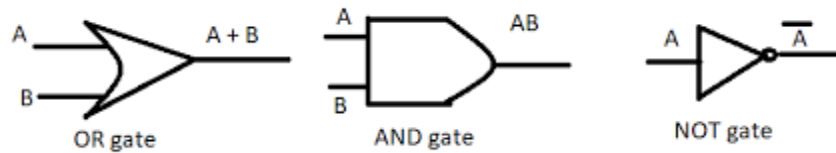
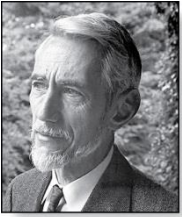


Bölüm 3

Boole Cebri





Claude Shannon
(1916 - 2001)

- Boole fonksiyonları
- Boole fonksiyonlarının gösterilimi
- Mantık kapıları
- Karnaugh haritaları

-
- Boole cebri $\{0, 1\}$ üzerinden çalışır, işlem operatörleri

- + (Boolean sum)

- . (Boolean product)

- \sim (Complement)

- Bu işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır

- *Boole sum*: $1 + 1 = 1$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

Boole product: $1 \cdot 1 = 1$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

complement: $\bar{0} = 1$

$$\bar{1} = 0$$

Örnek: $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$?

$$\begin{aligned}\text{Çözüm : } 1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} &= 0 + \bar{1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Boole ifadeler and Boole fonksiyonlar

Tanım:

$B = \{0, 1\}$ olsun

$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B, \text{ her } 1 \leq i \leq n\}$

0 ve 1'lerden oluşan tüm n bitlik değerlerin kümesi olsun.

Herhangi bir x değişkeninin değeri B kümesinden ise alabileceği değerler 0 veya 1 olur. x değişkenine **Boolean değişken** denir.

B^n 'den B 'ye olan bir fonksiyona da **n . dereceden Boole fonksiyon** denir

□ **Örnek:** Verilen Boole fonksiyonunun değeri nedir ?

$$F(x, y, z) = xy + \bar{z}.$$

Çözüm:

TABLE :					
x	y	z	xy	\bar{z}	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Tanım: F gibi bir Boole fonksiyonunun,
 \bar{F}

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Tanım: n değişkenden oluşan iki Boole fonksiyonu olan F ve G eşit kabul edilebilmesi için, b_1, b_2, \dots, b_n B kümesinin elemanları olduğunda $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ eşitliği sağlanmalıdır.

xy , $xy + 0$ ve $xy.1$ bu üç farklı Boole ifadesi birbirine denktir

$F + G$ olan

$$(F + G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

FG

$$(FG)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

[illegible]

Boole cebirindeki özdeşlikler

Boolean Identities.	
Identity	Name
$\overline{\overline{x}} = x$	Law of the double complement
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	Idempotent laws
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Identity laws
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Domination laws
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Commutative laws
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Associative laws
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Distributive laws
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x} \overline{y}$	De Morgan's laws
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Absorption laws
$x + \overline{x} = 1$	Unit property
$x\overline{x} = 0$	Zero property

Devre tasarımlarının sadeleştirilmesinde kullanılırlar

Örnek: $x(y + z) = xy + xz$ doğru mudur?

Çözüm:

Verifying One of the Distributive Laws.							
x	y	z	$y + z$	xy	xz	$x(y + z)$	$xy + xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Boole cebrinin soyut tanımı

Boole cebri \vee, \wedge ikili işlemleri ve \sim tekli işlemi uygulanabilen, 0 ve 1 elemanlarına sahip ve tüm x, y, z şeklindeki değişkenlerinde bu özelliklerin tamamı uygulanabilen B kümesidir.

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 1 = x$$

Birim (identity) kuralları

$$x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \wedge \bar{x} = 0$$

Tümleyen (complement) kuralları

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Birleşme (associative) kuralları

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

Değişme (commutative) kuralları

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Dağılma (distributive) kuralları

Boole fonksiyonlarının gösterilimi

- **Örnek:** Tabloda verilmiş olan $F(x, y, z)$ and $G(x, y, z)$ fonksiyonlarını tanımlayan Boole ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

F fonksiyonu sadece $x = z = 1$ ve $y = 0$ olduğunda 1 değerini aldığından $F(x, y, z) = x\bar{y}z$ dir

TABLE				
x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Çarpımların toplamı açılımı

- **Tanım:** Bir değişken veya tümleyenine **öğ**e (*literal*) denir. Boole değişkenleri x_1, x_2, \dots, x_n 'in $y_i = x_i$ veya $y_i = \bar{x}_i$ durumunu sağlayan y_1, y_2, \dots, y_n çarpımına **minterim** denir. Her değişken bir öğe olarak gösterildiğinde bir miniterim ***n*** tane öğenin çarpımıdır.

- **Örnek :** $F(x,y,z) = (x + y)\bar{z}$
 \bar{z} fonksiyonu için toplamaların çarpımı açılımını bulunuz.

Çözüm 1:

Tabloda $F(x,y,z)$ fonksiyonun 1 olduğu değerler alındığında $F(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

x	y	z	$x + y$	\bar{z}	$(x + y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

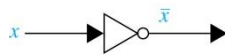
Çözüm 2:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x + y)\bar{z} \\ &= x\bar{z} + y\bar{z} \quad \text{dağılma kuralı} \\ &= x1\bar{z} + 1y\bar{z} \quad \text{özdeşlik kuralı} \\ &= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z} \quad \text{birim özelliği} \\ &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}z \quad \text{dağılma kuralı} \\ &= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} \quad \text{değişmezlik kuralı} \end{aligned}$$

Mantık kapıları

Devrelerin temel elemanları kapılardır ve kapı türleri farklı bir Boole işlemini gerçekleştirmektedir.

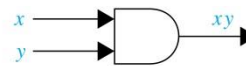
Kullanılan kapılar OR (toplama), AND (çarpma), NOT (tersi)



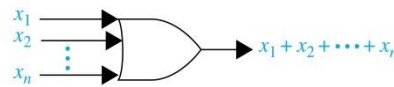
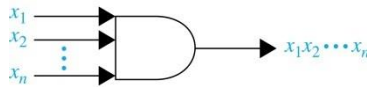
(a) Inverter



(b) OR gate

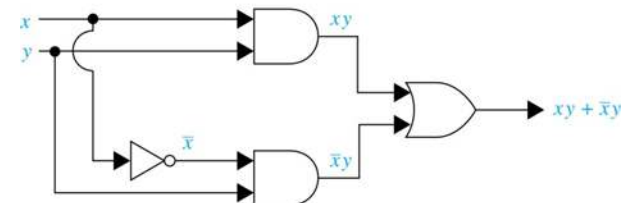
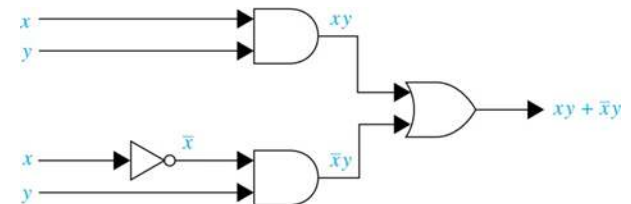


(c) AND gate



$$xy + \bar{x}y$$

ifadesini mantık kapıları ile gösterelim



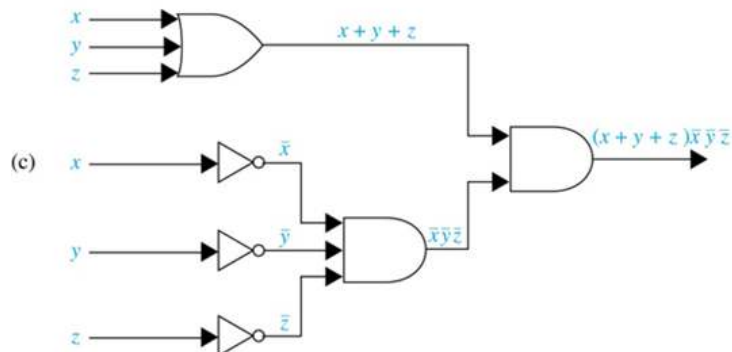
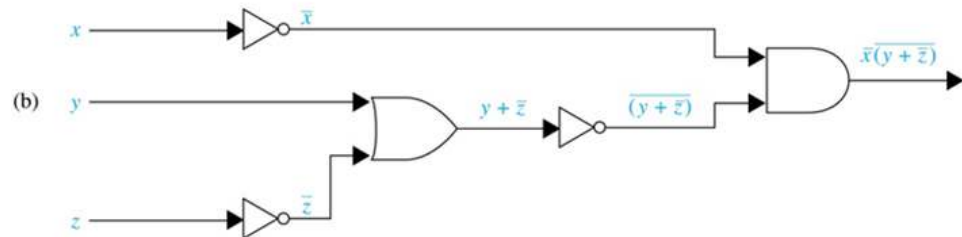
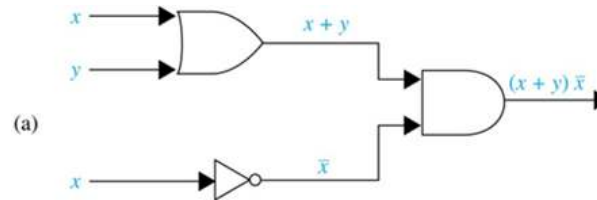
■ Örnek

Aşağıdaki ifadeleri mantık kapıları ile tasarlayınız

(a) $(x + y)\bar{x}$

(b) $\bar{x} \overline{(y + \bar{z})}$

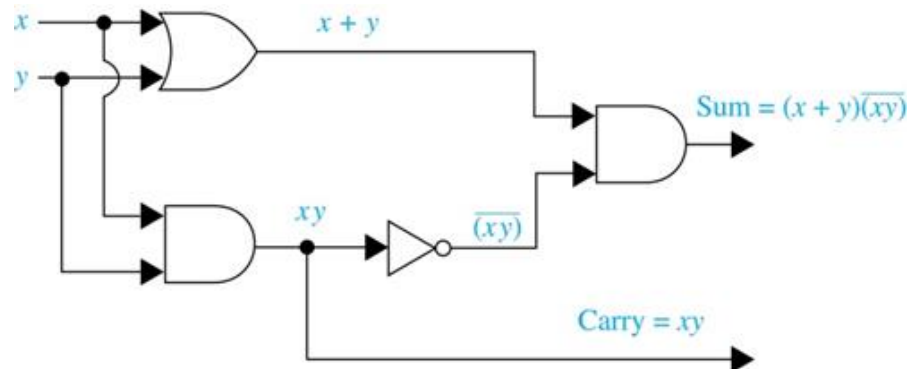
(c) $(x + y + z)(\bar{x} \bar{y} \bar{z})$



Devre örnekleri

- İki bitlik yarı toplayıcı devresi (half adder)

Input and Output for the Half Adder.			
Input		Output	
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>c</i>
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0



Karnaugh diyagramları

<https://youtu.be/zFPAuskKETg>

<https://youtu.be/gEFyd7aWHok>

<https://youtu.be/BJIN7fZc2SU>

<https://youtu.be/PSCtOXoFmGY><https://youtu.be/diwmhcsIjJA>

<https://youtu.be/GgazfgKMAZE>