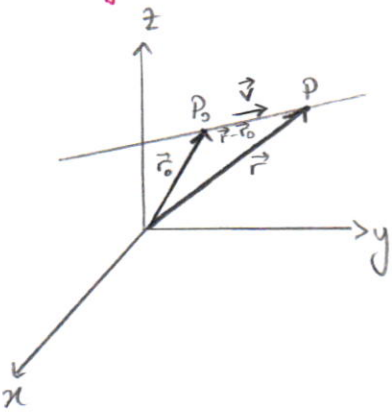
UZAYDA DOĞRULAR ve DÜZLEMLER

Uzayda Doğrular ve Doğru Parçaları



$\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ P_0 noktasının yer vektörü ve $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda, P_0 dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan tek bir doğru vardır.

Eğer $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bu doğru üzerinde başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman $\vec{r}-\vec{r_0}$ bu doğru boyunca uzanır ve dolayısıyla $\vec{v}$ ye paraleldir. Bu durumda bir $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\vec{r} - \vec{r_0} = t.\vec{v}$$

olur.

$\Rightarrow$ $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$: P_0 dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan doğrunun vektörel denklemi

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\ \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \end{array}\right\rangle \quad \left.\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}\right\}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan geçen $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ ye paralel olan doğrunun parametrik denklemi

* $\vec{v}$ vektörüne doğrunun yön vektörü denir.
* t parametresi $(-\infty, \infty)$ aralığında değerler alır.
* İki doğru paralel ise yön vektörleri de paraleldir.

Bir doğru denklemi için gerekenler:

Doğru üzerinde nokta (x_0, y_0, z_0) ↙ — Doğruya paralel vektör $\langle a, b, c \rangle$ ↘

$$\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}$$

Örnek: $(-2,0,4)$ 'ten geçen ve $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ vektörüne paralel doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

$x = x_0 + at$ Nokta: $(x_0, y_0, z_0) = (-2,0,4)$ $x = -2+2t$

$y = y_0 + bt$ Vektör: $\langle a,b,c \rangle = \langle 2,4,-2 \rangle$ $y = 4t$

$z = z_0 + ct$ $z = 4-2t$

Örnek: $P(-3,2,-3)$, $Q(1,-1,4)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemlerini yazınız.

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle \underset{a}{4}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{7} \rangle$ (yön vektörü)

$x = x_0 + at = -3+4t$

$y = y_0 + bt = 2-3t$

$z = z_0 + ct = -3+7t$

NOT: Eğer doğrunun parametrik denklemi verilmişse, t nin katsayıları bize yön vektörünü verir.

İki noktayı birleştiren doğru parçasını parametrize etmek:

1) İki noktadan geçen doğru parametrize edilir.

2) Uç noktalar için t değerleri bulunur ve t, bu değerlerle sınırlı kapalı bir aralıkta kısıtlanır.

Örnek: $P(-3,2,-3)$ ve $Q(1,-1,4)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını parametrize ediniz.

1) $x = -3+4t$

$y = 2-3t$

$z = -3+7t$

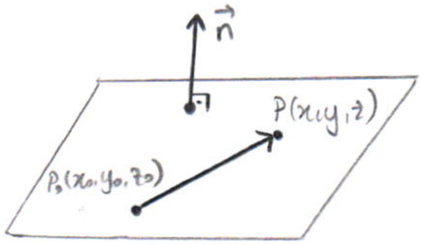
2) $P(-3,2,-3)$ için $\left.\begin{aligned} -3 &= -3+4t \\ 2 &= 2-3t \\ -3 &= -3+7t \end{aligned}\right\} t=0$

$Q(1,-1,4)$ için $\left.\begin{aligned} 1 &= -3+4t \\ -1 &= 2-3t \\ 4 &= -3+7t \end{aligned}\right\} t=1$

Doğru parçasını şu şekilde parametrize ederiz: $\boxed{\begin{aligned} x &= -3+4t \\ y &= 2-3t \\ z &= -3+7t \end{aligned} \quad 0 \le t \le 1}$

UD2

Uzayda Düzlemler



M düzlemi

M düzlemi bir $P_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasından geçen ve sıfırdan farklı $\vec{n} = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ normaline sahip bir düzlem olsun. Bu durumda M düzlemi, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörünün $\vec{n}$ ye dik olmasını sağlayacak tüm $P(x,y,z)$ noktalarının kümesidir. O halde,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \text{dir.}$$

Düzlemin denklemi:

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{(vektörel denklem)}$$

$$\Rightarrow \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle \cdot \langle A, B, C \rangle = 0$$

$$\Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Sadeleştirilirse, $Ax+By+Cz = \underbrace{Ax_0+By_0+Cz_0}_{D}$

$$\Rightarrow \boxed{Ax+By+Cz = D}$$

Bir düzlem denklemi için gerekenler:

Düzlem üzerinde nokta (x_0, y_0, z_0)

Normal vektör $\langle A, B, C \rangle$

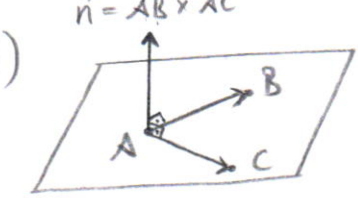
Örnek: $P_0(-3,0,7)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n} = 5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

$(x_0,y_0,z_0) = (-3,0,7)$
$\langle A,B,C \rangle = \langle 5,2,-1 \rangle$

Denklem: $5(x-(-3)) + 2(y-0) + (-1)(z-7) = 0$

$\Rightarrow 5x+2y-z = -22$

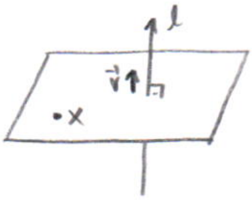
Örnek: $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ noktalarından geçen düzlem için bir denklem bulunuz.



$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$$ düzleme dik (normal) vektör

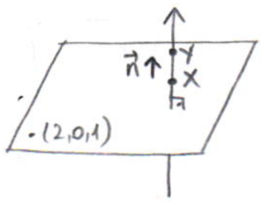
$A(0,0,1)$
$\Rightarrow 3(x-0)+2(y-0)+6(z-1) = 0 \Rightarrow 3x+2y+6z = 6$

Örnek: X(2,1,4) noktasından geçen ve $\ell : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3 \end{cases}$ doğrusuna dik düzlemin denklemini bulunuz.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v} = \langle \overset{A}{1}, \overset{B}{2}, \overset{C}{0} \rangle \\ X = (\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{4}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 1.(x-2) + 2(y-1) + 0.(z-4) = 0 \\ x + 2y = 4 \end{array}$$

Örnek: (2,0,1) den geçen ve X(1,1,0) ve Y(4,−1,−2) noktalarından geçen doğruya dik düzlemin denklemini bulun.



$$\vec{XY} = \vec{n} = \langle \underset{A}{3}, \underset{B}{-2}, \underset{C}{-2} \rangle$$

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 2z = 4$$

Paralel ve Kesişen Doğrular / Düzlemler

- Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. Paralel olmayan iki düzlem bir doğruda kesişir.
- Normal vektörleri dik olan iki düzlem diktir.
- İki düzlem arasındaki açı, normalleri arasındaki açıya eşittir: $\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1} . \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

- Bir düzlemin normali $\vec{n}$, bir doğrunun yön vektörü $\vec{v}$ olsun.
  - $\vec{n} \parallel \vec{v}$ ise doğru ile düzlem diktir
  - $\vec{n} \perp \vec{v}$ ise doğru ile düzlem paraleldir.

Örnek: $x - 2y + 5z = 1$ düzlemi ile $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$ doğrusu paralel midir?

$$x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$$

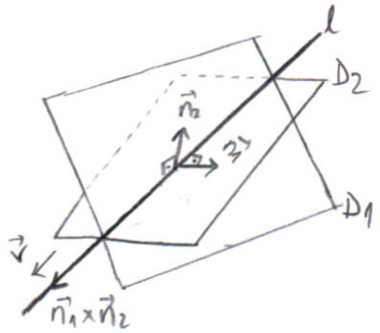
$$\left.\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{array}\right\} \vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$$

(t nin katsayıları)

$\vec{n} . \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$ olduğundan düzlem ile doğru paraleldir.

- İki doğrunun kesişimi nokta, iki düzlemin kesişimi doğru, bir doğru ile bir düzlemin kesişimi noktadır.

Kesişim Doğruları



İki düzlemin kesişim (arakesit) doğrusu, düzlemlerin normal vektörleri $\vec{n}_1$ ve $\vec{n}_2$ nin ikisine de diktir. Dolayısıyla kesişim doğrusu $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ye paraleldir.

$$\left.\begin{array}{l} l \to D_1 \text{ in üzerinde} \Rightarrow l \perp \vec{n}_1 \\ l \to D_2 \text{ nin üzerinde} \Rightarrow l \perp \vec{n}_2 \end{array}\right\} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

↳ l nin yön vektörü

Örnek: $3x-2y+z=2$ ve $x-y+3z=8$ ile verilen düzlemlerin $\underbrace{\text{arakesit}}_{l}$ doğrusunun parametrik denklemlerini yazınız.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=2 \to \vec{n}_1 = \langle 3,-2,1\rangle \\ x-y+3z=8 \to \vec{n}_2 = \langle 1,-1,3\rangle \end{array}\right\} \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle \underset{a}{-5}, \underset{b}{-8}, \underset{c}{-1} \rangle$$

$$x=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y+z=-1 \\ -y+3z=7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \end{array} \Rightarrow (\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{2}, \underset{z_0}{3}) \text{ : arakesit doğrusu üzerinde bir nokta}$$

$$l: \begin{cases} x = 1-5t \\ y = 2-8t \\ z = 3-t \end{cases}$$

($x=1$ seçmek keyfidir, farklı seçimler aynı doğrunun farklı parametrizasyonunu verir)

Örnek: $3x-6y-2z=15$ ve $2x+y-2z=5$ düzlemlerinin $\overbrace{\text{kesişim doğrusuna}}^{l}$ paralel olan bir vektör ve bu doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = \langle 3,-6,-2\rangle \\ \vec{n}_2 = \langle 2,1,-2\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l} l \perp \vec{n}_1 \\ l \perp \vec{n}_2 \end{array} \Rightarrow l \parallel \underset{\vec{v}}{\downarrow}\ \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \langle 14, 2, 15 \rangle$$

($\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ nin sıfırdan farklı bir skaler katı da aynı işi görür.)

$$z=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-6y=15 \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array} \Rightarrow l: \begin{cases} x = 3+14t \\ y = -1+2t \\ z = 15t \end{cases}$$

Örnek: $x = \frac{8}{3}+2t$, $y=-2t$, $z=1+t$ doğrusunun $3x+2y+6z=6$ düzlemi ile kesiştiği noktayı bulunuz.

Verilen doğru koordinatları düzlem denklemini sağlarsa düzlem üzerindedir. Yani,

$$3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2.(-2t)+6(1+t)=6 \Rightarrow 8t=-8 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow (x,y,z)\big|_{t=-1} = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$