

PARAMETRİK DENKLEMLER ve KUTUPSAL KOORDİNATLAR

PARAMETRİK DENKLEMLER

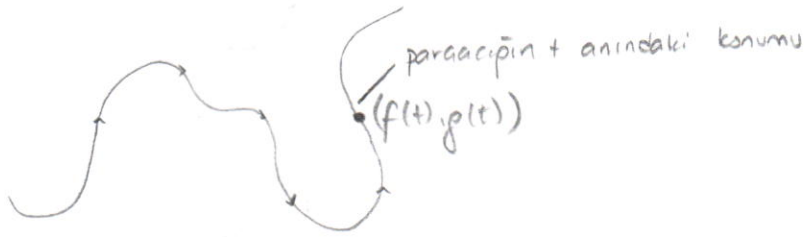
Eğer x ve y , $x=f(t)$ ve $y=p(t)$ ($t \in I$) şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),p(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğerdir. Bu denklemlere eğerin parametrik denklemleri denir.

t : eğer için bir parametre

I : parametre aralığı

Eğer $I=[a,b]$, yani $a \leq t \leq b$ ise eğerin başlangıç noktası $(f(a),p(a))$, bitiş noktası $(f(b),p(b))$ olur.

Aralıkla birlikte, denklemlere eğerin bir parametrisasyonu denir.



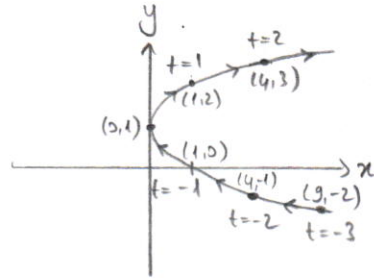
xy -düzleminde hareket eden bir parçacığın hareketi iz, her zaman bir fonksiyonun veya tek bir denklemin grafiği değildir.

Örnek: $x=t^2$, $y=t+1$ $-\infty < t < \infty$ eğerinin denklemini xy ekseninden bulup grafiğini çiziniz.

$$y=t+1 \Rightarrow t=y-1 \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$$



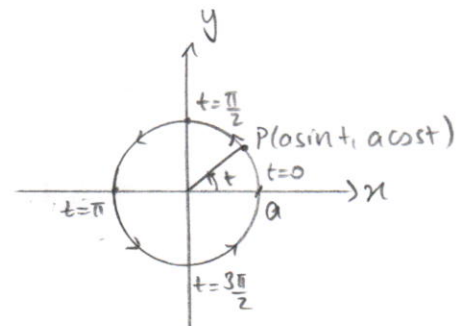
| t | x | y |
|----|---|----|
| -3 | 9 | -2 |
| -2 | 4 | -1 |
| -1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 3 |

Örnek: $x=a \cos t$, $y=a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik denk. grafiğini çiziniz.

$$x^2+y^2=a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 \Rightarrow a \text{ yarıçaplı merkezli çember}$$

$$t=0 \Rightarrow x=a, y=0$$

$$t=2\pi \Rightarrow x=a, y=0$$



$x=a \cos t$ ve $y=a \sin t$ denklemleri $x^2+y^2=a^2$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlar.

Örnek: $x = 1 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$ parametrisasyonu ile verilen eğriyi bulun.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x-1}{2} \\ y = 2\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{y}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ çemberi} \end{array}$$

Parametrik Eğrilerde Hesaplama

Tepeler ve Bükülme

f ve g fonksiyonları t noktasında türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ eğrisi de t noktasında türevlenebilir. Türevlenebilir parametrik eğri üzerindeki bir noktada y de x 'in türevlenebilir fonksiyonu olduğunda

$\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ için parametrik formüller:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t) \neq 0)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek: $x = \sec t$, $y = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

$y=f(x)$ in (a,b) noktasındaki teğet denklemi: $y-b=f'(a)(x-a)$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} = \sec t \\ 1 = \tan t \end{array} \right\} t = \frac{\pi}{4}$$

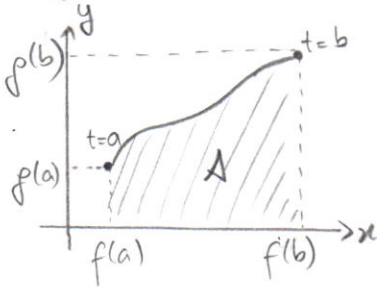
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec(\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Teğet denklemi: } y-1 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$$

Örnek: $x=t-t^2$, $y=t-t^3 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-6t(1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

Alan



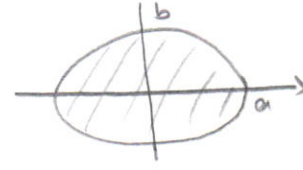
$x=f(t)$, $y=p(t)$, $a \leq t \leq b$ eğrisinin alanı:

$$A = \int_a^b p(t) \cdot f'(t) dt \text{ ile bulunur.}$$

Not: (a,b) aralığında $p(t) \cdot f'(t) < 0$ ise $A = -\int_a^b p(t) \cdot f'(t) dt$ dir.

Örnek: $x=acost$, $y=bsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$ elipsinin alanını bulunuz.

$$\frac{x}{a} = cost, \frac{y}{b} = sint \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$x=f(t) = acost \Rightarrow f'(t) = -asint$$

$$y=p(t) = bsint$$

$$\frac{A}{4} = -\int_0^{\pi/2} bsint(-asint)dt = \int_0^{\pi/2} ab \sin^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{ab\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A = ab\pi$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğri'nin Uzunluğu

Eğer C eğrisi, $x=f(t)$ ve $y=p(t)$, $a \leq t \leq b$ ile parametrik olarak tanımlanıyorsa ve $t=a$ 'dan $t=b$ 'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa C nin uzunluğu $L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (p'(t))^2} dt$ dir.

Örnek: $x=rcost$, $y=rsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$ dairenin uzunluğunu hesaplayın.

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= -rsint \Rightarrow (f'(t))^2 = r^2 \sin^2 t \\ p'(t) &= rcost \Rightarrow (p'(t))^2 = r^2 \cos^2 t \end{aligned} \right\} (f'(t))^2 + (p'(t))^2 = r^2 \Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$