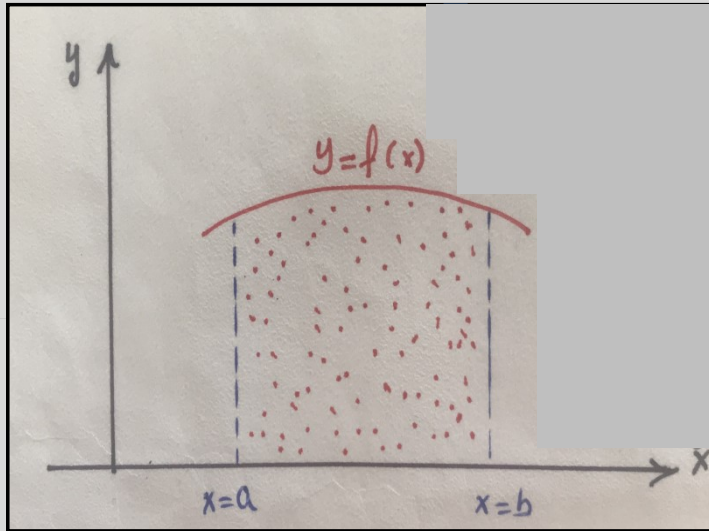


SAYISAL İNTEGRAL



Nümerik integral $I = \int_a^b f(x) dx$

integralinin değerini yaklaşık olarak bulma işlemidir.

İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup,

değeri $y=f(x)$ eğrisinin altında ve $x=a$ ile $x=b$ doğruları arasında kalan alana eşittir.

TRAPEZ (YAMUKLAR) YÖNTEMİ

Bu yöntemde integral n sayıda dikdörtgen kullanılarak

$$I = \sum h_i * f_i \text{ olarak hesaplanır.}$$

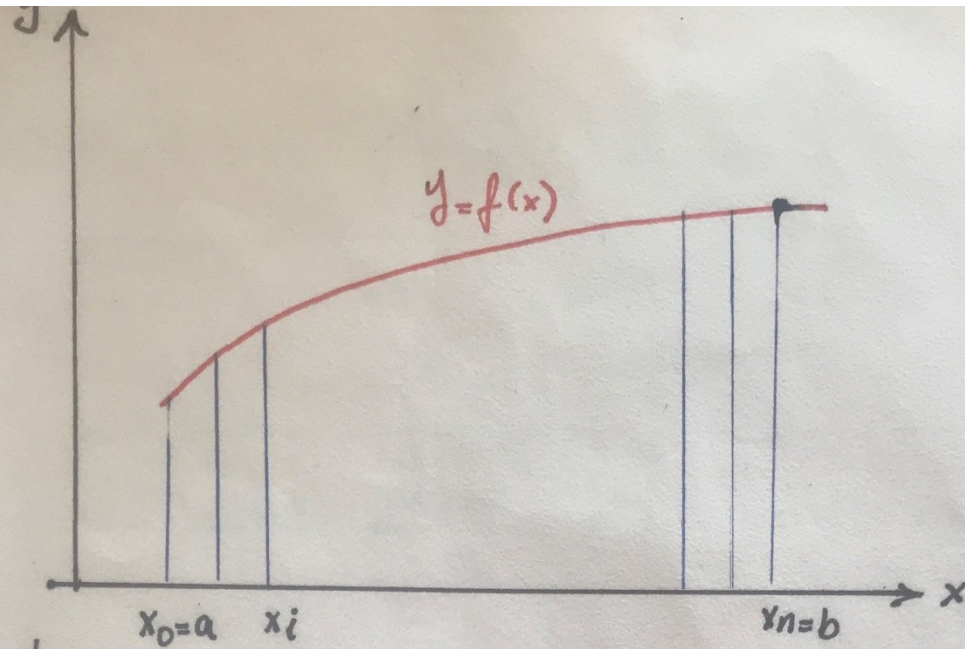
$$f_i \rightarrow f(x_i)$$

$h_i \rightarrow i.$ dikdörtgenin genişliği

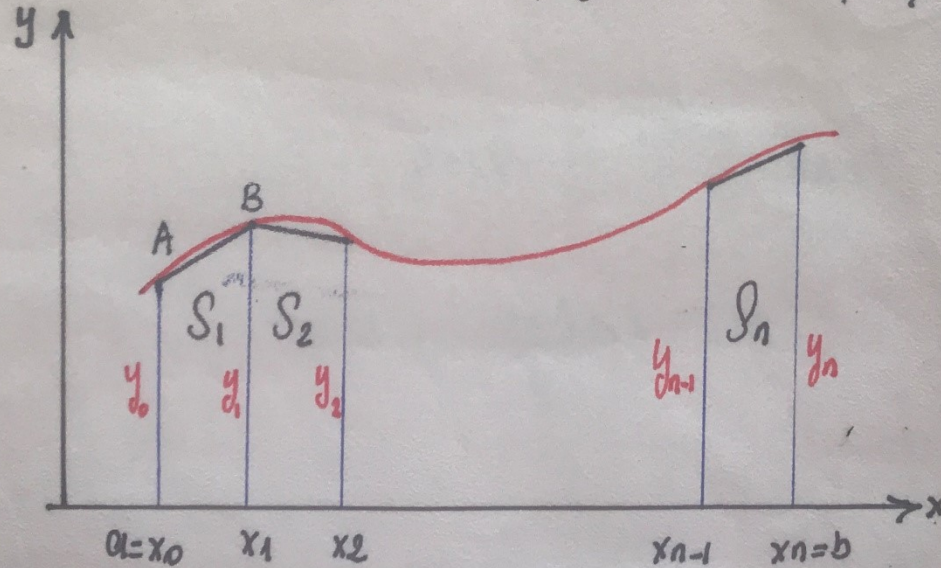
$$h_i = x_{i+1} - x_i \text{ olarak tanımlanır.}$$

Eğer dikdörtgenlerin genişliği sabit ise;

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ olarak yazılabilir.}$$



$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$ integralinin değerini hesaplamak üzere $[a, b]$ kapalı aralığını n eşit parçaya ayıralım.



Her bölme noktasından (x_i) dik doğrular çıkarak diklerin $F(x)$ eğrisini kestiği noktaları birer doğru ile birleştirerek n tane yamuk elde edebiliriz. $x_0 \overline{AB} x_1$ dik yamuğunun alanı

$$S_1 = \frac{1}{2} h (y_0 + y_1) \text{ dir. Benzer şekilde } \dots$$

$$S_2 = \frac{1}{2} h (y_1 + y_2)$$

...

$$S_n = \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n) \text{ bulunur.}$$

Toplam alan $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ olacağından;

$$S = \frac{1}{2} h (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h (y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h (y_2 + y_3) + \dots + \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$

$$S = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$S = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

$$S = h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

$a \rightarrow x_0$ $b \rightarrow x_n$ $h = \Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$ kabul ederssek.

$$S = \Delta x \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k \cdot \Delta x) \right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx. \quad n=4$$



ÖRNEK .1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx. \quad n=4$$

$$x_0 = 0 \quad x_n = 1$$

$$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

ÖRNEK 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx. \quad n=4$$

$$x_0=0 \quad x_n=1$$

$$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

	<u>x</u>	<u>f(x)</u>
x_0	0 $\downarrow +0.25$	1
x_1	0.25 $\downarrow +h$	0.96118
x_2	0.5 $\downarrow +h$	0.8
x_3	0.75 $\downarrow +h$	0.64
x_4	1	0.5

$$S = 0.25 \left[\frac{1+0.5}{2} + 0.9612 + 0.8 + 0.64 \right]$$

$$S = 0.78279$$

Bu fonksiyon için gerçek integral;

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = 45^\circ$$

$$I = \frac{\pi}{4} = 0.78539$$

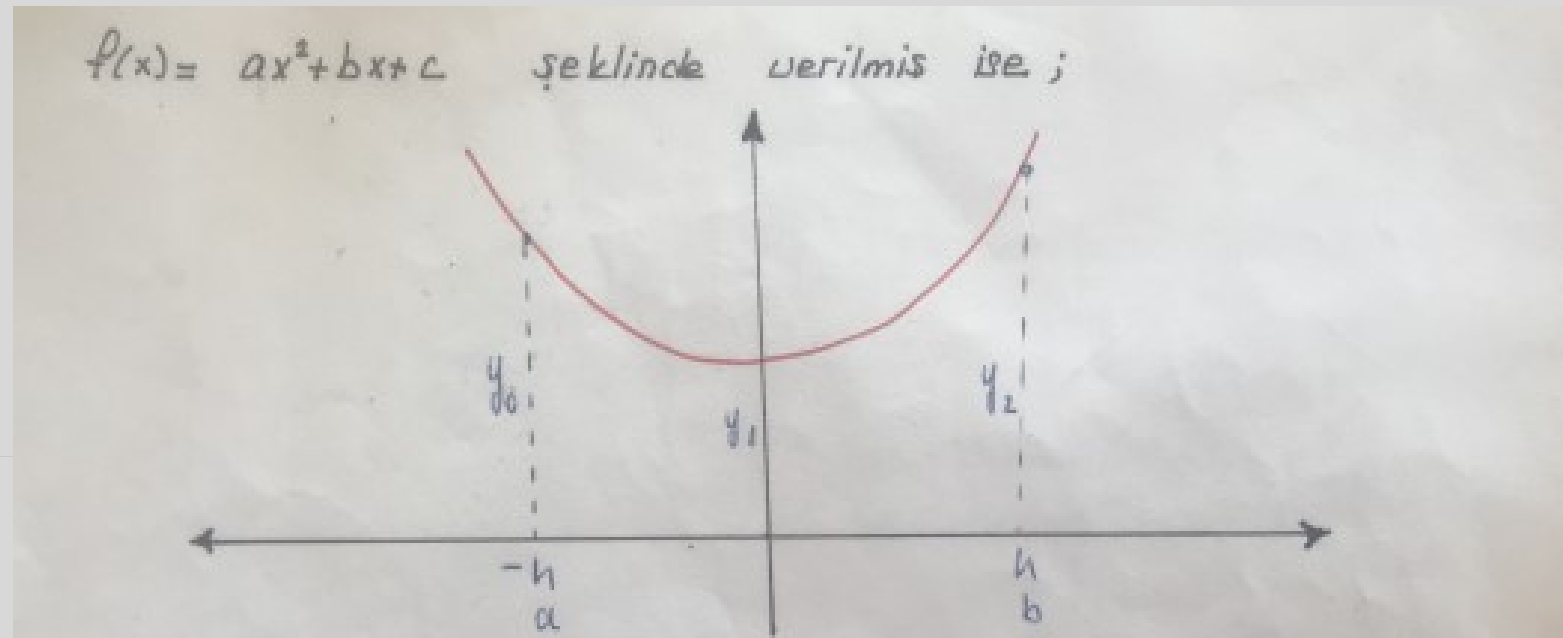
$$\text{Hata} = |0.78539 - 0.78279| = 0.0026$$

$n=9$ alıncaydı.

$$I = 0.78488$$

$$\text{durdu.} \rightarrow \left| \frac{0.78539 - 0.78488}{0.00051} \right|$$

SIMPSON YÖNTEMİ



$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c) dx$$

$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c) dx$$

Analitik olarak incelensek;

$$S = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-h}^h = a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^2}{2} + ch - \left[-\frac{a}{3}h^3 + \frac{b}{2}h^2 - ch \right]$$

$$S = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c)$$

Analitik olarak inceleyelim;

$$S = \int_{-h}^h \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) dx = a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^2}{2} + ch - \left[-\frac{a}{3} h^3 + \frac{b}{2} h^2 - ch \right]$$

$$S = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c)$$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini y_0, y_1, y_2 cinsinden bulalım.

$$\left. \begin{array}{l} x = -h \text{ için } f(x) = y_0 = ah^2 - bh + c \\ x = 0 \text{ için } f(x) = y_1 = c \\ x = h \text{ için } f(x) = y_2 = ah^2 + bh + c \end{array} \right\} \text{buradan}$$

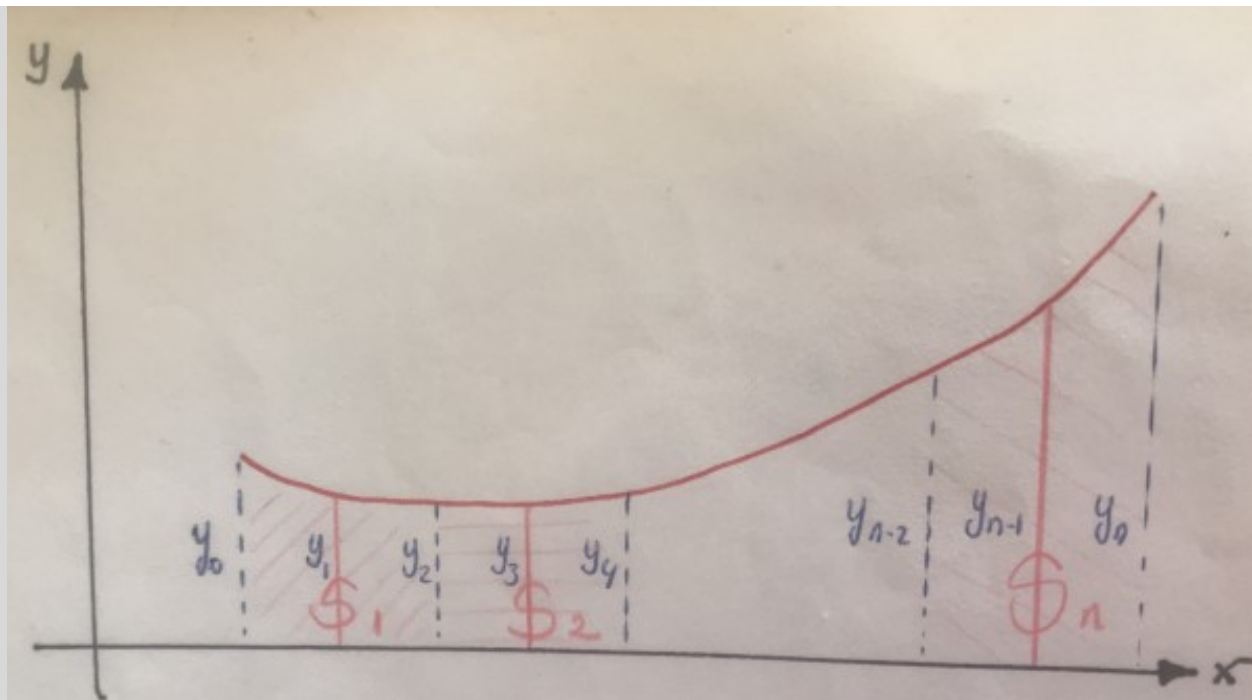
$$y_0 + y_2 = ah^2 - bh + c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 2c$$

$c = y_1$ olduğundan;

$$2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2 \Rightarrow 2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$$S = \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1) \Rightarrow$$

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$$S_1 = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = h/3 (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\vdots$$

$$S_n = h/3 (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$S = \sum S_i \quad \text{toplamı aranan integral denklemini}$$

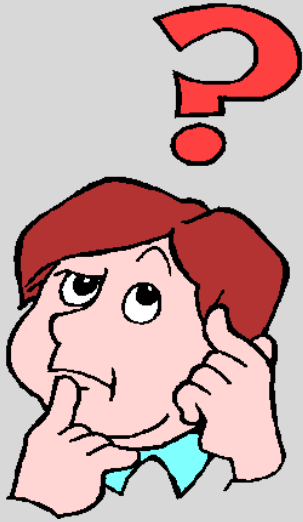
!! Simpson yönteminde cubuklar ikiser ikiser alındığından aralık sayısı çift olmalıdır.

Simpson formülünde $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ alınarak. ($n \rightarrow$ çift)

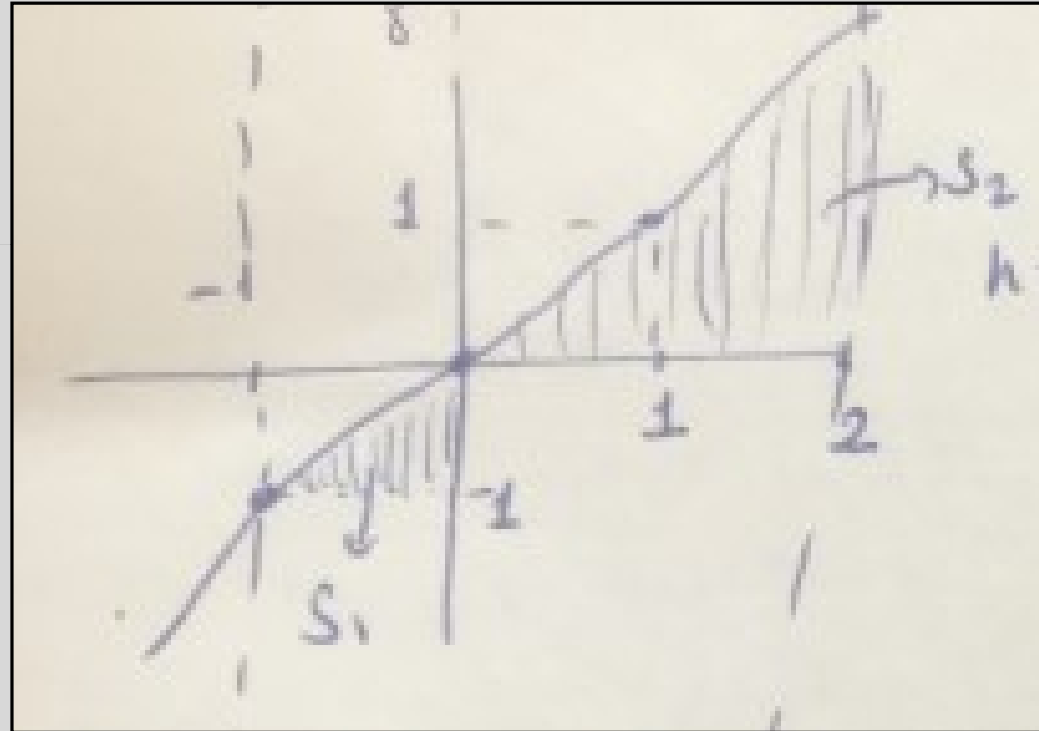
$$S = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k \cdot h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i \cdot h) \right]$$

RESULTS

$$S = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k \cdot h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i \cdot h) \right]$$



$y = x^3$ eğrisinin $x=-1$, $x=2$ ve Ox eksenini ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$S_1 = - \int_{-1}^0 x^3 dx$$

$n=4$
 $h=0.25$

x	$f(x)$
-1	1
-0.75	0.4219
-0.5	0.125
-0.25	0.0156
0	0

$$S_2 = \int_0^2 x^3 dx$$

$h = \frac{2}{4} = 0.5$

x	$f(x)$
0	0
0.5	0.125
1	1
1.5	3.375
2	8

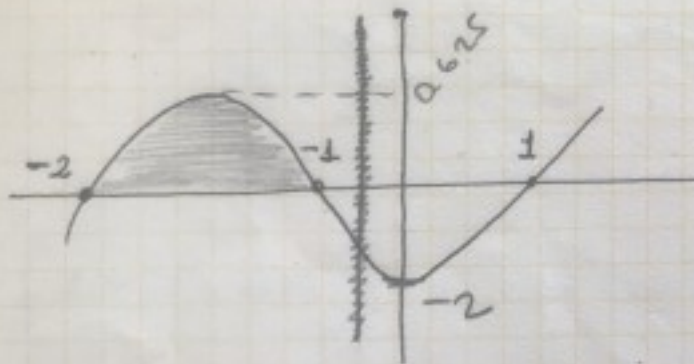
$$S_1 = \frac{0.25}{3} [1 + 0 + 2 \times 0.125 + 4(0.4219 + 0.0156)] = 0.2499$$

$$S_2 = \frac{0.5}{3} [0 + 8 + 2 + 4(0.125 + 3.375)] = 4$$

$$S = 4 + 0.2499 = 4.256r$$

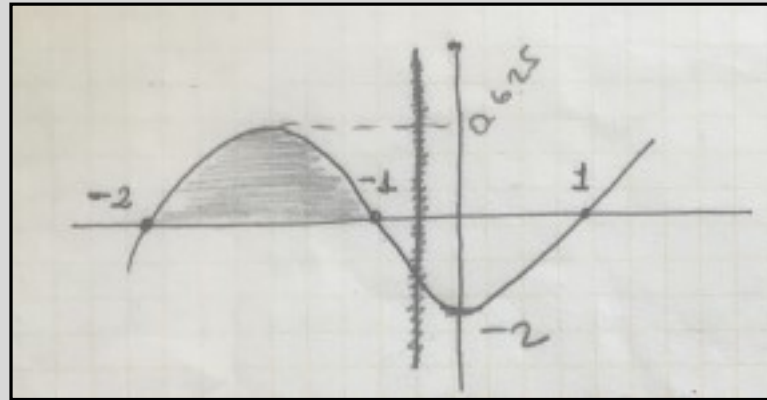


$y = (x^2 - 1)(x + 2)$ eğrisinin altında ve OX ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$I = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx$$

$$I = \left. \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-2}^{-1} = 0.416 \text{ br}^2$$



Trapez yöntemi ile hesapladığımızda

x	$f(x)$
-2	0
-1.75	0.5156
-1.50	0.625
-1.25	0.4218
-1	0

$n=4$ kabul edelim

$$h = \frac{-1 - (-2)}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$S_T = h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

$$S_T = 0.25 \left[\frac{(0+0)}{2} + 0.5156 + 0.625 + 0.4218 \right] = 0.391 \text{ br}^2$$

$$\text{Hata} = 0.41 - 0.391 = 0.019 \text{ br}^2$$

$y = (x^2 - 1)(x + 2)$ eğrisinin altında ve ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını Simpson yöntemi ile bulunuz.

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)(x + 2) \, dx \quad a = -2 \quad b = -1 \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{-1 - (-2)}{4} = 0,25$$

$$n = 4$$

x	$f(x)$
-2	0
-1.75	0.5156
-1.50	0.625
-1.25	0.4218
-1	0

$$S_s = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k \cdot h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i \cdot h) \right]$$

$$S_s = \frac{0.25}{3} [(0 + 0) + 4 * (0.5156 - 0.4218) + 2 * 0.625] = 0.4166 \, br^2$$



İki Katlı Integralin Sayısal Çözümü

$$\int_2^3 \int_x^{2x^3} (x^2 + y) dy dx$$

İlk adım $\int_2^3 g(x) dx$ $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = 0.25$

x	$g(x)$
$x_0 = 2$	g_0
$x_1 = 2.25$	g_1
$x_2 = 2.5$	g_2
$x_3 = 2.75$	g_3
$x_4 = 3$	g_4

$x_0 = 2$ için
 $2x^3 \rightarrow 16$
 $\int_2^{16} (x_0^2 + y) dy$
 $\int_2^{16} (4 + y) dy$
 $\int_2^{16} f(y) dy$

y	$f(y)$
2	6
5.5	9.5
9	13
12.5	16.5
16	20

$h = \frac{16-2}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$

$g_0 = \frac{3.5}{3} \left[(6+20) + 2 \cdot 13 + 4 \cdot (9.5+16.5) \right] = 182$

$x_1 = 2.25$ için

$$\int_{2.25}^{22.78} (x_1^2 + y) dy$$

y	f(y)
2.25	7.31
7.38	12.44
12.51	17.57
17.64	22.7
22.77	27.76

$$h = \frac{22.78 - 2.25}{4} = 5.13$$

$$\underline{g_1} = \frac{5.13}{3} [7.31 + 27.76] + 2 * 17.57 + 4 * (12.44 + 22.7) = \underline{360.417}$$

$x_2 = 2.5$ için

y	f(y)
2.5	8.75
9.69	15.94
16.88	23.13
24.07	30.32
31.26	37.51

$$\int_{2.5}^{31.25} (x_2^2 + y) dy$$

$$h = \frac{31.25 - 2.5}{4} = 7.19$$

$$\underline{g_2} = \frac{7.19}{3} [8.75 + 37.51] + 2 * 23.13 + 4 * (15.94 + 30.32) = \underline{665.22}$$

$$x_3 = 2.75 \text{ için}$$

$$\int_{2.75}^{41.59} (x_3^2 + y) dy$$

y	f(y)
2.75	10.31
12.46	20.02
22.17	29.73
31.88	39.44
41.59	49.15

$$h = \frac{41.59 - 2.75}{4} = 9.71$$

$$\underline{g_3} = \frac{9.71}{3} \left[(10.31 + 49.15) + 2 \times 29.73 + 4 \times (20.02 + 39.44) \right] = \underline{1154.7}$$

$$x_4 = 3 \text{ için}$$

$$\int_3^{54} (x_4^2 + y) dy$$

y	f(y)
3	12
15.75	24.75
28.5	37.5
41.25	50.25
54	63

$$h = \frac{54 - 3}{4} = 12.75$$

$$\underline{g_4} = \frac{12.75}{3} \left[(12 + 63) + 2 \times 37.5 + 4 \times (24.75 + 50.25) \right] = \underline{1912.5}$$

$$S_5 = \frac{h}{3} \left[g_0 + g_4 + 4(g_1 + g_3) + 2g_2 \right] = \underline{\underline{790.451}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $182 \quad 1912.5 \quad 360.417 \quad 1154.7 \quad 665.22$

Sonuçla $h_k = 790.55$



