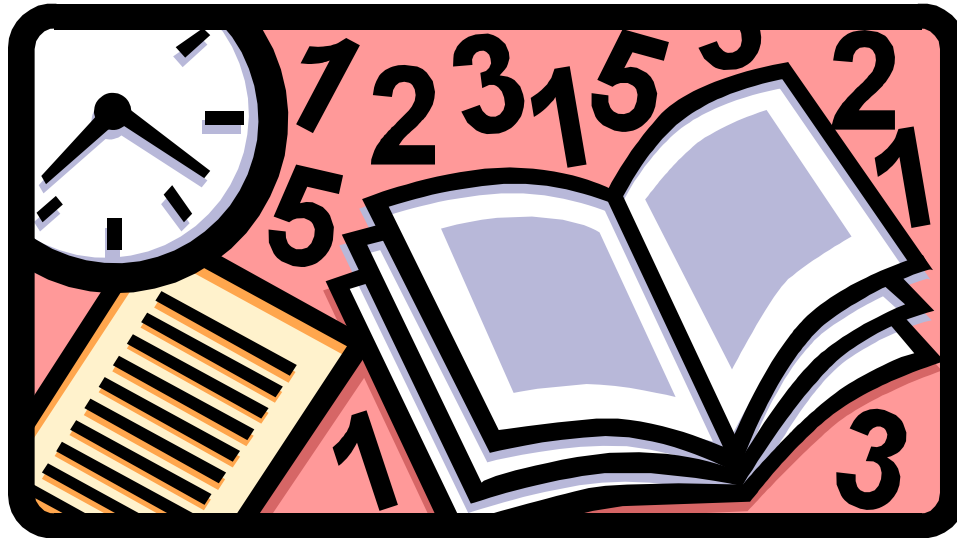


BÖLÜM 7

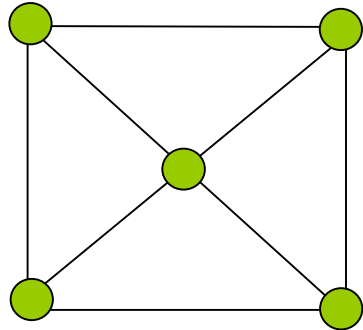
Graf Boyama ve Kromatic Polinomlar (Graph Coloring and Chromatic Polynomial)



Tanım

- ❖ Bir G grafinin herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafin her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafin **renklendirilmesi** denir.
- ❖ Bir grafin **renk** (kromatik) sayısı, grafin renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir G grafinin renk (kromatik) sayısı $X(G)$ ile gösterilir.

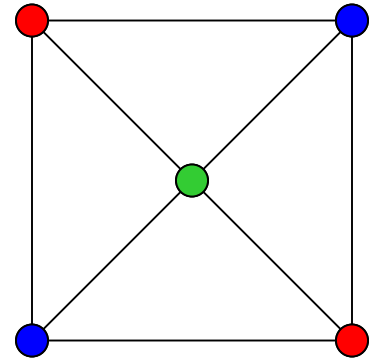
→ Grafin renklendirilmesi için gereken renk sayısına **kromatik sayısı** da



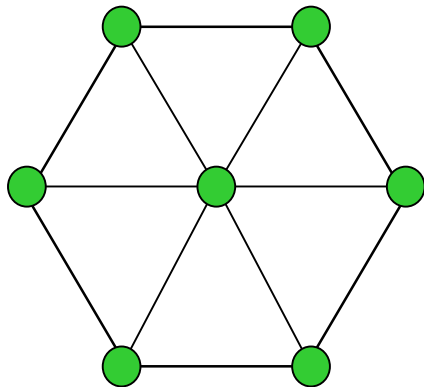
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

$X(G) = 3$ renk mi?

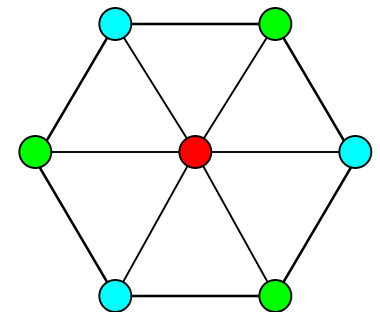
$X(G) = 4$ renk mi?



$X(G) = 3$



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



$X(G) = 3$

Örnek

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

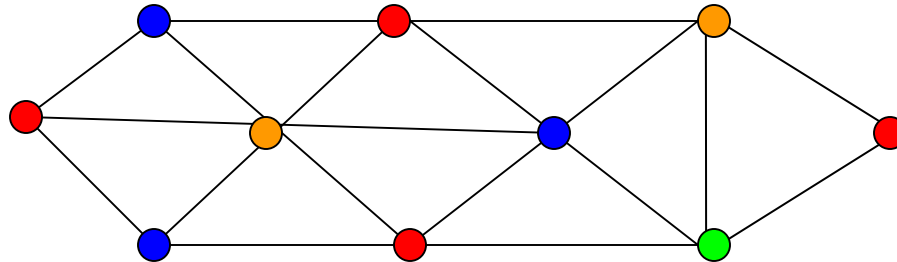
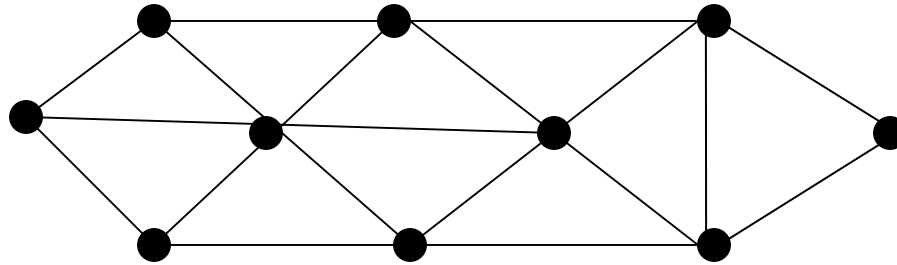
Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğüm = Kurullar

Kenarlar = Çakışan akademisyenler

Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekilde olsun.



$$X(G)=4$$

Kromatik Polinomlar

Bir G grafinin kromatik polinomu $P(G)$, G grafini minimum k renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağını verir.

Deletion Contraction Method

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \setminus e)$$

kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri
birleştirme

Kromatik Polinomu bilinen graflar



Noktasal Graf



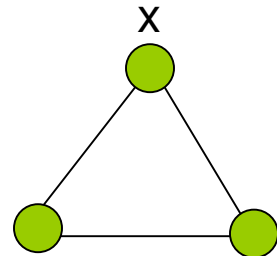
$x-1$



Çizgisel Graf

U grafi \longrightarrow

$$U_n = x(x-1)^{n-1}$$



$x-1$

$x-2$

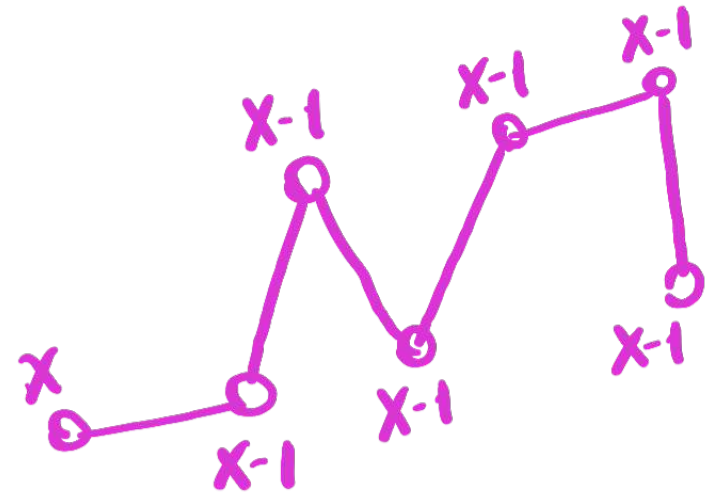
Z Grafi veya K Grafi

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

$$n=2 \quad 2.1^1$$

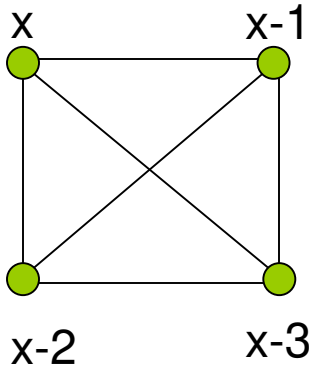
$$x(x-1) = U_2$$

$$x(x-1)(x-2)$$



Örnek K_3

$$\begin{aligned} \chi(\chi-1)^2 &= U_3 \\ \chi(\chi-1)^6 &= U_7 \end{aligned}$$



K grafi olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\chi - k)$$

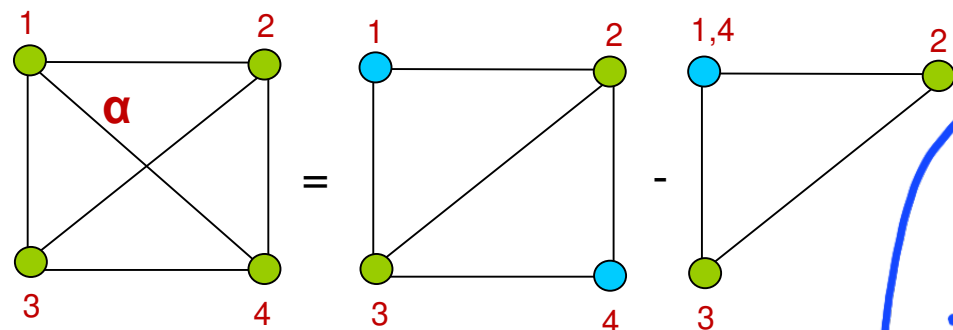
$$\begin{aligned} K_4 &= \chi(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3) \\ &= (\chi^2 - \chi)(\chi^2 - 5\chi + 6) \\ &= 1\chi^4 - 6\chi^3 + 11\chi^2 - 6\chi \end{aligned}$$

$\chi=1$ için değeri 0
 $\chi=2$ için değeri 0
 $\chi=3$ için değeri 0
 $\chi=4$ için değeri 24

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 6 \\ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 5 \ 6 \\ 1 \ 5 \ 6 \\ + \hline 1 \ 6 \ 11 \ 6 \end{array}$$

4 farklı renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek

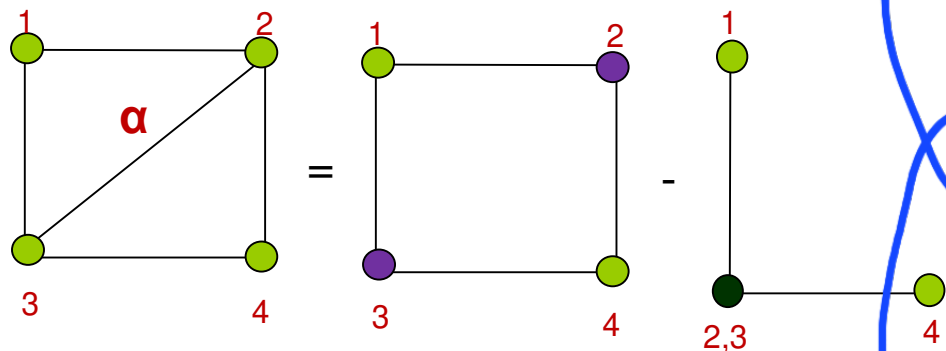


$$= x(x-1)(x^2-4x+4) - x(x-1)(x-2)$$

$$x(x-1)(x^2-4x+4-x+2)$$

$$x(x-1)(x^2-5x+6)$$

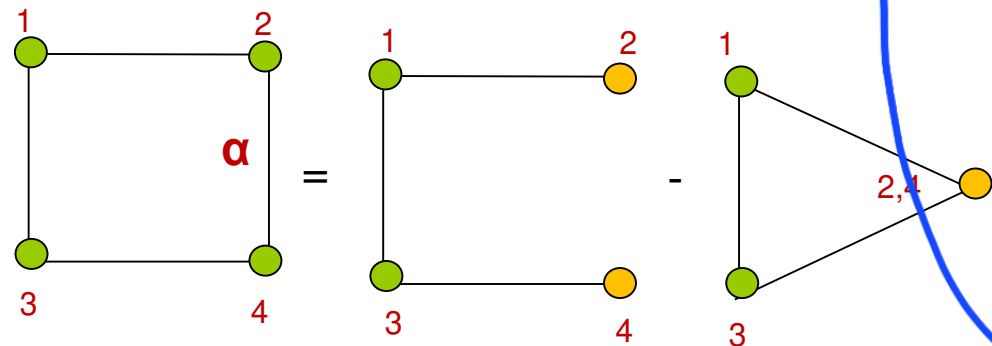
$$x^4-6x^3+11x^2-6x$$



$$= x(x-1)(x^2-3x+3) - x(x-1)^2$$

$$x(x-1)(x^2-3x+3-x+1)$$

$$x(x-1)(x^2-4x+4)$$

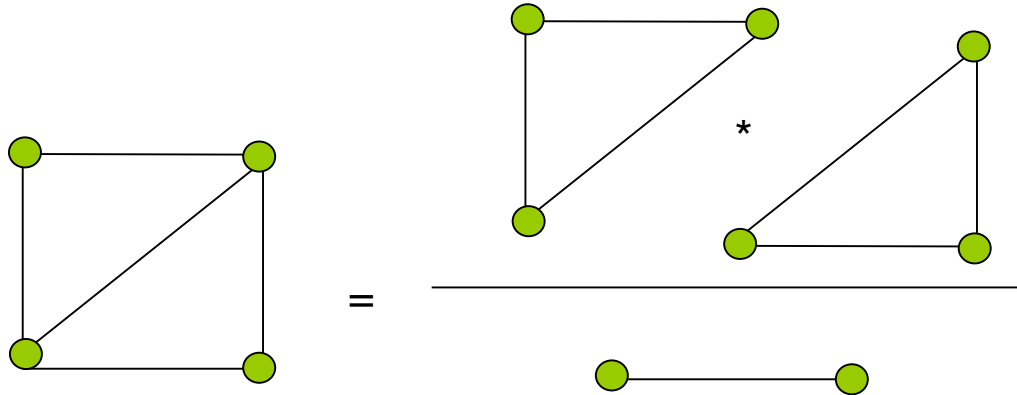


$$= x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$x(x-1)[(x-1)^2-(x-2)]$$

$$x(x-1)(x^2-3x+3)$$

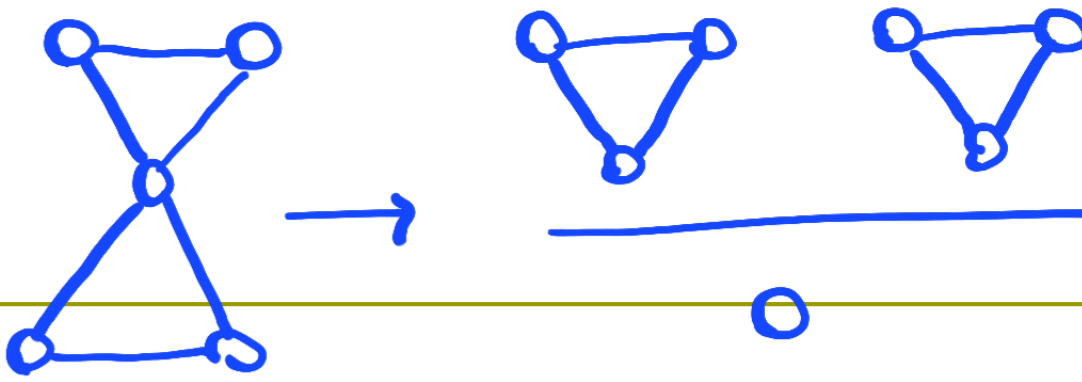
Eğer, iki graf birbirinden **Noktasal** veya **Çizgisel** bir graf ile ayrılıyorsa...



$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)} = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 4) \\
 & = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x
 \end{aligned}$$

3 renk ile boyanır
 $3 * 2 * 1 = 6$ değişik şekilde

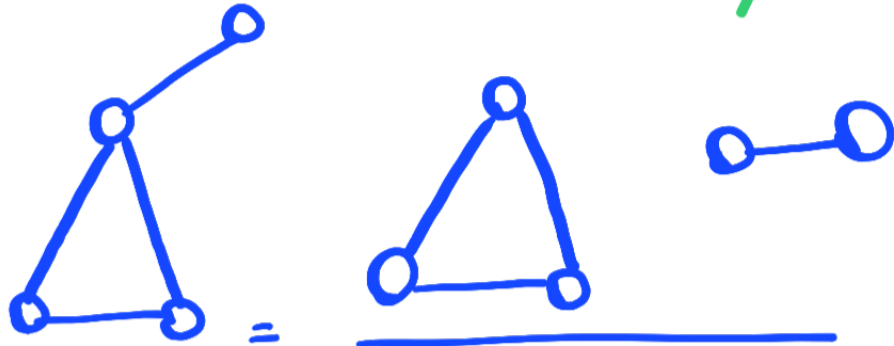
$$\begin{array}{r}
 1\ 4\ 4 \\
 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 4\ 4 \\
 \ 1\ 4\ 4 \\
 + \ 1\ 4\ 4 \\
 \hline
 1\ 5\ 8\ 4
 \end{array}$$

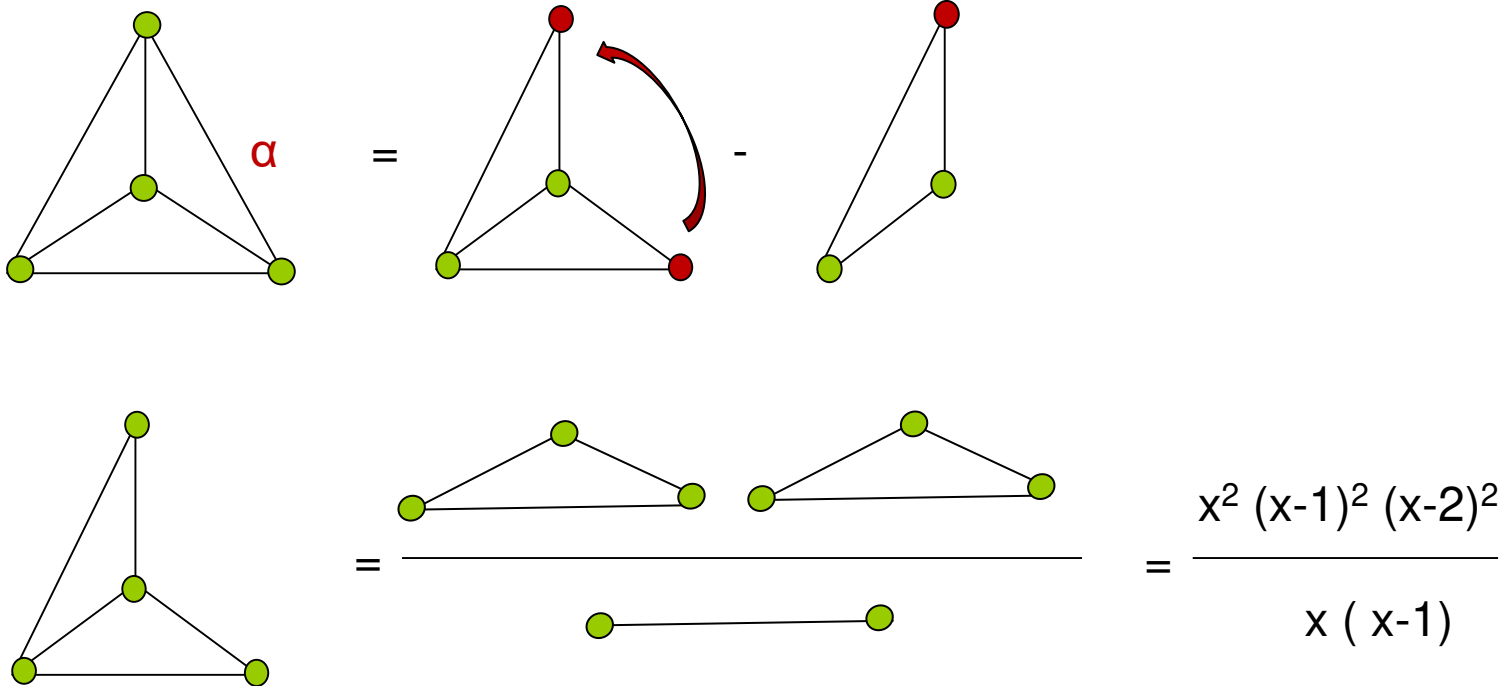


Kurallar

- 1) a_1 her zaman **1** olmalıdır
- 2) Polinomun derecesi grafın düğüm sayısını verir
- 3) Terimlerin katsayılarının toplamı **0** olur
- 4) Polinomun katsayılarının işaretleri **+**, **-** diye gider
- 5) Polinomda sabit terim olmaz

2.terim
kenar sayısını



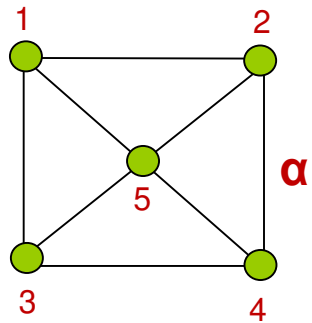


$$\begin{aligned}
 &= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2) \\
 &\quad x(x-1)(x-2)[(x-2) - 1] \\
 &\quad x(x-1)(x-2)(x-3) \\
 &\quad (x^2-x)(x^2-5x+6) \\
 &\quad x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x
 \end{aligned}$$

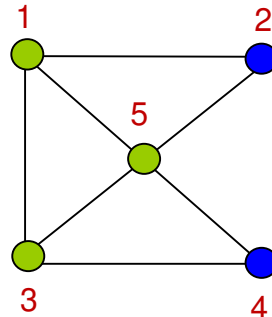
K_4 grafi 4 renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek

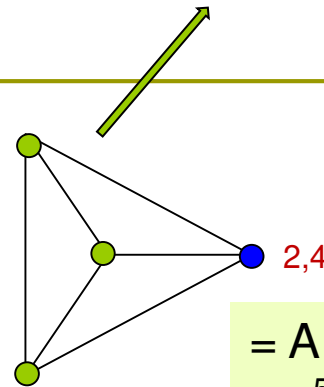
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$



=

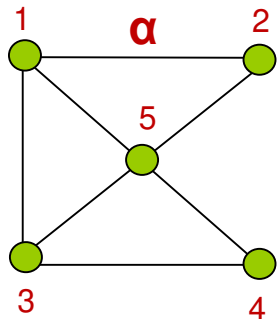


-

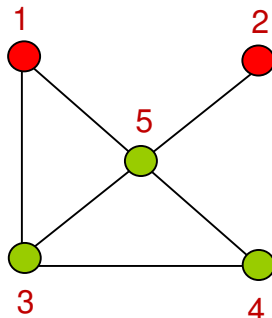


$$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)$$

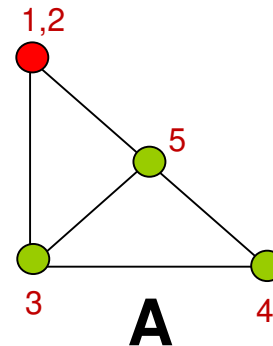
$$x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x$$



=



-

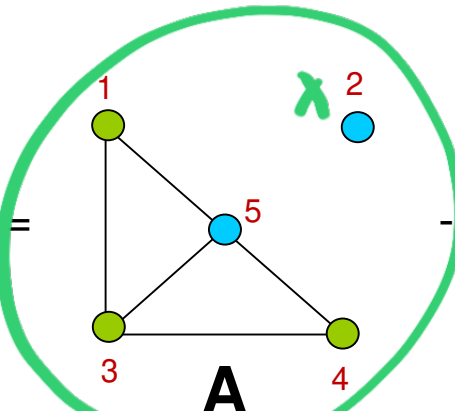
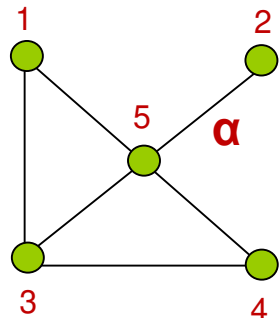


$$= A(x-1) - A$$

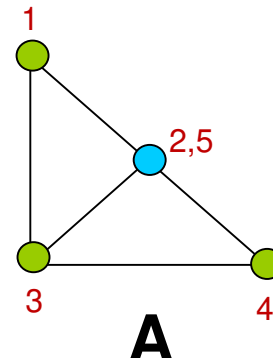
$$Ax - A - A$$

$$Ax - 2A$$

$$A(x-2)$$



-

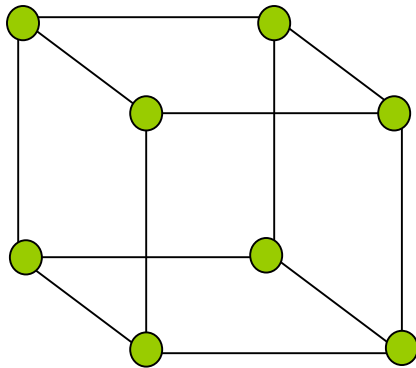


$$= A(x-1)$$

$$\hookrightarrow Ax - A$$

Örnek

Ax



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208x^5 + 325x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131x$$

