Pınar Albayrak
3. Uygulama

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin toplamı?

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

↓ Türev

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

↓ x ile çarp

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

$x=\frac{1}{2}$ ise $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{\underline{2}}$

(*) $I=\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ için bir kuvvet serisi temsili bulunuz.

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$

$$I = \int_0^x \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\right)}{t^2}\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2!}-\frac{t^2}{4!}+\frac{t^4}{6!}-\cdots\right)dt$$

$$= \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3.4!} + \frac{t^5}{5.6!} - \cdots \Big|_0^x = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3.4!} + \frac{x^5}{5.6!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+2)!}$$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık aralığını bulup bu seri yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x \to x^2$ yaz

$\frac{1}{1-x^2}$ $\sum x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\frac{x}{1-x^2}$ $\sum x^{2n+1}$

$\downarrow$ x ile çarp

$(2n+1).x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

$\downarrow$ Türev al

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).x^{2n}=\frac{1-x^2+2x.x}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad (-1<x<1)}$$

* $\frac{5}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{16}^{4}}{9}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}=\frac{20}{9}$$

(*) da $x=\frac{1}{2}$ yazarsak

$\frac{20}{9}$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}.x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.x$ $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$ $\boxed{-e<x<e}$

Kök Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.|x|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}}.|x|=\frac{|x|}{e}<1$$

$\frac{|x|}{e}<1$ $|x|<e$

$\Downarrow$

$|x|<e$

$\Downarrow$

Yakınsaklık Yarıçapı $=R=e$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, x^{n+2}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x^2$ ile çarp

$$\frac{1}{1-x} \qquad \frac{x^2}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} \qquad (-1<x<1)$$

x^{n+2}

$\downarrow$ Türev al

$(n+2)\, x^{n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^{n+1} = \frac{2x.(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1)$$

$\downarrow x$ ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, x^{n+2} = \frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1)}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{x+2}{3}\right) \text{ Geometrik Seri}$$

$\left(\frac{x+2}{3}\right)^n$

$r = \frac{x+2}{3}$ $a = \frac{x+2}{3}$

Bu seri $|r| = \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1$ için yani $|x+2|<3 \Rightarrow \boxed{-5<x<1}$ için yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{x+2}{1-x} \qquad (-5<x<1)$$

$\left|\frac{x+2}{3}\right| < 1$

$-3 < x+2 < 3$

$-5 < x < 1$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{x+2}{1-x} \qquad (-5<x<1)}$$

$\circledast$ $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili elde ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$\downarrow$ Türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow$ x ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)}$$

$\circledast$ $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ için bir kuvvet serisi temsili ve geçerli olduğu aralığı bulunuz.

$\star$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$\downarrow x \to -x-1$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n \quad (|-x-1|<1 \Rightarrow |x+1|<1)$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.(1+x)^n \quad (|x+1|<1)$$

$\downarrow$ Türev

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.n.(1+x)^{n-1} \quad (|x+1|<1)$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.n.(1+x)^{n-1} \quad (-2<x<0)$$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos n\pi$ serisinin yakınsaklığını araştırınız. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^{n-1} \qquad \left.\begin{matrix} a=1 \\ r=-\frac{1}{e}\end{matrix}\right\} \text{Geometrik Seri}$$

$$(-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$|r|=\frac{1}{e}<1$ olduğundan seri yakınsaktır.

$$\text{Toplamı} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{e})} = \frac{e}{e+1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{e}} \qquad 1 \quad -\frac{1}{e} \quad \frac{1}{e^2} \qquad \frac{e}{e+1}$$

(*) $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)\,x^{k+3}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$(k+2)(k+1)\,x^{k+3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)\,x^{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\,x^{k+3}$$

$$x^{n+2} \qquad \frac{x^2}{1-x}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$(n+2)(n+1)$

↓ x^2 ile çarp

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad (-1<x<1)$$

↓ Türev al

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,x^{k+1} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

↓ Türev

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\,x^{k} = \frac{2}{(1-x)} \quad (-1<x<1)$$

↓ x^3 ile çarp

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\,x^{k+3} = \frac{2x^3}{(1-x)} \quad (-1<x<1)}$$

⊗ $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ için kuvvet seri temsili bulunuz.

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots \Rightarrow e^{-t^2} = 1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\cdots$$

$$\Rightarrow 1-e^{-t^2} = t^2-\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}+\cdots$$

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \int_0^x \frac{t^2-\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}\cdots}{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{3!}-\frac{t^6}{4!}+\cdots\right)dt$$

$$= t-\frac{t^3}{3.2!}+\frac{t^5}{5.3!}-\frac{t^7}{7.4!}+\cdots\Big|_0^x = x-\frac{x^3}{3.2!}+\frac{x^5}{5.3!}-\frac{x^7}{7.4!}+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(n+1)!}$$

⊗ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^2}$ limitini seri açılımları yardımıyla hesaplayın.

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}\cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{3!}\cdots\right)}_{0} = 0$$

(*) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\text{Arctan}x^2}\right)$ limitini seri açılımları ile hesaplayın.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\text{Arctan}x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{Arctan}x^2}{x(x+\text{Arctan}x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\dots}{x^2+x\left(x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\dots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}(1-\overbrace{\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^8-\dots}^{0})}{\cancel{x^2}(1+\underbrace{x-\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{5}x^9+\dots}_{0})}=\underline{\underline{1}}$$

(*) $\ln x$ fonksiyonunun Taylor polinomunun ilk 4 terimini kullanarak $\ln(1{,}2)$ için yaklaşık bir değer bulun.

$f(x)=\ln x$ $\quad a=1$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f(1)=0$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\quad f'(1)=1$

$\quad f''(1)=-1$

$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1)=2$

$$f(x)\approx f(1)+f'(1).(x-1)+f''(1).\frac{(x-1)^2}{2!}+f'''(1).\frac{(x-1)^3}{3!}=P_3(x)$$

$$f(1{,}2)=\ln(1{,}2)\approx 0+1.(1{,}2-1)+(-1).\frac{(1{,}2-1)^2}{2}+2.\frac{(1{,}2-1)^3}{3!}=0{,}2-\frac{1}{2}.(0{,}2)^2+\frac{(0{,}2)^3}{3!}$$

$$=\underline{0{,}182}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ limitini kuvvet serilerini kullanarak hesaplayınız.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots$ $\qquad e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^5}{5!} + \cdots$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \cancel{2x}}{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{3!} + \overbrace{\frac{2x^2}{5!} + \cdots}^{0}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{x^2}{5!} + \cdots}_{0}\right)} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $y = xe^{-x}$ fonksiyonunun seriye açılımından yararlanarak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!}$ alterne serisinin toplamını bulunuz.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \cdots$

$y = x \cdot e^{-x} = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} - \dfrac{x^4}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n!}$

$x = 2$ alırsak

$2 \cdot e^{-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} \Rightarrow \boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} = \dfrac{2}{e^2}}$