LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Lineer Dönüşümlere Giriş

Bu bölümde, $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir vektörü, $\mathbb{R}^m$ uzayında bir vektöre dönüştüren özel dönüşümleri inceleyeceğiz. Bu dönüşümler, Öklidiyen ve Afin dönüşümlerin tanımlanması açısından önemlidir. Bir dönüşüm vektörün uzunluğunu değiştirebilir. Uzunluğu değiştirmeyen lineer dönüşümlere **Öklidiyen dönüşüm** denir.

Lineer dönüşümler, mühendislerin ve fizikçilerin sıkça kullandığı dönüşümlerdir ve matrislerle ifade edilebilmesinden dolayı kullanılması oldukça pratik dönüşümlerdir. Özellikle son yıllarda bilgisayar teknolojisinin de gelişmesiyle birlikte, hareket ifade eden lineer dönüşümler, bilgisayar grafikleri, makine hareketleri, animasyon ve robot teknolojisinde çok sık kullanılmaktadır. Bu dönüşümlerle ilgili uygulamalara sonraki bölümlerde yer vereceğiz. Öncelikle lineer dönüşümün tanımını yapalım.

Lineer Dönüşüm

Tanım

$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ vektör uzayları olmak üzere, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ dönüşümü, her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için,

$$T(\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\overrightarrow{\mathbf{v}}) = T(\overrightarrow{\mathbf{u}}) + cT(\overrightarrow{\mathbf{v}})$$

koşulunu sağlıyorsa, T'ye $\mathbb{V}$ uzayından, $\mathbb{W}$ uzayına bir **lineer dönüşüm** denir.
Bu kısımda, genel olarak $\mathbb{R}^n$ vektör uzayından, $\mathbb{R}^m$ vektör uzayına lineer dönüşümler üzerinde durulacaktır.
Özel olarak, $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}^n$ uzayına bir lineer dönüşüme **lineer operatör**,
$\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$'ye giden lineeer dönüşüme de **lineer fonksiyonel** denir.

Örnek

Aşağıdaki dönüşümlerin lineer dönüşüm olup olmadıklarını belirtiniz.

a) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{T}(x,y,z) = (x+y, x+z)$

b) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{T}(x,y) = (x,1,y)$

c) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{T}(x,y,z) = (x+y, xz)$

d) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{T}(x,y,z) = (1,1,1)$

e) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{T}(x,y,z) = (0,0,0)$

Örnek

$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü için,

$$\mathbf{T}(1,2,3)=(3,2) \text{ ve } \mathbf{T}(3,4,1)=(5,6)$$

olarak veriliyor. Buna göre, $\mathbf{T}(6,10,10)$'un görüntüsünü bulunuz.

Problem

$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü için, $T(1,1) = (1,2,3)$ ve $T(3,4) = (0,1,1)$ ise $T(3,5)$'yi bulunuz.

Örnek

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü için, $T(1,0,1) = (1,2)$, $T(1,2,3) = (3,2)$ ve $T(3,4,1) = (5,6)$ olarak veriliyor. Bu dönüşümü bulunuz.

Problem

$T(1,1) = (3,0,4)$ ve $T(2,1) = (5,1,5)$ eşitliklerini sağlayan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünü bulunuz.

Problem

$T(1,1,1) = (4,0,5)$, $T(1,0,1) = (3,1,2)$ *ve* $T(0,1,1) = (2,-1,4)$ *eşitliklerini sağlayan* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *lineer dönüşümünü bulunuz.*

Lineer Dönüşüm Sıfırı Sıfıra Götürür

Teorem

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *bir lineer dönüşüm ise*

$$T(\mathbf{0}) = 0\prime$$

dır.

Kanıt.

Lineer dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}) &= T(\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{u}}) \\ &= T(\overrightarrow{\mathbf{u}}) - T(\overrightarrow{\mathbf{u}}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

olur. □

Lineer Dönüşüme Karşılık Gelen Matris

Tanım

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ise, her $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ için,
$T(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m)$ ve

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde $m \times n$ türünden, reel sayı girdili bir

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ matrisi vardır.

Lineer Dönüşüme Karşılık Gelen Matris ve Dönüşümün Rankı

Tanım

Buna göre, T lineer dönüşümünü, vektörleri kolon olarak göstererek,

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki A matrisine, T **lineer dönüşümüne karşılık gelen standart matris** denir. A matrisi, uzayın standart tabanına göre yazıldığı için, standart matris denilir. Bir uzayın farklı tabanları seçilerek, bu $m \times n$ türünden matrisi, farklı şekilde bulabiliriz. Bunu daha sonra göreceğiz. T dönüşümüne karşılık gelen matrisin rankına, T **lineer dönüşümünün rankı** denir. **Rank**(T) ile gösterilir.

Örnek

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, y-2x, x+3y)$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz. $T(2,3)$'ün değerini bu matrisi kullanarak bulunuz.

Problem

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ T(x,y,z)=(x+3y+z,y-2x-z)$ *lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.*

Problem

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z) = (x+3y, 4y-2x)$ *lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.*

A bir Matris Olmak Üzere T(x)=Ax Bir Lineer Dönüşümdür

Teorem

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *reel sayı girdili bir matris olmak üzere,*

$$T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\overrightarrow{\mathbf{x}}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm daima bir lineer dönüşümdür.

Kanıt.

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{y}}) &= A(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{y}}) \\ &= A\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda A\overrightarrow{\mathbf{y}} \\ &= T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) + \lambda T(\overrightarrow{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

olduğundan, T lineerdir. □

Lineer Dönüşümlerin Biileşkesi de Lineerdir

Teorem

$T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineer dönüşümler olmak üzere,

$$T = T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

dönüşümü de lineerdir.

Kanıt.

T_1 ve T_2 lineer dönüşümler olduğundan, A_1 ve A_2 standart matrisleri olmak üzere, Her $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ için, $T_1\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = A_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ için, $T_2\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = A_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}$ yazılabilir. Buradan, her $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ için

$$T\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = T_2\left(T_1\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)\right) = T_2\left(A_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = A_2 A_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

olur. $A_2 A_1$ çarpımı da, reel girdili bir matris olduğundan, T dönüşümü de lineerdir. □

Örnek

$\mathbf{T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2}$, $\mathbf{T_1\left(x, y, z\right) = \left(x + y, x - z\right)}$ **ve** $\mathbf{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3}$, $\mathbf{T_2\left(x, y\right) = \left(2x, x - y, 3y\right)}$ **lineer dönüşümleri veriliyor.** $\mathbf{T_1 \circ T_2}$ **ve** $\mathbf{T_2 \circ T_1}$ **dönüşümlerini bulunuz.**

Problem

$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y, z) = (x + y, x - z)$ *ve* $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T_2(x, y) = (2x + 3y)$ *lineer dönüşümleri veriliyor.* $T_2 \circ T_1$ *dönüşümünü bulunuz*

Lineer Dönüşümlerin Lineer Biileșimi de Lineerdir

Teorem

$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ve $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ iki lineer dönüşüm olsun. Buna göre, $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $S+aT$ ve $S-aT$ dönüşümleri de lineerdir.

Kanıt.

Her $\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}}\in\mathbb{R}^n$ ve $c\in\mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}(S\pm aT)(\overrightarrow{\mathbf{u}}+c\overrightarrow{\mathbf{v}}) &= S(\overrightarrow{\mathbf{u}}+c\overrightarrow{\mathbf{v}})\pm aT(\overrightarrow{\mathbf{u}}+c\overrightarrow{\mathbf{v}})\\ &= S(\overrightarrow{\mathbf{u}})+cS(\overrightarrow{\mathbf{v}})\pm aT(\overrightarrow{\mathbf{u}})\pm acT(\overrightarrow{\mathbf{v}})\\ &= S(\overrightarrow{\mathbf{u}})\pm aT(\overrightarrow{\mathbf{u}})+c\left(S(\overrightarrow{\mathbf{v}})\pm aT(\overrightarrow{\mathbf{v}})\right)\\ &= (S\pm aT)(\overrightarrow{\mathbf{u}})+c(S\pm aT)(\overrightarrow{\mathbf{v}})\end{aligned}$$

olduğundan, $S+aT$ ve $S-aT$ dönüşümleri de lineerdir. □

Lineer Dönüşüm Örnekleri

Dik İzdüşüm Dönüşümü

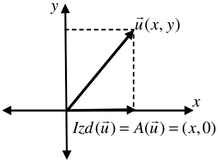
1. Dik İzdüşüm Dönüşümü : $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bir noktanın (ya da konum vektörünün), x eksenine dik izdüşümünü veren dönüşüm ve bu dönüşümün matrisi :

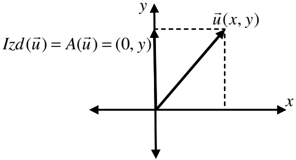
$$\text{Izd}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \text{Izd}_x(x, y) = (x, 0) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde, y eksenine dik izdüşümünü veren dönüşüm ve bu dönüşümün matrisi ise,

$$\text{Izd}_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \text{Izd}_y(x, y) = (0, y) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir.





Düzlemde Dik İzdüşüm Dönüşümü

Teorem

$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (x, y)$ vektörünün, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir altuzayı olan, $Ax + By = 0$ doğrusuna dik izdüşümünü veren lineer dönüşümün standart matrisi

$$T = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} B^2 & -AB \\ -AB & A^2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

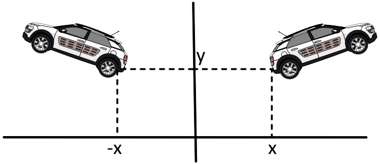
Örnek

Düzlemde verilen P $(2,3)$ noktası, $3x+4y=0$ doğrusunun hangi noktasına en yakındır?

2. Yansıma - Simetri Dönüşümü

2. Yansıma - Simetri Dönüşümü : Düzlemde verilen herhangi bir noktanın, bir doğruya göre simetriği olan noktaya yansıma noktası, verilen bir noktanın bu doğruya göre simetriği veren lineer dönüşüme **doğruya göre yansıma dönüşümü,** bu yansıma dönüşümüne karşılık gelen standart matrise de **yansıma matrisi** denir. Aşağıda farklı doğrular için yansıma dönüşümleri ve standart matrisleri verilmiştir. Yansıma matrisleri, determinantı -1 olan ortogonal matrislerdir.

y eksenine göre yansıma :



Düzlemde bir $P(x, y)$ noktasının,
y eksenine göre simetriğini veren yansıma dönüşümünü,

$$\begin{gathered}\mathrm{Sim}_{y=0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ \mathrm{Sim}_{y=0}(x, y) = (-x, y)\end{gathered}$$

ile verebiliriz. Bu dönüşüm lineerdir ve standart matrisi :

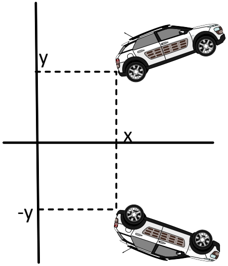
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

x eksenine göre yansıma :

Düzlemde bir $P(x, y)$
noktasının, x eksenine göre simetriğini veren yansıma dönüşümünü,

$$\begin{gathered}\mathrm{Sim}_{x=0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \mathrm{Sim}_{y=0}(x, y) = (x, -y)\end{gathered}$$

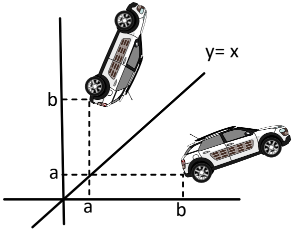


ile verebiliriz. Bu dönüşüm lineerdir ve standart matrisi :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

y=x eksenine göre yansıma :



Düzlemde bir $P\left(x, y\right)$ noktasının,
$y = x$ doğrusuna göre simetriğini veren yansıma dönüşümünü,

$$\begin{aligned}\text{Sim}_{x=0} &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \text{Sim}_{y=x}\left(x, y\right) &= \left(y, x\right)\end{aligned}$$

ile verebiliriz. Bu dönüşüm lineerdir ve standart matrisi :

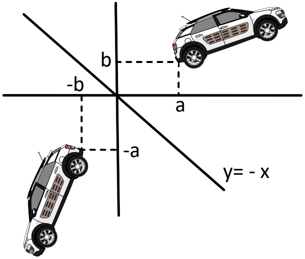
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

y=-x eksenine göre yansıma :

Düzlemde bir $P\left(x,y\right)$ noktasının,
$y=-x$ doğrusuna göre simetriğini veren yansıma dönüşümünü,

$$\begin{gathered}\mathrm{Sim}_{x=0}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\\ \mathrm{Sim}_{y=x}\left(x,y\right)=\left(-y,-x\right)\end{gathered}$$



ile verebiliriz. Bu dönüşüm lineerdir ve standart matrisi :

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

ile verilir.

Düzlemde Yansıma Dönüşümü

Teorem

$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen herhangi bir $P(x, y)$ noktasının, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir altuzayı olan,

$$d : y = mx$$

doğrusuna göre simetriğini veren lineer dönüşümün standart matrisi

$$T = \frac{1}{m^2+1}\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

3. Dönme Dönüşümü : Düzlemde verilen bir $P(x, y)$ noktasının, orjin etrafında döndürülmesi bir lineer dönüşümdür. Bu lineer dönüşüme, P noktasının **dönme hareketi (dönüşümü),** bu dönüşüme karşılık gelen matrise de **dönme matrisi** denir. Aşağıda da göreceğimiz gibi, dönme matrisleri, determinantı $+1$ olan ortogonal matrislerdir. Herhangi bir $P(x, y)$ noktasını orjin etrafında, θ açısı kadar döndüren dönüşümü:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ile göstereceğiz. Şimdi, $\overrightarrow{OP}$ vektörünü $\overrightarrow{\mathbf{u}}(x, y)$ ile gösterelim ve θ'ya bağlı olarak R_θ dönüşümünü bulalım.

Düzlemde Dönme Dönüşümü

Teorem

Düzlemde verilen bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}\,(x, y)$ vektörünü, orjin etrafında θ açısı kadar, saat yönünün tersine döndürüren dönme dönüşümü

$$R_{\theta}\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = R_{\theta}(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

ile veya bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir.

Örnek

$P(3,\sqrt{3})$ noktası 60° döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

Çözüm

Dönme yönü belirtilmediğinden, dönmeyi saat yönünün tersine yapacağız.

$$R_\theta(3,\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde, dönme sonrasında yeni koordinatlar $P'\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ *olur.*

Yamultma (Shear) Dönüşümü

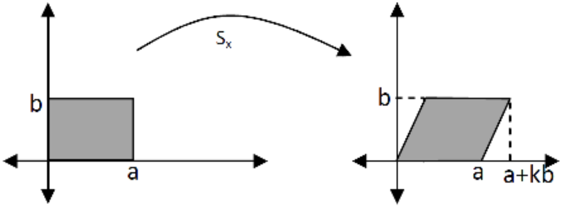
4. Yamultma (Shear) Dönüşümü : Düzlemde bir noktanın, bir koordinatını sabit bırakırken, diğer koordinatını sabit kalan koordinatın bir katı kadar değiştiren dönüşüme (shear) **yamultma dönüşümü** denir. Burada yapılan cismin bir koordinatının belirli bir yöne doğru belirli bir oranda arttırılmasıdır. Mesela aşağıdaki şekilde x doğrultusunda bir yamultma dönüşümü, koordinatın apsisinin, y'nin bir katı ölçüsünde arttırılmasından ibarettir.cDüzlemde, x ekseni doğrultusundaki k gücündeki yamultma dönüşümü,

$$S_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, S_x(x, y) = (x + ky, y)$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki şekilde pozitif bir k değeri için, dönmenin şekli nasıl değiştirdiği görülmektedir. Bu dönüşümün de lineer olduğu açıktır ve

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

standart matrisiyle ifade edilebilir.



Benzer şekilde, y ekseni doğrultusundaki k gücündeki yamultma dönüşümü,

$$S_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, S_y(x, y) = (x, y + kx)$$

şeklinde tanımlanır ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ standart matrisiyle ifade edilebilir.

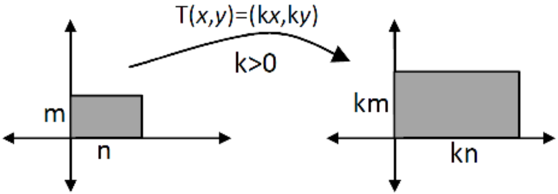
5. Küçültme ve Büyültme Dönüşümü : Bir vektörün doğrultusunu değiştirmeden, vektörün uzunluğunu büyülten veya küçülten dönüşümlere **küçültme veya büyütme dönüşümleri** denir. Bir vektörün uzunluğunu k katı küçülten veya büyülten bir dönüşüm

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (kx, ky)$$

şeklinde ifade edilir. Bu dönüşümün de lineer olduğu açıktır ve

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

standart matrisiyle ifade edilebilir. $k > 0$ için, şekil büyür, $k < 0$ için ise küçülür.



Öteleme dönüşümü lineer değildir :

Not : Öteleme dönüşümü lineer değildir : Düzlemde verilen herhangi bir noktanın, başka bir noktaya taşınmasına, **noktanın ötelenmesi** denir. Bir $P(x, y)$ noktasını, $P'(x+a, y+b)$ noktasına taşımak, P noktasını x ekseninde a birim, y ekseninde de b birim ötelemek demektir. Bu öteleme hareketini,

$$T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_{(a,b)}(x, y) = (x+a, y+b)$$

dönüşümüyle tanımlayabiliriz. Öteleme dönüşümü, uzaklığı, açıyı ve alanı değiştirmeyen bir Öklidiyen dönüşümdür. Öteleme dönüşümü lineer bir dönüşüm değildir ve bu dönüşümü 2×2 türünden bir matris yardımıyla ifade edemeyiz. Fakat, bu dönüşümü $\mathbb{R}^3$ uzayından $\mathbb{R}^3$ uzayına, üçüncü bileşeni sabit olan bir lineer dönüşüm gibi yazmak mümkündür. Gerçekten,

$$T_{(a,b)} : \mathbb{R}^3 \times \{1\} \to \mathbb{R}^3 \times \{1\}, \quad T_{(a,b)}(x, y, 1) = (x+a, y+b, 1)$$

biçiminde yazılırsa, $T(a, b, 1)$ bir lineer dönüşüm olur ve bu dönüşümün matrisini de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Yani, üçüncü değişken yerine 1 aldık.

Bir Dönüşümün Çekirdeği, Görüntüsü, Sıfırlığı, Rankı

Tanım

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olsun. $\mathbb{W}$ uzayının sıfırını "$\vec{\mathbf{0}}$" ile gösterelim. T dönüşümü altında, görüntüsü, $\mathbb{W}$ uzayının sıfırı olan, $\mathbb{V}$ uzayının vektörlerine T **dönüşümünün çekirdeği** denir ve **Çek**(T) (veya **Ker**(T)) ile gösterilir. Yani,

$$\textbf{Çek}\,(T) = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \; : T(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}} \right\}.$$

Ayrıca,

$$\textbf{Gör}\,(T) = \{ \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{W} \; : T(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{w}}, \;\; \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \}$$

kümesine de, **lineer dönüşümün görüntü kümesi** denir. **Çek**(T) ve **Gør**(T)'nin birer altuzay olduğunu aşağıdaki teoremde göstereceğiz.

Bir Dönüşümün Sıfırlığı, Rankı

Tanım

Bir T dönüşümünün çekirdeğinin boyutuna, T **dönüşümünün sıfırlığı (nullity)** denir ve **Sıfırlık**(T) ile gösterilir. Yani,

$$\mathbf{S\imath f\imath rl\imath k}\,(T) = \mathbf{Boy}\,(\text{Çek}\,(T))$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, **Gör**(T) uzayının boyutu da, T dönüşümünün rankına eşittir ve çoğu zaman, **Boy**(**Gör** (T)) yerine, **Rank**(T) denilir.

Örnek

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + z - 3y, y + z)$ lineer dönüşümünün çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

Problem

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z)=(x-y,x+z)$ *dönüşümünün çekirdeğini ve görüntüsünü bulunuz.*

Problem

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z, y)$ *dönüşümünün çekirdeğini ve görüntüsünü bulunuz.*

SORU

Aşağıdakilerden kaç tanesi lineer dönüşümdür?

I. $T(x,y,z) = (2x+y, x-z, x+y+z)$

II. $T(x,y,z) = (2x+y, x, 2)$

III. $T(x,y,z) = (x+y, x, x^2+z)$

IV. $T(x,y,z) = e^{\pi}x+y+z$

V. $T(x,y,z) = (x, (\sin 3)\,y, e^2 z+y)$

VI. $T(x,y,z) = (2x+y, x, xz)$

VII. $T(x,y,z) = (x+y, x, x+z+1)$

VIII. $T(x,y,z) = (2x+y, 0, x)$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ile verilen,

$$T(x,y,z) = \left(2x+y+m-2,\, x-z,\, nx^2+y\right)$$

dönüşümü bir lineer dönüşüm ise $m+n$ kaçtır?

A) 6 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$T(x,y,z) = (2x+y, x-z, x+y+z)$ lineer dönüşümünün matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$T:\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü için, $T(1,1,2)=(1,3)$ ve $T(2,1,3)=(4,2)$ ise $T(1,2,3)=?$

A) $(7,11)$ **B)** $(-1,7)$ **C)** $(-5,5)$ **D)** $(-2,4)$ **E)** $(4,-2)$

SORU

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü için,

$$T(1,1) = (1,0,1), \qquad T(2,1) = (4,2,1)$$

ise $T(1,0) = ?$

A) $(7,2,-2)$ **B)** $(3,2,-2)$ **C)** $(3,2,0)$ **D)** $(4,2,-1)$ **E)** $(1,2,-2)$

SORU

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü için,

$$T(1,1) = (3,1) \text{ ve } T(2,3) = (1,1)$$

olacak şekilde bir tanımlanan lineer dönüşümün standart tabana göre matrisinin determinantı kaçtır?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z) = (x+y, x+z)$ ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x+y, x+2y)$ olmak üzere, $T_2 \circ T_1$ lineer dönüşümünün matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

SORU

Aşağıdaki lineer dönüşümlerden hangisinin görüntü uzayı $\mathbb{R}^2$ değildir?

A) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x + y, z)$
B) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x + y, x - y)$
C) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x + y, x + y)$
D) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (y, x)$
E) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z, t) = (x, y)$

SORU

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü veriliyor. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ standart taban olmak üzere,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1,0,1), \\ T(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) &= (2,3,4), \\ T(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) &= (3,4,5) \end{aligned}$$

ise, $T(\mathbf{e}_3)$ hangisidir?

A) $(3,1,3)$ B) $(3,2,3)$ C) $(3,1,2)$ D) $(3,0,3)$ E) $(2,3,3)$

SORU

$T(x,y,z) = (x+2y, y-z)$ lineer dönüşümünün çekirdeği hangisidir?

A) $\{(-2,1,1),(0,0,0)\}$ B) $\{(0,0,0)\}$ C) $\{(2k,k,k) : k \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(k,2k,k) : k \in \mathbb{R}\}$ E) $\{(-2k,k,k) : k \in \mathbb{R}\}$

SORU

Aşağıdaki dönüşümlerden kaç tanesinin çekirdeğinin boyutu 2'dir?

I. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y, 2x+2y)$

II. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$

III. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$

IV. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, 2x+2y, x)$

V $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, z, 0)$

A) 3 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

Aşağıdaki dönüşümlerden kaç tanesinin çekirdeğinin boyutu 1'dir?

I. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z) = (x+y, x)$

II. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+y, x+z, z)$

III. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x+y, z, x+y+z)$

IV. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x+y, 2x+2y, x)$

V. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x+y, x, y)$

A) 3 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 1 **E)** 5

SORU

Aşağıdakilerden kaç tanesi lineer dönüşümdür.

I. Öteleme Dönüşümü

II. Orjin etrafında dönme dönüşümü

III. $y = x + 2$ doğrusuna göre simetri dönüşümü

IV. $y = 2x$ doğrusu etrafında dönme dönüşümü

V. $x = y = z$ doğrusuna göre simetri dönüşümü

VI. $x + y + z = 0$ düzlemi üzerine izdüşümü veren dönüşüm

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

Standart matrisi $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olan lineer dönüşüm aşağıdakilerden hangisidir?

A) x eksenine göre simetri dönüşümü
B) y eksenine göre simetri dönüşümü
C) xoy düzlemine göre simetri dönüşümü
D) yoz düzlemine göre simetri
E) x eksenine göre dik izdüşüm dönüşümü

SORU

Aşağıdakilerden hangisi, bir noktanın $y=-x$ doğrusu üzerindeki dik izdüşümünü veren lineer dönüşümün matrisidir?

A) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi, bir noktanın $y = -x$ doğrusuna göre simetriğini veren lineer dönüşümün matrisidir?

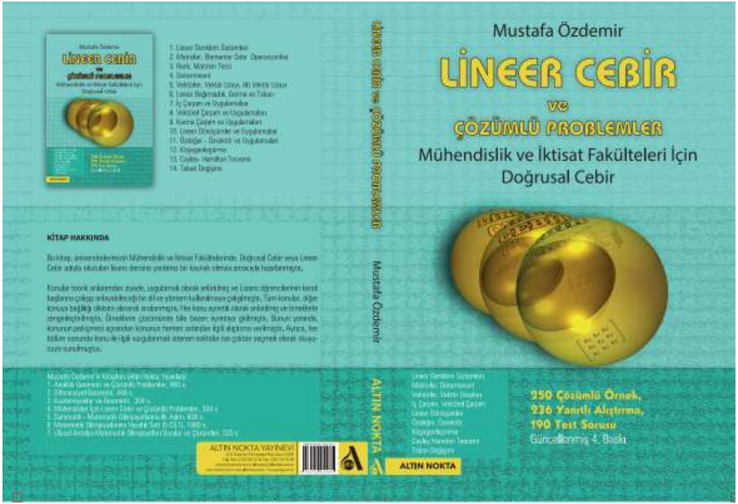
A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

SORU

$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünü, orjin etrafında 60° döndürüp, 2 katını veren lineer dönüşümün matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.



https://www.altinnokta.com.tr/tr/162_mustafa-ozdemir