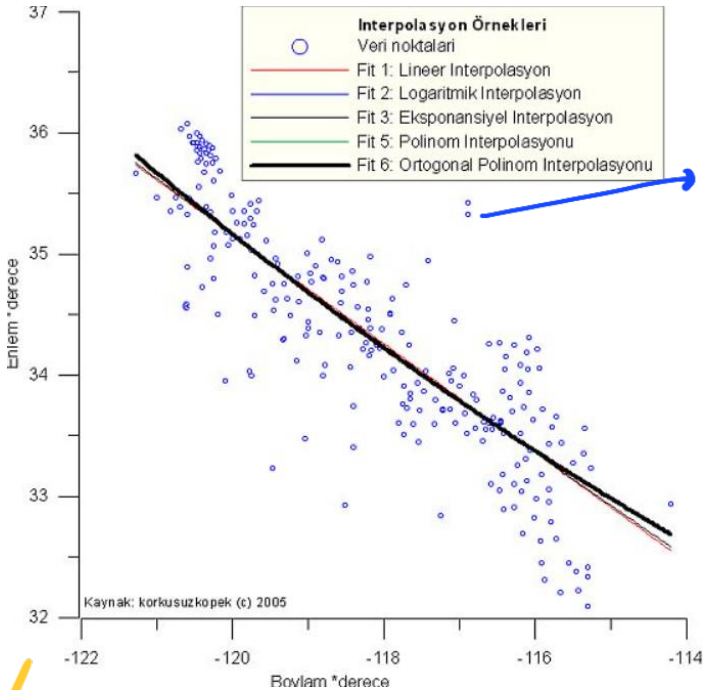


Burdaki mavi noktalar bizim yapmış olduğunuz ölçümler ben bu mavi noktalardan geçen bir fonk bulmaya çalışıyorum

genelde yaklaşık değerler elde etmeye çalışıyoruz

ENTERPOLASYON

Her zaman bu noktalardan geçen bir fonk. bulamıyabilirim
yaklaşık fonk. bulabilirim

Basit olarak enterpolasyon işlemi; tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.
Genel anlamda ise enterpolasyon; bilinmeyen bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi ayrık noktalarda verilen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun daha basit ve bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan $F(x)$ fonksiyonuna "Enterpolasyon Fonksiyonu" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.
Genelde enterpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Benim bilinmeyen fonksiyonum küçük f(x)

Enterpolasyonda biz büyük F(x)'i bulucaz
biz bu büyük F(x)'e enterpolasyon fonksiyonu
diyoruz. çünkü ben birebir örtüşen bir fonksiyonda
bulamıyabilirim, bazen küçük f(x) büyük F(x)'le
örtüşebilir

2. benim f(x) fonksiyonum

enterpolasyonla yaklaşık fonksiyon

gerçek

Bu da
hesaplacağ
bir

Enterpolasyon fonksiyonun seçiminde iki teorem kullanılır.

1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise enterpolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir. Bu aralıkta

$$|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon$$ eşitliği sağlanır.

2. Periyodu 2π olan sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

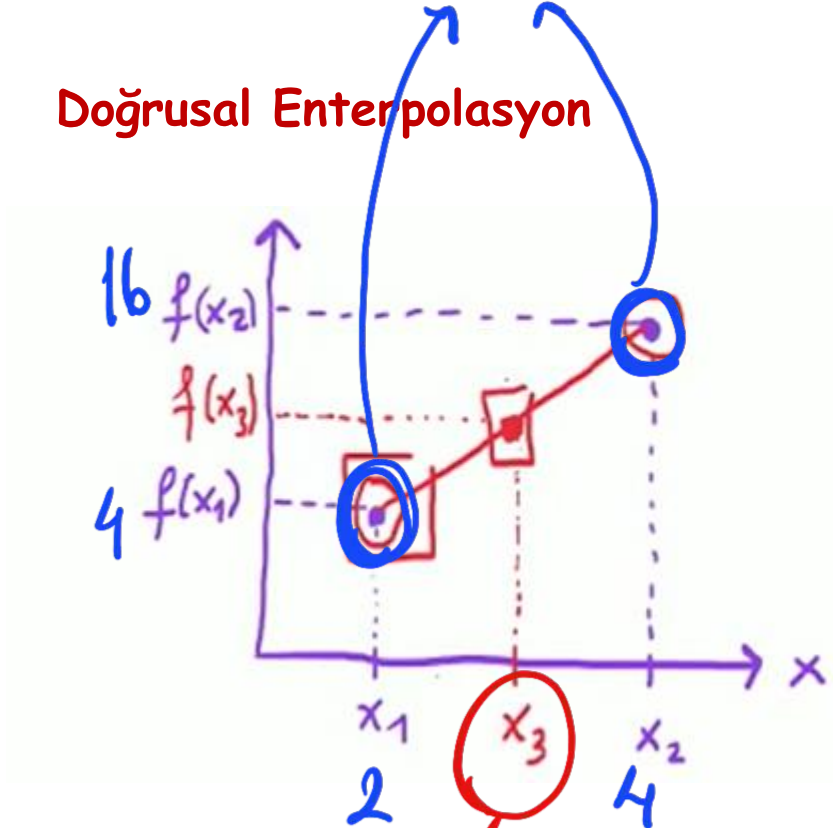
gibi sonlu bir tirigonometrik açılım, enterpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir n değeri $|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon$ sağlanabilir.

Enterpolasyon fonk. nasıl seçicem acaba ben bu noktalardan polinom mu geçirmeliyim yoksa trigonometrik bir fonksiyon mu geçirmeliyim

2 noktadan bir doğru geçiriyoruz böyle → Doğruyu nasıl buluruz ?

eğimini hesaplarız

Doğrusal Enterpolasyon



$f(x) = x^2$

meseła böyle bir fonk. var ama biz bu fonksiyonu bilmiyoruz

2 ile 4 arasında bir nokta seçiyoruz ve bunun fonksiyondaki değerinin ne olacağına

Eğim üzerinden doğru denklemini bulmak

$$\frac{\mathbf{f(x_2) - f(x_1)}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{f(x_3) - f(x_1)}}{\mathbf{x_3 - x_1}}$$

karar veriyor

Örnek

x	f(x)
-2	-0,909297
-1	-0,841471
0	0
1	0,841471
3	0,141120
4	-0,756802
6	-0,279415

x=2

Yanda f(x) fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Buna göre,

a) f(2) değerini x=1 ve x=3 kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

b) f(2) değerini x=-2 ve x=6 kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

a) f(2) = ?
f(1) = 0,841471
f(3) = 0,141120

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{0{,}141120 - 0{,}841471}{2} = \frac{f(2) - 0{,}841471}{1}$$

f(2) = 0,4912955

b) f(2) = ?
f(-2) = -0,909297
f(6) = -0,279415

$$\frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6}$$

DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona doğrusal (lineer) enterpolasyon denir.

Eğer x değişkeni $[a,b]$ aralığında bir $f(x)$'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak;

$$F(x) = Ax+B$$ seçilirse,

$$f(a) = F(a)$$
$$f(b) = F(b)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa+B = f(a)$$
$$Ab+B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \quad , \quad B = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$ yazılır.

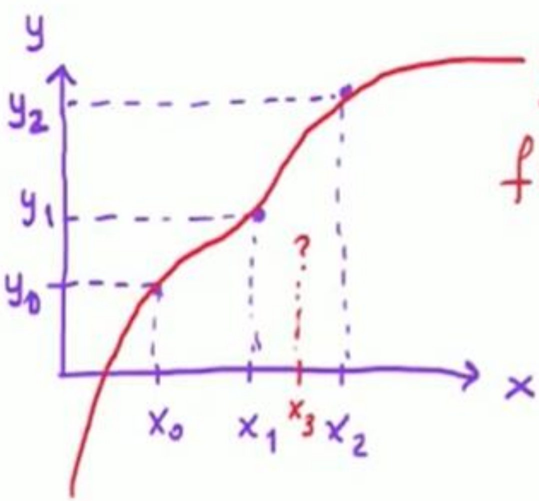
$F(x)$ fonksiyonu ise;

$$\boxed{F(x) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}}$$

olur.

Eğrisel İnterpolasyon Yöntemi
Quadratic Interpolation Methods

* Uygulanabilmesi için 3 nokta gereklidir.



$y=ax^2+bx+c$ (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x_3)=?$

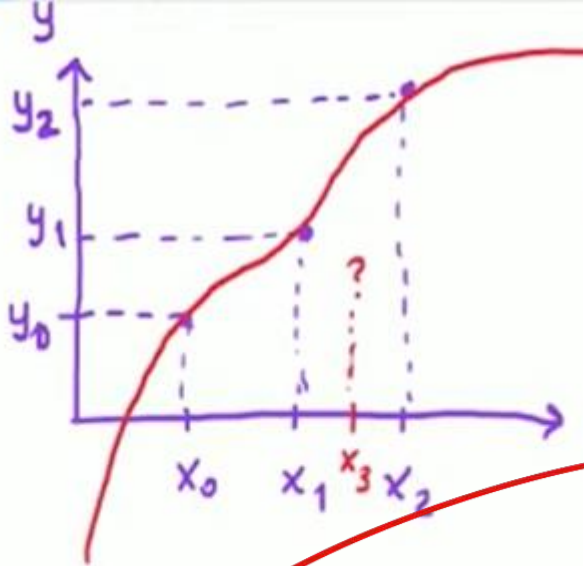
1.yol:

$$\left.\begin{aligned} ax_0^2+bx_0+c&=y_0\\ ax_1^2+bx_1+c&=y_1\\ ax_2^2+bx_2+c&=y_2\end{aligned}\right\}$$

üç bilinmeyenli denklem sistemini çözüp a, b, c bulunur.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x_3)= \ldots\ldots$$



2-yol:

$$\boxed{f(x) = b_0 + b_1.(x-x_0) + b_2.(x-x_0).(x-x_1)} \rightarrow$$

eğrisel interpolasyon fonksiyonu

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$f(x_3) = \ldots$

Örnek

(1, -2), (2, -1) ve (3, 4) noktaları veriliyor. Bu noktalar kullanılarak eğrisel interpolasyon metodu ile $x=2{,}5$ değerine karşılık gelen y değerini bulunuz.

(1, -2) (2, -1) (3, 4)

(x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2)

$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2 (x - x_0)(x - x_1) = b_0 + b_1(x-1) + b_2 (x-1)(x-2)$

$$b_0 = f(x_0) = -2$$

$$b_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = 1$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x2 - x1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x1 - x0}}{x2 - x0} = \frac{\frac{4-(-1)}{3-2} - \frac{(-1)-(-2)}{2-1}}{3-1} = 2$$

$f(x) = -2 + x - 1 + 2(x^2-3x+2)$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$f(2{,}5) = 1$

GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i f_0$$ olarak verilir. Bu formül açıldığında;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$k = \dfrac{x_i - x_0}{h}$ olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$k = \dfrac{x_i - x_0}{h}$ konulursa;

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!}\Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$f(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}}{1!}\Delta f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}\left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1\right)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}\left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x_i - x_0}{h} - 2\right)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\,\frac{x_i - x_0 - h}{h}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h}\,\frac{x_i - x_0 - h}{h}\,\frac{x_i - x_0 - 2h}{h}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\,\frac{x_i - (\overbrace{x_0 + h}^{x_1})}{h}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h}\,\frac{x_i - (\overbrace{x_0 + h}^{x_1})}{h}\,\frac{x_i - (\overbrace{x_0 + 2h}^{x_2})}{h}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)}{h^2}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)}{h^3}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i - 1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i - 1)(x_i - 2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x_i \rightarrow x$ alınırsa

$$\boxed{F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots}$$

$x - f_0$

0

ÖRNEK:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	-4	2	14	18
1	-2	16	32	18
2	14	48	50	18
3	62	98	68	18
4	160	166	86	
5	326	252		
6	578			

$x_0 = 0$

$h = 1$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$F(4) = 160$

ÖRNEK:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	10		
		40	
4	50		32
		72	
6	122		32
		104	
8	226		32
		136	
10	362		

$x_0 \neq 0$

$h \neq 1$

$$F(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{\cancel{2}} \overset{20}{\cancel{40}} + \frac{(x-2)(x-4)}{\cancel{4}} \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{2!}$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad F(8) = 226$$

Değişken dönüşümü yapılarak ayrık noktaların eşit aralıklı yapılması:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2				
		-1			
0	1		10		
		9		26	
3	10		46		24
		55		60	
8	65		106		24
		161		84	
15	226		190		
		351			
24	577				

z	$F(z)$ x	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		

	$F(z)$		
z	x	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		

$$F(x) = f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z.\Delta x + \frac{z.(z-1)}{2!}\Delta^2 x = -1 + z.1 + \frac{z^2 - z}{2}.2$$

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \mp\sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\Delta^4 f_0$$

F

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\Delta^4 f_0$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2				
		-1			
			10		
0	1			26	
		9			
			46		24
3	10			60	
		55			
			106		24
8	65			84	
		161			
			190		
15	226				
		351			
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \mp\sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \cancel{10}^{5}\,\frac{z(z-1)}{\cancel{2}} + \cancel{36}^{6}\,\frac{z(z-1)(z-2)}{\cancel{6}} + \cancel{24}\,\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{\cancel{24}}$$

$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2$ → Ara Enterpolasyon Formülü

$$F(x) = (\mp\sqrt{x+1})^4 - 2(\mp\sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

ÖRNEK:

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	
				8
4	1	7	12	
				8
6	2	19	20	
				8
8	3	39	28	
10	4	67		

z	x	Δx
0	2	
		2
1	4	
		2
2	6	
		2
3	8	
		2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \cancel{8}^{4}\frac{z(z-1)}{\cancel{2}} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 3 \Rightarrow F(z) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(z) = x^2 - 4x + 7$$

II. yol

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2\, 2!}\Delta^2 f_0$$

LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi ayrı noktalardaki bilinen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ değerleri varsa (bu noktaların aralıkları eşit olsun olmasın) ve $f(x)$ fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna $g(x)$ dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i \quad \text{şeklindedir.}$$

$L_i(x)$ katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{şeklinde hesaplanır.}$$

Örnek:

Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun x_i'ler için y_i değerleri şöyle olsun.

i	x_i	y_i
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$n=2$

$$L_0(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}=\cancel{\frac{x-x_0}{x_0-x_0}}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}$$

$$=\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-3}{0-3}\Rightarrow L_0(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$

$$L_1(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\cancel{\frac{x-x_1}{x_1-x_1}}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-3}{1-3}\Rightarrow L_1(x)=-\frac{1}{2}(x^2-3x)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0}\,\frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6}(x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-3x)(1) + \frac{1}{6}(x^2-x)(25)$$

$g(x) = 2x^2+4x-5$ bulunur. $\Rightarrow$ $g(1)=1$ $\quad g(2)=11$

ÖRNEK:

i	x	y
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$n=3$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j!=0}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \cancel{\frac{x-x_0}{x_0-x_0}} * \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} * \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{912}(x-7)(x-15)\,(x-22)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j!=1}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} * \frac{x-x_2}{x_1-x_2} * \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{480}(x-3)(x-15)\,(x-22)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j!=2}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} * \frac{x-x_1}{x_2-x_1} * \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{672}(x-3)(x-7)\,(x-22)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j!=3}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} * \frac{x-x_1}{x_3-x_1} * \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{1995}(x-3)(x-7)\,(x-15)$$

$$g(x) = -\frac{1}{912}(x-7)(x-15)\ (x-22)*(1) + \frac{1}{480}(x-3)(x-15)\ (x-22)*(-8) - \frac{1}{672}(x-3)(x-7)\ (x-22)*(-22) + \frac{1}{1995}(x-3)(x-7)\ (x-15)*(-9)$$

$$g(4) = -1.0296854$$

$$g(10) = -14.973684$$