(*) $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} \right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e^{-1}} \right]^{\frac{n^2+1}{n+1}\}\infty} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{dizi yakınsak}$$

(*) $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n/3} \right\}$ dizisinin yakınsaklığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{2n}\right]^{1/6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{2n-3}}_{e^4} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{3}}_{1} \right]^{1/6} = (e^4)^{1/6} = e^{2/3}$$

$\downarrow$

Dizi yakınsak

(*) $\left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{4}{15}, \frac{8}{18}, \frac{16}{21}, \dots \right\}$ dizisinin genel terimi?

$\frac{2^0}{3.3}$ → 1. terim, $\frac{2^1}{3.4}$ → 2. terim, $\frac{2^2}{3.5}$ → 3. terim, $\frac{2^3}{3.6}$ → 4. terim, $\frac{2^4}{3.7}$ → 5. terim

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2^{n-1}}{3.(n+2)} \right\}$$

(*) Genel terimi $a_n = \frac{n^2}{2n+1} \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)$ olan dizinin limiti?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} \cdot \sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3n}{2n+1}}_{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}}_{1} = \frac{3}{2}$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi Vize Soru ve Cevap Kâğıdı			NOT TABLOSU				
			1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		Grup No					
Bölümü				Sınav Tarihi		26.04.2014	
Dersin Adı	MAT1322-MAT1072 Matematik II		Sınav Süresi	60d	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

Soru 1. Genel terimi $a_n = n - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2n}\right)$, $(n=1,2,\ldots)$, olan dizinin limitini bulunuz.

Cevap 1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})\right]$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln(e^n) - \ln(1+e^{2n})^{1/2}\right]$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right)$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right)$$

(0.5) $$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right) = \ln(1)$$

(0.5)

$$= 0$$

(2)

(10)

Soru 3. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)}$ serisinin toplamını bulunuz.*(10puan)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)} = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} + \cdots + (-1)^n \pi^{-n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \quad 2$$

1 1

geometrik seridir. Burada $a = 1$ $\quad r = -\frac{1}{\pi}$ dir.

4 2 $|r| < 1$ olduğundan serinin toplamı

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\pi}\right)} = \frac{\pi}{\pi+1}$$

2 2

b) Genel terimi $a_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n$ olan $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2-2}\right]^{1/3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2} \cdot \left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{-2}\right]^{1/3}$$

25) 5,232323.... sayısının serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$5{,}232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots$$

$$= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \qquad a = \frac{23}{100} \qquad r = \frac{1}{100}$$

$$|r| = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$$

(Seri yakınsak)

$$5{,}232323\ldots = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

$$\circledast \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$$

$$\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1} \quad \Big\} \Rightarrow \boxed{A=-2 \mid B=2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$S_n = 2\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{5}{3}$$

$\circledast$ $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayın.

$$S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{n-1}{n}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

$\Downarrow$

Seri $-\infty$'a ıraksar.

$$\circledast \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{6}$

$|r| = \frac{1}{6} < 1$

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulunuz ve bu formül yardımıyla serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\sqrt{n} + \ln\sqrt{n+1} \Rightarrow S_n = -\overset{0}{\overline{\ln 1}} + \cancel{\ln\sqrt{2}} - \cancel{\ln\sqrt{2}} + \cancel{\ln\sqrt{3}} \cdots - \cancel{\ln\sqrt{n}} + \ln\sqrt{n+1}$$

$$= \ln\sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\sqrt{n+1} = +\infty \Rightarrow \text{Seri } +\infty\text{'a ıraksar}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+1} - \operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+2}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulup yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise değerini bulunuz.

$$S_n = \operatorname{ArcCos}\frac{1}{2} - \cancel{\operatorname{ArcCos}\frac{1}{3}} + \cancel{\operatorname{ArcCos}\frac{1}{3}} - \cancel{\operatorname{ArcCos}\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+1}} - \operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \underbrace{\operatorname{ArcCos}\frac{1}{2}}_{\pi/3} - \operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+2} = \frac{\pi}{3} - \operatorname{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3} - \underbrace{\operatorname{ArcCos}\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{0}}_{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \text{Seri yakınsaktır.}$$

Toplamı $-\frac{\pi}{6}$ dır.

(*) $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

I. Yol

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{e}\Big]^{1/n \to 0} = e^0 = 1 \Rightarrow \text{Dizi yakınsaktır.}$$

II. Yol Logaritmik limit ile de çözülebilir.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = ?$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-2}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3.(n+1)^3} = \frac{(1+n)^3 - n^3}{n^3(1+n)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \text{ olduğundan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \text{ dir.}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2^3}} - \cancel{\tfrac{1}{3^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3^3}} - \cancel{\tfrac{1}{4^3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{(n-1)^3}} - \cancel{\tfrac{1}{n^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n^3}} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(1+n)^3} = \underline{\underline{1}}$$

⊗ $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\dots=?$

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$ dir.

$$S_n=\left(\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{(n+1)!}}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots=\frac{1}{2}$$

⊗ $x=2,131313\ldots=2,\overline{13}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$x=2,\overline{13}=2+\underbrace{\frac{13}{100}+\frac{13}{(100)^2}+\frac{13}{(100)^3}+\dots}_{\text{Geometrik Seri}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$a=\frac{13}{100}$ $r=\frac{1}{100}$

$$|r|=\frac{1}{100}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}$$

Seri yakınsaktır

$$x=2+\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$$

⊗ $4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\dots=?$ $\Rightarrow$ $a=4$ $r=-\frac{1}{4}$ Geometrik Seridir

$-1/4$ $-1/4$ $-1/4$ $-\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\Rightarrow|r|=\frac{1}{4}<1$$ Seri $\frac{a}{1-r}$'ye yakınsar.

$$\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{16}{5}\Rightarrow 4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\dots=\frac{16}{5}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\qquad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \cancel{\frac{1}{2.3}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2.3}} + \cancel{\frac{1}{3.4}}\right] + \dots + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{n(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}}_{a=1 \quad r=\frac{1}{2}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}}_{a=1 \quad r=\frac{1}{6}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{4}{5}$

Soru 1. a) Ardışık olarak, $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğu bilindiğine göre $\left\{\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz. *(7puan)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1}$$

$\lim \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$
$n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{3+a_n}-2)(\sqrt{3+a_n}+2)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n-1)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \frac{1}{4}$$