# MATRİSLER

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

3.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Matrisler, geometride, fizikte, kinematikte, animasyon teknolojisinde ve mühendisliğin birçok alanında çok sık kullanılan önemli bir kavramdır. Bir önceki bölümde, lineer denklem sistemlerinin çözümünde işlemlerimizi nasıl kolaylaştırdığını gördük. Lineer denklem sistemlerini matrislerdeki cebirsel işlemleri kullanarak da çözebiliriz. **Bunun için matrislerde,**

**toplama, skalerle çarpma, iki matrisi çarpma**

**gibi cebirsel işlemleri tanımlayarak, bir matrisin tersini bulup, bir lineer denklem sisteminin nasıl çözeceğimizi inceleyeceğiz.** Bir önceki bölümde de bahsettiğimiz gibi, sayılarla oluşturulan dikdörtgensel bir tabloya **matris** denir. Bu tablodaki sayılar belirli bir sayı kümesine aittir. Matrisin elemanları[1], genellikle reel sayılar ve karmaşık sayılardan oluşur. Elemanların hangi sayı kümesi olduğu belirtilmemişse, reel sayılar kümesine ait olduğu anlaşılır.

[1]Matrisin elemanları en genel anlamda bir Halka'nın elemanlarıdır. "Halka" matematikte özel bir tanımdır ve belirli bazı özellikleri olan kümelerdir. Daha detaylı bilgiyi Soyut Cebir kitaplarından öğrenebilirsiniz.

# Matris

**Tanım**

$\mathcal{F}$ bir sayı kümesi olmak üzere, $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için, $a_{ij} \in \mathcal{F}$ elemanlarıyla oluşturulan, $m \cdot n$ elemanlı

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde $m \times n$ türünde (tipinde) bir **matris** denir. Bu matris kısaca,

$$\left[a_{ij}\right], i = 1, 2, ..., m ve j = 1, 2, ..., n \qquad veya \qquad \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

şeklinde gösterilebilir. Matrisler genel olarak $A, B, C$ şeklinde büyük harfler ile gösterilir.

# Matrisin Satırları veya Sütunları

## Tanım

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $n-$lilerine bu **matrisin satırları** ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad ve \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $m-$lilerine de bu **matrisin sütunları veya kolonları** denir. Genel olarak, $m$ satır ve $n$ sütunlu, ve elemanları $\mathcal{F}$ kümesinden alınan matrislerin kümesi, $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_n^m$ veya $\mathcal{F}_{m \times n}$ ile gösterilir.

## Örnek

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 3/4 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}), \quad B=\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

$$C=\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}), \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 3/5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}).$$

Matrisin elemanlarını indislerle net olarak belirtebiliriz. Örneğin, yukarıdaki matrisler için elemanlar aşağıdaki gibi belirtilebilir. $a_{21}=0$, $a_{11}=\pi$, $b_{23}=\overline{3}$, $c_{12}=i$, $d_{21}=3/5$.

# Matris Çeşitleri

**Tanım**

**1. Sıfır Matrisi :** Tüm elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. 0 ile gösterilir.
Örneğin, $0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi $2\times 3$ türünden sıfır matrisidir.

**Tanım**

**2. Kare Matris :** Satır ve sütun sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi $n\times n$ türünden bir kare matristir. Bir kare matrisde, $a_{ii}$ elemanlarının bulunduğu köşegene, matrisin **asal köşegeni** denilir. Yani, matrisin $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegendir.

## Tanım

**3. Köşegen matris :** Bir kare matrisin asal köşegeni hariç tüm elemanları sıfır ise, bu matrise köşegen matris denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Tanım

**4. Birim Matris :** Bir köşegen matrisin tüm elemanları 1 ise bu matrise **birim matris** denir. $n \times n$ türünden birim matris $I_n$ ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisi, $n \times n$ türünden birim matristir.

## Tanım

**4. Üçgen matris :** Bir kare matrisin asal köşegeninin üstündeki veya altındaki elemanların tamamı sıfır ise bu matrise üçgen matris denir. Eğer köşegenin üstündeki elemanlar sıfır ise, **alt üçgensel,** altındaki elemanlar sıfır ise de **üst üçgensel matris** denir.

Yani, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde her $i<j$ için $a_{ij}=0$ ise $A$ matrisine alt üçgensel matris, her $i>j$ için $a_{ij}=0$ ise $A$ matrisine **üst üçgensel matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla üst üçgensel ve alt üçgensel matrislerdir.

# İki Matrisin Toplamı

**Tanım**

Aynı türden iki matrisi toplayabiliriz. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ise, $A$ ve $B$ matrislerinin toplamı

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

olur.

**Özelikleri :** $A, B, C$ matrisleri, $m \times n$ türünden matrisler ve $r, s \in \mathbb{R}$ olsun.

**i)** $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Birleşme Özeliği)

**ii)** $A + B = B + A$ (Değişme Özeliği)

**iii)** $A + 0 = A$ (Etkisiz Eleman)

**iv)** $A + (-1)A = 0$ (Ters Eleman)

## Bir Matrisin Skalerle Çarpımı

### Tanım

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $A$ matrisinin $\lambda$ sayısıyla çarpımı

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m\times n} = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } 4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

olur.

**Özelikleri :**

**i)** $r \in \mathbb{R}$ için, $r(A+B) = rA + rB$

**ii)** $(r+s)A = rA + sA$

**iii)** $(rs)A = r(sA)$

**iv)** $1 \cdot A = A$

# Eşit Matrisler

**Tanım**

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrisleri verilsin. Eğer, her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her $i, j$ için,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

ise, $A$ ve $B$ matrislerine eşit matrislerdir denir.

# İki Matrisin Çarpımı

**Tanım**

$A = [a_{ij}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ olsun. Elemanları,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ matrisine **A ile B matrisinin çarpımı** denir ve bu matris $AB$ şeklinde gösterilir.

Tanımdan da görüldüğü gibi, iki matrisin çarpılabilmesi için, birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. $A$ ve $B$ matrislerinin $AB$ çarpımı mümkün ise, $A$ ve $B$ matrislerine $AB$ sırasında, çarpılabilir matrisler denir. $AB$ çarpımının mümkün olması $BA$ çarpımının mümkün olmasını gerektirmez. $m \times n$ ve $n \times k$ türünden iki matrisin çarpımı $m \times k$ türünden bir matristir.

## Örnek

**$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix}$ matrislerini çarpalım.**

## Çözüm

*$A$ matrisinin sütun sayısı, $B$ matrisinin satır sayısına eşit olduğundan, $AB$ çarpımı mümkündür ve $2 \times 3$ türünden bir matristir. Fakat, $B$ matrisinin sütun sayısı, $A$ matrisinin satır sayısına eşit olmadığından, $BA$ çarpımı mümkün değildir. Tanım kullanılırsa*

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

## Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } \mathbf{AB} = ?$$

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **ve** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **ise** $\mathbf{AB} = ?$

## Problem

*Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.*

**a)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = ?$

## Problem

**c)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$

**d)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = ?$

# Matris Çarpımının Özellikleri

**Teorem**

*$A$, $m \times p$ türünden, $B$, $p \times q$ türünden ve $C$, $q \times n$ türünden birer matris olsunlar. Aşağıdaki özellikler sağlanır*
*i) $(AB)C = A(BC)$ eşitliği sağlanır. (Birleşme Özelliği)*
*ii) $A(B + C) = AB + AC$ özelliği sağlanır. (Dağılma Özelliği)*
*iii) $r, s \in R$ olsun. Bu durumda, $(rA)(sB) = (rs)AB$ özelliği sağlanır.*

**NOT :** Matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. $AB \neq BA$ 'dır.
Eğer $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa $A$ ve $B$ matrisleri **değişmelidir** denir. Matrislerde değişme özelliği olmadığından,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

yazılması doğru değildir. Doğrusu : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ olacaktır.

## Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre,* $A^{100}$ *matrisini hesaplayınız.*

## Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre,* $A^{100}$ *matrisini hesaplayınız.*

## Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ **matrisi için** $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$ **olduğunu kanıtlayınız.**

## Çözüm

*Kanıtımızı tümevarımla yapabiliriz. İddia $k = 1$ için doğrudur. $k$ için doğru olduğunu kabul ederek, $k + 1$ için de doğru olduğunu görelim.*

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{k+1} \end{bmatrix}$$

*olduğundan $k + 1$ için de doğrudur. O halde, her $k \in \mathbb{N}$ için iddiamız doğrudur.*

# Bir Matrisin Transpozesi

## Tanım

Bir matrisin satır ve sütunlarını değiştirerek elde edilen matrise o matrisin **transpozesi** denilir ve bir $A$ matrisinin transpozesi $A^T$ ile gösterilir.
Buna göre, bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin transpozesi $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ şeklinde olacaktır.
$(A^t)_{ij} = a_{ji}$ yazabiliriz.

## Örnek

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -7 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi için

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

# Bir Matrisin Transpozesinin Özellikleri

## Teorem

*$A = [a_{ik}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{kj}]_{p\times n}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

*1) $(A^T)^T = A$*

*2) $(A+B)^T = A^T + B^T$*

*3) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\lambda A)^T = \lambda A^T$*

*4) $(AB)^T = B^T A^T$*

## Kanıt.

İlk üçü oldukça açıktır. Dördüncüsünü kanıtlayalım.

$$\left((AB)^t\right)_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(B^t\right)_{jk} \left(A^t\right)_{ki} = \left(B^t A^t\right)_{ji}$$

olur. Bu ise, $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu gösterir. □

# Simetrik Matris

**Tanım**

Bir matriste elemanlar asal köşegene göre simetrik ise, bu matrise **simetrik matris** denir. Devriği kendisine eşit olan matris **simetrik matristir.** Yani, $A^T = A$ ise $A$ bir simetrik matristir. Diğer bir tanımla, bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde, her $i, j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ ise $A$ matrisine **simetrik matris** denir.

**Örnek**

Örneğin,

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi bir simetrik matristir.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{n\times n} \text{ simetrik} \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \forall i, j \text{ için } a_{ij} = a_{ji} \text{ olmalıdır.}}$$

# Ters Simetrik Matris

**Tanım**

$A^T = -A$ ise, $A$ matrisine **ters simetrik matris** denir. Yani, bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde, her $i,j$ için $a_{ij} = -a_{ji}$ ise $A$ matrisine **ters simetrik matris** denir.

**Örnek**

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \text{ için, } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $A^T = -A$ olduğundan, $A$ bir ters simetrik matristir. Kısaca,

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{n\times n} \text{ ters simetrik} \Leftrightarrow A^T = -A \Leftrightarrow \forall i,j \text{ için } a_{ij} = -a_{ji} \text{ olmalıdır.}}$$

## Örnek

**Ters simetrik matrisin asal köşegenindeki elemanların 0 olduğunu kanıtlayınız.**

## Çözüm

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *matrisi ters simetrik olsun. Bu durumda,* $\forall i, j$ *için*

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

*olacaktır.* $i = j$ *alınırsa,*

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

*eşitliğinden,* $2a_{ii} = 0$ *ve* $a_{ii} = 0$ *elde edilir. Bu asal köşegendeki elemanların 0 olduğunu gösterir.*

## Problem

**a)** *$A$ matrisi ters simetrik matris ise, $A^3$ matrisinin de ters simetrik olacağını gösteriniz.*
**b)** *$A$ ve $B$ matrisleri simetrik ise, $AB$ çarpımının simetrik olmayabileceğini gösteriniz.*
**c)** *$A$ ve $B$ matrisleri ters simetrik ise, $AB$ çarpımının ters simetrik olmayabileceğini gösteriniz.*

# Hermityen Matris

## Tanım

$\overline{A}$, $A$ matrisinin elemanlarının karmaşık(kompleks) eşleniklerinin alınmasıyla elde edilen matrisi göstermek üzere, bir $A$ kare matrisi için, $A = \left(\overline{A}\right)^T$ ise, $A$ matrisine **hermitiyen matris** denir.

## Örnek

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi bir hermityen matristir. $A = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu kolayca görülebilir.

# Tersinir ve Singüler Matris

## Tanım

$A$ ve $B$, $n \times n$ türünden kare matrisler olsun. Eğer,

$$AB = BA = I$$

ise, $B$'ye $A$ matrisinin tersi $(B = A^{-1})$ ve $A$ yada $B$ matrisinin tersi $(A = B^{-1})$ denir. Bir matrisin tersi var ise, bu matrise **regüler matris** veya **tersinir matris** denir. Eğer, matrisin tersi yok ise, matrise **singüler** veya **tekil matris** denilir.

# Türünden Bir Matrisin Tersi

**Tanım**

$\triangle = ad - bc \neq 0$ ise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin tersi vardır ve

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ile bulunur. Doğruluğunu, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz. Buradaki, $\triangle = ad - bc$ değerine $A$ matrisinin determinantı denir. Determinantı ve bir matrisin tersinin bulunmasını daha sonra detaylı olarak inceleyeceğiz.

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

## Problem

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

# Matrislerin Çarpımının Tersi

**Teorem**

*$A$ ve $B$, $n \times n$ türünden kare matrisler olsun.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

*eşitliği vardır.*

**Kanıt.**

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

ve benzer şekilde,

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I_n$$

olduğundan, tanım gereği $AB$ matrisinin tersi $B^{-1}A^{-1}$ olur. Yani, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir. $\square$

# Bir matrisin tersi var ise tektir.

**Teorem**

*Bir matrisin tersi var ise tektir.*

**Kanıt.**

$A$ matrisinin tersi, hem $C$ hem de $B$ olsun. Buna göre,

$$AB = BA = I \quad ve \quad AC = CA = I$$

eşitlikleri vardır.

$$AB = I \Rightarrow C\left(AB\right) = CI = C \Rightarrow \left(CA\right)B = C \Rightarrow IB = C \;\Rightarrow B = C$$

elde edilir. Yani, iki farklı tersi olamaz. □

# Bir Matrisin Transpozesinin Tersi

**Teorem**

*$A$, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ eşitliği vardır.*

**Kanıt.**

$\left(A^T\right)\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1}\left(A^T\right) = I$ yazılabilir. Diğer yandan,

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T = I \qquad ve$$
$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = I^T = I$$

olduğundan, hem $\left(A^T\right)^{-1}$ hem de $\left(A^{-1}\right)^T$ matrisi $A^T$ matrisinin tersidir. Fakat bir matrisin tersi tek olduğundan,

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

elde edilir. $\square$

## Örnek

**Bir A matrisinin tersi varsa ve**

$$\mathbf{AB = 0}$$

**ise $\mathbf{B = 0}$ olduğunu gösteriniz.**

## Örnek

**A ve B matrisleri $n \times n$ türünden matrisler olsunlar.**

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = (\mathbf{AB})^2 = \mathbf{I}_n$$

**ise $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ olduğunu kanıtlayınız.**

## Örnek

**A regüler bir matris olmak üzere, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ ise, yani $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ ise, A matrisine <u>involutif matris</u> denir.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

**matrisinin involutif matris olduğunu gösteriniz.**

## Çözüm

*$A^2 = I$ olduğu kolayca görülebilir.*

# Ortogonal Matris

**Tanım**

Bir $A$ matrisinin tersi, transpozesine eşit ise, $A$ matrisine **ortogonal matris** denir. Yani,

$$A^{-1} = A^T$$

ise $A$ matrisine ortogonal matris denir. Bir matrisin tersini bulmadan da, ortogonal olup olmadığını kontrol edebiliriz. $A^{-1} = A^T$ eşitliğinin her iki tarafının $A$ ile çarpılmasıyla elde edilen,

$$A^T A = AA^T = I$$

eşitliği sağlanırsa, $A$ matrisi ortogonal bir matristir. Ortogonal kelimesi, geometride dik kelimesiyle eşdeğerdir. Bir matrise neden ortogonal denildiğini, dik olma anlamıyla ilişkisini iç çarpım konusunda göreceğiz.

## Örnek

**Aşağıdaki matrislerin ortogonal olup olmadıklarını kontrol ediniz.**

a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ b) $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Örnek

Her $a \in \mathbb{R}$ için $B = \dfrac{1}{1+2a^2}\begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

## Problem

**a)** $2 \times 2$ *ve* $3 \times 3$ *türünden birer ortogonal matris yazmaya çalışınız.*
**b)** $A$ *matrisi ortogonal ise tersinin de ortogonal olduğunu gösteriniz.*
**c)** $A$ *ve* $B$ *matrisleri ortogonal ise,* $AB$ *çarpımının da ortogonal olduğunu gösteriniz.*

# Matrisin İzi

## Tanım

Bir kare matrisin, asal köşegeni üzerindeki elemanların toplamına **matrisin izi** denir. **iz**$A$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbf{iz}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

şeklindedir ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

**i)** $\mathbf{iz}(A+B) = \mathbf{iz}A + \mathbf{iz}B$ **ii)** $c \in \mathbb{R}$ için, $\mathbf{iz}(cA) = c\,\mathbf{iz}A$ **iii)** $\mathbf{iz}(AB) = \mathbf{iz}(BA)$

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin izini bulunuz.**

## Çözüm

$\mathbf{iz}A = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 2 = 5$*'dir.*

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ **olmak izere AB matrisinin izini bulunuz.**

## Problem

**a)** $\mathbf{iz}\,(A+B)=\mathbf{iz}A+\mathbf{iz}B$ *olduğunu kanıtlayınız.*

**b)** $\mathbf{iz}\,(AB)\neq\mathbf{iz}A\cdot\mathbf{iz}B$ *olduğunu bir örnekle görünüz.*

# Bir Matrisin Tersinin Bulunması

Verilen $n \times n$ türünden bir matrisi,

**elemanter satır operasyonlarıyla birim matrise dönüştürebiliyorsak,**

bu matrisin bir tersi vardır.
Bu matrisin tersini ise, **aynı elemanter operasyonları** $n \times n$ **türünden birim matrise aynı şekilde uygulayarak** elde edebiliriz.

# Elemanter Satır Operasyonuna Karşılık Gelen Matris

**Tanım**

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir matris olsun. $A$ matrisine yapılan bir elemanter operayonu $(e)$ ile gösterelim. Bu elemanter işlem sonucunda elde edilen matrise $B$ diyelim. Aynı elemanter operasyonu birim matrise uyguladığımızda elde edilen matrisi de $E$ ile gösterelim. $E$ matrisine, bu **elemanter satır operasyonuna karşılık gelen matris** denir. Buna göre,

$$EA = B$$

eşitliği sağlanır.

## Örnek

Örneğin, $A=\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 1 & 1\end{array}\right]$ matrisinde $(e):(S_1 \to S_1 - S_2)$ elemanter operasyonunu uygulayalım. Bu durumda,

$$B=\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right]$$

matrisi elde edilir. Diğer yandan, aynı $(e)$ elemanter işlemini, $I_{2\times 2}=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]$ birim matrisine uygularsak,

$$E=\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right]$$

bulunur ve

$$\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 1 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right]$$

yani $EA=B$ eşitliği sağlanır. Bu yöntem, bir matrisin tersini bulmamıza olanak verir.

## Örnek

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini indirgenmiş eşelon forma getiriniz. Her bir elemanter işleme karşılık gelen matrisi bulup, bu matrislerin çarpımından yararlanarak A matrisinin tersini bulunuz.**

# Matrisin Terisinin Elemanter Operasyonlarla Bulunması

**Tanım**

Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin tersini bulmakta kullanacağımız bu yöntemi biraz daha kolaylaştırabiliriz. Bunun için, $A$ matrisinin sağ tarafına bir $I_{n\times n}$ matrisi yazılır ve böylece, $[A : I]$ biçiminde $n \times 2n$ türünden bir matris elde edilir. Bu matrisin sol tarafındaki $A$ matrisini birim matrise dönüştürmek için, $[A : I]$ matrisine elemanter satır operasyonları uygulanır. $A$ matrisi birim haline geliyorsa, tersi vardır ve sağ tarafta bulunan $I$ matrisinden elemanter satır operasyonları sonucunda elde edilen matris $A^{-1}$ matrisi olur.

Kısaca,

$$\boxed{\left[A \mid I\right] \xrightarrow[\text{yap. Bu işlemler, I matrisini de } \mathbf{A}^{-1}\text{'e dönüştürür.}]{\text{Elemanter Satır İşlemleri Uygulayarak A'yı birim}} \left[I \mid A^{-1}\right]}$$

şeklinde açıklayabiliriz. Bir önceki örneğin, bu şekilde nasıl çözüldüğünü görelim.

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}\left(\mathbb{Z}_3\right)$ **matrisinin tersi varsa bulunuz.** **(**Burada $\mathbb{Z}_3$ ile mod3 ifade edilmiştir, yani elde edilen tüm değerlerin mod3'deki eşiti yazılacaktır.)

## Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin tersi varsa bulunuz.**

## Problem

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$D=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}\in\mathbb{M}\left(\mathbb{Z}_5\right)$ *matrisini tersini bulunuz.*

## Problem

$E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}\in\mathbb{M}\left(\mathbb{Z}_3\right)$ *matrisini tersini bulunuz.*

## Problem

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$K=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

## Problem

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin tersini buunuz.*

# Katsayılar Matrisinin Tersini Kullanarak Denklem Sisteminin Çözülmesi

$x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenli, $n$ lineer denklemin oluşturduğu

$$AX = B$$

formunda bir lineer denklem sistemi verilsin. Bu durumda, $A$ matrisi $n \times n$ türünde bir kare matris olacaktır. Eğer, $A$ matrisi tersinir ise, $AX = B$ eşitliği soldan $A^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$\left(A^{-1}A\right) X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

eşitliğinden, $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenleri belirlenebilir. Ayrıca, $AX = 0$ eşitliğinde, $A$ matrisi tersinir ise tek çözüm aşikar çözümdür, yani tüm değişkenlerin sıfır olduğu çözümdür.

## Örnek

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ x+2y=2 \end{cases}$$ **denklem sistemini, katsayılar matrisinin tersini kullanarak çözünüz.**

## Problem

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$ *denklem sisteminin katsayılar matrisinin tersini bulunuz ve tersini kullanarak sistemi çözünüz.*

# Şifrelemede Matrislerin Kullanılması

Matrisler şifreleme ve kodlamada sıkça kullanılmaktadır. Aşağıda, bu şifrelemeye bir örnek vereceğiz. Örneğin, alfabemizdeki harflere ve çok sık kullandığımız bazı imla işaretlerine aşağıdaki gibi birer sayı karşılık getirelim. Böylece 37 sayı kullanmış olduk. Bu tabloyu ve tersinir bir kodlama matrisini kullanarak, bir cümleyi nasıl şifreleyebileceğimizi görelim.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **C** | **Ç** | **D** | **E** | **F** | **G** | **Ğ** | **H** | **I** | **İ** | **J** |
| 10 | 23 | 2 | 1 | 27 | 3 | 28 | 22 | 21 | 29 | 11 | 35 | 12 |
| **K** | **L** | **M** | **N** | **O** | **Ö** | **P** | **R** | **S** | **Ş** | **T** | **U** | **Ü** |
| 6 | 32 | 5 | 9 | 16 | 4 | 15 | 30 | 20 | 14 | 25 | 31 | 13 |
| **V** | **Y** | **Z** | **.** | **,** | **:** | **?** | **’** | **...** | **!** | **Boşluk** | | |
| 7 | 34 | 24 | 33 | 17 | 36 | 18 | 26 | 19 | 0 | 8 | | |

Şifrelemede, kullanacağımız kodlama matrisinin tersinir olması gerektiğine dikkat ediniz.

### Örnek

**"AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesini, yukarıdaki tabloyu ve tersinir,**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

**kodlama matrisini kullanarak şifreleyelim.**

## Örnek

Yukarıdaki sayı tablosunu ve $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ kodlama matrisini kullanarak, size gelmiş olan

**<u>RÜTİ,ISSİHOABSPET?CÖ</u>**

mesajını çözünüz.

## Örnek

$A = [a_{ij}]_{4\times 3}$ ve $B = [b_{ij}]_{3\times 5}$ matrisleri;

$$a_{ij} = (i-2j)^{i-j} \quad \text{ve} \quad b_{ij} = \frac{ij}{i+j}$$

olarak veriliyor. Buna göre, $AB = C = [c_{ij}]$ ise, $c_{41} = ?$

## Problem

**$A = [a_{ij}]_{4\times 5}$ ve $B = [b_{ij}]_{5\times 6}$ matrislerinde**

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i<j \\ 2, & i=j \\ 0, & i>j \end{cases} \quad \text{ve } b_{ij} = \begin{cases} 1, & i\neq j \\ 2, & i=j \end{cases}$$

**ise, $C = AB = [c_{ij}]_{4\times 6}$ çarpımında, $c_{34}$ elemanını hesaplayınız.**

## Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$ **olduğuna göre $\mathbf{A}^n$ matrisini hesaplayınız.**

## Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}\end{bmatrix}$$ **olduğuna göre** $\mathbf{A}^{\mathbf{n}}=\begin{bmatrix} x^{k+1} & (k+1)\,x^{k} & \frac{k(k+1)}{2}x^{k-1}\\ 0 & x^{k+1} & (k+1)\,x^{k}\\ 0 & 0 & x^{k+1}\end{bmatrix}$ **olduğunu görünüz.**

## Örnek

**A kare matrisi için, $A^{p+1} = A$ şeklinde bir $p > 0$ tamsayısı var ise, A matrisine periyodik matris denir. Bu eşitliği sağlayan en küçük p sayısına da A matrisinin periyodu denir. Buna göre,** $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ **matrisinin periyodunu bulunuz.**

## Problem

*$A^2 = A$ ise, $A$ matrisine,* **idempotent matris** *(eşkare matris) denir. Yani, periyodu 1 olan matrise idempotent matris denir. Buna göre,*

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

*matrisinin idempotent matris olduğunu gösteriniz.*

## Örnek

**Sıfır matrisinden farklı bir A kare matrisi için, $\mathbf{A^p = 0}$ olacak şekilde bir $\mathbf{p > 0}$ tamsayısı var ise, A matrisine nilpotent matris (üstel sıfır) denir. En küçük p'ye de Nilpotentlik derecesi denir. Buna göre,**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

**matrisinin nilpotent matris olduğunu gösteriniz. Nilpotentlik derecesini bulunuz.**

## Çözüm

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*olduğundan, A matrisi niloptent matristir ve nipotentlik derecesi 2'dir.*

## Problem

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ *matrisinin nilpotent matris olduğunu görünüz. Nipotentlik derecesi kaçtır?*

## Problem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin nilpotent matris olduğunu görünüz. Nipotentlik derecesi kaçtır?*

## Problem

*$A^2 = I$ ise, $A$ matrisine,* **involutif matris** *denir. $2 \times 2$ ve $3 \times 3$ türünden birer involutif matris örneği yazınız. (İnvolutif matrislerin tersi kendisine eşittir.)*

## Örnek

**$2 \times 2$ türünden, 2'inci dereceden simetrik Nilpotent matris bulunamayacağını gösteriniz.**

## Çözüm

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

*eşitliğinin* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *matrisine eşit olması için,*

$$a = b = c = 0$$

*olması gerekir.*

## Örnek

**Bir nilpotent matrisin tersinin olmadığını gösteriniz.**

## Çözüm

*Kabul edelim ki, $A$ nilpotent matris olsun, fakat $A^{-1}$ var olsun. $A$ nilpotent matris ise, $A^p = 0$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ vardır. $k$ sayısı, $A^p = 0$ şartını sağlayan en küçük doğal sayı olsun. Yani, $A$ matrisinin nilpotentlik derecesi $k$ olsun. $A^k = 0$ eşitliğini $A^{-1}$ ile çarpalım. $A^{-1}$ olduğunu kabul etmiştik. Buna göre,*

$$A^k A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{k-1}\left(AA^{-1}\right) = A^{k-1} = 0$$

*olur ki, bu $k$'nın en küçük olmasıyla çelişir. $k$'yı en küçük seçmişken, $k-1$ için de $A^{k-1} = 0$ olduğunu gördük. Bu çelişki, nilpotent matrisin tersi olduğu kabulümüzün yanlış olduğunu, dolayısıyla tersinin olamayacağını gösterir.*

## Örnek

**$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ ise A'ya involütif matris denir. A matrisi involutif matris ise, $\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ ve $\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ matrisleri idempotent matrislerdir gösteriniz.**

## Çözüm

*A matrisi involutif matris ise $A^2 = I$'dır.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I + A)\frac{1}{2}(I + A) &= \frac{1}{4}(I + A)(I + A) = \frac{1}{4}\left(I^2 + 2A + A^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A) \end{aligned}$$

*elde edilir. O halde, $\frac{1}{2}(I + A)$ matrisi için, $B^2 = B$ eşitliği sağlandığından, $\frac{1}{2}(I + A)$ matrisi idempotent matristir. Diğeri de benzer şekilde gösterilir.*

## Örnek

$$\mathbf{B} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & y & -1 \end{bmatrix}$$ **matrisi ortogonal matris ise $x = ?$, $y = ?$**

## Örnek

**Her kare matris, simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türlüdür. Kanıtlayınız**

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **matrisini ters simetrik ve simetrik iki matrisin toplamı olarak yazınız.**

## Problem

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

*matrisini ters simetrik ve simetrik iki matrisin toplamı olarak yazınız.*

## Örnek

**A ters simetrik ve B ortogonal matris olduğuna göre, $B^{-1}AB$ matrisinin ters simetrik olduğunu gösteriniz.**

## Örnek

**A matrisi ortogonal matris ise, $A^n$ matrisi de ortogonal midir?**

## Problem

*Tüm bileşenleri tamsayı olan* $2 \times 2$ *türünden kaç ortogonal matris vardır?*

## Örnek

**Bir hermitiyen matrisin köşegen elemanlarının reel sayı olması gerektiğini gösteriniz.**

## SORU

$A=\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$ *ve* $B=\left[\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$ *ise* $A+B=C=[c_{ij}]$ *için* $\sum_{k=1}^{3} c_{1k}=?$

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

## SORU

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ ise $AB = C = [c_{ij}]$ ise, $c_{21} = ?$

**A)** 28 **B)** 26 **C)** 13 **D)** 24 **E)** 16

## SORU

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ise $AB$ hangisidir?

**A)** $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

## SORU

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi hangisidir?

**A)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

## SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $A^{100}$ hangisidir?

**A)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

## SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times 5}$ ve $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ olmak üzere, $AB$ ve $BA$ çarpımları tanımlıysa $\dfrac{m}{n}$ değeri kaçtır?

**A)** $\dfrac{4}{5}$ **B)** $\dfrac{5}{4}$ **C)** 1 **D)** mümkün değil **E)** $\dfrac{9}{5}$

## SORU

$A, B$, $n \times n$ türünden matrisleri için, aşağıdakilerden hangileri yanlıştır?

I. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
II. $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$
III. $A^2 = I$ ise $A = I$'dır.
IV. $A^2 = 0$ ise $A = 0$'dır.

**A)** I ve III **B)** II ve IV **C)** I ve IV **D)** III ve IV **E)** I,III ve IV

## SORU

Matrislerdeki işlemlerle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

II. Çarpma işlemine göre her elemanın tersi vardır.

III. Çarpma işleminin değişme özelliği vardır.

IV. Toplama işlemine göre her elemanın tersi vardır.

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

## SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times3}$ *ve* $B = [b_{ij}]_{3\times2}$ *matrisleri veriliyor.* $AB = C = [c_{ij}]$ *ise,* $c_{32}$ aşadakilerden hangisine eşittir?

**A)** $\sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3}$ **B)** $\sum_{k=1}^{3} a_{3k} b_{k2}$ **C)** $\sum_{k=1}^{3} a_{3k} b_{2k}$ **D)** $\sum_{k=1}^{4} a_{3k} b_{k2}$ **E)** $\sum_{k=1}^{3} b_{3k} a_{k2}$

## SORU

$a_{ij} = (i-j)^i$ *ve* $b_{ij} = \dfrac{i \cdot j}{i+j}$ *olmak üzere,* $A = [a_{ij}]_{4\times 3}$ *ve* $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$ *matrisleri veriliyor.*
$AB = C = [c_{ij}]$ *ise,* $c_{32} = ?$

**A)** $\dfrac{28}{3}$ **B)** $\dfrac{16}{3}$ **C)** $\dfrac{19}{3}$ **D)** $\dfrac{24}{3}$ **E)** $\dfrac{17}{3}$

## SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ters simetriktir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

## SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesi ortogonaldir?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

## SORU

$A = \begin{bmatrix} 5/13 & a \\ b & 5/13 \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal ise $a \cdot b =?$

**A)** $0$ **B)** $\frac{5}{13}$ **C)** $\frac{25}{169}$ **D)** $\frac{144}{169}$ **E)** $1$

## SORU

$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi simetrik ve ters simetrik iki matrisin toplamı olarak yazılırsa, simetrik matris hangisi olur?

**A)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

## SORU

$A$ matrisi ters simetrik ise, aşağıdakilerden hangisi ters simetrik olmayabilir?

**A)** $A^3$ **B)** $A^2$ **C)** $A^5$ **D)** $-A$ **E)** $2A$

## SORU

$A = \begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{bmatrix}$ *ortogonal matris ise,* $a^2 + b^2$ *kaçtır?*

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 1/2 **D)** 2 **E)** 0

## SORU

$$C = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & x & -2 \end{bmatrix}$$ *matrisi ortogonal matris ise* $x = ?$

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $-3$ **E)** $-2$

## SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times 10}, \quad a_{ij} = \dfrac{j}{j+i}, \; B = [b_{ij}]_{10\times 3}, \quad b_{ij} = \dfrac{j}{i^2+i}$ olarak tanımlanıyor. Buna göre,

$$AB = C = [c_{ij}]$$

çarpımında $c_{21}$ elemanı kaçtır?

**A)** 3/7 **B)** 5/12 **C)** 1/4 **D)** 7/12 **E)** 11/12

## SORU

$A$ kare matrisi için, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $A^{-1} = A$ ise $A$ simetriktir.

II. $A^T = -A$ ise $A$ ters simetriktir.

III. $A^{-1} = A$ ise $A$ ortogonaldir.

IV. $A^2 = I$ ise $A$ matrisinin tersi kendisidir.

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

## SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin rankı kaçtır?*

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

## SORU

Elemanları $\mathbb{Z}_5$ cismine ait olan $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$, matrisinin tersi yoksa $a = ?$

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0

## SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin tersi hangisidir?*

**A)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**D)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## SORU

$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$ matrisinin tersi hangisidir?

**A)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## SORU

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

**A)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **E)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

## SORU

Tüm elemanları 1 veya $-1$ olan $3 \times 3$ türünden, birbirinden farklı kaç tane simetrik matris yazılabilir?

## Problem

*Tüm elemanları* 0, 1 *veya* $-1$ *sayılarından oluşan* $3 \times 3$ *türünden,* 0 *matrisinden farklı kaç tane ters simetrik matris yazılabilir?*

**Kaynak :** Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.