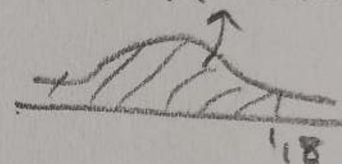
Merkezi Limit Teoremi Örnek

ÖR: Ödevlerinizdeki bir problemi çözmeniz ort. 12 dk. sürüyor, st. sapma ise 10dk. Şu anki ödeviniz 36 sorudan oluşuyor. Ödevin 9 saatten uzun sürme iht. nedir?

9 saat = 540 dk   540/36 = 15 dk her soru için

$\bar{Y}$ = ort. süre $P(\bar{Y}>15)=?$

$$z=\frac{\bar{Y}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad z=\frac{\bar{Y}-12}{\frac{10}{6}}$$



$$P\left(\frac{\bar{Y}-12}{\frac{10}{6}}>\frac{15-12}{\frac{10}{6}}\right)=P(z>1,8)=0.036\approx\%3,6$$

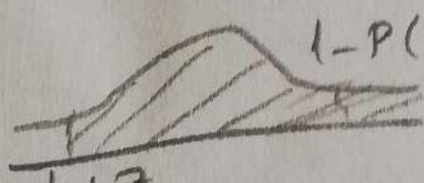
ÖR: Bir pastanede günde ort. 30 pasta satılıyor. st. sapma 8. Önümüzdeki 36 günde 1000 pastadan fazla satma iht.?

$$\frac{1000}{36}=\frac{250}{9} \qquad P\left(\bar{Y}>\frac{250}{9}\right)=?$$

$$z=\frac{\bar{Y}-30}{\frac{8}{6}} \qquad P\left(\frac{\bar{Y}-30}{\frac{8}{6}}>\frac{\frac{250}{9}-30}{\frac{8}{6}}\right)=P\left(z>-\frac{5}{3}\right)$$

$-1,67$

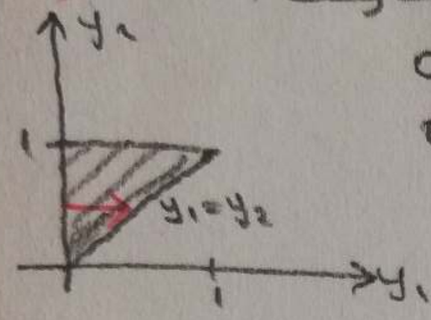
$1-P(z<-1,67)\approx 0.9525\approx\%95$



İki değişkenli örnekler

ÖR: $f(y_1, y_2) = k y_2$, köşeleri $(0,0), (0,1)$ ve $(1,1)$ noktaları olan bir üçgensel alan üzerine tanımlanmış bir ol. yoğ. fonk. olsun.

a) k'nın değeri?



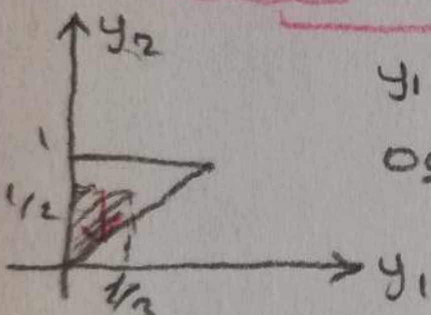
$$\left.\begin{matrix} 0 \le y_1 \le y_2 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{matrix}\right\} \quad k \int_0^1 \underbrace{\int_0^{y_2} y_2 \, dy_1}_{y_2 y_1 \big|_0^{y_2} = y_2^2} dy_2 = 1$$

$$\int_0^1 y_2^2 \, dy_2 = \frac{y_2^3}{3}\Big|_0^1 \quad 1/3$$

$$\frac{k}{3} = 1$$

$$\underline{k = 3}$$

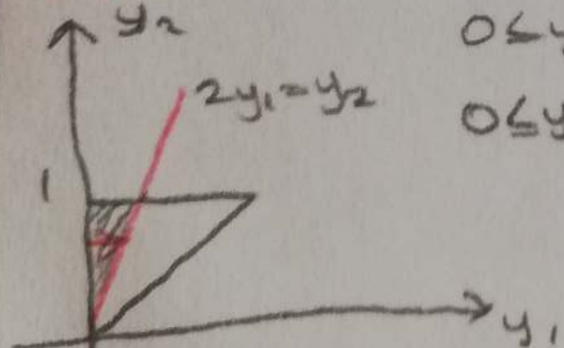
b) $F(1/3, 1/2) = ?\; P(y_1 \le 1/3, y_2 \le 1/2)$



$$\left.\begin{matrix} y_1 \le y_2 \le 1/2 \\ 0 \le y_1 \le 1/3 \end{matrix}\right\} \quad 3 \int_0^{1/3} \underbrace{\int_{y_1}^{1/2} y_2 \, dy_2}_{\frac{y_2^2}{2}\big|_{y_1}^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{y_1^2}{2}} dy_1$$

$$1/8\, y_1 - \frac{y_1^3}{6}\Big|_0^{1/3} = \frac{23}{216} \approx \%10.6$$

c) $P(2y_1 < y_2) = ?$



$$\left.\begin{matrix} 0 \le y_1 \le y_2/2 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{matrix}\right\} \quad 3 \int_0^1 \underbrace{\int_0^{y_2/2} y_2 \, dy_1}_{y_2 y_1 \big|_0^{y_2/2} = \frac{y_2^2}{2}} dy_2$$

$$3 \cdot \frac{y_2^3}{6}\Big|_0^1 = \underline{1/2}$$

Marjinal Olasılık Fonk. Kesikli

ÖR: Biri mavi diğeri kırmızı iki zar atılsın
y_1 = kırmızı zarda gelen rakam
y_2 = iki zarın toplamı

a) $P_1(y_1) = ?$ $\quad P_2(y_2) = ?$

$1 \leq y_1 \leq 6 \qquad 2 \leq y_2 \leq 12$

$$P_1(y_1) = \sum_{y_2} P(y_1, y_2)$$

$$P_1(1) = \sum_{2}^{12} P(1, y_2) = \underbrace{P(1,2)}_{1/36} + \underbrace{P(1,3)}_{1/36} + \overset{P(1,8)=0}{\cdots} + \underbrace{P(1,12)}_{0} = 1/6$$

$$P_2(y_2) = \sum_{y_1} P(y_1, y_2)$$

$$P_2(2) = \sum_{1}^{6} P(y_1, 2) = \underbrace{P(1,2)}_{1/36} + \underbrace{P(2,2)}_{0} + \cdots + \underbrace{P(6,2)}_{0} = 1/36$$

Merkezi Limit Teoremi Örnek

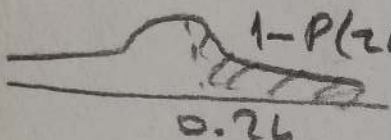
ÖR: Bir kitledeki erkeklerin ort. ağırlığı 77.4 kg, st. sapması 4.5 kg olsun.

a) Kitle normal dağ. sahipse rasg. seçilen bir kişinin 78.5 kg'den ağır olma iht.?

b) Rast. seçilen 40 kişinin ağırlıkları ort. 78.5 kg'den fazla olma iht.?

$P(y>78.5)=?$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{78.5-77.4}{4.5}=0.24$$



$P(z>0.24)=? \longrightarrow 0.4052 \approx \%40$

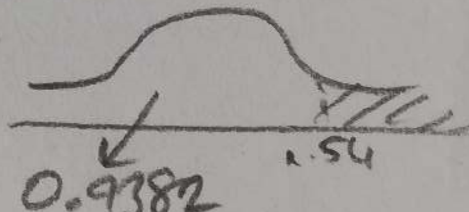
b) $n=40$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{78.5-77.4}{\frac{4.5}{2\sqrt{10}}}$$

$P(\bar{x}>78.5)=?$

$P(z>1.54)=?$

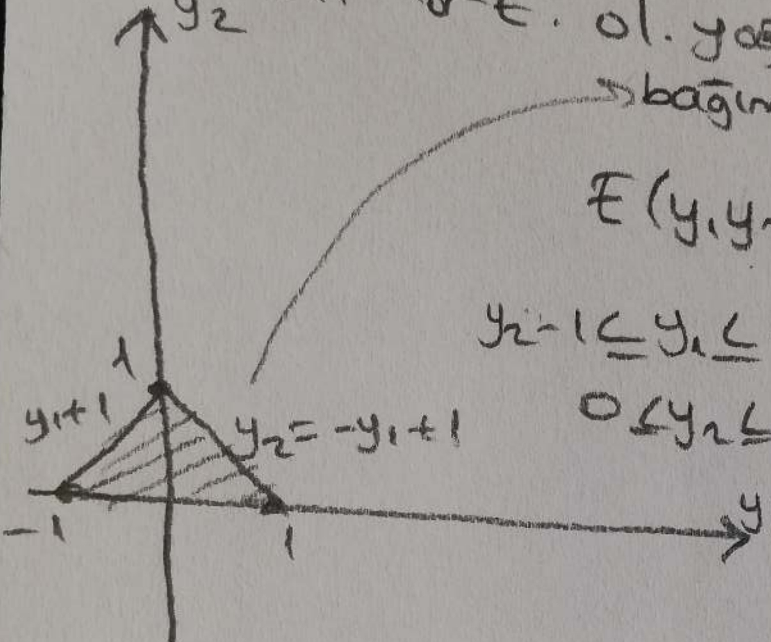
$z=1.54$



$=0.0618 \approx \%6.$

Kovaryans Korelasyon örnek

ÖR: → $f(y_1,y_2)=1$, köşeleri $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ olan üçgensel alan üzerine tanımlı bir ort. ol. yoğ. fonk. dur. $Cov(Y_1,Y_2)$?



bağımlı Y_1 ve Y_2

$$E(y_1y_2)-E(y_1)E(y_2)$$

$$y_2-1\le y_1\le 1-y_2$$

$$0\le y_2\le 1$$

$$E(y_1)=\int_0^1\underbrace{\int_{y_2-1}^{1-y_2} y_1\,dy_1}_{0}\,dy_2$$

$$E(y_1)=0$$

$$E(y_1y_2)=\underbrace{\int_0^1\underbrace{\int_{y_2-1}^{1-y_2} y_1y_2\,dy_1}_{0}\,dy_2}_{0}=0$$

Merkezi Limit Teoremi Örnekler

ÖR: Bir teknisyen bir soda makinesinin doğru miktarda soda verip vermediğini kontrol etmek için 100 örnek alıyor. St sapmanın 2,5 ml olduğu düşünülürse aldığı örnek ortalamasının gerçek ortalamanın $\pm 0{,}5$ ml aralığında olma olasılığı?

b) Örnek ort. gerçek ortalamanın $\pm 0{,}4$ ml aralığında olmasını %95 ihtimal ile garantilemek isteseydi kaç örnek alması gerekirdi?

a)

$$P(\mu - 0{,}5 < \bar{Y} < \mu + 0{,}5) = ? \qquad z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{2{,}5}{10}} = 4(\bar{Y} - \mu)$$

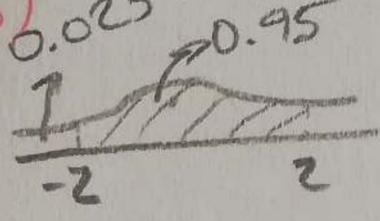
$$P\big((\mu - 0{,}5 - \mu)4 < 4(\bar{Y} - \mu) < (\mu + 0.5 - \mu)4\big)$$

$$= P(-2 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < -2)$$

$$= 1 - P(z < -2) = 1 - 0{,}0228$$

$$\underline{\approx \%95}$$

b) $0.025 \longrightarrow z = 1.96$



$$P(-1.96 < z < 1.96) = 0.95$$

$$\frac{(\bar{Y} - \mu)\sqrt{n}}{2{,}5}$$

$$P(\mu - 0{,}4 < \bar{Y} < \mu + 0{,}4) = 0.95$$

$$P\left(\frac{(\cancel{\mu} - 0{,}4 - \cancel{\mu})\sqrt{n}}{2{,}5} < z < \frac{(\cancel{\mu} + 0{,}4 - \cancel{\mu})\sqrt{n}}{2{,}5}\right) \Rightarrow \frac{0{,}4\sqrt{n}}{2{,}5} = 1{,}96$$

$$\underline{n \cong 151}$$

İki değişkenli koşullu olasılık kesikli

ÖR: Aşağıdaki koşullu olasılık dağılımlarını gösteriniz.

$y_1|(y_2=1)$ $\quad y_2|(y_1=2)$

		y_2		
		1	2	3
y_1	1	0.2	0.1	0.3
	2	0.1	0.1	0.2

$$P(y_1|y_2=1) = \begin{cases} y_1=1 & \frac{0,2}{0,3}=\frac{2}{3} \\ y_1=2 & \frac{0,1}{0,3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{P(y_1,y_2)}{P_2(y_2)}$$

$$P(y_2|y_1=2) = \begin{cases} y_2=1 & \frac{0.1}{0.4}=1/4 \\ y_2=2 & \frac{0.1}{0.4}=1/4 \\ y_2=3 & \frac{0.2}{0.4}=1/2 \end{cases}$$

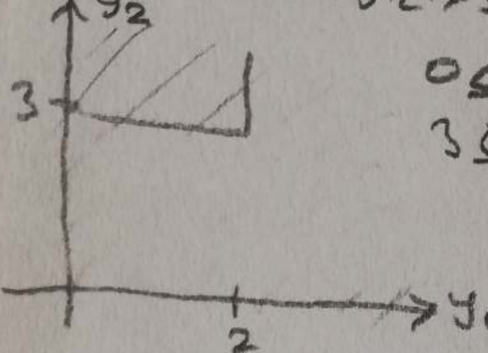
$$E(y_1|y_2=1) = 1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$E(y_2|y_1=2) = 1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

Olasılık yoğ. fonk-iki değişkenli örnekler

ÖR: $f(y_1,y_2)=e^{-(y_1+y_2)}$, $y_1>0, y_2>0$ üzerine tanımlı bir ol. yoğ. fonk. olsun.

a) $P(y_1\leq 2, y_2\geq 3)=?$



$$\left.\begin{array}{l}0\leq y_1\leq 2\\ 3\leq y_2\leq \infty\end{array}\right\} \int_0^2 \underbrace{\int_3^\infty e^{-(y_1+y_2)}\,dy_2}\,dy_1$$

$$\int_0^2 e^{-y_1}\underbrace{\int_3^\infty e^{-y_2}\,dy_2}\,dy_1$$

$$-e^{-y_2}\Big|_3^\infty = e^{-3}$$

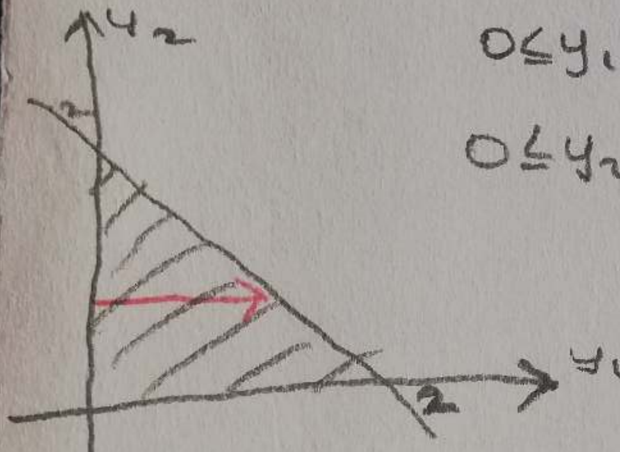
$$e^{-3}\int_0^2 e^{-y_1}\,dy_1$$

$$-e^{-y_1}\Big|_0^2$$

$$= e^{-3}(1-e^{-2})$$

$\%4.3 \approx e^{-3}-e^{-5}$

b) $P(y_1+y_2\leq 2)=?$



$$\left.\begin{array}{l}0\leq y_1\leq 2-y_2\\ 0\leq y_2\leq 2\end{array}\right\} \underbrace{\int_0^2\int_0^{2-y_2} e^{-(y_1+y_2)}\,dy_1\,dy_2}$$

$$\int_0^2 e^{-y_2}\underbrace{\int_0^{2-y_2} e^{-y_1}\,dy_1}\,dy_2$$

$$-e^{-y_1}\Big|_0^{2-y_2} = 1-e^{y_2-2}$$

$$\int_0^2 (e^{-y_2}-e^{-2})\,dy_2 = -e^{-2}y_2 - e^{-y_2}\Big|_0^2 = -e^{-2}\cdot 2 - e^{-2}+1$$

$$= -3e^{-2}+1$$

$$\approx \%59.4$$

Binom Merkezi Limit Örnek

ÖR: Bir soda şişeleme ünitesinde şişelerin %5'i tam olarak dolmamaktadır. Bir kalite kontrol teknisyeni rastgele 200 şişeyi kontrol ediyor. Şişelerin %10'undan fazlasının tam dolmadığını tespit etmesi ihtimali nedir?

$n=200 \quad p=0.05 \quad q=0.95 \quad np \geq 5 \quad nq \geq 5$

$P(\hat{p} > 0.1)$

$$z = \frac{0.1-0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{200}}} = 3.24$$

$P(z > 3.24) = ?$

3.24

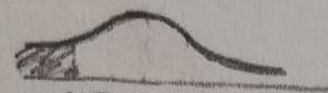
$1-0.9994 = 0.0006 \approx \%0.06$

"Normal Dağılım-z skoru soru çözümü

ÖR: Otomatik makina ile doldurulan 1kg'lık çay kutularının ağırlıkları $\mu = 1{,}03$ ve $\sigma = 0.02$ kg olan normal dağ. sahiptir.

a) Bir çay kutusunun ağırlığının 1kg'den az olma iht?

$z = \dfrac{1-1.03}{0.02} = -1.5$



-1.5

$P(z < -1{,}5) = 0.0668$

$\approx \%6.7$

b) 1.06 kg'dan çok olma ihtimali

$z = \dfrac{1.06-1.03}{0.02} = 1.5$

$\to P(z < 1{,}5) = 0.9332$

$1 - 0.9332 = 0.0668$

1.5

$\approx \% 6.7$

c) Çay kutularının %95'inden ağır olan çay kutusu ağırlığı?

0.95 z=1.645

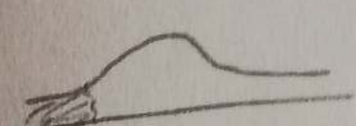
$1.645 = \dfrac{x-1.03}{0.02}$ $x = 1.0639$ kg

d) en üst %30

0.7 0.3

$0.52 = \dfrac{x-1.03}{0.02}$

e) en alt %10



0.1

$-1.28 = \dfrac{x-1.03}{0.02}$

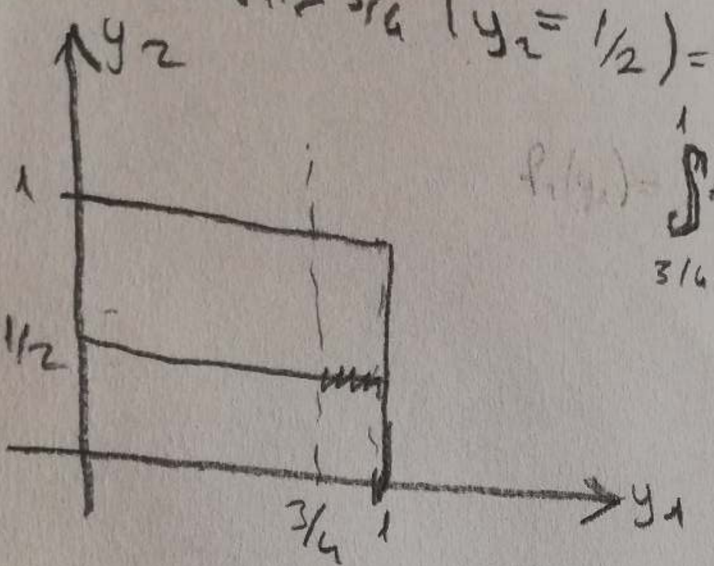
f) üst %2,5 ve alt %2.5 arasında

0.025 0.025

İki değişkenli koşullu olasılık sürekli

ÖR: $f(y_1, y_2) = 4y_1 y_2$, $0 \le y_1 \le 1$ $0 \le y_2 \le 1$ de tanımlı

$P(y_1 \ge 3/4 \mid y_2 = 1/2) = ?$ $E(y_1 \mid y_2 = 1/2) = ?$



$$\int_{3/4}^{1} f(y_1 \mid y_2)\, dy_1$$

$$f(y_1 \mid y_2 = 1/2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

$$f_2(y_2) = \int_0^1 4y_1 y_2\, dy_1 = 2y_1^2 y_2 \Big|_0^1 = 2y_2 \underset{y_2 = 1/2}{=} 1$$

$$f(y_1 \mid y_2) = \frac{4 \cdot 1/2 \cdot y_1}{1} = 2y_1$$

$$\int_{3/4}^{1} 2y_1\, dy_1 = y_1^2 \Big|_{3/4}^{1} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

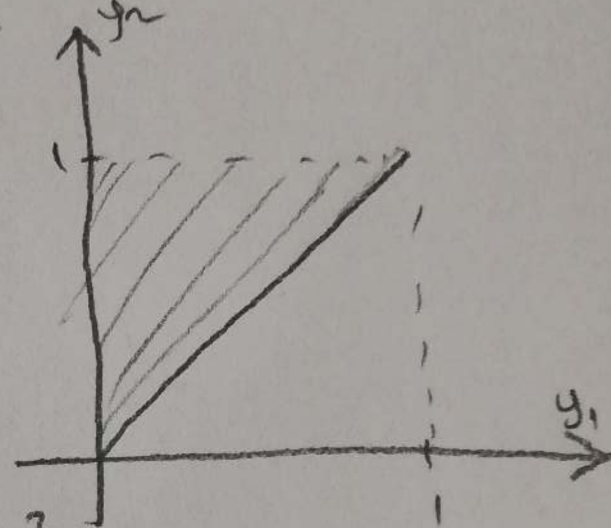
$$E(y_1 \mid y_2 = 1/2) = \int_{y_1} y_1 \cdot f(y_1 \mid y_2)\, dy_1 = \int_0^1 y_1 \cdot 2y_1\, dy_1 = \frac{2y_1^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

Marjinal olasılık fonk. sürekli

ÖR: $f(y_1, y_2) = 6(1-y_2)$ ortak ol. yoğ. fonk.
$0 \le y_1 \le y_2 \le 1$ için tanımlanmış.

a) $f_1(y_1) = ?$ $f_2(y_2) = ?$



$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\,dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{1} 6(1-y_2)\,dy_2$$

$$= 6y_2 - 3y_2^2 \Big|_{y_1}^{1} = 3 - 6y_1 + 3y_1^2$$

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\,dy_1$$

$$= \int_{0}^{y_2} (6 - 6y_2)\,dy_1 = 6y_1 - 6y_2 y_1 \Big|_{0}^{y_2}$$

$$= 6y_2 - 6y_2^2$$

ÖR: 1, 2, 5 kitle parametre: kitledeki tek sayı oranı $p = 2/3$

$n=2$ örnekler alıyoruz.

$n=2$	$\hat{p}$	olasılık $P(\hat{p})$	$\hat{p} * P(\hat{p})$
1,1	1	1/9	1/9
1,2	0.5	1/9	1/18
1,5	1	1/9	1/9
2,2	0	1/9	0
2,1	0.5	1/9	1/18
2,5	0.5	1/9	1/18
5,1	1	1/9	1/9
5,2	0.5	1/9	1/18
5,5	1	1/9	+ 1/9
			2/3

örnekleme dağılımları

b) parametre kitle ort. olsaydı

$n=2$	$\bar{x}$	olasılık $P(\hat{p})$	$\bar{x}\,P(\bar{x})$
1,1	1	1/9	1/9
1,2	1,5	1/9	3/18
1,5	3	1/9	3/9
2,1	1,5	1/9	3/18
2,2	2	1/9	2/9
2,5	3,5	1/9	7/18
5,1	3	1/9	3/9
5,2	3,5	1/9	7/18
5,5	5	1/9	+ 5/9
			8/3

NOT: örneklem ort. kitle ort. hedefler

NOT: örneklem oranı kitle oranını hedefler

Kovaryans Korelasyon Örnek:

ÖR: Y_1 ve Y_2 bekl. değer ve varyansları $\mu_1=7$, $\mu_2=5$, $\sigma_1^2=4$, $\sigma_2^2=9$ olan bağımsız değ. $U_1=Y_1+2Y_2$ ve $U_2=Y_1-Y_2$ ise $V(U_1)=?$ $V(U_2)=?$ $Cov(U_1,U_2)=?$ $\rho(U_1,U_2)=?$

$V(U_1)=V(Y_1+2Y_2)=Var\,Y_1+Var(2Y_2)+2Cov(Y_1,2Y_2)$

$=Var\,Y_1+4\,Var\,Y_2+4Cov(Y_1,Y_2)=4+36+0=\underline{40}$

$V(U_2)=V(Y_1-Y_2)=Var\,Y_1+Var(-Y_2)+2Cov(Y_1,-Y_2)$

$=Var\,Y_1+Var\,Y_2-\overset{0}{\cancel{2Cov(Y_1,Y_2)}}=4+9=\underline{13}$

$Cov(U_1,U_2)=Cov(Y_1+2Y_2,Y_1-Y_2)$

$=Cov(Y_1,Y_1-Y_2)+Cov(2Y_2,Y_1-Y_2)$

$=\underbrace{Cov(Y_1,Y_1)}_{4}-\underbrace{\cancel{Cov(Y_1,Y_2)}}_{0}+\underbrace{\cancel{2Cov(Y_2,Y_1)}}_{0}-\underbrace{2Cov(Y_2,Y_2)}_{-18}$

$=-14$

$$\rho(U_1,U_2)=\frac{Cov(U_1,U_2)}{\sigma_{U_1}\cdot\sigma_{U_2}}=\frac{-14}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{40}}$$

Güven Aralığı Örnek

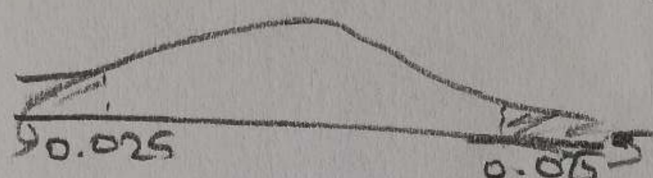
Ör: Hileli madeni para 280 kez atılıyor. 123 tura geliyor. p= paranın tura gelme olasılığı %95 güven aralığı oluştur.

$\hat{p} = \frac{123}{280} = 0.4393 \quad \hat{q} = 0.5607 \quad n = 280$

$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025$

$z_{0.025}$

$z_{\alpha/2} = 1.96$



$$E = 1.96\sqrt{\frac{0.4393 * 0.5607}{280}} = 0.0581$$

$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$

$0.4393 - 0.0581 < p < 0.4393 + 0.0581$

$0.3812 < p < 0.4974 \rightarrow \%95$

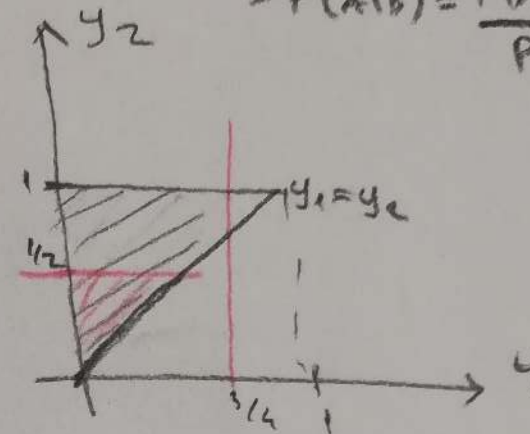
iki değişkenli koşullu olasılık sürekli

ÖR: $f(y_1,y_2) = 6(1-y_2)$ ort. ol. yoğ. fonk., köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ olan üçgensel alan üzerine tanımlanmış

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

a) $P(y_2 \leq 1/2 \mid y_1 \leq 3/4) = ?$

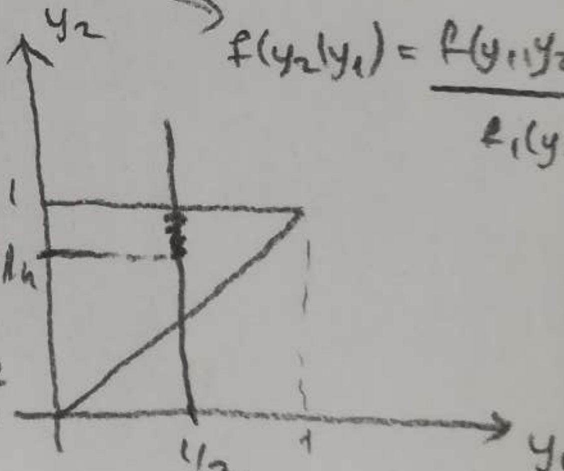
$0 \leq y_1 \leq y_2$	$y_1 \leq y_2 \leq 1$
$0 \leq y_2 \leq 1/2$	$0 \leq y_1 \leq 3/4$



$$\frac{\int_0^{1/2}\int_0^{y_2}(6-6y_2)\,dy_1\,dy_2}{\int_0^{3/4}\int_{y_1}^{1}(6-6y_2)\,dy_2\,dy_1} = \frac{32}{63}$$

b) $P(y_2 \geq 3/4 \mid y_1 = 1/2) = ?$

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1,y_2)}{f_1(y_1)}$$



$$\int_{y_2=3/4}^{y_2=1} f(y_2|y_1)\,dy_2$$

$$f_1(y_1) = \int_{y_1}^{1}(6-6y_2)\,dy_2 = 3-6y_1+3y_1^2 \Big|_{y_1=1/2}$$

$$= 3-3+\frac{3}{4} = 3/4$$

$$f(y_2|y_1=1) = \frac{6-6y_2}{3/4} = 8-8y_2$$

$$\int_{3/4}^{1}(8-8y_2)\,dy_2 = 1/4$$

Güven Aralığı Örnek

ÖR: TR'de mail kullanan kişilerin %'sini %95 güven düzeyinde bulmak istiyoruz. %4 hata payını garantileyecek örneklem büy.?
2000 yılında %16,9'e mail kullanan var.

$\hat{p}=0.169 \quad n=? \quad \hat{q}=0.831$

$\alpha=0.025 \quad z_{\alpha/2}=1.96$

$E=0.04=1.96\sqrt{\frac{0.169 * 0.831}{n}} \Rightarrow n=337.194$

$\underline{n=338}$

ÖR: %95 güven düzeyi güven aralığı $(0.58, 0.81)$ ise $\hat{p}=?$ $E=?$

$\hat{p}=\frac{0.58+0.81}{2}=0.695 \qquad E=0.115$

ÖR: Bir çalışmada rast seçilmiş 1300 tıbbi davanın 900 tanesinin düştüğü tespit edilmiş.
%99 güven aralığı davaların çoğu düştü mü?

$\hat{p}=?$

$\frac{900}{1300}=\frac{9}{13}=0.6923$

$z_{\alpha/2}=2.575$

$\alpha/2=0.005$

$\hat{q}=\frac{4}{13}=0.3077$

$n=1300$

$\alpha=1-0.99=0.01$

Binom Merkezi Limit örnek

ÖR: Telefonla satış için aranan insanların %3'üne ürün satılabilmektedir. Satış ekibi 2000 kişiyi ararsa, 100 kişiden fazla kişiye ürün satabilme iht.-?

$n=2000 \quad p=0.03 \quad q=0.97 \quad np\geq 5 \quad nq\geq 5$

$P\left(\hat{p}>\frac{100}{2000}\right)=?$

$$z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{\frac{100}{2000}-0.03}{\sqrt{\frac{0.03 * 0.97}{2000}}}=5.24$$

$P(z>5.24)=?$