Taylor ve Maclaurin Serileri

Yakınsaklık aralığının içindeki bir kuvvet serisi toplamının, her mertebeden türevi olan sürekli bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur?

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa bu fonksiyon bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir mi? Eğer edilebilirse bu kuvvet serisinin katsayıları için ne söylenilebilir?

Son soruyu, eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz. I yakınsaklık aralığı içindeki terimleri tek tek türevlersek;

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 1.2.a_2 + 2.3.a_3(x-a) + 3.4a_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4(x-a) + 3.4.5a_5(x-a)^2 + \cdots$$

$$\vdots$$

Tüm n'ler için genel olarak;

$f^{(n)}(x) = n!a_n + (x-a)$ ortak çarpanını içeren bazı terimler.

Bu denklemler $x=a$'da geçerli olduklarından,

$$f'(a) = a_1$$

$$f''(a) = 2!a_2$$

$$f'''(a) = 3!a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Yani, eğer böyle bir seri varsa bir tanedir ve n. katsayısı

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şeklindedir.

Dolayısıyla f nin bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \qquad (*)$$

Şimdi eğer $x=a$ merkezli bir I aralığında her mertebeden türevi olan herhangi bir f fonksiyonu ile başlarsak ve bu fonksiyonu $(*)$ serisini üretmek için kullanırsak, bu seri I daki her x için $f(x)$'e yakınsar mı? Cevap "belki" dir, bazı fonksiyonlar için doğru bazıları için yanlıştır.

Taylor Serisi: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Maclaurin Serisi: f tarafından üretilen Maclaurin serisi;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Yani, Maclaurin serisi $x=0$ daki Taylor serisidir.

Taylor Polinomları: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta n. mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f tarafından $x=a$ da üretilen n. mertebe Taylor polinomu $P_n(x)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$P_n(x)$, $x=a$ civarında $f(x)$ in en iyi polinom yaklaşımını verir.

(38. alıştırmayı göz)

Örnek: $f(x)=e^x$ in Maclaurin serisini ve Maclaurin polinomunu bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(x)}{2!}x^2+\dots$$

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\dots=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n)}(0)=e^0=1$$

e^x in Maclaurin açılımı: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

n. mertebe Maclaurin polinomu: $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

Örnek: $f(x)=\frac{1}{x}$ tarafından $a=2$ de üretilen Taylor serisini bulunuz. Hangi noktalarda seri $\frac{1}{x}$'e yakınsar?

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}, \quad f'(x)=-x^{-2}, \quad f''(x)=2!\,x^{-3}, \dots, \quad f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}, \quad f'(2)=-\frac{1}{2^2}, \quad \frac{f''(2)}{2!}=\frac{1}{2^3}, \dots, \quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

Taylor serisi: $f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\dots$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{geometrik seri} \quad a=\frac{1}{2} \quad r=\frac{2-x}{2}$$

$\Rightarrow |r|=\left|\frac{2-x}{2}\right|<1$ için yakınsaktır, yani $\boxed{0<x<4}$

Toplamı;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)^n=\frac{1/2}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{x}$$

(Yani bu seri $a=2$ için sadece $(0,4)$ aralığında $\frac{1}{x}$'e, yani kendini üreten fonksiyona yakınsıyor.)

Örnek: $f(x)=\cos x$ fonksiyonu tarafından $x=0$ da üretilen Taylor serisini bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)&=-\sin x \to f'(0)=0 \\ f''(x)&=-\cos x \to f''(0)=-1 \\ f'''(x)&=\sin x \to f'''(0)=0 \\ f^{(IV)}(x)&=\cos x \to f^{(IV)}(0)=1 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} f^{(2n+1)}(0)=0 \ , \ f^{(2n)}(0)=(-1)^n$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Yani bu seri, her x için $\cos x$'e yakınsar. (Oran testinden görülebilir)

Bazı Önemli Maclaurin Serileri:

1) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$

2) $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

3) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

4) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dots \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

5) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dots \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

6) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x<1)$

7) $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1<x<1)$

Örnek: $f(x) = e^{-x^2/3}$ ün Maclaurin serisini bulun.

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad x \longrightarrow -\frac{x^2}{3}$$

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n . n!} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{3^2} - \cdots \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Örnek: $f(x) = \sin^2 x$ in Maclaurin serisinin genel terimini bulun.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} \cdots\right) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} . x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Elementer Olmayan İntegrallerin Hesaplanması: Taylor serileri, elementer olmayan integralleri seriler cinsinden ifade etmek için kullanılabilir.

Örnek: $\int \sin x^2 \, dx$ integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \xRightarrow{x \to x^2} \quad \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int \sin x^2 \, dx = c + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!}$$

Örnek: $\int_0^x e^{-t^2} dt$ nin Maclaurin serisinin genel terimini bulun?

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \cdots \qquad (\forall t \text{ için})$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \cdots\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5.2!} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} - \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} \qquad (\forall x \text{ için})$$

Belirsizlik Durumundaki Limitleri Hesaplamak: Bazen belirsiz durumdaki limitleri hesaplamak için fonksiyonların Taylor serilerinden faydalanabiliriz.

Örnek: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = ?$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xRightarrow{x \to x-1} \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - \dots\right) = 1$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots\right)}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{2}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = ?$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}^{\,x}\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)} = 0$$

Örnek: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \xrightarrow{x \to 2x} e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \xrightarrow{x \to 3x} \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \xrightarrow{x \to x^3} \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(2x + \frac{(2x)^2}{2} + \dots\right)\cdot\left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots\right)}{\left(\frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \dots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \dots}{\left(\frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^4}{4!} + \dots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}\left(2 + 2x + \dots\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{9}{2} - \frac{3^4x^2}{4!} + \dots\right)^2}$$

$$= \frac{81}{4}$$