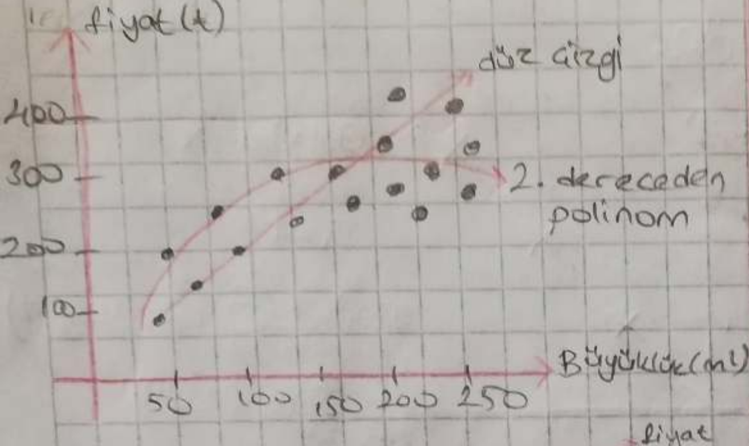
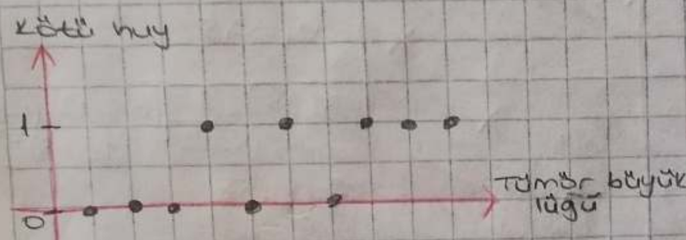
Supervised Learning

* Bilgisayara kendimiz bir şeyler öğrettiğimizde denetimli, bilgisayarın kendi kendine bir şeyler öğrenmesini beklediğimizde denetimsiz öğrenme olur.

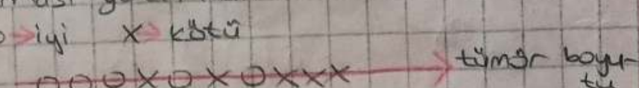


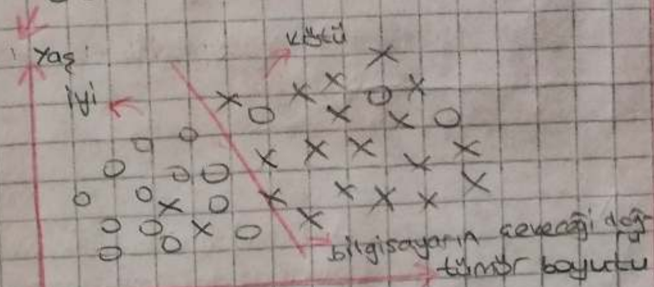
Regresyon problemi: Sürekli değeri olan çıktıyı tahmin etmeye çalıştığımız problem türü



Classification problemi: kesikli (discrete) çıktıların olasılığını bulma (sınıflandırma) problemidir. Sadece 2 değeri olması gerekmez. Belirli sayıda ve ayrık olması yeterlidir.

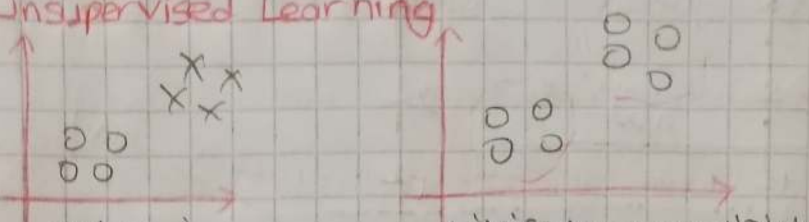
o → iyi   x → kötü





* Bilgisayara ne kadar çok veri girilirse o kadar doğru bir algoritma tahmini çıkmış olur.

Unsupervised Learning



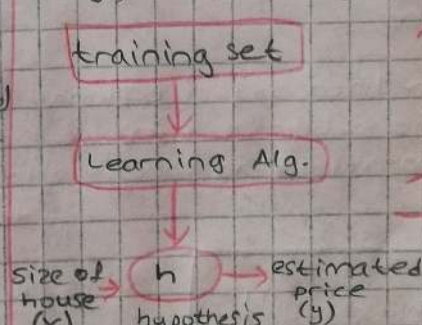
asıl veri   bilgisayara verdiğimiz

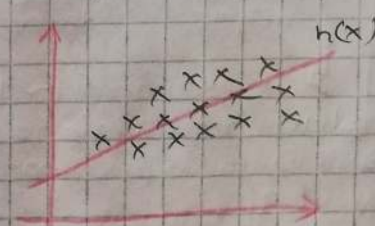
* Bilgisayar elinde sonuçlar ve karşılıkları olmadığı için bu datalar arasında ortak yön bulmaya çalışır ve buna göre kümeleme yapar. Bu algoritmaya (cluster) kümeleme alg. denir.
* Google news de bu algoritmayı kullanır.

Lineer Regresyon:

* Algoritmanın görevi data set'lere en uygun/optimize olan modeli data set'e oturtmaktır.

- training set = data set
- m = number of training examples
- x = input variable / features
- y = output " / target variable
- (x, y) = one training example
- $(x_i, y_i) = i^{th}$ training example





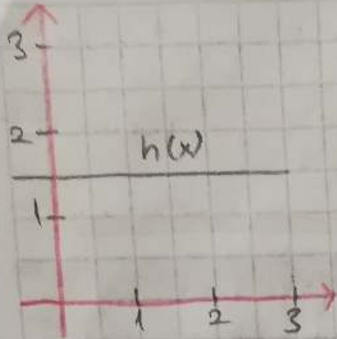
* h maps from x's to y's.

$\boxed{h(x) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x}$ Lineer Regression

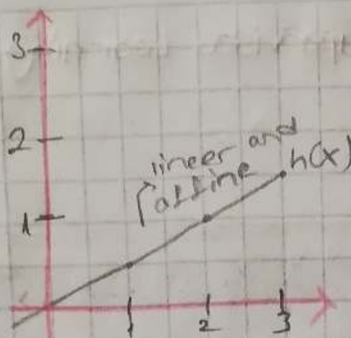
tahmin hipotezi

$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$ → θ_i: parameters

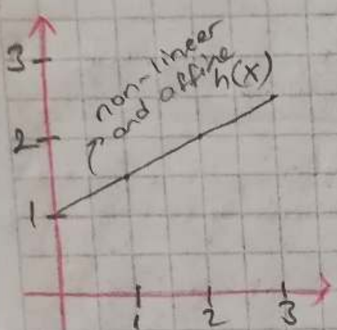
* Öyle θ_0 ve θ_1'ler seçeceğiz ki $h_\theta(x)$ y'ye olabildiğince yakın olsun.



$\theta_0 = 1{,}5$, $\theta_1 = 0$ $\}$ $h(x) = 1{,}5$



$\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0{,}5$ $\}$ $h(x) = \frac{x}{2}$



$\theta_0 = 1$
$\theta_1 = 0{,}5$

$\leftarrow h(x) = 1 + \frac{x}{2}$

* Amacımız θ_0 ve θ_1'i minimize etmek.

$$\frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$$

→ aradaki fark negatif olursa denklemi etkilemesin diye karesini alırız

$h_\theta(x^{(i)})$ → tahmini değer

$y^{(i)}$ → gerçek değer

→ tüm elemanların hata değeri toplamı

→ hata değerlerinin ort. bulmak için

→ yarısıyla işlem yapmak daha kolay olduğu için

$$\boxed{J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2}$$

→ minimize $J(\theta_0, \theta_1)$ cost function

→ squared error func.

— Hypothesis: $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$

— Parameters: θ_0, θ_1

— Cost func.: $J(\theta_0, \theta_1)$

— Goal: minimize $J(\theta_0, \theta_1)$

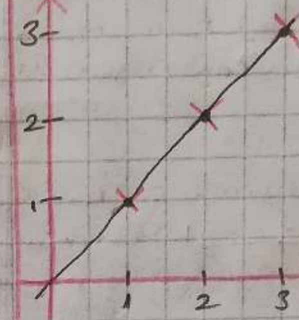
* Hipotez fonksiyonunu basitleştirmek için θ_0 kadar öteleyeceğiz. Yani fonk. orijinden geçecek ve $\theta_0 = 0$ olacak. Böylece J fonk. da tek değişkenli olmuş olacak.

— Simplified $h_\theta(x) = \theta_1 x$

— $J(\theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$

— goal: minimize $J(\theta_1)$

ÖR:



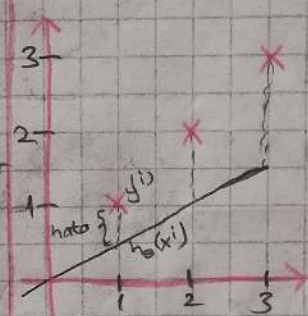
$h_\theta(x) = \theta_1 x$

$\theta_1 = 1$

$$J(\theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(\theta_1 x^{(i)} - y^{(i)}\right)^2$$

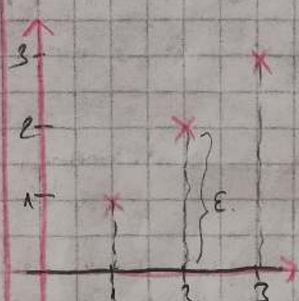
$$= \frac{1}{2 \cdot 3} (0^2 + 0^2 + 0^2) = 0 \quad \} \; J(1) = 0$$



$\theta_1 = 0{,}5$

$$J(0{,}5) = \frac{1}{2 \cdot 3}\left[(0{,}5-1)^2 + (1-2)^2 + (1{,}5-3)^2\right]$$

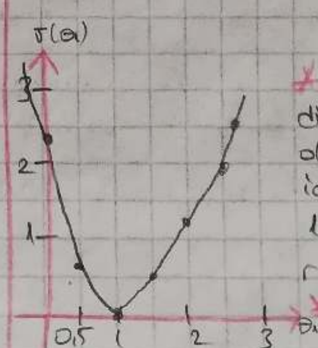
≈ 0.58



$\theta_1 = 0$

$$J(0) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2)$$

≈ 2.3



* $J(\theta_1)$ grafiğini çizdiğimizde amacımız olan minimize işlemi için en uygun θ_1'in 1 olduğunu görüyoruz.

* Bu da bize $\theta_1 = 1$'e göre bir doğru çizmemizin $h(x)$ için en uygun grafik olduğunu gösterir.

* Önceki kısımda daha iyi anlamak için θ_0'ı sıfırlamıştık ve iki boyutlu convex bir $J(\theta_1)$ fonk. elde etmiştik.
* Şimdi θ_0'ı da dahil ettiğimizde iki boyutlu convex değil 3 boyutlu convex bir $J(\theta_0, \theta_1)$ fonk. elde edeceğiz.

Gradient Descent

* Bu yöntem de bizim J fonk. azaltmak için kullanacağımız bir algoritma. J'nin 2 parametresi olmasına gerek yok. n tane parametre olabilir.
* θ_0 ve θ_1 değerlerini bir değerden başlatıp adım adım azaltarak bir minimum değer bulmaya çalışacağız.

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \alpha \cdot \frac{\partial J(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_j} \quad \text{(for } j=0 \text{ and } j=1)$$

learning rate

azaltacağımız miktar; ne kadar küçükse o kadar küçük adımlarla ilerleriz

NOT: := atama işareti

* Bu işlem θ_0 ve θ_1 için aynı anda ayrı ayrı yapılmalı.

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \cdot \frac{\partial J(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_0}$$

θ_0'a göre kısmi türev

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \cdot \frac{\partial J(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_1}$$

θ_1'e göre kısmi türev

* Başladığımız θ noktası zaten optimum nokta ise türev 0 çıkacağından θ değişmez.
* İlk başladığımız noktadan ikinci noktaya geldiğimizde eğim öncekinden daha az (mutlak değerce) olacağı için adım ilerledikçe θ_1 ve θ_1'in yeni değeri arasındaki fark da azalır. Bu yüzden learning rate'i değiştirmeye gerek yoktur.

$$\frac{\partial J(\theta_0, \theta_1)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (\theta_0 + \theta_1 x^i - y^i)^2$$

devamı yan tarafta

- $j=0$ iken θ_0'a göre kısmi türev =

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) = A$$

- $j=1$ iken θ_1'e göre kısmi türev =

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i) - y^i) \cdot x^i = B$$

gösterimi kolaylaşsın diye kendim verdim

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &:= \theta_0 - \alpha \cdot A \\ \theta_1 &:= \theta_1 - \alpha \cdot B \end{aligned}\right\} \text{eş zamanlı güncellenir.}$$

* Convex olan şekillerde ilk adım yönümüz ulaşacağımız noktayı etkilemez çünkü local minimum yoktur, ama şekil convex değilse bu durum değişir.

Batch gradient descent: Gradian descent her iterasyonda (adım) bütün m'leri tekrar kontrol eder. Bu da bize maliyet artırışı olarak geri döner.

* Tek hipotez için:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \qquad y_i = 1 * B_0 + B_1 * x_i$$

* Birden fazla hipotez için:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} * \begin{array}{ccc} h_0 & h_1 & h_2 \\ \left[\begin{matrix} B_0 \\ B_1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} B_0 \\ B_1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} B_0 \\ B_1 \end{matrix}\right] \end{array} = \begin{array}{ccc} h_0 & h_1 & h_2 \\ \left[\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right] \end{array}$$

Multiple Features

size (m²)	number of bedrooms	" floors	age of home	price
x_1	x_2	x_3	x_4	y

- n: number of features
- $x^{(i)}$: input of i^{th} training example
- $x_j^{(i)}$: value of feature j in i^{th} training example

* x_0 var ise 1 olarak kabul edilir.

* $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n$

— hypothesis : $h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n$

— parameters : $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$

— cost func : J

$$\boxed{J(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2}$$

— for gradient descent :

$$\boxed{\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{\partial J(\theta_0, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_j}}$$

* her θ_j için $(0, \dots, n)$ arasında tek tek aynı anda atama yapılır.

$$\boxed{\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right) \cdot x_j^{(i)}}$$

(j 0'dan n'e kadar tek tek aynı anda güncellenir. $j=0$'ken $x_0 = 1$ olur.)

Polinomial Regression

$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 \cdot \underbrace{frontage}_{x_1} + \theta_2 \cdot \underbrace{depth}_{x_2}$

↓ iyileştirme

$x = frontage \cdot depth$

$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x$

* integraldeki değişken değiştirmeye benzer bir değişim yapılır.

Normal Equation:

* Adımlarla uğraşmadan optimal θ değerini bulmayı sağlar.
* Kısmi türeve uğraşmadan yapılır.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ 1 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$m \times (n+1)$ — m dimensional vector

$$\boxed{\theta = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

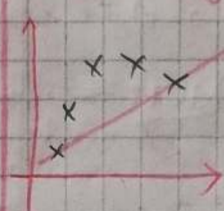
* Gradient Descent dezavantajları
— α seçmek gerekir. (Extra maliyet)
— Needs many iterations (")

* Gradient avantaj
— Works well even when n is large

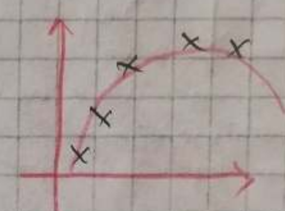
* Normal equation avantaj
— α'ya gerek yok
— İterasyon yok, tek seferde bulunuyor.

* Normal equation dezavantaj
— Need to compute $(X^T X)^{-1} \rightarrow N^3$'lük bir yük demek
— Slow if n is very large.

Overfitting



$\theta_0 + \theta_1 x$
— underfitting
— High bias



$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$
— just right

$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$
— overfitting
— high varience
* verilen data'lar için hatanın 0'a yakın olduğu ama yeni örneklerin mevcut fonk.'a uymaması

Addressing overfitting

* Özellik sayısı az olduğunda grafik çizilerek overfitting olup olmadığı kontrol edilebilir.
* Özellik sayısı fazla ise iki seçenek karşımıza çıkar:

1- Reduce number of features
* Manuel olarak en önemli özellikler hariç kullanmamak tahmin hatası olabilir.

2- Regularization
* Özelliklerin tamamı kalıyor ama parametrelerin değerlerini azaltıyoruz.

Ordinary Diff. Equations:

Derivatives

ordinary der. (adi)	Partial Der. (kısmi)
$\frac{dv}{dt}$	$\frac{\partial v}{\partial t}$
* Bir değişkenli fonksiyonlarda	* Birden fazla değişkenli fonk'da

Diff. Equations

Ordinary diff.	Partial Diff
* Involve one or more ordinary derivatives of unknown func.	* Involve one or more partial derivatives of unknown func.

Ordinary dif:

$$\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$$

unknown func

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

independent variable

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

dependent variable

independent var.

Order of a diff eq: number of the highest derivative (mertebe)

$y'' + xy' - x^3y = \sin x$

second order

Order of an ordinary diff:

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t \rightarrow \text{first order}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t) \rightarrow \text{second order}$$

$$\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]^3 - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1 \rightarrow \text{second order}$$

Solution of a diff eq:

* A solution to a diff. eq. is a function that satisfies the eq.

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \quad \text{Solution } x(t) = e^{-t}$$

proof:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t} \qquad \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = -e^{-t} + e^{-t} = 0$$

Linear and Non-linear:

* Bir lineer diff. denk. de tüm türevlerin dereceleri 1 olmalıdır.
* Bağımlı değişken ve türevleri çarpım halinde olmamalıdır.

lineerlik formülü

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

* eğer $a(x)$'lerin hepsi sabit ise sabit katsayılı, en az biri sabit değilse değişken katsayılı lineer dif. denk. dir.

* $b(x) = 0$ ise homojen, değilse non-homojen denklemdir.

* $f(x) = 2x$ lineer and affine
  $f(x) = 2x+3$ non-lineer but affine

* Mutlak değer de lineerliği bozar.

* n. mertebeden türevli denk. için eşsiz bir çözüm istiyorsak n tane durumu bilmemiz gerekir.
* Eğer burada verilen durumların hepsi aynı x değerleri içinse initial value, değilse boundary value conditions olur.

$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$	$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$
$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2.5$	$x(0) = 1,\ x(2) = 1.5$
initial	boundary — daha zor

* Dif denklemler order, linear, initial-boundary olarak sınıflandırılabilir.

* Analitik çözüm sadece lineerde ve bazı özel non-lineer denk.-de kullanılır.
* Numerik çözüm bilinmeyen fonk.-un grafik veya tablosunu elde etmek için kullanılır.
* Bu numerik yöntemlerin çoğu doğrudan veya dolaylı olarak kesilmiş Taylor serisi açılımına dayanır.

Seperable diff. eq.

* Can be expressed as the product of a function of x and func. of y.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

dy * y'liler = dx * x'liler

Ör: $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ her iki tarafı $\frac{dx}{y^2}$ ile çarp.

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \Rightarrow y^{-2}dy = 2x\,dx$$

$$\int y^{-2}dy = \int 2x\,dx \Rightarrow -y^{-1} + C_1 = x^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+C}$$

Ör: $y' = 6y^2x \quad , y(1) = 1/25$

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 6x\,dx$$

$$\int y^{-2}dy = \int 6x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x^2 + C$$

$$-\frac{1}{1/25} = 3 \cdot 1^2 + C \Rightarrow -25 = 3 + C \Rightarrow C = -28$$

$$y = \frac{1}{28-3x^2}$$

Ör: $y' = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4} \quad , y(1) = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4} \Rightarrow dy \cdot (2y-4) = dx \cdot (3x^2+4x-4)$$

$$\int (2y-4)dy = \int (3x^2+4x-4)dx$$

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x + C$$

$$9 - 12 = 1 + 2 - 4 + C \Rightarrow C = -2$$

$$y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$$

$$y^2 - 4y + 4 = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

$$(y-2)^2 = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

$$y - 2 = \mp\sqrt{x^3+2x^2-4x+2}$$

$$y = 2 \mp \sqrt{x^3+2x^2-4x+2}$$

$$3 = 2 \mp \sqrt{1}$$

$$y = 2 + \sqrt{x^3+2x^2-4x+2}$$

Ör: $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad , y(0) = 1$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int y^{-3}dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$-\frac{1}{2} = 1 + C \Rightarrow C = -3/2$$

$$\frac{1}{y^2} = -2\sqrt{1+x^2} + 3 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \mp\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}} \qquad 1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3-2}} = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$$

Laplace Dönüşümü

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, t değ. bağlı bir fonk. için
$A\subseteq\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ $L:A\to\mathbb{R}^{(a,\infty)}$,

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}.f(t).dt$$

NOT: Dönüşümün iyi tanımlı olabilmesi için $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ has olmayan int. yakınsak olması gerekir, yani:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}f(t)dt<\infty$$

NOT: Bu integral hesaplanırken s sabit olarak düşünülür ama son durumdaki fonk.un değişkenidir.

Laplace Tablosu

- $\mathcal{L}\{1\}=1/s$ $(s>0)$ $\mathcal{L}\{a\}=a/s$ $(s>0)$
- $\mathcal{L}\{t^n\}=n!/s^{n+1}$, $n=1,2,3\ldots$ $(s>0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/s-a$ $(s>a)$
- $\mathcal{L}\{\sin kt\}=k/s^2+k^2$ $(s>0)$
- $\mathcal{L}\{\cos kt\}=s/s^2+k^2$ $(s>0)$
- $\mathcal{L}\{\sinh kt\}=k/s^2-k^2$
- $\mathcal{L}\{\cosh kt\}=s/s^2-k^2$

Laplace Dönüşümünün Lineerliği

$$\mathcal{L}\{f(t).c_1+g(t).c_2\}=c_1.\mathcal{L}\{f(t)\}+c_2.\mathcal{L}\{g(t)\}$$

s'de öteleme

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)\ (s>s_0)\Rightarrow\mathcal{L}\{e^{at}.f(t)\}=F(s-a)$$

*önce f(t)'nin Laplace'ını hesapla, bulduğun F(s)'deki s yerine s−a yaz.

- $\mathcal{L}\{e^{at}.b\}=\dfrac{b}{s-a}$ $\mathcal{L}\{e^{at}.t^n\}=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}.\sin(bt)\}=\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}.\cos(bt)\}=\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}.e^{bt}\}=\mathcal{L}\{e^{t(a+b)}\}=\dfrac{1}{s-(a+b)}$

Laplace Dönüşümünün Türevleri

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ olsun

$$\mathcal{L}\{t^n.f(t)\}=(-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}\{F(s)\}$$

NOT: $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ve $\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}$ mevcut ise:

$$\mathcal{L}\{1/t.f(t)\}=\int_s^\infty F(m)dm$$

Türev Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

*f ve f' parçalı sürekli ve α mertebeden üstel olsunlar. s>α için:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s.\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$$

*Genel olarak $n\in\mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n.\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

Tam olmayan üstte Laplace

$$\mathcal{L}\{t^{n-1/2}\}=\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n.s^{n+1/2}}$$
$(n=1,2,3,\ldots)$

Ters Laplace Dönüşümü

* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli fonk. için Laplace dönüşümünün tersi

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

* İki fonksiyon aynı Laplace dönüşümüne sahipse bu fonk.lar mutlaka birbirine eşittir. (süreklilerse)

Ters Laplace Dönüşümünün Lineerliği

$$\mathcal{L}^{-1}\{a \cdot F(s) + b \cdot G(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b \cdot \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

İntegral Laplace Dönüşümü

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $t > 0$, $s > 0$, $s > k$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = 1/s\, F(s)$$

$$\int_0^t f(t)\,dt = \mathcal{L}^{-1}\{1/s\, F(s)\}$$