DETERMİNANTLAR

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ * Kare matrislerin determinantları tanımlıdır.

$|A| = |a_{ij}|$

$A = [a]_{1\times 1} \Rightarrow |A| = |a| = a$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow |A| = ad - bc \quad \left(|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\,\overbrace{(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32})}^{|M_{11}|} - a_{12}\,(\underbrace{a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}}_{|M_{21}|}) + a_{13}\,(\underbrace{a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}}_{|M_{13}|})$$

Tanım: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ mertebesinde bir matris olsun. A matrisinin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun çıkarılmasıyla elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ matrisi M_{ij} ile gösterelim.

M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının "Minörü" denir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ değerine a_{ij} elemanının eş çarpanı veya kofaktörü denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

a_{ij}'nin minörü $|M_{ij}|$

Örnek:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-4) + 2(-3-4) = -19$$

Teorem: $n \geq 2$ olmak üzere $n\times n$ mertebesindeki A kare matrisinin determinantı

$$\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$i = 1, 2, \ldots, n \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

Determinantın Özellikleri

Teorem: $|A| = |A^T|$ 'dir.

Teorem: i) A matrisinin herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının tümü "0" ise $|A| = 0$ 'dır.
ii) A matrisinin herhangi iki satırı (veya sütunu) aynı ise $|A| = 0$
iii) A, alt üçgen veya üst üçgen matris ise $|A|$, köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.
A matrisinin herhangi iki satırı (veya sütunu) orantılı ise $|A| = 0$

Teorem: i) Bir matrisin herhangi iki satırı (veya sütunu) yer değiştirirse determinantı da işaret değiştirir.
ii) Bir matrisin herhangi bir satırı (veya sütunu) bir k skaleri ile çarpılırsa determinantı da k ile çarpılır.
* iii) Bir matrisin herhangi bir satırı (veya sütunu) $k \neq 0$ ile çarpılır ve başka bir satıra (veya sütuna) eklenirse determinantın değeri değişmez.

$$A = [a_{ij}] \quad kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$k|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |kA| = k^n |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 35 = -5$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 40 = +5$$

3x3

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

4x4

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Teorem: Bir determinantın herhangi bir satır (veya sütun) elemanları başka bir satır (veya sütun) elemanlarının eş çarpanlarıyla çarpılarak elde edilen terimlerin toplamı sıfırdır.

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

$$-1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 16 - 10 = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Teorem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1i}+b_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2i}+b_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{ni}+b_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorem: $|AB| = |A| \cdot |B|$

Teorem: A^{-1} mevcut ise $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow |A||A^{-1}| = |A^{-1}||A| = 1$ mevcut ve

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \quad |A| \neq 0$$

A matrisin tersi olması için gerek ve yeter şart $\rightarrow |A| \neq 0$

Örnek:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a+b & b+c \\ b & b+c & c+a \\ c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

det. özelliklerinden yararlanarak hesaplayınız.

$$= \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & b+c & c \\ c & c+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b & c \\ b & b+c & a \\ c & c+a & b \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & b \\ b & b & c \\ c & c & a \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & c & c \\ c & a & a \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & a \\ c & c & b \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix}$$

2 ve 3'ü toplayıp 1'e ekledik

$$= (a+b+c)\left[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)\right] = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$