BLM2041
Bilgisayar Mühendisleri için
Sinyal ve Sistemler

Öğrenci Adı: Sinem Sarak

Öğrenci Numarası: 22011647

Dersin Eğitmeni: Ahmet Elbir

Video Linki: https://youtu.be/0RrjuTxCfwc

İçindekiler

Soru 1:

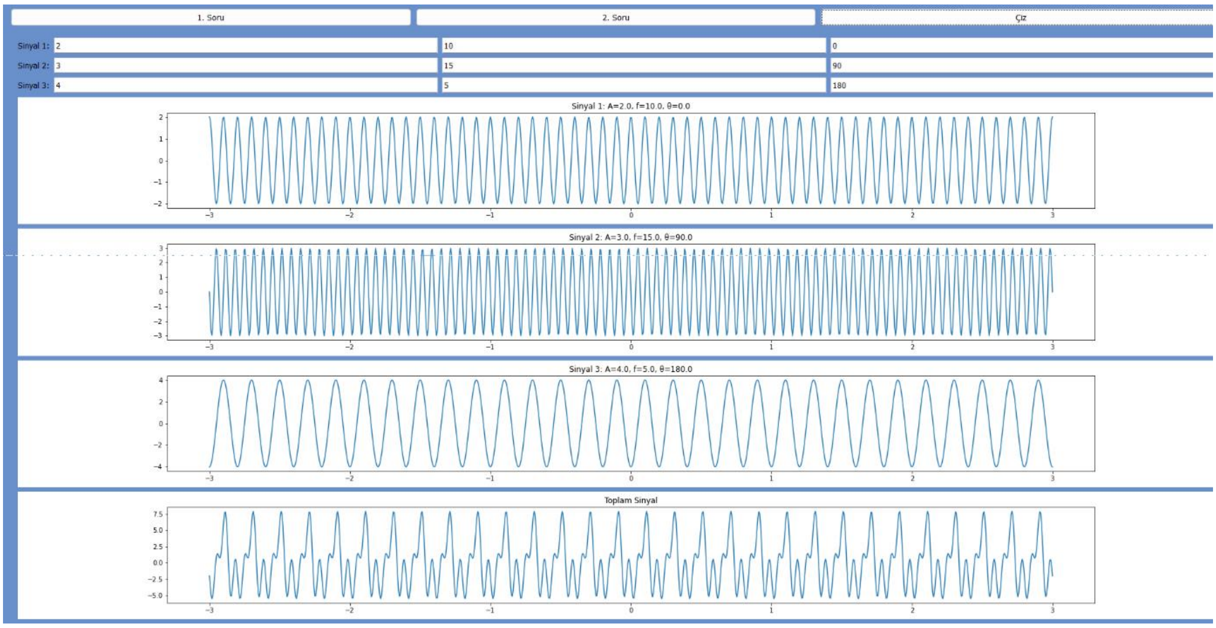
Bu soru içerisinde kullanıcıdan üç farklı sinüzoidal sinyalin genlik (Ak), frekans (fk) ve faz (θk) bilgileri alınarak bu sinyallerin toplamı olan sentez sinyalinin ekranda çizdirilmesi istenmektedir. Kullanıcı, sinyallerin genlik, frekans ve faz bilgilerini arayüzde belirtilen kısımlara girmelidir. Daha sonra program girilen bilgileri kullanarak toplam sinyalini hesaplamalı ve arayüzde kullanıcıya göstermelidir.

Bu sorunun çözümü için tasarlanan arayüz içerisinde kullanıcıdan üç farklı sinüzoidal sinyalin genlik (A), frekans (f) ve faz (θ) bilgileri alınmıştır. Kullanıcıdan üç sinyalin genlik, frekans ve faz bilgilerini almak için her sinyal için üç adet giriş alanı (QLineEdit) oluşturulmuştur. Bu giriş alanlarından alınan bilgiler ,q1_inputs isimli, kullanıcının üç farklı sinyal için girdiği genlik, frekans ve faz bilgilerini tutmak için kullanılan bir listeye kaydedilmiştir. Kullanıcı "Çiz" butonuna bastığında, koddaki plot_graphs() fonksiyonu tetiklenir. Bu fonksiyon, aktif olan widget'ı kontrol ederek q1_widget aktifse q1_graphs() fonksiyonunu çağırır. Bu widget'ın aktifliği “1. Soru” ve “2. Soru” butonları ile kontrol edilmektedir. q1_graphs() fonksiyonu, kullanıcıdan alınan inputlarla sinyalleri hesaplayarak çizim işlemlerini gerçekleştirir. Bunun için öncelikle -3'ten 3'e kadar olan zaman aralığında 1000 nokta içeren bir zaman dizisi oluşturur. Daha sonrasında total_signal dizisi sıfırlanmış bir şekilde başlatılır. Bu dizi, her bir sinyalin toplamını tutmak üzere tanımlanmıştır. q1_inputs listesindeki her bir sinyal için kullanıcıdan alınan genlik, frekans ve faz bilgilerini okunarak sinyaller hesaplanır, çizdirilir ve total_signal üzerine eklenir. Bu işlem sırasında aşağıdaki formül kullanılır:

$$A\cos(2\pi f t + \theta)$$

- A: genlik
- f: frekans
- t: zaman (fonksiyonun axis eksenidir)
- θ (radyan cinsinden).

En sonunda total_signal'de yer alan dizi de grafiğe aktarılır ve bütün grafikler kullanıcıya arayüz üzerinde gösterilir. Bu sorunun çözümüne dair bir örnek aşağıda gösterilmiştir:



Soru 2:

Bu soruda, Fourier Serileri Analizi'nde kullanılan sinüzoidal Fourier Serisi Katsayıları (Sine-Cosine Form) yöntemi kullanılarak üç farklı sinüzoidal işaretin toplamının ekranda gösterilmesi istenmiştir. Kullanıcıdan alınan a0, ak ve bk katsayıları ile w0 değerleri kullanılarak, sinyallerin toplamı hesaplanmalı ve arayüzde gösterilmelidir.

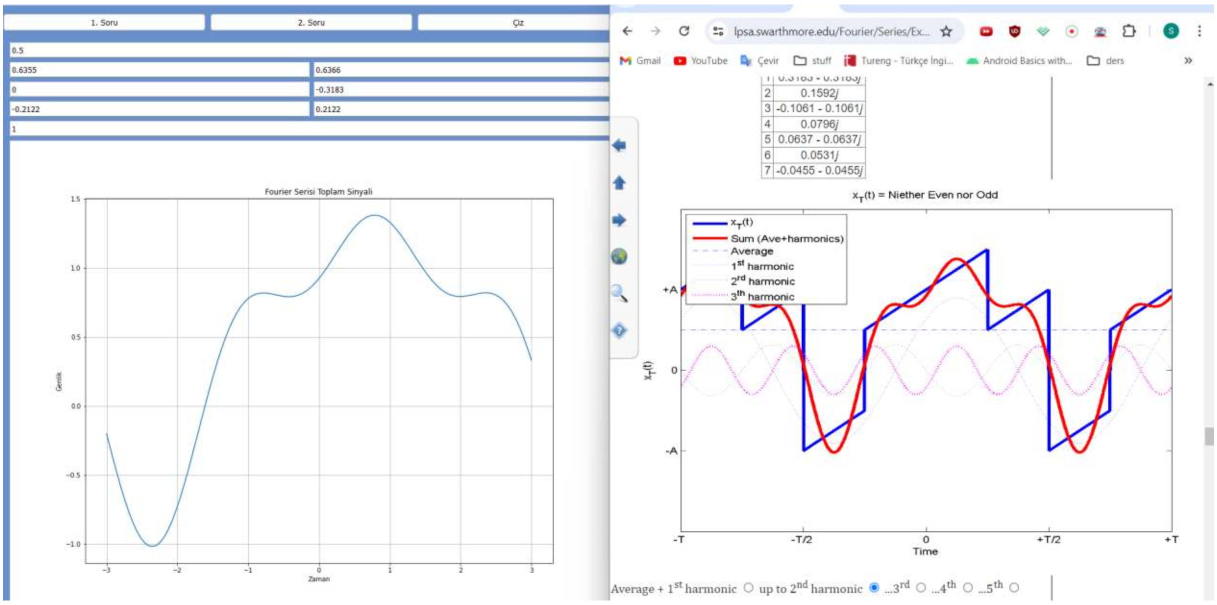
Bu sorunun çözümü için 1. Soruda tasarlanan arayüze “2. Soru” butonu eklenerek yeni input alanlarının ve yeni grafik alanının görüntülenmesi sağlanmıştır. Kullanıcı “2. Soru” butonuna basarak bu soruyla ilgili kısma ulaşabilmektedir. 2. Soru için tasarlanan arayüzde, kullanıcıdan Fourier serisi katsayıları ve frekans bilgilerini almak üzere giriş alanları oluşturulmuştur. Kullanıcıdan gerekli değerler giriş alanları ile istenmiştir. Kullanıcı, gerekli katsayıları ve frekans değerlerini girdikten sonra "Çiz" butonuna basmalıdır. Bu işlem, plot_graphs() fonksiyonunu tetikler. Eğer aktif widget q2_widget ise, q2_graphs() fonksiyonu çağrılır. Aktif widget’ın belirlenmesi “2. Soru” butonuna basılması sayesindedir. q2_graphs() fonksiyonu, kullanıcıdan alınan inputlarla sinyalleri hesaplayarak çizim işlemlerini gerçekleştirir. Çizim işlemi için öncelikle -20'den 20'ye kadar olan zaman aralığında 1000 nokta içeren bir zaman dizisi oluşturulur. Daha sonrasında total_signal birim sinyali olarak başlatılır ve her k değeri için sinyal aşağıdaki formülle hesaplanarak total_signal üzerine eklenir.

Trig Form: Sine-Cosine

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

- a0: DC bileşeni
- ak: : Cosinüs katsayıları.
- bk: Sinüs katsayıları.
- w0: Temel frekans.
- t: Zaman (axis ekseni)

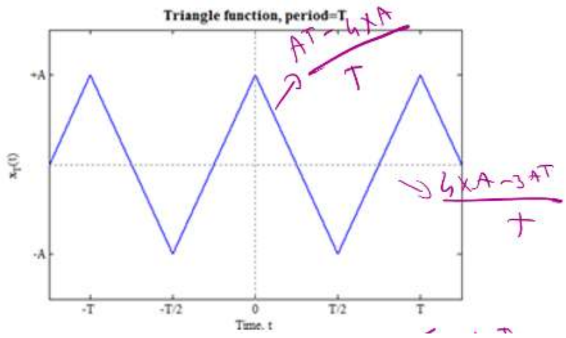
En sonunda total_signal’de yer alan dizi grafiğe aktarılır ve arayüz üzerinde gösterilir. Bu sorunun çözümüne dair bir örnek, ödev belgesinde verilen aynı değerlere ait örnek bir sinyal ile birlikte aşağıda gösterilmiştir:



Elde edilen sinyal verilen örnek sinyalle yüksek oranda benzerlik göstermektedir.

Soru 2:

Bu soruda verilen dalganın Fourier serisi analizinin elle çözümü için ilk önce verilen dalganın fonksiyonuna ihtiyaç duyulmuştur. Fonksiyon bir periyot içerisinde kırılma noktası barındırdığı için parçalı integral kullanılmalı ve her bir parçanın fonksiyonu ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Bu fonksiyonları hesaplamak için sinyal üzerinde $\frac{x}{fonksiyonun\ x'i\ kestiği\ nokta} + \frac{y}{fonksiyonun\ y'yi\ kestiği\ nokta} = 1$ formülü ve üçgen benzerliği uygulanarak sinyalin 0 - T/2 ve T/2 - T arasındaki fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunmuştur.



Fonksiyon elde edildikten sonra ck değerini elde etmek için aşağıdaki formül kullanılmıştır:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Grafiğin 0-T arası alındığından t0 = 0 olarak verilmiştir. Bu formüle göre integral şu şekilde oluşturulmuştur:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow c_k = \int_0^T x(t) \cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}}\, dt$$

Verilen fonksiyona göre integral iki parçaya aşağıdaki gibi ayrılmıştır:

$$c_k = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{AT-4tA}{T}\right) \cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}} dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left(\frac{4tA-3AT}{T}\right) \cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}} dt \right)$$

Bu iki integral ayrı ayrı analiz edilmiştir. İşlem kalabalığı olmaması açısından yapılan işlemlerin ayrıntılı matematik kısımları atlanacak şekilde işlemler aşağıda gösterilmiştir:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{AT-4A}{T}\right) \cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (AT-4At)\, e^{-\frac{jk2\pi t}{T}} dt$$

u ile yer değiştirme uygulanır:

$$\int_0^{-\pi jk} \frac{-Te^u(\pi ATjk + 2ATu)}{2\pi^2 j^2 k^2} du = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{-\pi jk} -\frac{Te^u(\pi Ajk + 2ATu)}{2\pi^2 j^2 k^2} = \frac{1}{T}\left[-\frac{T}{2\pi^2 j^2 k^2} \cdot \int_0^{-\pi jk} (\pi Ajk + 2ATu)e^u du \right]$$

$$= \frac{1}{T}\left(-\frac{T}{2\pi^2 j^2 k^2}\cdot\int_0^{-\pi jk} \pi ATjke^u + 2ATe^u u\,du\right) = \frac{1}{T}\left[-\frac{T}{2\pi^2 j^2 k^2}\left(\int_0^{-\pi jk}\pi ATjke^u du + \int_0^{-\pi jk} 2ATe^u u\,du\right)\right]$$

Gerekli sadeleştirme ve değişken değiştirme işlemleri sonucu ifade şu şekilde elde edilir:

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{AT-4A}{T}\right)\cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}}dt = -\frac{-\pi ATjk - \pi ATjke^{-\pi jk} - 2ATe^{-\pi jk} + 2AT}{2\pi^2 j^2 k^2}$$

Benzer bir çözüm integralin diğer tarafı için de uygulanır:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(\frac{4tA-3AT}{T}\right)\cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-3AT+4At)e^{-\frac{jk2\pi t}{T}}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\pi jk}^{-2\pi jk} -\frac{Te^u(-3\pi ATjk - 2ATu)}{2k^2j^2\pi^2}du = \frac{1}{T}\left(-\frac{T}{2\pi^2 j^2k^2}\cdot\int_{-\pi jk}^{-2\pi jk} e^u(-3\pi ATjk-2ATu)du\right)$$

$$=\frac{1}{T}\left(-\frac{T}{2\pi^2j^2k^2}\left(-\int_{-\pi jk}^{-2\pi jk}3\pi ATjke^u du - \int_{-\pi jk}^{-2\pi jk} 2ATe^u du\right)\right)$$

Gerekli sadeleştirme ve değişken değiştirme işlemleri sonucu ifade şu şekilde elde edilir:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(\frac{4tA-3AT}{T}\right)\cdot e^{-\frac{jk2\pi t}{T}}dt = -\frac{\pi ATjke^{-2\pi jk}+\pi ATjke^{-\pi jk}+2ATe^{-2\pi jk}-2ATe^{-\pi jk}}{2\pi^2j^2k^2}$$

bu iki sonuç toplanarak ck şu şekilde elde edilir:

$$C_k = \cancel{\frac{1}{T}}\left[\cancel{-}\frac{-\pi ATjk - \pi ATke^{-\pi jk} - 2ATe^{-\pi jk}+2AT}{2\pi^2 \cancel{j^2}k^2} + \cancel{-}\frac{\pi ATjke^{-2\pi jk}+\pi ATjke^{-\pi jk}+2ATe^{-2\pi jk}-2ATe^{-\pi jk}}{2\pi^2\cancel{j^2}k^2}\right]$$

$$(e^{j\pi}) = -1$$

$$C_k =$$

Elde edilen ck değerleri kullanılarak ak ve bk aşağıdaki formül kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\},\ k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\},\ k = 1, 2, 3, \dots$$

k değeri hangi değeri alırsa alsın ck değerinin içerisinde imajiner bir kısım bulunmaz. Bu nedenle bk değeri k sayısının bütün değerleri için 0 gelmektedir. a1, a2 ve a3 değerleri ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$c_k = \begin{cases} 0 : & k \to \text{çift} \\ \dfrac{8A}{2\pi^2 k^2} : & k \to \text{tek} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{8A}{2\pi^2} \cancel{\cdot 2} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{8A}{2\pi^2 \cdot 9} \cdot \cancel{2}$$

a0 değeri için c0'ın hesaplanması gerekir. Bunun için de c0 formülü kullanılır:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt$$

verilmiş olan grafiğe bu formül uygulandığında aşağıdaki işlemler kullanılarak c0 elde edilir:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

periyot = T

$w_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$

$$\int_0^{T/2} x(t)\,dt + \int_{T/2}^{T} x(t)\,dt$$

$$\int_0^{T/2} \frac{AT - 4tA}{T}\,dt \qquad \int_{T/2}^{T} \frac{4tA - 3AT}{T}\,dt$$

$$\frac{A}{T}\int_0^{T/2} T - 4t\,dt \qquad \frac{A}{T}\int_{T/2}^{T} \frac{4t - 3T}{T}\,dt$$

$$\frac{A}{T}\int_{T/2}^{T} 4t - 3T\,dt$$

$$\frac{A}{T}\left[Tt - \frac{4t^2}{2}\right]_0^{T/2} \qquad \frac{A}{T}\left[\frac{4t^2}{2} - 3Tt\right]_{T/2}^{T}$$

$$\underbrace{\frac{A}{T}\left[\frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{2}\right]}_{0}$$

$$\frac{A}{T}\left[\frac{4T^2}{2} - 3T^2 - \underbrace{\left(\frac{T^2}{2} - \frac{3T^2}{2}\right)}_{-T^2}\right]$$

$$\frac{A}{T}\left[2T^2 - 3T^2 + T^2\right] = 0$$

$$\boxed{0 = c_0 = a_0}$$

Sonuç olarak elimizdeki değerler birleştirildiğinde:

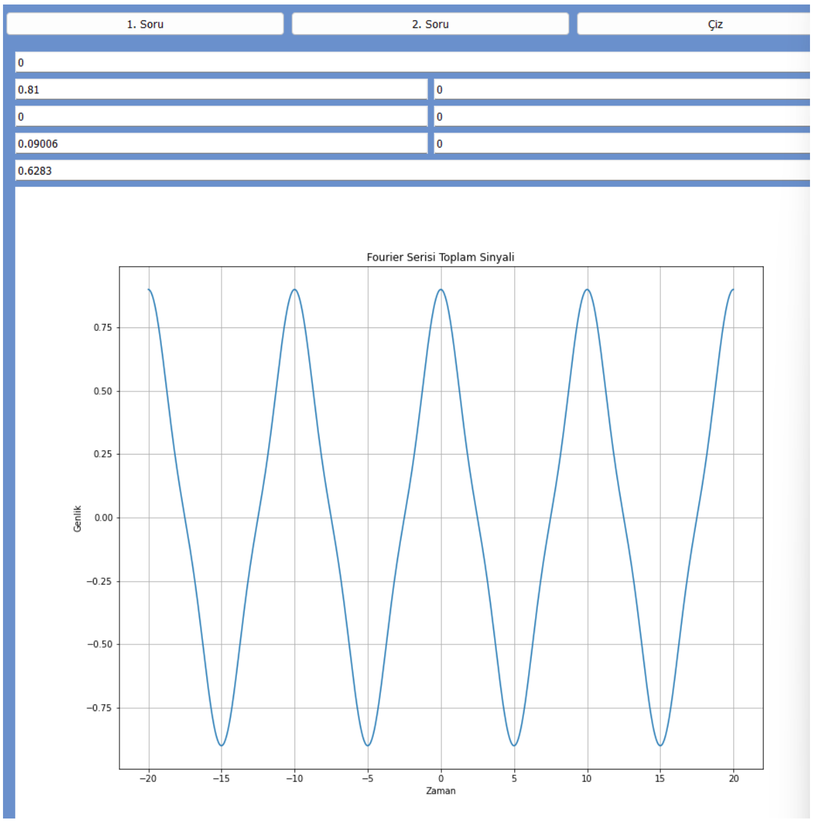
$a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{8A}{\pi^2} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{8A}{9\pi^2} \qquad b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ve $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

olarak bulunmuştur.

<u>A = 1 // T = 10</u>

$a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{8}{\pi^2} = 0{,}81 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{8}{\pi^2 . 9} = 0{,}09006 \qquad b_1 = b_2 = b_3 = 0$

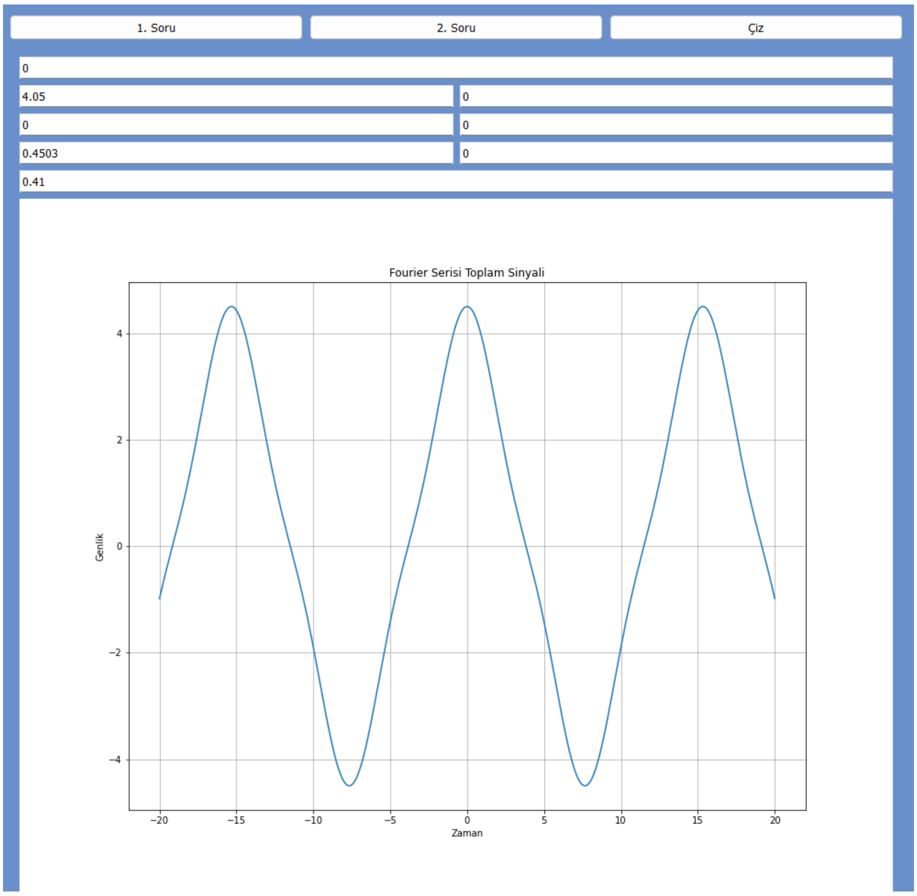
$\omega_0 = \frac{2\pi}{10} = 0{,}6283$



A = 5 // T = 15

$a_0 = 0$ $\quad a_1 = \frac{40}{\pi^2} = 4{,}05$ $\quad a_2 = 0$ $\quad a_3 = \frac{40}{\pi^2 \cdot 9} = 0{,}4503$ $\quad b_1 = b_2 = b_3 = 0$

$w_0 = \frac{2\pi}{15} = 0{,}41$



Sonuç

Yapılan hesaplamalar sonucunda verilen üçgen dalga formunun, işaretin tek ve çift simetri özelliklerinden dolayı yalnızca belirli harmonikler bulundurduğu gözlenmiştir. Dalga çift simetri özelliği gösterdiğinden ötürü bk değerlerinin tamamı 0 çıkmıştır ve dalganın sinüs bileşeni bulunmamaktadır.

İki farklı A ve T değeri için testler yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. İlk durumda A = 1 ve T = 10, ikinci durumda ise A = 5 ve T = 15 olarak belirlenmiştir. Bu farklı değerler, sinyalin genliğini ve periyodunu değiştirerek, Fourier serisinin işaretin yeniden oluşturulmasındaki etkisini göstermiştir. Sonuçlar incelendiğinde, Fourier serisinin ilk birkaç harmonik bileşeninin bile işaretin temel karakteristiklerini oldukça iyi yansıttığı gözlemlenmiştir. Sadece 3 değer için bile üçgen formuna oldukça yakın bir değer elde edildiği gözlenmiştir. Ancak daha fazla örneklemin işleme dahil edilmesi sinyali üçgen formuna çok daha fazla yaklaştıracak, üçgen dalganın keskin köşelerinin daha doğru bir şekilde temsil edilmesini sağlayacaktır. Farklı A ve T değerlerinin Fourier serisi üzerindeki etkisi, işaretin genliği ve periyodunun değişiminin, toplam sinyalin frekans bileşenlerinin genliklerini nasıl etkilediğini açıkça ortaya koymuştur. T değeri arttığında belli bir zaman içerisinde (-20 - 20 arası 40 saniye) dalganın tekrar sayısının düştüğü ve dalga periyodunun arttığı gözlenmiştir. A değeri artırıldığında ise A değeri ile doğru orantılı olarak ak değerlerinin de arttığı gözlenmiştir.