

LİNEER DÖNÜŞÜMLERDE TABAN DEĞİŞİMİ

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Lineer Dönüşümlerde Taban Değişimi

Bir vektör uzayındaki bir $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümünü, \mathbb{V} ve \mathbb{W} uzaylarının farklı tabanlarına göre de tanımlayabiliriz. Bu durumda, lineer dönüşümün matrisi de değişecektir. Bir \vec{u} vektörünün, \mathbb{V} uzayının standart taban dışındaki bir başka \mathcal{B} tabanına göre yazılışını $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ olarak yazdığımızı hatırlayın. Herhangi bir $\vec{u} \in \mathbb{V}$ vektörünün, T dönüşümü altındaki görüntüsünün, \mathbb{W} uzayının bir \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarını veren dönüşümün matrisini de kolayca bulabiliriz. Bu matrisi, $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ ile göstereceğiz. Yazılışa dikkat ederseniz, görüntü uzayının tabanını **sağ altta**, tanım uzayının tabanını da **sağ üstte** gösteriyoruz. Standart tabanlar için, tabanı genelde belirtmeyiz, ama bu kısımda standart tabanı \mathcal{E} kümesi ile ifade edeceğiz.

GÖSTERİMLER

Aşağıda, bazı gösterimlerin neyi ifade ettiği verilmiştir.

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer bir dönüşüm, \mathcal{B} , \mathbb{V} uzayının, \mathcal{S} ise \mathbb{W} uzayının tabanı olmak üzere,

- $[\vec{\mathbf{u}}]_{\mathcal{B}} : \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörünün \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını gösteren sütun matrisi
- $[T(\vec{\mathbf{u}})]_{\mathcal{S}} : T(\vec{\mathbf{u}}) \in \mathbb{W}$ vektörünün \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarını gösteren sütun matrisi,
- $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{S}} : \mathbb{V}$ uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{W} uzayının \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi
- $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} : \mathbb{V}$ uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{W} uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi
- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}} : \mathbb{V}$ uzayının \mathcal{S} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{W} uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi

Bir Lineer Dönüşümün Tabanlara Göre Değişim Matrisi

Tanım

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\mathcal{B} = \{ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n \}$ kümesi, \mathbb{V} uzayının tabanı, $\mathcal{S} = \{ \vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \dots, \vec{\mathbf{w}}_m \}$ kümesi de \mathbb{W} kümesinin tabanı olsunlar. $i = 1, 2, \dots, n$ için, $T(\vec{\mathbf{v}}_i)$ vektörü \mathbb{W} uzayında bir vektördür. Bu vektörün, \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarının sütun olarak yazılmasıyla elde edilen, $m \times n$ türünden matrise, T lineer dönüşümünün \mathcal{B} ve \mathcal{S} **tabanlarına göre matrisi denir** ve $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ ile gösterilir. Bu matris yardımıyla, herhangi bir $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörünün \mathcal{S} tabanına göre bileşenlerini kolayca bulabiliriz.

Bir Lineer Dönüşümün Tabanlara Göre Değişim Matrisi

Tanım

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, kümesi, \mathbb{V} ve \mathbb{W} uzaylarının tabanı sırasıyla $\mathcal{B} = \{ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n \}$ ve $\mathcal{S} = \{ \vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \dots, \vec{\mathbf{w}}_m \}$ olsun. Buna göre,

$$T(\vec{\mathbf{v}}_1) = a_{11} \vec{\mathbf{w}}_1 + a_{21} \vec{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{m1} \vec{\mathbf{w}}_m$$

$$T(\vec{\mathbf{v}}_2) = a_{12} \vec{\mathbf{w}}_1 + a_{22} \vec{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{m2} \vec{\mathbf{w}}_m$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{\mathbf{v}}_n) = a_{1n} \vec{\mathbf{w}}_1 + a_{2n} \vec{\mathbf{w}}_2 + \cdots + a_{mn} \vec{\mathbf{w}}_m$$

olmak üzere,

$$[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisi, T lineer dönüşümünün \mathcal{B} ve \mathcal{S} tabanlarına göre matrisidir.

Kısa Bilgi

$\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ vektörünün, \mathcal{B} tabanına göre koordinatları(bileşenleri)

$$[\vec{\mathbf{v}}]_{\mathcal{B}}$$

olmak üzere, $T(\vec{\mathbf{v}})$ vektörünün \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{S} tabanına göre koordinatları

$$[T(\vec{\mathbf{v}})]_{\mathcal{S}}$$

ile gösterilir ve

$$[T(\vec{\mathbf{v}})]_{\mathcal{S}} = [T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}} [\vec{\mathbf{v}}]_{\mathcal{B}}$$

eşitliği sağlanır. Aşağıdaki örneklerle, bir lineer dönüşümün farklı tabanlara göre matrisinin nasıl bulunduğunu inceleyiniz.

Örnek

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x + y, 4x - 2y)$ lineer dönüşümünün, \mathbb{R}^2 nin $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ standart tabanına göre, matrisinin

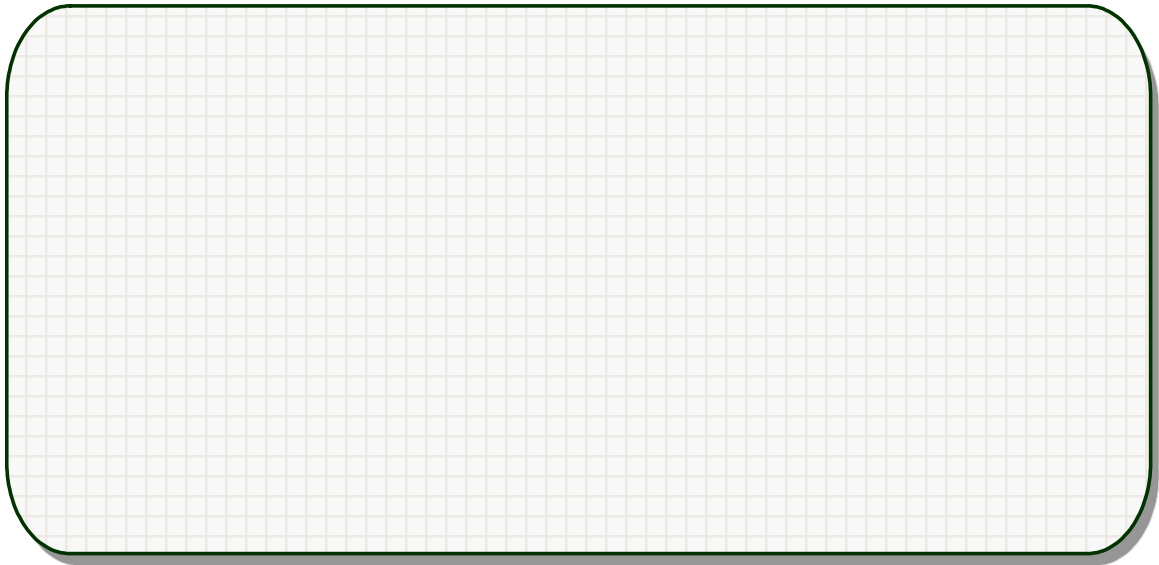
$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (3, 5)\}$ olmak üzere,

a) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

b) \mathbb{R}^2 uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

c) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.



Örnek

d) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının

$$\mathcal{S} = \{ \vec{w}_1 = (1, 1), \vec{w}_2 = (1, -1) \}$$

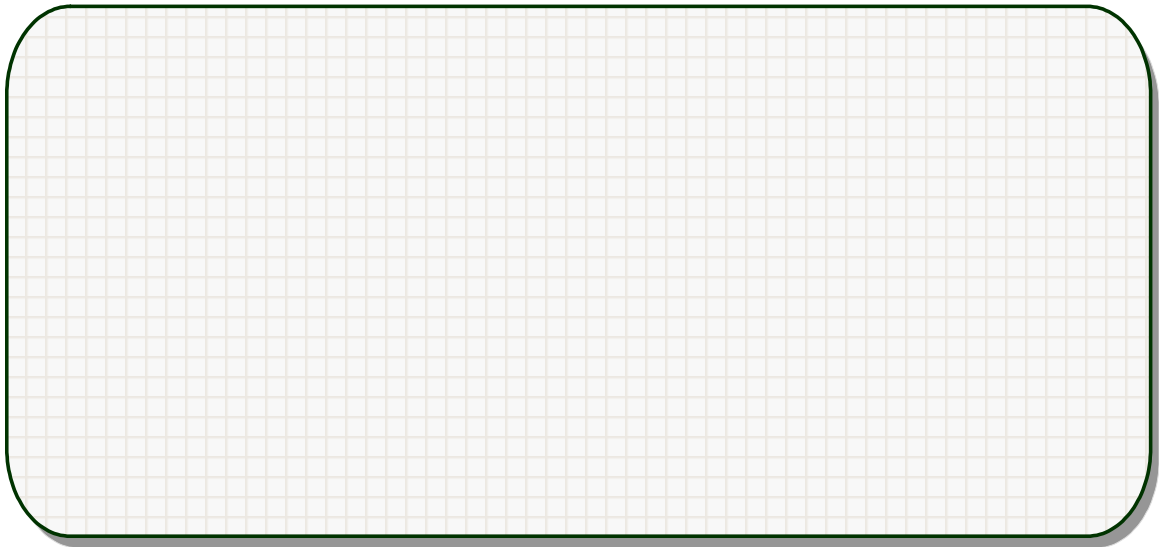
ortogonal tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[\mathbf{T}]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

e) \mathbb{R}^2 uzayının

$$\mathcal{S} = \{ (1, 1), (1, -1) \}$$

ortogonal tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}$ matrisini bulunuz.

f) $\vec{w} = (0, 1)$ için, yukarıda bulduğunuz matrislerin herbirini kullanarak, $\mathbf{T}(\vec{w})$ vektörünün standart tabana göre koordinatlarını bularak, eşit olduklarını doğrulayınız.



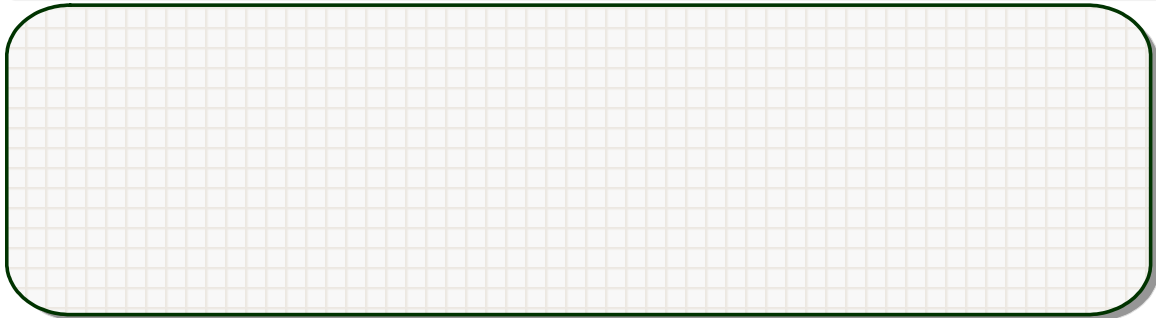
Örnek

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 2x - y)$ lineer dönüşümünün, \mathbb{R}^3 uzayının

$$\mathcal{B} = \{ \vec{w}_1 = (1, 2, 1), \vec{w}_2 = (1, 1, 0), \vec{w}_3 = (1, 0, 1) \}$$

tabanına göre matrisini bulunuz.

b) $\vec{u} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ vektörünün T lineer dönüşümü altındaki görüntüsünün, \mathbb{R}^3 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını bulunuz.



Örnek

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - z)$ lineer dönüşümü ile \mathbb{R}^3 uzayının

$$\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0) \}$$

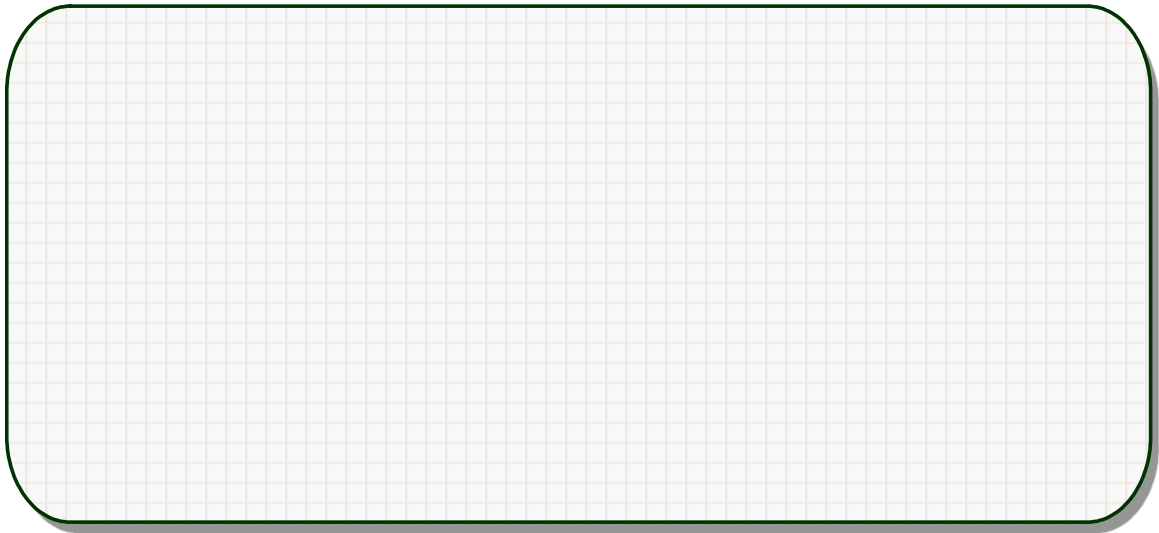
tabanı ve \mathbb{R}^2 uzayının

$$\mathcal{S} = \{ \vec{w}_1 = (1, 3), \vec{w}_2 = (3, 1) \}$$

tabanı veriliyor. T dönüşümünün \mathcal{B} ve \mathcal{S} tabanlarına göre matrisini bulunuz.

b) \mathbb{R}^3 uzayında, \mathcal{B} tabanına göre koordinatları $\vec{v} = (1, 1, 3)$ olan vektör için, $T(\vec{v})$ vektörünün, \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

c) T dönüşümünün standart tabanlara göre matrisini yazarak, b) seçeneğindeki durumla karşılaştırınız.



Problem

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$ lineer dönüşümü ile \mathbb{R}^2 uzayının, $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (2, 1) \}$ ve $\mathcal{S} = \{ \vec{w}_1 = (1, 1), \vec{w}_2 = (1, -1) \}$ tabanları veriliyor.

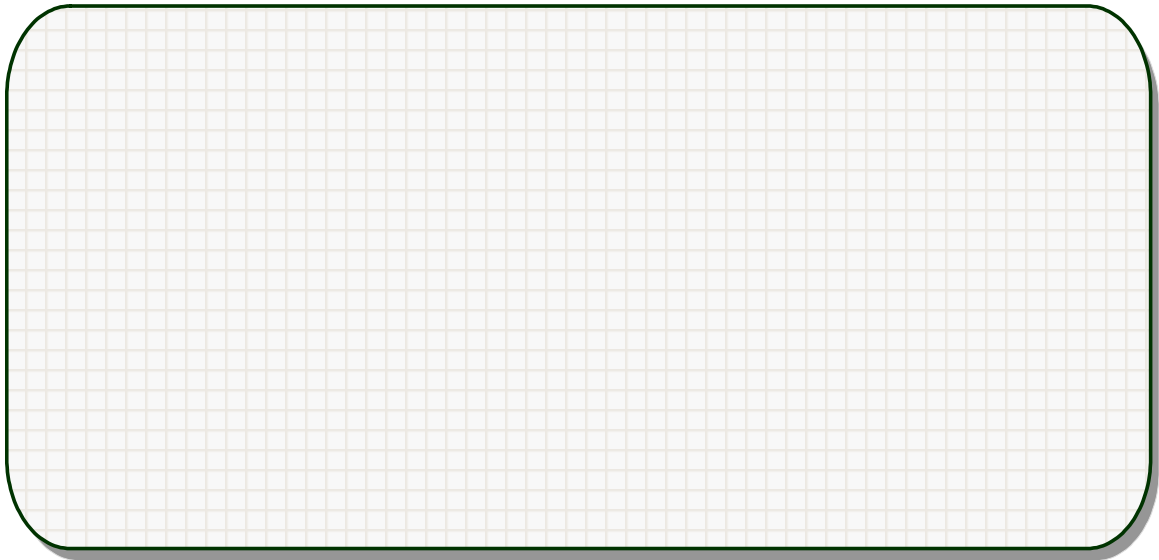
a) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının standart tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

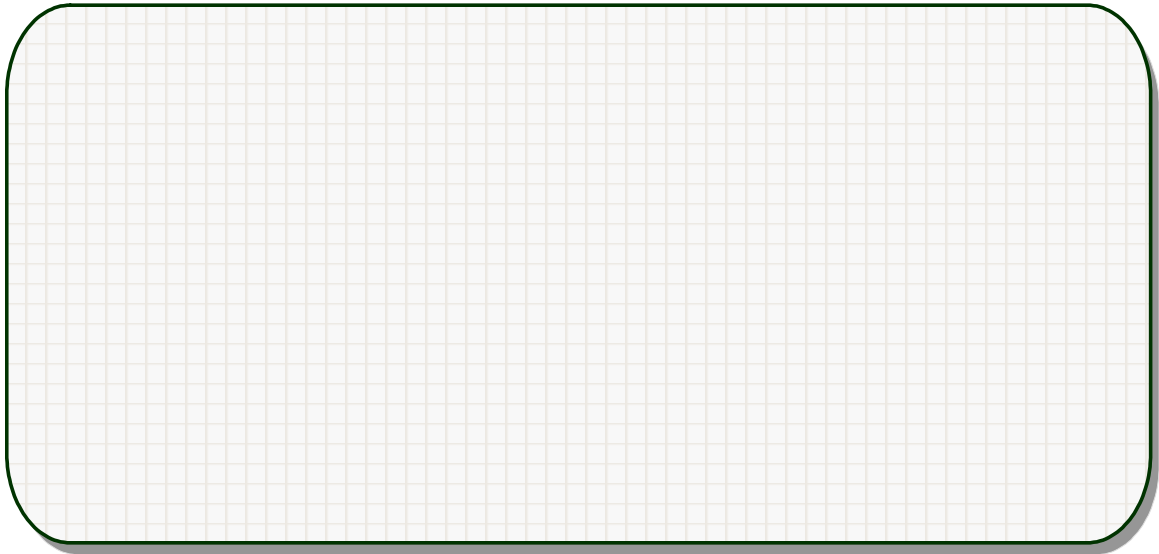
b) \mathbb{R}^2 uzayının standart tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

c) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

d) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{B} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının, \mathcal{S} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.

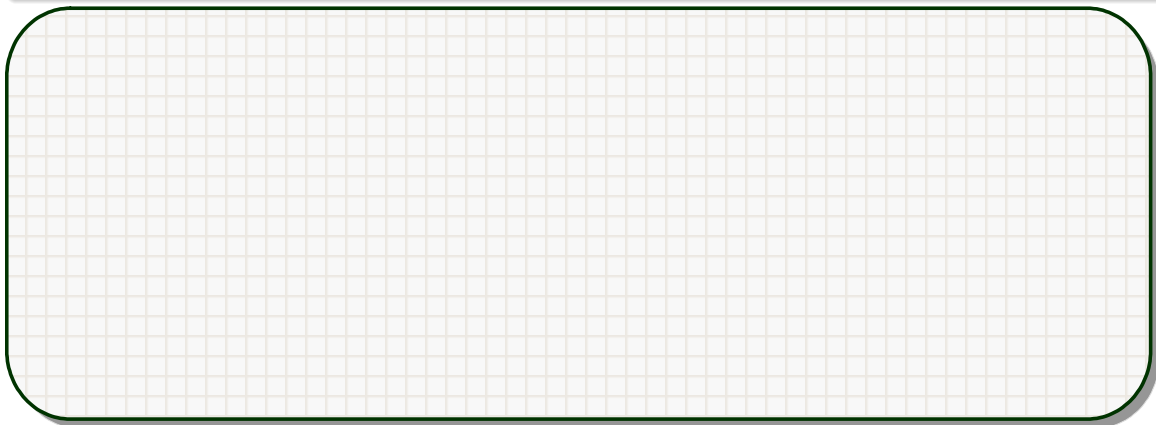
e) \mathbb{R}^2 uzayının \mathcal{S} tabanına göre koordinatları verilen bir vektörün, \mathbb{R}^2 uzayının, \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını veren lineer dönüşümün matrisi olan, $[T]_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}$ matrisini bulunuz.





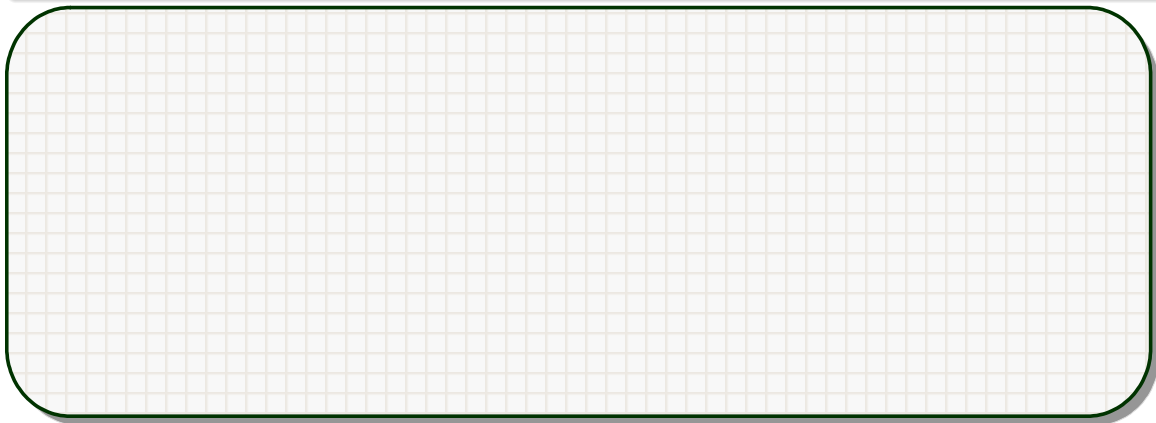
Problem

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 2x - y)$ lineer dönüşümünün, \mathbb{R}^3 uzayının $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1 = (1, 2, 1), \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \vec{v}_3 = (1, 0, 1) \}$ tabanına göre matrisini bulunuz.



Problem

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - z)$ lineer dönüşümü ile \mathbb{R}^3 uzayının $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)\}$ tabanı ve \mathbb{R}^2 uzayının $\mathcal{S} = \{(1, 3); (3, 1)\}$ tabanı veriliyor. T dönüşümünün \mathcal{B} ve \mathcal{S} tabanlarına göre matrisini bulunuz.



Lineer Dönüşümlerde Birebir ve Örtenlik

Tanım

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin.

$$T(\vec{\mathbf{v}}_1) = T(\vec{\mathbf{v}}_2)$$

eşitliği, $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$ olmasını gerektiriyorsa, T dönüşümü **birebirdir** denir. Diğer yandan,

$$\mathbf{Gör}(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$$

ise, T dönüşümüne **örtendir** denir. Hem birebir, hem de örten dönüşüme **izomorfizm**, \mathbb{V} ve \mathbb{W} vektör uzaylarına da **izomorf uzaylar** denir.

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$$

şeklinde gösterilir.

Lineer Dönüşümün Birebirliği ve Çekirdeği

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümünün birebir olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{Çek}(T) = \{0\}$$

olmasıdır.

Kanıt.

(\Rightarrow) : T dönüşümü birebir ve $\vec{v} \in \text{Çek}(T)$ olsun. Bu durumda,

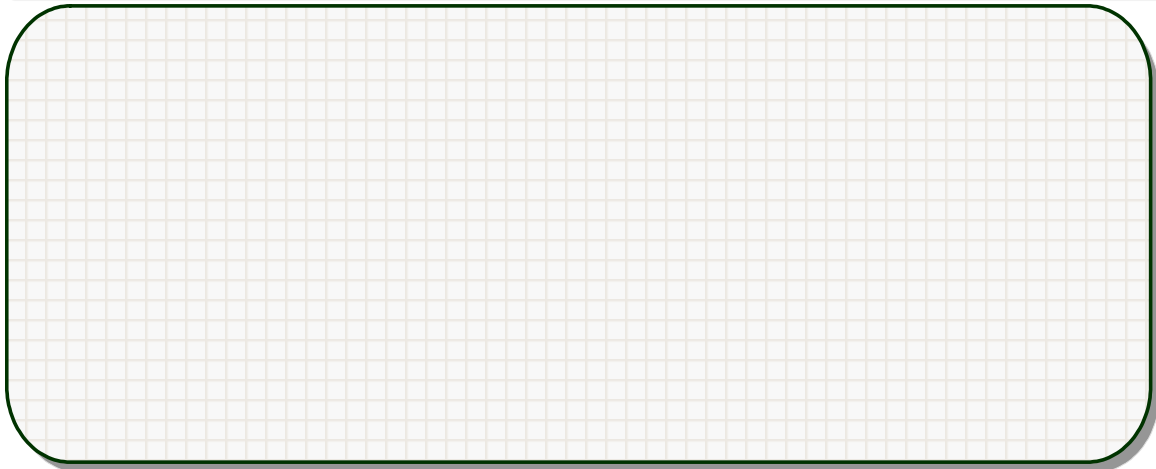
$$T(\vec{v}) = 0 = T(0)$$

eşitliğinden, $\vec{v} = 0$ elde edilir. Yani, $\text{Çek}(T) = \{0\}$ 'dir.

(\Leftarrow) : $\text{Çek}(T) = \{0\}$ olsun. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ olmak üzere, $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$ olsun. Bu durumda, T 'nin lineerliğinden, $T(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ olur. O halde, $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Çek}(T)$ ve $\vec{u} - \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ elde edilir. Bu, T dönüşümünün birebir olduğunu gösterir. □

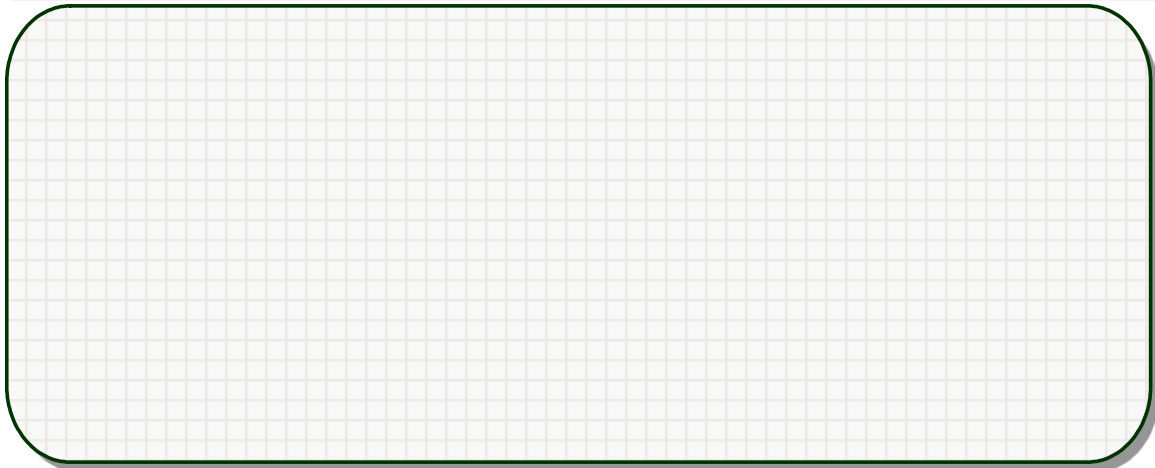
Örnek

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ dönüşümünün örten olduğunu, ama birebir olmadığını gösteriniz.



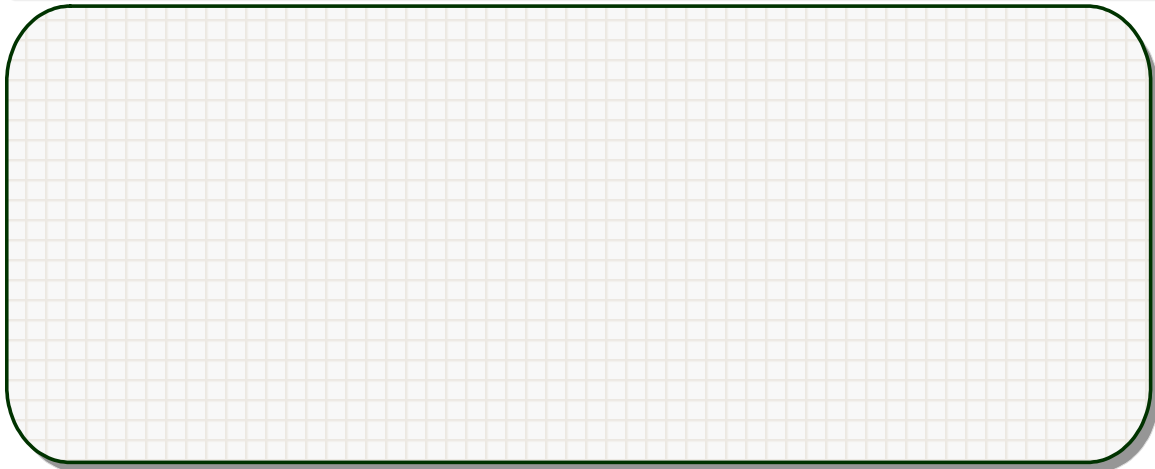
Örnek

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$ dönüşümünün birebir olduğunu, fakat örten olmadığını kanıtlayınız.



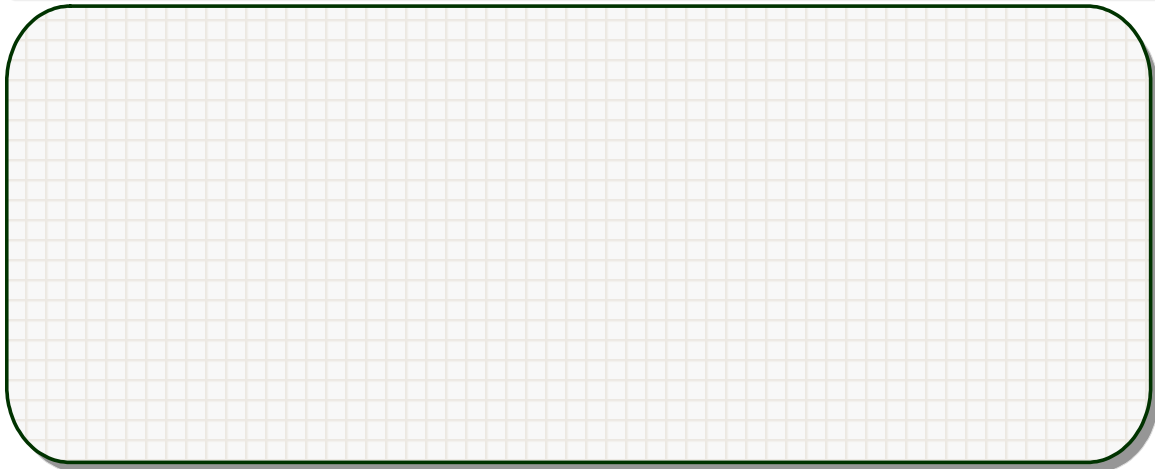
Problem

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z, 2x - y + z)$ dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.



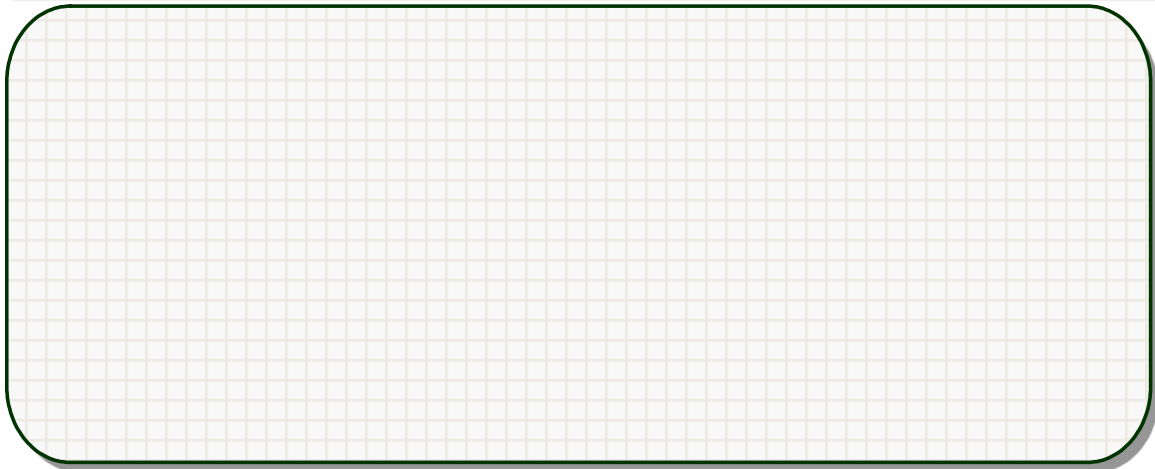
Problem

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, x + z, z)$ dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.



Problem

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y, x + 2z)$ dönüşümünün birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.



Görüntü Uzayının Tabanı

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü birebir ve $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ kümesi, \mathbb{V} uzayının bir tabanı ise,

$$\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$$

kümesi de, **Gör**(\mathbb{V}) görüntü uzayının bir tabanıdır.

Kanıt.

$\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ vektör kümesinin, lineer bağımsız olduğunu ve **Gör**(\mathbb{V})'yi gerdiğini göstermeliyiz.

i) Önce, $\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu görelim. Bu kümenin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$$\lambda T(\vec{\mathbf{v}}_1) + \lambda T_2(\vec{\mathbf{v}}_2) + \dots \lambda_n T(\vec{\mathbf{v}}_n) = 0 = T(0)$$

eşitliğinde $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. T lineer ve birebir olduğundan

$$T(\lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + \lambda_n \vec{\mathbf{v}}_n) = T(0) \Leftrightarrow \lambda_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + \lambda_n \vec{\mathbf{v}}_n = 0$$

elde edilir. S vektör kümesi lineer bağımsız vektör kümesi olduğundan, bu eşitlik sadece $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ durumunda sağlanır. O halde, $\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ kümesi de lineer bağımsızdır.



Kanıt.

ii) Şimdi de, $\mathbf{Gör}(T) = \text{Sp}\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ olduğunu gösterelim.
 $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{Gör}(T)$ olsun. Buna göre, $T(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{w}}$ olacak şekilde bir $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ daima vardır.

$$\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$$

kümesi, \mathbb{V} kümesinin bir tabanı ise, $\vec{\mathbf{v}} = c_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + c_n \vec{\mathbf{v}}_n$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Bu durumda, T 'nin lineerliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T(\vec{\mathbf{v}}) &= T(c_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + c_n \vec{\mathbf{v}}_n) \\ \vec{\mathbf{w}} &= c_1 T(\vec{\mathbf{v}}_1) + c_2 T(\vec{\mathbf{v}}_2) + \dots + c_n T(\vec{\mathbf{v}}_n) \end{aligned}$$

olur ve $\vec{\mathbf{w}} \in \text{Sp}\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\{T(\vec{\mathbf{v}}_1), T(\vec{\mathbf{v}}_2), \dots, T(\vec{\mathbf{v}}_n)\}$ kümesi, $\mathbf{Gör}(\mathbb{V})$ görüntü uzayının bir tabanıdır.



Aynı Boyutlu Uzaylar Arasındaki Lineer Dönüşümde Birebirlik ve Örtенlik

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda, $\text{Sıfırlık}(T) + \text{Rank}(T) = \text{Boy}(\mathbb{V})$ eşitliği sağlanır. Yani, bir T dönüşümünde, görüntü uzayının boyutu ile çekirdeğin boyutunun toplamı, tanım uzayının boyutuna eşittir.

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. $\text{Boy}(\mathbb{V}) = \text{Boy}(\mathbb{W}) = n$ olsun.

a) T birebir ise örtendir. **b)** T örten ise birebirdir.

Kanıt.

a) T dönüşümü birebir olsun. O halde, $\text{Çek}(T) = \{0\}$ 'dir. Yani, $\text{Boy}(\text{Çek}(T)) = 0$ olur. Bu durumda, $\text{Boy}(\text{R}(T)) = n$ olacağından, $\text{Gör}(T) = \mathbb{W}$ olur ki, bu T dönüşümünün örten olması demektir.

b) T dönüşümü örten olsun. Bu durumda, $\text{Boy}(\text{Gör}(T)) = n$ olacağından, $\text{Boy}(\text{Çek}(T)) = 0$ olmalıdır. Bu, T dönüşümünün birebir olduğunu gösterir. □

Tersinir Dönüşüm

Tanım

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü verilsin. I birim dönüşümü göstermek üzere, eğer, $T \circ T^{-1} = I$ ve $T^{-1} \circ T = I$ olacak şekilde bir tek

$$T^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$$

dönüşümü varsa, T dönüşümüne **tersinirdir** denir.

Lineer Dönüşümün Tersİ

Teorem

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümü birebir ise, $T^{-1} : \mathbf{Gör}(T) \rightarrow \mathbb{V}$ dönüşümü tanımlıdır ve T^{-1} dönüşümü de lineer dönüşümdür.

Kanıt.

$\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2 \in \mathbf{Gör}(T)$ olsun. Bu durumda, $T^{-1}(\vec{\mathbf{w}}_1) = \vec{\mathbf{v}}_1$ ve $T^{-1}(\vec{\mathbf{w}}_2) = \vec{\mathbf{v}}_2$ olacak şekilde bir $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{V}$ vardır. Buna göre,

$$T(\vec{\mathbf{v}}_1) = \vec{\mathbf{w}}_1, T(\vec{\mathbf{v}}_2) = \vec{\mathbf{w}}_2$$

ve T 'nin lineerliğinden, $T(\lambda \vec{\mathbf{v}}_2) = \lambda \vec{\mathbf{w}}_2$ ve $T(\vec{\mathbf{v}}_1 + \lambda \vec{\mathbf{v}}_2) = \vec{\mathbf{w}}_1 + \lambda \vec{\mathbf{w}}_2$ yazılabilir. Buradan,

$$T^{-1}(\vec{\mathbf{w}}_1 + \lambda \vec{\mathbf{w}}_2) = \vec{\mathbf{v}}_1 + \lambda \vec{\mathbf{v}}_2 = T^{-1}(\vec{\mathbf{w}}_1) + \lambda T^{-1}(\vec{\mathbf{w}}_2)$$

olduğundan, T^{-1} dönüşümü de lineerdir. □

Lineer Dönüşümlerin Bileşkesi

Teorem

\mathbb{V} , \mathbb{W} ve \mathbb{U} reel vektör uzayları olmak üzere,

$$T_1 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} \quad \text{ve} \quad T_2 : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$$

liner dönüşümleri birebir ise,

$$T_2 \circ T_1 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$$

dönüşümü de lineerdir ve

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$$

eşitliği sağlanır.

Lineer Dönüşümün Tersinirliği

Teorem

Bir $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümün tersinir olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{\text{Çek}}(T) = \{0\} \quad \text{ve} \quad \mathbf{\text{Gör}}(T) = \mathbb{W}$$

olmasıdır.

Lineer Dönüşümün Tersinin Tersİ

Teorem

T bir tersinir lineer dönüşüm ise, T^{-1} dönüşümü de lineerdir ve $(T^{-1})^{-1} = T$ eşitliği sağlanır.

Sonuçlar : $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü verilsin.

- i) $m < n$ ise, T dönüşümü kesinlikle örten değildir.
- ii) $m > n$ ise, T dönüşümü kesinlikle birebir değildir.
- iii) $m = n$ ise, T örtense, birebir'dir.
- iv) $m = n$ ise T birebir ise, örtendir.
- v) $m = n$ ise ve T birebir ise, T dönüşümünün tersi vardır.
- vi) T lineer dönüşümünün tersi olması için, T 'ye karşılık gelen standart matris tersinir olmalıdır.

Örnek

$T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$ lineer dönüşümünün tersini bulunuz.



Bölüm Sonu Tekrar Testi

(Lineer Dönüşümler ve Uygulamaları)

SORU

$T(x, y) = (x + y, x - y)$ lineer dönüşümünün $\mathcal{B} = \{(1, 2); (1, 1)\}$ tabanına göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

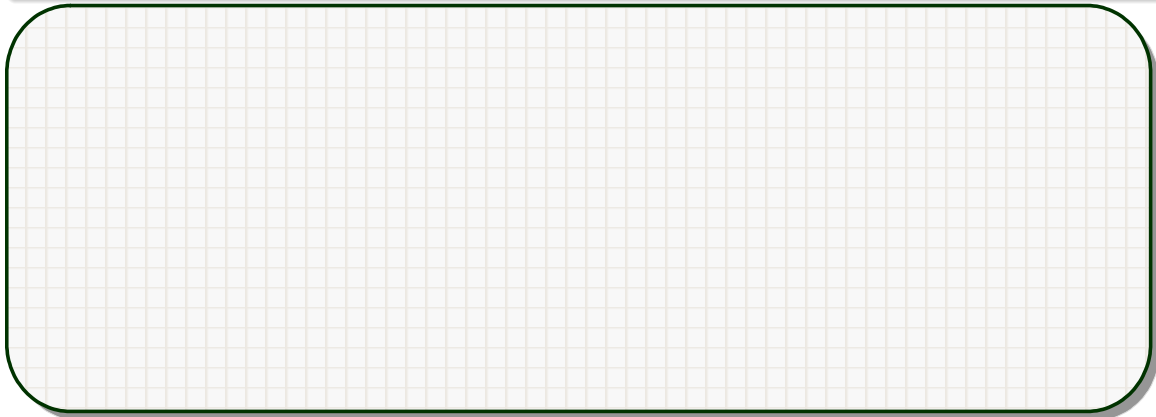
- A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$



SORU

$T(x, y) = (x + y, x - y, x)$ lineer dönüşümünün $\mathcal{B} = \{(1, 2); (1, 1)\}$ tabanına göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



SORU

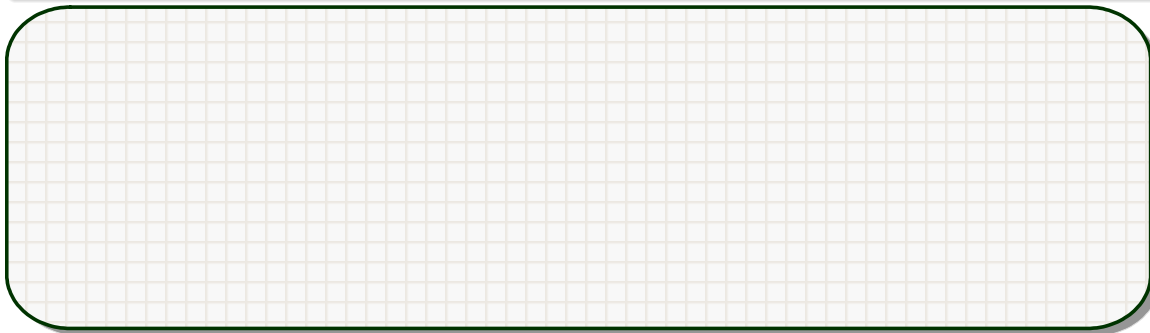
$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, aşağıdakilerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. $T(\vec{0}) = \vec{0}$ II. T örten olamaz

III. T birebir olabilir. IV. $\text{Rank } T < 3$ 'tür.

V. $\text{Sıfırlık}(T) \leq 2$ 'dir.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5



SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $T(x, y) = (x + y, x + 2y, x)$ olmak üzere, $T = T_1 \circ T_2$ lineer dönüşümü için aşağıdakilerden
 kaçısı doğrudur?

- I. $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ II. Tersinirdir.
 III. $\text{Rank}(T_2 \circ T_1) = 2$ IV. $\text{Çek } T = \{\vec{0}\}$.
 V. T lineer dönüşümü birebir, örtendir.

A) 0 B) 3 C) 2 D) 1 E) 4

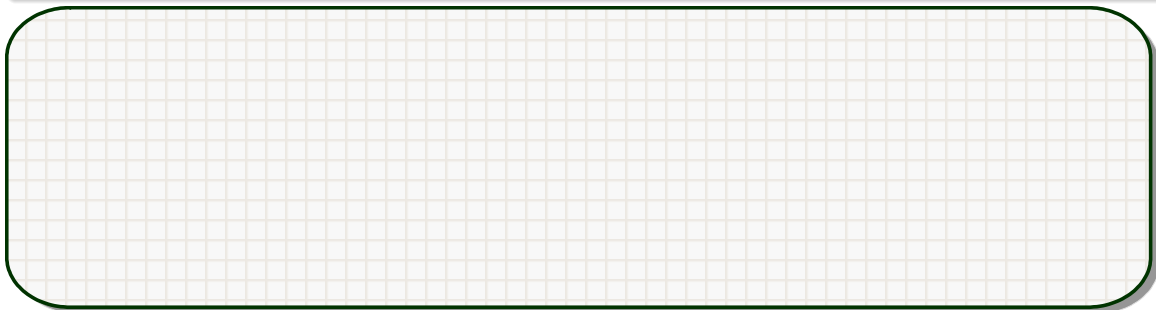


SORU

$T_1 = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $T(x, y) = (x + y, x + 2y, x)$ olmak üzere, $T = T_2 \circ T_1$ lineer dönüşümü için aşağıdakilerden
 kaçısı doğrudur?

- I. $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ II. Tersinirdir.
 III. $\text{Rank}(T_2 \circ T_1) = 2$. IV. $\text{Çek } T = \{\vec{0}\}$.

A) 0 **B) 3** **C) 2** **D) 1** **E) 4**



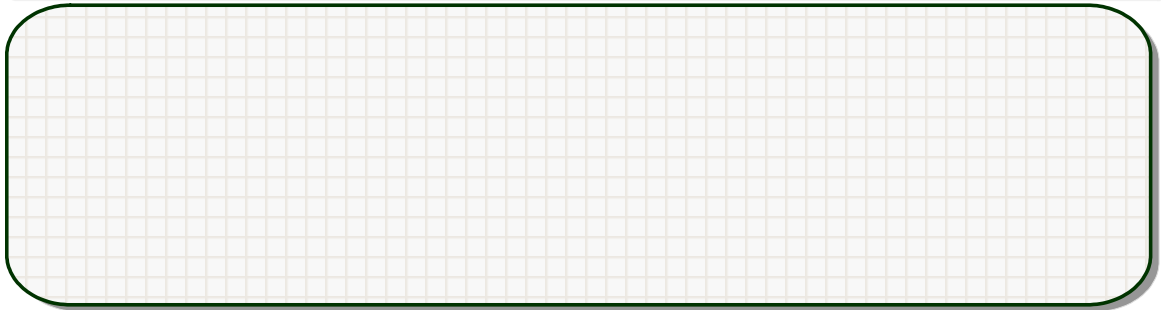
SORU

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T(x, y, z) = (2x + y, x - z, 3x + ky - z)$$

dönüşümü aşağıdaki k değerlerinden hangisi için birebir değildir?

- A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

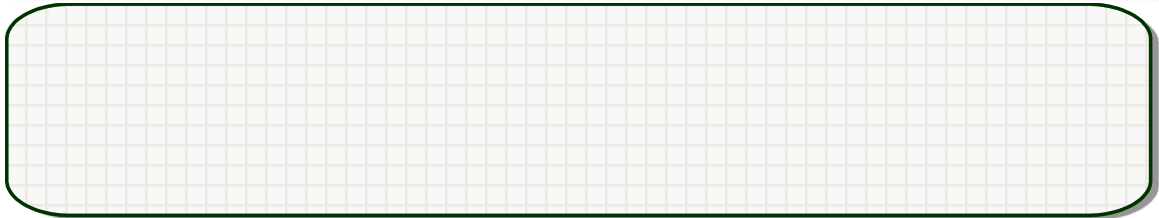


SORU

$T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n < m$) ve $T_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($m < k$) lineer dönüşümleri verilsin. Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi daima doğrudur?

- I. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü de lineerdir.
- II. $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'dir.
- III. $T_1 \circ T_2$ tanımlı değildir.
- IV. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü daima örtendir.
- V. $T_2 \circ T_1$ dönüşümü birebir olamaz.
- VI. $\text{Rank}(T_2 \circ T_1) \geq m$ dir.

A) 4 B) 3 C) 1 D) 2 E) 0



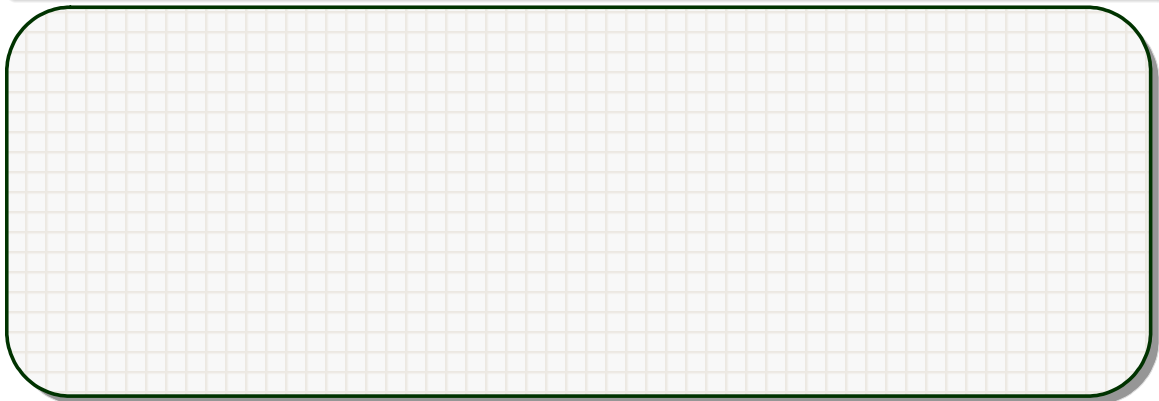
SORU

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T(x, y, z) = (2x + y, x - z, 3x + 4y + kz)$$

dönüşümü tersinir ise k aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A)** 4 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0



SORU

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + z, kx + 2y - z)$$

dönüşümünün çekirdeği 1 boyutlu ise k kaçtır?

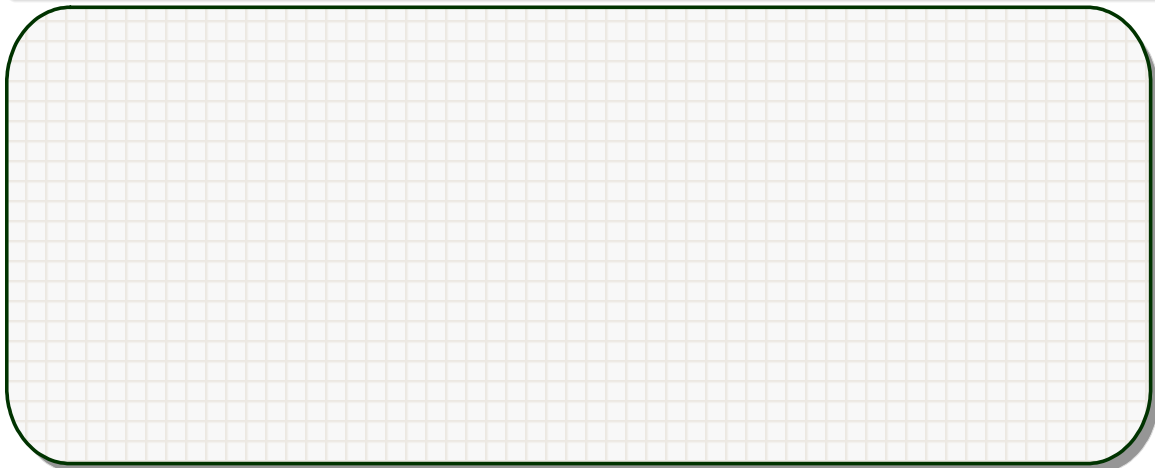
- A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0



SORU

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümünde çekirdeğin boyutu $n - 2$ ve \mathbb{V} uzayının boyutu ise $n + 3$ 'tür. Buna göre, bu dönüşümün rankı kaçtır?

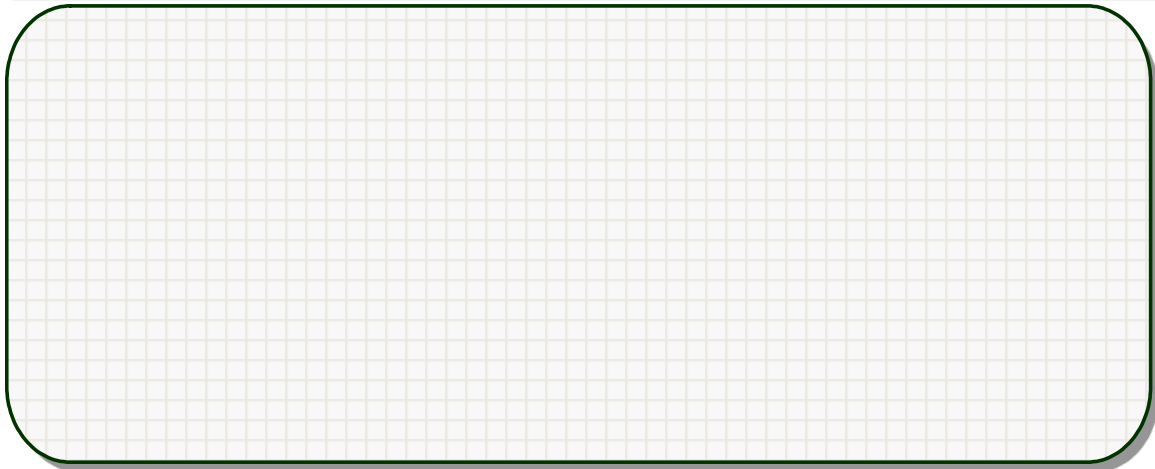
- A) 0** **B) 3** **C) $2n + 1$** **D) 1** **E) 5**



SORU

$T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-5}$ lineer dönüşümü birebir ve örten ise n kaçtır?

- A) 0** **B) 3** **C) 6** **D) 1** **E) 5**



SORU

$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineer dönüşümünde $\text{Sıfırlık}(T) = 2$, $\text{Rank}(T) = 2n - 1$ ve $\text{Boy}(\mathbb{V}) = 3n - 5$ ise n kaçtır?

- A)** 0 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 1 **E)** 5



SORU

$$T_1 = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y + 2z)$$

ve $T_2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$

$$T(x, y) = (x + y, kx, y - x)$$

olmak üzere, $T_1 \circ T_2$ lineer dönüşümü aşağıdaki k değerlerinden hangisi için birebir değildir?

- A)** 4 **B)** 3 **C)** -1 **D)** -2 **E)** 0

