Bölüm 2

Mantık ve İspatlar

(Logic and Proofs)

Mantık (Logic)

İspatla kullanırız

- Mantık (Logic) = doğru çıkarımı elde etme çalışmasıdır

- Mantığın kullanımı
  - Matematikte kullanımı:
    - Teoremleri ispatlamak
  - Bilgisayar Bilimlerinde kullanımı:
    - Programların kendilerinden beklenen sonucu üretip üretmediğinin kontrolüdür

Önermeler (Propositions)

- Sonucu doğru (true) veya yanlış (false) olan ifadelere proposition (önerme) denir.

↳ hüküm önermesi gerekir

- Örnekler:
  - “Cüneyt programcıdır" bu bir önermedir
  - “Keşke bilge kişi olsaydım” bu bir önerme değildir

4 farklı durum oluşur

p : öğ. devamsızlığı 20'den az → T / F

q : öğ. dönem sonu notu 40'dan yüksek → T / F

Birleştiriciler (Connectives)

Önermeleri (propositions) göstermek için p,q,r,s,t,... gibi değişkenler kullanılır.

En çok kullanılan birleştiriciler:

Conjunction AND	Sembol ^
Inclusive disjunction OR	Sembol v
Exclusive disjunction OR	Sembol $\underline{v}$
Negation	Sembol ~
Implication	Sembol $\rightarrow$
Double implication	Sembol $\leftrightarrow$

AND (conjunction) doğruluk tablosu

- p ve q bir önerme ise, conjunction (p ^ q) veya (p and q) olarak gösterilir
- *Conjunction* doğruluk tablosu

p	q	p ^ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

And'de sadece 2'si doğruysa doğru olur

- Sadece p ve q nun her ikisinin de doğru olduğu durumda p ^ q doğrudur

p = “kaplan vahşi bir hayvandır” q = “balina bir sürüngendir”
p ^ q = " kaplan vahşi bir hayvandır **and** balina bir sürüngendir " Yanlış

OR (disjunction) doğruluk tablosu

- p ve q bir önerme ise, *disjunction* (p v q) veya (p or q) olarak gösterilir
  - *Disjunction* doğruluk tablosu

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Sadece p ve q nun her ikisinin de yanlış olduğu durumda $p \vee q$ yanlıştır
  - Örnek: p = “Cüneyt programcıdır", q = “Zeynep avukattır"
  - p v q = " Cüneyt programcıdır or Zeynep avukattır " Doğru

Exclusive disjunction OR(XOR)

- p ve q bir önerme ise, *exclusive disjunction OR* (xor) $p \veebar q$ olarak gösterilir
- *Exclusive disjunction* doğruluk tablosu

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Sadece p doğru ve q yanlış ise, veya p yanlış ve q doğru ise $p \veebar q$ doğrudur
- Örnek: p = “Cüneyt programcıdır”, q = “Zeynep avukattır“
- $p \veebar q$ = “Ne Cüneyt programcıdır ne de Zeynep avukattır   Yanlış

Tersi (Negation)

- p’ nin tersi: ~p veya p’ ile gösterilir

p	**~p**
T	F
F	T

p doğru iken ~p yanlıştır

p yanlış iken ~p doğrudur

- Örnek: p = “Cüneyt programcıdır"

  ~p = “Cüneyt programcı değildir"

Birden Fazla Önermenin Birleştirilmesi

- p, q, r basit önermeler olsun
- Birleştirilmiş ifadeleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz
  - $(p \vee q) \wedge r$
  - $p \vee (q \wedge r)$
  - $(\sim p) \vee (\sim q)$
  - $(p \vee q) \wedge (\sim r)$
  - ve diğer durumlar…

Örnek: $(p \vee q) \wedge r$ nin doğruluk tablosu

p	**q**	**r**	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Şartlı Önermeler ve Mantıksal Denklik (Conditional Propositions and Logical Equivalence)

- Şartlı önerme (*conditional* proposition)

  "If p then q"

şeklinde gösterilir

- Sembolü: $p \rightarrow q$
- Örnek:
  - p = " Cüneyt programcıdır"
  - q = " Zeynep avukattır "
  - $p \rightarrow q$ = "If Cüneyt programcıdır then Zeynep avukattır Doğru

$p \rightarrow q$ ‘nun Doğruluk Tablosu

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p' \vee q = p \rightarrow q$

- Sadece p ve q ‘nun her ikiside doğru veya p’nin yanlış olduğu durumlarda $p \rightarrow q$ önermesi doğrudur

Hipotez ve Sonuç (Hypothesis and conclusion)

- $p \rightarrow q$ şartlı önermesinde

  p *antecedent* veya *hypothesis*

  q *consequent* or *conclusion*

olarak adlandırılır.

- “if p then q" mantıksal olarak "p only if q“ ile aynıdır

Gereklilik ve Yeterlilik (Necessary and Sufficient)

- Gerekli şart (*necessary condition*) sonuç (*conclusion*) tarafından ifade edilir
- Yeterli şart (*sufficient condition*) hipotez (*hypothesis*) tarafından ifade edilir

  - Örnek:

    If Cüneyt programcıdır *then* Zeynep avukattır"
  - Necessary condition: “Zeynep avukattır”
  - Sufficient condition: “Cüneyt programcıdır”

Mantıksal Denklik (Logical Equivalence)

- Doğruluk tablosundaki değerleri aynı olan iki önerme için aralarında mantıksal denklik vardır denir

p	q	$\sim p \vee q$	$p \to q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Örnek: $\sim p \vee q$ önermesi $p \to q$ ile *logically equivalent* ‘dır. Yani aralarında mantıksal denklik vardır

Yer değiştirme (Converse)

- $p \rightarrow q$'nun *converse* $q \rightarrow p$ dir

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

- Bu iki önerme arasında mantıksal denklik mevcut değildir (<u>not</u> logically equivalent)

Contrapositive (Devrik)

- $p \rightarrow q$ önermesinin *contrapositive* $\sim q \rightarrow \sim p$ şeklinde gösterilir

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\sim q \rightarrow \sim p$**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Bu önermeler logically equivalent'dır

Çift Yönlü Önerme (Biconditional Proposition)

- Çift Yönlü önerme (*biconditional proposition)* “p if and only if q” olarak tanımlanır

  $p \leftrightarrow q$ sembolü ile gösterilir

p	**q**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

- $p \leftrightarrow q$, $(p \rightarrow q)\wedge(q \rightarrow p)$ ‘nun logically equivalent’dır

Totoloji-Tutarlılık (Tautology)

- Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için doğru sonuç (true) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *tautology* ‘dir
- Örnek: $p \rightarrow p \vee q$

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow p \vee q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Çelişki (Contradiction)

- Eğer doğruluk tablosunda önermelerin her bir durumu için yanlış sonuç (false) elde edilmiş ise, birleştirilmiş önerme (*compound proposition*) bir *contradiction* ‘dır

- Örnek: p ^ ~p

p	p ^ (~p)
T	F
F	F

De Morgan Kanunu

- Aşağıdaki önerme çiftleri birbirleri ile mantıksal olarak denktir
  - $\sim (p \vee q) \rightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
  - $\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

Nicelikler (Quantifiers)

- **P(x)**, *x* değişkeni ile ilişkili bir önerme olsun

  Örneğin, P(x): 2x çift tamsayı

- *D*'de içerisindeki her *x* değeri için, P(x)'i önerme yapan bir küme olsun

  Örneğin: *x,* tamsayılar kümesinin bir elemanıdır

- *D*, P(x)'nin ayrıntılı bilgi alanı (domain of discourse) olarak adlandırılır

- *D’*deki her *x* değeri, *P(x)’i* sonucu doğru veya yanlış olan bir önerme yapar

  Örneğin: P(n): n^2+2n tek sayıdır

  D kümesi pozitif tam sayılardan oluşsun

  if *n* tek sayı then n^2+2n tek sayıdır

  if *n* çift sayı then n^2+2n tek sayı değildir

- Bu sınıftakiler 18 yaşından büyüktür

  D kümesi, sınıftaki öğrenciler olsun

  Öğrencilerin bazıları önermeyi doğru, bazıları da yanlış yapar

Her ve Bazı (For every and for some)

- Matematik ve Bilgisayar Bilimlerindeki çoğu ifadede *for every* ve *for some* kullanılır

- Örneğin:
  - *For every* triangle T, the sum of the angles of T is 180 degrees.

Evrensel/Genel Niteliyiciler (Universal Quantifier)

Bilgi

- The *universal quantification* of P(x) is the proposition "P(x) is true for all values of x in the universe of discourse."

  P(x) önermesi, *D* kümesi içerisindeki her x değeri için doğru olmalıdır.

  $\forall x\ P(x)$ veya

  for all x *P(x)* veya

  for every x *P(x)* şeklinde yazılır

- En az bir *x* değeri için doğru değilse, P(x) yanlış olur

"Every student in this class has studied calculus"

P(x)→ "x has studied calculus"

$\forall x\ P(x)$

Bilgi

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – x_1, x_2,...,x_n – it follows that the universal quantification $\forall x$ *P(x)* is the same as the conjunction

$P(x_1) \Lambda P(x_2) \Lambda \ldots \Lambda P(x_n)$,

since the conjunction is true if and only

if $P(x_1)$, $P(x_2)$,...,$P(x_n)$ are all true.

Önerme fonksiyonun doğruluğu

- $\forall x\, P(x)$ ifadesi
  - Doğrudur. Eğer P(x) doğruysa for every $x \in D$
  - Yanlıştır. Eğer P(x) doğru değilse for some $x \in D$

- Örneğin: P(n) propositional bir fonksiyon

  ve *P(n): $n^2 + 2n$* tek bir sayıdır.

  $\forall n \in D = \{$bütün tam sayılar$\}$

- P(n) sadece *n* tek sayı olduğunda doğrudur.

  P(n) *n* çift sayı ise yanlıştır

- For every real number *x*, $x^2 \geq 0$ TRUE
- For every real number *x*, if $x > 1$ then $x+1>1$ TRUE
- For every real number *x*, if $x \geq 0$ then $x+1>1$ FALSE
- For every positive integer *n*, if n is even then n^2+n+19 prime FALSE

Soru : Verilen cümleyi mantıksal ifadeler ile yazısınız.

'You can not ride the roller coaster if you are under 4 feet tall unless you are older than 16 years old'

q : you can ride the roller coaster
r : you are under 4 feet tall
s : you are older than 16 years old

$(r \wedge \sim s) \rightarrow \sim q$

$(\sim r \vee s) \rightarrow q$

Varoluşsal Niteleyiciler (Existential Quantifier)

- The *existential quantification* of P(x) is the proposition "There exists an element x in the universe of discourse such that P(x) is true"

P(x) önermesi, *D* kümesi içerisindeki en az bir x değeri için doğru olmalıdır.

$\exists x\ P(x)$ veya
"There is an x such that P(x)" veya
"There is at least one x such that P(x)"

şeklinde yazılır.

Bilgi

When all of the elements in the universe of discourse can be listed – x_1, x_2,...,x_n – the existential quantification $\exists x$ $P(x)$ is the same as the disjunction

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n),$$

since this disjunction is true if and only if at least one of $P(x_1)$, $P(x_2)$,...,$P(x_n)$ is true.

- For some real number *x*, $x/(x^2+1) = 2/5$ TRUE

- For some positive integer *n*, if n is prime then n+1, n+2, n+3 and n+4 are not prime TRUE n=23

Translating Sentences into Logical Expressions

Cümlemiz **“Everyone has exactly one best friend”** olarak verilmiş olsun.

B(x,y) ifadesi “*y* is the best friend of *x*”.

Cümlemiz ne diyor ?

for every person *x* there is another person *y* such that *y* is the best friend of *x*

and that if *z* is a person other than *y*, then *z* is not the best friend of *x*.

Cümleyi mantıksal ifadeler ile yazalım

$$\forall x \exists y \forall z \left(B(x,y) \wedge \left((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z) \right) \right)$$

Cümlemiz **“If somebody is female and is a parent, then this person is someone’s mother”** olarak verilsin.

F(x) ifadesi “*x* is female”,

P(x) ifadesi “x is a parent”, ve

M(x,y) ifadesi de “*x* is the mother of *y*” olsun.

Cümlemizi matematiksel ifadeler ile yazalım.

$$\forall x\Big(\big(F(x) \wedge P(x)\big) \rightarrow \exists y M(x, y)\Big)$$

Counterexample

- Eğer $\exists x \in D$, P(x)'i yanlış yaparsa universal statement $\forall x$ P(x)'de yanlış olur

- $\forall x$ P(x) ifadesindeki, P(x) yanlış yapan *x* değeri *counterexample* olarak adlandırılır
  - Örnek: P(x) = "her x değeri bir asal sayıdır", for every tamsayı x.
  - Fakat eğer x = 4 (bir tamsayı) bu *x* sayısı asal sayı değildir. Öyleyse 4 değeri bir counterexample olup P(x)'i yanlış yapar

Lojik için Genelleştirilmiş De Morgan Kanunu

$\sim(\forall x \ \ P(x)) \rightarrow \exists x \sim P(x)$

$\sim(\exists x \ \ P(x)) \rightarrow \forall x \sim P(x)$

“Every student in the class has taken a course in calculus”

$\forall x\ P(x)$,

P(x) : “*x* has taken a course in calculus”

~P(x) : **“It is not the case that every student in the class has taken a course in calculus”**

Sınıftaki her öğrencinin kalkülüs dersi alması söz konusu değildir

$\sim\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$

“There is a student in the class who has not taken a course in calculus”.

Sınıfta kalkülüs dersi almamış öğrenci var

“There is a student in this class who has taken a course in calculus”.

$\exists x\ Q(x)$

$Q(x)$: “***x*** **has taken a course in calculus**”

$\sim Q(x)$: **“It is not the case that there is a student in this class who has taken a course in calculus**”

Bu sınıfta kalkülüs dersi almış bir öğrenci olması söz konusu değildir

$\forall x \sim Q(x)$

“**Every student in this class has not taken calculus**”

Negating Quantifiers			
Negation	***Equivalent Statement***	***When is negation true?***	***When false?***
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) is false for every *x*	There is an x for which P(x) true
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which P(x) is false	P(x) is true for every *x*

İspatlar (Proofs)

- Bir matematik sistemi
  - Tanımlanmamış terimler (Undefined terms)
  - Tanımlar (Definitions)
  - Aksiyomlar (Axioms)

Tanımlanmamış Terimler (Undefined Terms)

- *Tanımlanmamış terimler* bir matematik sisteminin temel taşını oluşturur. Bu terimler bir matematiksel sistemin başlangıç kavramları olarak da kabul edilebilir.
  - Örnek: Euclidean geometride tanımlanmamış terimler
    - Nokta (Point)
    - Doğru (Line)

Tanımlar (Definitions)

- *Tanım* (*definition),* yeni bir kavram yaratmak amacıyla önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir proposition oluşturmaktır

Örnek: Euclidean geometrideki tanımlar:

- Eğer iki üçgenin karşılıklı kenarları ve açıları birbirinin aynı ise bu iki üçgen eş üçgendir
- İki açının toplamı 180 derece ise bu açılara birbirini tamamlayan açılar denir

Aksiyomlar (Axioms)

- Aksiyom (*axiom),* matematiksel bir sistem içerisinde ispat yapmaksızın doğru kabul edilen proposition'dır

- Matematikteki aksiyomlara örnek:
  - Örnek: Euclidean geometrideki aksiyomlar
    - İki nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan geçen bir doğru her zaman mevcuttur.
    - Bir doğru ve doğru üzerinde yer almayan bir nokta mevcut olsun. Bu noktadan geçen doğruların bir tanesi verilen doğruya mutlaka paraleldir.

Teoremler (Theorems)

- *Teorem*, Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve *p* nin doğru olduğunu farzederek doğruluğu önerilebilen $p \rightarrow q$ formundaki proposition'a denir

İspat Çeşitleri

- *İspat (proof),* Teoremin doğruluğunu belirlemek için önermeleri kullanan bir seri işlemden oluşan mantıksal çıkarımdır

- *Doğrudan ispat (Direct* proof): $p \rightarrow q$
  - *q* önermesinin doğruluğunu elde etmek amacıyla ispatlanmış teoremleri, aksiyomları ve *p* önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmadır

- *Dolaylı/Olmayana Ergi ispat (Indirect* proof): $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
  - $p \rightarrow q$ önermesinin çelişkisinden çözüme ulaşmaktır

Doğrudan İspat

$p \rightarrow q$ durumunda kullanılır.

p'nin doğru olduğu kabul edilerek, çıkarım kuralları kullanılarak, q'nun da doğru olduğu gösterilir.

$$\underbrace{\text{n tek sayı ise,}}_{p}\quad \underbrace{n^2\ \text{tektir}}_{q}$$

$$\underbrace{\text{m ve n çift sayı ise,}}_{p}\quad \underbrace{\text{m+n çifttir}}_{q}$$

Not : p önermesi n, m gibi sade eşitlikler olmalıdır.
n^2, m+n gibi durumlarda doğrudan ispat yapılmaz.

Adımlar:

1. $p \rightarrow q$ için p doğru kabul edilir
2. q önermesinin doğruluğu gösterilmeye çalışılır
3. $p \rightarrow q$ nun doğruluğu söylenir

Örnek

n çift sayı ise n^2 de çift sayıdır önermesini ispat ediniz.

1. $n=2k$, $k \in Z$ doğru kabul edilir
2. $n^2=4k^2= 2(2k^2)$

$P \in Z$, $p=2k^2$ için, $n^2=2p$ olur

3. $n^2=2p$ bir çift sayı formunda olduğundan n^2 de çift sayıdır

Not : m+n çift sayı ise, m ve n çift sayıdır önermesi
doğrudan ispat yöntemi ile ispat edilemez

Dolaylı İspat / Olmayan Ergi / Indirect İspat

$p \rightarrow q$ durumlarında doğrudan ispat ile ispatın mümkün olmadığı durumlarda dolaylı ispat kullanılır

Örnek

$\underbrace{n^2 \text{ tek sayı ise,}}_{p} \quad \underbrace{n \text{ tektir}}_{q}$

$\underbrace{m+n \text{ tek sayı ise,}}_{p} \quad \underbrace{m \text{ ve } n \text{ tektir}}_{q}$

Bir önermenin $p \rightarrow q$ karşıt tersi (contrapositive) karşılığı bulunur ve bu karşılık doğrudan ispat ile elde edilir

$p \rightarrow q$ için 'contrapositive' **q'** $\rightarrow$ **p'** alınır ve doğrudan ispat yapılır

Örnek

n^2 tek sayı ise n′ de tek sayıdır önermesini ispat ediniz.

p: n^2 tek sayıdır p′: n^2 çift sayıdır
q: n tek sayıdır q′: n çift sayıdır

Önermenin yeni hali: '**n çift sayı ise n^2 çift sayıdır**'

Yeni önermeyi doğrudan ispat ile ispatlayalım

1. n çift sayı ise n^2 çift sayıdır
2. $n=2k$, $k \in Z$ doğru kabul edilir
3. $n^2=(2k)^2= 4k^2$

$u \in Z$, $u=2k^2$ için, $n^2=4k^2=2*2k^2=2u$ olur

Karşıt tersi doğru olunca, kendisi de doğrudur.
n^2 tek sayı ise n′ de tek sayıdır

Örnek

n bir tam sayı ve 3n+2 tek ise, n'nin tek olduğunu ispatlayınız

---

Önce doğrudan ispat yapalım:

3n+2 tek sayı ise, her hangi bir ***k*** tam sayısı için 3n+2 = 2***k***+1

3n+2 = 2***k***+1
3n+1 = 2***k*** olduğunu görüyoruz, fakat *n* değerinin tek olduğunu gösteremeyiz

Şimdi de dolaylı ispat yapalım:

n çift ise, 3n+2' de çift sayıdır

Her hangi bir ***k*** tam sayısı çift n= 2k ise 3n+2 = 3(2***k)***+2 çift sayıdır

3n+2 = 6k + 2 = 2(3k+1) olur, bu da bize 3n+2'nin çift sayı olduğunu söyler

Koşullu önermenin sonucunun negatifi, hipotezin yanlış olduğunu gerektirdiği için orijinal koşullu önerme doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarma (Tümevarımsal ispat / Mathematical induction)

- $\forall$ n $\in$ A, S(n) formundaki ifadenin ispatına bakalım

  * N, pozitif tamsayılar veya doğal sayılardan oluşan bir küme

  * A, N'nin bir alt kümesi

  * S(n) de bir önerme olsun

Genel olarak özdeşliklerin ispatında kullanılır

- Her pozitif tamsayının, S(n) önermesini doğru veya yanlış yaptığını farzedelim
  - 1. S(1) doğru olduğunu teyit et (ilk eleman ile)
  - 2. *n* keyfi seçilmiş pozitif bir tamsayı olsun

    i pozitif bir tamsayı olup, $i < n$ olarak belirle
  - 3. S(i) ‘nin doğruluğundan yola çıkarak, S(i+1)’in doğru olduğunu göster

$$S(i) \rightarrow S(i+1)$$

  - 4. Sonuç olarak, tüm pozitif tamsayılar için S(n) doğrudur

Matematiksel sonuç çıkarım: terminoloji

- *Temel adım (basis step):*

  S(1) ‘in doğruluğunun gösterilmesi

- *Tümevarımsal adım (Inductive step):*

  S(i)’nin doğru farzedilmesi

  İspat $S(i) \rightarrow S(i+1)$

  if S(i) *is true*, *for all* $i<n+1$, *then* S(n+1) *is true*

- *Sonuç (Conclusion):*

  Bütün pozitif tamsayılar için S(n)’nin doğruluğu

Örnek

İlk *n* adet pozitif tamsayının toplamı Sn olup, Sn =1+2+3+…+n olarak gösterilsin.

Sn'nin n=1,2,3… için **Sn=** $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

1. n=1 için, 1=1(1+1)/2=1 (doğru)
2. n=2 için, 1+2 = (2*3)/2=3 (doğru)

   n=k için, 1+2+3+…+k =$\frac{k(k+1)}{2}$ (doğru kabul edilir)
3. n=k+1 için,

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ Doğrudur

Örnek

İlk ***n*** adet pozitif tek sayının toplamı $\mathbf{n^2}$ olduğunu ispatlayınız.

$S_n = 1+3+5+ \ldots \mathbf{=} n^2$

1. $n=1$ için, $1=1^2=1$ (doğru)
2. $n=2$ için, $1+3 = 2^2=4$ (doğru)
   $n=k$ için, $1+3+5+\ldots+(2k-1)=\boldsymbol{k}^2$ (doğru kabul edilir)
3. $n=k+1$ için,

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\boldsymbol{k}^2}+(2(k+1)-1)=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^2$$

$$\boldsymbol{k}^2 + (2k+1) = \boldsymbol{k}^2 + 2k + 1$$ Doğrudur

Örnek

n pozitif tamsayı iken $(n^3\text{-}n)$'nin 3'e tam olarak bölünebildiğini ispatlayınız.

$S_n = (n^3-n) / 3 = mod((n^3-n),3) = 0$

1. n=1 için, $1^3 - 1=0$ (0/3 = 0 doğru)

1. n=2 için, (8-2)/3 = 6/3 = 2 (tam bölünüyor)

   n=k için, $(k^3\text{-}k) / 3$ (tam olarak bölündüğü kabul edilir)

3. n=k+1 için,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^3-(k+1) &= (\boldsymbol{k}^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 + 3k^2 + 3k - k + 1 - 1) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 - k) + (3k^2 + 3k) = (\boldsymbol{k}^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\
&= (\boldsymbol{k}^3 - k) + 3(k^2 + k)
\end{aligned}
$$

Her ikisi de 3'e bölünebiliyorsa Doğrudur