Fonksiyonlar

Tanım: Bir D kümesinden bir Y kümesine tanımlı bir fonksiyon, herbir $x \in D$ elemanına karşılık olarak (tek bir) $f(x) \in Y$ elemanı eşleyen bir kuraldır.

Sembolik olarak $f: D \to Y$ veya $D \xrightarrow{f} Y$ şeklinde gösterilir

$y = f(x)$, x: bağımsız değişken , y: bağımlı değişken.

(*) D: Olası tüm girdi değerlerinin kümesi (D: tanım kümesi) ($D(f)$)

(*) x değerine karşı $f(x)$ in alacağı bütün değerler kümesi ise fonksiyonun görüntü kümesidir

(*) Bir fonksiyonun görüntü kümesi reel sayılardan oluşuyorsa fonksiyona reel-değerli denir

D
Tanım kümesi

G
Görüntü kümesi

$x \longrightarrow f \longrightarrow f(x)$

Girdi (Tanım kümesi) Çıktı (Görüntü kümesi)

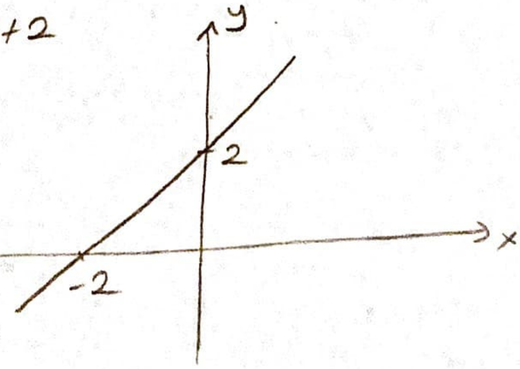
Bazı Fonksiyonların Tanım Kümeleri ve Görüntü Kümeleri

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
* $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
* $y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
* $y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
* $y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
* $y = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leq x \leq 1$	$[0, 1]$

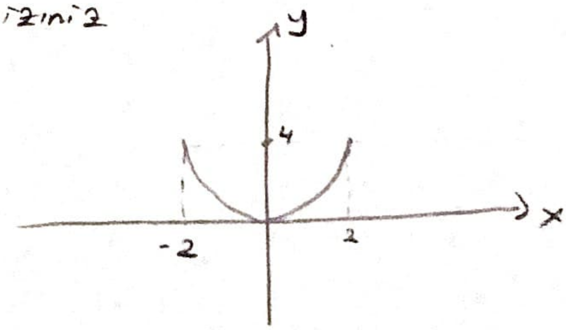
Fonksiyonların Grafikleri

Bir f fonksiyonunun grafiği $y=f(x)$ denklemini sağlayan noktaların kartezyen düzlemdeki yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafiktir.

* $y = x+2$



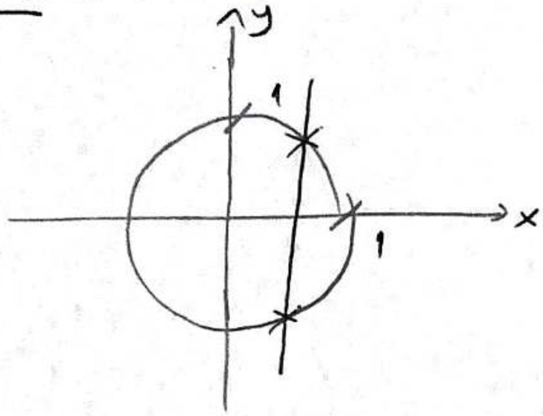
* $y = x^2$ grafiğini $[-2, 2]$ aralığında çiziniz



Bir Fonksiyon İçin Dikey Doğru Testi

* Koordinat düzlemindeki her eğri bir fonksiyon grafiği olamaz
* Bir f fonksiyonu için her x için sadece bir $f(x)$ değerine sahip olmalıdır.

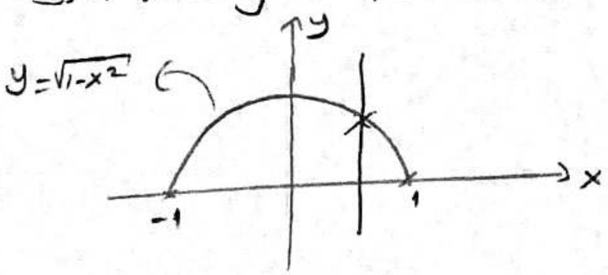
Ör: Birim Çember $(x^2+y^2=1)$



Çember bir fonksiyon grafiği değildir. Dikey doğru testini sağlamaz.

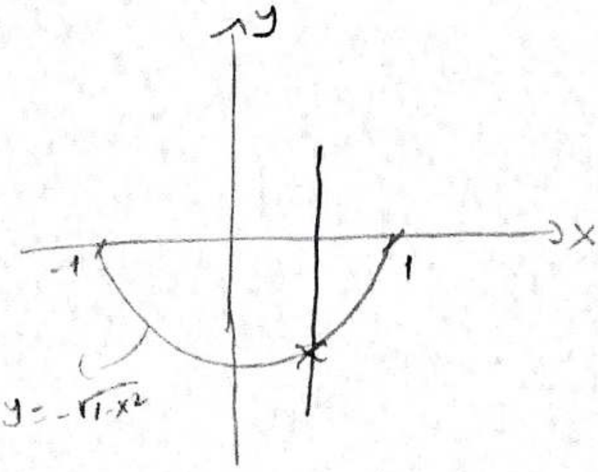
Dikey doğru birden fazla noktada eğriyi keserse fonksiyon olmaz.

Ör: üst yarı çember.



$y=\sqrt{1-x^2}$ üst yarı çember bir fonksiyondur.

Ör: Alt yarı çember



alt yarı çember $y=-\sqrt{1-x^2}$

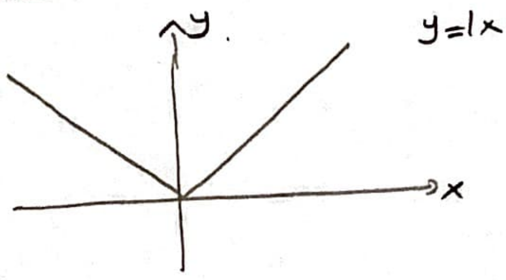
$f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun grafiğidir

Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

Bir fonksiyon bazen tanım kümesinin farklı parçalarında değişik formüllerle tanımlanır. Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

Ör: Mutlak değer fonksiyonu

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



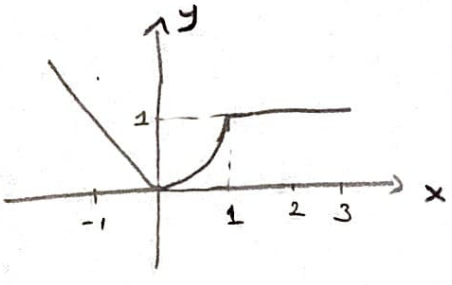
Artan - Azalan Fonksiyonlar

f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun ve x_1 ve x_2 noktaları I aralığında herhangi iki nokta olsun.

1. Eğer $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, I aralığında artandır.
2. Eğer $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ ise f, I aralığında azalandır.

Ör:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & x < 0 \end{cases} ,$$



$[1, \infty)$ aralığında ne artan ne azalandır.

$[0, 1]$ 〃 artandır.

$(-\infty, 0]$ 〃 azalandır.

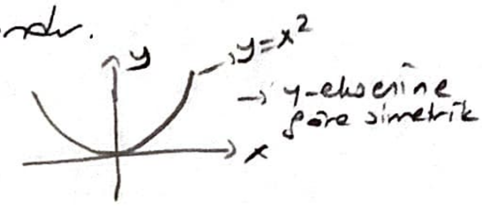
Tek - Çift Fonksiyonlar

Tanım: Bir $y=f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

Eğer $f(-x)=f(x)$ ise f çift fonksiyondur.

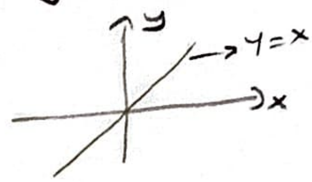
Eğer $f(-x)=-f(x)$ ise f tek fonksiyondur.

Ör: $f(x)=x^2$ fonksiyonu çift fonksiyondur.



$$\left.\begin{aligned} f(-x)&=(-x)^2=x^2 \\ f(x)&=x^2 \end{aligned}\right\} f(-x)=f(x)$$

Ör: $f(x)=x$ fonksiyonu tek fonksiyondur.



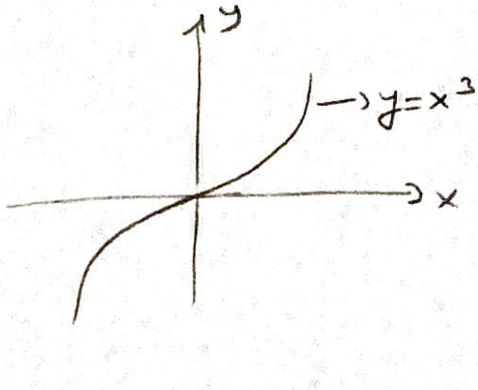
orjine göre simetrik

$$\left.\begin{aligned} f(-x)&=-x \\ f(x)&=x \end{aligned}\right\} f(-x)=-f(x)$$

**: Bir çift fonksiyonun grafiği y-eksenine göre simetriktir.

**: Bir tek fonksiyonun grafiği x-eksenine göre simetriktir.

Ör: $y=x^3$ fonksiyonu tek fonksiyondur ve orjine göre simetriktir.



Lineer Fonksiyonlar

m ve b sabit olmak üzere $f(x)=mx+b$ şeklindeki fonksiyonlardır.

* Eğer $m=1$, $b=0$ ise $f(x)=x \rightarrow$ birim fonksiyon
* Eğer $m=0$ ise $f(x)=b \rightarrow$ sabit fonksiyon.

Polinomlar

n, negatif olmayan bir tamsayı $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları reel sabitler (polinom katsayıları olarak adlandırılır) olmak üzere

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki $P(x)$ fonksiyonuna polinom fonksiyonu denir.

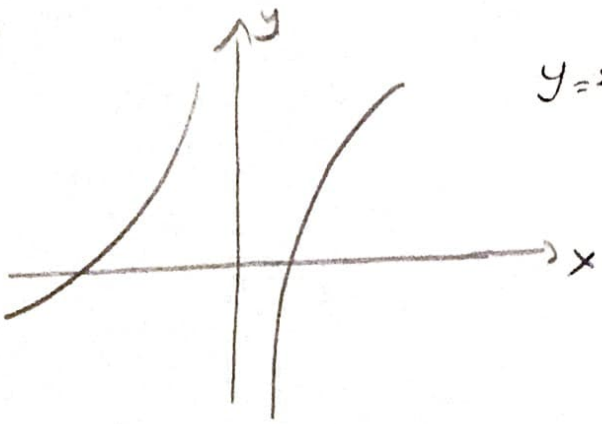
$a_n \neq 0$ ve $n \geq 0$ ise n değerine polinomun derecesi denir.

* lineer fonksiyonlar 1. derecedendir.
* 2. dereceden polinomlar genelde ax^2+bx+c şeklinde yazılır ve kuadratik fonksiyonlar olarak adlandırılır.
* Benzer şekilde kübik fonksiyonlar 3. dereceden $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinomlarıdır.

Rasyonel Fonksiyonlar

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ oranına veya bölümüne rasyonel (kesirli) fonksiyon denir.

Ör:



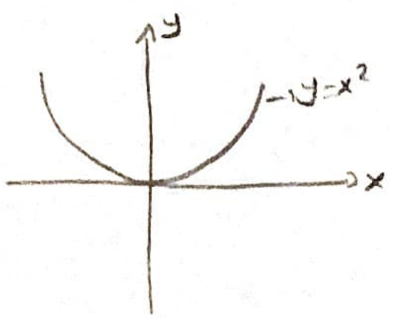
$y = \dfrac{2x^2-3}{7x+5}$

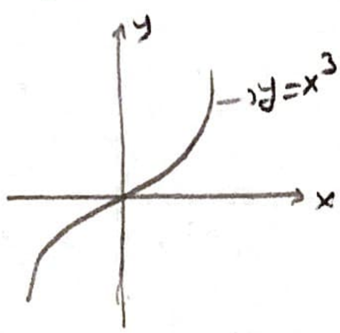
Kuvvet Fonksiyonları

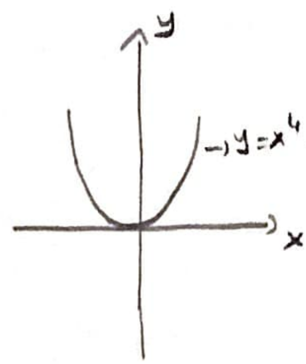
$f(x) = x^a$ fonksiyonu bir kuvvet fonksiyonudur.

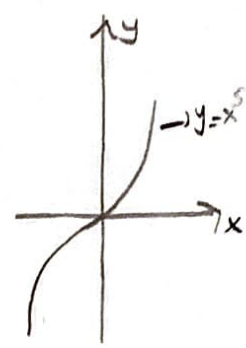
i.) a pozitif tamsayı

Ör: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, ...

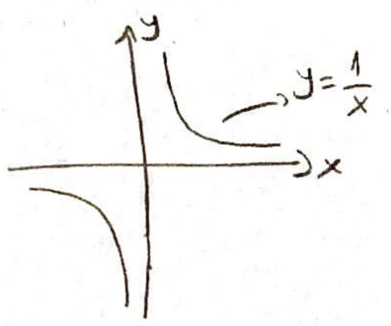


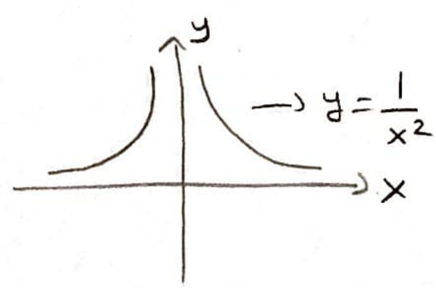




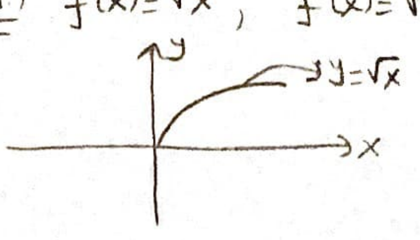


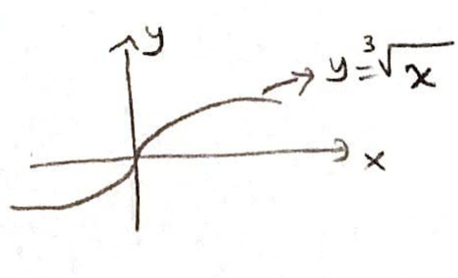
ii.) $a=-1$ veya $a=-2$ ise.





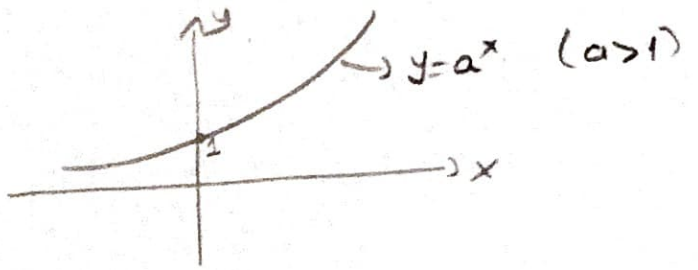
iii.) $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$





Üstel Fonksiyonlar

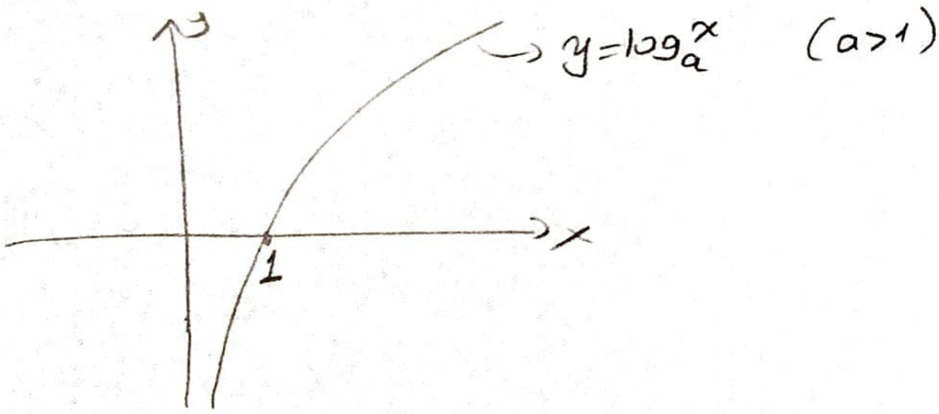
$a>0$ ve $a\neq 1$ olmak üzere, $y=f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir.



Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Görüntü Kümesi: $(0, \infty)$

Logaritmik Fonksiyonlar

$a>0$ ve $a\neq 1$ olmak üzere $y=f(x)=\log_a x$ fonksiyonuna logaritmik fonksiyon denir. Logaritmik fonksiyonlar $x>0$ için tanımlıdır.



Bileşke Fonksiyonlar

f ve g fonksiyonları için bileşke fonksiyon:
$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanır. $f\circ g$ nin tanım kümesi $g(x)$ in f in tanım kümesi içinde olması şartıyla g nin tanım kümesindeki x sayılarını içerir.

Fonksiyonlarda İşlemler

f ve g fonksiyonları için tanım kümeleri $D(f)$ ve $D(g)$ olsun.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(fg)(x)=f(x).g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, [$D(f)\cap D(g)$ nin $g(x)\neq 0$ olan herhangi bir nokta]

* Fonksiyonlar sabitlerle çarpılabilir

$\forall c\in\mathbb{R}$ için $(cf)(x)=cf(x)$

Ör: $f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=\sqrt{1-x}$

$D(f)=[0,\infty)$, $D(g)=(-\infty,1]$

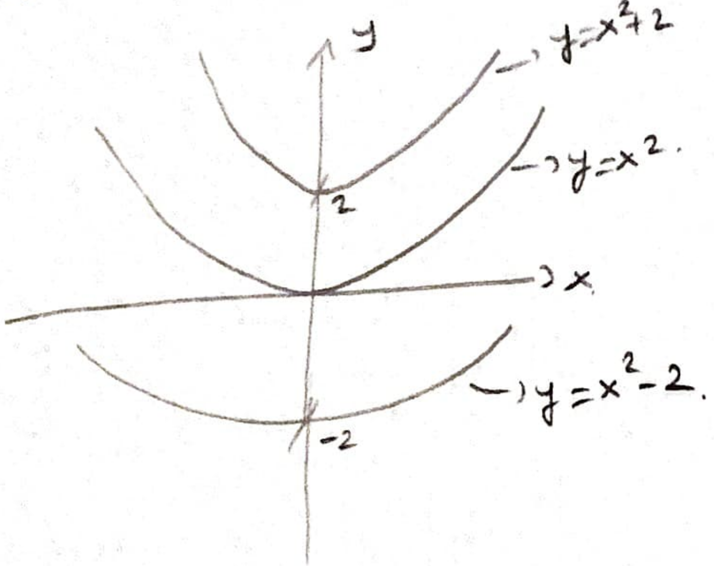
Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f.g$	$(fg)(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$	$[0,1)$
$\frac{g}{f}$	$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$	$(0,1]$

Fonksiyonun Grafiğinin Kaydırılması

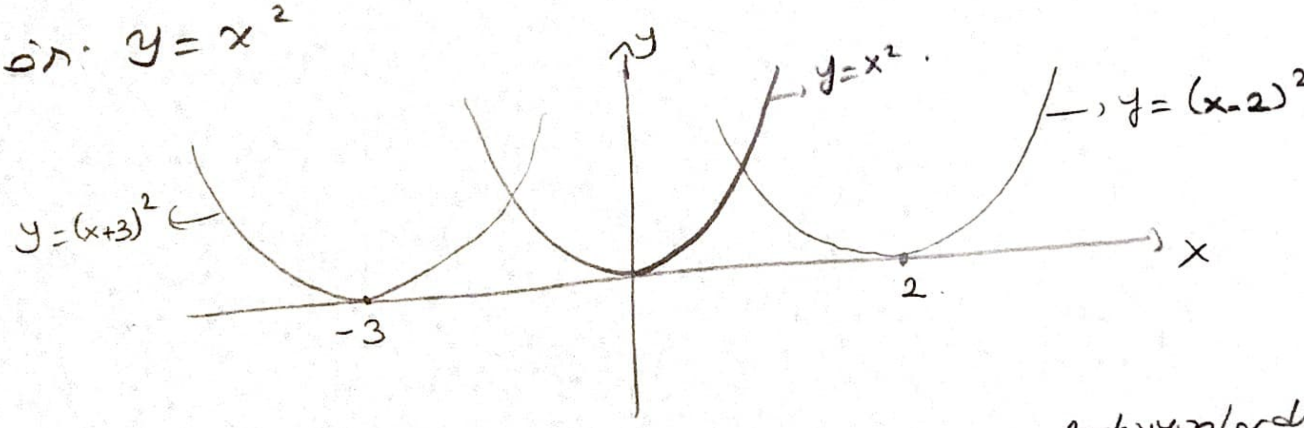
i.) Dikey Kaydırma: $y=f(x)+k$ → $k>0$ ise; f'in grafiği k birim yukarıya kaydırıyoruz
→ $k<0$ ise; f'in grafiğini k birim aşağıya kaydırıyoruz.

ii) Yatay Kaydırma: $y=f(x+h)$ → $h>0$ ise; f'in grafiğini h birim sola kaydırıyoruz
→ $h<0$ ise; f'in grafiğini h birim sağa kaydırıyoruz.

Ör: $y=x^2$



Ör: $y=x^2$

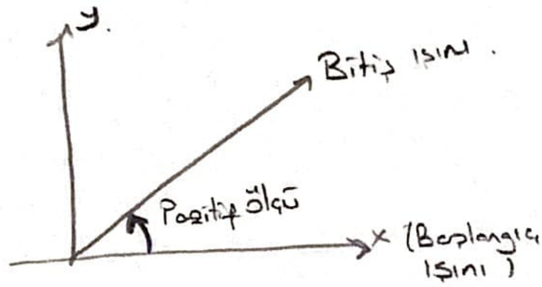


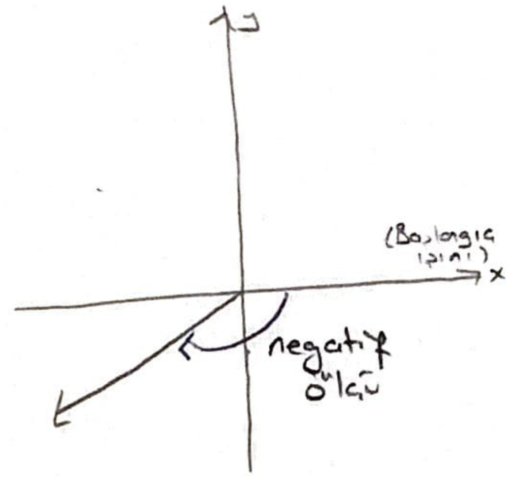
Transandant Fonksiyonlar: Bunlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik, ters trigonometrik, üstel, logaritmik fonklar

Cebirsel Fonksiyonlar: Polinomlardan cebirsel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme, kök alma) kullanılarak oluşturulan fonksiyonlardır

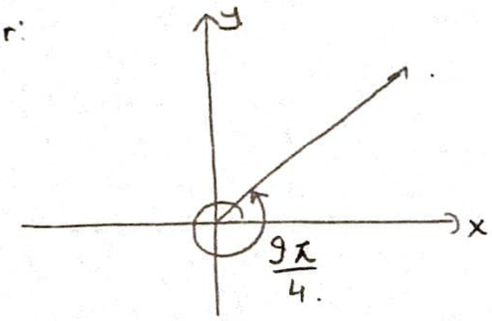
Trigonometrik Fonksiyonlar

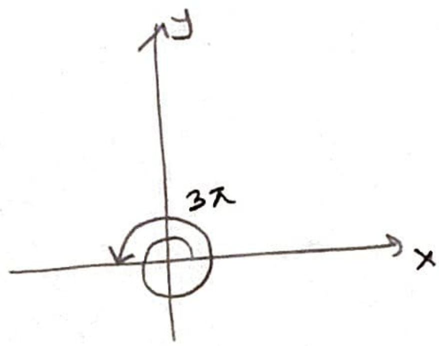
Hatırlatma:

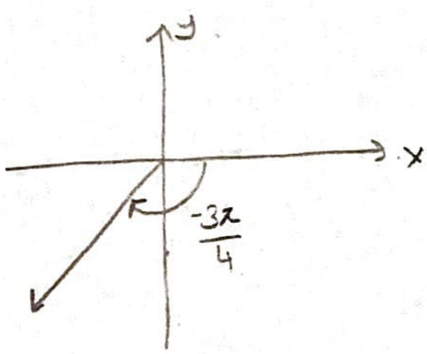


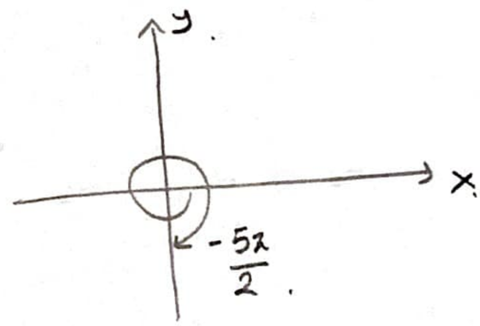


Ör:



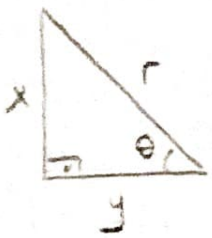






Temel Trigonometrik Fonksiyonlar

$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar denir.



$\sin\theta = \frac{x}{r}$, $\cos\theta = \frac{y}{r}$

$\tan\theta = \frac{x}{y}$, $\cot\theta = \frac{y}{x}$

$\sec\theta = \frac{r}{y}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{x}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Periyodik Fonksiyonlar

Her x değeri için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonu periyodiktir. Böyle bir en küçük p değerine f'in periyodu denir.

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodları

$\tan(x+\pi) = \tan x$

$\cot(x+\pi) = \cot x$

$\tan x$ ve $\cot x$'in periyodu "π"

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

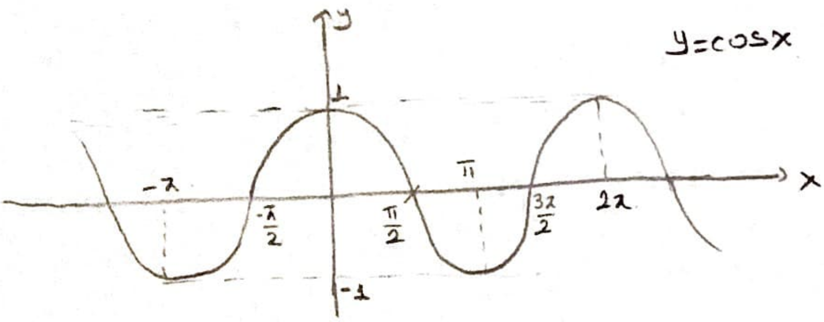
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sec(x+2\pi) = \sec x$

$\operatorname{cosec}(x+2\pi) = \operatorname{cosec} x$.

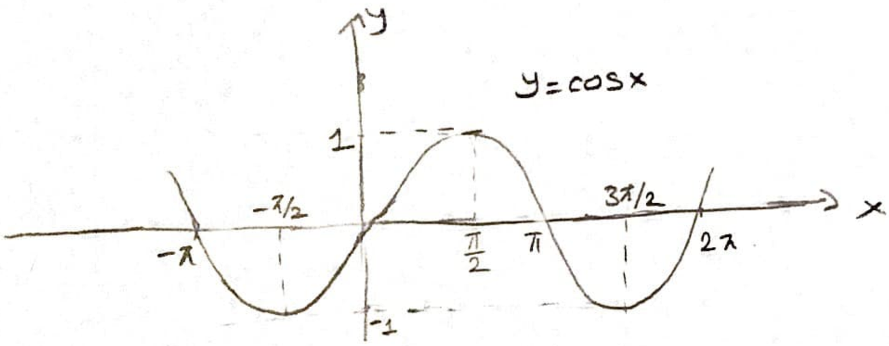
$\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$'in periyodu "$2\pi$" dir.

* $y = \cos x$ fonksiyonu



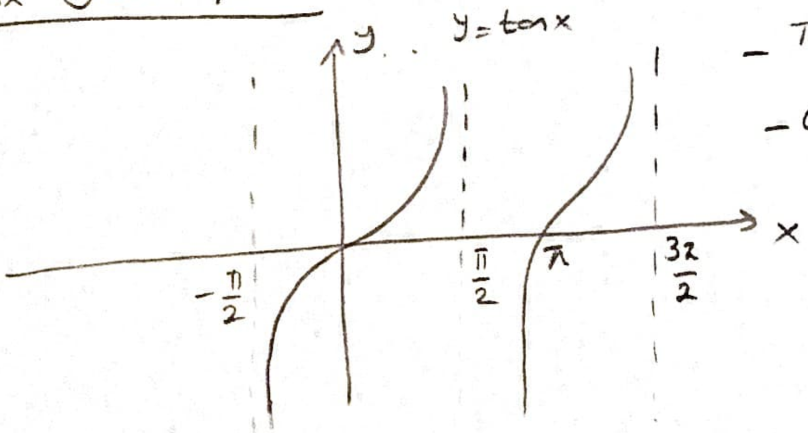
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
- Periyodu: 2π
- Çift fonksiyondur

* $y = \sin x$ fonksiyonu



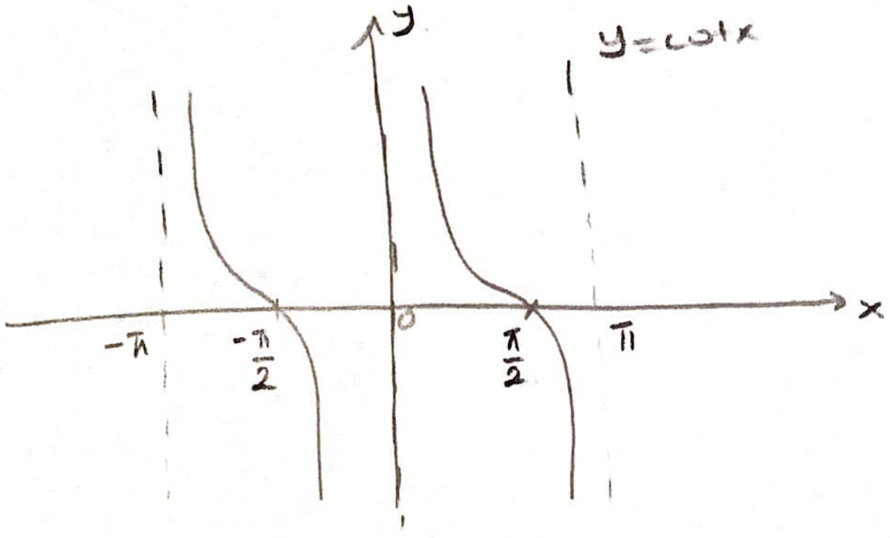
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \leq y \leq 1$
- Periyodu: 2π
- Tek fonksiyondur.

* $y = \tan x$ fonksiyonu



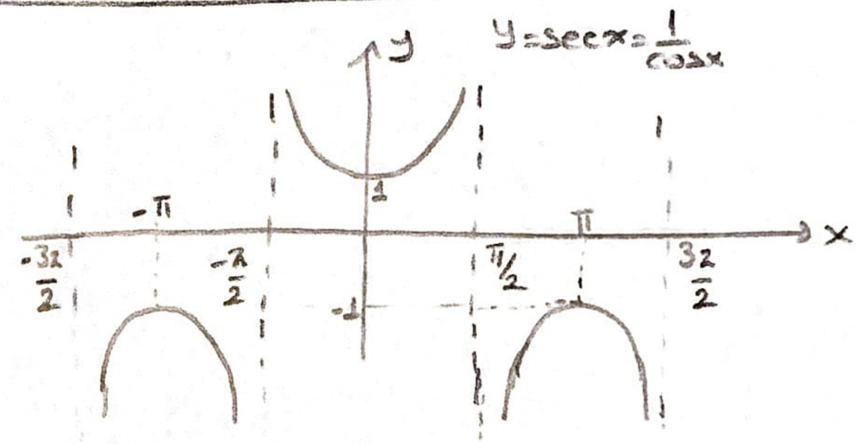
- Tanım Kümesi: $x \neq \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots$
- Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$
- periyodu: π
- Tek fonksiyondur

$y = \cot x$ fonksiyonu



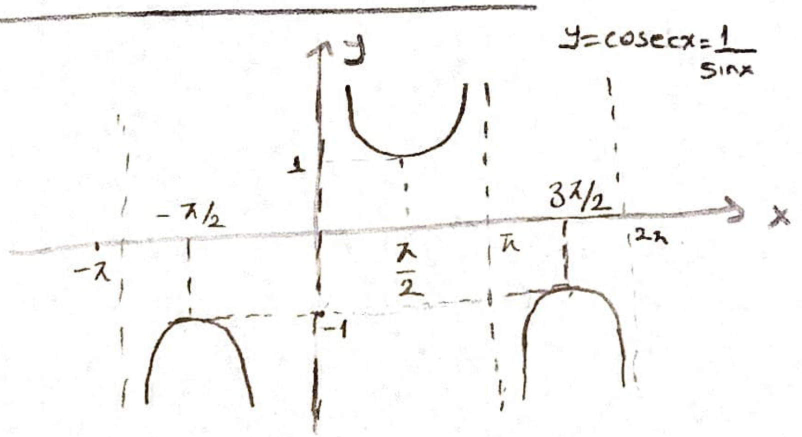
- Tanım Kümesi: $x \neq 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \ldots$
- Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$
- periyodu: π
- Tek fonksiyondur

$y = \sec x$ fonksiyonu



- Tanım Kümesi: $x \neq \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots$
- Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$
- periyodu: 2π
- Çift fonksiyondur.

$y = \mathrm{cosec}\, x$ fonksiyonu



- Tanım Kümesi: $x \neq 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \ldots$
- Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$
- periyodu: 2π
- Tek fonksiyondur.

Bazı Trigonometrik Özdeşlikler

* $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

* $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

* $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

* $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.

* $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

* $\sin(A+B)=\sin A.\cos B+\cos A\sin B$

* $-|\theta|\leq\sin\theta\leq|\theta|$ ve $-|\theta|\leq 1-\cos\theta\leq|\theta|$