yerel minimuma sahiptir.

ii) $B^2 - AC < 0$ ve $A < 0$ ise f, (a,b) de bir yerel maksimuma sahiptir.

iii) $B^2 - AC > 0$ ise f, (a,b) de bir eyer noktasına sahiptir.

iv) $B^2 - AC = 0$ ise test sonuç vermez. f, (a,b) de bir max/min değere veya bir eyer noktasına sahip olabilir.

Örnek: $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 = y \\ f_y &= -6x + 6y = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}\right\} y^2 = y \;\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,1) \end{cases}\Big\}\text{ kritik noktalar}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= f_{xx} = 12x \\ B &= f_{xy} = -6 \\ C &= f_{yy} = 6 \end{aligned}\right\}$$

	$A = 12x$	$B = -6$	$C = 6$	$B^2 - AC$	
$(0,0)$	0	-6	6	$36 - 0 = 36 > 0$	$\Rightarrow (0,0)$ eyer noktası
$(1,1)$	12	-6	6	$36 - 12.6 < 0$, $A = 12 > 0$	$\Rightarrow (1,1)$ yerel min.

Örnek: $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy^2 - 3y^2$

$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0 \quad \text{---} (\alpha)$

$f_y = 6xy - 6y = 0 \Rightarrow 6y(x-1) = 0$

$y = 0 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow (0,0), (2,0)$

$x = 1 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} y^2 = 1 \Rightarrow y = \mp 1 \Rightarrow (1,1), (1,-1)$

kritik noktalar

$$\left.\begin{aligned} A &= f_{xx} = 6x - 6 \\ B &= f_{xy} = 6y \\ C &= f_{yy} = 6x - 6 \end{aligned}\right\}$$

	$A = 6x - 6$	$B = 6y$	$C = 6x - 6$	$B^2 - AC$	
$(0,0)$	-6	0	-6	$0 - 36 < 0$, $A = -6 < 0$	yerel max
$(1,1)$	0	6	0	$36 > 0$	eyer noktası
$(1,-1)$	0	-6	0	$36 > 0$	eyer noktası
$(2,0)$	6	0	6	$-36 < 0$, $A = 6 > 0$	yerel min.