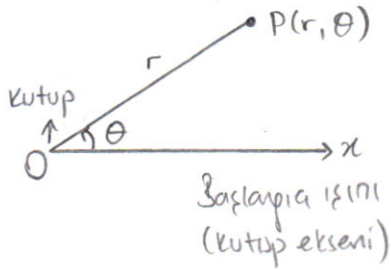


KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey dşpru ile bir yatay dşprunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir daireyle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatı tanımlamak için önce bir O orijini (buna "kutup" denir) ve bir başlangıç ışını sabitleyir. Bu durumda düzlemde bir P noktasını, (r, θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz.



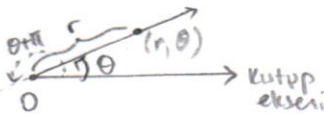
$P(r, \theta)$
 O 'den P 'ye alınan yönlü uzaklık
 Kutup ekseninden OP ye alınan yönlü açı
 $\begin{cases} \theta > 0 & \text{saat tersi yönü} \\ \theta < 0 & \text{saat yönü} \end{cases}$

* Bir noktayı temsil eden sonsuz tane kutupsal koordinat çifti vardır.

* Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

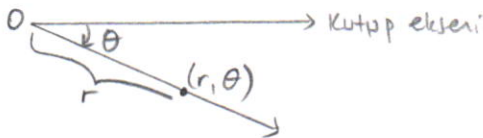
* Eğer $r < 0$ ise P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta + \pi$ açılı ışın üzerinde olup kuttuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

• $(r, \theta) : \theta > 0, r > 0$

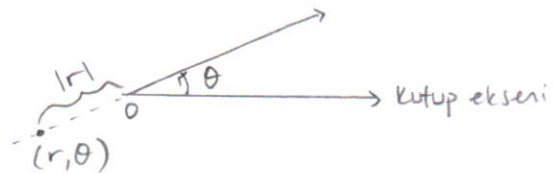


$$(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi) = \dots = (r, \theta + 2k\pi) \\ = (-r, \theta + \pi) = (-r, \theta + 3\pi) = \dots = (-r, \theta + (2k+1)\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• $(r, \theta) : \theta < 0, r > 0$

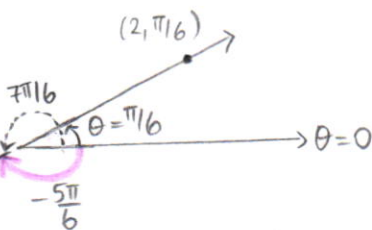


• $(r, \theta) : \theta > 0, r < 0$



Örnek: $P(2, \pi/6)$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.

$$(2, -\frac{\pi}{6}) = (2, \frac{\pi}{6}) = (-2, -\frac{5\pi}{6}) = (-2, \frac{7\pi}{6}) \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ (2, \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \quad (-2, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Kutupsal Denklemler ve Grafikleri

Denklemler

$$r=a$$

$$\theta=\theta_0$$

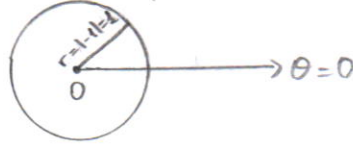
Grafikler

Merkezi O'da yarıçapı |a| olan daire

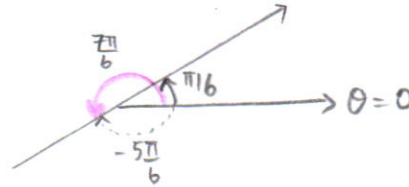
O'dan geçen ve kutup eksenini ile θ_0 açısı yapan doğru

Örnek: Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiklerini çiziniz

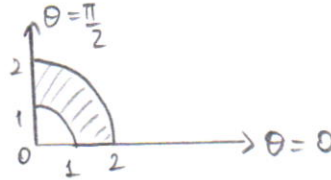
a) $r=1$ ve $r=-1$



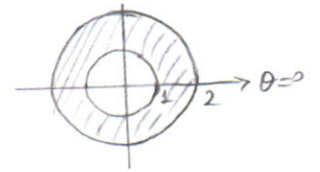
b) $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{7\pi}{6}$, $\theta=-\frac{5\pi}{6}$



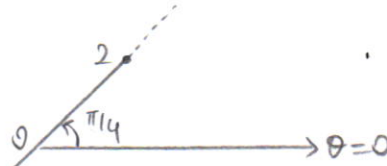
c) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



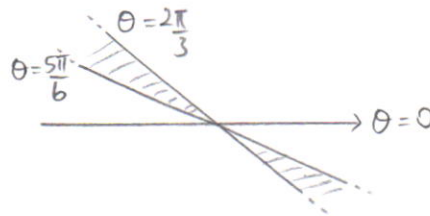
θ kısıtlaması olmasaydı:



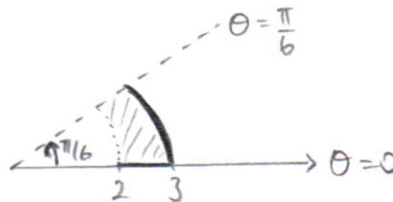
d) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta=\frac{\pi}{4}$



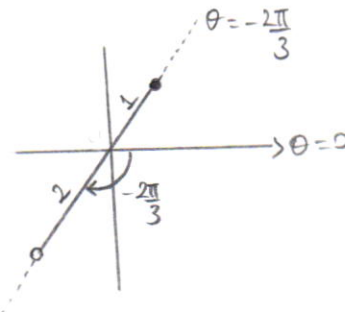
e) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



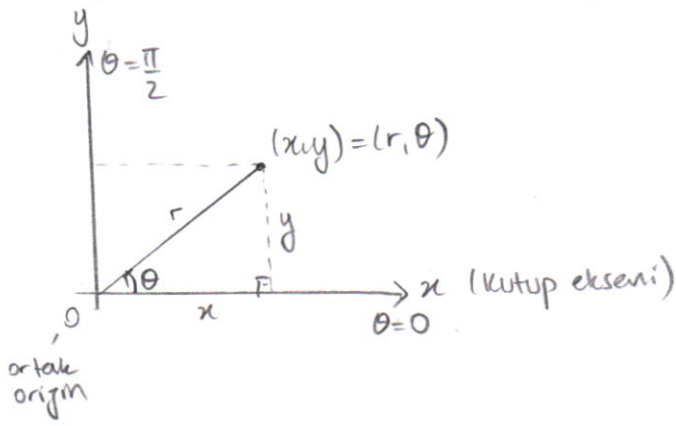
f) $2 < r \leq 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



g) $-1 \leq r < 2$, $\theta=-\frac{2\pi}{3}$



Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki



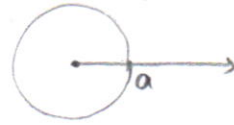
$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

Örnek: $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = a^2 \Rightarrow r = |a|$$



Örnek: $x^2 + (y-3)^2 = 9$ çemberinin kutupsal denklemini yazın.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow r^2 - 6r \sin \theta = 0 \Rightarrow r = 6 \sin \theta$$

Örnek: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ nin Kartezyen denklemini yazın.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow r^2 = a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) = \frac{a^2}{r^2} (x^2 - y^2)$$

$$(r^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

Örnek: $r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta}$ nin Kartezyen denklemini yazın.

$$r(2 \cos \theta - \sin \theta) = 4 \Rightarrow 2r \cos \theta - r \sin \theta = 4 \Rightarrow 2x - y = 4 \Rightarrow y = 2x - 4$$

Örnek: Kutupsal Denklem

$$r \cos \theta = 2$$

$$r^2 \cos \theta \sin \theta = 4$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r = 1 + 2r \cos \theta$$

$$r = 1 - \cos \theta$$

$$r = 2a \cos \theta$$

$$r = 4 \cos \theta$$

Kartezyen Denklemi

$$x = 2$$

$$xy = 4$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

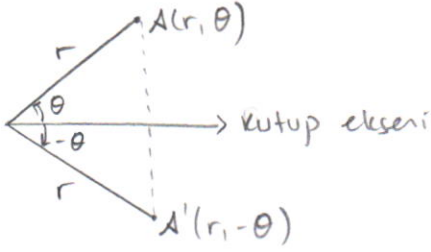
$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

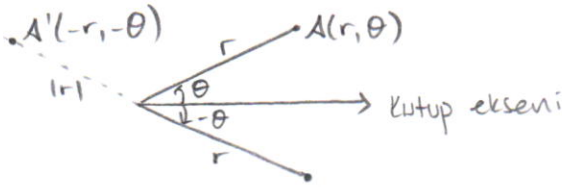
Simetri

1. simetri özelliği: $r = f(\theta)$ fonksiyonunda $\theta \rightarrow -\theta$ yazılırsa

a) $f(-\theta) = f(\theta) = r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.

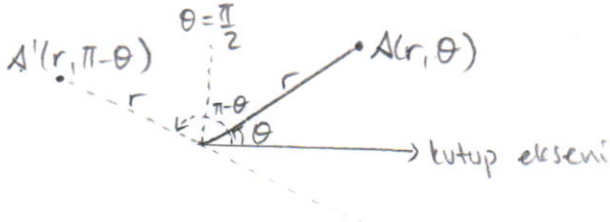


b) $f(-\theta) = -f(\theta) = -r$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.

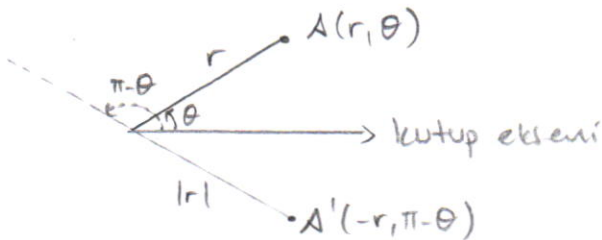


2. simetri özelliği: $r = f(\theta)$ fonksiyonunda $\theta \rightarrow \pi - \theta$ yazılırsa

a) $f(\pi - \theta) = f(\theta) = r$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



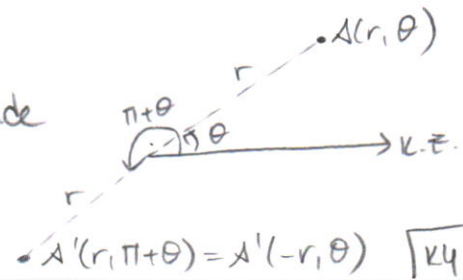
b) $f(\pi - \theta) = -f(\theta) = -r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



3. simetri özelliği:

a) $f(\pi + \theta) = f(\theta) = r$ ise orijine göre simetriktir.

b) (r, θ) eği üzerinde ilken $(-r, \theta)$ de eği üzerinde ise orijine göre simetri vardır.



$r = f(\theta)$ Eğrisinin Eğimi

$r = f(\theta)$ kutupsal eğrisi iken ;

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \end{array} \right.$$

(r, θ) noktasında $r = f(\theta)$ nin eğimi :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(r, \theta)} = \left. \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \right|_{(r, \theta)}$$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

$r = f(\theta)$ eğrisinin grafiği çizilirken ;

- 1) Eğri periyodik ise periyodu bulunur.
- 2) Simetrisi incelenip çizim aralığı belirlenir.
- 3) Türev yardımıyla $r = f(\theta)$ nin değişimi incelenir.
- 4) Bazı θ değerleri için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.
- 5) θ, r ve r' değerlerini içeren tablo yapılır.

Örnek : $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) eğrisini çizelim.

1) Periyod : $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ aralığı

2) 1-simetri? $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1 + \cos(-\theta)) = a(1 + \cos \theta) = f(\theta) = r$
 \Rightarrow Kutup eksenine göre simetrik

2-simetri? $\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = a(1 + \cos(\pi - \theta)) = a(1 - \cos \theta)$
 \Rightarrow 2-simetri "az" yok.

3-simetri? $\theta \rightarrow \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = a(1 + \cos(\pi + \theta)) = a(1 - \cos \theta)$
 \Rightarrow 3-simetri "az" yok.

İnceleme aralığı : $[0, \pi]$. (Kutup eks. göre simetrik olduğundan)

3) $r' = -a \sin \theta < 0 \Rightarrow [0, \pi]$ de azalan bir fonksiyondur.

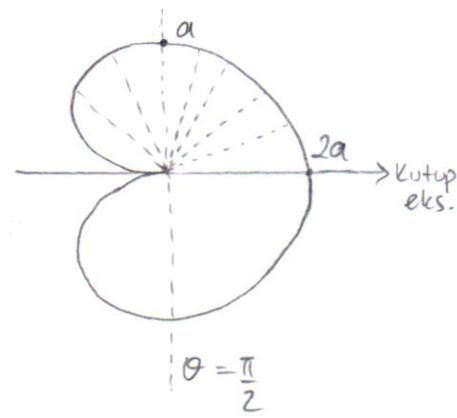
$$4) \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \quad (2a, 0)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = a \quad (a, \frac{\pi}{2})$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = 0 \quad (0, \pi)$$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	-	-	-
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



Örnek - $r = a(1 - \sin \theta)$ ekrisini çizim.

$$1) \text{Periyodu} : 2\pi \Rightarrow [0, 2\pi] \text{ aralığı}$$

$$2) \theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1 - \sin(-\theta)) = a(1 + \sin \theta) \neq f(\theta) \quad (1\text{-simetri yok})$$

$$\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = a(1 - \sin(\pi - \theta)) = a(1 - \sin \theta) = f(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 'ye göre simetrik} \quad (2\text{-simetri var})$$

$$\theta \rightarrow \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = a(1 - \sin(\pi + \theta)) = a(1 + \sin \theta) \neq f(\theta) \quad (3\text{-simetri yok})$$

$$\text{İnceleme aralığı} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 'ye göre simetrik olduğundan})$$

$$3) r' = -a \cos \theta < 0 \quad (\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

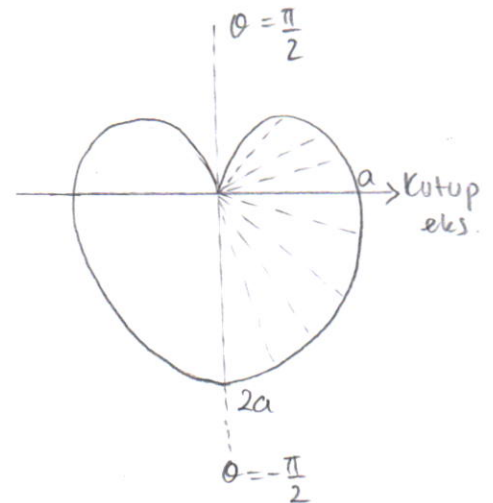
$$4) \theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$$

$$\theta = 0 \Rightarrow r = a$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$$

5)

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
r'	-	-	-
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



Örnek : $r = 1 - \cos \theta$ ekrisini çizim.

$$1) [0, 2\pi] \text{ aralığı}$$

$$2) f(-\theta) = 1 - \cos(-\theta) = 1 - \cos \theta = f(\theta) \Rightarrow \text{Kutup eks. göre simetrik} \Rightarrow [0, \pi] \text{ 'de incele}$$

$$3) r' = \sin \theta > 0 \quad (\theta \in (0, \pi)) \Rightarrow [0, \pi] \text{ de artan bir fonksiyon.}$$

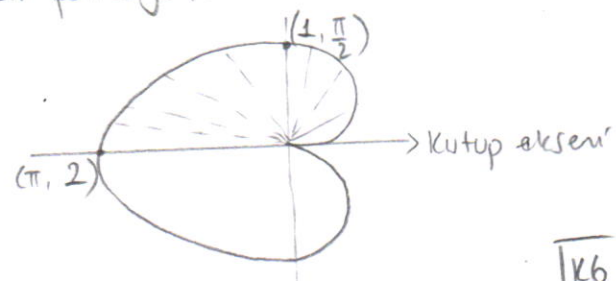
$$4) \theta = 0 \Rightarrow r = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = 2$$

5)

θ	0	$\pi/2$	π
r'	-	+	+
r	0	$\nearrow 1$	$\nearrow 2$



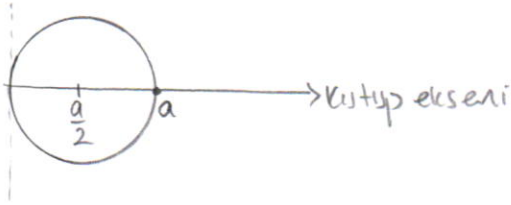
Bazı Temel Şekiller

Çemberler

- 1) $r=a = |a|$ yarıçaplı merkezli çember



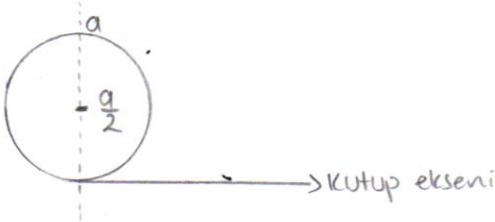
- 2) $r = a \cos \theta$: Kutup ve $(a, 0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember



$$\begin{aligned} (r = a \cos \theta \Rightarrow r^2 &= a^2 \cos^2 \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \frac{x^2}{r^2} \\ \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 &= a^2 x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = ax \\ \Rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4}) \end{aligned}$$

çemberi

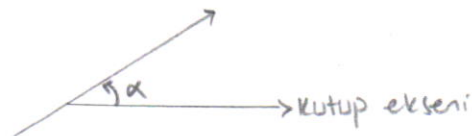
- 3) $r = a \sin \theta$: Kutup ve $(a, \frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember



$$(x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}) \text{ çemberi}$$

Dörprular

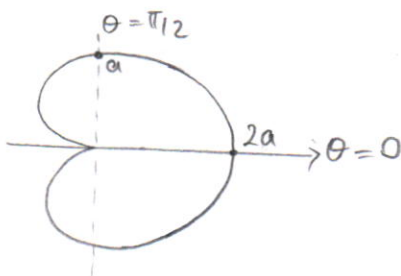
- 4) $\theta = \alpha \Rightarrow$ Eğimi α olan dörpru



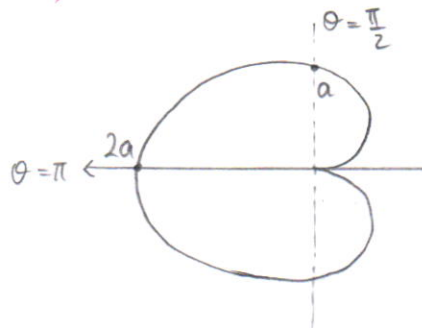
- 5) $r \cos \theta = a$ veya $r = a \sec \theta \Rightarrow x = a$ dörprusu
 $r \sin \theta = b$ veya $r = b \csc \theta \Rightarrow y = b$ dörprusu

Kardioidler

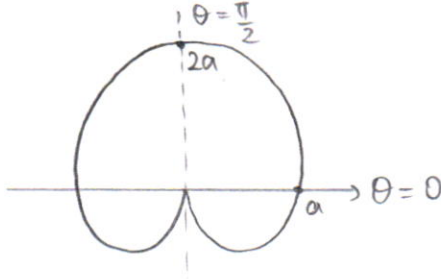
- 6) $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$)



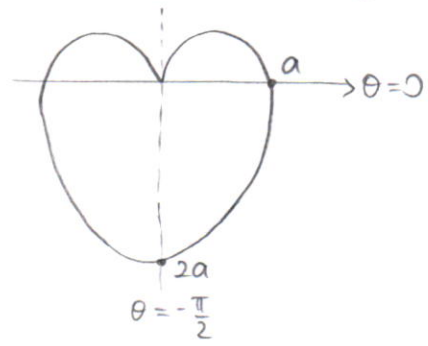
- 7) $r = a(1 - \cos \theta)$ ($a > 0$)



8) $r = a(1 + \sin \theta)$ ($a > 0$)

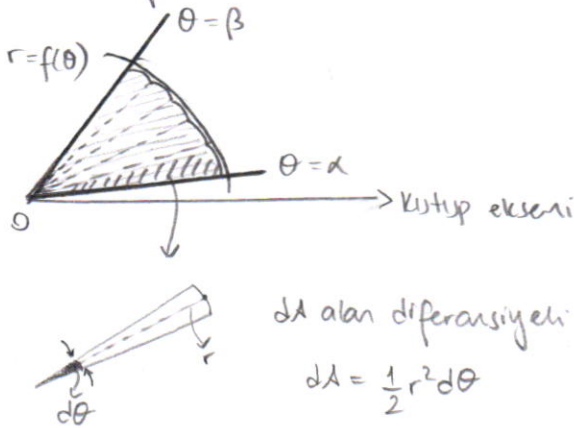


9) $r = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$)



Kutupsal Koordinatlarda Alan

$r = f(\theta)$ eğrisinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğruları ile sınırladığı bölgenin alanı:

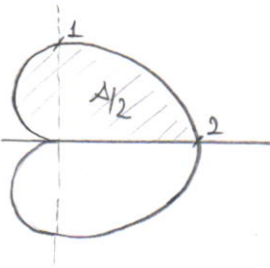


$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

(Alan diferansiyelinin integralidir)

dA alan diferansiyeli:
 $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

Örnek: $r = 1 + \cos \theta$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



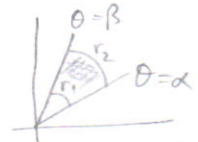
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (\theta + 2\sin \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta) = \frac{1}{2} \pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

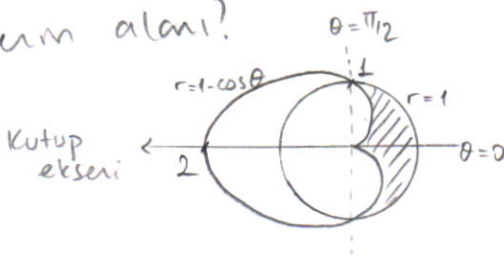
$$A = \frac{3\pi}{2}$$

*) $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r_1 = f_1(\theta)$ ve $r_2 = f_2(\theta)$ arasındaki bölgenin alanı: ($r_1 < r_2$)

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta$$



Örnek: $r = 1$ çemberinin içinde ve $r = 1 - \cos \theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanı?



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

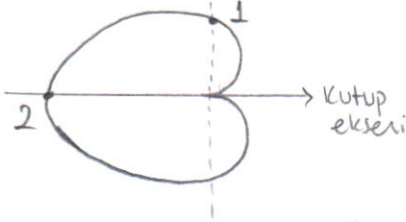
$$\Rightarrow A = 2 - \frac{\pi}{4}$$

Kutupsal Elinin Uzunluđu

$r=f(\theta)$ elinin $\theta=\alpha$ ve $\theta=\beta$ arasındaki uzunluđu:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

Örnek: $r=1-\cos\theta$ kardioidinin uzunluđunu bulunuz.



$$r=1-\cos\theta \quad r'=\sin\theta$$

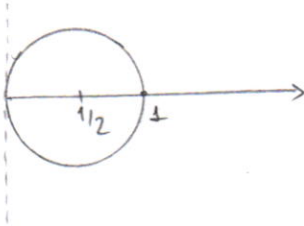
$$r^2 + (r')^2 = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$= 2 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2} d\theta = -4\cos\frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8$$

Örnek: $r=\cos\theta$ çemberinin uzunluđunu bulunuz.

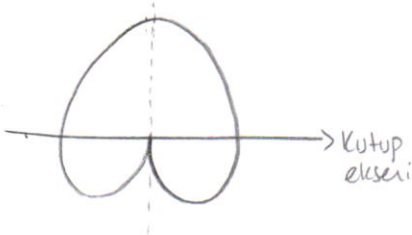


$$r=\cos\theta \quad r'=-\sin\theta$$

$$r^2 + (r')^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 1 \Rightarrow L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

Örnek: $r=1+\sin\theta$ kardioidinin uzunluđunu bulunuz.



$$r=1+\sin\theta \quad r'=\cos\theta$$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = 2(1 + \sin\theta)$$

$$= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = 2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) - 1\right)\right)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right|$$

$$\frac{L}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -4(0 - 1) = 4$$