ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$D \neq \emptyset$ olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D'deki her (x,y) nokta çiftini bir $z=f(x,y)$ reel sayısına eşleyen f kuralına iki değişkenli fonksiyon denir.

D: tanım bölgesi (kümesi)

$z=f(x,y)$ değerlerinin kümesi: değer kümesi

$z=f(x,y)$: 2 değişkenli fonksiyon
x,y : bağımsız değişken
z : bağımlı değişken

$f(x,y,z)$ şeklinde kapalı formda da ifade edilebilir.

Ⓐ Geometrik olarak $z=f(x,y)$ fonksiyonu uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatını temsil eder.

Ⓐ Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ şeklindedir.

$x_1,x_2,\dots,x_n$: bağımsız değişken

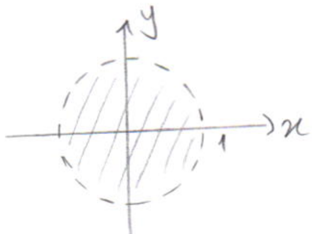
w : bağımlı değişken

Örnek:

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$z=\sqrt{y-x^2}$	$y \geq x^2$	$[0,\infty)$
$z=\dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$z=\sin xy$	Düzlemin tümü	$[-1,1]$
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Uzayın tümü	$[0,\infty)$
$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$	$(0,\infty)$
$w=xy\ln z$	$z>0$	$(-\infty,\infty)$

Örnek: $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup çiziniz.

$1-x^2-y^2>0 \Rightarrow x^2+y^2<1$

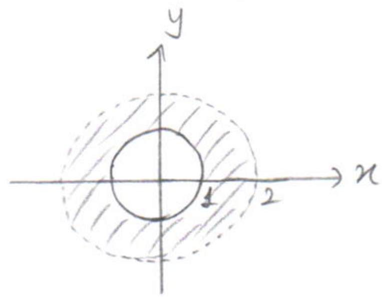


Örnek: $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$ tanım bölgesini bulup, çiziniz.

$x^2+y^2-1\geq 0$ $\quad$ $4-x^2-y^2>0$

$x^2+y^2\geq 1$ $\quad$ $x^2+y^2<4$

$1\leq x^2+y^2<4$



Örnek: $z=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-y^2}}$ tanım bölgesini bulup çiziniz.

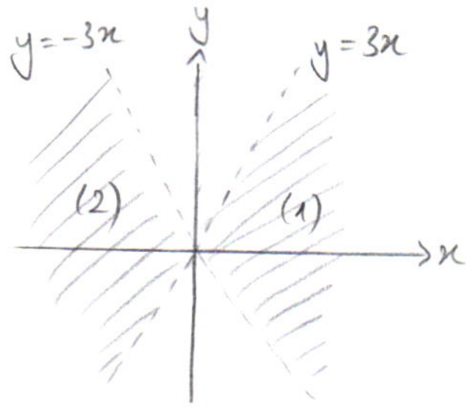
$$9x^2-y^2>0 \Rightarrow (3x-y)(3x+y)>0$$

$+\quad +\quad (1)$

$-\quad -\quad (2)$

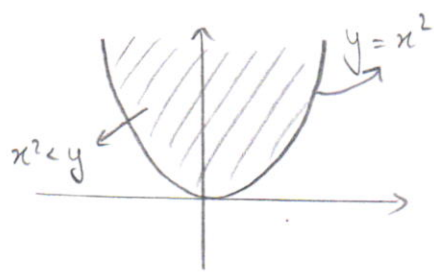
(1) $3x-y>0$, $3x>y$ $\quad$ $3x+y>0$, $y>-3x$ $\Big\}$ $-3x<y<3x$

(2) $3x-y<0$, $3x<y$ $\quad$ $3x+y<0$, $y<-3x$ $\Big\}$ $3x<y<-3x$



Örnek: $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ tanım bölgesini bulup çiziniz.

$y-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq y$



Seviye Eğrileri

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi, f nin seviye eğrisi olarak adlandırılır.

f nin tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f nin grafiğidir. f nin grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi de denir.

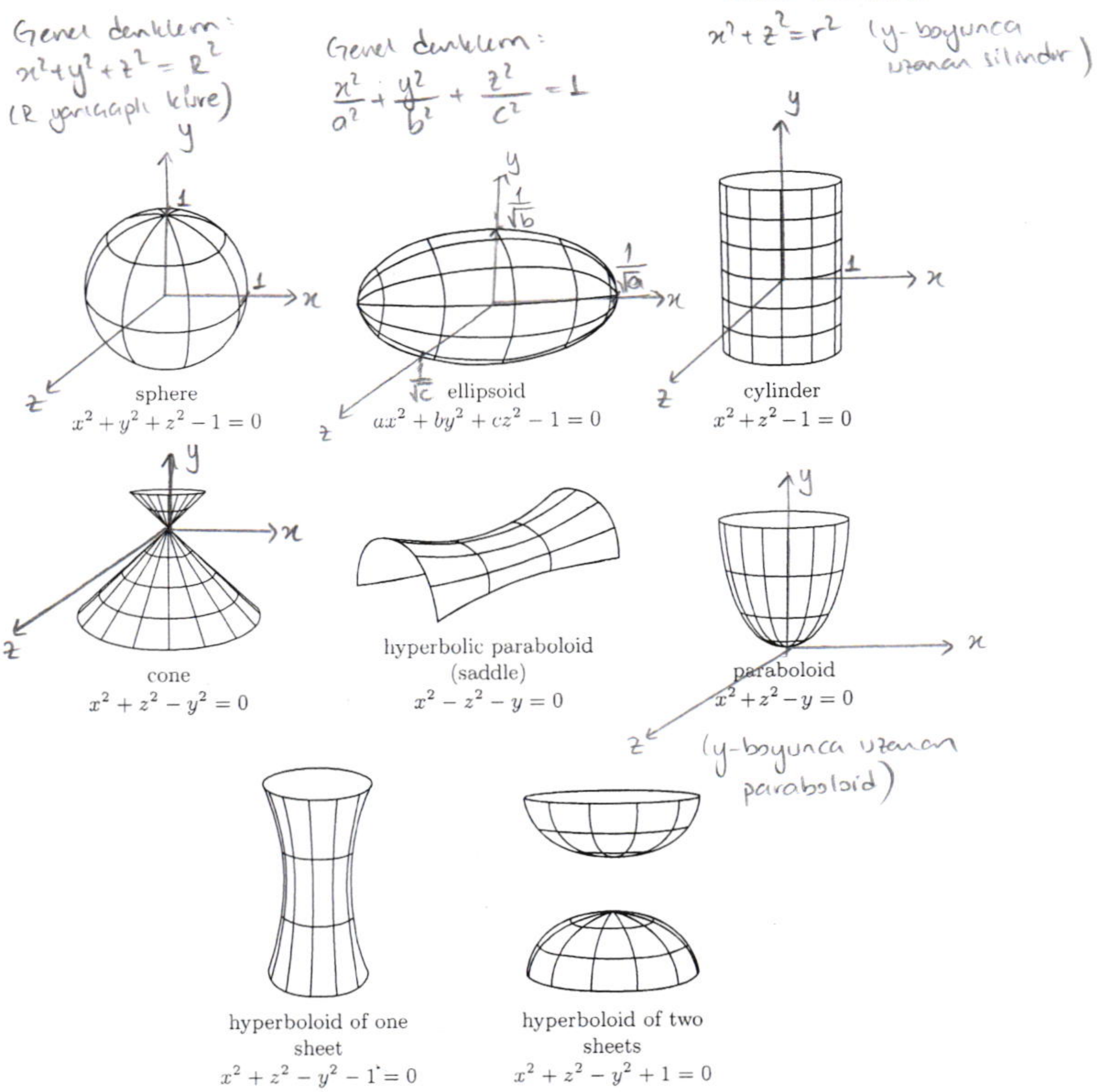
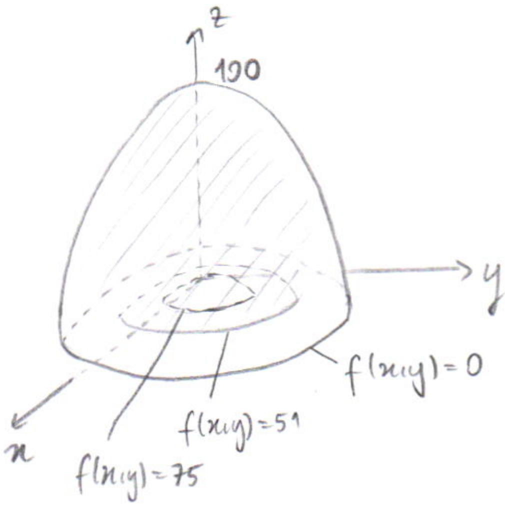


Figure 13.1: The important quadric surfaces.

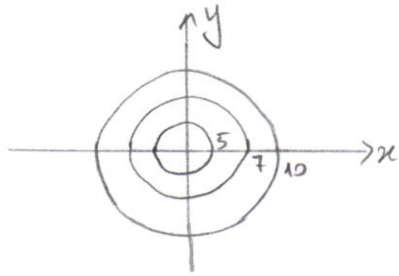
Örnek: $f(x,y)=100-x^2-y^2$ nın grafiğini çiziniz ve $f(x,y)=0$, $f(x,y)=51$ ve $f(x,y)=75$ seviye eğrilerini gösteriniz.



$f(x,y)=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$ çemberi

$f(x,y)=51 \Rightarrow x^2+y^2=49$ çemberi

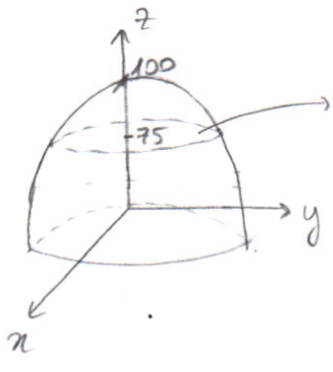
$f(x,y)=75 \Rightarrow x^2+y^2=25$ çemberi



Kontur Eğrisi

Uzayda $z=c$ düzleminin bir $z=f(x,y)$ yüzeyini kestiği eğri, $f(x,y)=c$ değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y)=c$ kontur eğrisi denir.

Örnek: $f(x,y)=100-x^2-y^2$ yüzeyinin $f(x,y)=75$ kontur eğrisi

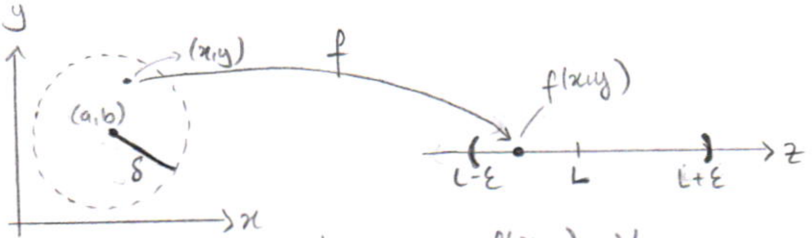


$\rightarrow z=75$ düzleminde $x^2+y^2=25$ çemberi

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT ve SÜREKLİLİK

Limit

Her ε pozitif sayısı için $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)$ sayısı mevcutsa $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir denir ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ile gösterilir.



$(x,y)\to(a,b)$ iken $f(x,y)\to L$

δ yarıçaplı bir daire içindeki tüm (x,y)'lerin görüntüsü olan $f(x,y)$, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ aralığının içinde kalır.

⊛ Limit varsa tektir.

⊛ $y=f(x)$ in $x=a$'da limiti varsa a nın hem sağ hem de sol limiti birbirine eşittir. $z=f(x,y)$ nin bir (a,b) noktasında limitinin olması için (a,b)'ye nasıl yaklaşırsak yaklaşalım, limitin sonucu aynı çıkmalıdır.

Limit Kuralları: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$ ise

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)\mp g(x,y)\right)=L\mp M$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L}{M}$, $M\neq 0$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} kf(x,y)=kL$ (k: sabit)

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)\right)^n=L^n$ ($n\in\mathbb{Z}^+$)

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x-y}{x+y^2}=\dfrac{1}{3}$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(\cancel{x-y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\underbrace{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}_{=\cancel{x-y}}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$ olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon>0$ için $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}<\delta}_{\text{bilinen}}$ iken $\underbrace{\left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon}_{\text{olması istenen}}$ olacak şekilde bir $\underbrace{\delta=\delta(\varepsilon)>0}_{\text{bulunacak}}$ sayısı var mı?

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{4y^2}{x^2+y^2}|x|\leq\frac{4(x^2+y^2)|x|}{x^2+y^2}=4|x|=4\sqrt{x^2}\leq 4\sqrt{x^2+y^2}<4\delta=\varepsilon$$

$\Rightarrow \delta=\dfrac{\varepsilon}{4}>0 \Rightarrow$ Yani $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$'dır.

İki Kat Limit (Ardışık Limit)

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ için, $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)=L_1$ ve $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)=L_2$ olsun.

a) $L_1=L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında iki kat limiti vardır.
(Bunu söylemek $f(x,y)$ nin (a,b) 'de limitinin var olduğunu garanti etmez)

b) $L_1\neq L_2$ ise $f(x,y)$ nin (a,b) noktasında iki kat limiti yoktur, dolayısıyla limiti yoktur.

Limitin Olmadığını Göstermek için Çift Yol testi:

Eğer bir (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşırken farklı limitleri varsa $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut değildir.

Örneğin, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitinin mevcut olmadığını göstermek için,

1. yol: İki kat limitin mevcut olmadığı gösterilebilir.

2. yol: $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, ⋮ yollarından ikisi boyunca alınan limitlerin farklı olduğu gösterilebilir.

3. yol: $y=kx$, $y=kx^2$, $y=kx^3$, ⋮ yollarından biri ile alınan limitin sonucunun k'ya bağlı olduğu gösterilerek limitin mevcut olmadığı söylenebilir.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}$ $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

1. yol:
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right)=3$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right)=-\frac{1}{3}$$
$\neq$ iki kat limit olmadığından mevcut değil

2. yol: $y=x$ boyunca limit: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x^2}{3x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$

$y=x^2$ boyunca limit: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x^4}{3x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(3-x^2)}{x^2(3x^2+1)}=3$

$\neq$ Limit mevcut değil

3. yol: $y=kx$ için $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-k^2x^2}{3k^2x^2+x^2} = \dfrac{3-k^2}{3k^2+1}$: sonuç k'ya bağlı, limit mevcut değil

Örnek: $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

$y=kx^2$ için $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^4}{x^4(1+k^2)} = \dfrac{2k}{1+k^2}$: sonuç k'ya bağlı, limit mevcut değil.

Süreklilik

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu;

(1) (a,b) noktasında tanımlı

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

ise (a,b) noktasında süreklidir.

⊛ Bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise, o fonksiyon süreklidir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$'daki sürekliliğini araştırınız.

(1) $f(0,0)=0$ olduğundan $(0,0)$'da tanımlı

(2) $y=kx$ boyunca limite bakalım: (iki kat limit sonuç vermediğinden)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \dfrac{2k}{1+k^2}$ olduğundan limit k'ya bağlı olup mevcut değildir.

Dolayısıyla $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$'da sürekli değildir.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da sürekli olduğunu gösteriniz. $\lim f(x,y)=0$ old. gösterilmeli

(1) ✓

(2) Her $\varepsilon>0$ için $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ o.ş. $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ var mı?

$\left|\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{|x||x^2-y^2|}{x^2+y^2} < \dfrac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow \delta=\varepsilon>0$ seçilirse $L=0 \Rightarrow$ sürekli ✓

Bileşkelerin Sürekliliği: Eğer f fonksiyonu (a,b)'de sürekli ve g de $f(a,b)$'de sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise $h(x,y) = g(f(x,y))$ ile tanımlanan bileşke fonksiyon $h = g \circ f$, (a,b)'de süreklidir.

Örneğin, e^{x-y}, $\cos \dfrac{xy}{x^2+1}$, $\ln(1+x^2y^2)$ her (x,y) noktasında süreklidir.

İkiden fazla değişkenli fonksiyonlar: İki değişkenli fonksiyonlar için yapılan limit ve süreklilik tanımları ile sonuçları üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örneğin, $$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

$\ln(x+y+z)$ ve $\dfrac{y\sin z}{x-1}$ gibi fonk-lar tanım kümeleri boyunca süreklidir.