

MATRİSLER

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler


3.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Matrisler, geometride, fizikte, kinematikte, animasyon teknolojisinde ve mühendisliğin birçok alanında çok sık kullanılan önemli bir kavramdır. Bir önceki bölümde, lineer denklem sistemlerinin çözümünde işlemlerimizi nasıl kolaylaştırdığını gördük. Lineer denklem sistemlerini matrislerdeki cebirsel işlemleri kullanarak da çözebiliriz. **Bunun için matrislerde,**

toplama, skalerle çarpma, iki matrisi çarpma

gibi cebirsel işlemleri tanımlayarak, bir matrisin tersini bulup, bir lineer denklem sisteminin nasıl çözeceğimizi inceleyeceğiz. Bir önceki bölümde de bahsettiğimiz gibi, sayılarla oluşturulan dikdörtgensel bir tabloya **matris** denir. Bu tablodaki sayılar belirli bir sayı kümesine aittir. Matrisin elemanları¹, genellikle reel sayılar ve karmaşık sayılardan oluşur. Elemanların hangi sayı kümesi olduğu belirtilmemişse, reel sayılar kümesine ait olduğu anlaşılır.

¹Matrisin elemanları en genel anlamda bir Halka'nın elemanlarıdır. "Halka" matematikte özel bir tanımdır ve belirli bazı özellikleri olan kümelerdir. Daha detaylı bilgiyi Soyut Cebir kitaplarından öğrenebilirsiniz. 

Matris

Tanım

\mathcal{F} bir sayı kümesi olmak üzere, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için, $a_{ij} \in \mathcal{F}$ elemanlarıyla oluşturulan, $m \cdot n$ elemanlı

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya \mathcal{F} kümesi üzerinde $m \times n$ türünde (tipinde) bir **matris** denir. Bu matris kısaca,

$$[a_{ij}], i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n \quad \text{veya} \quad [a_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde gösterilebilir. Matrisler genel olarak A, B, C şeklinde büyük harfler ile gösterilir.

Matrisin Satırları veya Sütunları

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı n —lilerine bu **matrisin satırları** ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı m —lilerine de bu **matrisin sütunları veya kolonları** denir. Genel olarak, m satır ve n sütunlu, ve elemanları \mathcal{F} kümesinden alınan matrislerin kümesi, $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathcal{F})$, \mathcal{F}_n^m veya $\mathcal{F}_{m \times n}$ ile gösterilir.

Örnek

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 3/4 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{Z}_5)$$
$$C = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 3/5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}).$$

Matrisin elemanlarını indislerle net olarak belirtebiliriz. Örneğin, yukarıdaki matrisler için elemanlar aşağıdaki gibi belirtilebilir. $a_{21} = 0$, $a_{11} = \pi$, $b_{23} = \bar{3}$, $c_{12} = i$, $d_{21} = 3/5$.

Matris Çeşitleri

Tanım

1. Sıfır Matrisi : Tüm elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. 0 ile gösterilir.

Örneğin, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 2×3 türünden sıfır matrisidir.

Tanım

2. Kare Matris : Satır ve sütun sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi $n \times n$ türünden bir kare matristir. Bir kare matrisde, a_{ii} elemanlarının bulunduğu köşegene, matrisin **asal köşegeni** denilir. Yani, matrisin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegendir.

Tanım

3. Köşegen matris : Bir kare matrisin asal köşegeni hariç tüm elemanları sıfır ise, bu matrise köşegen matris denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tanım

4. Birim Matris : Bir köşegen matrisin tüm elemanları 1 ise bu matrise **birim matris** denir. $n \times n$ türünden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisi, $n \times n$ türünden birim matristir.

Tanım

4. Üçgen matris : Bir kare matrisin asal köşegeninin üstündeki veya altındaki elemanların tamamı sıfır ise bu matrise üçgen matris denir. Eğer köşegenin üstündeki elemanlar sıfır ise, **alt üçgensel**, altındaki elemanlar sıfır ise de **üst üçgensel matris** denir.

Yani, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine alt üçgensel matris, her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **üst üçgensel matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla üst üçgensel ve alt üçgensel matrislerdir.

İki Matrisin Toplamı

Tanım

Aynı türden iki matrisi toplayabiliriz. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ise, A ve B matrislerinin toplamı

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

olur.

Özellikleri : A, B, C matrisleri, $m \times n$ türünden matrisler ve $r, s \in \mathbb{R}$ olsun.

- i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Birleşme Özeliği)
- ii) $A + B = B + A$ (Değişme Özeliği)
- iii) $A + 0 = A$ (Etkisiz Eleman)
- iv) $A + (-1)A = 0$ (Ters Eleman)

Bir Matrisin Skalerle Çarpımı

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için, A matrisinin λ sayısı ile çarpımı

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } 4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

olur.

Özellikleri :

- i) $r \in \mathbb{R}$ için, $r(A + B) = rA + rB$
- ii) $(r + s)A = rA + sA$
- iii) $(rs)A = r(sA)$
- iv) $1 \cdot A = A$

Eşit Matrisler

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri verilsin. Eğer, her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her i, j için,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

ise, A ve B matrislerine eşit matrislerdir denir.

İki Matrisin Çarpımı

Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times p}$ ve $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ olsun. Elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde oluşturulan $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrisine **A ile B matrisinin çarpımı** denir ve bu matris AB şeklinde gösterilir.

Tanımdan da görüldüğü gibi, iki matrisin çarpılabilmesi için, birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. A ve B matrislerinin AB çarpımı mümkün ise, A ve B matrislerine AB sırasında, çarpılabilir matrisler denir. AB çarpımının mümkün olması BA çarpımının mümkün olmasını gerektirmez. $m \times n$ ve $n \times k$ türünden iki matrisin çarpımı $m \times k$ türünden bir matristir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \text{ matrislerini çarpalım.}$$

Çözüm

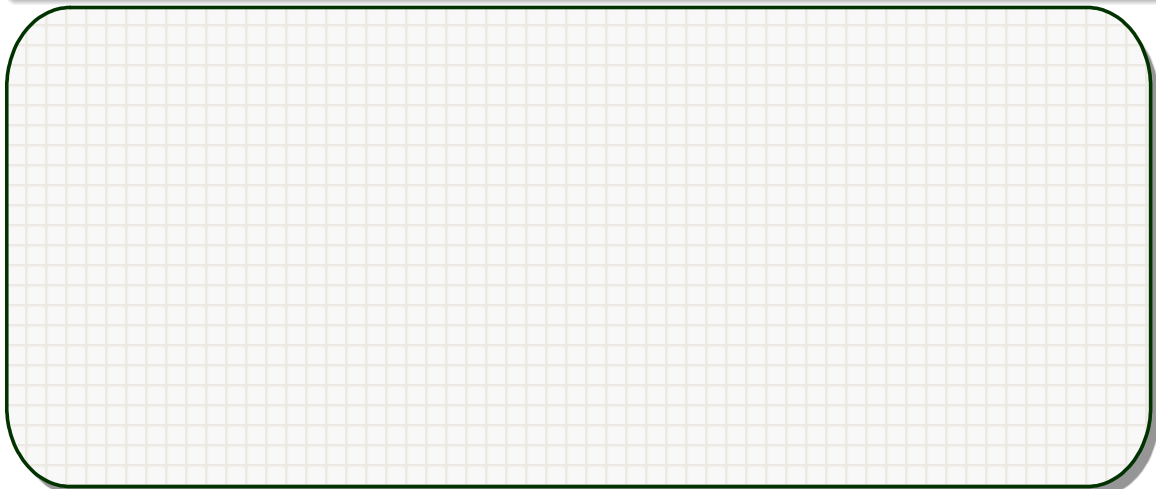
A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olduğundan, AB çarpımı mümkündür ve 2×3 türünden bir matristir. Fakat, B matrisinin sütun sayısı, A matrisinin satır sayısına eşit olmadığından, BA çarpımı mümkün değildir. Tanım kullanılırsa

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

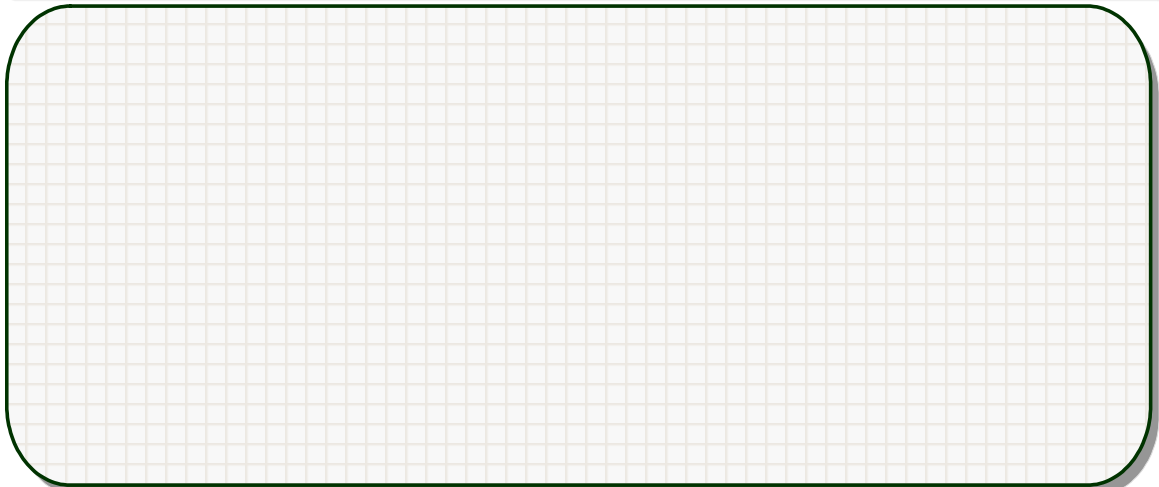
Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{AB} = ?$$



Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{AB} = ?$$

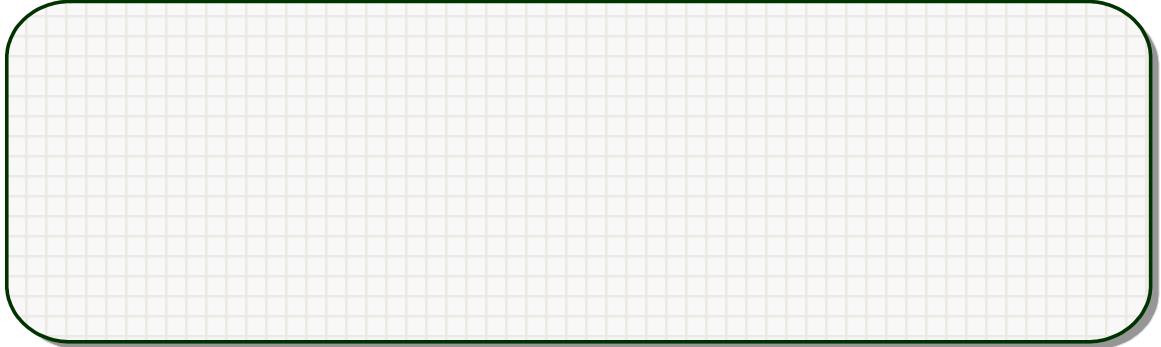


Problem

Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$

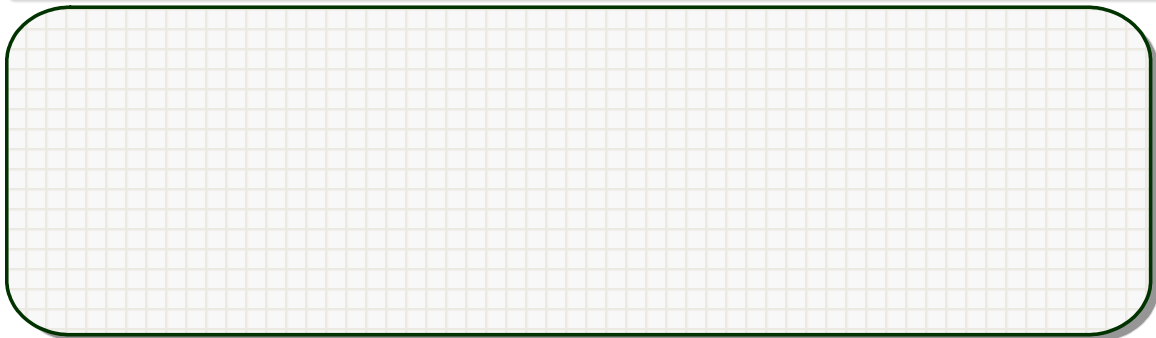
b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = ?$



Problem

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$



Matris Çarpımının Özellikleri

Teorem

A, $m \times p$ türünden, B, $p \times q$ türünden ve C, $q \times n$ türünden birer matris olsunlar. Aşağıdaki özellikler sağlanır

i) $(AB)C = A(BC)$ eşitliği sağlanır. (Birleşme Özelliği)

ii) $A(B + C) = AB + AC$ özelliği sağlanır. (Dağılma Özelliği)

iii) $r, s \in R$ olsun. Bu durumda, $(rA)(sB) = (rs)AB$ özelliği sağlanır.

NOT : Matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. $AB \neq BA$ 'dır.

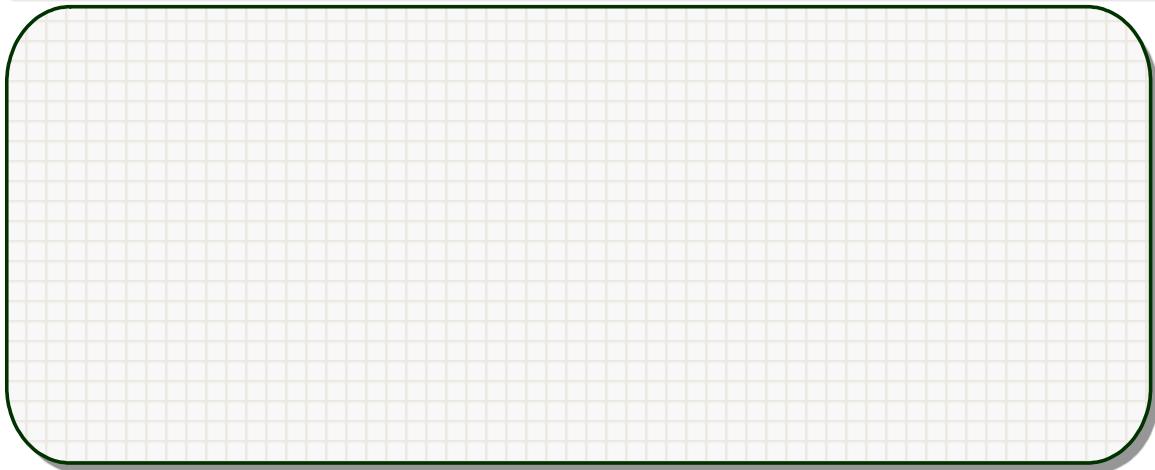
Eğer $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B matrisleri **değişmelidir** denir. Matrislerde değişme özelliği olmadığından,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

yazılması doğru değildir. Doğrusu : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ olacaktır.

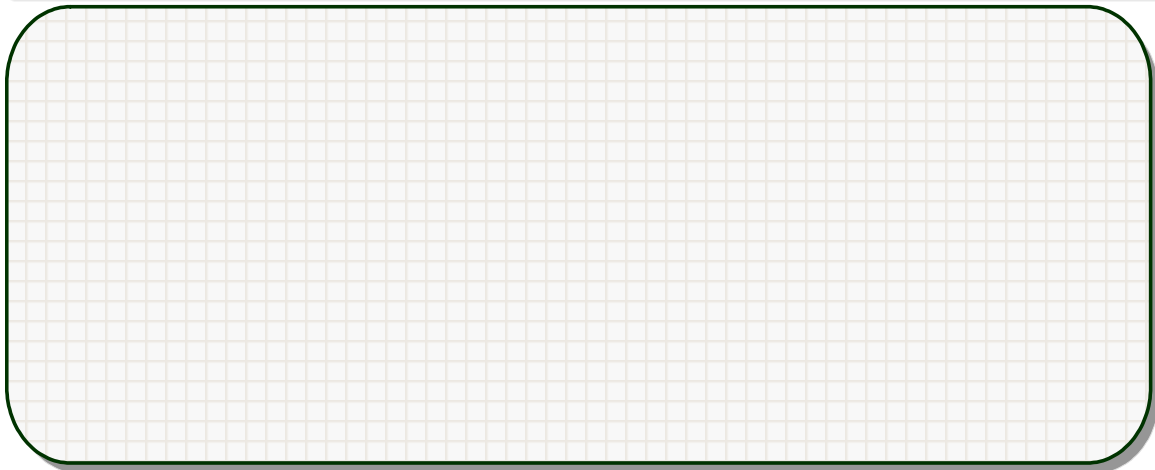
Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, A^{100} matrisini hesaplayınız.



Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, A^{100} matrisini hesaplayınız.



Örnek

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ matrisi için } A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix} \text{ olduğunu}$$

kanıtlayınız.

Çözüm

Kanıtımızı tümevarımla yapabiliriz. İddia $k = 1$ için doğrudur. k için doğru olduğunu kabul ederek, $k + 1$ için de doğru olduğunu görelim.

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{k+1} \end{bmatrix}$$

olduğundan $k + 1$ için de doğrudur. O halde, her $k \in \mathbb{N}$ için iddiamız doğrudur.

Bir Matrisin Transpozesi

Tanım

Bir matrisin satır ve sütunlarını değiştirerek elde edilen matrise o matrisin **transpozesi** denilir ve bir A matrisinin transpozesi A^T ile gösterilir.

Buna göre, bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin transpozesi $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ şeklinde olacaktır. $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ yazabiliriz.

Örnek

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi için

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Bir Matrisin Transpozesisinin Özellikleri

Teorem

$A = [a_{ik}]_{m \times p}$ ve $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

Kanıt.

İlk üçü oldukça açıktır. Dördüncüsünü kanıtlayalım.

$$((AB)^t)_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^p (B^t)_{jk} (A^t)_{ki} = (B^t A^t)_{ji}$$

olur. Bu ise, $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu gösterir. □

Simetrik Matris

Tanım

Bir matriste elemanlar asal köşegene göre simetrik ise, bu matrise **simetrik matris** denir. Devriği kendisine eşit olan matris **simetrik matristir**. Yani, $A^T = A$ ise A bir simetrik matristir. Diğer bir tanımla, bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde, her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine **simetrik matris** denir.

Örnek

Örneğin,

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi bir simetrik matristir.

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ simetrik} \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \forall i, j \text{ için } a_{ij} = a_{ji} \text{ olmalıdır.}$$

Ters Simetrik Matris

Tanım

$A^T = -A$ ise, A matrisine **ters simetrik matris** denir. Yani, bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde, her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise A matrisine **ters simetrik matris** denir.

Örnek

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \text{ için, } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $A^T = -A$ olduğundan, A bir ters simetrik matristir. Kısaca,

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ ters simetrik} \Leftrightarrow A^T = -A \Leftrightarrow \forall i, j \text{ için } a_{ij} = -a_{ji} \text{ olmalıdır.}$$

Örnek

Ters simetrik matrisin asal köşegenindeki elemanların 0 olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi ters simetrik olsun. Bu durumda, $\forall i, j$ için

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

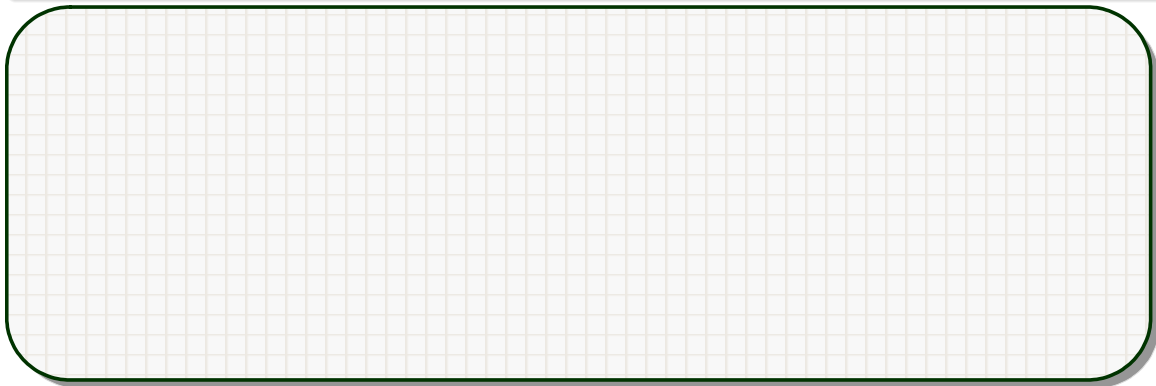
olacaktır. $i = j$ alınırsa,

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

eşitliğinden, $2a_{ii} = 0$ ve $a_{ii} = 0$ elde edilir. Bu asal köşegendeki elemanların 0 olduğunu gösterir.

Problem

- a) A matrisi ters simetrik matris ise, A^3 matrisinin de ters simetrik olacağını gösteriniz.
- b) A ve B matrisleri simetrik ise, AB çarpımının simetrik olmayabileceğini gösteriniz.
- c) A ve B matrisleri ters simetrik ise, AB çarpımının ters simetrik olmayabileceğini gösteriniz.



Hermityen Matris

Tanım

\overline{A} , A matrisinin elemanlarının karmaşık(kompleks) eşleniklerinin alınmasıyla elde edilen matrisi göstermek üzere, bir A kare matrisi için, $A = (\overline{A})^T$ ise, A matrisine **hermitiyen matris** denir.

Örnek

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi bir hermitiyen matristir. $A = (\overline{A})^T$ olduğu kolayca görülebilir.

Tersinir ve Singüler Matris

Tanım

A ve B , $n \times n$ türünden kare matrisler olsun. Eğer,

$$AB = BA = I$$

ise, B 'ye A matrisinin tersi ($B = A^{-1}$) ve A yada B matrisinin tersi ($A = B^{-1}$) denir. Bir matrisin tersi var ise, bu matrise **regüler matris** veya **tersinir matris** denir. Eğer, matrisin tersi yok ise, matrise **singüler** veya **tekil matris** denilir.

Türünden Bir Matrisin Tersİ

Tanım

$\Delta = ad - bc \neq 0$ ise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin tersi vardır ve

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ile bulunur. Doğruluğunu, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz. Buradaki, $\Delta = ad - bc$ değerine A matrisinin determinanı denir. Determinanı ve bir matrisin tersinin bulunmasını daha sonra detaylı olarak inceleyeceğiz.

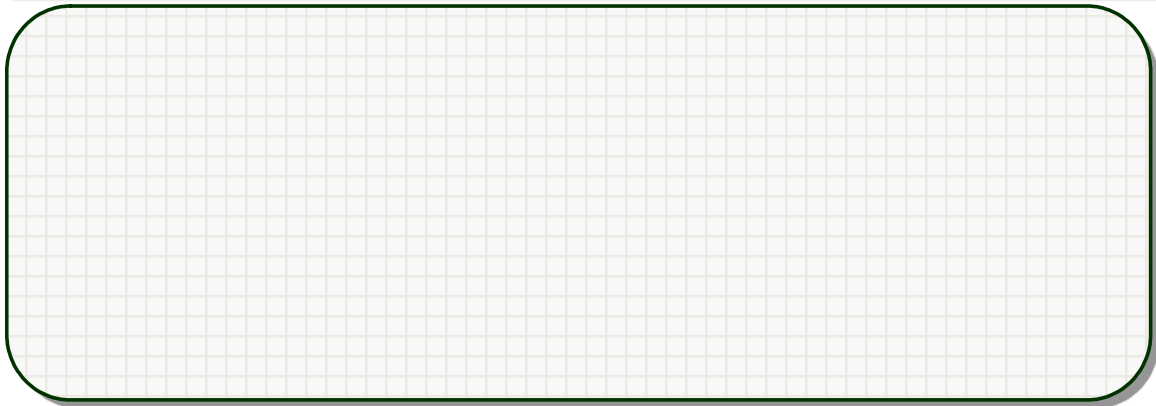
Örnek

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.



Problem

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*



Matrislerin Çarpımının Tersi

Teorem

A ve B , $n \times n$ türünden kare matrisler olsun.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitliği vardır.

Kanıt.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

ve benzer şekilde,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

olduğundan, tanım gereği AB matrisinin tersi $B^{-1}A^{-1}$ olur. Yani, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir. \square

Bir matrisin tersi var ise tektir.

Teorem

Bir matrisin tersi var ise tektir.

Kanıt.

A matrisinin tersi, hem C hem de B olsun. Buna göre,

$$AB = BA = I \quad \text{ve} \quad AC = CA = I$$

eşitlikleri vardır.

$$AB = I \Rightarrow C(AB) = CI = C \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow IB = C \Rightarrow B = C$$

elde edilir. Yani, iki farklı tersi olamaz.



Bir Matrisin Transpozesisinin Tersi

Teorem

A , $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ eşitliği vardır.

Kanıt.

$(A^T)(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1}(A^T) = I$ yazılabilir. Diğer yandan,

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I \quad \text{ve}$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

olduğundan, hem $(A^T)^{-1}$ hem de $(A^{-1})^T$ matrisi A^T matrisinin tersidir. Fakat bir matrisin tersi tek olduğundan,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

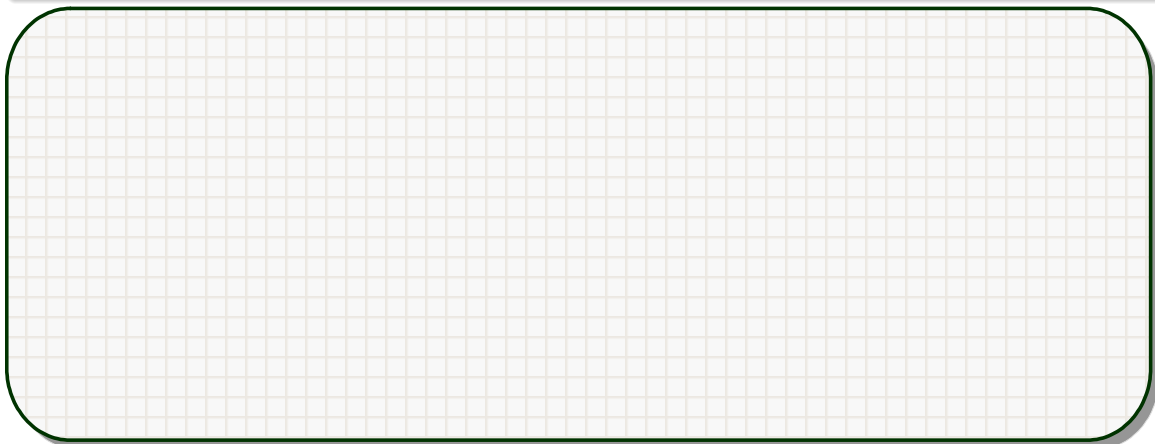
elde edilir. □

Örnek

Bir A matrisinin tersi varsa ve

$$AB = 0$$

ise $B = 0$ olduğunu gösteriniz.

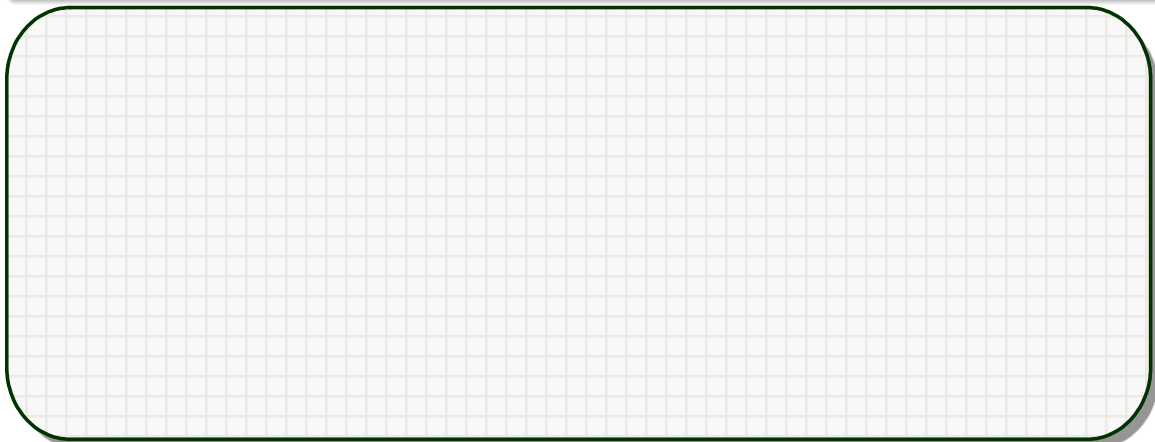


Örnek

A ve B matrisleri $n \times n$ türünden matrisler olsunlar.

$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$$

ise $AB = BA$ olduğunu kanıtlayınız.



Örnek

A regüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A$ ise, yani $A^2 = I$ ise, **A** matrisine involutif matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin involutif matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$A^2 = I$ olduğu kolayca görülebilir.

Ortogonal Matris

Tanım

Bir A matrisinin tersi, transpozese eşit ise, A matrisine **ortogonal matris** denir. Yani,

$$A^{-1} = A^T$$

ise A matrisine ortogonal matris denir. Bir matrisin tersini bulmadan da, ortogonal olup olmadığını kontrol edebiliriz. $A^{-1} = A^T$ eşitliğinin her iki tarafının A ile çarpılmasıyla elde edilen,

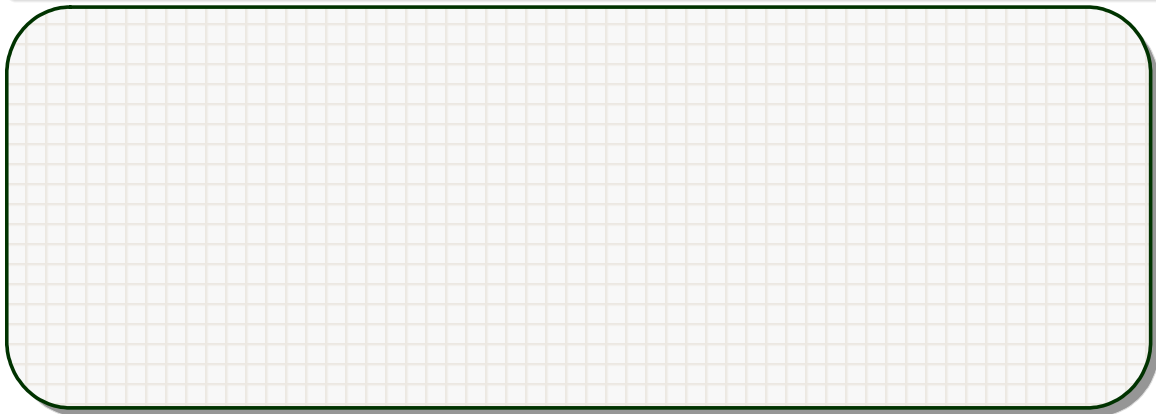
$$A^T A = A A^T = I$$

eşitliği sağlanırsa, A matrisi ortogonal bir matristir. Ortogonal kelimesi, geometride dik kelimesiyle eşdeğerdir. Bir matrise neden ortogonal denildiğini, dik olma anlamıyla ilişkisini iç çarpım konusunda göreceğiz.

Örnek

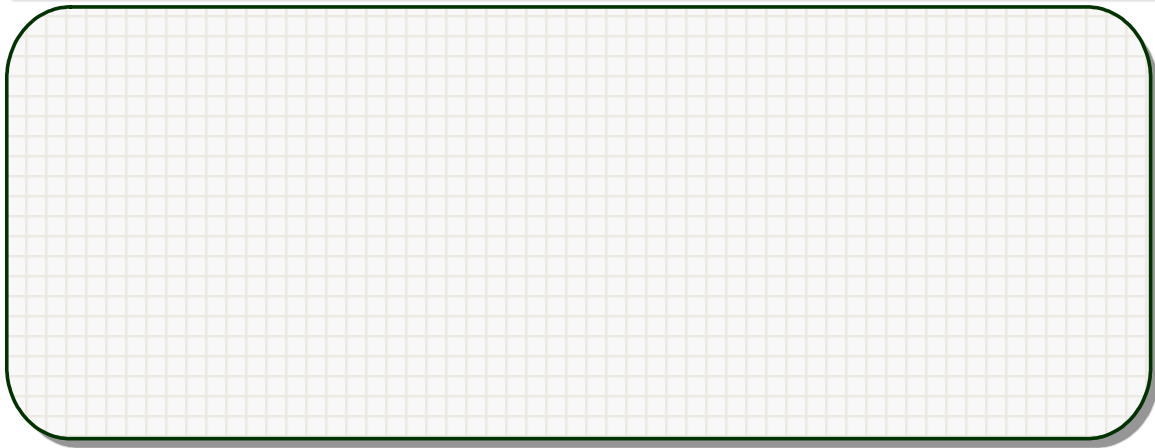
Aşağıdaki matrislerin ortogonal olup olmadıklarını kontrol ediniz.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$



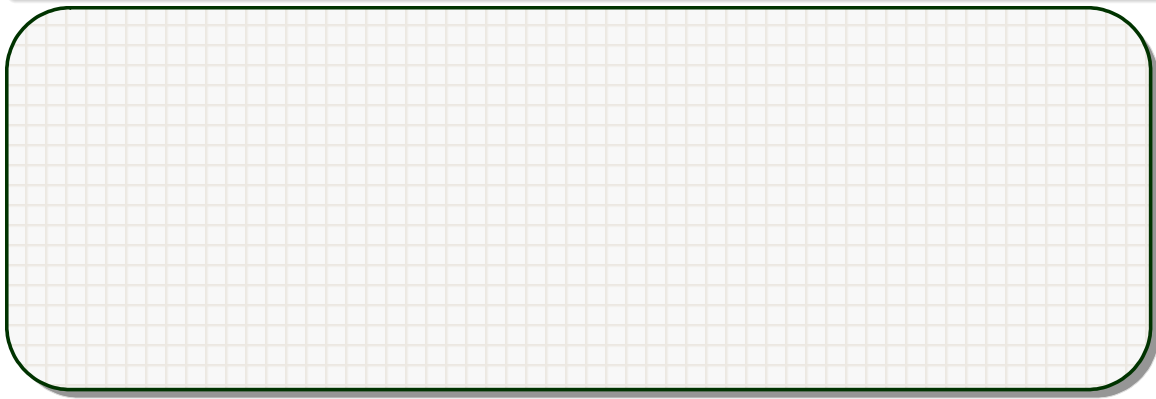
Örnek

Her $a \in \mathbb{R}$ için $B = \frac{1}{1+2a^2} \begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.



Problem

- a) 2×2 ve 3×3 türünden birer ortogonal matris yazmaya çalışınız.
- b) A matrisi ortogonal ise tersinin de ortogonal olduğunu gösteriniz.
- c) A ve B matrisleri ortogonal ise, AB çarpımının da ortogonal olduğunu gösteriniz.



Matrisin İzi

Tanım

Bir kare matrisin, asal köşegeni üzerindeki elemanların toplamına **matrisin izi** denir. $\text{iz}A$ ile gösterilir. Yani,

$$\text{iz}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

şeklindedir ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{i) } \text{iz}(A + B) = \text{iz}A + \text{iz}B \quad \text{ii) } c \in \mathbb{R} \text{ için, } \text{iz}(cA) = c\text{iz}A \quad \text{iii) } \text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$$

Örnek

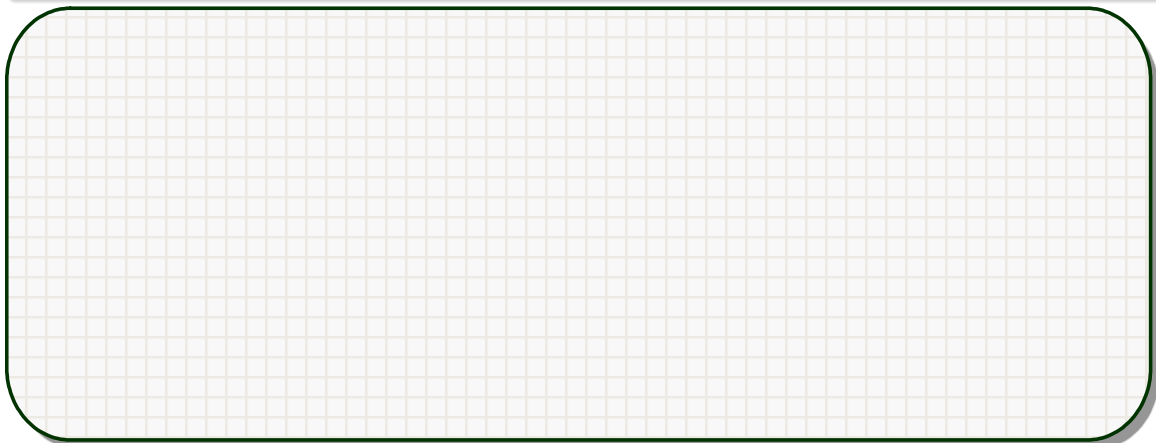
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin izini bulunuz.}$$

Çözüm

$$\text{iz}A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 2 = 5 \text{ 'dir.}$$

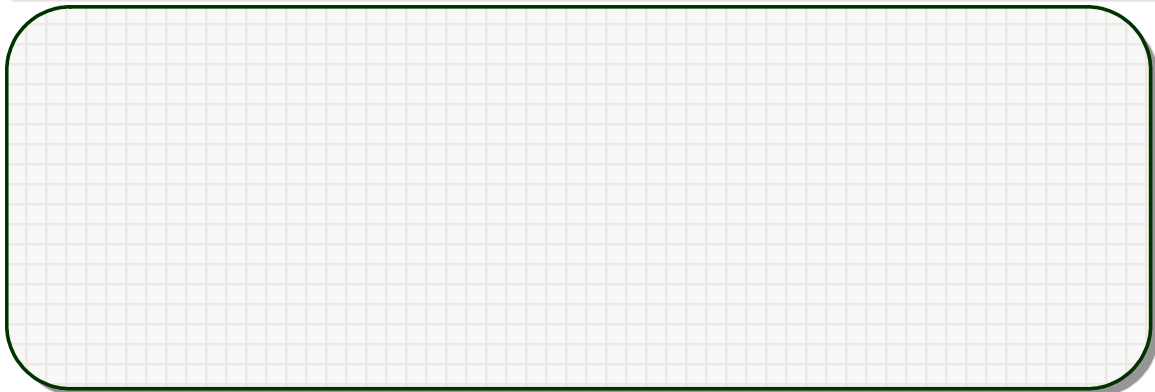
Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere **AB** matrisinin izini bulunuz.



Problem

- a) $\text{iz}(A + B) = \text{iz}A + \text{iz}B$ olduğunu kanıtlayınız.
- b) $\text{iz}(AB) \neq \text{iz}A \cdot \text{iz}B$ olduğunu bir örnekle görünüz.



Bir Matrisin Tersinin Bulunması

Verilen $n \times n$ türünden bir matrisi,

elemanter satır operasyonlarıyla birim matrise dönüştürebiliyorsak,

bu matrisin bir tersi vardır.

Bu matrisin tersini ise, **aynı elemanter operasyonları $n \times n$ türünden birim matrise aynı şekilde uygulayarak** elde edebiliriz.

Elemanter Satır Operasyonuna Karşılık Gelen Matris

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir matris olsun. A matrisine yapılan bir elemanter operasyonu (e) ile gösterelim. Bu elemanter işlem sonucunda elde edilen matrise B diyelim. Aynı elemanter operasyonu birim matrise uyguladığımızda elde edilen matrisi de E ile gösterelim. E matrisine, bu **elemanter satır operasyonuna karşılık gelen matris** denir. Buna göre,

$$EA = B$$

eşitliği sağlanır.

Örnek

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinde $(e) : (S_1 \rightarrow S_1 - S_2)$ elemanter operasyonunu uygulayalım.

Bu durumda,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Diğer yandan, aynı (e) elemanter işlemini, $I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ birim matrisine uygularsak,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

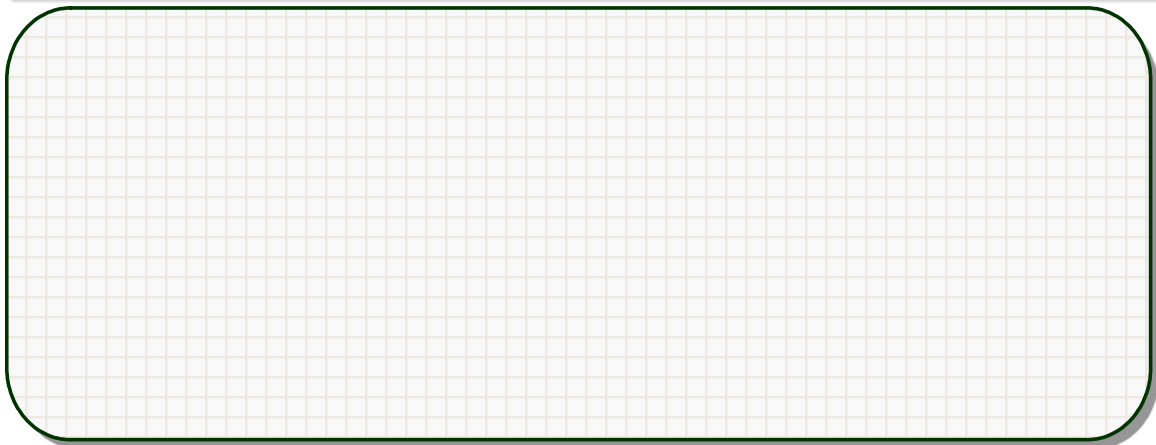
bulunur ve

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

yani $EA = B$ eşitliği sağlanır. Bu yöntem, bir matrisin tersini bulmamıza olanak verir.

Örnek

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini indirgenmiş eşelon forma getiriniz. Her bir elemanter işleme karşılık gelen matrisi bulup, bu matrislerin çarpımından yararlanarak A matrisinin tersini bulunuz.



Matrisin Terisinin Elemanter Operasyonlarla Bulunması

Tanım

Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin tersini bulmakta kullanacağımız bu yöntemi biraz daha kolaylaştırabiliriz. Bunun için, A matrisinin sağ tarafına bir $I_{n \times n}$ matrisi yazılır ve böylece, $[A : I]$ biçiminde $n \times 2n$ türünden bir matris elde edilir. Bu matrisin sol tarafındaki A matrisini birim matrise dönüştürmek için, $[A : I]$ matrisine elemanter satır operasyonları uygulanır. A matrisi birim haline geliyorsa, tersi vardır ve sağ tarafta bulunan I matrisinden elemanter satır operasyonları sonucunda elde edilen matris A^{-1} matrisi olur.

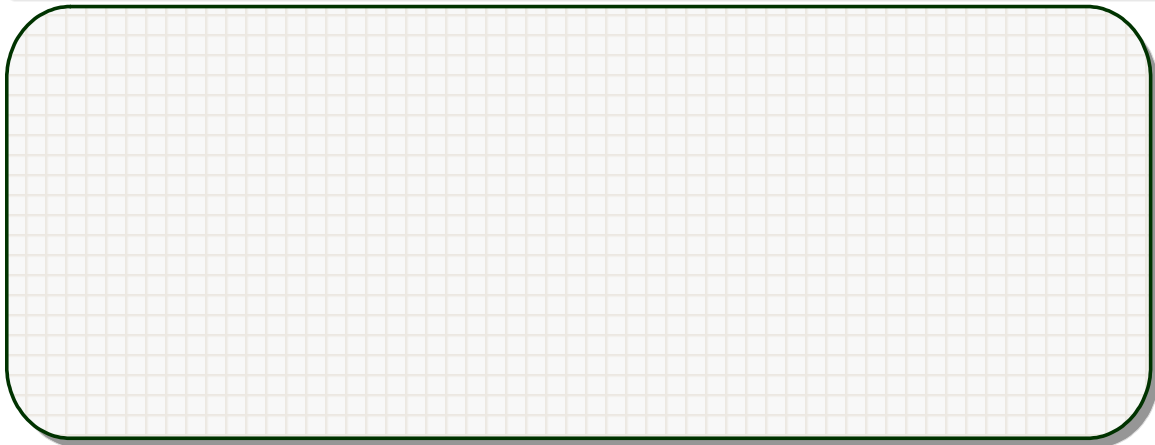
Kısaca,

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow{\text{Elemanter Satır İşlemleri Uygulayarak } A' \text{yı birim yap. Bu işlemler, } I \text{ matrisini de } A^{-1} \text{'e dönüştürür.}} \left[I \mid A^{-1} \right]$$

şeklinde açıklayabiliriz. Bir önceki örneğin, bu şekilde nasıl çözüldüğünü görelim.

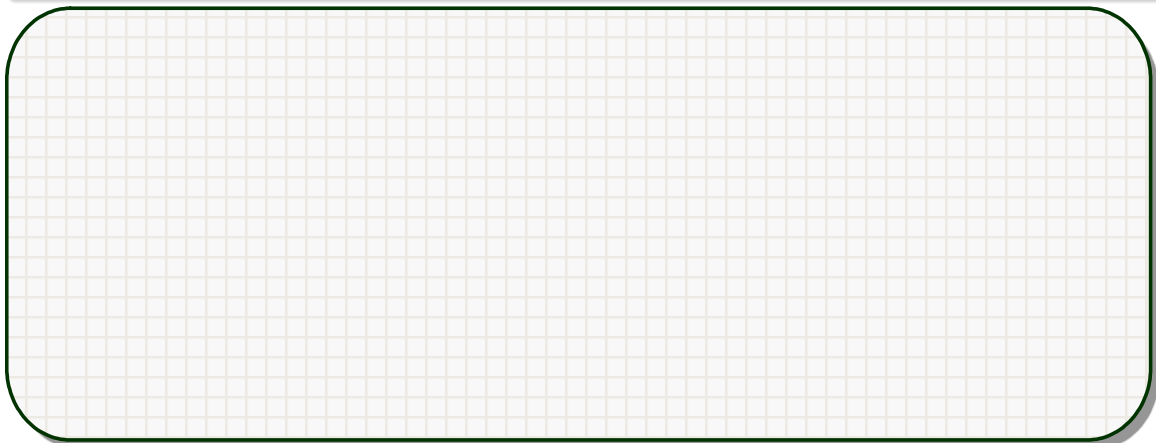
Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.



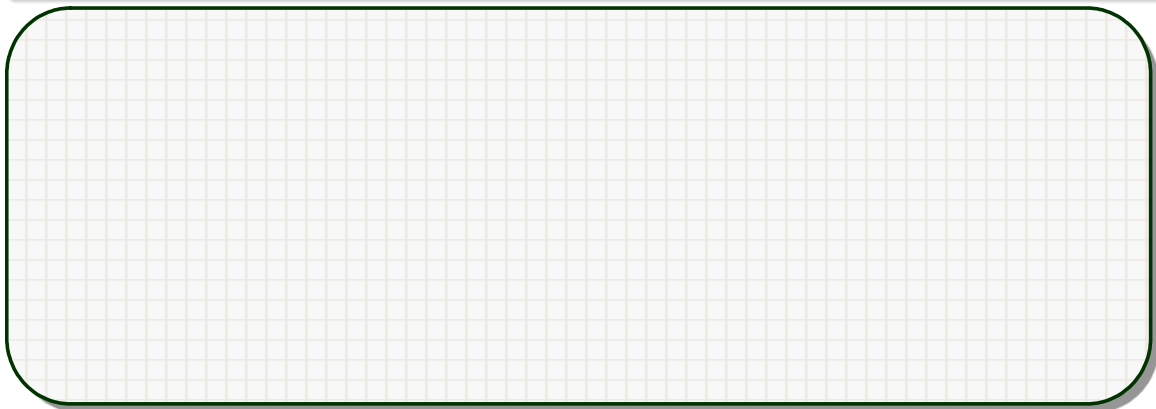
Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



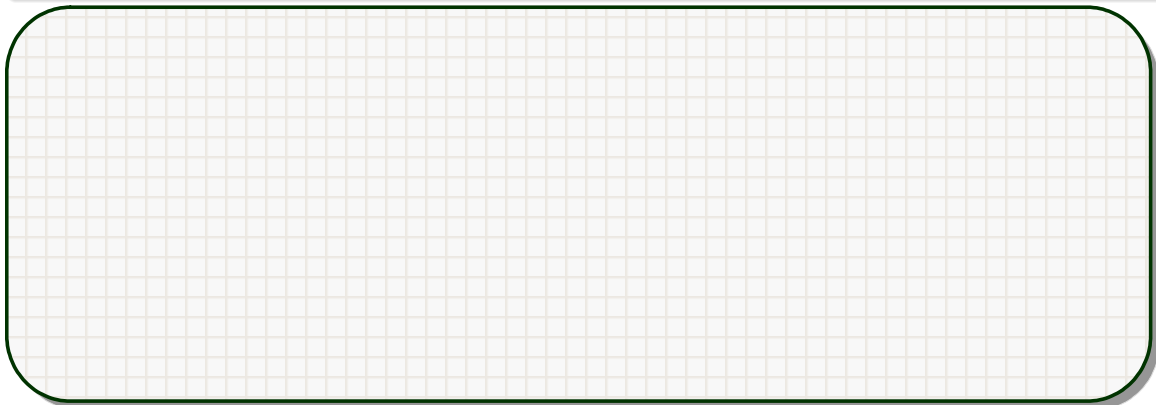
Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z}_3)$ **matrisinin tersi varsa bulunuz.** (Burada \mathbb{Z}_3 ile mod3 ifade edilmiştir, yani elde edilen tüm değerlerin mod3'deki eşiti yazılacaktır.)



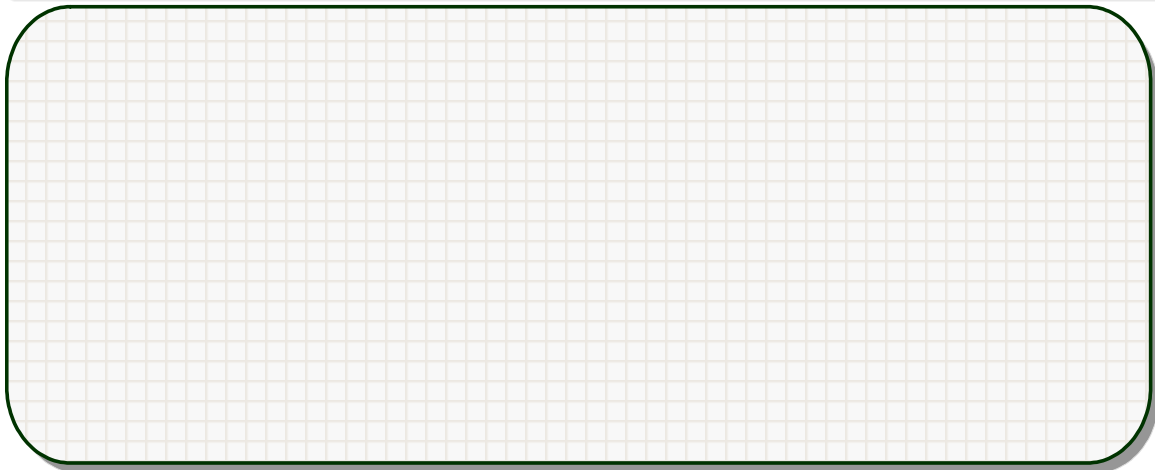
Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersi varsa bulunuz.}$$



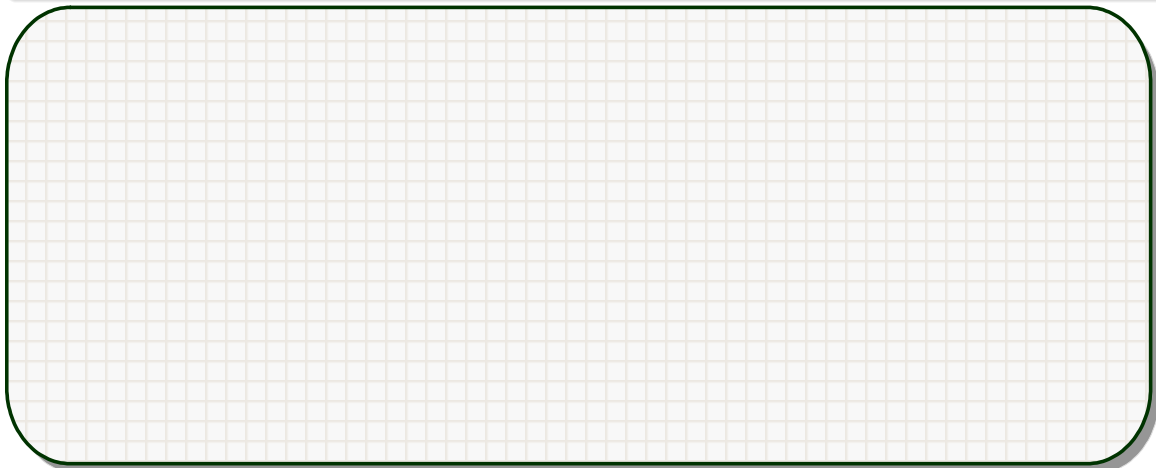
Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.



Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



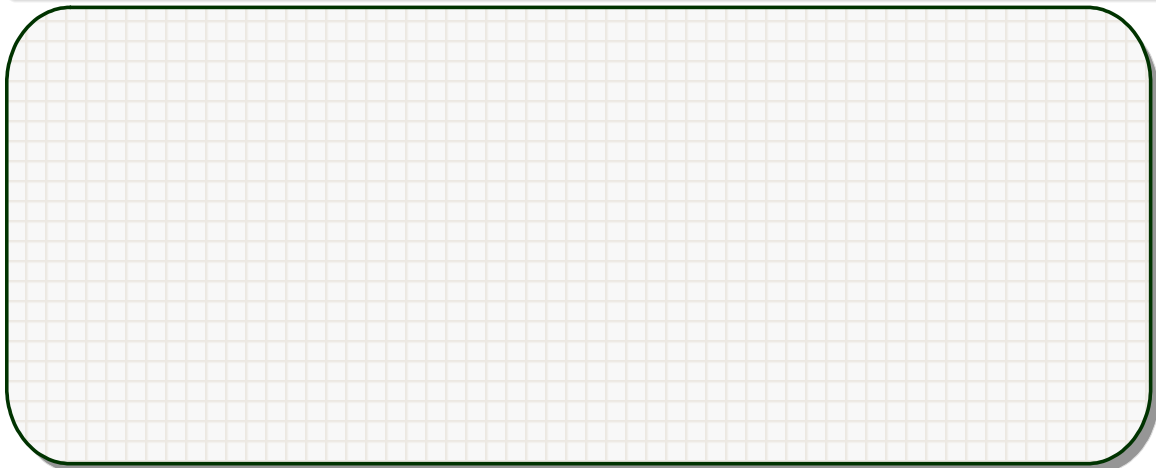
Problem

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



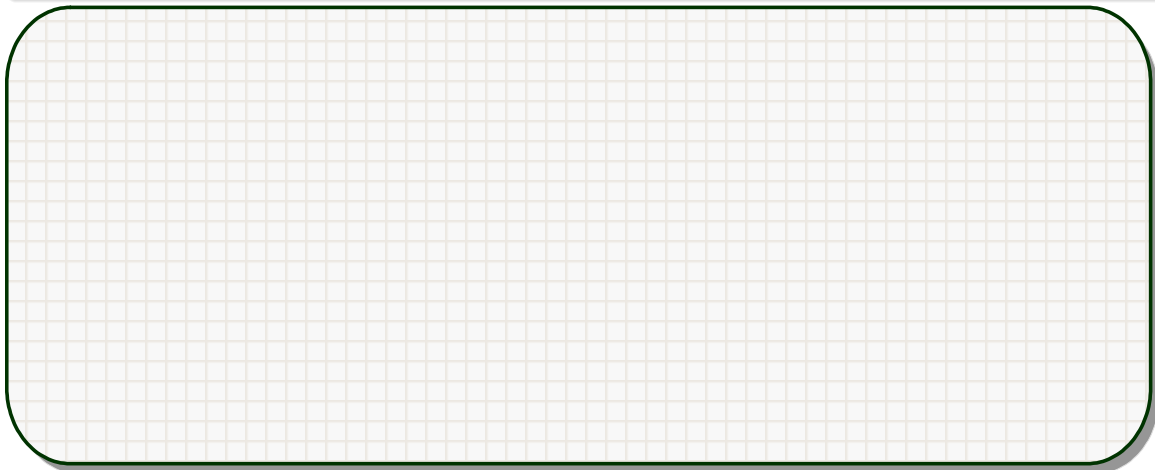
Problem

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



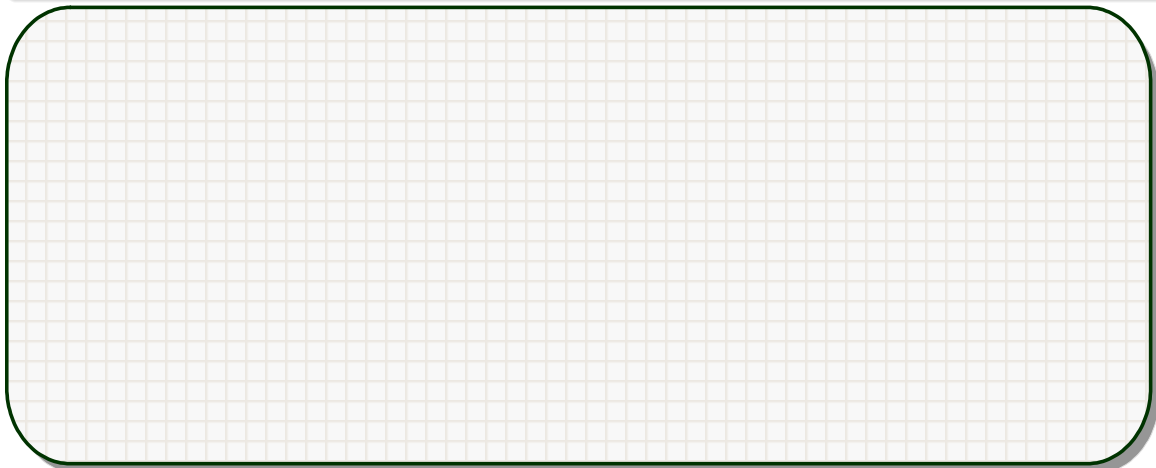
Problem

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(\mathbb{Z}_5) \text{ matrisini tersini bulunuz.}$$



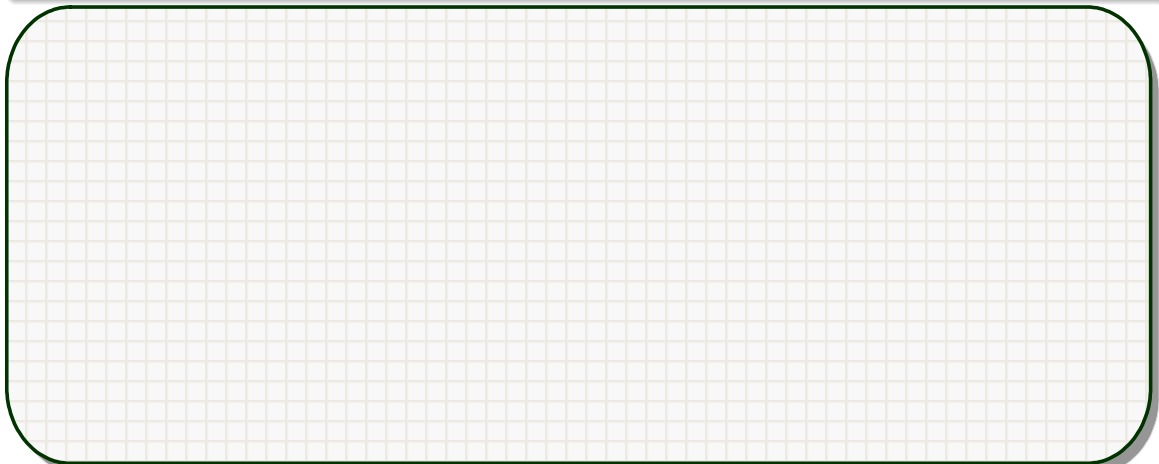
Problem

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(\mathbb{Z}_3) \text{ matrisini tersini bulunuz.}$$



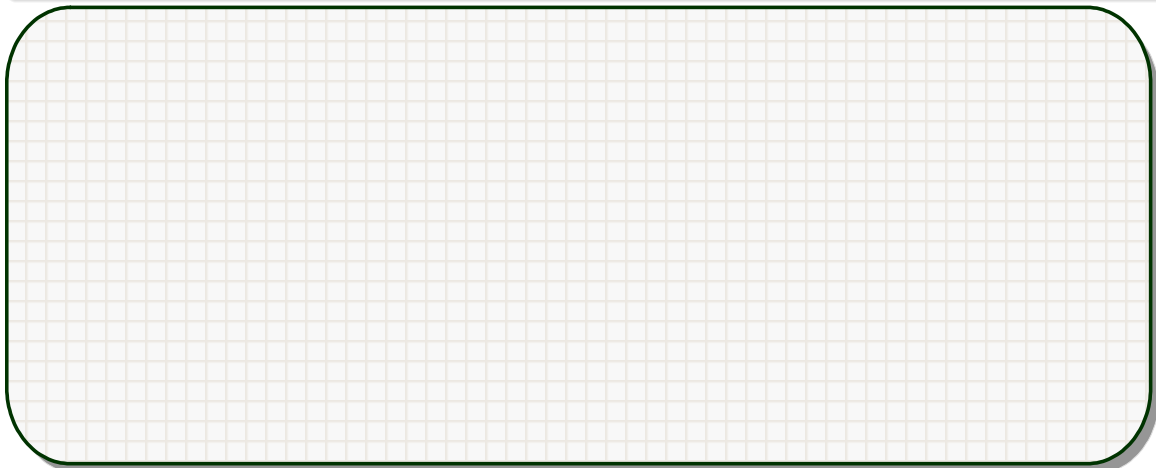
Problem

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



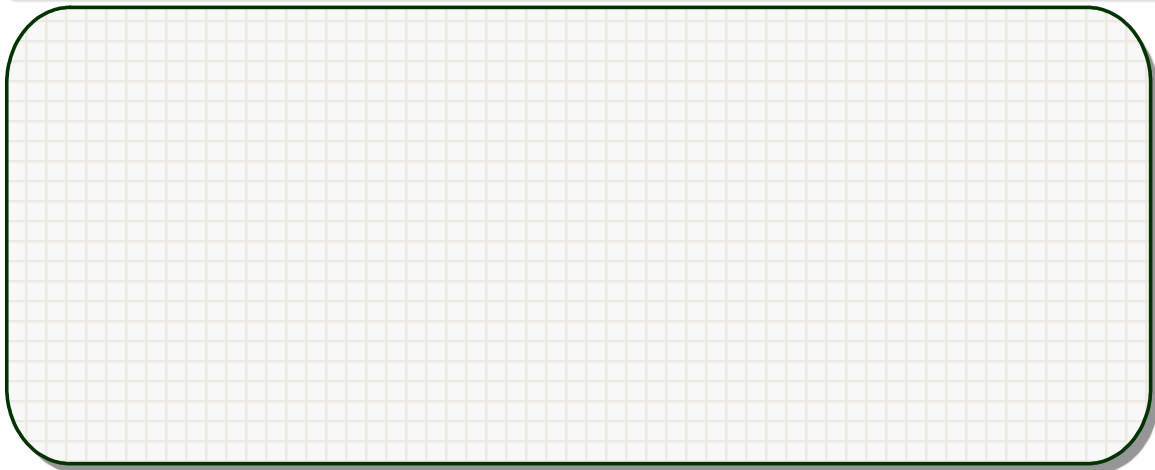
Problem

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



Problem

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$



Katsayılar Matrisinin Tersini Kullanarak Denklem Sisteminin Çözülmesi

x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenli, n lineer denklemin oluşturduğu

$$AX = B$$

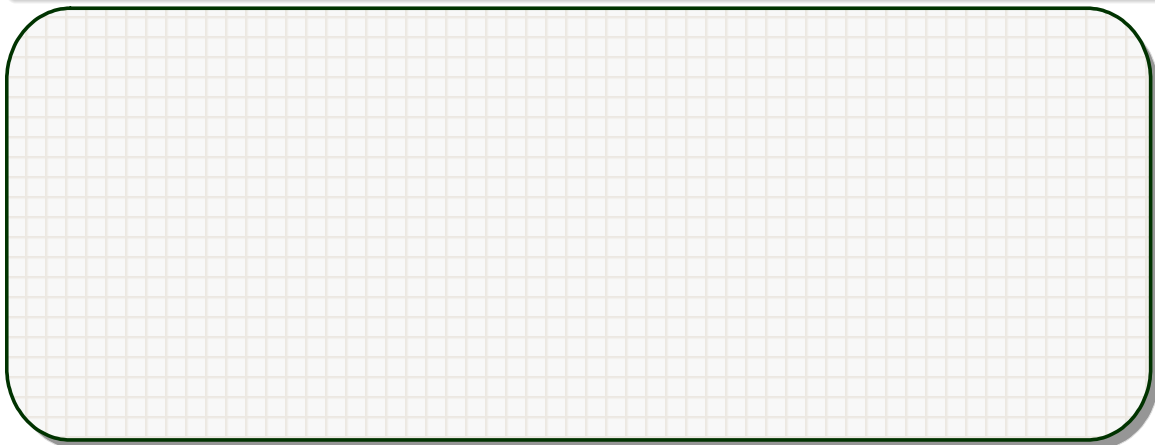
formunda bir lineer denklem sistemi verilsin. Bu durumda, A matrisi $n \times n$ türünde bir kare matris olacaktır. Eğer, A matrisi tersinir ise, $AX = B$ eşitliği soldan A^{-1} ile çarpılırsa,

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

eşitliğinden, x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenleri belirlenebilir. Ayrıca, $AX = 0$ eşitliğinde, A matrisi tersinir ise tek çözüm aşıkâr çözümdür, yani tüm değişkenlerin sıfır olduğu çözümdür.

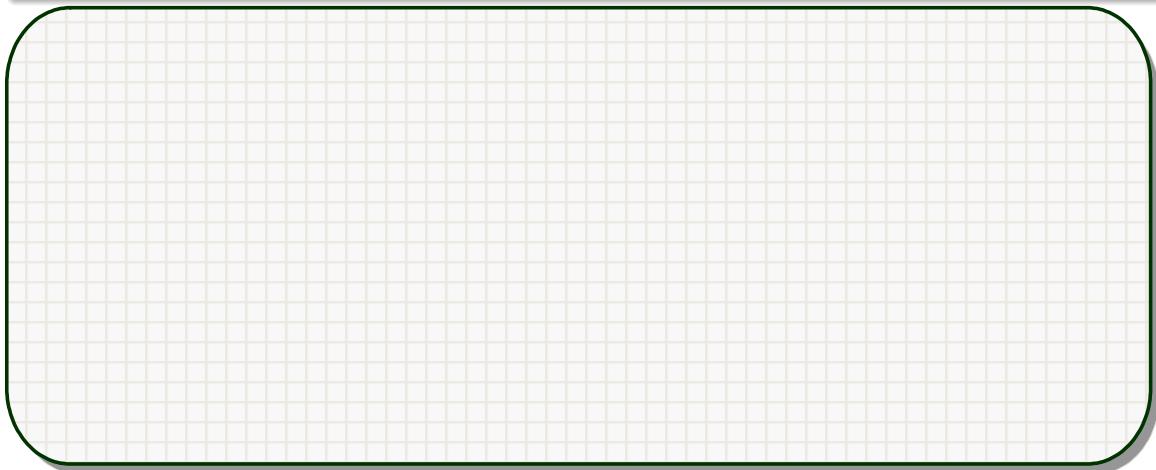
Örnek

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \text{ denklemler sistemini, katsayılar matrisinin tersini kullanarak çözümlü.}$$



Problem

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$
 denklem sisteminin katsayılar matrisinin tersini bulunuz ve tersini kullanarak sistemi çözünüz.



Şifrelemede Matrislerin Kullanılması

Matrisler şifreleme ve kodlamada sıkça kullanılmaktadır. Aşağıda, bu şifrelemeye bir örnek vereceğiz. Örneğin, alfabemizdeki harflere ve çok sık kullandığımız bazı imla işaretlerine aşağıdaki gibi birer sayı karşılık getirelim. Böylece 37 sayı kullanmış olduk. Bu tabloyu ve tersinir bir kodlama matrisini kullanarak, bir cümleyi nasıl şifreleyebileceğimizi görelim.

A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J
10	23	2	1	27	3	28	22	21	29	11	35	12
K	L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü
6	32	5	9	16	4	15	30	20	14	25	31	13
V	Y	Z	.	,	:	?	'	...	!	Boşluk		
7	34	24	33	17	36	18	26	19	0	8		

Şifrelemede, kullanacağımız kodlama matrisinin tersinir olması gerektiğine dikkat ediniz.

Örnek

"AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesini, yukarıdaki tabloyu ve tersinir,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

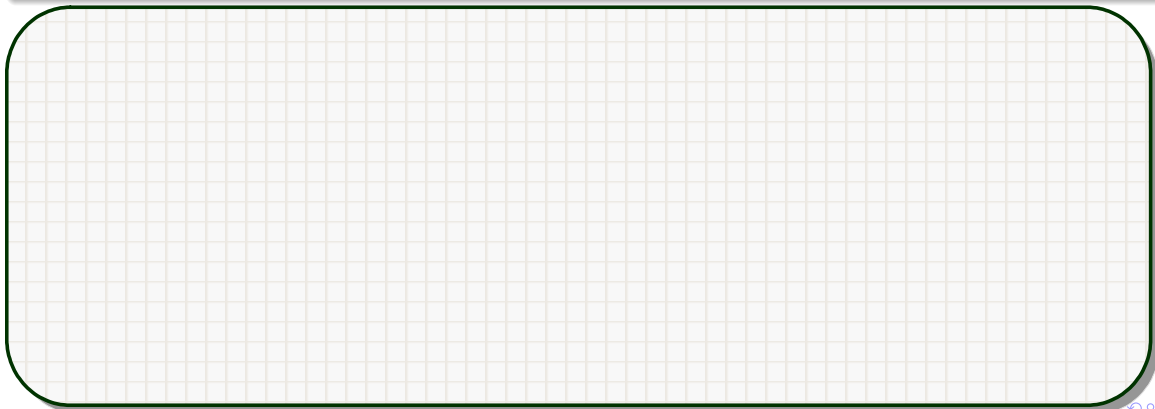
kodlama matrisini kullanarak şifreleyelim.

Örnek

Yukarıdaki sayı tablosunu ve $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ kodlama matrisini kullanarak, size gelmiş olan

RÜTİ,ISSİHOABSPET?CÖ

mesajını çözünüz.

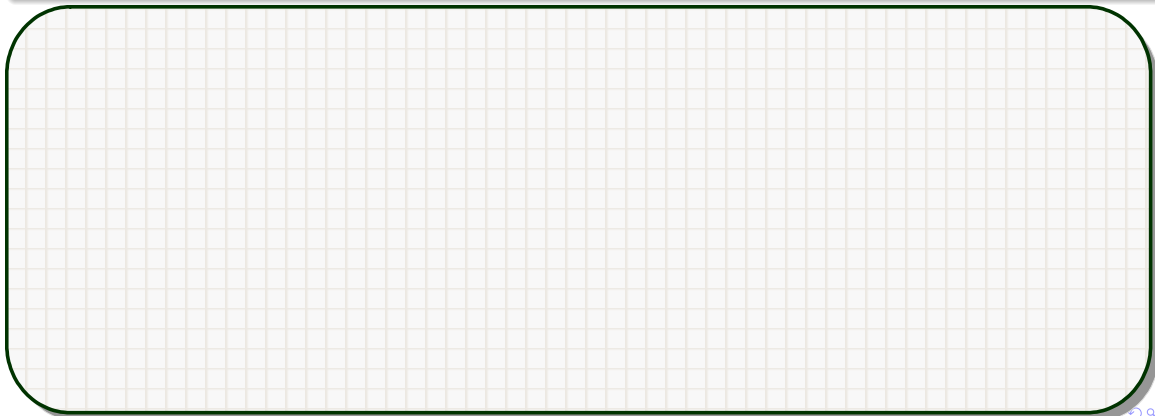


Örnek

$A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ ve $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$ matrisleri;

$$a_{ij} = (i - 2j)^{i-j} \text{ ve } b_{ij} = \frac{ij}{i+j}$$

olarak veriliyor. Buna göre, $AB = C = [c_{ij}]$ ise, $c_{41} = ?$



Problem

$A = [a_{ij}]_{4 \times 5}$ ve $B = [b_{ij}]_{5 \times 6}$ matrislerinde

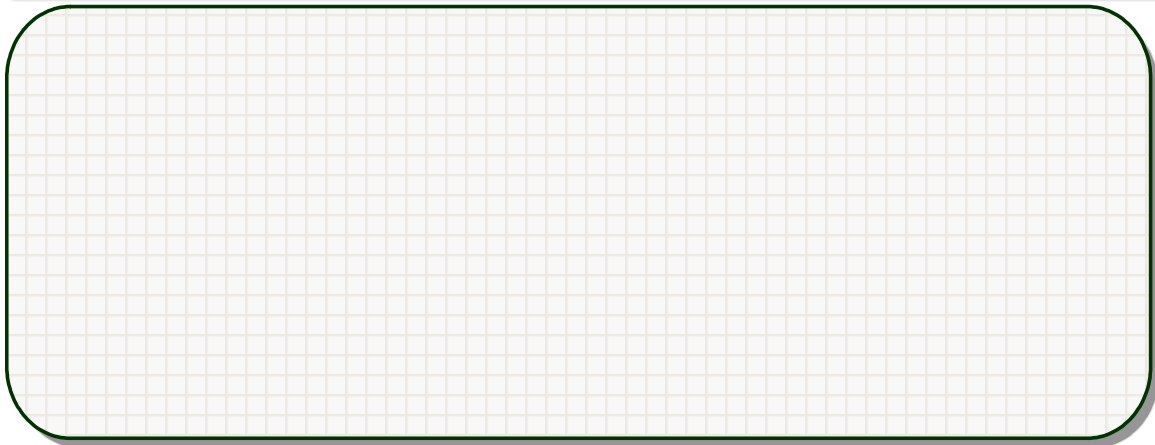
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ 2, & i = j \\ 0, & i > j \end{cases} \quad \text{ve} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 2, & i = j \end{cases}$$

ise, $C = AB = [c_{ij}]_{4 \times 6}$ çarpımında, c_{34} elemanını hesaplayınız.



Örnek

$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^n matrisini hesaplayınız.



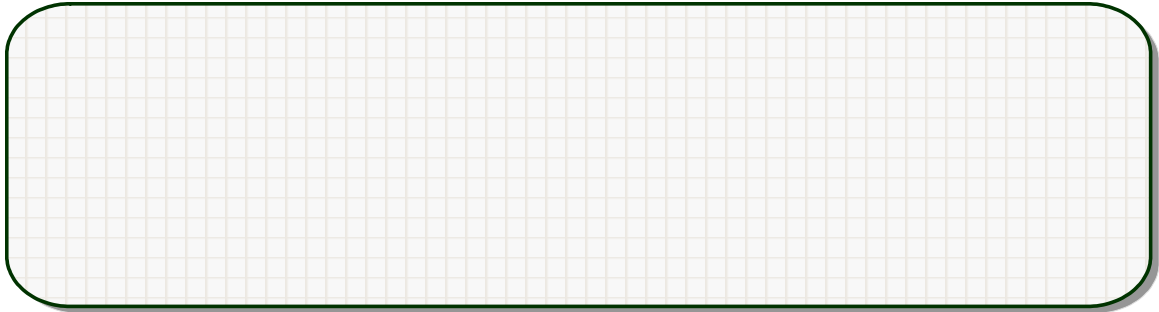
Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$
 olduğuna göre $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^k & \frac{k(k+1)}{2}x^{k-1} \\ 0 & x^{k+1} & (k+1)x^k \\ 0 & 0 & x^{k+1} \end{bmatrix}$ olduğunu
görünüz.



Örnek

A kare matrisi için, $A^{p+1} = A$ şeklinde bir $p > 0$ tamsayısı var ise, **A** matrisine periyodik matris denir. Bu eşitliği sağlayan en küçük p sayısına da **A** matrisinin periyodu denir. Buna göre, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin periyodunu bulunuz.

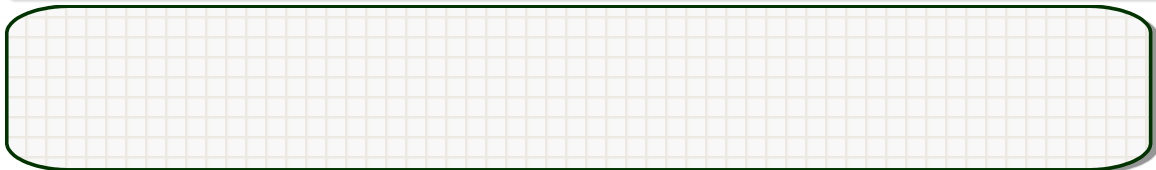


Problem

$A^2 = A$ ise, A matrisine, **idempotent matris** (eşkare matris) denir. Yani, periyodu 1 olan matrise idempotent matris denir. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin idempotent matris olduğunu gösteriniz.



Örnek

Sıfır matrisinden farklı bir A kare matrisi için, $A^p = 0$ olacak şekilde bir $p > 0$ tamsayısı var ise, A matrisine nilpotent matris (üstel sıfır) denir. En küçük p 'ye de Nilpotentlik derecesi denir. Buna göre,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisinin nilpotent matris olduğunu gösteriniz. Nilpotentlik derecesini bulunuz.

Çözüm

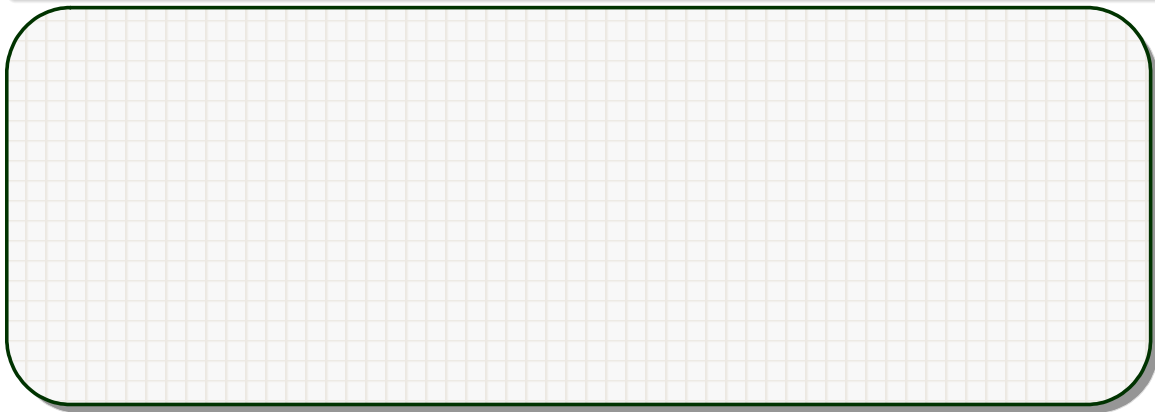
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, A matrisi nilpotent matristir ve nilpotentlik derecesi 2'dir.

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

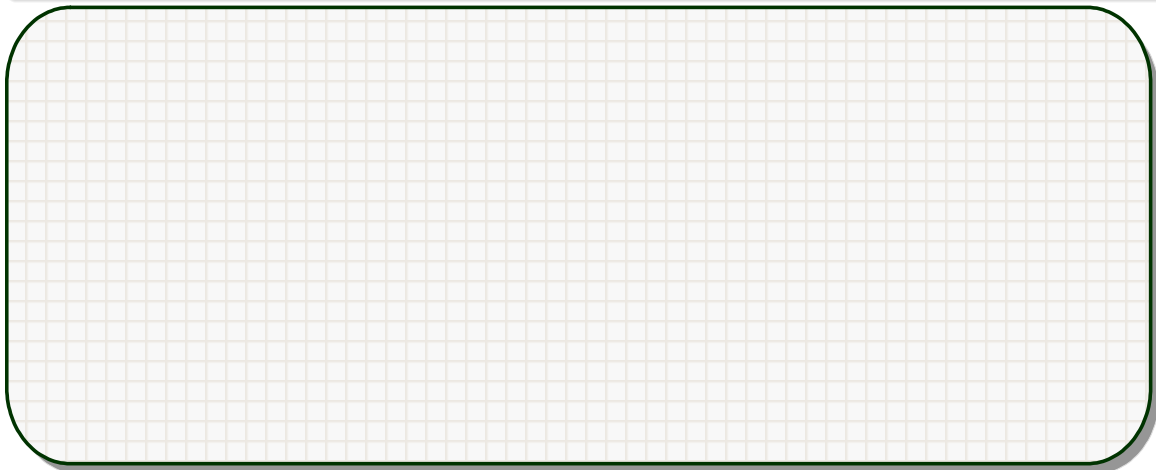
matrisinin nilpotent matris olduğunu görünüz. Nilpotentlik derecesi kaçtır?



Problem

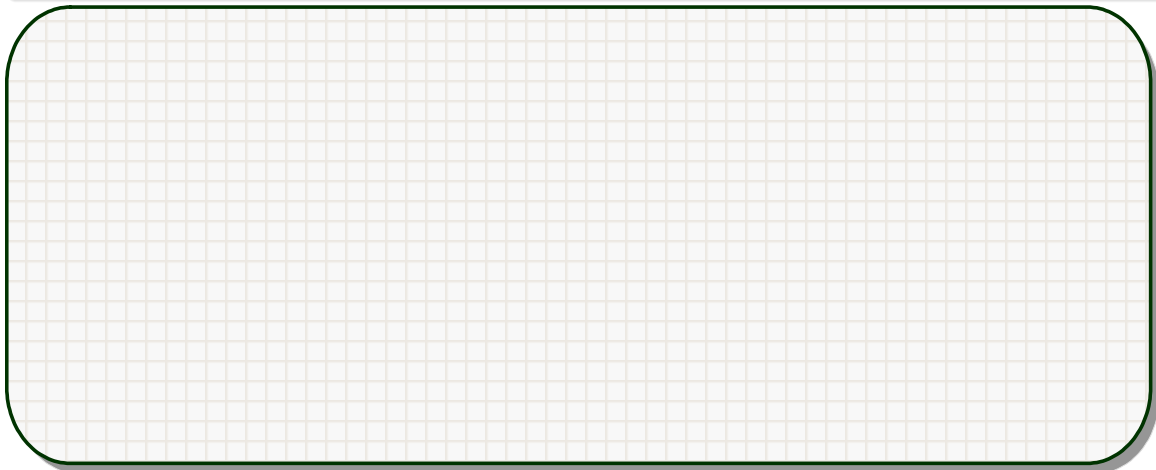
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin nilpotent matris olduğunu görünüz. Nilpotentlik derecesi kaçtır?



Problem

$A^2 = I$ ise, A matrisine, **involutif matris** denir. 2×2 ve 3×3 türünden birer involutif matris örneği yazınız. (Involutif matrislerin tersi kendisine eşittir.)



Örnek

2×2 türünden, 2'inci dereceden simetrik Nilpotent matris bulunamayacağını gösteriniz.

Çözüm

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

eşitliğinin $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine eşit olması için,

$$a = b = c = 0$$

olması gerekir.

Örnek

Bir nilpotent matrisin tersinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Kabul edelim ki, A nilpotent matris olsun, fakat A^{-1} var olsun. A nilpotent matris ise, $A^p = 0$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ vardır. k sayısı, $A^p = 0$ şartını sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Yani, A matrisinin nilpotentlik derecesi k olsun. $A^k = 0$ eşitliğini A^{-1} ile çarpalım. A^{-1} olduğunu kabul etmiştik. Buna göre,

$$A^k A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{k-1} (AA^{-1}) = A^{k-1} = 0$$

olur ki, bu k 'nın en küçük olmasıyla çelişir. k 'yı en küçük seçmişken, $k - 1$ için de $A^{k-1} = 0$ olduğunu gördük. Bu çelişki, nilpotent matrisin tersi olduğu kabulümüzün yanlış olduğunu, dolayısıyla tersinin olamayacağını gösterir.

Örnek

$A^2 = I$ ise A 'ya involütif matris denir. A matrisi involutif matris ise, $\frac{1}{2}(I + A)$ ve $\frac{1}{2}(I - A)$ matrisleri idempotent matrislerdir gösteriniz.

Çözüm

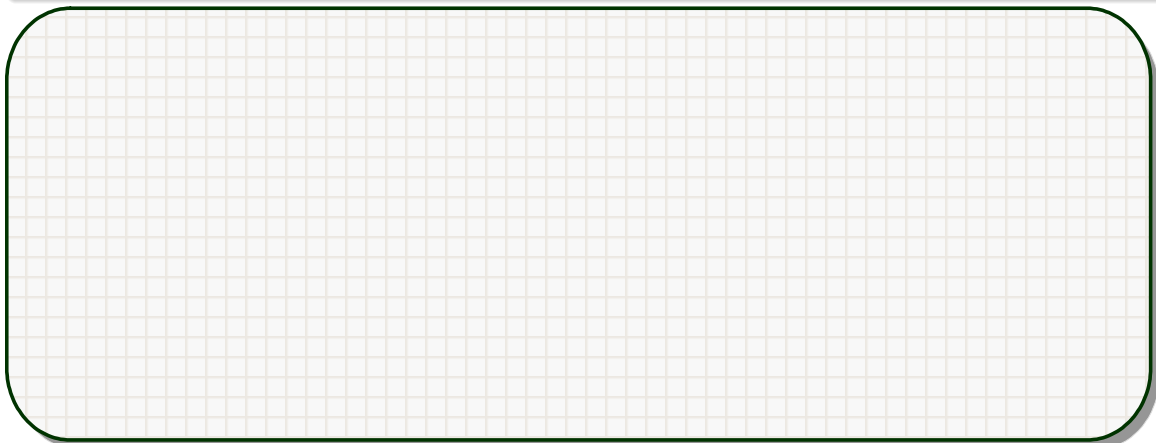
A matrisi involutif matris ise $A^2 = I$ 'dir.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(I + A) \frac{1}{2}(I + A) &= \frac{1}{4}(I + A)(I + A) = \frac{1}{4}(I^2 + 2A + A^2) \\ &= \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\frac{1}{2}(I + A)$ matrisi için, $B^2 = B$ eşitliği sağlandığından, $\frac{1}{2}(I + A)$ matrisi idempotent matristir. Diğer de benzer şekilde gösterilir.

Örnek

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & y & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisi ortogonal matris ise } x = ?, y = ?$$



Örnek

Her kare matris, simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türdür. Kanıtlayınız



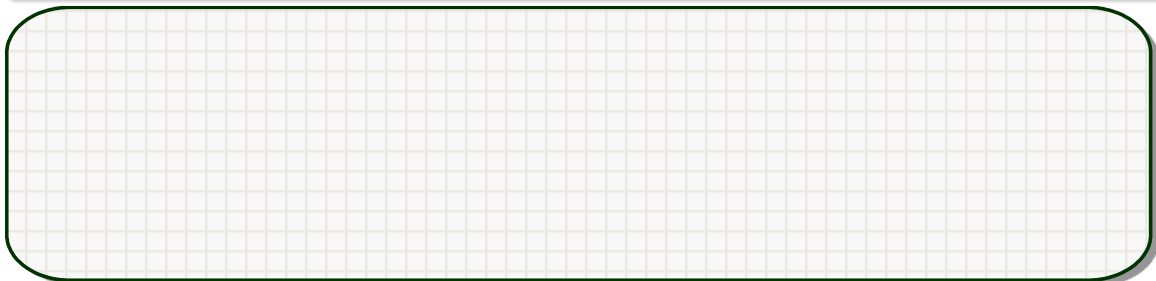
Örnek

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ matrisini ters simetrik ve simetrik iki matrisin toplamı olarak yazınız.

Problem

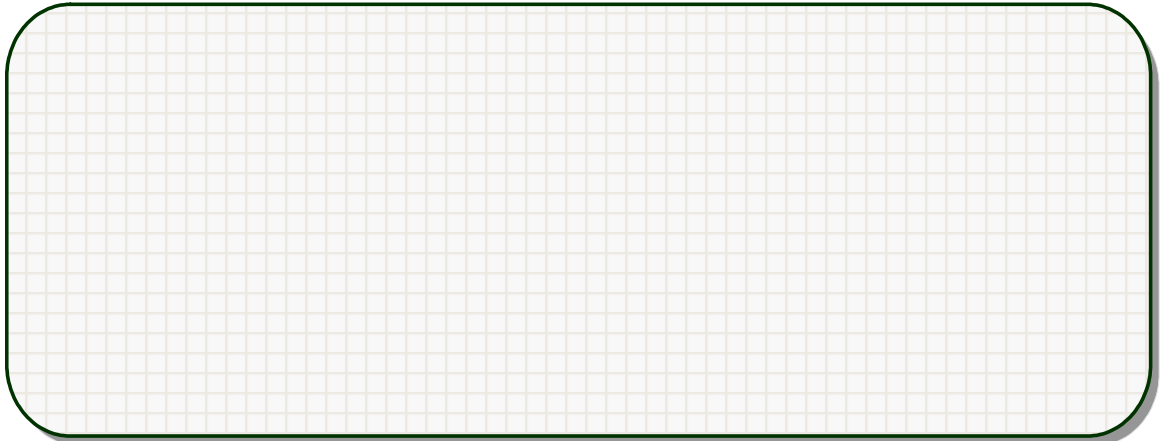
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisini ters simetrik ve simetrik iki matrisin toplamı olarak yazınız.



Örnek

A ters simetrik ve B ortogonal matris olduğuna göre, $B^{-1}AB$ matrisinin ters simetrik olduğunu gösteriniz.



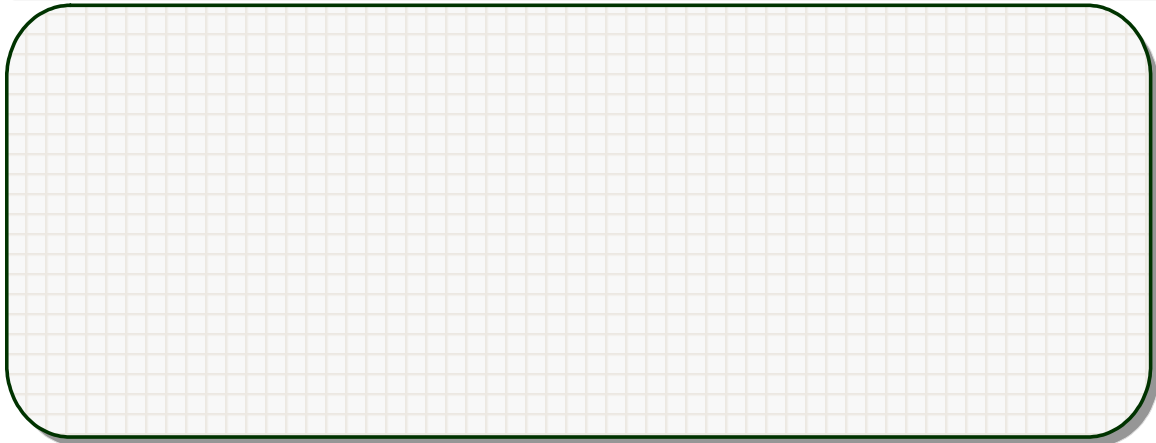
Örnek

A matrisi ortogonal matris ise, A^n matrisi de ortogonal midir?



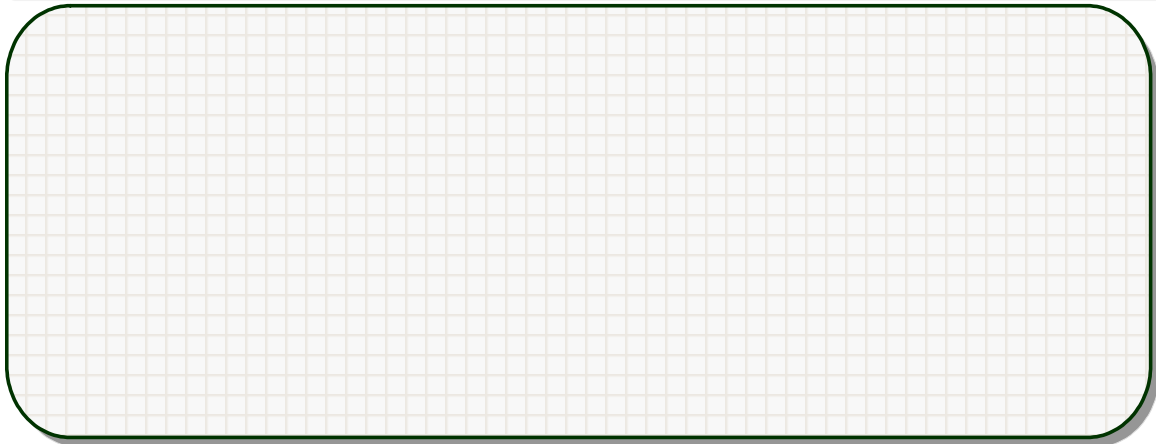
Problem

Tüm bileşenleri tamsayı olan 2×2 türünden kaç ortogonal matris vardır?



Örnek

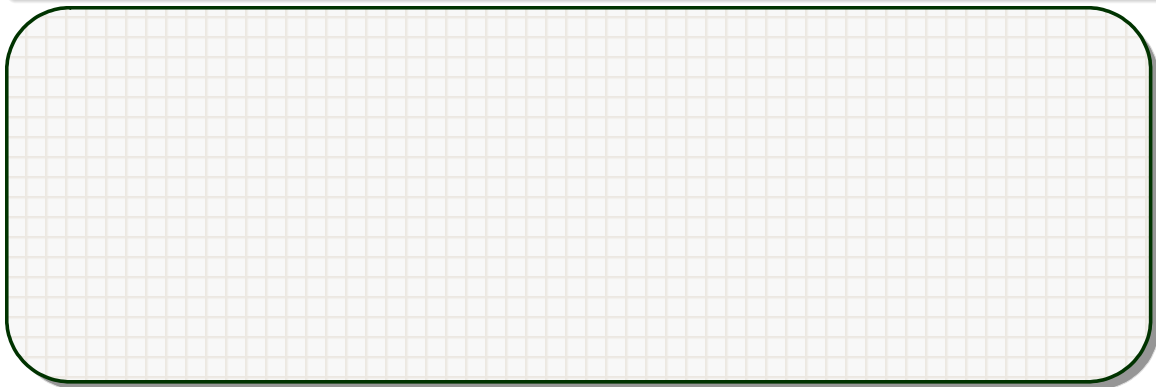
Bir hermitiyen matrisin köşegen elemanlarının reel sayı olması gerektiğini gösteriniz.



SORU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise } A+B=C=[c_{ij}] \text{ için } \sum_{k=1}^3 c_{1k}=?$$

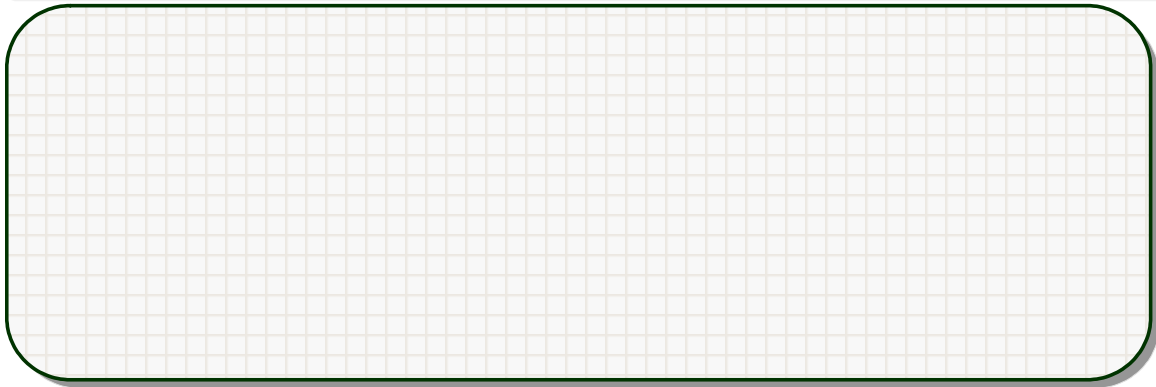
- A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



SORU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } AB = C = [c_{ij}] \text{ ise, } c_{21} = ?$$

- A)** 28 **B)** 26 **C)** 13 **D)** 24 **E)** 16



SORU

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ise AB hangisidir?

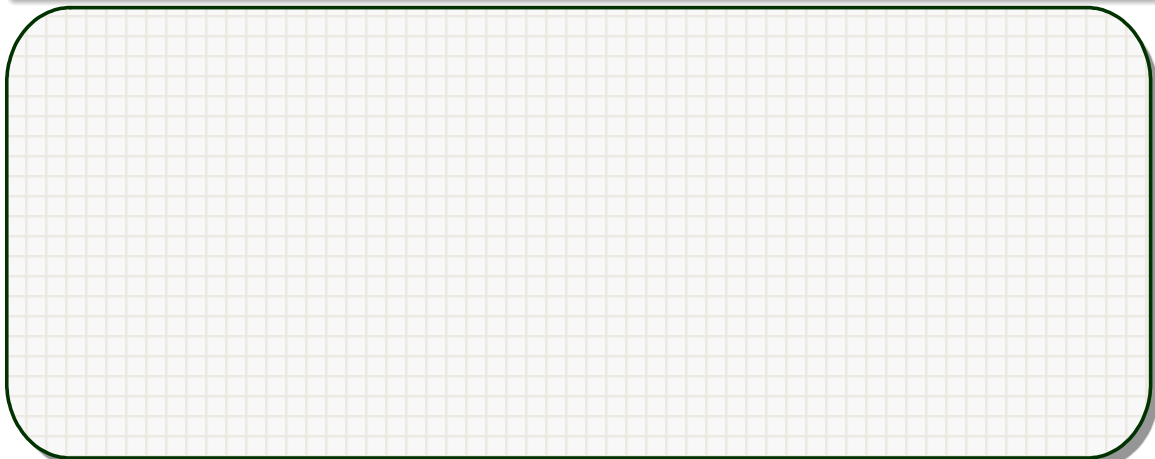
A) $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$

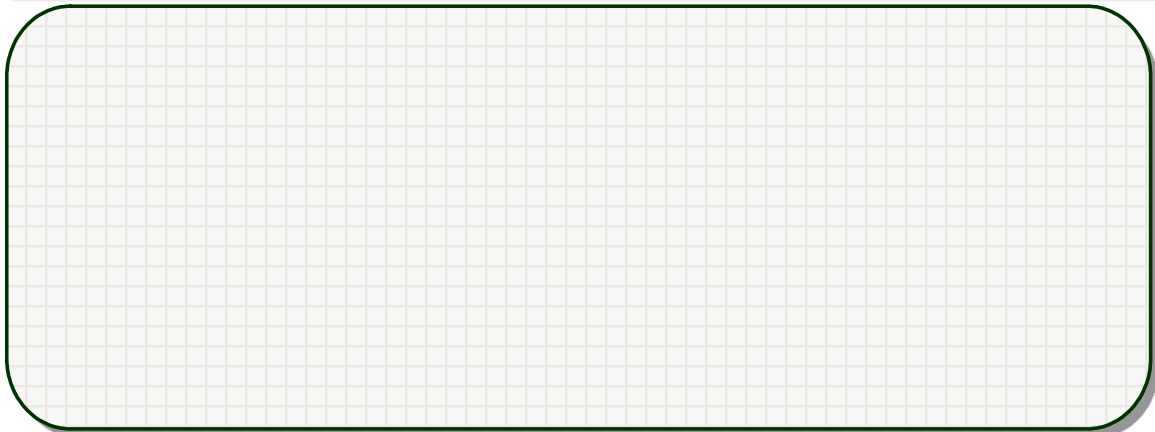
E) $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$



SORU

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi hangisidir?

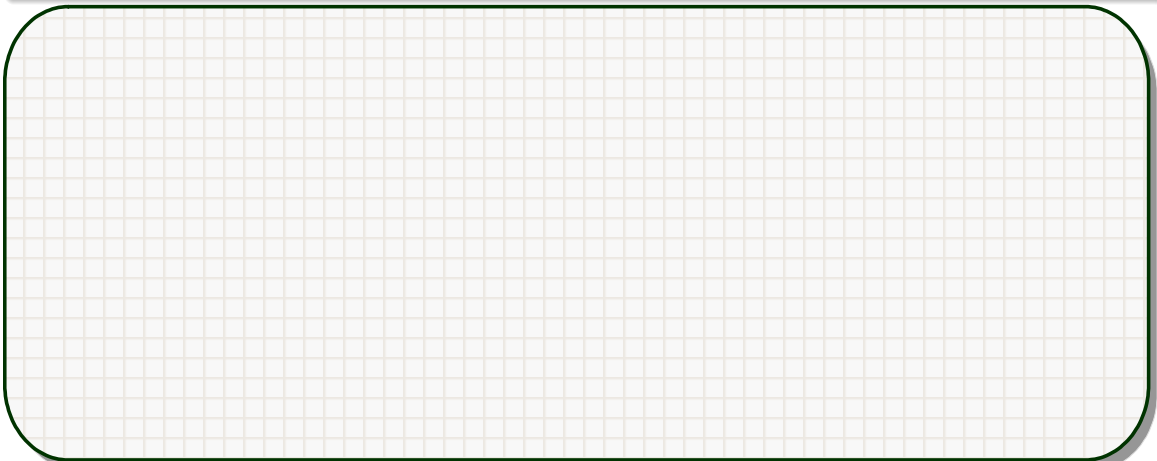
- A)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$



SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ise A^{100} hangisidir?

- A)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



SORU

$A = [a_{ij}]_{4 \times 5}$ ve $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ olmak üzere, AB ve BA çarpımları tanımlıysa $\frac{m}{n}$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) 1 D) mümkün değil E) $\frac{9}{5}$



SORU

$A, B, n \times n$ türünden matrisleri için, aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?

I. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

II. $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$

III. $A^2 = I$ ise $A = I$ 'dir.

IV. $A^2 = 0$ ise $A = 0$ 'dir.

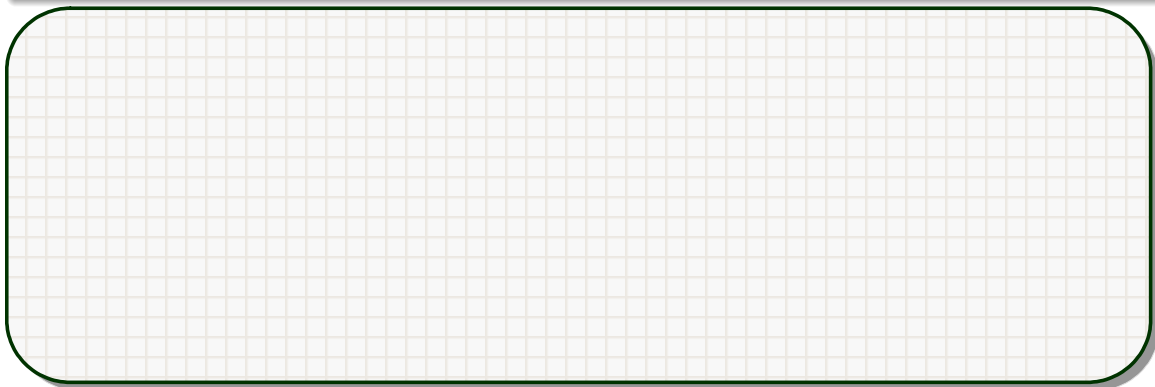
A) I ve III

B) II ve IV

C) I ve IV

D) III ve IV

E) I, III ve IV

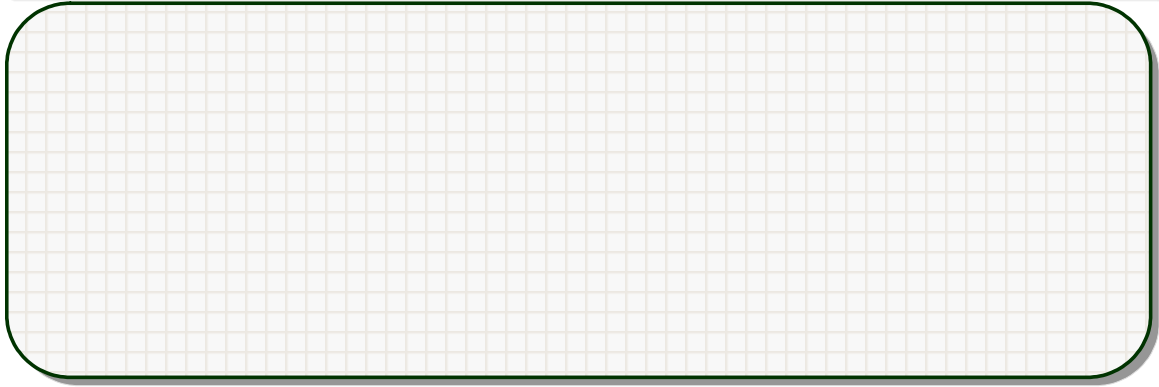


SORU

Matrislerdeki işlemlerle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

- I. Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.
- II. Çarpma işlemine göre her elemanın tersi vardır.
- III. Çarpma işleminin değişme özelliği vardır.
- IV. Toplama işlemine göre her elemanın tersi vardır.

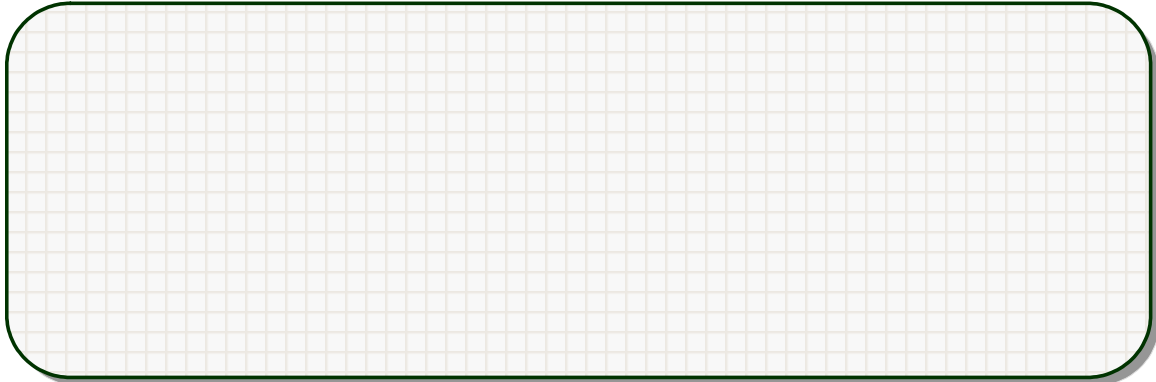
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



SORU

$A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ ve $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ matrisleri veriliyor. $AB = C = [c_{ij}]$ ise, c_{32} aşağıdakilerden hangisine eşittir?

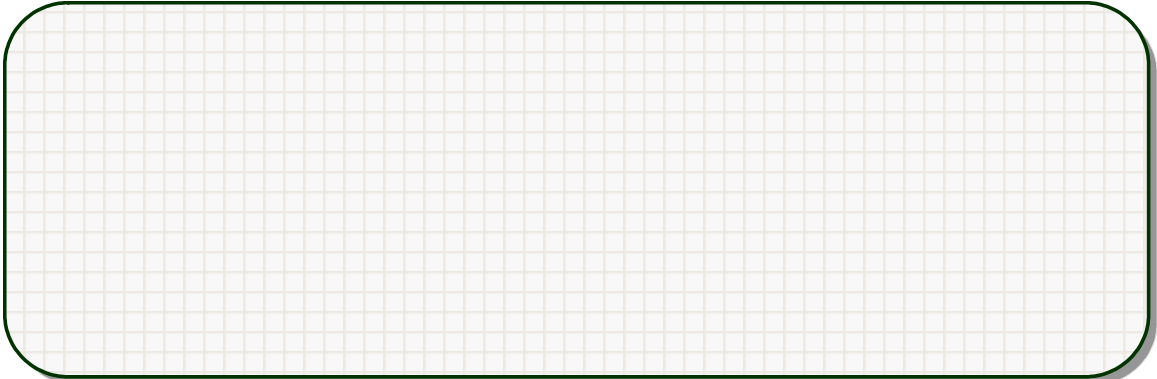
- A) $\sum_{k=1}^3 a_{2k} b_{k3}$ B) $\sum_{k=1}^3 a_{3k} b_{k2}$ C) $\sum_{k=1}^3 a_{3k} b_{2k}$ D) $\sum_{k=1}^4 a_{3k} b_{k2}$ E) $\sum_{k=1}^3 b_{3k} a_{k2}$



SORU

$a_{ij} = (i - j)^i$ ve $b_{ij} = \frac{i \cdot j}{i + j}$ olmak üzere, $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ ve $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ matrisleri veriliyor. $AB = C = [c_{ij}]$ ise, $c_{32} = ?$

- A) $\frac{28}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{19}{3}$ D) $\frac{24}{3}$ E) $\frac{17}{3}$

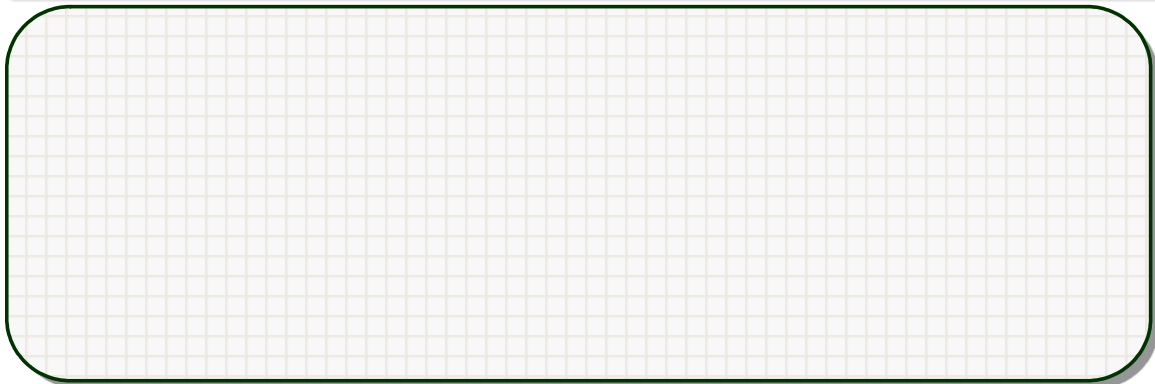


SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ters simetriktir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4**

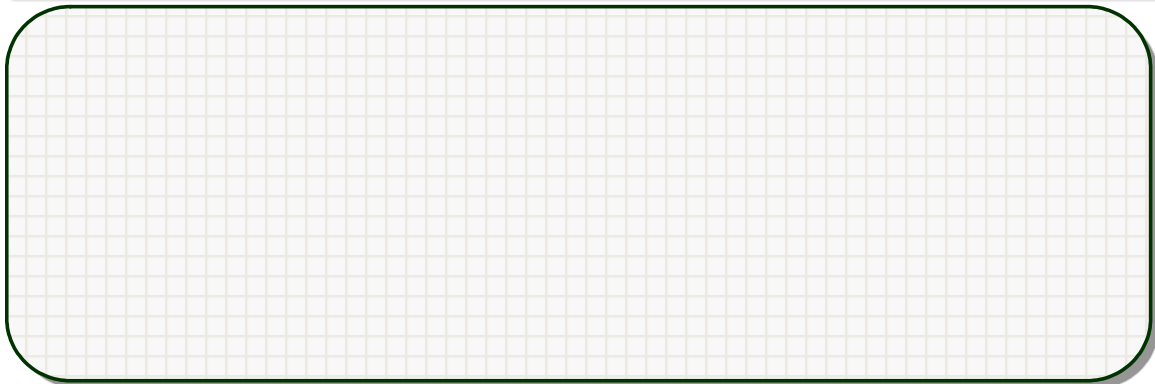


SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ortogondur?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4



SORU

$$A = \begin{bmatrix} 5/13 & a \\ b & 5/13 \end{bmatrix} \text{ matrisi ortogonal ise } a \cdot b = ?$$

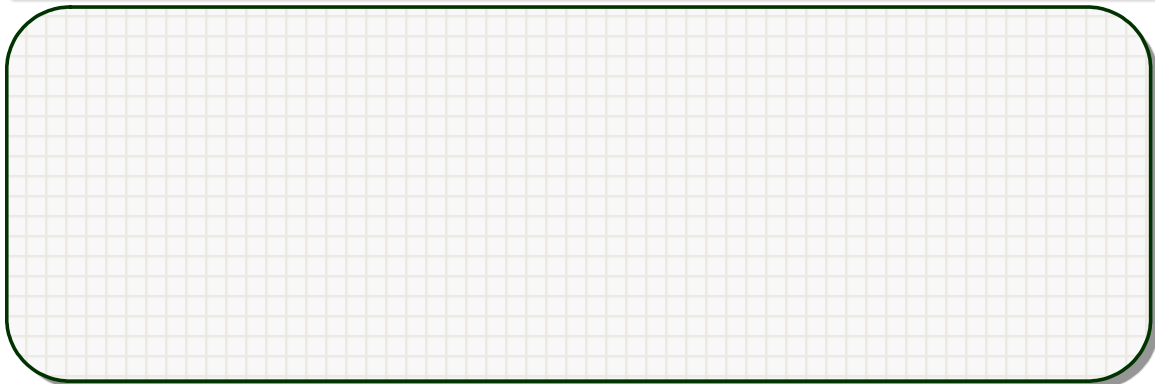
- A)** 0 **B)** $\frac{5}{13}$ **C)** $\frac{25}{169}$ **D)** $\frac{144}{169}$ **E)** 1



SORU

$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılırsa, simetrik matris hangisi olur?

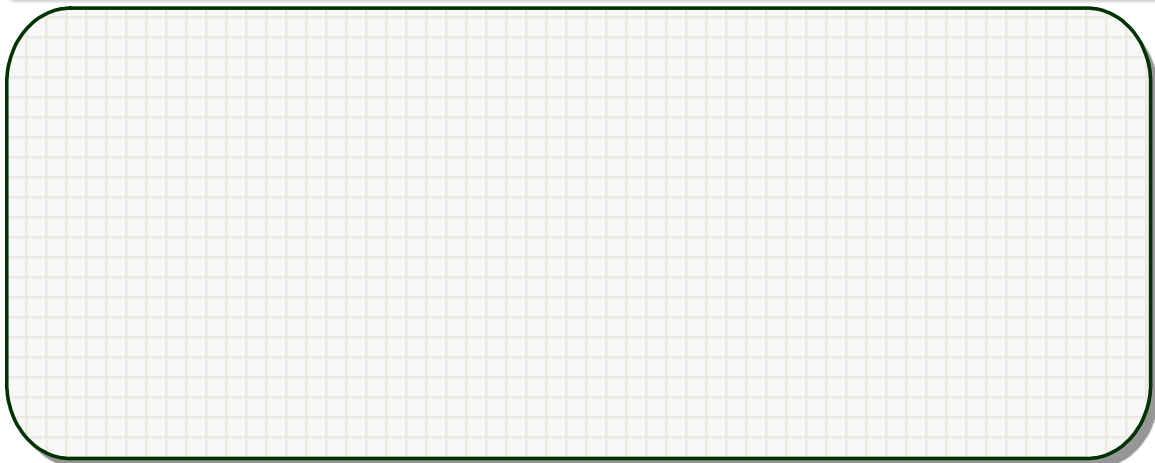
- A)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$



SORU

A matrisi ters simetrik ise, aşağıdakilerden hangisi ters simetrik olmayabilir?

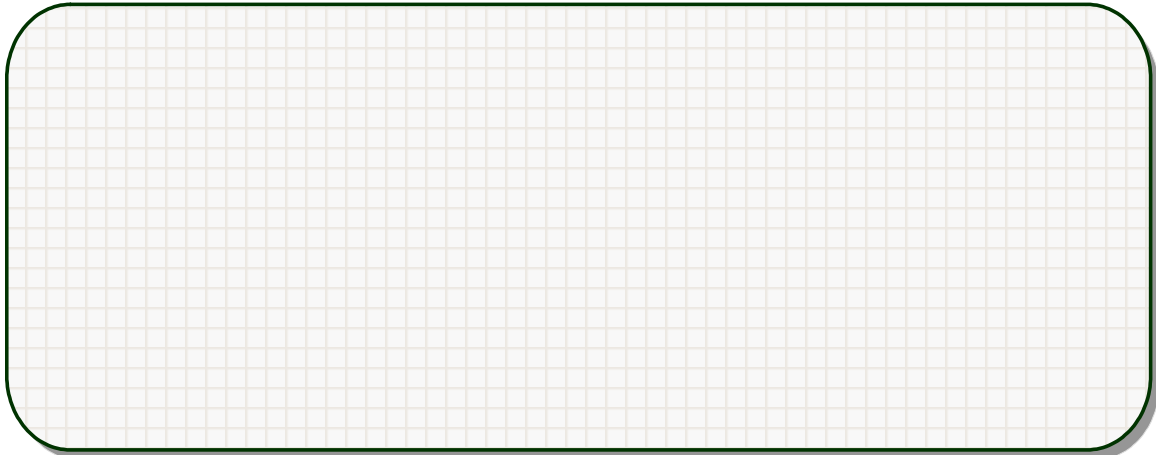
- A)** A^3 **B)** A^2 **C)** A^5 **D)** $-A$ **E)** $2A$



SORU

$A = \begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$ ortogonal matris ise, $a^2 + b^2$ kaçtır?

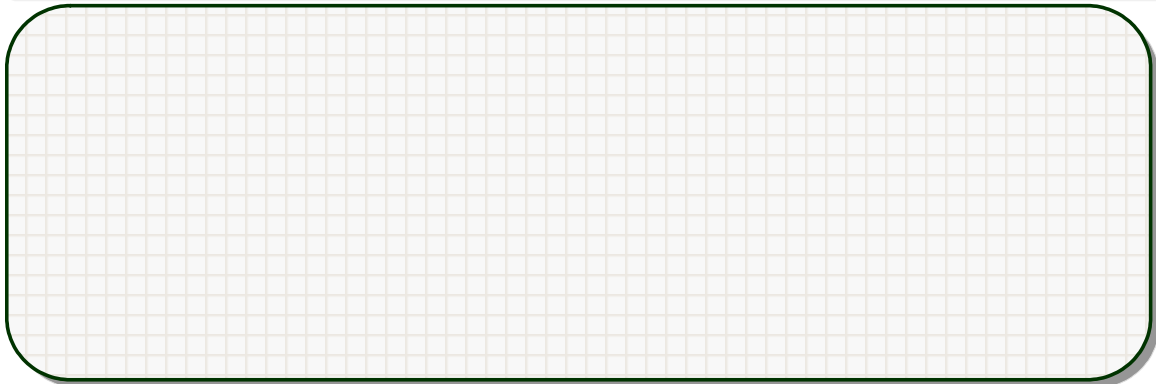
- A)** 1 **B)** 2 **C)** 1/2 **D)** 2 **E)** 0



SORU

$$C = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{bmatrix} \text{ matrisi ortogonal matris ise } x = ?$$

- A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** -3 **E)** -2



SORU

$A = [a_{ij}]_{4 \times 10}$, $a_{ij} = \frac{j}{j+i}$, $B = [b_{ij}]_{10 \times 3}$, $b_{ij} = \frac{j}{i^2+i}$ olarak tanımlanıyor. Buna göre,

$$AB = C = [c_{ij}]$$

çarpımında c_{21} elemanı kaçtır?

- A)** 3/7 **B)** 5/12 **C)** 1/4 **D)** 7/12 **E)** 11/12

SORU

A kare matrisi için, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

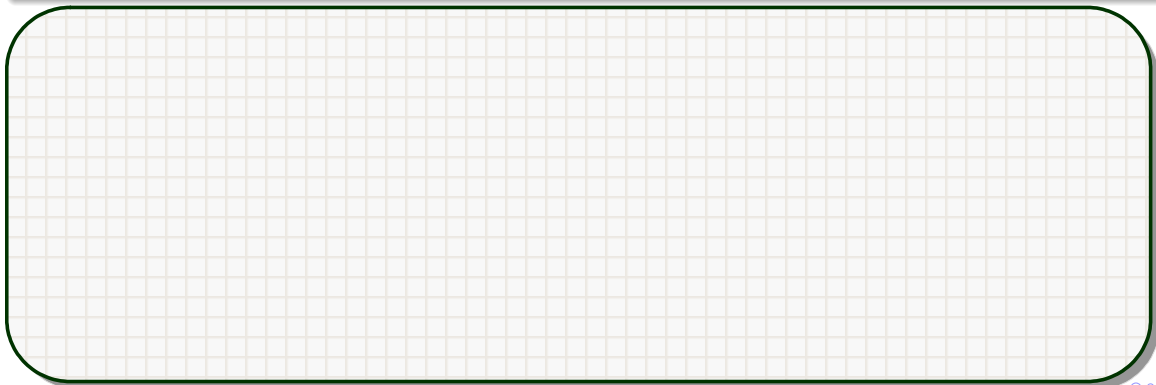
I. $A^{-1} = A$ ise A simetriktir.

II. $A^T = -A$ ise A ters simetriktir.

III. $A^{-1} = A$ ise A ortogonaldır.

IV. $A^2 = I$ ise A matrisinin tersi kendisidir.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0



SORU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankı kaçtır?}$$

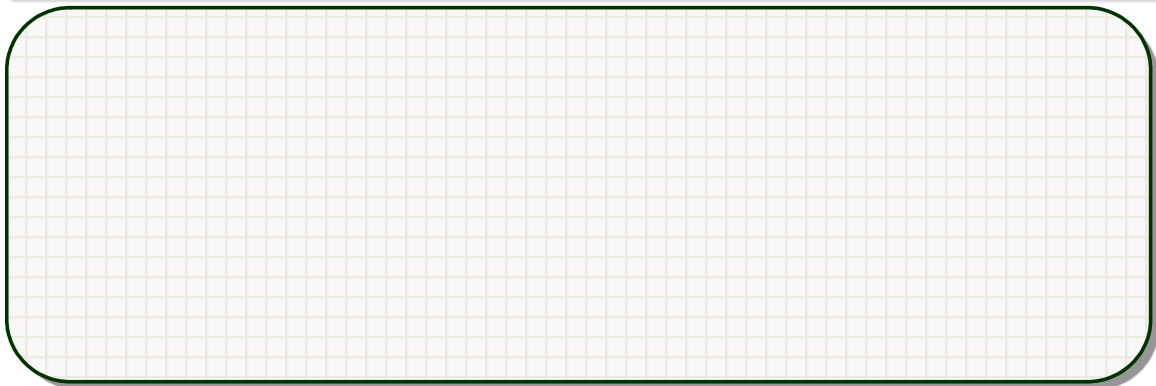
- A) 1** **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 0**



SORU

Elemanları \mathbb{Z}_5 cisminde ait olan $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$, matrisinin tersi yoksa $a = ?$

- A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0



SORU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersi hangisidir?}$$

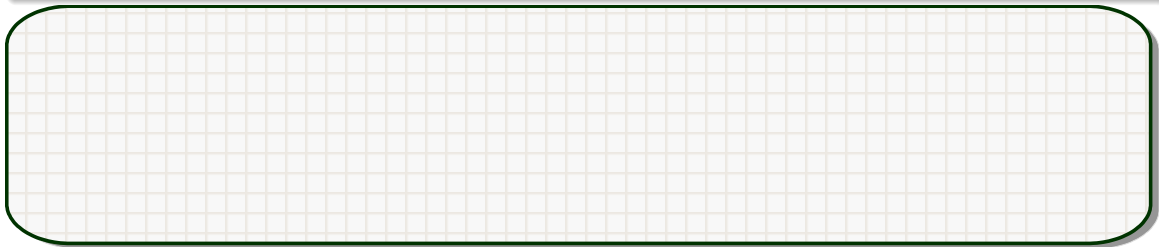
$$\text{A)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{C)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

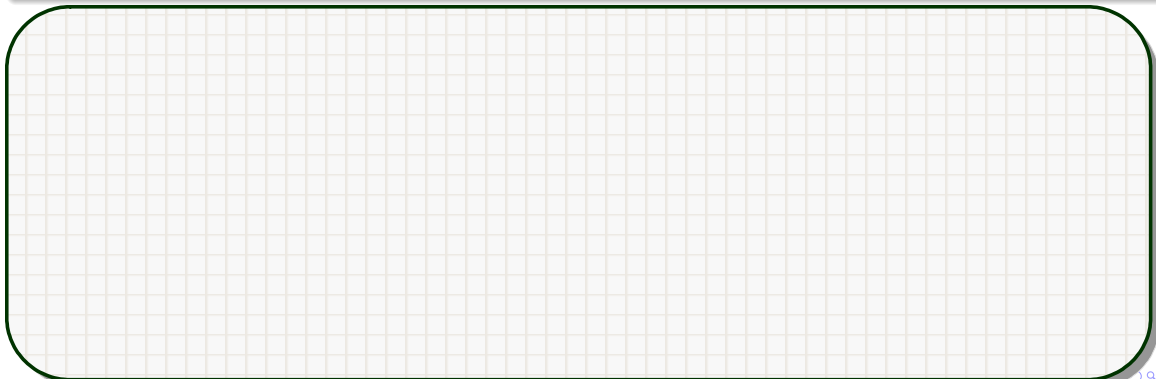
$$\text{E)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



SORU

$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}_3)$ matrisinin tersi hangisidir?

- A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$



SORU

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

A) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

SORU

Tüm elemanları 1 veya -1 olan 3×3 türünden, birbirinden farklı kaç tane simetrik matris yazılabilir?



Problem

Tüm elemanları 0, 1 veya -1 sayılarından oluşan 3×3 türünden, 0 matrisinden farklı kaç tane ters simetrik matris yazılabilir?



