Diziler

- ***Donem Hak. Bilg.***
  - diziler olmadan seriler olmaz.
  - kuvvet serileri cok onemli.
  - kisa baslik: parametrik denklemler.
  - Kutupsal koord zormus.
  - vektorler cartcurt carpimlar filan. Uzayda dogrular uzerinde duracagiz.
  - vektor degerli mat1e dayali.
  - cok degiskenli fonklar uzun soluklu. farkli ve zormus.
    - limit turev cartcurt mat1 iste.
  - katli integreler. araliklari kartezyen carpimlari zartzurt. dikdortgen veren integraller vs. hacim ve alan hesaplari
  - Kaynak ayni.

- ***Sonsuz Dizi***
  - ***Tanim:*** *pozitif dogal sayilar uzerinde tanimlanmis fonk.*

$$b_n = \frac{1}{n-1} \Longrightarrow \{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1}, \ldots\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n-1}, \ \cdots\right\}$$

  - Dizinin butun elemanlari bir sayidan kucukse **ustten sinirli**.
    tam tersi ise **alttan sinirli**. ikisi de soz konusu ise **sinirli** denir.
  - **dizilerin yakinsakligi:** sonsuza limiti alinir ve ona gore yakinsakligi hespalanir. 0'e yaklasir cartcurt.
  - *latex*
  - **dizinin tekligi:** limiti varsa tektir.
  - **yakinsakligi:** limit varsa yakinsaktir. (limit yok demek +-sonsuz ya da sureksiz demek)

- ## Onemli limitler:

$$r > 0 \text{ ise,} \quad \lim_{n \to \infty} r^{1/n} = 1$$

$$r > 1 \text{ise,} \quad \lim_{n \to \infty} r^n = \infty$$

$$|r| < 1 \text{ise,} \quad \lim_{n \to \infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n} \right) = 1$$

- **Limit teoremleri**:
  - dizinin limitini alinirken diziyi fonksiyon gibi dusunup onun limiti alinir. (istisna var)
  - usttekinin tersi dogru degil. Diziden fonka gecemeyiz.
- **Yakinsak iki dizinin toplami ve farki yakinsak.** (bi zahmet). iraksakta dogru degildir. *Asagidaki ornek iki iraksak fonkun topalmi yakinsak oldugnu gosterir*

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1$$

- **Diziler sikistirma kurali.**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{gosterelim,}$$

$$n \geq 1 \quad \text{icin} \ \ n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot n < 1 \cdot \ldots n \cdot \cdot n = n^{n-1}$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$n \to \infty \text{ durumunda,}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

  - **icine alma kurali:** fonk surekliyse icine limit alinabilir. (triglar loglar vs.)

- Monoton Diziler: daima artan veya azalan dizilere denir. an - an+1 ya da turevi alinir.

Seriler

- ***Sonsuz Seriler.***
- Bir dizinin terimlerinin toplamidir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

  - Bu toplami bir terimda sonlandirirsak artik elimizde yepyeni bir dizi olmus olur. (kismi toplamlar dizisi.)
  - Bu dizinin karakteri de serinin karakterini de verecek.
  - Kismi toplamlar dizisinin limiti varsa yakinsak oldugu soylenir. Ve toplami bulunabilir.
- Seri, bir dizinin toplami.
- Karakteri irksagi ve yakinsakligi.
- Sonsuz toplam yerine sonlu toplam yapip yorum yapacagiz.
- Kismi toplamlar dizisi bir limite sahipse yakinsak.
- Yakinsak bir serinin toplami farki yakinsaktir.
- Yakinsak bir serinin bir sayiyla carpimi yakinsaktir.
- Teleskopik seri: Bu yontem ozellikle ardisik gelenler icin kullanilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k-1} - a_k) = a_0 - \lim_{n \to \infty} a_n$$

$$\sum (a_k)$$

$$\text{serisi yakinsak ise}$$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Bu teoremin tersi dogru degildir. Yani, bir dizinin limiti 0 ise ondan olusan bir seri yakinsak olabildigi gibi iraksak da olabilir.

NOT: *Bir serinin genel teriminin limiti mevcut ise ve 0 degilse o dizi* `iraksaktir` *.*
0 cikarsa bir test uygulayip durumu degerlendirecegiz.

Harmonik ve Geometrik Seri

- HARMONIK SERI IRAKSAKTIR !!
- Harmonik serileri iraksaktir. Payin derecesi paydanin derecesinden 1 kucuk olan serilere harmonik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

- Geometrik seri sinavda her zaman cikar.
- Geometrik serinin ilk teriminin r'nin kuvveti 0 olacak. Olmazsa ona gore ayarlariz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

- `|r| < 1` iken `a/(1-r)` sayisina *yakinsar*, `|r| >= 1` ise *iraksar.*

Integral testi

- Surekli azalan ve pozitif bir fonk icin kullanilir.

- Importoper integralin bir sayi ise o sayi serinin toplamini ifade etmez. Sadece serinin karakterini belirler.
- Bir serinin impropern integralinin karakteri ve kendisnin karakteri aynidir.

p-serisi

- p pozitif bir reel sayi olmakla beraber,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

- p 1den buyuk oldugu zaman sadece yakinsaktir.

Mukayese Testi

- Eger bir serinin genel terimini baska bir serinin genel terimiyle mukayese edebiliyorsaniz ve o serinin
  karakterini biliyorsaniz mukayese testi elverislidir.
- Orjinial serimiz `a_k` olsun obur serimiz ise `b_k` olsun.
  - Eger `a_k` nin butun terimleri `b_k` ninkinden **kucuk** kaliyorsa ve `b_k` serisinin karakteri yakinsaksa `a_k` da yakinsaktir.
  - Eger `a_k` nin butun terimleri `b_k` ninkinden **buyuk** kaliyorsa ve `b_k` serisinin karakteri iraksaksa `a_k` da iraksaktir.

Limit Mukayese Testi:

- $$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$
- Eger `L > 0` ise her iki seri de yakinsar ya da iraksar.
- Eger `L = 0` ise ve `b_k` yakinsak ise, `a_k` serisi de yakinsaktir.
- Eger `L = sonsuz` ise ve `b_k` iraksak ise, `a_k` serisi de iraksaktir.

Alterne Serilerde Yakinsaklik:

- Bir alterne serinin multak degerini alinca `(-1)^n` terimi kalkar. Bu durumda, `a_n` kalir ve bu seri de yakinsak ise `mutlak yakinsak` denir.
- Ustteki teset basarisiz ise ve alttak sartlari sagliyorsa:
  - Seri azalandir.
  - Serinin her bir eleman pozitiftir.
  - Genel terim limiti 0dir.

  `sartli yakinsaktir.`

Kuvvet Serileri

- $$\sum a_k x^k$$

  dizisi icin sifirdan farkli `c` sayisi icin yakinsak ise

  $$|x| < |c|$$

  saglayan butun x'ler icin yakinsaktir.

Yakinsaklik yaricapi ve araligi:

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$\rho = 0 \quad , \quad x = x_0 \quad \text{icin yakinsar}$$

$$\rho = c \quad , \quad |x| < |c| \quad \text{icin yakinsar}$$

$$\rho = \infty \quad , \quad x = R \quad \text{icin yakinsar}$$

- bulunan araliklarin uc noktalari ayrica kontrol edilmelidir.

Kuvvet serileri ve fonksiyonlar.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{x=1}^{\infty} x^k \qquad |x| < 1$$

- verilen denklemi bu formata gore ayarlayip geometrik serinin ozelliklerinden faydalanacagiz.
  `NOT: Bir serinin p gibi bir yakinsaklik yaricapina sahipse, bu fonksiyonun turevi de integrali de ayni p'ye sahiptir. (aralik degisebilir)

Serinin Turevi ve integrali.

- Her ne kadar bir serinin yakinsadigi aralik turev veya integral alininca degismese de uc noktalar kontrol edilmelidir.

Kutupsal Koordinatlar

- `cos` iceren kardoitler `kutup eksenine` , yani x-ekseni, gore simetriktirler.
- `sin` iceren kardoitler `normal eksene` , yani y-ekseni, gore simetriktirler.
- Bazi kesisim noktalari denklemden gorulemedigi icin gradige bakarak daha iyi yorum yapabiliriz.

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$$

- Ustteki formulu kullanrak bir egrinin kutupsal koordinattaki egimini bulabilecegiz. bu da kesisen noktalari
  ogrenmekte epeyce faydali olacaktir.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

- Ustteki formulu kullanip kutbu bakis acisina alarak alan hesabi yapacagiz.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

- Ustteki formulu kullanip kutupsal koordinatlarda olan bir yayin uzunulugunu bulacagiz.

Vektorler

`Konum Vektoru:' Orjinden baslayip belli bir yere kadar giden vekotre konum vektoru denir.

`Paralel Vektorler:`

$$a = \lambda b$$

click me

`02:32:42 / 02:54:55`

Uzayda Dogrular

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

- `v` ile gosterilen vektor bizim icin cok onemlidir.
- Eger iki dogru birbirinin paraleli ise bu `yon vektorlerinin` paralel oldugunu gosterir.
- ustte verilen `a, b ve c` nin herhangi birisinin 0 olmasi durumunda denklem `simetrik olamaz`.
- Bunlardan herhangi birisinin 0 gelmesi durumunda tabana 0 yazmayacagiz. Tavani 0'a esitleyeceigiz. Bu durum
  bizi `0/0` tanimsizligina goturur.

Duzlemler

- Sunu hayal edelim, elimizde iki nokta var: `p` ve `p_0`. Bu iki noktayi birlestirerek bir vektor cizelim.
- Cizilen bu vektor oyle bir `n` vektoruyle noktasal carpilsin ki sonuc `0` versin.
- Bu `n` vektorune `normal vektor` adini verecegiz.

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Nasil dogrularda **`v`** degeri cok onemli ise duzlemlerde normal dogru da **`n`** o kadar da onemli.
- Eger iki duzlemin normal dogrulari birbirine dikse, `n_1 . n_2 = 0` ise bo iki duzelem birbirine diktir.
- Eger iki duzlemin normal dogrulari paralelse , `n_1 X n_2 = 0` ise bo iki duzelem birbirine paraleldir.

$$cos\theta = \frac{\mathbf{n_1}.\mathbf{n_2}}{||n_1||\ ||n_2||}$$

- ustteki formulun yardimiyla aradaki aciyi bulabiliriz.
- Eger bir dogrunun yonlu vektoru **`v`** ve bir duzlemin **`n`** normal dogrusu birbirine dikse o `dogru` ve `duzlem`
  biribirine `paraleldir`.
- Eger bir dogrunun yonlu vektoru **`v`** ve bir duzlemin **`n`** normal dogrusu birbirine paralelse o `dogru` ve `duzlem`
  biribirine `diktir`.
- Bir dogru boyunca kesisen duzlemler ailesine `duzlemler demeti` denir. Duzlemlerin genel terimleri 0 esitlenir.
  ve birisi bir katsayi ile carpilip digeri ile toplanir.
- `Birlikte` turevleri sifir olmayan egriye duzgun egri denir.

$$L = \int_a^b \{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2\}^{\frac{1}{2}} dt$$

- Ustteki formul yardimiyla `yay uzunlugunu` bulabilecegiz.