(*) $P(1,2,1)$ ve $Q(2,0,1)$ den geçen ve $3x-y+z=6$ düzlemine dik olan düzlem? $\vec{PQ}=(1,-2,0)$ $(3,-1,1)$

$3x-y+z=6 \Rightarrow \vec{n_1}=\langle 3,-1,1\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n_1}$

$\vec{PQ}=\langle 1,-2,0\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{PQ}$ $\Rightarrow \vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{n_1}$ 1

$$\vec{PQ}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\langle \underset{A}{-2},\underset{B}{-1},\underset{C}{5}\rangle \qquad P(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{2},\underset{z_0}{1})$$

$$\underline{-2(x-1)-(y-2)+5(z-1)=0}$$

(*) $(2,0,1)$ den geçen ve $X(1,1,0)$, $Y(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan düzlem?

$\vec{n}=\vec{XY}=\langle \underset{A}{3},\underset{B}{-2},\underset{C}{-2}\rangle$ $(\underset{x_0}{2},\underset{y_0}{0},\underset{z_0}{1})$ $\Rightarrow 3.(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$

$$\boxed{3x-2y-2z=4}$$

(*) $A(1,6,-4)$ noktasından geçen ve $x=1+2t$, $y=2-3t$, $z=3-t$ doğrusunu içeren düzlemin denklemi? (2016-bütünleme sorusu) 1,2,3

$v=(2,-3,-1)$

$\vec{AB}=(0,-4,7)$

$\left.\begin{array}{l} x=1+2t\\ y=2-3t\\ z=3-t\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$

doğru üzerinde bir nokta: $B(1,2,3)$

$\vec{AB}=\langle 0,-4,7\rangle$ ve $\vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$ düzlem üzerindedir. Düzlemin normali $\vec{AB}\times\vec{v}$ ye paraleldir.

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & 7\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\underset{A}{25}\vec{i}+\underset{B}{14}\vec{j}+\underset{C}{8}\vec{k} \rightarrow \text{düzlemin normali}$$

$A(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{6},\underset{z_0}{-4})$

$$25.(x-1)+14(y-6)+8(z+4)=0 \Rightarrow \boxed{25x+14y+8z=77}$$

(*) $x-y+2z=3$ ile $2x+y+z=0$ ın arakesit açısı?

$\vec{n_1}=\langle 1,-1,2\rangle$ $\quad \vec{n_2}=\langle 2,1,1\rangle \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{2-1+2}{\sqrt6\cdot\sqrt6}=\dfrac{3}{6}$

$2-1+2=\sqrt6\cdot\sqrt6\cdot\cos\theta$ $\quad \Downarrow \quad \cos\theta=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=\cos\theta$ $\quad \boxed{\theta=60}$

(*) $x_1=(1,1,2)$, $x_2=(0,2,3)$, $x_3=(2,1,1)$ den geçen düzlem?

$\vec{v_1}=\overrightarrow{x_1x_2}=\langle -1,1,1\rangle \quad \vec{v_2}=\overrightarrow{x_1x_3}=\langle 1,0,-1\rangle$

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}=-\vec{i}-\vec{k}$$

$x_1=(1,1,2)$ $\quad \vec{n}=-\vec{i}-\vec{k} \Rightarrow -1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)-1(z-2)=0$

$\Downarrow$

$-x-z=-3 \rightarrow \boxed{x+z=3}$

---

b) (2,−1,−1) noktasından geçen, $x+y=0$ ve $x-y+2z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$n_1=\langle 1,1,0\rangle$ (1)

$n_2=\langle 1,-1,2\rangle$ (1)

$$n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\langle 2,-2,-2\rangle \quad (1)$$

$n=\langle 2,-2,-2\rangle=v$ (istenen doğrunun yönlü vektörü) (2)

istenilen doğrunun parametrik denklemleri

$$\left.\begin{aligned} x&=2+2t\\ y&=-1-2t\\ z&=-1-2t\end{aligned}\right\}$$ (2) şeklindedir

(8)

Soru 4. $x+y=1$ ve $2x+y-2z=2$ düzlemleri veriliyor.

a) Bu düzlemlerin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz. ***(13puan)***

b) Bu düzlemlerin kesişim doğrusuna dik olan ve $P(3,1,-1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz. ***(12puan)***

1 1 0
2 1 -2
$-2i+2j-k$

$x=$

a) $x+y=1 \qquad 2x+y-2z=2$

$\vec{n_1}=\vec{i}+\vec{j} \qquad \vec{n_2}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

$$\vec{V}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$

$z=0 \Rightarrow -x-y=-1$
$2x+y=2$
$x=1 \Rightarrow y=0$

$A(1,0,0)$

$$\begin{cases} x=1-2t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$$

b)

$-2(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0$

$$\boxed{-2x+2y-z=-3}$$

4

4) $p_1 : x+2y-z=1$ ve $p_2 : 2x+y+z=4$ düzlemleri ve $l:\ x=1+t,\ y=2-t,\ z=1-t$ doğrusu veriliyor. Buna göre:

-a) p_1 ve p_2 düzlemlerinin arakesit doğrusuna dik olan ve $P(1,-2,1)$ noktasından geçen **düzlemin** denklemini bulunuz. (13P)

3

P_1 düzleminin normal vektörü : $\vec{n}_1 = \langle 1, 2, -1 \rangle$

P_2 " " " : $\vec{n}_2 = \langle 2, 1, 1 \rangle$

P_1 ve P_2 düzlemlerinin arakesit doğrusunun yön vektörü;

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 3, -3, -3 \rangle$$

P_1 ve P_2 düzlemlerinin arakesit doğrusuna dik olan ve $P(1,-2,1)$ noktasından geçen düzlemin denklemi;

$$3(x-1) - 3(y+2) - 3(z-1) = 0 \Longrightarrow \underline{x - y - z = 2} \quad //$$

-b) p_1 düzleminin, l doğrusuna **paralel** olup-olmadığını araştırınız. (12P)

P_1 düzleminin normal vektörü ; $\vec{n} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

l doğrusunun yönlü vektörü : $\vec{V} = \langle 1, -1, -1 \rangle$

olup

$\underline{\vec{n}\cdot\vec{V} = 0}$ dır.

O halde ~~düzlem~~ doğruya paraleldir.

⊛ $2x-y+7z=12$ düzlemine dik olan ve $(-1,0,1)$ 'den geçen doğru?

$\vec{v}=\vec{n}=\langle \overset{a}{2},\overset{b}{-1},\overset{c}{7}\rangle$ → (Düzlemin normali = Doğrunun yön vektörü)

$(\overset{x_0}{-1},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{1})$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=-1+2t\\ y&=-t\\ z&=1+7t\end{aligned}}$$

⊛ $f(x)=e^x-e^{-x}$ ise $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=?$ (Maclaurin Açılımını kullanın)

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$; $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}\cdots$

$e^x-e^{-x}=2\left(x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots}^{0}\right)}{\cancel{x}}=2$$

⊛ $P(1,2,3)$ ve $Q(3,2,1)$ den geçen ve $4x-y+2z=7$ düzlemine dik olan düzlem?

$\vec{n}_2\perp\vec{PQ}$, $\vec{n}_2\perp\vec{n}_1$ } $\vec{n}_2 \parallel \vec{n}_1\times\vec{PQ}$

$\vec{PQ}=\langle 2,0,-2\rangle$
$\vec{n}_1=\langle 4,-1,2\rangle$ } Aranan düzlemin normali bu iki vektöre de diktir. Yani bu iki vektörün vektörel çarpımına paraleldir.

$$\vec{n}_2=\vec{PQ}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&0&-2\\ 4&-1&2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-12\vec{j}-2\vec{k}=\langle \overset{A}{-2},\overset{B}{-12},\overset{C}{-2}\rangle$$

$P(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{2},\overset{z_0}{3})$
$\vec{n}_2=\langle \underset{A}{-2},\underset{B}{-12},\underset{C}{-2}\rangle$ } $-2(x-1)-12(y-2)-2(z-3)=0$

$$\boxed{2x+12y+2z=32}$$

(*) $X_1=(1,2,1)$ ve $X_2=(2,1,0)$ noktalarından geçen doğru ile $Y_1=(3,-1,0)$ ve $Y_2=(4,-3,0)$ noktalarından geçen doğru $(2,1,0)$ noktasında kesişmektedir. Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem bu noktadan geçsin, hem de her iki doğruya da dik olsun.

$\vec{v_1}=\overrightarrow{X_1X_2}=\langle 1,-1,-1\rangle \qquad \vec{v_2}=\overrightarrow{Y_1Y_2}=\langle 1,-2,0\rangle$

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\vec{v}=\langle \overset{a}{-2},\overset{b}{-1},\overset{c}{-1}\rangle \rightarrow$ doğrunun yön vektörü

$(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{0}) \rightarrow$ doğru üzerinde bir nokta

$$\boxed{\begin{aligned}x&=2-2t\\ y&=1-t\\ z&=-t\end{aligned}}$$

(*) $\begin{cases}x=2t^2+3\\ y=t^4\end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $t=-1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$(5,1)$

$t=-1 \Rightarrow \begin{matrix}x=5\\ y=1\end{matrix} \Rightarrow (5,1)$ den geçen teğetin denklemi:

$$\boxed{y-1=f'(5).(x-5)}$$

$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t^3}{4t}=t^2 \Rightarrow f'(5)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=1$

$y-1=x-5$

$\boxed{y=x-4}$

Teğet denklemi

$(3,0)$

$\dfrac{4t^3}{4t}$

t^2

$\dfrac{-4}{-4}=1$

$\boxed{y=x-4}$

$y=x+n$

$1=5+n$

$n=-4$

13

(*) $x = 4\sin t \quad y = 2\cos t$ eğrisinin $t = \frac{\pi}{4}$ deki

teğeti ?

$\frac{4\sqrt{2}}{2} \quad (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin t}{4\cos t}\Big|_{t=\pi/4} = -\frac{1}{2}$

$\frac{2\sqrt{2}}{2} \quad \frac{-2\sin t}{4\cos t}$

$\frac{-1}{2}\frac{\sin t}{\cos t} \quad \frac{-1}{2} = m$

$\boxed{y = \frac{-x}{2} + 2\sqrt{2}}$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_0 = 2\sqrt{2} \quad y_0 = \sqrt{2}$

$y = \frac{-x}{2} + n \quad n = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Teğet Denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}}$

(*) $x + 2y + z = 1$ ile $2x + 2y - z = 1$ düzlemlerinin arakesitine paralel ve $(1,0,2)$ den geçen doğru?

$x + 2y + z = 1$ in normali $\Rightarrow n_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle$

$2x + 2y - z = 1$ " " $\Rightarrow n_2 = \langle 2, 2, -1 \rangle$

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \langle \underset{a}{-4}, \underset{b}{3}, \underset{c}{-2} \rangle$$

$\underset{x_0\ y_0\ z_0}{(1, 0, 2)} \Rightarrow$
$x = x_0 + at = 1 - 4t$
$y = y_0 + bt = 3t$
$z = 2 - 2t$

$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 3t \\ z = 2 - 2t \end{array}}$

(*) $3x-2y+z=2$ ve $x-y+3z=8$ düzlemlerinin arakesit doğrusunun parametrik denklemi?

$\vec{n_1}=\langle 3,-2,1\rangle \qquad \vec{n_2}=\langle 1,-1,3\rangle$

$$\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y+z=2\\ x-y+3z=8\end{array}\right\}$$

Ortak çözüm için $x=1$ alırsak

$$\left.\begin{array}{l}-2y+z=-1\\ -y+3z=7\end{array}\right\} y=2,\ y=3$$

Doğru üzerindeki nokta: $(1,2,3)$

Doğruya paralel vektör: $\langle -5,-8,-1\rangle$ $\Rightarrow$

Doğru Denklemi:

$x=1-5t$

$y=2-8t$

$z=3-t$

(*) $\left\{\begin{array}{l}x=8\cos t+8t\sin t\\ y=8\sin t-8t\cos t\\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$ parametrizasyonu ile verilen eğrinin uzunluğu?

$$S=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\frac{dx}{dt}=-\cancel{8\sin t}+\cancel{8\sin t}+8t\cos t \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=64t^2\cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dt}=\cancel{8\cos t}-\cancel{8\cos t}+8t\sin t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=64t^2\sin^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{64t^2}=8t$$

$$S=\int_0^{\pi/2}8t\,dt=4t^2\Big|_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\pi^2}}$$

S.4 a) $x + 2y + 3z = 5$ düzleminin $x - 2y + z = 3$ düzlemine dik olup olmadığını araştırınız.(7p)

Düzlemlerin normalleri sırasıyla

$\vec{n_1} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ olup $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 - 4 + 3 = 0$

$\vec{n_2} = \langle 1, -2, 1 \rangle$

olduğundan verilen düzlemler diktir.

b) $x - 2y + 5z = 1$ düzleminin $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = t - 1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.(7p)

Doğrunun yönlü vektörü $\vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ olup

Düzlemin normal vektörü $\vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 - 4 + 5 = 0$ olduğundan doğru düzleme paraleldir.

c) $t, [-1,0]$ aralığında değişken, $x(t) = t^2, y(t) = 1 - t^2$ ile çizilmiş yolun uzunluğunu bulunuz.(10p)

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} |t|\, dt = -2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} t\, dt = \sqrt{2} \text{ br}$$

$-2t$

$\sqrt{4t^2 + 4t^2}$

$\int_{-1}^{0} -2\sqrt{2}t$

$\sqrt{2}$

$\int_{-1}^{0} 2\sqrt{2}|t|$

$\left. \frac{-2\sqrt{2}.t^2}{2} \right|_{-1}^{0}$

16

Başarılar dilerim.