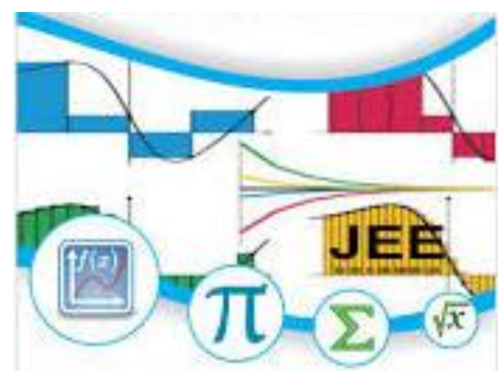
Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü



Yıldız Teknik Üniversitesi- Banu Diri

DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

Matrisler Hakkında Kısa Bilgi

- Alt ve Üst Üçgen Matris
- Birim ve Köşegen Matris
- Bant Matris
- Transpoze Matris
- Simetrik Matris
- Kofaktör Matris
- Adjoint (Ek) Matris
- Ters Matris
- Matrislerde Toplama ve Çarpma

Matrisler satır ve sütunlardan oluşan iki boyutlu dizilerdir.

Tek satır veya sütundan oluşurlarsa vektör veya dizi adını alırlar.

Matrisler genelde isimleri ile veya [ ] şeklinde gösterilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Alt ve Üst Üçgen Matris

- Matrisin köşegeni üstündeki elemanlar sıfır ise Alt Üçgen Matris
- Matrisin köşegeni altındaki elemanlar sıfır ise Üst Üçgen Matris denir.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} \quad [A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Birim ve Köşegen Matris

• Matrisin köşegeni üzerindeki elemanlar 1 ise Birim Matris

• Matrisin köşegeni üzerinde değer bulunan ve diğer elemanları 0 olan matrise de Köşegen Matris adı verilir.

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [A]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Bant Matris

Matrisin elemanları köşegen etrafında belirli bir düzen ile yerleşmiştir. Genellikle kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır.

$$[A]= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{i-1,j-3} & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} \\ & & & & & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j} \end{bmatrix}$$

Transpoze Matris

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Simetrik Matris

- Bir matrisin transpozesi kendisine eşit ise Simetrik Matris adını alır.

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$[A]^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

Kofaktör Matris

• Bir matrisin herhangi bir elemanının bulunduğu satır ve sütun silinerek elde edilen matrisin işaretli determinantı o elemanın Kofaktörü olarak adlandırılır.

• Bu işlem bütün elemanlar için tekrarlanıp yerine konulursa elde edilen yeni matris Kofaktör Matris olarak adlandırılır.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha 1{,}1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$kofaktör[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha 2{,}1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Adjoint (Ek) Matris

• Kofaktör matrisinin transpozesinden oluşur.

$$\text{Adjoint}[A]=\text{Kofaktör}[A]^{T}$$

$$Adjo\,\text{int}[A]=\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ters Matris

• Bir matrisin Adjoint matrisinin o matrisin determinantına bölünmesiyle elde edilen matrise Ters Matris denir.

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}[\mathrm{A}]}{|\mathrm{A}|}$$

Ortogonal Matris

$$[A] = [A]^{-1}$$

Matrislerde Toplama ve Çıkarma

• Aynı boyuttaki matrislerin toplanması aynı konumdaki elemanların toplanması ile gerçekleştirilir.

• Matrislerin çarpımı, birinci matrisin satır elemanlarıyla ikinci matrisin sütun elemanlarını çarparak elde edilir.

• A[i,j] ile B[m,n] matrislerinin çarpma işleminin gerçekleşmesi için (j=m) olmalıdır.

• Matrislerde bölme işlemi yoktur. Ancak matris herhangi bir sayıya bölünebilir.

ELEMENTER (TEMEL) SATIR İŞLEMLERİ

Denklem sistemlerinin matris ile çözümünde kullanılır

$x + 3y - z = 10$
$3x - y + 2z = 5$
$x + 5y - 2z = -3$

Genişletilmiş (augmented) katsayılar matrisi haline getirelim

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemlerini çözerken matrisler üzerinde yapmamıza izin verilen işlemler vardır ki bu işlemlere elementer satır işlemleri denir

Elementer satır işlemleri nedir?

I. Genişletilmiş matris içerisindeki istediğimiz satırı istediğimiz sayı ile çarpabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \qquad 2 * S1 \rightarrow S1 \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{|} & \mathbf{20} \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

II. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde iki satırın yeri değiştirilebilir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \qquad S1 \Leftrightarrow S2 \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

III. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde bir satır diğer bir satıra eklenebilir veya bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenebilir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

S1 +S2 → S1

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 15 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 12 & 6 & 3 & | & 45 \end{bmatrix}$$

3*S1 → S3

Orijinal matris ile genişletilmiş ve üzerine elementer satır işlemi yapılmış matrislerin çözümleri aynıdır.

MATRİSİN TERSİNİN (İNVERSİNİN) ALINMASI

$$[A][I] \xrightarrow{\text{Elementer işlemler}} [I][A]^{-1}$$

Verilen matris (A) ve Birim Matris (I) üzerinde aynı elementer satır işlemleri yapılarak:

- A matrisi Birim Matris haline
- Birim Matriste A matrisinin tersine dönüştürülür.

Not:

- Sadece kare matrislerin tersi alınır.
- Her kare matrisin tersi olmayabilir. (A matrisini Birim Matris haline getirmeye çalışırken, bir satır tamamiyle 0 oluyorsa tersi alınamaz)
- Matrisimiz kare değilse, tersini alma işleminden önce ön işlem uygulanması gerekir.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

3. olarak 0 yapmalıyız. 2. satır.

1. olarak 0 yapılmak. 1. satır.

2. olarak köşegendekiler 1 yapılmak.

Not : Matrisin (1,1) gözündeki değer 0 olmamalıdır. Sıfır ise, ilk olarak sıfırdan kurtarmaktır. Bu sebeple satırların yerlerinin değiştirilmesi gerekirdi.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3S_1+S_2 \rightarrow S_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2 \rightarrow S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2S_2+S_1 \rightarrow S_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kare Olmayan Matrislerin Tersi Nasıl Bulunur

1.durum Satır sayısı > Sütun sayısı

$A^{-1}.A = I$
$A.A^{-1} = I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

1.adım: $A^T.A = C$ matrisi elde edilir. nxn bir kare matris olur.

2.adım $C^{-1}.A^T = A^{-L}$ (soldan ters)

Yani $A^{-L}.A = I$ verir.

2.durum Sütun sayısı > Satır sayısı

1.adım $A.A^T = C \rightarrow$ nxn kare bir matris

2.adım C^{-1} bulunur.

3.adım $A^T.C^{-1} = A^{-R}$

GAUSS JORDAN Eleminasyon Yöntemi İle Matrisin Tersini Bulma

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. İşlem

1.satırı a_{11}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. İşlem

*2.satırdan $-(a_{21}$ * 1.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. İşlem

*3.satırdan – (a_{31} * 1.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. İşlem

2.satırı a_{22}'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. İşlem

*1.satırdan – (a_{12} * 2.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,11 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,22 & -0,11 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. İşlem

3.satırdan – (A_{32} * 2.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1{,}11 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 5{,}88 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}22 & -0{,}11 & 0 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}27 & -0{,}62 & 1 \end{bmatrix}$$

7. İşlem

3.satırı A_{33} 'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1{,}11 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}22 & -0{,}11 & 0 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

8. İşlem

1.satırdan – (A_{13} * 3.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}19 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

9. İşlem

2.satırdan - (a_{22} * 3.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,16 & -0,23 & 0,19 \\ -0,02 & 0,36 & -0,13 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,23 & 0,19 \\ -0,02 & 0,36 & -0,13 \\ -0,05 & -0,11 & 0,17 \end{bmatrix}$$

LİNEER DENKLEM TAKIMLARI

Genel olarak bir lineer denklem takımı ***n*** bilinmeyenli ***m*** adet denklemden oluşur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m$$

A X = C   şeklinde gösterebiliriz.

Verilen denklem takımında **C** vektörü **sıfır** ise denklem takımı ***Homojen Denklem Takımı*** sıfırdan farklı olması halinde ***Homojen Olmayan Denklem*** Takımı adını alır.

Homojen Olmayan Denklem Takımlarını çözümü için kullanılan yöntemler ikiye ayrılır.

- Dolaysız (direct)
- Dolaylı (indirect)

A. Dolaysız Yöntemler

1. Cramer Yöntemi
2. Yok Etme (Eleminasyon) Yöntemi
    a. Gauss Eleminasyon Yöntemi
    b. Gauss-Jordan Yöntemi
3. Yoğunlaştırılmış Yok Etme Yöntemi(Compact Elimination)
    a. Cholesky Yöntemi

B. Dolaylı Yöntemler

1. Jacobi Yöntemi
2. Gauss-Seidel Yöntemi

Dolaysız Yöntemler

CRAMER Yöntemi

- Verilen denklem takımı [A] [X] = [C] formuna getirilir
- Az sayıda denklemden oluşan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c1 & a12 & a13 \\ c2 & a22 & a23 \\ c3 & a32 & a33 \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a11 & c1 & a13 \\ a21 & c2 & a23 \\ a31 & c3 & a33 \end{bmatrix}}{|A|} \qquad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a11 & a12 & c1 \\ a21 & a22 & c2 \\ a31 & a32 & c3 \end{bmatrix}}{|A|}$$

Örnek

2x1 – 3x2 + 2x3 = -11
x1 + x2 – 2x3 = 8
3x1 – 2x2 – x3 = -1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

|A|= 2(-1-4) +3(-1+6)+2(-2-3) = -5

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{-5} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{-5} \quad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}}{-5}$$

$X_1 = 1$ $X_2 = 3$ $X_3 = -2$

Dolaysız Yöntemler

Yoketme (Elemination) Yöntemleri

Lineer Denklem Sistemlerini çözer

Her Lineer Denklem Sistemini Çözer mi?

Denklem Sayısı = Bilinmeyen Sayısı

- Denklem sistemi genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazılır
- Elementer satır işlemleri uygulanır
- Katsayılar matrisi **üst üçgen matris** haline getirilir

Neden üst üçgen matris haline getirilir ?

Gauss Yoketme (Elemination) Yöntemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, xj = ci \qquad (i = 1,2,3, \dots n)$$

Denklem takımı üst üçgen matris haline getirilmek için bir seri işlem yapılır

$$\begin{aligned}
a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \dots + a_{1n}'x_n &= c_1' \\
a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \dots + a_{2n}'x_n &= c_2' \\
a_{33}'x_3 + \dots + a_{3n}'x_n &= c_3' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{nn}'x_n &= c_n'
\end{aligned}$$

En sondaki denklemden başlayarak geriye doğru işlem yapılır

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Örnek

3,6 x + 2,4 y - 1,8 z = 6,3
4,2 x - 5,8 y + 2,1 z = 7,5
0,8 x + 3,5 y + 6,5 z = 3,7

Verilen denklem sistemini Gauss Eleminasyon yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 2,4 & -1,8 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

1 . İşlem

1.satırı a_{11}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

2.İşlem

2.satırı a_{21}'e böl, 2.satırdan 1.satırı çıkar ve 2.satırı a_{21} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & -8,6 & 4,2 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 0,15 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

3.İşlem

3.satırı a_{31}'e böl, 3.satırdan 1.satırı çıkar ve 3.satırı a_{31} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & -8{,}6 & 4{,}2 \\ 0 & 2{,}966 & 6{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}15 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$$

4.İşlem

2.satırı a_{22}'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 2{,}966 & 6{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$$

5.İşlem

3.satırı a_{32}'ye böl, 3.satırdan 2.satırı çıkar ve 3.satırı a_{32} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 0 & 8{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}35 \end{bmatrix}$$

6.İşlem

3.satırı a_{33}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,81 \end{bmatrix}$$

Kökleri geriye doğru hesaplayacak olursak:

$$x_i = \frac{1}{aii}\left[c_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, xj\right]$$

k= 1,2,...n
i=n-k+1

z = 0,281
y = 0,120
x = 1,81

Gauss Jordan Yöntemi

- Gauss Eleminasyon yöntemine benzer
- Katsayılar matrisi üst üçgen matris haline getirildikten sonra bu yöntem ile devam edilir
- Bu yöntemde, üst üçgen matris **birim matris** haline getirilir

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

1.adım

α_{23} sıfırlayalım

2. satırdaki α_{23}, a_{33} ile çarpılır ve α_{23} 'den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} - a_{33}.\alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_{2-\beta_3}\alpha_{23} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

2.adım

α_{13} sıfırlayalım

α_{13} a_{33} ile çarpılır ve α_{13}, den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır.

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} & \alpha_{13-a33}\alpha_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 - \beta_3\alpha_{13} \\ \gamma_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1{}^{*} \\ \gamma_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

3.adım

α_{12} a_{22} ile çarpılır ve α_{12} den çıkarılır.
Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} - a_{22}\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 * -\gamma_2\alpha_{12} \\ \gamma_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3\end{bmatrix}$$

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \; - 1 * (-0,5) \\ 0 & 1 & -0,489 \; - 1(-0,489) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \; - (-0,5) * 0,281 \\ -0,017 \; - (-0,489) * 0,281 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,89 \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 - 0,667 * 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,89 - (0,12 * 0,667) \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,81 \\ 0,12 \\ 0,281 \end{bmatrix}$$

z = 0,281
y = 0,120
x = 1,81

Dolaysız Yöntemler

Yoğunlaştırılmış Yoketme Yöntemleri

CHOLESKY Yöntemi

- Lineer Denklem Sistemlerini çözer
- Katsayılar matrisi biri alt üst üçgen diğeri üst üçgen olan iki ayrı matrise ayrıştırılır

$$[A]\,[X] = [C]$$

Lower   Upper

$$[L][U][X] = [C]$$
$$[U][X] = [Y]$$
$$[L][Y] = [C]$$

[A] = [L][U]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[L] ve [U] çarparsak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix}$$

$L_{11} = a_{11}$
$L_{11}U_{12} = a_{12}$
$L_{11}U_{13} = a_{13}$

$U_{12} = a_{12}/a_{11}$
$U_{13} = a_{13}/a_{11}$

$L_{21} = a_{21}$
$L_{21}U_{12} + L_{22} = a_{22}$
$L_{21}U_{13} + L_{22}\, U_{23} = a_{23}$

$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$
$U_{23} = (a_{23} - a_{21}\, a_{13}/a_{11})/(a_{22} - a_{21}\, a_{12}/a_{11})$

$L_{31} = a_{31}$
$L_{31}U_{12} + L_{32} = a_{32}$
$L_{31}U_{13} + L_{32}\, U_{23} + L_{33} = a_{33}$

U ve L matrisinin elemanları bulunduktan sonra

[L][Y] = [C]   Y çözülür
[U][X] = [Y]   X çözülür

Örnek

3,6 x + 2,4 y - 1,8 z = 6,3
4,2 x - 5,8 y + 2,1 z = 7,5
0,8 x + 3,5 y + 6,5 z = 3,7 Denklem sistemini Cholesky yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3{,}6 & 2{,}4 & -1{,}8 \\ 4{,}2 & -5{,}8 & 2{,}1 \\ 0{,}8 & 3{,}5 & 6{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L_{11} = 3,6
$L_{11}U_{12}$ = 2,4
$L_{11}U_{13}$ = $-1{,}8$
U_{12} = 0,67
U_{13} = $-0{,}5$

$L_{21} = 4{,}2$
$L_{21}U_{12} + L_{22} = -5{,}8$ L_{22} = -8,6
$L_{21}U_{13} + L_{22}\,U_{23} = -2{,}1 - 8{,}6U_{23} = 2{,}1$ $U_{23} = 0{,}49$

L_{31} = 0,8
$L_{31}U_{12} + L_{32} = 3{,}5$ $L_{32} = 2{,}96$
$L_{31}U_{13} + L_{32}\,U_{23} + L_{33} = -0{,}4 - 1{,}45 + L_{33} = 6{,}5$ L_{33} = 8,4

[L][Y] = [C]   Y çözülür

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 0 & 0 \\ 4,2 & -8,6 & 0 \\ 0,8 & 2,96 & 8,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

y1 = 1,75
y2 = -0,02
y3= 1,4 - 0,059 + 8,4y3 = 3,7
y3=0,28

[U][X] = [Y]   X çözülür

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,67 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,49 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,02 \\ 0,28 \end{bmatrix}$$

x3 = 0,28

x2 -0,49*0,28 = -0,02
x2= 0,12

x1 + 0,08 – 0,14 = 1,75
x1 = 1,81

Dolaylı Yöntemler

1- Jacobi İterasyon Yöntemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
\qquad [A]\,[X] = [C]
$$

1. Adım

- A matrisinde diyagonelde yer alan katsayıların mutlak değerce çarpımı maksimum olmalıdır. Gerekiyorsa elementer satır değiştirme işlemleri yapılmalıdır
- Kısaca, her sütunda mutlak değerce en büyük sayı köşegene getirilmelidir

2. Adım

- Tüm denklemler yazıldıktan sonra birinci denklemden x_1, ikinci denklemden x_2, n. denklemden x_n çekilerek yalnız bırakılır

3.Adım

- Verilen ilk değerler ile iterasyon işlemi başlatır. Tüm bilinmeyenler için ardışık iki kök değeri arasındaki mutlak değerce fark verilen hatadan küçük oluncaya kadar işleme devam edilir
- Her iterasyon adımı, **bir önceki iterasyonun değerini kullanır**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = c_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

$$\boxed{x_1 = [c_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)] / a_{11}}$$

$$\boxed{x_2 = [c_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)] / a_{22}}$$

$$\boxed{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$\boxed{x_n = [c_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn-1}x_{n-1})] / a_{mn}}$$

Örnek Verilmiş olan denklem takımını Jacobi İterasyon yöntemi ile çözünüz. x,y ve z için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

1.Adım

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$3x + y - 2z = 9$$
$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$x = (9 - y + 2z) / 3$$
$$y = (-8 + x + 3z) / 4$$
$$z = (1 - x + y) / 4$$

$$x = y = z = 1$$

İterasyon	x	|Δx|	y	|Δy|	z	|Δz|
1	1	-	1	-	1	-
2	3,333	2,333	-1,000	2,000	0,250	0,750
3	3,5	0,167	-0,979	0,021	-0,833	1,083
4	2,771	0,729	-1,750	0,771	-0,870	0,036
5	3,003	0,233	-1,960	0,210	-0,880	0,010
6	3,006	0,063	-1,909	0,050	-0,991	0,111
7	2,976	0,090	-1,976	0,067	-0,994	0,003
8	2,996	0,020	-2,001	0,025	-0,988	0,006
9	3,008	0,012	-1,992	0,009	-0,999	0,011
10	2,998	0,011	-1,997	0,005	-1,000	0,001
11	2,999	0,001	-2,001	0,003	-0,999	0,001
12	3,001	0,002	-1,999	0,001	-1,000	0,001
13	3,00	0,001	-2,000	-0,001	-1,000	0,000

$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$

Dolaylı Yöntemler

2- Gauss Seidel İterasyon Yöntemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

$$[A]\,[X] = [C]$$

- Jacobi İterasyon yöntemi gibi, linner denklem sistemlerinin çözümünde sayısal yöntemler yaklaşımıdır
- İterasyon adımına kadar her şet Jacabi İterasyon yöntemi ile aynıdır
- Her iterasyon adımında her değişken için bulunan en son değer kullanılır
- Jacobi İterasyon yöntemine göre daha hızlı sonuç alınır

Örnek Verilmiş olan denklem takımını Gauss Seidel İterasyon yöntemi ile çözünüz. x, y ve z için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$3x + y - 2z = 9$$
$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$x = (9 - y + 2z) / 3$$
$$y = (-8 + x + 3z) / 4$$
$$z = (1 - x + y) / 4$$

İterasyon	x	|Δx|	y	|Δy|	z	|Δz|
1	1	-	1	-	1	-
2	3,330	2,333	-0,417	1,417	-0,688	1,688
3	2,680	0,348	-1,845	1,428	-0,882	0,194
4	3,027	0,346	-1,904	0,059	-0,983	0,101
5	2,979	0,048	-1,992	0,088	-0,983	0,010
6	3,002	0,023	-1,994	0,002	-0,999	0,006
7	2,999	0,003	-2,000	0,006	-1,000	0,001
8	3,000	0,001	-2,000	0,000	-1,000	0,000
9	3,000	0,000	-2,000	0,000	-1,000	0,000

$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$

DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

İki Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y) = 0$ ve $g(x,y) = 0$ için öyle bir x ve y değeri bulmalıyız ki her iki denklemi de sağlamalıdır.

Tek değişkenli sistemlerde olduğu gibi Taylor serisini açalım

$x=x_0+h$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)*h/1! + f''(x_0)*h^2/2! + ...$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \ldots$$

$$g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \ldots$$

İkinci mertebeden türev dahil sağdaki tüm terimler atılarak denklem 0 eşitlenir.

İki Değişkenli Eşitlikler

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$x_{n+1} = x_n + \Delta x$

$y_{n+1} = y_n + \Delta y$

$| x_{n+1} - x_n |, | y_{n+1} - y_n | < \text{hata}$

Üç Değişkenli Eşitlikler

f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0   ve v(x,y,z) için öyle bir x, y ve z değeri bulmalıyız ki her üç denklemi de sağlamalıdır.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0,z_0) \\ -g(x_0,y_0,z_0) \\ -v(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$$

Örnek

$x^2 + y - 3 = 0$
$x + y^2 - 5 = 0$

$X_0 = 0,7$ ve $y_0 = 1,7$ alarak 0,08 hata ile doğrusal olmayan denklem takımını çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,4 & 1 \\ 1 & 3,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0,81 \\ -1,41 \end{bmatrix}$$

$\Delta x = 0,31$ $\Delta y = 0,38$
$x = 1,01$ $y = 2,08$

$$\begin{bmatrix} 2,02 & 1 \\ 1 & 4,16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0,10 \\ -0,34 \end{bmatrix}$$

$\Delta x = -0,01$ $\Delta y = -0,08$
$x = 1$ $y = 2$