MAT1071 MATEMATİK 1

ALIŞTIRMALAR 1 – FONKSİYONLAR

1. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$|x|-x>0 \Rightarrow |x|>x \Rightarrow x<0$$

T.K.: $(-\infty,0)$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x-3|-x}}{x^3-1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$x^3-1\neq 0$$
$$x^3\neq 1$$
$$\underline{x\neq 1}$$

$$|2x-3|-x\geq 0$$
$$|2x-3|\geq x$$

$$2x-3\geq x$$
$$\underline{x\geq 3}$$

$$2x-3\leq -x$$
$$3x\leq 3$$
$$\underline{x\leq 1}$$

T.K.: $(-\infty,1)\cup[3,\infty)$

3. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$x^2-3x+2\geq 0$$
kökleri: $x=2$, $x=1$

$$3+2x-x^2>0$$
kökleri: $x=3$, $x=-1$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … 2	2 … 3	3 … ∞
x^2-3x+2	+	+ 0	− 0	+	+
$3+2x-x^2$	− 0	+	+	+ 0	−
$f(x)$	×	✓	×	✓	×

T.K.: $(-1,1]\cup[2,3)$

4. Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$

b) $f(x)=x\sin^3x-x^4$

c) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-2x}$

d) $f(x)=x+\cos x$

e) $f(x)=\sec x\tan^2x$

a) $f(-x)=\sqrt{1-x+(-x)^2}-\sqrt{1+x+(-x)^2}$

$=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$

$=-\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

$=-f(x)$ → Tek fonksiyon

b) $f(-x)=(-x).\sin^3(-x)-(-x)^4$

$=x.\sin^3x-x^4$

$=f(x)$ → Çift fonksiyon

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{(-x)^3-2(-x)}=\dfrac{x^4+1}{-x^3+2x}=\dfrac{x^4+1}{-(x^3-2x)}=-\dfrac{x^4+1}{x^3-2x}$

$=-f(x)$ → Tek fonksiyon

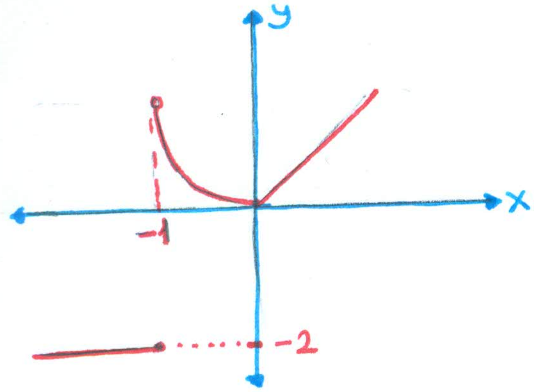
d) $f(-x)=(-x)+\cos(-x)=-x+\cos x$ → Ne tek ne de çift fonk.

e) $f(-x)=\sec(-x).\tan^2(-x)=\dfrac{1}{\cos(-x)}\cdot\dfrac{\sin^2(-x)}{\cos^2(-x)}$

$=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}=\sec x.\tan^2x$

$=f(x)$ → Çift fonksiyon

5. $f(x)=\begin{cases}-2 & , x\leq -1 \\ x^2 & , -1<x\leq 0 \\ x & , 0<x\end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çizerek artan-azalan aralıklarını belirleyiniz.



$(-1,0)$ da fonksiyon azalan

$[0,\infty)$ da fonksiyon artan

$(-\infty,-1]$ da fonksiyon ne artan ne azalan

6. Aşağıdaki fonksiyonların artan oldukları en geniş aralıkları belirleyiniz.

a) $f(x)=|x-2|+1$

b) $f(x)=(x+1)^4$

c) $R(x)=\sqrt{2x-1}$

a) $f(x)=|x-2|+1$

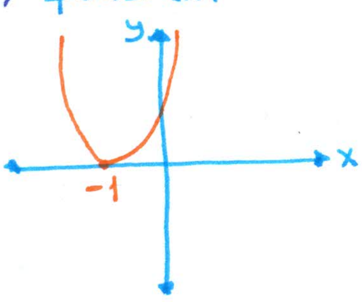
Her $x\geqslant 2$ için $|x-2|$ dolayısıyla $|x-2|+1$ artandır.

$x_1, x_2 \in [2,\infty)$ için

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2-2$$
$$|x_1-2|<|x_2-2|$$
$$|x_1-2|+1<|x_2-2|+1$$

$f(x_1)<f(x_2)$ olduğundan $[2,\infty)$ da fonk. artandır.

b) $f(x)=(x+1)^4$



$[-1,\infty)$ da fonksiyon artan

c) $R(x)=\sqrt{2x-1}$

$2x-1\geq 0$

$2x\geq 1$

$x\geq \frac{1}{2}$

$[\frac{1}{2},\infty)$

$x_1,x_2\in[\frac{1}{2},\infty)$

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2$

$\Rightarrow 2x_1-1<2x_2-1$

$\Rightarrow \sqrt{2x_1-1}<\sqrt{2x_2-1}$

$f(x_1)<f(x_2)$

olduğundan $[\frac{1}{2},\infty)$ da fonksiyon artandır.

7. Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için fog ve gof bileşke fonksiyonlarını bulunuz ve bu fonksiyonların tanım kümelerini belirleyiniz.

a) $f(x)=2-x^2$, $g(x)=\sqrt{x+2}$

b) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$

c) $f(x)=2-x$, $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$

a) $fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+2})=2-(\sqrt{x+2})^2=\cancel{2}-x-\cancel{2}=-x$

$x+2\geq 0$

$x\geq -2$ $\quad [-2,\infty)$ //

$gof(x)=g(f(x))=g(2-x^2)=\sqrt{2-x^2+2}=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geq 0 \Rightarrow 4\geq x^2 \Rightarrow [-2,2]$ //

b) $fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{1-x})=\sqrt{\sqrt{1-x}}=\sqrt[4]{1-x}$

$1-x\geq 0$

$1\geq x$ $\quad [1,\infty)$ //

$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sqrt{1-\sqrt{x}}$

$x\geq 0$, $1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow 1\geq\sqrt{x}$

$1\geq x$ $\quad [-\infty,1]$ //

c) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = 2 - \sqrt[3]{x+1}$ $(-\infty, \infty)$ //

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2-x) = \sqrt[3]{2-x+1} = \sqrt[3]{3-x}$ $(-\infty, \infty)$ //

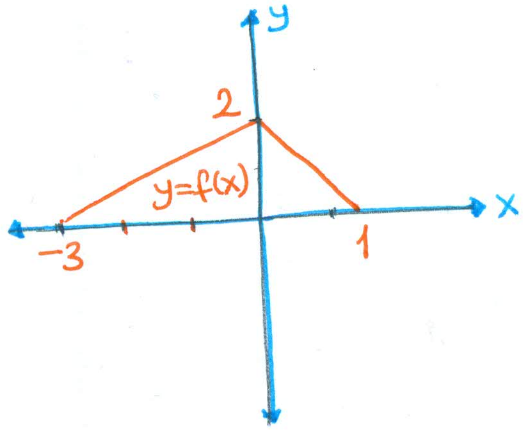
8. f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Her bir fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a) $y = f(-x)$

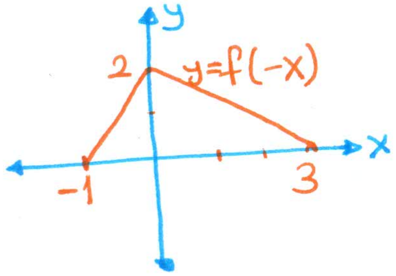
b) $y = -f(x)$

c) $y = -2f(x+1) + 1$

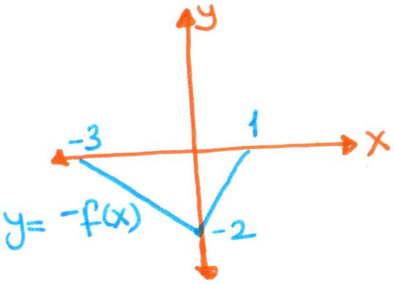
d) $y = 3f(x-2) - 2$



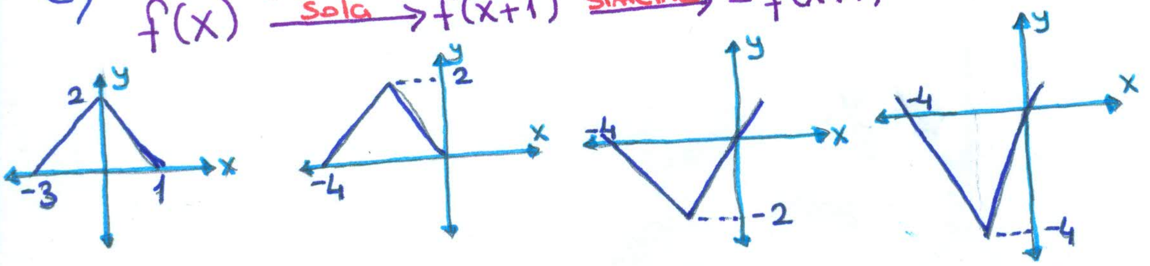
a) $f(-x)$, $f(x)$ in grafiğinin y-eksenine göre simetriğidir.



b) $y = -f(x)$, $f(x)$ in grafiğinin x-eksenine göre simetriğidir.

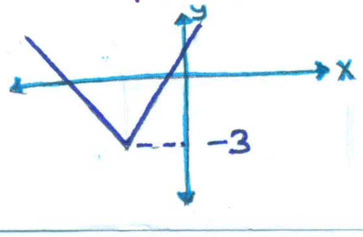


c) $f(x) \xrightarrow[\text{sola}]{\text{1 birim}} f(x+1) \xrightarrow[\text{simetrik}]{\text{x'e göre}} -f(x+1) \xrightarrow[\text{uzama}]{\text{2 kat dikey}} -2f(x+1)$

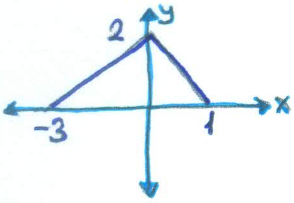


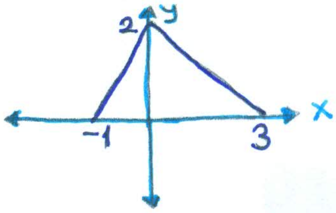
1 birim yukarı

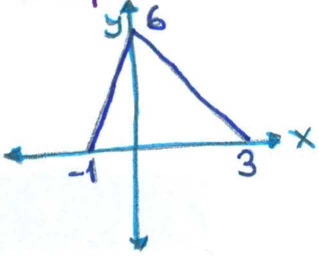
$-2f(x+1) + 1$

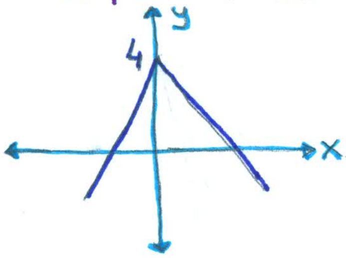


d) $f(x) \xrightarrow[\text{sağa}]{\text{2 birim}} f(x-2) \xrightarrow[\text{uzama}]{\text{3 kat dikey}} 3f(x-2) \xrightarrow[\text{aşağı}]{\text{2 birim}} 3f(x-2)-2$









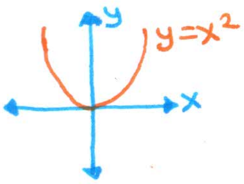
9) Uygun bir dönüşüm uygulayarak aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

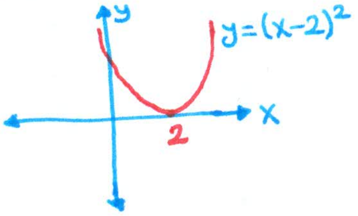
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

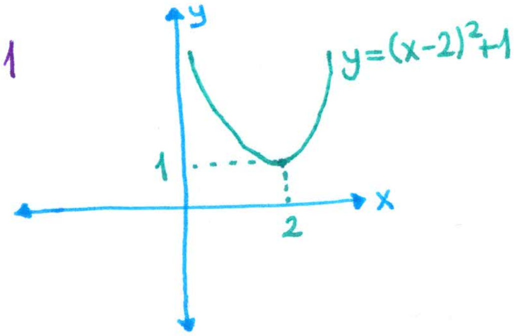
b) $f(x) = 4 - |x-2|$

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$

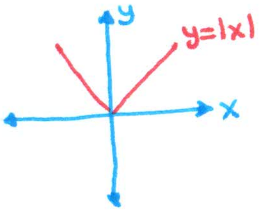
$x^2 \xrightarrow[\text{sağa}]{\text{2 birim}} (x-2)^2 \xrightarrow[\text{yukarı}]{\text{1 birim}} (x-2)^2 + 1$

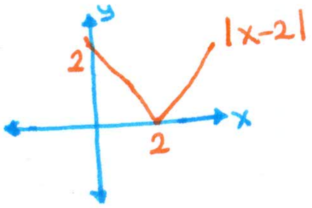


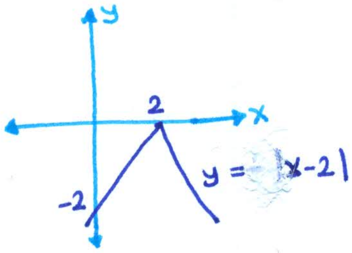


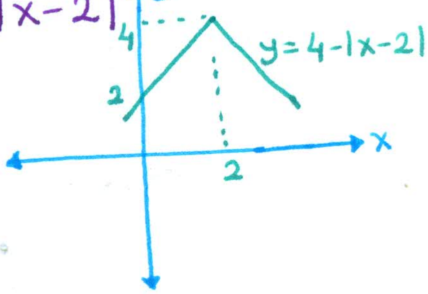


b) $|x| \xrightarrow[\text{sağa}]{\text{2 birim}} |x-2| \xrightarrow[\text{simetrik}]{\text{x'e göre}} -|x-2| \xrightarrow[\text{yukarı}]{\text{4 birim}} 4 - |x-2|$









10. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirleyiniz.

a) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{(2-x)(x-5)}}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|\sin x|+\sin x}}$

d) $f(x)=\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

a) $1-\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\geqslant 0$

$$1\geqslant\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$$
$$1\geqslant 1-\sqrt{1-x^2}$$
$$\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$$
$$1-x^2\geqslant 0$$
$$\underbrace{1\geqslant x^2}_{1}$$

$$1-\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$$
$$1\geqslant\sqrt{1-x^2}$$
$$1\geqslant 1-x^2$$
$$\underbrace{x^2\geqslant 0}_{2}$$

$$1-x^2\geqslant 0$$
$$\underbrace{1\geqslant x^2}_{3}$$

1, 2 ve 3 ten T.K.: $[-1,1]$

b) $\dfrac{x+3}{(2-x)(x-5)}\geqslant 0$

$x\neq 2$, $x\neq 5$

x		-3		2		5	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$

T.K.: $(-\infty,-3]\cup(2,5)$

c) $|\sin x|+\sin x>0 \Rightarrow \sin x>0 \Rightarrow 2n\pi<x<2n\pi+\pi$ $(n=0,\mp1,\mp2,\ldots)$

T.K.: $(2n\pi,(2n+1)\pi)$

d) $\sqrt{x-4}\rightarrow x-4\geqslant 0\Rightarrow \underline{x\geqslant 4}$

$$x-3-2\sqrt{x-4}\geqslant 0$$
$$x-3\geqslant 2\sqrt{x-4}$$
$$(x-3)^2\geqslant 4(x-4)$$
$$x^2-6x+9-4x+16\geqslant 0$$
$$x^2-10x+25\geqslant 0$$
$$(x-5)^2\geqslant 0$$ → Her x için sağlanır.

$x-3+2\sqrt{x-4}\geqslant 0$ *

$x\geqslant 4$ olduğundan * ifadesi sağlanır.

T.K.: $[4,\infty)$

11. $f(n+1)=\dfrac{2f(n)+1}{2}$, $n=1,2,\ldots$ ve $f(1)=2$ ise $f(101)=?$

$f(1)=2=\frac{4}{2}$

$f(2)=\dfrac{2f(1)+1}{2}=\dfrac{5}{2}$

$f(3)=\dfrac{2f(2)+1}{2}=\dfrac{6}{2}$

$f(4)=\dfrac{2f(3)+1}{2}=\dfrac{7}{2}$

$\vdots$

$f(n)=\dfrac{n+3}{2} \quad \Rightarrow f(101)=\dfrac{104}{2}=52$

12. f tanım kümesi $[-3,5]$ olan bir fonksiyon ve $g(x)=|3x+4|$ olsun. $(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|3x+4|)$

f in tanım kümesi $[-3,5]$ olduğundan,

$-3\le|3x+4|\le 5$ olmalıdır.

$\Rightarrow |3x+4|\le 5$

$\Rightarrow -5\le 3x+4\le 5 \Rightarrow -9\le 3x\le 1$

$-3\le x\le \frac{1}{3}$ T.K.: $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$

13. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\neq 0$ ise $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ fonksiyonunu bulunuz.

$D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ $(x\neq -1)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{\cancel{x}}\cdot\dfrac{\cancel{x}}{x+1}$ $(x\neq 0)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x\neq -1)$

$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{1-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x-1}{x+1}}=\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{\cancel{x+1}}\cdot\dfrac{\cancel{x+1}}{x+\cancel{1}+x-\cancel{1}}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}=\dfrac{1}{x}$

14. f, g ve h, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = x^2-1$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ile belirli fonksiyonlar olsun. $ho(fog)(x)$ bileşke fonksiyonunu hesaplayınız.

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1 = x^2+1-1 = x^2$$

$$h(f(g(x))) = h(x^2) = x^2$$

15. $3f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 3$, $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$3f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 3$$

$x \rightarrow \frac{1}{x}$ yazalım.

$$5/\ 3f\left(\frac{1}{x}\right) + 5f(x) = x - 3$$

$$-3/\ 5f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$\cancel{15f\left(\frac{1}{x}\right)} + 25f(x) = 5x - 15$$

$$\cancel{-15f\left(\frac{1}{x}\right)} - 9f(x) = \frac{-3}{x} + 9$$

$$+$$

$$16f(x) = 5x - \frac{3}{x} - 6$$

$$f(x) = \frac{5}{16}x - \frac{3}{16x} - \frac{3}{8} \quad //$$

16. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x^2-10x-11}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$x^2 - 10x - 11 \neq 0$$

$$-11 \quad +1$$

$$x \neq 11, \quad x \neq -1$$

$$\text{T.K.}: \mathbb{R} - \{-1, 11\} \quad //$$