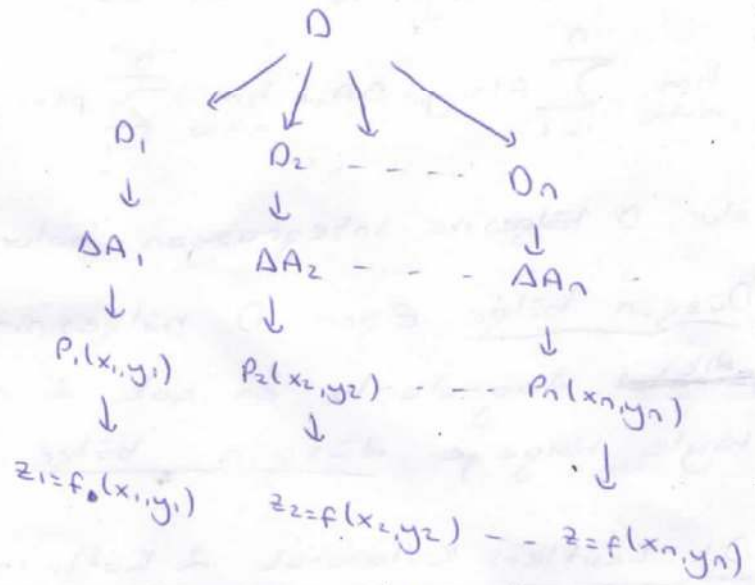
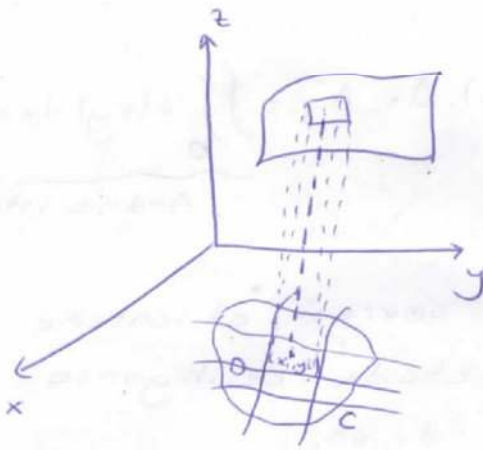


2 Katlı İntegral

$z=f(x,y)$ fonksiyonu xOy düzleminde C eğrisiyle sınırlı, kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. D bölgesini, alanları ΔA_i ($i=1,2,\dots,n$) olan n tane bölgeye ayırıp, bu bölgelerden keyfi (x_i, y_i) noktaları seçelim.



$$f(x_1, y_1) \cdot \Delta A_1 + f(x_2, y_2) \cdot \Delta A_2 + \dots + f(x_n, y_n) \cdot \Delta A_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i$$

Bu toplam, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(x_i, y_i)$ olan silindirik elemanlarının hacimleri toplamıdır.

ΔA_i alanlarının herbirinin sıfıra yaklaşması halinde bu toplamın limitine $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde iki katlı integrali denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i = \iint_D f(x,y) dA = V \text{ şeklinde gösterilir.}$$

* Bu integralin değeri, D bölgesinin çevresi üzerinde, üstten $z=f(x,y)$, alttan $z=0$ düzleminin sınırladığı hacime eşit olur.

Bu limit 0 bölgesinin kısmi bölgelere bölünüş şekline ve P_i noktalarının ΔA_i içindeki seriliş şekline bağlı değildir.

* Eğer 0 bölgesi eksentere paralel doğrularla kısmi bölgelere ayrılırsa, kısmi bölgeler birer dikdörtgen olur ve bu dikdörtgenlerin alanları

$$\Delta A_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \text{ ve limit de}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i = \iint_0 f(x, y) dx dy$$

Ardışık integral

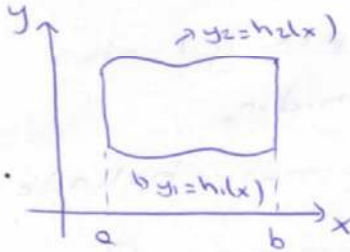
olur. 0 bölgesine integrasyon bölgesi denir.

Düzgün bölge: Eğer 0 bölgesinin çevresi, eksentere dik doğrularla en çok 2 noktada kesiliyorsa böyle bölgeye düzgün bölge denir.

Dik Kesitleri Kullanarak 2 Katlı İntegral Hesaplamak

* Bölge x'e göre düzgündür.

* Bölge x'e dik doğrularla tanınır.

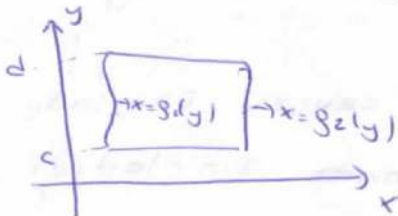


$$\iint_0 f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Yatay Kesitler ile 2 Katlı İntegral Hesaplamak

* Bölge y'ye göre düzgündür

* Bölge y'ye dik doğrularla tanınır.



$$\iint_0 f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy$$

① D: $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ y=0 \\ y=x^2 \end{cases}$

$I = \iint_D y \, dx \, dy$ integralini

li. 3

a) x'e göre düzgün bölge

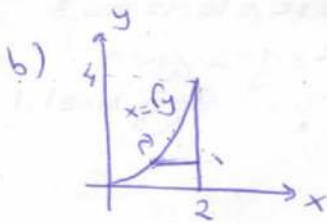
b) y'ye " " " olarak hesaplayın

a)



$$I = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^2 = \frac{16}{5}$$

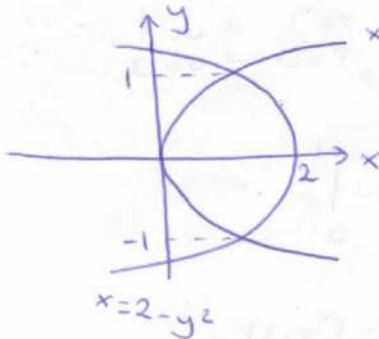


$$I = \int_0^4 \int_{y^2}^2 y \, dx \, dy = \int_0^4 \left(yx \Big|_{y^2}^2 \right) dy$$

$$= \int_0^4 (2y - y^{3/2}) dy = y^2 - \frac{y^{5/2}}{5/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{5}$$

② D: $\begin{cases} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{cases}$

bölgesinde $f(x,y)=1+5y$ fonksiyonunun integralini hesaplayın.



$\begin{cases} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2=2-y^2 \Rightarrow y=\pm 1$

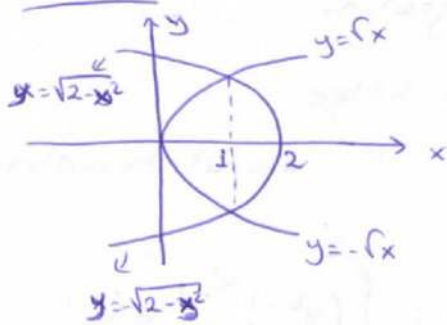
I. 401

$$\iint_D (1+5y) \, dA = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} (1+5y) \, dx \, dy \rightarrow y'ye \text{ göre düzgün bölge aldık}$$

$$= \int_{-1}^1 (x+5xy) \Big|_{y^2}^{2-y^2} dy$$

$$= \int_{-1}^1 (2-2y^2+10y-10y^3) dy = \frac{8}{2}$$

2.401



x'e göre düzgün bölge olmasak

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+5y) dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+5y) dy dx$$

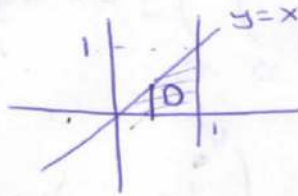
114

İntegrasyon Sırasını Değiştirme

$$(*) I = \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 dx dy = ?$$

$\Rightarrow \int_y^1 \sin x^2 dx$ hesaplanamaz.
İntegrasyon sırası değişmelidir!

$$D: \begin{matrix} y=1 & y=0 \\ x=y & x=1 \end{matrix}$$



$$I = \int_0^1 \int_0^x \sin x^2 dy dx = \int_0^1 (y \sin x^2) \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 (x \sin x^2) dx$$

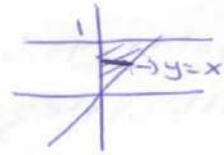
$$\begin{aligned} x^2 &= u & 2x dx &= du \\ x=1 &\rightarrow u=1 \\ x=0 &\rightarrow u=0 \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin u}{2} du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

*) $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx = ?$

D: $x=1$ $y=1$
 $x=0$ $y=x$



(15)

$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{x/y} dx dy = \int_0^1 \left. \frac{e^{x/y}}{\frac{1}{y}} \right|_0^y dy = \int_0^1 (e y - y) dy$$

$$= \left. \frac{e y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

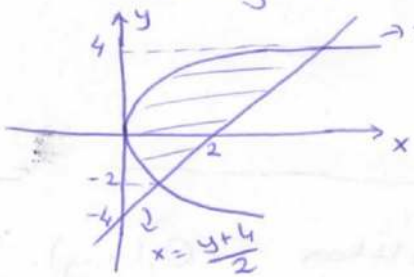
İki Katlı İntegralde Bölüm Alanların Hesabı

$\iint_D f(x,y) dx dy$ integralinde $f(x,y)=1$ ise $\iint_D dx dy = A$

integrali D bölgesinin alanını verir.

$$A = \iint_D dx dy$$

*) $y^2=4x$ ile $y=2x-4$ doğrusu arasında kalan alanı 2 katlı integralle hesaplayın.



$$A = \int_{-2}^4 \int_{y^2/4}^{y/2+2} dx dy = \int_{-2}^4 \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy = 9$$

$$4x = (2x-4)^2$$

$$4x = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{matrix}$$

$$x=4 \rightarrow y=4$$

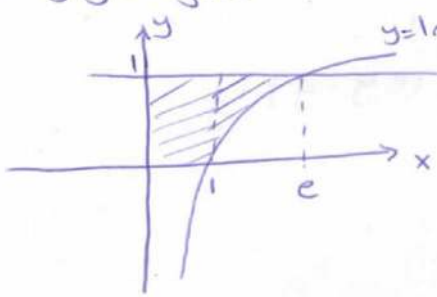
$$x=1 \rightarrow y=-2$$

İ.6

① $y = \ln x, y = 1, x = 0, y = 0$ eğrilerinin sınırladığı alanı, 2 katlı integrallikle

a) x 'e göre düzgün bölge olarak

b) y 'ye göre " " " " yazınız.



$$A = \iint_D dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 dy dx + \int_1^e \int_{\ln x}^1 dy dx$$

b)

$$A = \int_0^1 \int_0^{e^y} dx dy$$

İki Katlı İntegralde Hacim Hesabı

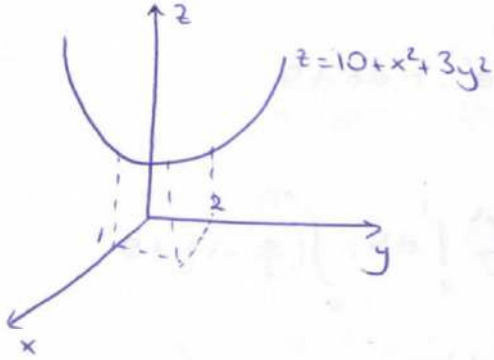
① $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda üstten $f(x,y)$, alttan $z=0$ ile sınırlı cismin D bölgesi üzerinde oluşturduğu cismin hacmi

$$V = \iint_D f(x,y) dx dy \text{ dir.}$$

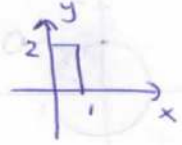
② Eğer cisim üstten $z = Q_2(x,y) \geq 0$, alttan $z = Q_1(x,y)$ ile sınırlı ise, bu yüzeylerin xy düzlemindeki izdüşümü olan D taban olmak üzere, hacim; bu yüzeylerde sınırlı cisimlerin hacimleri farkına eşittir.

$$V = \iint_D (Q_2(x,y) - Q_1(x,y)) dx dy$$

⊗ Üstten $z=10+x^2+3y^2$ paraboloidi ve alttan $z=0$ da $R: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ dikdörtgeni ile sınırlı bölgenin hacmi? 17



$$V = \iint_R (10+x^2+3y^2) dy dx$$



$$= \int_0^1 \int_0^2 (10+x^2+3y^2) dy dx$$

$$= \int_0^1 (10y + x^2y + y^3) \Big|_0^2 dy$$

$$= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8) dx = 28x + \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{86}{3} //$$

İki Katlı İntegrallerin Kutupsal Koordinatlara Dönüştürülerek Hesabı

$$\iint_D f(x,y) dx dy \text{ iki katlı integralini } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

dönüşümü yaparak hesaplırsak; bu durumda D bölgesi, $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$ eğrileri ve $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ doğrularının sınırladığı bölge olur. Bu dönüşümle $dx dy = r dr d\theta$ ve

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \text{ olur.}$$

★

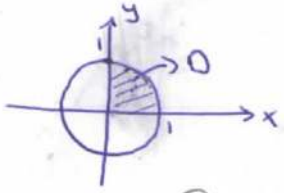
Kutupsal dönüşümle D bölgesinin alanı ise:

$$\iint_D dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr d\theta \text{ olur.}$$

$$⑧ \quad I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx = ?$$

$$D: \begin{matrix} x=1 & x=0 \\ y=\sqrt{1-x^2} & y=0 \end{matrix}$$

18



①

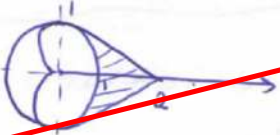
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ dx dy &= r dr d\theta \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 e^{r^2} \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{e}{2} - 1 \right) d\theta$$

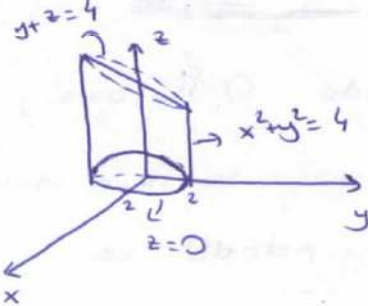
$$= \frac{\pi}{4} (e-1)$$

⑨ $r=1+\cos\theta$ nin içinde, $r=1$ in dışında kalan bölgesinin alanını 2. katlı integral ile hesaplayınız.



$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta$$

⑩ $x^2+y^2=4$ silindiri ve $y+z=4$, $z=0$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.



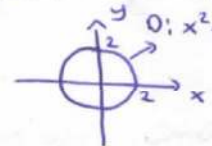
$$V = \iint_D (4-y) dy dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3} \sin\theta \right) \bigg|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3} \sin\theta \right) d\theta$$

$$= 8\theta + \frac{8}{3} \cos\theta \bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{16\pi}}$$



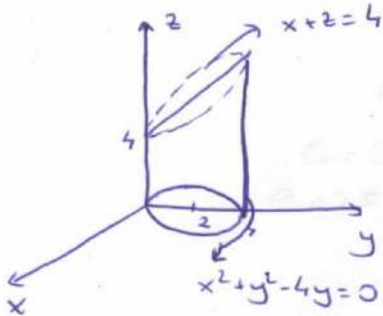
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ dx dy &= r dr d\theta \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{16\pi}}$$

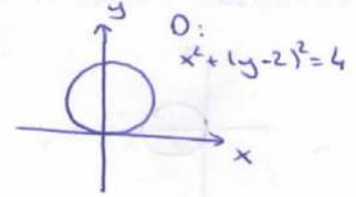
(19)

* $x^2 + y^2 - 4y = 0$ silindiri, $x + z = 4$, $z = 0$ düzlemleri arasında ki cismin hacmini veren 2 katlı integral?

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$$



$$V = \iint_D (4 - x) dy dx$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$r^2 - 4r \sin \theta = 0$$

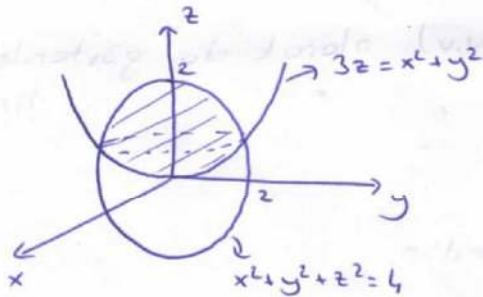
$$r = 0 \quad r = 4 \sin \theta$$

$$V = \iint_D (4 - x) dy dx = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \theta} (4 - r \cos \theta) r dr d\theta$$

* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in altında $3z = x^2 + y^2$ nin üstünde kalan cismin hacmi?

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \rightarrow \text{Küre}$$

$$3z = x^2 + y^2 \rightarrow \text{Paraboloid}$$



$$V = \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{3} \right) dy dx$$

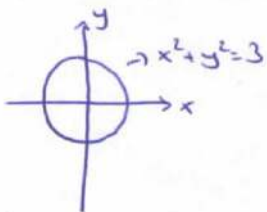
$$3z = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$\boxed{z=1} \rightarrow x^2 + y^2 = 3$$

iz düşüm bölgesi 0



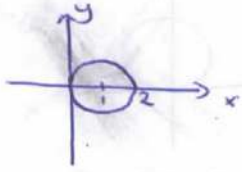
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{3} \right) r dr d\theta$$

$$= \frac{19}{6} \pi$$

*) $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$ integralini $D: x^2+y^2=2x$ bölgesinde 110

kutupsal koordinatlara dönüştürerek yazınız.



$$x^2+y^2-2x=0 \rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

$$\left. \begin{array}{l} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x &= 0 \\ r^2-2r \cos \theta &= 0 \\ r &= 0 \quad r = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \cdot r dr d\theta$$

Jakobien Determinantı

$x=g(u,v)$ ve $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün Jakobien determinantı, veya Jakobieni şöyledir:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J(u,v) \text{ olarak da gösterilebilir.}$$

$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ olarak da gösterilir.

NOT: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ dir.

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

İki Katlı İntegralde Değişken Dönüşümü

(i.k.11)

$\iint_D f(x,y) dx dy$ integralinde $x=h(u,v)$, $y=g(u,v)$ değişken

dönüşümü yapılırsa D bölgesi bir D' bölgesine dönüşür.
Bu halde,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(h(u,v), g(u,v)) \cdot |J(u,v)| \cdot du dv \quad \text{olur.}$$

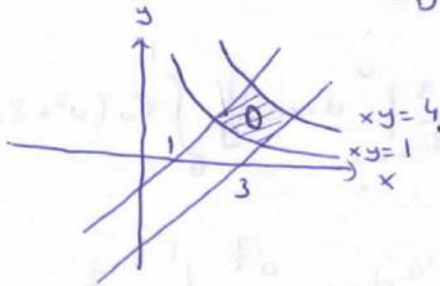
$$\left. \begin{array}{l} x=h(u,v) \\ y=g(u,v) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D \rightarrow D' \\ dx dy \rightarrow |J(u,v)| du dv \end{array}$$

*) $\begin{cases} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \end{cases}$ kutupsal dönüşümü ile $dx dy = r dr d\theta$ olduğunu gösteriniz.

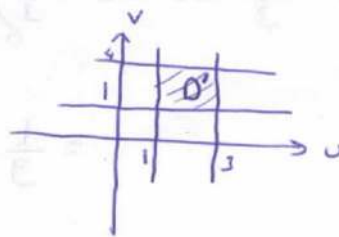
$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$dx dy = |J(r, \theta)| dr d\theta = r dr d\theta$$

*) $D: \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=3 \\ xy=1 \\ xy=4 \end{cases}$ eğrilerinin 1. bölgede sınırladığı bölge ise $\iint_D (x^2 - y^2) dy dx = ?$



$$\begin{cases} x-y=u \\ xy=v \end{cases} \Rightarrow D': \begin{cases} u=1 & u=3 \\ v=1 & v=4 \end{cases}$$



$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x+y}$$

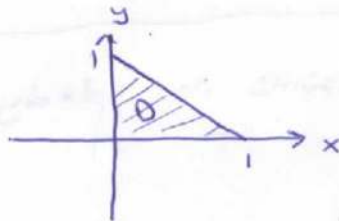
$$\iint_0 (x^2 - y^2) \cdot dx dy = \iint_{0'} (x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{x+y} du dv$$

$$= \iint_{0'} (x-y) du dv = \int_1^3 \int_1^4 u dv du = 12$$

$$\textcircled{*} \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} \cdot (y-2x)^2 dy dx = ?$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases} \text{ dönüştürme yapalım.}$$

$$D: \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ y=1-x \\ y=0 \end{cases}$$

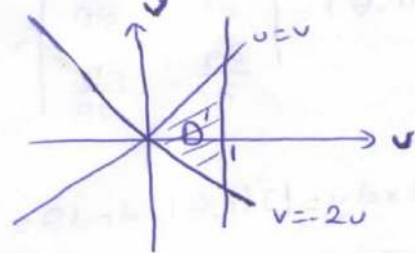


$$\downarrow$$

$$x = \frac{u-v}{3} \quad y = \frac{2u+v}{3}$$

$$\frac{D}{\frac{0}{x+y=1}} \rightarrow \frac{D'}{\frac{0'}{u=1}}$$

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow u-v=0 \rightarrow \boxed{u=v} \\ y=0 &\rightarrow 2u+v=0 \rightarrow \boxed{v=-2u} \end{aligned}$$



$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

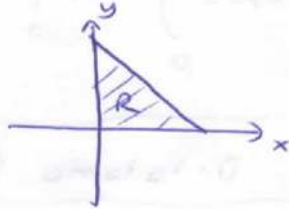
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-2u}^u \sqrt{u} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u} \cdot \left. \frac{v^3}{3} \right|_{-2u}^u du = \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{u} (u^3 + 8u^3) du \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 9 u^{7/2} du = \left. \frac{u^{9/2}}{\frac{9}{2}} \right|_0^1 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

⊗ $\iint_R e^{\frac{x}{x+y}} dx dy = ?$ $R: \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

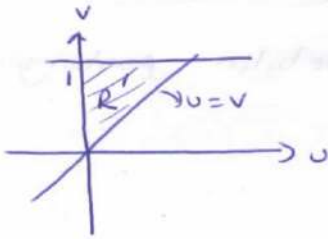
(i.k.13)

$\begin{matrix} x=u \\ x+y=v \end{matrix}$ dönüşümü yapalım.

$R: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow$



$\begin{matrix} R \\ x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} R' \\ u=0 \\ u=v \\ v=1 \end{matrix}$



$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$

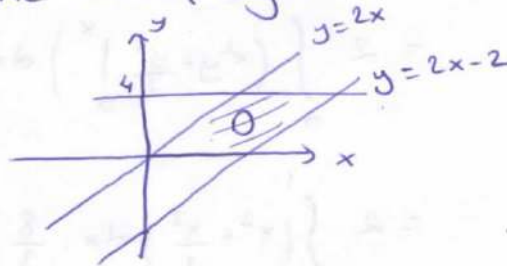
$\iint_R e^{\frac{x}{x+y}} dx dy = \iint_{R'} e^{u/v} du dv = \int_0^1 \int_0^v e^{u/v} du dv$

$= \int_0^1 \left. \frac{e^{u/v}}{1/v} \right|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1) dv = \frac{v^2}{2} (e-1) \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$

⊗ $\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$

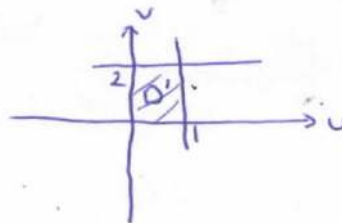
integralini $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ dönüşümü ile hesaplayın.

$\begin{matrix} y=4 & x=\frac{y}{2}+1 \\ y=0 & x=\frac{y}{2} \end{matrix}$



$\begin{matrix} u = \frac{2x-y}{2} \\ v = \frac{y}{2} \\ \parallel \\ u+v = x \\ 2v = y \end{matrix}$

$\begin{matrix} D \\ y=4 \\ y=0 \\ y=2x \\ y=2x-2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} D' \\ v=2 \\ v=0 \\ u=0 \\ u=1 \end{matrix}$



$$\begin{cases} x=u+v \\ y=2v \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

(i.k.14)

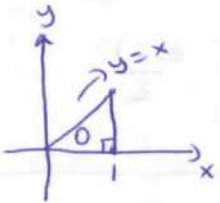
$$I = \iint_{D'} 2uv \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^2 2uv \, dv \, du = \int_0^1 2uv \Big|_0^2 \, du = \int_0^1 4u \, du = 2u^2 \Big|_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

İki Katlı İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

Bir D bölgesi üzerinde $f(x,y)$ integrallenebilir fonksiyonun ortalama değeri:

$$\bar{f} = \frac{1}{D\text{'in Alanı}} \cdot \iint_D f(x,y) \, dA \quad \text{dır.}$$

* Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,1)$ de olan dik üçgende x^2+y^2 fonksiyonunun Ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{D\text{'in Alanı}} \cdot \iint_D (x^2+y^2) \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2) \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^x \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$