Sonsuz Diziler ve Seriler

Diziler

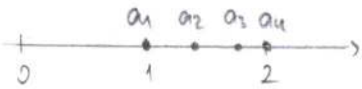
Tanım: Belirli bir kurala göre sıralanmış sayılar topluluğuna dizi denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

a_n : genel terim (n. terim) $\rightarrow$ dizinin kuralını belirler

n : indis $\rightarrow$ a_n teriminin dizideki kaçıncı eleman olduğunu belirtir.

Örneğin: $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\underset{n=1}{\sqrt{1}}, \underset{n=2}{\sqrt{2}}, \underset{n=3}{\sqrt{3}}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$



(*) Her dizi, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Yani, $f(n) = \{a_n\} : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto a_n$

Örnekler:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$

2) $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\underbrace{a_{n+2} = a_n + a_{n+1}}_{\text{tekrarlama kuralı}}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 6 terimini yazın.

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = a_1 + a_2 = 2$
$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = 5$
$a_6 = 8$

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\} \rightarrow$ Fibonacci Dizisi

5) $a_1 = 1$, $n > 1$, $\underbrace{a_n = n \cdot a_{n-1}}_{\text{tekrarlama kuralı}}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 4 terimini yazın.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$

$\{a_n\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\} \rightarrow$ Faktöriyel Dizisi

Yakınsama ve Iraksama:

Bazen bir dizinin indis sayısı (n) arttıkça dizideki sayılar belli bir değere yakınsar.

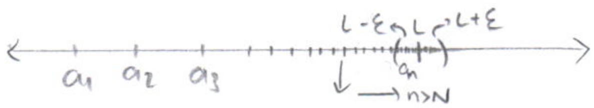
Örneğin, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler 0'a yaklaşırken,

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1-\frac{1}{n}, \dots\}$ dizisinde terimler 1'e yaklaşır,

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$ gibi dizilerde ise tek bir değere yakınsayamaz.

Tanım: Her ε pozitif sayısı için $n > N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir N tamsayısı bulunuyorsa, $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsar. Eğer böyle bir L yoksa $\{a_n\}$ dizisi ıraksar.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyorsa L'ye dizinin limiti denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ile gösterilir.



$a_N \to$ yığılmanın başladığı indis

$\lim_{n\to\infty} a_n$

- → sayı : dizi yakınsaktır $\{\frac{1}{n}\}$
- → $\mp\infty$: dizi ıraksaktır ($\mp\infty$'a ıraksar) $\{\sqrt{n}\}$
- → limit mevcut değil : dizi ıraksaktır. $\{(-1)^{n+1}\}$

Dizilerin Limitlerinin Hesaplanması:

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ birer reel sayı dizisi, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ olsun.

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = A \mp B$

2) $\lim_{n\to\infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (k sabit)

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ ise)

(Fonksiyonlardaki limit kuralları diziler için de geçerlidir)

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4/n^6)-7}{1+\left(\frac{3}{n^6}\right)} = \dfrac{0-7}{1+0} = -7$

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1-\dfrac{1}{n} = 1-0=1$

Diziler için Sandviç Teoremi: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Eğer belli bir N sayısından büyük bütün n'ler için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ ise o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ dır.

Örnek: $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

Örnek: $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

Diziler için Sürekli fonksiyon teoremi: $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonksiyonu her a_n'de tanımlı olup L'de sürekli ise, $f(a_n) \to f(L)$ dır.

Örnek: $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \to 1$ olduğunu gösteriniz.

$\dfrac{n+1}{n} \to 1$ old.nu biliyoruz. $f(x)=\sqrt{x}$ ve $L=1$ alınırsa $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \to \sqrt{1}=1$ dır.

Teorem: Her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde $\{a_n\}$ dizisi ve $f(x)$ fonksiyonu mevcut olsun. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \underset{\substack{\swarrow \quad \searrow \\ \text{sayı} \quad \mp\infty}}{L} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ dır.}$$

(*) Dolayısıyla bazı dizilerin limitlerini hesaplarken L'Hopital kuralını kullanabiliriz.

Örnek: $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

Örnek: $\{\sin n\pi\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi$: limit mevcut değildir, ancak dizi ıraksaktır diyemeyiz.

$\{\sin n\pi\} = \underbrace{\{0,0,0,\dots,0,\dots\}}_{\text{sabit dizi}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

(*) Yukarıdaki teorem limitin mevcut olması durumunda geçerlidir.

Sınırlı Diziler:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$'e üstten sınırlı dizi denir. M sayısı, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır.

⊛ Bir dizinin (varsa) birden fazla üst sınırı vardır.

⊛ M, $\{a_n\}$ için bir üst sınır ve M'den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır değilse M'ye "en küçük üst sınır" (EKÜS) denir.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \geq m$ olacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$'e alttan sınırlı dizi denir. m sayısı, $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır.

⊛ Bir dizinin (varsa) birden fazla alt sınırı vardır.

⊛ m, $\{a_n\}$ için bir alt sınır ve m'den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse m'ye "en büyük üst sınır" (EBAS) denir.

Bir dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise $\{a_n\}$'e sınırlı dizi denir.

$\{a_n\}$ sınırlı değilse sınırsız dizi denir.

Monoton Diziler:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

a) $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ azalmayan} \right)$

b) $a_{n+1} \leq a_n$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ artmayan} \right)$

Eğer $\{a_n\}$ dizisi azalmayan veya artmayan bir dizi ise "monoton" dizidir.

Örnek: 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ azalmayan bir dizidir, çünkü $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\left(\lim\limits_{n \to \infty} n = \infty \text{ olduğundan aynı zamanda ıraksaktır} \right)$

2) $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \right\}$ artmayan bir dizidir: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ olduğundan yakınsaktır} \right)$

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ dizisi monoton değildir.

$\left(\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n \text{ limiti mevcut olmadığından ıraksaktır} \right)$

Monoton Dizi Teoremi: Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise yakınsaktır.

Not: Her yakınsak dizi sınırlıdır, fakat her sınırlı dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin; $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ dizisi sınırlıdır ancak limiti mevcut olmadığından yakınsak değildir.

Örnek: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin

a) yakınsaklığını
b) monotonluğunu
c) sınırlılığını
d) EBAS, EKÜS

inceleyin.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow$ dizi azalmayan dizidir. (monoton dizi)

c) yakınsak olduğu için sınırlıdır.

(*) Alttan sınırlı ve artmayan dizi EBAS'a, üstten sınırlı ve azalmayan dizi EKÜS'e yakınsar.

d) Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır. $\Rightarrow$ EKÜS $= 1$.
Dizi alttan $1/2$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır $\Rightarrow$ EBAS $= a_1 = \frac{1}{2}$

Sıkça Rastlanan Limitler:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$
$x>1 \Rightarrow L=\infty$
$x<-1 \Rightarrow L$ mevcut değil

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x$ için$)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty \quad (x>1)$

Örnek: 1) $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

2) $\{\sqrt[n]{3n}\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\underbrace{3^{1/n}}_{=1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{=1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

SERİLER

Tanım: Bir kurala bağlı sayılar dizisinin terimlerinin toplanmasıyla elde edilen ifadeye seri denir.

Yani, $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ile gösterilir

Örnek: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

3) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

5) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$

6) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)^2+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Not: Bir serinin ilk indisinin 1'den başlama zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda indis, uygun bir dönüşümle istenilen sayıdan başlatılabilir.

Örneğin; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $n = m-2$ dönüşümü ile $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazılabilir.

Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi, S_n'ye de serinin n. kısmî toplamı denir.

Eğer $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa ($\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ise) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve L toplamına sahiptir.

Bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = L$ ile ifade edilir.

Eğer $\{S_n\}$ ıraksak ise seri de ıraksaktır.

ÖZET: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamını bulmak için:

1) $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bulunur, yakınsaklığı incelenir.

2) $\lim_{n\to\infty} S_n$
   - → sayı $= L$ ise seri yakınsaktır ve toplamı L'dir.
   - → $= \mp\infty$ ise seri $\mp\infty$'a ıraksar
   - → limit mevcut değilse seri ıraksar

Geometrik Seri

n. terimi $a_n = ar^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki seriye geometrik seri denir. Burada a ve r, $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır. Geometrik serinin ilk terimi a sayısıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$ dir.

Geometrik serinin yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisinin n. kısmî toplamı S_n'i hesaplayalım.

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{\dots} + \cancel{ar^{n-1}}$$
$$-\ rS_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\dots} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

1. durum: $r=1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a+a+a+\dots+a+\dots$ serisi elde edilir.

Bu durumda, $S_n = a+a+\dots+a = n.a$ ve $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a \begin{cases} +\infty & (a>0) \\ -\infty & (a<0) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır. (Yani $r=1$ iken seri toplanamaz)

2. durum: $r\neq 1$ ise $(1-r)S_n = a(1-r^n) \Rightarrow S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

a) $|r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-\overbrace{r^n}^{=0})}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ elde edilir.

Dolayısıyla seri yakınsaktır ve toplamı $\dfrac{a}{1-r}$ dir.

b) $r>1$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-\overbrace{r^n}^{=\infty})}{1-r} \begin{cases} = +\infty & (a>0 \text{ ise}) \\ = -\infty & (a<0 \text{ ise}) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır.

c) $r\leq -1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n$ mevcut olmadığından $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ limiti de mevcut değildir. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

ÖZET:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ →

- $|r|<1$ ise yakınsar
- $|r|\geq 1$ ise ıraksar →
  - $r\geq 1$, $a>0$ ise $+\infty$'a ıraksar
  - $r\geq 1$, $a<0$ ise $-\infty$'a ıraksar
  - $r\leq -1$ ise seri ıraksaktır.

Örnek: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ toplamını bulun.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad a=1$, $r=\frac{1}{2} \Rightarrow |r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ seri yakınsak

Toplam $= \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$ seri 2'ye yakınsar yani $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 2$

Örnek: $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots$ toplamını bulun.

$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi\left(1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \Rightarrow a=\pi$, $r=-\frac{e}{\pi}$

$|r| = \left|-\frac{e}{\pi}\right| = \dfrac{\overset{\approx 2,7}{e}}{\underset{\approx 3,14}{\pi}} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \dfrac{\pi^2}{e+\pi}$ 'ye yakınsar.

Örnek: $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=?$

$$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r=\sqrt{2}>1 \\ a=1>0 \end{matrix}\right\} \text{ seri } +\infty\text{'a ıraksar}$$

Örnek: $x=0,323232\dots=0,\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.

$$x=0,3232\dots=\frac{32}{100}+\frac{32}{(100)^2}+\frac{32}{(100)^3}+\dots=\frac{32}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{(100)^2}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{32}{100}}_{a}\underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)}_{r<1}^{n-1}$$

$$x=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{32}{99}$$

Teleskopik Seri

Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak elde edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=?$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$ toplamı hesaplanamaz.

Seri teleskopik seridir ve basit kesirlere ayrılır.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \Rightarrow A=1, \quad B=-1$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\dots}+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$ $\qquad S_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{4}{n^2+4n+3}$!

$$\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow A = 2 \,,\, B = -2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} \right)$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{2}{4}} + \frac{2}{3} - \cancel{\frac{2}{5}} + \cancel{\frac{2}{4}} - \cancel{\frac{2}{6}} + \dots + \cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+2} + \cancel{\frac{2}{n+1}} - \frac{2}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{5}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3}$$

Örnek: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$ $\qquad S_n = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$!

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n} \, \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{\cancel{n}} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Serilerle İlgili Bazı Teoremler

1) $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ ise $\sum a_n + b_n = A \mp B$, $\sum k a_n = k \sum a_n$ (k bir sayı)

2) $\sum a_n$ ıraksak ise $k \sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

3) $\sum a_n$ ıraksak , $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n \mp b_n$ serisi de ıraksaktır.

4) $\sum a_n$ ıraksak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n \mp b_n$ serisi ıraksak veya yakınsak olabilir.

5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya çıkarmak serinin karakterini değiştirmez.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ve $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$ olsun. Böylece $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dır.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{\substack{\| \\ S}}{S_n} - \underset{\substack{\| \\ S}}{S_{n-1}}) = 0$$

(n çok büyük olduğu zaman)

(Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise seri ıraksak olabilir)

n. terim testi: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut olmadığından n. terim testine göre ıraksaktır.

Örnek: Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{2}<1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{3}<1}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underset{\substack{\| \\ r<1}}{\tfrac{1}{2}}\Big)^n = 4 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 8$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ a}}{\tfrac{1}{3}} \Big(\underset{\substack{\| \\ r<1}}{\tfrac{1}{3}}\Big)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ a}}{\tfrac{4}{3}} \Big(\underset{\substack{\| \\ r<1}}{\tfrac{2}{3}}\Big)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

7) **Yeniden İndisleme:** Terimlerin sırasını değiştirmedikçe bir seriyi yeniden indisleyebiliriz. Bu işlem yakınsaklığı etkilemez.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Örneğin; $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$