

ENTERPOLASYON

Basit olarak interpolasyon işlemi; tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.

Genel anlamda ise interpolasyon; bilinmeyen bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n gibi ayrık noktalarda verilen f_0, f_1, \dots, f_n değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun başka basit ve bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan $F(x)$ fonksiyonuna "**Interpolasyon Fonksiyonu**" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.

Genelde interpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Entopolasyon fonksiyonun seçiminde 1. teorem kullanılır.
1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise
entropolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir.
Bu aralıkta

$$|f(x) - F(x)| \leq \epsilon \quad \text{esitliği sağlanır.}$$

2. Periyodu 2π olan sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

gibi sonlu bir trigonometrik açılım, entropolasyon
fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir n değeri

$$|f(x) - F(x)| < \epsilon \quad \text{sağlanabilir.}$$

DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona **doğrusal (lineer) enterpolasyon** denir.

Eğer x değisten $[a, b]$ aralığında bir $f(x)$ 'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak :

$$F(x) = Ax + B \text{ seçilirse,}$$

$$\begin{cases} f(a) = F(a) \\ f(b) = F(b) \end{cases}$$

Bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa + B = f(a)$$

$$Ab + B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \text{ yazılır.}$$

$F(x)$ fonksiyonu ise :

$$F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

olur.

GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n \binom{k}{i} \Delta^i f_0$ olarak verilir. Bu formül açıl-

dırıldığında;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$ olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$ konularsa;

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$F(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}}{1!} \Delta f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 2 \right)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{x_i - x_0 - 2h}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h_1} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h_1} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h_1)}^{x_1}}{h_1} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h_1} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h_1)}^{x_1}}{h_1} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + 2h_1)}^{x_2}}{h_1} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x_i \rightarrow x$ alınırsa

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

II
ÖRNEK:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>
0	<u>-4</u>
1	<u>-2</u>
2	14
3	62
4	160
5	326
6	578

<u>$\Delta f(x)$</u>
<u>2</u>
16
48
98
166
252

<u>$\Delta^2 f(x)$</u>
<u>14</u>
32
50
68
86

<u>$\Delta^3 f(x)$</u>
<u>18</u>
18
18
18

$$x_0 = 0$$

$$h = 1$$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$$F(4) = 160$$

ii) ÖRNEK:

$h=2$

x	$f(x)$
2	<u>10</u>
4	50
6	122
8	226
10	362

$\Delta f(x)$
<u>40</u>
72
104
136

$\Delta^2 f(x)$
<u>32</u>
32
32

$$\begin{aligned} x_0 &\neq 0 \\ h &\neq 1 \end{aligned}$$


$$F(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{2} \overset{20}{\cancel{40}} + \frac{(x-2)(x-4)}{4} \cancel{32}^8$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad F(8) = 226$$

Değişken dönüşümü yapılarak ayrik noktaların eşit aralıklı yapılması:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x)$</u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>			
0	1	9	<u>10</u>	<u>26</u>	
3	10	55	46	60	<u>24</u>
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				



<u>z</u>	<u>F(z)</u>	<u>Δx</u>	<u>$\Delta^2 x$</u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

z	$F(z)$ x	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 x = -1 + z \cdot 1 + \frac{z^2 - z}{2} \cdot 2$$

$$x = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x)$</u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>10</u>		
0	1	9	<u>46</u>	<u>26</u>	
3	10	55	60	<u>24</u>	
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \frac{5}{10} \frac{z(z-1)}{2} + \frac{6}{36} \frac{z(z-1)(z-2)}{6} + \frac{24}{24} \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}$$

$$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2 \quad \text{Ara Interpolasyon Formülü}$$

$$f(x) = (\pm \sqrt{x+1})^4 - 2(\pm \sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

II ÖRNEK:

<u>x</u>	<u>z</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

<u>z</u>	<u>x</u>	<u>Δx</u>
0	2	2
1	4	2
2	6	2
3	8	2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$

<u>x</u>	<u>z</u>	<u>f(x)</u>	<u>Δf(x)</u>	<u>Δ²f(x)</u>
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \cancel{8} \frac{z(z-1)}{2} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4 \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 + 3 \Rightarrow F(z) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(z) = x^2 - 4x + 7$$

II. صول

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!} \Delta^2 f_0$$

LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi ayrı noktalardaki bilinen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ değerleri varsa (bu noktaların aralıkları eşit olsun olmasın) ve $f(x)$ fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna $g(x)$ dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i \text{ şeklindedir.}$$

$L_i(x)$ katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Örnek:

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i 'ler için y_i değerleri şöyle olsun.

i	x_i	y_i
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$n=2$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x_0-x_0}} \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \\ &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow L_0(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{\cancel{x-x_1}}{\cancel{x_1-x_1}} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} \Rightarrow L_1(x) = -\frac{1}{2} (x^2-3x) \end{aligned}$$

- $f(a)x + f(a)b$
 $f(b)x - f(b)a$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0} \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6} (x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2-3x)(1) + \frac{1}{6} (x^2-x)(25)$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x - 5 \text{ bulunur.} \Rightarrow g(1) = 1 \quad g(2) = 11$$

PRNEK:

i	x	y
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$$n=3$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)$$

$$g(x) = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22) + \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)(-8) - \frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)(-22) + \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)(-9)$$

$$g(4) = -1.0296854$$

$$g(10) = -14.973684$$

