

Matrisler

Tanınan Elementleri sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Şeklindeki düzenli tabloya matris denir.

$m \times n \rightarrow$ mertebesi

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Satır Matris = Tek satırdan oluşur

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \quad 1 \times n$$

Sütun Matris = Tek sütundan oluşur

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Sıfır Matris = Tüm elementleri sıfır olan matris.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad '0' \text{ deş de gösterir.}$$

Kare Matris = Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matris.

$$A = [a_{ij}]^{n \times n} \quad A = [a_{ij}] \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn} \Rightarrow$ asal (esas) köşegen elementleri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bir kare matrisde asal köşegen elementleri dışındaki tüm elementler sıfır ise bu matrise "köşegen matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k \quad (k \in \mathbb{R})$ ise matrise "skaler matris" denir.

$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ ise "birim matris" denir.
"I_n"

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eşit Matrisler = Aynı mertebeden, karşılıklı elemanları eşit olan matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & t \\ 3 & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & x & 7 \\ 3 & -2 & y \end{bmatrix}$$

$$A=B \text{ için; } \begin{aligned} t &= 7 \\ x &= -1 \\ s &= -2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Matrislerin Toplam ve Farkları

A ve B aynı mertebeden iki matris olmak üzere

$$A = [a_{ij}] \quad i=1, \dots, m$$

$$B = [b_{ij}] \quad j=1, \dots, n$$

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]^{m \times n}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ olsun}$$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 3A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 21 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \rightarrow$$

$$\lambda B = (-1)B = -B$$

$$A + (-1)B = A - B$$

$$\text{Örnek 2 } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -7 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorem 2 A, B, C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 skaler olmak üzere,

$$i) A+B = B+A \quad (\text{değişme})$$

$$vi) \lambda_1(A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$$

$$ii) A+(B+C) = (A+B)+C \quad (\text{birleşme})$$

$$vii) (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$$

$$iii) A+O = A$$

$$viii) (\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$$

$$iv) A-A = O$$

$$viii) 1 \cdot A = A$$

Matris Çarpımı

$A = [a_{ij}]^{m \times r}$, mertebeden $B = [b_{ij}]^{r \times n}$ mertebeden matrisler olsun

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2r} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ir} \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mr} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{2j} & b_{2n} \\ b_{r1} & b_{rj} & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$$AB = [c_{ij}]^{m \times n} \text{ mertebeden}$$

1. matrisin sütun sayısı 2. matrisin satır sayısına eşit ise iki matris çarpılabilir.

$$\text{Örnek 2 } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{3 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2+0 & -4+0 \\ 1+0 & 2+15 \\ -4+0 & -8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 17 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem 3 A $m \times n$ matris, B ve C $n \times r$ matrisler, D $r \times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$i) A(BD) = (AB)D$$

$$iv) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$ii) A(B+C) = AB+AC$$

$$v) A \cdot O = O$$

$$iii) (B+C)D = BD+CD$$

$$vi) \text{Genellikle } AB \neq BA$$

Tanım = A bir kare matris olmak üzere, A 'nın kendisiyle n defa çarpılmasıyla elde edilen matrise A 'nın kuvveti denir.

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ defa}} \rightarrow A^n$$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n} ; (A^k)^l = A^{kl} \quad (m, n, k, l \in \mathbb{N})$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}_{n \times n} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = kI_n$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad AB = (kI_n)B = k(I_n B) = kB$$

Tanım = Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesi ile elde edilen matrise transpoze matris denir. (devrik)

A^T , A^t veya A' şeklinde gösterilir.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

Teorem = A ve B aynı mertebeden matrisler λ skaler ($\lambda \in \mathbb{R}$) ol. sz.

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iv) A ve B çarpılabilir iki matris ol. sz.

ii) $(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$ dir.

iii) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$

Soruz A ve B matrisleri $AB=A$ ve $BA=B$ eşitliklerini sağlıyorsa, $B^T A^T = A^T$ ve $A^T B^T = B^T$ olduğunu gösteriniz.

$$A \cdot B = A \Rightarrow \underbrace{(AB)^T}_{B^T \cdot A^T} = A^T$$

$$BA = B$$

$$(BA)^T = B^T$$

$$A^T \cdot B^T = B^T$$

Tanım = $A^T = A$ olacak şekilde A kare matrisine "simetrik matris" denir.

$$A = [a_{ij}]$$

her i, j için $(a_{ij} = a_{ji})$

$$A^T = [a_{ji}]$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{simetrik matris}$$

Eğer $A^T = -A$ ise A kare matrisine "ters simetrik matris" denir.

$$\text{Her } i, j \text{ için } a_{ij} = -a_{ji}$$

k skaler

A^T simetrik matris

$$A^T = -A \Rightarrow$$

$k.A \rightarrow$ ters simetrik matris

$$(kA)^T = k.A^T = k.(-A) = -kA$$

$\rightarrow k.A =$ simetrik matris

$$A^T = A$$

$$(kA)^T = k.A^T = kA$$

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^{p+1} = A$ olacak şekilde pozitif bir p tamsayısı varsa A 'ya "periyodik matris" denir. Bu k tamsayısı en küçük pozitif p tamsayısına A 'nın periyodu denir.

Özel olarak $A^2 = A$ ise A 'ya "idempotent matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

\rightarrow idempotent matris

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^q = 0$ olacak şekilde pozitif bir q sayısı varsa A 'ya "nilpotent matris" denir. q 'ya nilpotent matrisin derecesi (indeksi) denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

\rightarrow 3. dereceden nilpotent matris

Tanım: $A^2 = I$ A kare matrisine involut (involütif) matris denir.

$$\begin{matrix} A.A^T = I \\ A^T.A = I \end{matrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix}$$

matrisin involut matris olması için $k = ?$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1-2 & 2-2 & 2-1+k \\ -2+2 & -1+2 & -1-k \\ -4+2-2k & -2+2k & -2+2+k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(k = -1)$$

Tanım: Elemanları kompleks sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniği yazılarak elde edilen matrise A 'nın eşlenik matrisi ya da eşleniği denir. " \bar{A} " olarak gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} i & -i & 2-i \\ 3-i & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & i & 2+i \\ 3+i & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorem: A, B iki matris ve k herhangi bir skaler olsun.

$$i) \bar{\bar{A}} = A$$

$$ii) \overline{(kA)} = \bar{k} . \bar{A}$$

$$iv) \overline{AB} = \bar{A} . \bar{B}$$

$$iii) \overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$$