Sinyaller ve Sistemler
İkinci Vize Çalışması

18.05.2024

Fourier Series:

* x(t) işaretini bilinen işaretler cinsinden yazmak için kullanılır.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \Phi_k) \Big\} \text{decomposition}$$

* Bu işaretlere x(t)'nin harmoniği denir.

f_0 = fundamental freq. $\quad f_k = k \cdot f_0 \quad f=0$ ise DC

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi \underbrace{k f_0}_{\text{harmonik frek.}} t + \Phi_k)$$

$f_0 = OBEB(f_1, f_2, f_3 \dots f_n)$

* Zamana göre bu frek. değişebilir.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j(2\pi k / T_0)t}\, dt \Big\} \text{fourier serisi integrali}$$

$e^{jw} = \cos w + j \sin w$ } euler formülü

* Fourier serisi alabilmek için bir T boyunca işlem yapılmalıdır. Bu yüzden fourier serisi periyodik işaretlerde yapılır. Periyodik olmayan işaretlerde fourier transformu yapılır.

* Frekansın genliğe göre değişimi bulunmuş olur.

$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$

$e^{-jwt} = \cos(wt) - j\sin(wt)$

$$\frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} = \underbrace{\cos(wt)}_{\text{reel}} \qquad \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} = \underbrace{\sin(wt)}_{\text{imajinel}}$$

* Doppler Radar sinyali eksi frekanslı sinyallere örnektir.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} Re\{X_k e^{j2\pi f_k t}\}$$

$X_k = A_k e^{j\Phi_k} \quad Re\{z\} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} z^*$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \left\{\frac{1}{2} X_k e^{j2\pi f_k t} + \frac{1}{2} X_k^* e^{-j2\pi f_k t}\right\}$$

NOT: Pek çok durumda dif. denk. ile çözüm yapmak fourier'den daha zordur.

- fundamental freq. (f_0)
- Amplitudes (A_k)
- Phases (Φ_k)

} bu bileşenlerle hesap yapılır.

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k w_0 t + \Phi_k)$$

Complex Exponential Form

$x(t) = A_0 + A_1\cos(1w_0 t + \Phi_1) + A_2\cos(2w_0 t + \Phi_2)$
→ Amp. phase form

euler formülü $\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right]$

$$x(t) = A_0 + \Big(\underbrace{\frac{A_1}{2} e^{j\Phi_1}}_{c_1} e^{j1w_0 t} + \underbrace{\frac{A_1}{2} e^{-j\Phi_1}}_{c_{-1}} e^{-j1w_0 t}\Big)$$

$$+ \Big(\underbrace{\frac{A_2}{2} e^{j\Phi_2}}_{c_2} e^{j2w_0 t} + \underbrace{\frac{A_2}{2} e^{-j\Phi_2}}_{c_{-2}} e^{-j2w_0 t}\Big)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$
→ complex exp. form

$$x(t) = A_0 + \Big(\underbrace{A_1\cos\Phi_1}_{a_1} \cos(1w_0 t) \underbrace{- A_1\sin\Phi_1}_{b_1} \sin(1w_0 t)\Big)$$

$$+ \Big(\underbrace{A_2\cos\Phi_2}_{a_2} \cos(2w_0 t) \underbrace{- A_2\sin\Phi_2}_{b_2} \sin(2w_0 t)\Big)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k w_0 t) + b_k \sin(k w_0 t)\right]$$
→ sine-cosine form

exp → sine-cosine *

$a_0 = c_0$
$a_k = 2Re\{c_k\} \qquad b_k = -2\,Im\{c_k\}$

amp. → sine-cosine

$a_0 = c_0 = A_0$
$a_k = A_k\cos(\Phi_k)$
$b_k = -A_k\sin(\Phi_k)$

*Fourier serisi katsayılarını bulmak için aşağıdaki denklem kullanılır. (exp. form'da)

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

T=periyot
$\omega_0 = 2\pi f_0$ → fund. frekans
t_0=herhangi bir an
$K=(-\infty,\infty)$ hepsi

$k=0$'da $\left\{ C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \right\}$ DC offset değeri

* sine-cosine bulmak için:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt \quad \Big\}\ DC$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

NOT: işaret çift sinyalse cos bileşenleri mevcuttur. Bu yüzden;
$b_k=0$ $\quad C_k$=are real $\quad \theta_k = \pm\pi$

NOT: işaret tek sinyalse cos bileşeni olmaz sin bileşeni olur. Bu yüzden
$a_k=0$ $\quad C_k$ are Imag. $\quad \theta_k = \pm\pi/2$, $k\neq 0$

Fourier Series Spectrum

*Neg. ve poz. frekanslar için çizilebilir.
*freq-amp. olabilir, phase-freq. spektrum olabilir. (A_k, θ_k gerekir)

NOT: Neg. frekanslar grafikte çizilmez. Single sided spectrum denir. (Trig. spectrum)

$k=0,1,\ldots$

* Eğer neg. frek. değerleri de çizilmek istenirse double sided denir. (Exp. spectrum)
$k=(-\infty,\infty)$

* $|C_k|$ ve $\angle C_k$ gerekir.
$|C_k|$ → y eksenine göre simetrik
$\angle C_k$ → orijine göre simetrik

NOT: En yüksek genlik düşük frekanslarda olur.

Fourier Transform:

*Periyodik olmayan sinyallerin hesaplanmasında kullanılır.

zaman domain'i:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$X(\omega)$ → C_k gibi $\quad e^{j\omega t}$ → $e^{jk\omega_0 t}$ gibi

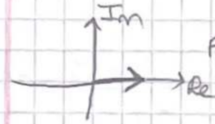
*Fourier integrali ya da ters fourier dönüşümü olarak adlandırılır.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

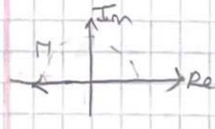
frekans domain'i

NOT: $X(\omega)$ complex bir fonk.
$|X(\omega)|$ $\quad \angle X(\omega)$

$\left.\begin{array}{l} x(t) \rightarrow X(\omega) \\ x(t) \rightarrow X(f) \end{array}\right\}$ dönüşüm gösterimleri



positive real number
$|R|=R$ $\quad \angle R=0$



neg. real number
$|R|=-R$ $\quad \angle R=\pm\pi$

NOT: $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$ sönümlenerek gider.

$-\infty < t < \infty,\ 1$	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
$-0.5 + u(t)$	$1/j\omega$
$\delta(t)$	$1,\ -\infty < \omega < \infty$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0),\ \omega_0$ real
$\sin(\omega_0 t)x(t)$	$\frac{j}{2}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)x(t)$	$\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)]$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega),\ n = 1,2,3,\dots$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(t-c) = X(\omega)e^{-jc\omega} \\ x(at) = \frac{1}{|a|}X(\omega/a) \\ x(-t) = X(-\omega) \end{cases}$$

$e^{-bt}u(t),\ b>0 \qquad \frac{1}{j\omega+b},\ b>0$

Sampling and Aliasing

$$\underbrace{\hat{\omega}}_{\text{dijital frek.}} = \omega T_s = \underbrace{\frac{2\pi f}{f_s}}_{\text{normalized freq.}} + \underbrace{2\pi l}_{\text{aliasing}}$$

Uniform Sampling:

$t = n.T_s = \frac{n}{f_s} \qquad x[n] = x(n.T_s) = x(n/f_s)$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \rightarrow x[n] = x(nT_s)$

$x[n] = A\cos(\omega n T_s + \phi) = A\cos((\omega T_s)n + \phi)$

$x[n] = A\cos(\hat{\omega}n + \phi)$

$0 \leq \hat{\omega} \leq 2\pi \qquad 0 \leq f \leq f_s$

Laplace

$e^{-j\omega t} \Rightarrow e^{-\overbrace{(\sigma+j\omega)}^{s}t} = e^{-st} \qquad s = \underbrace{\sigma}_{R} + \underbrace{j\omega}_{Im}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x(t)\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = X(s)$$

* $\sigma = 0$ ise LT=FT

NOT: Eğer hem LT hem FT olduğundan eminsek LT'deki s yerine $j\omega$ yazarak işlemsiz FT düzlemine geçebiliriz.

ROC özellikler:
- Eğer ROC $j\omega$ eksenini kapsarsa FT vardır.
- $s=-a$ için sonuç sonsuzdur. Buna sistemin kutbu denir. X
- LT'de payı sıfır yapan değerler sistemin zero'sudur. O
- Eğer $x(t)$ sağ taraflı ise ROC en büyük kutbun sağındadır.
- " sol " " " en küçük kutbun solundadır.
- ROC pole içermez, zero içerebilir.

NOT: $x(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s)$

NOT: $\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s)$

NOT: $\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$

$x(at) \qquad \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$

$t^n x(t) \qquad (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$

$e^{at}x(t)$ $\quad X(s-a)$

$x(t)\sin(\omega_0 t)$ $\quad \frac{j}{2}\left[X(s+j\omega_0)-X(s-j\omega_0)\right]$

$x(t)\cos(\omega_0 t)$ $\quad \frac{j}{2}\left[X(s+j\omega_0)+X(s-j\omega_0)\right]$

NOT: $x(t)*h(t) \leftrightarrow X(s)\,H(s)$

transfer func.

NOT: Transfer function is a generalization of freq. response ($H(\omega)$)

$\mathcal{L}\{a\}$ $\quad a/s$

$\mathcal{L}\{t^n\}$ $\quad n!/s^{n+1}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\}$ $\quad 1/(s-a)$

$\mathcal{L}\{\sin(at)\}$ $\quad \frac{a}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{\cos(at)\}$ $\quad \frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}.t^n\}$ $\quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{e^{bt}\sin(at)\}$ $\quad \frac{a}{(s-b)^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{e^{bt}\cos(at)\}$ $\quad \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$

$\mathcal{L}\{t^n.\sin(at)\}$ $\quad \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right).(-1)^n$

NOT: Bu kurallar ters laplace için tersten geçerlidir. ($\mathcal{L}^{-1}\{a/s\}=a$)

$\mathcal{L}\{f^{n}(t)\}$ (türev) $\quad s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\ldots-f^{(n-1)}(0)$

NOT: Sistemin sağ yarı düzleminde kutup varsa sistem kararsızdır.

NOT: ROC $j\omega$ eksenini kapsıyorsa BIBO kararlıdır.

NOT: pole $j\omega$ eksenine yaklaştıkça $H(s)$ etkisi fazla old. için daha keskin çıkışlar olur.