LİNEER DÖNÜŞÜMLERDE TABAN DEĞİŞİMİ

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Lineer Dönüşümlerde Taban Değişimi

Bir vektör uzayındeki bir $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümünü, $\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ uzaylarının farklı tabanlarına göre de tanımlayabiliriz. Bu durumda, lineer dönüşümün matrisi de değişecektir. Bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün, $\mathbb{V}$ uzayının standart taban dışındaki bir başka $\mathcal{B}$ tabanına göre yazılışını $\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathcal{B}}$ olarak yazdığımızı hatırlayın. Herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörünün, T dönüşümü altındaki görüntüsünün, $\mathbb{W}$ uzayının bir $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatlarını veren dönüşümün matrisini de kolayca bulabiliriz. Bu matrisi, $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ ile göstereceğiz. Yazılışa dikkat ederseniz, görüntü uzayının tabanını **sağ altta**, tanım uzayının tabanını da **sağ üstte** gösteriyoruz. Standart tabanlar için, tabanı genelde belirtmeyiz, ama bu kısımda standart tabanı $\mathcal{E}$ kümesi ile ifade edeceğiz.

GÖSTERİMLER

Aşağıda, bazı gösterimlerin neyi ifade ettiği verilmiştir.

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer bir dönüşüm, $\mathcal{B}$, $\mathbb{V}$ uzayının, $\mathcal{S}$ ise $\mathbb{W}$ uzayının tabanı olmak üzere,

- $\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathcal{B}}$: $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörünün $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatlarını gösteren sütun matrisi
- $\left[T\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right)\right]_{\mathcal{S}}$: $T\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \in \mathbb{W}$ vektörünün $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatlarını gösteren sütun matrisi,
- $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{S}}$: $\mathbb{V}$ uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, $\mathbb{W}$ uzayının $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi
- $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$: $\mathbb{V}$ uzayının $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, $\mathbb{W}$ uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi
- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}$: $\mathbb{V}$ uzayının $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, $\mathbb{W}$ uzayının $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi

Bir Lineer Dönüşümün Tabanlara Göre Değişim Matrisi

Tanım

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n \right\}$ kümesi, $\mathbb{V}$ uzayının tabanı, $\mathcal{S} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{w}}_1, \overrightarrow{\mathbf{w}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_m \right\}$ kümesi de $\mathbb{W}$ kümesinin tabanı olsunlar. $i = 1, 2, ..., n$ için, $T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_i)$ vektörü $\mathbb{W}$ uzayında bir vektördür. Bu vektörün, $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatlarının sütun olarak yazılmasıyla elde edilen, $m \times n$ türünden matrise, T lineer dönüşümünün $\mathcal{B}$ **ve** $\mathcal{S}$ **tabanlarına göre matrisi denir** ve $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ ile gösterilir. Bu matris yardımıyla, herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörünün $\mathcal{S}$ tabanına göre bileşenlerini kolayca bulabiliriz.

Bir Lineer Dönüşümün Tabanlara Göre Değişim Matrisi

Tanım

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, kümesi, $\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ uzaylarının tabanı sırasıyla $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\}$ ve $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{\mathbf{w}}_1, \overrightarrow{\mathbf{w}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_m\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1) &= a_{11}\overrightarrow{\mathbf{w}}_1 + a_{21}\overrightarrow{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{m1}\overrightarrow{\mathbf{v}}_m \\ T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2) &= a_{12}\overrightarrow{\mathbf{w}}_1 + a_{22}\overrightarrow{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{m2}\overrightarrow{\mathbf{v}}_m \\ &\vdots \\ T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n) &= a_{1n}\overrightarrow{\mathbf{w}}_1 + a_{2n}\overrightarrow{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{mn}\overrightarrow{\mathbf{v}}_m \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisi, T lineer dönüşümünün $\mathcal{B}$ **ve** $\mathcal{S}$ **tabanlarına göre matrisidir.**

Kısa Bilgi

$\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörünün, $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatları(bileşenleri)

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathcal{B}}$$

olmak üzere, $T\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$ vektörünün $\mathbb{R}^2$ uzayının $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatları

$$\left[T(\overrightarrow{\mathbf{v}})\right]_{\mathcal{S}}$$

ile gösterilir ve

$$\left[T(\overrightarrow{\mathbf{v}})\right]_{\mathcal{S}} = [T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}\right]_{\mathcal{B}}$$

eşitliği sağlanır. Aşağıdaki örneklerle, bir lineer dönüşümün farklı tabanlara göre matrisinin nasıl bulunduğunu inceleyiniz.

Örnek

$\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y)=(3x+y,4x-2y)$ **lineer dönüşümünün,** $\mathbb{R}^2$ **nin** $\mathcal{E}=\{(1,0),(0,1)\}$**standart tabanına göre, matrisinin**

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}=[\mathbf{T}]=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{v}_1=(1,2),\overrightarrow{v}_2=(3,5)\}$ **olmak üzere,**

a) $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,** $\mathbb{R}^2$ **uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,** $[\mathbf{T}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}=[\mathbf{T}]^{\mathcal{B}}$ **matrisini bulunuz.**

b) $\mathbb{R}^2$ **uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,** $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,** $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}=[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ **matrisini bulunuz.**

c) $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,** $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,** $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ **matrisini bulunuz.**

Örnek

d) $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,** $\mathbb{R}^2$ **uzayının**

$$S = \left\{\overrightarrow{\mathbf{w}}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \overrightarrow{\mathbf{w}}_1 = (1, -\mathbf{1})\right\}$$

ortogonal tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan, $[\mathsf{T}]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ **matrisini bulunuz.**

e) $\mathbb{R}^2$ **uzayının**

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, -\mathbf{1})\}$$

ortogonal tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, $\mathbb{R}^2$ **uzayının** $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan,** $[\mathsf{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}$ **matrisini bulunuz.**

f) $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ **için, yukarıda bulduğunuz matrislerin herbirini kullanarak,** $\mathsf{T}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$ **vektörünün standart tabana göre koordinatlarını bularak, eşit olduklarını doğrulayınız.**

Örnek

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 2x - y)$ lineer dönüşümünün, $\mathbb{R}^3$ uzayının

$$\mathcal{B} = \{\vec{w}_1 = (1, 2, 1), \vec{w}_2 = (1, 1, 0), \vec{w}_3 = (1, 0, 1)\}$$

tabanına göre matrisini bulunuz.
b) $\vec{u} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ vektörünün T lineer dönüşümü altındaki görüntüsünün, $\mathbb{R}^3$ uzayının $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

Örnek

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - z)$ lineer dönüşümü ile $\mathbb{R}^3$ uzayının

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 1), \overrightarrow{v}_2 = (0, 1, 1), \overrightarrow{v}_3 = (1, 1, 0)\}$$

tabanı ve $\mathbb{R}^2$ uzayının

$$\mathcal{S} = \{\overrightarrow{w}_1 = (1, 3), \overrightarrow{w}_2 = (3, 1)\}$$

tabanı veriliyor. T dönüşümünün $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{S}$ tabanlarına göre matrisini bulunuz.
b) $\mathbb{R}^3$ uzayında, $\mathcal{B}$ tabanına göre koordinatları $\overrightarrow{v} = (1, 1, 3)$ olan vektör için, $T(\overrightarrow{v})$ vektörünün, $\mathcal{S}$ tabanına göre koordinatlarını bulunuz.
c) T dönüşümünün standart tabanlara göre matrisini yazarak, b) seçeneğindeki durumla karşılaştırınız.

Problem

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, x-y)$ *lineer dönüşümü ile* $\mathbb{R}^2$ *uzayının,* $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} = (1,2), \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} = (2,1) \right\}$ *ve* $\mathcal{S} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{w}}_{\mathbf{1}} = (1,1), \overrightarrow{\mathbf{w}}_{\mathbf{1}} = (1,-1) \right\}$ *tabanları veriliyor.*

a) $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,* $\mathbb{R}^2$ *uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,* $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}$ *matrisini bulunuz.*

b) $\mathbb{R}^2$ *uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,* $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{B}}$ *matrisini bulunuz.*

c) $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,* $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ *matrisini bulunuz.*

d) $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,* $\mathbb{R}^2$ *uzayının,* $\mathcal{S}$ *tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,* $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ *matrisini bulunuz.*

e) $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{S}$ *tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün,* $\mathbb{R}^2$ *uzayının,* $\mathcal{B}$ *tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümüm matrisi olan,* $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ *matrisini bulunuz.*

Problem

$T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+2y, 3x-y, 2x-y)$ *lineer dönüşümünün,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} = (1,2,1), \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}} = (1,1,0), \overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{3}} = (1,0,1) \right\}$ *tabanına göre matrisini bulunuz.*

Problem

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (2x+y+z, x-z)$ *lineer dönüşümü ile* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1,0,1), \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (0,1,1), \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 = (1,1,0)\}$ *tabanı ve* $\mathbb{R}^2$ *uzayının* $\mathcal{S} = \{(1,3);(3,1)\}$ *tabanı veriliyor.* T *dönüşümünün* $\mathcal{B}$ *ve* $\mathcal{S}$ *tabanlarına göre matrisini bulunuz.*

Lineer Dönüşümlerde Birebir ve Örtenlik

Tanım

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin.

$$T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1) = T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2)$$

eşitliği, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ olmasını gerektiriyorsa, T dönüşümü **birebirdir** denir. Diğer yandan,

$$\textbf{Gör}\,(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$$

ise, T dönüşümüne **örtendir** denir. Hem birebir, hem de örten dönüşüme **izomorfizm**, $\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ vektör uzaylarına da **izomorf uzaylar** denir.

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$$

şeklinde gösterilir.

Lineer Dönüşümün Birebirliği ve Çekirdeği

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümünün birebir olması için gerek ve yeter koşul

$$\textbf{Çek}\,(T) = \{0\}$$

olmasıdır.

Kanıt.

$(\Rightarrow)$: T dönüşümü birebir ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \textbf{Çek}(T)$ olsun. Bu durumda,

$$T(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0 = T\,(0)$$

eşitliğinden, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = 0$ elde edilir. Yani, $\textbf{Çek}(T) = \{0\}$'dır.
$(\Leftarrow)$: $\textbf{Çek}(T) = \{0\}$ olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ olmak üzere, $T(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = T(\overrightarrow{\mathbf{v}})$ olsun. Bu durumda, T'nin lineerliğinden, $T(\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0$ olur. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \textbf{Çek}(T)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}$ elde edilir. Bu, T dönüşümünün birebir olduğunu gösterir. □

Örnek

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ dönüşümünün örten olduğunu, ama birebir olmadığını gösteriniz.

Örnek

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x, x-y)$ dönüşümünün birebir olduğunu, fakat örten olmadığını kanıtlayınız.

Problem

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y, x+z, 2x-y+z)$ *dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.*

Problem

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y, x+z, z)$ *dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.*

Problem

$T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z)=(x+2y,x+2z)$ *dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.*

Görüntü Uzayının Tabanı

Teorem

$T:\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{W}$ lineer dönüşümü birebir ve $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1,\overrightarrow{\mathbf{v}}_2,...,\overrightarrow{\mathbf{v}}_n\}$ kümesi, $\mathbb{V}$ uzayının bir tabanı ise,

$$\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1),T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2),...,T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\}$$

kümesi de, $\mathbf{Gör}(\mathbb{V})$ görüntü uzayının bir tabanıdır.

Kanıt.

$\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\}$ vektör kümesinin, lineer bağımsız olduğunu ve **Gör**$(\mathbb{V})$'yi gerdiğini göstermeliyiz.

i) Önce, $\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu görelim. Bu kümenin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$$\lambda T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1) + \lambda T_2(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2) + \cdots \lambda_n T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n) = 0 = T\,(0)$$

eşitliğinde $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. T lineer ve birebir olduğundan

$$T\left(\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\right) = T\,(0) \Leftrightarrow \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n = 0$$

elde edilir. S vektör kümesi lineer bağımsız vektör kümesi olduğundan, bu eşitlik sadece $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$durumunda sağlanır. O halde, $\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\}$ kümesi de lineer bağımsızdır. $\square$

Kanıt.

ii) Şimdi de, **Gör**$(T) = Sp\left\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\right\}$ olduğunu gösterelim.
$\overrightarrow{\mathbf{w}} \in$ **Gør** (T) olsun. Buna göre, $T(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{w}}$ olacak şekilde bir $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ daima vardır.

$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\right\}$$

kümesi, $\mathbb{V}$ kümesinin bir tabanı ise, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + c_n\overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Bu durumda, T'nin lineerliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{\mathbf{v}}) &= T(c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + c_n\overrightarrow{\mathbf{v}}_n) \\ \overrightarrow{\mathbf{w}} &= c_1T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1) + c_2T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2) + \cdots + c_nT(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n) \end{aligned}$$

olur ve $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in Sp\left\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\right\}$ elde edilir.
Sonuç olarak, $\left\{T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1), T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2), ..., T(\overrightarrow{\mathbf{v}}_n)\right\}$ kümesi, **Gör**$(\mathbb{V})$ görüntü uzayının bir tabanıdır. □

Aynı Boyutlu Uzaylar Arasındaki Lineer Dönüşümde Birebirlik ve Örtenlik

Teorem

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda, Sıfırlık(T) +Rank$(T) =$ Boy $(\mathbb{V})$ eşitliği sağlanır. Yani, bir T dönüşümünde, görüntü uzayının boyutu ile çekirdeğin boyutunun toplamı, tanım uzayının boyutuna eşittir.

Teorem

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. Boy$(\mathbb{V}) =$Boy$(\mathbb{W}) = n$ olsun.
a) *T birebir ise örtendir.* **b)** *T örten ise birebirdir.*

Kanıt.

a) T dönüşümü birebir olsun. O halde, Çek(T)=$\{0\}$'dır. Yani, Boy(Çek (T))=0 olur. Bu durumda, Boy$(R(T)) = n$ olacağından, **Gør** $(T) = \mathbb{W}$ olur ki, bu T dönüşümünün örten olması demektir.
b) T dönüşümü örten olsun. Bu durumda, Boy(**Gør** (T))=n olacağından, Boy(Çek (T))=0 olmalıdır. Bu, T dönüşümünün birebir olduğunu gösterir. □

Tersinir Dönüşüm

Tanım

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. I birim dönüşümü göstermek üzere, eğer, $T \circ T^{-1} = I$ ve $T^{-1} \circ T = I$ olacak şekilde bir tek

$$T^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$$

dönüşümü varsa, T dönüşümüne **tersinirdir** denir.

Lineer Dönüşümün Tersi

Teorem

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümü birebir ise, $T^{-1} : \textbf{Gör}(T) \to \mathbb{V}$ dönüşümü tanımlıdır ve T^{-1} dönüşümü de lineer dönüşümdür.

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{w}}_1, \overrightarrow{\mathbf{w}}_2 \in Gör\,(T)$ olsun. Bu durumda, $T^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{w}}_1) = \overrightarrow{\mathbf{v}_1}$ ve $T^{-1}(\overrightarrow{\mathbf{w}}_w) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ olacak şekilde bir $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{V}$ vardır. Buna göre,

$$T\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1\right) = \overrightarrow{\mathbf{w}}_1,\; T\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) = \overrightarrow{\mathbf{w}}_2$$

ve T'nin lineerliğinden, $T\left(\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{w}}_2$ ve $T\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) = \overrightarrow{\mathbf{w}}_1 + \lambda \overrightarrow{\mathbf{w}}_2$ yazılabilir. Buradan,

$$T^{-1}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}_1 + \lambda \overrightarrow{\mathbf{w}}_2\right) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = T^{-1}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}_1\right) + \lambda T^{-1}\left(\overrightarrow{\mathbf{w}}_2\right)$$

olduğundan, T^{-1} dönüşümü de lineerdir. $\square$

Lineer Dönüşümlerin Bileşkesi

Teorem

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ ve $\mathbb{U}$ reel vektör uzayları olmak üzere,

$$T_1 : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \qquad ve \qquad T_2 : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$$

liner dönüşümleri birebir ise,

$$T_2 \circ T_1 : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$$

dönüşümü de lineerdir ve

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$$

eşitliği sağlanır.

Lineer Dönüşümün Tersinirliği

Teorem

Bir $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *lineer dönüşümün tersinir olması için gerek ve yeter koşul*

$$\textbf{Çek}\,(T) = \{0\} \qquad \textit{ve} \qquad \textbf{Gør}\,(T) = \mathbb{W}$$

olmasıdır.

Lineer Dönüşümün Tersinin Tersi

Teorem

T bir tersinir lineer dönüşüm ise, T^{-1} dönüşümü de lineerdir ve $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$ eşitliği sağlanır.

Sonuçlar : $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü verilsin.

i) $m < n$ ise, T dönüşümü kesinlikle örten değildir.

ii) $m > n$ ise, T dönüşümü kesinlikle birebir değildir.

iii) $m = n$ ise, T örtense, birebir'dir.

iv) $m = n$ ise T birebir ise, örtendir.

v) $m = n$ ise ve T birebir ise, T dönüşümünün tersi vardır.

vi) T lineer dönüşümünün tersi olması için, T'ye karşılık gelen standart matris tersinir olmalıdır.

Örnek

$T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$ lineer dönüşümünün tersini bulunuz.

Bölüm Sonu Tekrar Testi (Lineer Dönüşümler ve Uygulamaları)

SORU

$T(x,y)=(x+y,x-y)$ lineer dönüşümünün $\mathcal{B}=\{(1,2);(1,1)\}$ tabanına göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

SORU

$T(x,y) = (x+y, x-y, x)$ lineer dönüşümünün $\mathcal{B} = \{(1,2);(1,1)\}$ tabanına göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

SORU

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, aşağıdakilerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. $T(\vec{0}) = \vec{0}$

II. T örten olamaz

III. T birebir olabilir.

IV. $\text{Rank}\, T < 3$'tür.

V. $\text{Sıfırlık}(T) \leq 2$'dir.

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x + 2y, x)$ olmak üzere, $T = T_1 \circ T_2$ lineer dönüşümü için aşağıdakilerden kaçı doğrudur?

I. $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ II. Tersinirdir.

III. $\text{Rank}(T_2 \circ T_1) = 2$ IV. $\text{Çek}\, T = \{\vec{0}\}$.

V. T lineer dönüşümü birebir, örtendir.

A) 0 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 4

SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y, x+z)$ ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$T(x,y) = (x+y, x+2y, x)$ olmak üzere, $T = T_2 \circ T_1$ lineer dönüşümü için aşağıdakilerden kaçı doğrudur?

I. $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ II. Tersinirdir.
III. $\text{Rank}(T_2 \circ T_1) = 2$.   IV. $\text{Çek}\, T = \{\vec{0}\}$.

A) 0   **B)** 3   **C)** 2   **D)** 1   **E)** 4

SORU

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\left(x, y, z\right) = \left(2x + y, x - z, 3x + ky - z\right)$$

dönüşümü aşağıdaki k değerlerinden hangisi için birebir değildir?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

SORU

$T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ (n < m)$ ve $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \ (m < k)$ lineer dönüşümleri verilsin. Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü de lineerdir.

II. $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$'dir.

III. $T_1 \circ T_2$ tanımlı değildir.

IV. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü daima örtendir.

V. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü birebir olamaz.

VI. $Rank\,(T_2 \circ T_1) \geq m$ dir.

A) 4 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 0

SORU

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = (2x + y, x - z, 3x + 4y + kz)$$

dönüşümü tersinir ise k aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 4 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

SORU

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + z, kx + 2y - z)$$

dönüşümünün çekirdeği 1 boyutlu ise k kaçtır?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

SORU

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümünde çekirdeğin boyutu $n-2$ ve $\mathbb{V}$ uzayının boyutu ise $n+3$'tür. Buna göre, bu dönüşümün rankı kaçtır?

A) 0 **B)** 3 **C)** $2n+1$ **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-5}$ lineer dönüşümü birebir ve örten ise n kaçtır?

A) 0 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineer dönüşümünde Sıfırlık$(T) = 2$, Rank$(T) = 2n - 1$ ve Boy$(\mathbb{V}) = 3n - 5$ ise n kaçtır?

A) 0 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 1 **E)** 5

SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y + 2z)$$

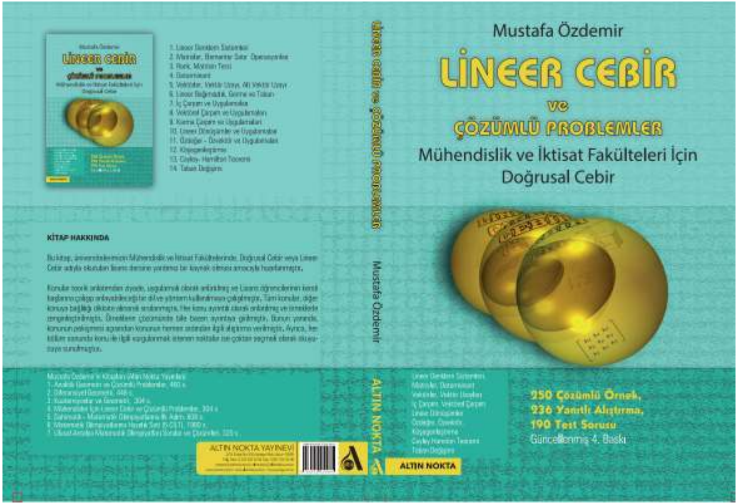
ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y) = (x + y, kx, y - x)$$

olmak üzere, $T_1 \circ T_2$ lineer dönüşümü aşağıdaki k değerlerinden hangisi için birebir değildir?

A) 4 **B)** 3 **C)** -1 **D)** -2 **E)** 0

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.



https://www.altinnokta.com.tr/tr/162_mustafa-ozdemir