ENTERPOLASYON

Basit olarak enterpolasyon işlemi; tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.
Genel anlamda ise enterpolasyon; bilinmeyen bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi ayrık noktalarda verilen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun daha basit ve bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan $F(x)$ fonksiyonuna "Enterpolasyon Fonksiyonu" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.
Genelde enterpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Enterpolasyon fonksiyonun seçiminde iki teorem kullanılır.

1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise enterpolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir. Bu aralıkta

$$|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon$$ eşitliği sağlanır.

2. Periyodu 2π olan sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

gibi sonlu bir tirigonometrik açılım, enterpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir n değeri $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$ sağlanabilir.

DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona doğrusal (lineer) enterpolasyon denir.

Eğer x değişkeni $[a, b]$ aralığında bir $f(x)$'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak:

$F(x) = Ax + B$ seçilirse,

$$f(a) = F(a)$$
$$f(b) = F(b)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa + B = f(a)$$
$$Ab + B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \quad , \quad B = \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a}$$

yazılır.

$F(x)$ fonksiyonu ise:

$$\boxed{F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a}}$$

olur.

GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i f_0$$ olarak verilir. Bu formül açıldığında;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$$k = \frac{x_i - x_0}{h}$$ olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$k = \frac{x_i - x_0}{h}$$ konulursa;

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!}\Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$F(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i-x_0}{h}}{1!}\Delta f_0 + \frac{\frac{x_i-x_0}{h}\left(\frac{x_i-x_0}{h}-1\right)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i-x_0}{h}\left(\frac{x_i-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x_i-x_0}{h}-2\right)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i-x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{x_i-x_0}{h}\,\frac{x_i-x_0-h}{h}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i-x_0}{h}\,\frac{x_i-x_0-h}{h}\,\frac{x_i-x_0-2h}{h}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i-x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{x_i-x_0}{h}\,\frac{x_i-(\overbrace{x_0+h}^{x_1})}{h}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i-x_0}{h}\,\frac{x_i-(\overbrace{x_0+h}^{x_1})}{h}\,\frac{x_i-(\overbrace{x_0+2h}^{x_2})}{h}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i-x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)}{h^2}\,\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)}{h^3}\,\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i\Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x)=f_0+x_i\,\Delta f_0+\frac{x_i(x_i-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0+\frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0+\dots$$

$x_i \rightarrow x$ alınırsa

$$\boxed{F(x)=f_0+x\,\Delta f_0+\frac{x(x-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0+\dots}$$

ÖRNEK:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	-4	2	14	18
1	-2	16	32	18
2	14	48	50	18
3	62	98	68	18
4	160	166	86	
5	326	252		
6	578			

$x_0 = 0$
$h = 1$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4 \qquad F(4) = 160$$

ÖRNEK.

$h=2$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	10		
		40	
4	50		32
		72	
6	122		32
		104	
8	226		32
		136	
10	362		

$x_0 \neq 0$

$h \neq 1$

$$F(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{\cancel{2}} \overset{20}{\cancel{40}} + \frac{(x-2)(x-4)}{\cancel{4}} \overset{8}{\cancel{32}}$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad F(8) = 226$$

Değişken dönüşümü yapılarak ayrık noktaların eşit aralıklı yapılması:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2				
		-1			
0	1		10		
		9		26	
3	10		46		24
		55		60	
8	65		106		24
		161		84	
15	226		190		
		351			
24	577				

z	x ($F(z)$)	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		

z	x ($F(z)$)	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1		
		1	
1	0		2
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		

$$F(x) = f_0 + x\,\Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z.\Delta x + \frac{z.(z-1)}{2!}\,\Delta^2 x = -1 + z.1 + \frac{z^2 - z}{2} . 2$$

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \mp\sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\,\Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}\,\Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\,\Delta^4 f_0$$

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}\Delta^4 f_0$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2				
		-1			
0	1		10		
		9		26	
3	10		46		24
		55		60	
8	65		106		24
		161		84	
15	226		190		
		351			
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \mp\sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \cancel{10}^{5}\,\frac{z(z-1)}{\cancel{2}} + \cancel{36}^{6}\,\frac{z(z-1)(z-2)}{\cancel{6}} + \cancel{24}\,\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{\cancel{24}}$$

$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2$ → Ara Enterpolasyon Formülü

$$f(x) = (\mp\sqrt{x+1})^4 - 2(\mp\sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

ÖRNEK:

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

z	x	Δx
0	2	2
1	4	2
2	6	2
3	8	2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z . \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z.\Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \cancel{8}^{4}\frac{z(z-1)}{\cancel{2}} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 3 \Rightarrow F(z) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(z) = x^2 - 4x + 7$$

II. yol

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2\,2!}\Delta^2 f_0$$

LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi ayrı noktalardaki bilinen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ degerleri varsa (bu noktaların aralıkları esit olsun olmasın) ve $f(x)$ fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna $g(x)$ dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$ şeklindedir.

$L_i(x)$ katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$ şeklinde hesaplanır.

Örnek:

Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun x_i'ler için y_i değerleri şöyle olsun.

i	x_i	y_i
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$n=2$

$$L_0(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}=\cancel{\frac{x-x_0}{x_0-x_0}}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\;\frac{x-x_2}{x_0-x_2}$$

$$=\frac{x-1}{0-1}\;\frac{x-3}{0-3}\Rightarrow L_0(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$

$$L_1(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\;\cancel{\frac{x-x_1}{x_1-x_1}}\;\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\;\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{x-0}{1-0}\;\frac{x-3}{1-3}\Rightarrow L_1(x)=-\frac{1}{2}(x^2-3x)$$

$$-f(a)x + f(a)b$$

$$f(b)x - f(b)a$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0}\,\frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6}(x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-3x)(1) + \frac{1}{6}(x^2-x)(25)$$

$g(x) = 2x^2 + 4x - 5$ bulunur. $\Rightarrow$ $g(1) = 1$ $\quad g(2) = 11$

ÖRNEK:

i	x	y
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$n=3$

$$g(x)=\sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, y_i$$

$$L_0(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\cancel{\frac{x-x_0}{x-x_0}}\;\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\;\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\;\frac{x-x_3}{x_0-x_3}=-\frac{1}{912}(x-7)(x-15)(x-22)$$

$$L_1(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\;\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\;\frac{x-x_3}{x_2-x_3}=\frac{1}{480}(x-3)(x-15)(x-22)$$

$$L_2(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\;\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\;\frac{x-x_2}{x_2-x_3}=-\frac{1}{672}(x-3)(x-7)(x-22)$$

$$L_3(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 3}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\;\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\;\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{1}{1995}(x-3)(x-7)(x-15)$$

$$g(x)=-\frac{1}{912}(x-7)(x-15)(x-22)+\frac{1}{480}(x-3)(x-15)(x-22)(-8)-\frac{1}{672}(x-3)(x-7)(x-22)(-22)+\frac{1}{1995}(x-3)(x-7)(x-15)(-9)$$

$g(4)=-1.0296854$ $\qquad$ $g(10)=-14.973684$