# SONSUZ DİZİLER ve SERİLER

## DİZİLER

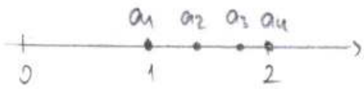
**Tanım:** Belirli bir kurala göre sıralanmış sayılar topluluğuna dizi denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$a_n$ : genel terim ($n$. terim) $\rightarrow$ dizinin kuralını belirler

$n$ : indis $\rightarrow$ $a_n$ teriminin dizideki kaçıncı eleman olduğunu belirtir.

Örneğin; $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\underset{n=1}{\sqrt{1}}, \underset{n=2}{\sqrt{2}}, \underset{n=3}{\sqrt{3}}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$




(*) Her dizi, $\mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Yani, $f(n) = \{a_n\} : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto a_n$

**Örnekler:**

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$

2) $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\underbrace{a_{n+2} = a_n + a_{n+1}}_{\text{tekrarlama kuralı}}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 6 terimini yazın.

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = a_1 + a_2 = 2$
$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = 5$
$a_6 = 8$

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$ $\rightarrow$ Fibonacci Dizisi

5) $a_1 = 1$, $n > 1$, $\underbrace{a_n = n \cdot a_{n-1}}_{\text{tekrarlama kuralı}}$ ise $\{a_n\}$ in ilk 4 terimini yazın.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$

$\{a_n\} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$ $\rightarrow$ Faktöriyel Dizisi

## Yakınsama ve Iraksama:

Bazen bir dizinin indis sayısı (n) arttıkça dizideki sayılar belli bir değere yakınsar.

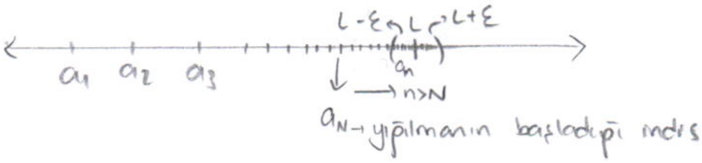
Örneğin, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler 0'a yaklaşırken,

$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisinde terimler 1'e yaklaşır,

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ gibi dizilerde ise tek bir değere yakınsayamaz.

**Tanım:** Her $\varepsilon$ pozitif sayısı için $n > N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir N tamsayısı bulunuyorsa, $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsar. Eğer böyle bir L yoksa $\{a_n\}$ dizisi ıraksar.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyorsa L'ye dizinin limiti denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ile gösterilir.




$\lim_{n\to\infty} a_n$
- → sayı : dizi yakınsaktır $\{\frac{1}{n}\}$
- → $\mp\infty$ : dizi ıraksaktır ($\mp\infty$'a ıraksar) $\{\sqrt{n}\}$
- → limit mevcut değil : dizi ıraksaktır. $\{(-1)^{n+1}\}$

## Dizilerin Limitlerinin Hesaplanması:

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ birer reel sayı dizisi, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ olsun.

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = A \mp B$

2) $\lim_{n\to\infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (k sabit)

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ ise)

(Fonksiyonlardaki limit kuralları diziler için de geçerlidir)

**Örnek:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4/n^6)-7}{1+\left(\frac{3}{n^6}\right)} = \dfrac{0-7}{1+0} = -7$

**Örnek:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1-\dfrac{1}{n} = 1-0 = 1$

**Diziler için Sandviç Teoremi:** $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Eğer belli bir N sayısından büyük bütün n'ler için $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ ise o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ dir.

**Örnek:** $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

**Örnek:** $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ çünkü $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

**Diziler için Sürekli fonksiyon teoremi:** $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonksiyonu her $a_n$'de tanımlı olup L'de sürekli ise, $f(a_n) \to f(L)$ dir.

**Örnek:** $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \to 1$ olduğunu gösteriniz.

$\dfrac{n+1}{n} \to 1$ old.nu biliyoruz. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $L=1$ alınırsa $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$ dir.

**Teorem:** Her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ olacak şekilde $\{a_n\}$ dizisi ve $f(x)$ fonksiyonu mevcut olsun. O halde,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \underbrace{L}_{\text{sayı},\ \mp\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ dir.}$$

⊛ Dolayısıyla bazı dizilerin limitlerini hesaplarken L'Hopital kuralını kullanabiliriz.

**Örnek:** $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

**Örnek:** $\{\sin n\pi\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi$ : limit mevcut değildir, ancak dizi ıraksaktır diyemeyiz.

$\{\sin n\pi\} = \underbrace{\{0,0,0,\ldots,0,\ldots\}}_{\text{sabit dizi}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

⊛ Yukarıdaki teorem limitin mevcut olması durumunda geçerlidir.

## Sınırlı Diziler:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde bir $M$ sayısı varsa $\{a_n\}$'e üstten sınırlı dizi denir. $M$ sayısı, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır.

(*) Bir dizinin (varsa) birden fazla üst sınırı vardır.

(*) $M$, $\{a_n\}$ için bir üst sınır ve $M$'den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır değilse $M$'ye "en küçük üst sınır" (EKÜS) denir.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \geq m$ olacak şekilde bir $m$ sayısı varsa $\{a_n\}$'e alttan sınırlı dizi denir. $m$ sayısı, $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır.

(*) Bir dizinin (varsa) birden fazla alt sınırı vardır.

(*) $m$, $\{a_n\}$ için bir alt sınır ve $m$'den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse $m$'ye "en büyük üst sınır" (EBAS) denir.

Bir dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise $\{a_n\}$'e sınırlı dizi denir.
$\{a_n\}$ sınırlı değilse sınırsız dizi denir.

## Monoton Diziler:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

a) $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ azalmayan}\right)$

b) $a_{n+1} \leq a_n$ ise $\{a_n\}$ artmayan dizidir. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ artmayan}\right)$

Eğer $\{a_n\}$ dizisi azalmayan veya artmayan bir dizi ise "monoton" dizidir.

Örnek: 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ azalmayan bir dizidir, çünkü $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\left(\lim_{n\to\infty} n = \infty \text{ olduğundan aynı zamanda ıraksaktır}\right)$

2) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ artmayan bir dizidir: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ olduğundan yakınsaktır}\right)$

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ dizisi monoton değildir.

$\left(\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ limiti mevcut olmadığından ıraksaktır}\right)$

**Monoton Dizi Teoremi:** Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise yakınsaktır.

Not: Her yakınsak dizi sınırlıdır, fakat her sınırlı dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin; $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ dizisi sınırlıdır ancak limiti mevcut olmadığından yakınsak değildir.

Örnek: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin

a) yakınsaklığını
b) monotonluğunu
c) sınırlılığını
d) EBAS, EKÜS

} inceleyin.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow$ dizi azalmayan dizidir. (monoton dizi)

c) yakınsak olduğu için sınırlıdır.

(*) Alttan sınırlı ve artmayan dizi EBAS'a, üstten sınırlı ve azalmayan dizi EKÜS'e yakınsar.

d) Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır. $\Rightarrow$ EKÜS $= 1$.

Dizi alttan $1/2$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır $\Rightarrow$ EBAS $= a_1 = \frac{1}{2}$

**Sıkça Rastlanan Limitler:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$
$x>1 \Rightarrow L=\infty$
$x<-1 \Rightarrow L$ mevcut değil

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x$ için$)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty \quad (x>1)$

Örnek: 1) $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

2) $\{\sqrt[n]{3n}\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\underbrace{3^{1/n}}_{=1}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{=1} = 1 \Rightarrow$ dizi yakınsaktır

# SERİLER

**Tanım:** Bir kurala bağlı sayılar dizisinin terimlerinin toplanmasıyla elde edilen ifadeye seri denir.

Yani, $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ dizisinin terimleri toplanarak

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ile gösterilir

**Örnek:** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

3) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

5) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

6) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)^2+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

**Not:** Bir serinin ilk indisinin 1'den başlama zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda indis, uygun bir dönüşümle istenilen sayıdan başlatılabilir.

Örneğin; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $n = m-2$ dönüşümü ile $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazılabilir.

## Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi, $S_n$'ye de serinin $n$. kısmî toplamı denir.

Eğer $\{S_n\}$ kısmî toplamlar dizisi bir $L$ limitine yakınsıyorsa ($\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ise) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve $L$ toplamına sahiptir.

Bu ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = L$ ile ifade edilir.

Eğer $\{S_n\}$ ıraksak ise seri de ıraksaktır.

**ÖZET:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamını bulmak için:

1) $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bulunur, yakınsaklığı incelenir.

2) $\lim_{n\to\infty} S_n$
- → sayı $= L$ ise seri yakınsaktır ve toplamı $L$'dir.
- → $= \mp\infty$ ise seri $\mp\infty$'a ıraksar
- → limit mevcut değilse seri ıraksar

## Geometrik Seri

$n$. terimi $a_n = ar^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar^1 + ar^2 + \dots$ şeklindeki seriye geometrik seri denir. Burada $a$ ve $r$, $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır. Geometrik serinin ilk terimi $a$ sayısıdır. $r$ sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$ dir.

## Geometrik serinin yakınsaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisinin $n$. kısmî toplamı $S_n$'i hesaplayalım.

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{\dots} + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$-\quad rS_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\dots} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

**1. durum:** $r=1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a+a+a+\dots+a+\dots$ serisi elde edilir.

Bu durumda, $S_n = a+a+\dots+a = n.a$ ve $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a \begin{cases} +\infty\ (a>0) \\ -\infty\ (a<0) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır. (Yani $r=1$ iken seri toplanamaz)

**2. durum:** $r\neq 1$ ise $(1-r)S_n = a(1-r^n) \Rightarrow S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

a) $|r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-\overbrace{r^n}^{=0})}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ elde edilir.

Dolayısıyla seri yakınsaktır ve toplamı $\dfrac{a}{1-r}$ dir.

b) $r>1$ ise $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-\overbrace{r^n}^{=\infty})}{1-r} \begin{cases} = +\infty & (a>0 \text{ ise}) \\ = -\infty & (a<0 \text{ ise}) \end{cases}$

Dolayısıyla seri ıraksaktır.

c) $r\leq -1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n$ mevcut olmadığından $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ limiti de mevcut değildir. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

**ÖZET:**

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$
- $\to |r|<1$ ise yakınsar
- $\to |r|\geq 1$ ise ıraksar
  - $\to r\geq 1$, $a>0$ ise $+\infty$'a ıraksar
  - $\to r\geq 1$, $a<0$ ise $-\infty$'a ıraksar
  - $\to r\leq -1$ ise seri ıraksaktır.

**Örnek:** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ toplamını bulun.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad a=1$, $r=\frac{1}{2} \Rightarrow |r|=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ seri yakınsak

Toplam $= \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$ seri 2'ye yakınsar yani $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 2$

**Örnek:** $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots$ toplamını bulun.

$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi\left(1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \Rightarrow a=\pi$, $r=-\frac{e}{\pi}$

$|r| = \left|-\frac{e}{\pi}\right| = \dfrac{\overset{\approx 2{,}7}{e}}{\underset{\approx 3{,}14}{\pi}} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \dfrac{\pi^2}{e+\pi}$'ye yakınsar.

**Örnek:** $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=?$

$$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=\sqrt{2}>1 \\ a=1>0 \end{array}\right\} \text{ seri } +\infty\text{'a ıraksar}$$

**Örnek:** $x=0{,}323232\dots=0{,}\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.

$$x=0{,}3232\dots=\frac{32}{100}+\frac{32}{(100)^2}+\frac{32}{(100)^3}+\dots=\frac{32}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{(100)^2}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{32}{100}}_{a}\underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)}_{r<1}^{n-1}$$

$$x=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{32}{99}$$

## Teleskopik Seri

Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak elde edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

**Örnek:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=?$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$ toplamı hesaplanamaz.

Seri teleskopik seridir ve basit kesirlere ayrılır.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \Rightarrow A=1,\ B=-1$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=1\cancel{-\frac{1}{2}}\cancel{+\frac{1}{2}}\cancel{-\frac{1}{3}}\cancel{+\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{4}}\cancel{+\dots}\cancel{+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

**Örnek:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$ $\qquad S_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{4}{n^2+4n+3}$ !

$$\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow A=2 \;,\; B=-2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3}\right)$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{2}{4}} + \frac{2}{3} - \cancel{\frac{2}{5}} + \cancel{\frac{2}{4}} - \cancel{\frac{2}{6}} + \dots + \cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+2} + \cancel{\frac{2}{n+1}} - \frac{2}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{5}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3}$$

**Örnek:** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = ?$ $\qquad S_n = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ !

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{\cancel{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

## Serilerle İlgili Bazı Teoremler

1) $\sum a_n = A$ , $\sum b_n = B$ ise $\sum a_n + b_n = A \mp B$ , $\sum k a_n = k \sum a_n$ (k bir sayı)

2) $\sum a_n$ ıraksak ise $k\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

3) $\sum a_n$ ıraksak , $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n \mp b_n$ serisi de ıraksaktır.

4) $\sum a_n$ ıraksak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n \mp b_n$ serisi ıraksak veya yakınsak olabilir.

5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya çıkarmak serinin karakterini değiştirmez.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ve $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$ olsun. Böylece $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dir.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{S}{\underset{\parallel}{S_n}} - \underset{S}{\underset{\parallel}{S_{n-1}}}) = 0$$

(n çok büyük olduğu zaman)

(Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise seri ıraksak olabilir)

**n. terim testi:** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut olmadığından n. terim testine göre ıraksaktır.

Örnek: Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{2}<1}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\substack{a=1 \\ r=\frac{1}{3}<1}} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \Sigma = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \underset{r<1}{\underset{\parallel}{\left(\frac{1}{2}\right)}}^n = 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 8$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{a}{\underset{\parallel}{\frac{1}{3}}} \underset{r<1}{\underset{\parallel}{\left(\frac{1}{3}\right)}}^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{a}{\underset{\parallel}{\frac{4}{3}}} \underset{r<1}{\underset{\parallel}{\left(\frac{2}{3}\right)}}^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

7) **Yeniden İndisleme:** Terimlerin sırasını değiştirmedikçe bir seriyi yeniden indisleyebiliriz. Bu işlem yakınsaklığı etkilemez.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Örneğin; $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} = \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$