REGRESYON

SAYISAL YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ - REGRESYON

- Enterpolasyon, ayrık noktalarda değerleri bilinen bir fonksiyonun, bu noktalardan geçen bir polinom veya başka bir fonksiyon ile yaklaşık olarak hesaplanabilme işlemidir.

- Enterpolasyon işlemi sırasında polinomlar için alınan nokta sayısı, kullanılan polinomun üssünden bir fazla olmalıdır.

- Çok sayıda değerin bilindiği bazı problemlerde ise, bu değerlerin tümünün kullanılması iyi bir çözüm için gereklidir.

- Bir diğer nokta ise yaklaşık olarak kullanılan enterpolasyon fonksiyonu F(x), verilen bir f(x) fonksiyonunu ancak belli bir aralıkta tanımlar. Bazı hallerde gerçek fonksiyon ile enterpolasyon fonksiyonu verilen aralık dışında birbirlerinden çok farklı olabilir.

Bu benim enterpolasyon fonksiyonumdu

- Enterpolasyon yapılabilmesi için çizilmiş eğri, gerçek f(x) fonksiyonunun değişimine çok yakın olmalıdır. Aksi taktirde arada bir fark meydana gelir ve **yi** değerleri için

gerçek fonk

$$y_i = F(x_i) + \varepsilon_i$$

Bu x'lerden bu y'leri veren fonksiyonu bul

Eşitliği geçerli olur. **Ɛi ,** i.'inci ölçmedeki toplam hatayı gösterir. Xi 'lerin tespitinde de hata yapılmış ise çözüm gittikçe zorlaşır.

Ben bu enterpolasyon fonksiyonumu belirli bir epsilon hatası ile bulmaya çalışıyorum

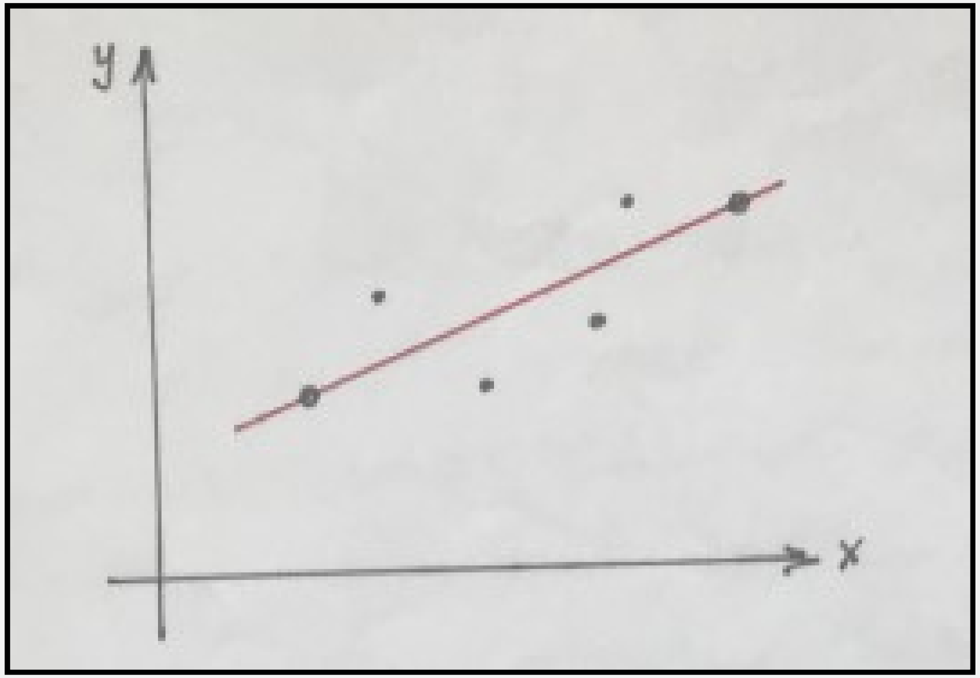
Regresyonun enterpolasyondan farkı enterpolasyonda bana belirli bir noktalar veriliyor ve bu noktalardan geçen bir fonksiyon bulmaya çalışıyorduk. Ara değerler bana sorulduğunda fonksiyonda hemen yerine koyup o değerleri buluyorduk

Regresyonda ise aynı şekilde bana verilmiş olan noktalardan fonksiyon geçirmeye çalışıyorum ama geçirirken yaklaşık bir hatayı kabul ederek geçirmeye çalışıyorum

işte ben regresyon yönteminde yukarıdaki hatayı minimize ederek bulmaya çalışıcam

EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

Fiziksel olayların çoğunda, iki veya daha fazla birbirine bağlı değişken bulunur. Bir olayın deneysel sonucunun, analatik olarak incelenmesi olayın formüle bağlanması ile mümkündür.



Zamana göre değişen bir olayda, değişik aralıklarla ölçülen zaman için n adet de f(x) değeri ölçülmüş olsun. Gözlenen olayın doğrusal bir değişim göster-mesi bekleniyorsa beklenen doğru denklemi;

$y = A + BX$ olarak yazılabilir.

Bu durumda gözlemdeki X_G değerinden hesaplanan

$y = A + BX_G$ değeri ile gözlemle elde edilen y_G arasındaki $y_G - (A + BX_G)$ farkı minimum olacak olacak şekilde bir doğru denklemi bulmak isteyelim. i'inci gözlemdeki farkı

$d_i = y_i - A - Bx_i$ şeklinde yazabiliriz.

B. G'ler gerçek ya da gözlemlenen anlamında

Gerçek x değerlerine karşılık gerçek bir y değerim var

Ben bu y değerlerini
bulurken hatayı minimize
edicem

Gerçek olan bu y değerin-
den geçirmek istediğim fonk-
neyse burda A+Bx doğru-
su var geçirmek istedi-
ğim doğrudan elde ettiğim
y değerleri arasındaki farkı
alıyorum

Bu da
açılmış halidir
burda n tane değerim
varsa n tane farkım
olucak
Bu 1.sinden gelen fark
bu ayrıca 2.sinden 3.sünden
falan gelicek

Ancak bu farklar (-) veya (+) olacağına göre teorik fonksiyonun göstereceği doğru en uygun doğru olmayabilir. Bu bakımdan fonksiyonlar yerine, fonksiyonların kareleri toplamının minimum olması şartını sağlayan fonksiyonu belirlemek gerekir. Bu da A ve B katsayılarının bulunması ile olur.

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2$$

S; A ve B'nin değişkeni olarak değişecektir. S'nin A ve B'ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlersek S'yi en küçük değere eşitlemiş oluruz.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2$$

B'ye göre türev alındı

A'ya göre türev alındı

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n} 2(A + Bx_i - y_i) = \sum 2A + \sum 2Bx_i - \sum 2y_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = \sum_{i=1}^{n} 2(A + Bx_i - y_i)\,x_i = \sum 2A\,x_i + \sum 2Bx_i^2 - \sum 2x_i y_i = 0$$

$$\underbrace{\begin{aligned} \sum A + \sum Bx_i - \sum y_i &= 0 \\ \sum Ax_i + \sum Bx_i^2 - \sum x_i y_i &= 0 \end{aligned}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A = n.A \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Bx_i = B \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n.A + B \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i + B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$n \qquad x_i$

x_i x_i'

$$\underbrace{\begin{array}{l} \sum A + \sum B x_i - \sum y_i = 0 \\ \sum A x_i + \sum B x_i^2 - \sum x_i y_i = 0 \end{array}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A = n.A \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} B x_i = B \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n.A + B \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i + B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Örnek.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	0	1.0	0	0
1	2	5.1	4	10.2
2	4	9.0	16	36.0
3	6	13.0	36	78.0
4	8	17.0	64	136.0
5	+ 10	+ 21.0	+ 100	+ 210.0
	30	66.1	220	470.2

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & x_i \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ x_i \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 30 \\ 30 & 220 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.1 \\ 470.2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} y_i \\ x_i y_i \end{array}$$

$$\Delta = 1320 - 900 \Rightarrow \Delta = 420$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 66.1 & 30 \\ 470.2 & 220 \end{bmatrix} = 14542 - 14106 = 436$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 6 & 66.1 \\ 30 & 470.2 \end{bmatrix} = 2821.2 - 1983 = 838.2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 6A + 30B = 66.1 \\ 30A + 220B = 470.2 \end{array}}$$

Bu yolla da A ve B'yi bulabilirsin

$$A = \frac{\Delta A}{\Delta} = \frac{436}{420} = 1.03809$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{838.2}{420} = 1.99571$$

$$y = A + BX \qquad y = 1.03809 + 1.99571\,x$$

ÖRNEK:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	0	0	0	0
1	2	8	4	16
2	3	10	9	30
3	4	14	16	~~20~~56
4	5	17	25	85
5	7	22	49	154
6	8	26	64	208
7	9	29	81	261
8	10	32	100	320
9	+ 12	+ 35	+ 144	+ 420
	60	193	492	1550

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 60 \\ 60 & 492 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193 \\ 1550 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \Delta = 4920 - 3600 = 1320$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 193 & 60 \\ 1550 & 492 \end{bmatrix} = 94956 - 93000 = 1956$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 10 & 193 \\ 60 & 1550 \end{bmatrix} = 15500 - 11580 = 3920$$

$$A = \frac{\Delta A}{\Delta} = \frac{1956}{1320} = 1.48 \qquad B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{3920}{1320} = 2.96$$

$$y = 1.48 + 2.96\,x$$

ÖRNEK:

Aşağıda verilmiş olan noktalardan $y=ax$ doğrusunu geçiriniz.

$$d_i = y_i - a x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i)^2 \rightarrow \text{min. yapmak için}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a x_i) = 0$$

$$\sum x_i y_i = a . \sum x_i^2 \rightarrow a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\left[x_i^2 \right] \left[a \right] = \left[x_i y_i \right]$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
3	2.25	9	6.75
4	3	16	12
5	3.75	25	18.75
6	4.	36	24
7	5.75	+ 49	+ 40.25
		135	101.75

135 101.75

$$a = \frac{101.75}{135} = 0.7527$$

$$y = 0.7537 x$$

EN KÜÇÜK KARELERDE POLİNOM YAKLAŞIMI

Verilen noktalardan $F(x) = A + BX + CX^2$ parabolü geçirilmek istenirse hata kareleri toplamının min. olması için:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[(A + Bx_i + Cx_i^2) - y_i \right]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[A + Bx_i + Cx_i^2 - y_i \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = \sum_{i=1}^{n} 2[x_i]\left[A + Bx_i + Cx_i^2 - y_i \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = \sum_{i=1}^{n} 2[x_i^2]\left[A + Bx_i + Cx_i^2 - y_i \right] = 0$$

$$\sum A + \sum x_i B + \sum x_i^2 C = \sum y_i$$

$$\sum x_i A + \sum x_i^2 B + \sum x_i^3 C = \sum x_i y_i$$

$$\sum x_i^2 A + \sum x_i^3 B + \sum x_i^4 C = \sum x_i^2 y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Örnek:

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
2	1	4	8	16	2	4
3	6	9	27	81	18	54
5	22	25	125	625	110	550
6	33	36	216	1296	198	1118
8	61	64	512	4096	488	3904
24	123	138	888	6114	816	5700

$$\begin{bmatrix} 5 & 24 & 138 \\ 24 & 138 & 888 \\ 138 & 888 & 6114 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 123 \\ 816 \\ 5700 \end{bmatrix}$$

$\Delta = 8316$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 123 & 24 & 138 \\ 816 & 138 & 888 \\ 5700 & 888 & 6114 \end{bmatrix} = -24918 \Rightarrow A = -3$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 5 & 123 & 138 \\ 24 & 816 & 888 \\ 138 & 5700 & 6114 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Delta C = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 123 \\ 24 & 138 & 816 \\ 138 & 888 & 5700 \end{bmatrix} = 8316 \Rightarrow C = 1$$

$y = A + BX + CX^2$

$y = X^2 - 3$

$A = aw^b$

$\ln y = ab \ln x$

$\ln y - ab$

$\log A = \log a w^b$

$\log A = \log a + \log w^b$

$y = \quad A \quad bx$

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNDE KULLANILACAK FONKSİYONUN SEÇİMİ :

1. Fark tablosunun incelenmesi uydurulacak polinomun derecesini verebilir.

2. Grafik çizilir ve simetri aranır. Eğer y eksenine göre simetri varsa,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^{2k+2}$$

gibi bir polinom kullanılabilinir.

3. Verilen değerler periyodik değişiyorsa sinüs veya cosinüs gibi trigonometrik terimler kullanılır.

4. Logaritmik kağıt üzerine çizilen grafik, kullanılacak logaritmik veya üstel fonksiyonlar hakkında bilgi verebilir.

5. Bazen verilen değerlerden yararlanılarak çizilen grafik parçalara ayrılır ve her parçaya ayrı bir eğri uydurulur.

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE DOĞRUSAL (LINEER) OLMAYAN FONKSİYONLARIN UYDURULMASI

Bazı durumlarda deneylerden elde edilen değerlere bir polinom uyduramıyorsak, fonksiyonları

$$F(x,a,b) = a * e^{bx}$$

$$F(x,a,b) = a * x^{b}$$

Katsayılar bakımından doğrusal olmayan başka şekillerde tanımlayabiliriz. Bu denklemlerin çözümü güç olduğundan logaritmaları alınarak lineer yapılabilir.

doğal logaritma

$$y = a.b^{x}$$

$$\ln y = \ln a + x.\ln b$$

$$Y = A + Bx$$

$$a = e^{A} \qquad b = e^{B}$$

ÖRNEK:

$$y = a \cdot b^x$$

x	y	$\ln y$	x^2	$x \ln y$
0	5.2	1.649	0	0
2	56.628	4.037	4	8.074
3	186.872	5.230	9	15.690
4	616.679	6.424	16	25.696
5	2035.040	7.618	25	38.090
14		24.958	54	87.550

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y \\ \sum x \ln y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.958 \\ 87.550 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 5.54 - 14^2 = 74$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 24.958 & 14 \\ 87.550 & 54 \end{bmatrix} = 122.032 \qquad \Delta B = \begin{bmatrix} 5 & 24.958 \\ 14 & 87.550 \end{bmatrix} = 88.338$$

$A = 1.649081$ $\quad B = 1.1937567$ $\quad y = 5.202 * 3.3^x$

$a = 5.2021972$ $\quad b = 3.2994532$

ÖRNEK:

$y = a x^b$ eğrisinin geçirilmesi

x	y	$\ln x$	$\ln y$	$(\ln x)^2$	$\ln x \ln y$
1	3	0	1.099	0	0
3	15.588	1.099	2.747	1.208	3.019
5	33.541	1.609	3.513	2.589	5.652
		2.708	7.359	3.797	8.671

$y = a x^b$

$\ln y = b \ln x + \ln a \qquad a = e^A \qquad b = B$

$y = A + BX$

$$\begin{bmatrix} n & \sum \ln x \\ \sum \ln x & \sum (\ln x)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y \\ \sum \ln x \ln y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2.708 \\ 2.708 & 3.797 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.359 \\ 8.671 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 11.391 - 7.333264 = 4.057736$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 7.359 & 2.708 \\ 8.671 & 3.797 \end{bmatrix} = 4.461053$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 3 & 7.359 \\ 2.708 & 8.671 \end{bmatrix} = 6.084828$$

$$A = \frac{\Delta A}{\Delta} = \frac{4.461053}{4.057736} = 1.099395$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{6.084828}{4.057736} = 1.4995623$$

$a = \ln A \Rightarrow 3.0023491$

$b = B \Rightarrow 1.4995623$

$y \cong 3x^{1.5}$

awb

tnctbln w

A + Bx

ÖRNEK:

$y = a.e^{bx}$ eğrisinin geçirilmesi

x	y	$\ln y$	$x \ln y$	x^2
0	1	0	0	0
1	2	0.6931471	0.6931471	1
2	6	1.7917595	3.583519	4
3		2.4849066	4.2766661	5

$$y = a.e^{bx}$$
$$\ln y = \ln a + bx$$
$$Y = A + BX$$

$a = e^{A}$ $\quad$ $b = B$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y \\ \sum x.\ln y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4849066 \\ 4.2766661 \end{bmatrix}$$

$\Delta = 6$ $\quad$ $\Delta A = -0.4054653$

$\Delta B = 5.3752785$

$A = -0.0675775$ $\quad$ $B = 0.8958797$

$a = e^{A} = 0.9346552$

$b = B = 0.8958797$

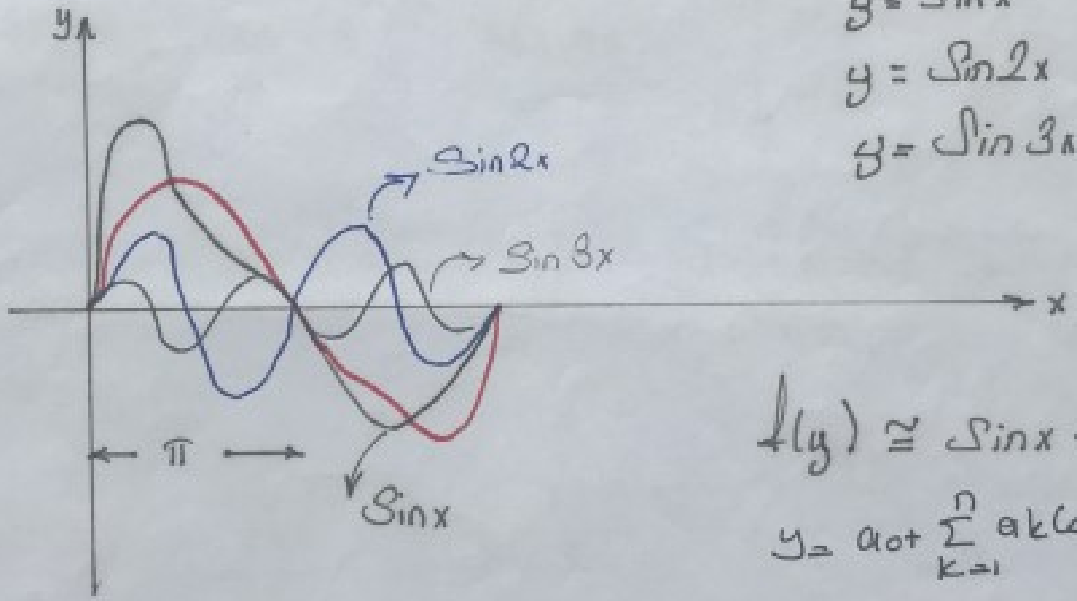
$$y = 0.9346552 . e^{0.8958797x}$$

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE TRİGONOMETRİK FONKSİYON YAKLAŞIMI

$y = \sin x$

$y = \sin 2x$

$y = \sin 3x$



$f(y) \cong \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

$y = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx +$
$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx$

terim sayısının verilmesi gerekir.

HATALARIN HESAPLANMASI

$y_i = a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i$ eğrisi geçirildiğinde ;

$\Delta y_1 = y_1 - (a_0 + a_1 \cos x_1 + b_1 \sin x_1)$

$\Delta y_2 = y_2 - (a_0 + a_1 \cos x_2 + b_1 \sin x_2)$

$\vdots$

$\Delta y_n = y_n - (a_0 + a_1 \cos x_n + b_1 \sin x_n)$

$$F(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$F(x_i) = a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_0} = 2 \sum (a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i - y_i)$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_1} = 2 \sum (a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_i - y_i) \cos x_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial b_1} = 2 \sum (a_0 + a_1 \cos x_i + b_1 \sin x_1 - y_i) \sin x_i$$

$$\sum a_0 + a_1 \sum \cos x_i + b_1 \sum \sin x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum \cos x_i + a_1 \sum \cos x_i^2 + b_1 \sum \sin x_i \cos x_i = \sum y_i \cos x_i$$

$$a_0 \sum \sin x_i + a_1 \sum \sin x_i \cos x_i + b_1 \sum \sin x_i^2 = \sum y_i \sin x_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum \cos x_i & \sum \sin x_i \\ \sum \cos x_i & \sum \cos x_i^2 & \sum \sin x_i . \cos x_i \\ \sum \sin x_i & \sum \sin x_i . \cos x_i & \sum \sin x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cos x_i \\ \sum y_i \sin x_i \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde:

$F(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$ eğrisi geçirilmek istenirse;

$\cos x = c_1 \qquad \sin x = s_1$

$\cos 2x = c_2 \qquad \sin 2x = s_2$

$$M = \sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_0} = 2\sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_1} = 2\sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)c_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial a_2} = 2\sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)c_2$$

$$\frac{\partial M}{\partial b_1} = 2\sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)s_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial b_2} = 2\sum (a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_1s_1 + b_2s_2 - y_i)s_2$$

$$
\begin{bmatrix}
n & \cancelto{0}{\Sigma c_1} & \cancelto{0}{\Sigma c_2} & \cancelto{0}{\Sigma s_1} & \cancelto{0}{\Sigma s_2} \\
\cancelto{0}{\Sigma c_1} & \Sigma c_1^2 & \cancelto{0}{\Sigma c_1 c_2} & \cancelto{0}{\Sigma s_1 c_1} & \cancelto{0}{\Sigma s_2 c_1} \\
\cancelto{0}{\Sigma c_2} & \cancelto{0}{\Sigma c_1 c_2} & \Sigma c_2^2 & \cancelto{0}{\Sigma s_1 c_2} & \cancelto{0}{\Sigma s_2 c_2} \\
\cancelto{0}{\Sigma s_1} & \cancelto{0}{\Sigma c_1 s_1} & \cancelto{0}{\Sigma c_2 s_1} & \Sigma s_1^2 & \cancelto{0}{\Sigma s_2 s_1} \\
\cancelto{0}{\Sigma s_2} & \cancelto{0}{\Sigma c_1 s_2} & \cancelto{0}{\Sigma c_2 s_2} & \cancelto{0}{\Sigma s_1 s_2} & \Sigma s_2^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i c_1 \\ \Sigma y_i c_2 \\ \Sigma y_i s_1 \\ \Sigma y_i s_2 \end{bmatrix}
$$

$$\Sigma c_1 = \sum_{i=0}^{n} \cos x_i = 0$$

$$\Sigma s_1 = \sum_{i=0}^{n} \sin x_i = 0$$

$$\Sigma c_2 = \sum_{i=0}^{n} \cos 2x_i = 0$$

$$\Sigma s_2 = \sum_{i=0}^{n} \sin 2x_i = 0$$

$$\Sigma c_1^2 = \sum_{i=0}^{n} \cos^2 x_i$$

$$\Sigma c_2^2 = \sum_{i=0}^{n} \cos^2 2x_i$$

$$\Sigma s_1 s_2 = \sum_{i=0}^{n} \sin x_i \sin 2x_i = 0$$

$$\Sigma c_1 c_2 = \sum_{i=0}^{n} \cos x_i \cos 2x_i = 0$$

$$\Sigma c_1 s_1 = \sum_{i=0}^{n} \cos x_i \sin x_i = 0$$

$$\Sigma c_1 s_2 = \sum_{i=0}^{n} \cos x_i \sin 2x_i = 0$$

$$\Sigma c_2 s_1 = \sum_{i=0}^{n} \cos 2x_i . \sin x_i = 0$$

$$\Sigma c_2 s_2 = \sum_{i=0}^{n} \cos 2x_i . \sin 2x_i = 0$$

$$\Sigma s_1^2 = \sum_{i=0}^{n} \sin^2 x_i$$

$$\Sigma s_2^2 = \sum_{i=0}^{n} \sin^2 2x_i$$

ÖRNEK:

$y = a_0 + a_1 \sin x$ geçirilmesi

x	y	$\sin x$	$\sin^2 x$	$y \sin x$
0°	2.5	0	0	0
20°	3.526	0.342	0.117	1.206
40°	4.428	0.643	0.413	2.847
60°	5.098	0.866	0.750	4.415
80°	5.454	0.985	0.970	5.290
	21.006	2.836	2.25	13.758

$$n a_0 + a_1 \sum \sin x = \sum y$$

$$a_0 \sum \sin x + a_1 \sum \sin^2 x = \sum y \sin x$$

$$5 a_0 + 2.25 a_1 = 21.006$$

$$2.836 a_0 + 2.25 a_1 = 13.758$$

$a_0 = 2.571$ $\quad a_1 = 2.874$

$$y = 2.571 + 2.874 \sin x$$

ÖRNEK:

$y = a_0 + a_1 \cos x$

x	y	$\cos x$	$\cos^2 x$	$y.\cos x$
0°	-0.400	1	1	-0.400
15°	-0.332	0.966	0.933	-0.321
30°	-0.132	0.866	0.750	-0.114
45°	0.186	0.707	0.500	0.132
60°	0.600	0.500	0.250	0.300
75°	1.082	0.259	0.067	0.280
	1.004	4.298	3.5	-0.123

$$n a_0 + a_1 \sum \cos x = \sum y$$

$$a_0 \sum \cos x + a_1 \sum \cos^2 x = \sum y \cos x$$

$$6 a_0 + 4.298 a_1 = 1.004$$

$$4.298 a_0 + 3.5 a_1 = -0.123$$

$a_0 = 1.6 \quad a_1 = -2.00$

$y = 1.6 - 2 \cos x$

ÇOKLU REGRESYON

Temelde diğer eğri uydurma yöntemlerine benzer. Farkı değişken sayısının birden fazla olmasıdır. Çoklu Regrasyonda aranılan katsayıların $Q = a_0 D^{a_1} S^{a_2}$ eşitlikte gösterildiği yapıda olduğunu düşünerek yöntemi uygulayalım.

$$Q = a_0 D^{a_1} S^{a_2}$$

$$\underbrace{\log Q}_{Y} = \underbrace{\log a_0}_{a_0} + a_1 \underbrace{\log D}_{X_1} + a_2 \underbrace{\log S}_{X_2}$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$F(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ olduğunu kabul edelim.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i})\right)^2 = \sum \left(y_i^2 - 2 y_i (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}) + (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i})^2 \right)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}))^2 = \sum (y_i^2 - 2 y_i (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}) + (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i})^2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum y_i + 2 \sum (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}) = \phi$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum y_i x_{1i} + 2 \sum (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}) x_{1i} = \phi$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum y_i x_{2i} + 2 \sum (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}) x_{2i} = \phi$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i} x_{1i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{bmatrix}$$

Örnek Kanal içindeki akışa ilişkin yapılan bir düzenekte boru içindeki akışkanın miktarı, boru çapı ve eğimi verilmektedir. Buna göre $Q = a_0 D^{a_1} S^{a_2}$ şeklinde istenildiğine göre Q eşitliğindeki a_0, a_1 ve a_2 katsayılarını belirleyiniz.

Deney	D Çap(m)	S Eğim	Q Akış (m³/sn)
1	1	0.001	1.4
2	2	0.001	8.3
3	3	0.001	24.2
4	1	0.01	4.7
5	2	0.01	28.9
6	3	0.01	84.0
7	1	0.05	11.1
8	2	0.05	69.0
9	3	0.05	200.0

$$Q = a_0 D^{a_1} S^{a_2}$$

$$\underbrace{\log Q}_{y} = \underbrace{\log a_0}_{a_0} + a_1 \underbrace{\log D}_{x_1} + a_2 \underbrace{\log S}_{x_2}$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$\log Q \Rightarrow y$

$$y = a + a_1 \log D + a_2 \log D$$

$$a + a_1 x + a_2 x^2$$

$$a x_1 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2$$

Q	$\underbrace{\log Q}_{y}$	D	S	$\underbrace{\log D}_{X_1}$	$\underbrace{\log S}_{X_2}$	x_1^2	$x_1 y$	$x_1 x_2$	x_2^2	$x_2 y$
1.4	0.146	1	0.001	0	−3	0	0	0	9	−0.438
8.3	0.919	2	0.001	0.301	−3	0.0906	0.277	−0.903	9	−2.757
24.2	1.384	3	0.001	0.477	−3	0.228	0.66	−1.431	9	−4.152
4.7	0.672	1	0.01	0	−2	0	0	0	4	−1.344
28.9	1.461	2	0.01	0.301	−2	0.0906	0.439	−0.602	4	−2.922
84.0	1.924	3	0.01	0.477	−2	0.228	0.918	−0.954	4	−3.848
11.1	1.045	1	0.05	0	−1.301	0	0	0	1.693	−1.358
69.0	1.839	2	0.05	0.301	−1.301	0.0906	0.554	−0.392	1.693	−2.393
200	2.301	3	0.05	0.477	−1.301	0.228	1.0975	−0.621	1.693	−2.994
	11.695			2.334	−18.903	0.954	3.945	−4.903	44.079	−22.707

$$Q = a_0 D^{a_1} S^{a_2}$$

$$\underbrace{\log Q}_{y} = \underbrace{\log a_0}_{a_0} + a_1 \underbrace{\log D}_{x_1} + a_2 \underbrace{\log S}_{x_2}$$

X_2

$$\begin{bmatrix} \overset{n}{9} & \overset{X_1}{2.334} & \overset{X_2}{-18.903} \\ \overset{X_1}{2.334} & \overset{X_1^2}{0.954} & \overset{X_2 X_1}{-4.903} \\ \overset{X_2}{-18.903} & \overset{X_1 X_2}{-4.903} & \overset{X_2^2}{44.079} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.691 \\ 3.945 \\ -22.707 \end{bmatrix}$$

$a_0 = 1.7475$

$a_1 = 2.62$

$a_2 = 0.54$

$\log a_0 = 1.7475$ $\quad a_0 = 55.9$

$y = 1.7475 + 2.62 x_1 + 0.54 x_2$

$\log a_0 = 1.7475 \quad a_0 = 10^{1.7475}$

$\log Q = 1.7475 + 2.62 \log D + 0.54 \log S$

$Q = 55.9\, D^{2.62} S^{0.54}$