(*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1)\ln n}$ serisinin karakteri?

$$\frac{n}{(n-1)\ln n} < \frac{n}{\ln n}$$

(1) Mutlak Yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1)\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)\ln n}$ yakınsak mı? $\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\frac{n}{(n-1)\ln n} > \frac{n}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

Harmonik Seri Iraksak

Mukayese testine göre $\sum \frac{n}{(n-1)\ln n}$ de ıraksak.

Dolayısıyla $\sum (-1)^n \frac{n}{(n-1)\ln n}$ mutlak yak. değil.

(2) Şartlı Yakınsak mı? $a_n = \frac{n}{(n-1)\ln n}$

a) $a_n > 0$ ✓

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^2-1)\ln n}{n^2 \ln(n+1)} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(n-1)\ln n} = 0$ ✓

Alterne Seri Testine göre seri şartlı yakınsaktır.

(*) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ olarak verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sin n}{n}$ 0

yakınsak

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1$ Oran Testine göre Seri yakınsaktır

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ karakteri? $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $e^{-1} = \frac{1}{e}$ yakınsak

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ Kök testine göre seri yakınsak

---

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ karakteri? $\frac{1}{\ln n}$ yak

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\ln n} = 0 < 1$ Kök testine göre yakınsak. $\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakteri? $\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$ olduğundan Limit testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum \frac{n}{n^3+1}$ yakınsak dolayısıyla $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ mutlak yakınsaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ karakteri? $\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $[2,\infty)$ da sürekli ✓ pozitif ✓ azalan ✓

İntegral testi uygulanabilir.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln x) \Big|_2^R \right] = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$ ıraksak olduğundan seri de ıraksak

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ıraksak $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ mutlak yakınsak değil.

Ancak Alterne seri testinin 3 koşulu da sağlandığından

$\left(\frac{1}{n \ln n}\right.$ pozitif, azalan, $\left.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0\right)$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ şartlı yakınsak seridir

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ serisinin karakteri?

1) $|a_n| = \frac{2n-1}{\sqrt{n}.(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçelim. $p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0,\infty$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ yakınsak değil.

Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ mutlak yak. değil.

(2) Şartlı Yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} > 0$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}.n}}{\frac{2n-1}{\sqrt{n}.(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} < 1$

$a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} = 0$

olduğundan Alterne Seri Testine göre $\sum (-1)^n . \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ şartlı yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}}_{1} \cdot |x-1| = |x-1| < 1 \Rightarrow \boxed{0<x<2}$$

Mutlak Yak.

$x=2$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ seçelim. $p=\frac{3}{4}<1$ ıraksaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = 1 \neq 0, \infty$$ iki seri aynı karakterli.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ de ıraksak

$x=0$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ $\Rightarrow$ Seri mutlak yakınsak değildir.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} = 0$ ✓ ② $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}$ $(a_{n+1} < a_n)$ ✓

③ $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > 0$ ①, ② ve ③'den seri şartlı yakınsak

Seri:

$0<x<2$ için mutlak yakınsak
$x=0$ " şartlı yakınsak
$\}$ $[0,2) \to$ yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [0,2)$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \cdot (2x-3)^k$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır? Yakınsaklık Aralığı?

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{k+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k\cdot\sqrt{k^2+1}}{(2x-3)^k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k\cdot\sqrt{k^2+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}}}_{1} \cdot |2x-3| = |2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

Mutlak Yak.

<u>x=1 için</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ seçelim, } p=2>1 \text{ yakınsak} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k^2}} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ de yakınsak.

$\Downarrow$

$\boxed{x=1}$ ✓ (Mutlak Yak.

<u>x = 2 için</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \text{ yakınsak olduğundan}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \text{ mutlak yakınsaktır.}$$

$\boxed{x=2}$ ✓ (Mutlak Yak.)

Seri ;

$1 \leq x \leq 2$ için mutlak yakınsaktır.

Şartlı yakınsak olduğu bir x değeri yoktur.

} [1,2] yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [1,2]$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n \cdot n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Seri hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksaktır?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1}}{3^{n+1}.(n+1)} \cdot \frac{3^n . n}{(2x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot |2x-3| = \frac{|2x-3|}{3} < 1$$

$$\frac{|2x-3|}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow \boxed{0 < x < 3}$$ Mutlak Yakınsak.

x=3 için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n . n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$$ Harmonik Seri

Iraksak

x=0 için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n . n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$$ Alterne Harmonik Seri

Şartlı Yakınsak

Seri;

$0<x<3$ için Mutlak Yakınsak
$x=0$ " Şartlı Yakınsak

} $x \in [0,3)$ de yakınsak

⇓

Yakınsaklık Aralığı

‖

$[0,3)$

$x \in \mathbb{R}-[0,3)$ için ıraksaktır

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\ln n}$ serisinin yakınsaklık aralığı, mutlak / şartlı yak. olduğu x' değerleri ?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1).\ln(n+1)} \cdot \frac{n.\ln n}{(x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} \cdot |x-2|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{1} \cdot |x-2| < 1 \Rightarrow \boxed{1<x<3}$$

Mutlak Y.

x = 3 için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \Rightarrow$$

① $f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0$ ($x \in [2,\infty)$ için)

② $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x} < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan

③ $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $[2,\infty)$ da sürekli

} integral testi uygulanabilir ✓

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^R = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)}_{\infty} = \infty$$

⇓
integral ıraksak
⇓
Seri ıraksak

x = 1 için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n} \Rightarrow \text{Mutlak Yak. değildir.}$$

① $a_n = \frac{1}{n\ln n} > 0$ ② $a_{n+1} < a_n$? $\frac{1}{(1+n)\ln(n+1)} < \frac{1}{n\ln n}$ ✓ ③ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$ ✓

Alterne Seri Testine göre seri şartlı yakınsaktır.

Seri:

$1<x<3$ için Mutlak Yak.
$x=1$ için Şartlı Yak.
} $[1,3)$ için yakınsak (Yak. Aralığı)

$x \in \mathbb{R} - [1,3)$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \cdot \ln k}{(3-2x)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)}}_{1} \cdot |3-2x| = |3-2x| < 1$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{1 < x < 2}$ M.Yak.

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \right)$$

x=1 için

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ seçelim. } p=2>1 \text{ yakınsak}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre; $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ yak. olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ de yakınsak

x=2 için

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ yakınsak olduğundan } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k}$$

mutlak yak.

Sonuç:

$1 \le x \le 2$ için mutlak yak.

Serinin şartlı yak. olduğu x değeri yok

$\Big\}$ $[1,2]$ yak. aralığı

$x \in \mathbb{R} - [1,2]$ için ıraksak

(x) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3+2^n}$ serisinin mutlak / şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3+2^{n+1}} \cdot \frac{3+2^n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}(\overset{0}{\frac{3}{2^n}}+1)}{\cancel{2^n}(\underset{0}{\frac{3}{2^n}}+2)} \cdot |x|$$

$$= \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow \boxed{-2<x<2}$$

M.Y.

x=2 için

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}^{\,1}}{\cancel{2^n}(\underset{0}{\frac{3}{2^n}}+1)} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ n. Terim Testine göre seri ıraksak

x=-2 için

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ Alterne seri testine göre seri ıraksaktır.

Mutlak yakınsak: $-2<x<2$
Şartlı " : yok

$(-2,2) \to$ yakınsaklık aralığı

Iraksak: $\mathbb{R}-(-2,2)$