

Diziler / Seriler

① $\{a_n\} = \left\{ n - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2n}) \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2n}) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln e^n - \ln \sqrt{1+e^{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n \sqrt{\frac{1}{e^{2n}} + 1}} \right) = 0 \end{aligned}$$

② $a_n = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

ise $\left\{ \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+a_n-4}{a_n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+a_n}+2} = \frac{1}{4}$$

($\frac{0}{0}$)

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e^n+n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Kök testine göre yakınsaktır.}$$

④ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(2n-1)!}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(2n+1)!}}{\frac{n^3}{(2n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)!} = 0 < 1$$

\Rightarrow Oran testine göre yakınsaktır

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n^2}{n+n^4}$ serisinin karakteri?

$\left(\frac{2}{n+n^4} < \left(\frac{2}{n} \right)^{\rightarrow \text{triklesak}} \Rightarrow \text{test sonucu vermez} \right)$

$$\cos n^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1+\cos n^2}{n+n^4} \leq \frac{1+1}{n+n^4} = \frac{2}{n+n^4} < \frac{2}{n^4}$$

$\Rightarrow \sum \frac{1+\cos n^2}{n+n^4} < \sum \underbrace{\frac{2}{n^4}}_{\text{yakınsak}} \quad p=4 > 1 \Rightarrow \text{Mukayese testine göre yakınsak}$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \neq 0 \Rightarrow n\text{-terim testine göre iraksak}$$

⑦ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^3+1}}$ Serisinin karakteri?

$\sum \frac{1}{k^{2-1}} = \sum \frac{1}{k^2}$ ($p=2$, yakınsak) serisi ile limit testi uygulayalım.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^3+1}}}{\frac{1}{k^2}} = 2 \neq 0, \infty \Rightarrow \text{Seriler aynı karakterli}$$

\Rightarrow limit testine göre yakınsak

⑧ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin karakteri? (Mukayese, limit, oran, n-terim testleri sonuç vermez)

$$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \begin{cases} \text{pozitif} \\ \text{sürekli} \\ \text{azalan } (f'(x) < 0) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{integral testi kullanılabilir.} \end{array} \right.$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan u \Big|_{\ln 2}^{\ln R}$$

$\ln x = u \quad x=2 \Rightarrow u=\ln 2$
 $\frac{dx}{x} = du \quad x=R \Rightarrow u=\ln R$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan \ln R - \arctan \ln 2)$$

$\ln R \rightarrow \infty$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \ln 2 \quad (\text{sayı})$$

Integral yakınsak olduğundan seri yakınsaktır.

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ serisinin karakteri?

$$\frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} \quad r = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

Mukayese testine göre seri yakınsaktır

($\frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{n}$ fakat $\sum \frac{1}{n}$ iraksak olduğundan sonuç vermez)

10) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}} = \infty \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \quad p = \frac{1}{3} < 1 \text{ ıraksak olduğundan limit testine}$$

pöce seri ıraksaktır.

$$\left(\frac{1+\ln k}{\sqrt[3]{k}} < \frac{1+k}{\sqrt[3]{k}} \leq \frac{k+k}{\sqrt[3]{k}} = k^{2/3} \right) \quad \sum k^{2/3} \text{ n-terim testine pöce ıraksak}$$

\Rightarrow Mukayese testi sonuca vermez

11) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$ serisinin karakteri?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ harmonik serisi ile limit}$$

testi uygulayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0, \infty \quad \text{seriler aynı karakterli}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan limit testine pöce seri ıraksaktır.

12) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad p=2>1 \text{ yakınsaktır.}$$

Limit testine pöce seri yakınsaktır

$$\left(\ln k < k \Rightarrow \frac{1}{k^2 \ln k} > \frac{1}{k^3} \quad \sum \frac{1}{k^3} \text{ yakınsak} \Rightarrow \text{mukayese testi sonuca vermez} \right)$$

$$k=2 \text{ için } \ln k > 1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \ln k} < \frac{1}{k^2} \text{ eşitsizliği } \forall k \text{ için sağlanmaz}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} = \frac{1}{4 \ln 2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ şeklinde yazılırsa}$$

mukayese testinden yakınsak olduğu söylenebilir

*) $k \geq 2$ için $\ln k > 1$ dir.

13) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ serisinin karakteri? (Kök testinde $L=1$ olacağından sonuç vermez)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty \Rightarrow \text{iki seri aynı karakterli}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $p=3>1$ yakınsak \Rightarrow limit testine göre seri yakınsaktır.

14) $a_1=1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{oran testinden seri yakınsak}$$

15) $a_1=2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{oran testinden seri yakınsak}$$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{kök testinden seri yakınsak}$$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+e^n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n+e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n \left(\frac{n}{e^n} + 1\right)} = 1 \Rightarrow n\text{-terim testinden, ıraksak}$$

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$ serisinin karakteri?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{n-1} : \text{geometrik seri, } |r| = \frac{1}{\ln 2} > 1 \Rightarrow \text{ıraksak}$$

$0 = \ln 1 < \ln 2 < \ln e = 1$

19) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot n^3$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-n} \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{=1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{kök testinden yakınsak}$$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$ serisinin karakteri?

$$\frac{2}{1+e^n} < \frac{2}{e^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n} < 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} \quad |r| = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

\Rightarrow Mukayese testinden seri yakınsak

21) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ serisinin karakteri?

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ pozitif, azalan, sürekli \Rightarrow integral testi uygulanabilir.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\ln R} \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \text{integral yakınsak} \\ &\Rightarrow \text{seri yakınsak} \end{aligned}$$

22) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2+n} = 1 \neq 0 \Rightarrow n. \text{ terim testinden iraksaktır.}$$

23) $\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayın.

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \Rightarrow S_n = \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)!} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+1+1-1}{(n+2)!} = \frac{n+2}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2}$$

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$ serisinin toplamını bulunuz. \Rightarrow seri yakınsaktır.

$$\ln \left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)} \right) = \ln((n+1)(n+2)) - \ln(n(n+3)) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 1 - \ln 4 \\ &+ \ln 3 + \ln 4 - \ln 2 - \ln 5 \\ &+ \ln 4 + \ln 5 - \ln 3 - \ln 6 \\ &\vdots \\ &+ \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_n &= \ln 3 + \ln(n+1) - \ln(n+3) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln 3 - \ln \left(\frac{n+1}{n+3} \right) \right) \\ &= \ln 3 \end{aligned} \right\}$$

(25) 5,232323... sayısının serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$5,232323... = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \dots$$

$$= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^{n-1} \quad a = \frac{23}{100} \quad r = \frac{1}{100}$$

$$|r| = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$$

(Seri yakınsak)

$$5,232323... = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$$

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \frac{(1+n)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right)$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = 1$$

(27) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(\frac{k-1}{k} \right)$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayınız.

$$S_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \right) = \ln \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{n} \right) = -\infty$$

\Rightarrow Seri $-\infty$ 'a ıraksar.

(28) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ serisinin karakteri?

Mutlak yakınsak mı? Yani, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisinin $(p=\frac{1}{2} > 1$ iraksak)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0, \infty \Rightarrow$ Limit testine göre iki seri aynı karakterli olup, $\sum \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ iraksaktır.

Böylelikle $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ mutlak yakınsak değildir.

Sartlı yakınsak mı?

- $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}} > 0$

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n+1} \cdot n}}{\frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}} = 0$

olduğundan Alternan seri testine göre seri yakınsaktır, mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{2n+3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{100}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$ yakınsak mı?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = 50 \neq 0, \infty, \sum \frac{1}{n}$ iraksak

olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$

serisi iraksaktır $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{2n+3}$ mutlak yakınsak değildir.

- $a_n = \frac{100}{2n+3} > 0$

- $a_{n+1} = \frac{100}{2n+5} < \frac{100}{2n+3} = a_n$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{2n+3} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{2n+3}$ yakınsaktır.

Mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

30) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3+2^n}$ serisinin mutlak/şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3+2^{n+1}} \cdot \frac{3+2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 1 \right)}{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 2 \right)} \cdot |x| = \frac{|x|}{2} < 1$$

$\Rightarrow -2 < x < 2$: mutlak yak. aralığı

$x=2$ için ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3+2^n} \text{ serisi } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3+2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 1 \right)} = 1 \neq 0 \Rightarrow n. \text{ terim testine göre ıraksaktır.}$$

$x=-2$ için ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3+2^n} \text{ serisi } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3+2^n} = 1 \neq 0 \text{ olduğundan alterne seri testine göre ıraksaktır.}$$

Mutlak yakınsak : $(-2, 2)$

Şartlı yakınsak : yok

İraksak : $\mathbb{R} - (-2, 2)$

31) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin mutlak/şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini bulunuz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \ln k}{(3-2x)^k} \right| = |3-2x| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \right)$$

$$= |3-2x| \cdot 1 \cdot 1 = |3-2x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3-2x < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$x=1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi ;

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad p=2 > 1 \text{ (yakınsak)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ serisi}$$

yakınsak olduğundan limit testine göre $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi de yakınsaktır.

$$x=2 \text{ için } \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ alterne serisi, } \sum_{k=2}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$$

yakınsak olduğundan mutlak yakınsaktır.

Mutlak yakınsak : $[1, 2]$

Şartlı yakınsak : yok

İraksak : $\mathbb{R} - [1, 2]$

32) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$ serisini kullanarak $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)x^{k+3}$

serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın parçaklaştığı aralığı bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x^2 \text{ ile çarp}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)x^{k+1} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k = \frac{2}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{x^3 \text{ ile çarp}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^{k+3} = \frac{2x^3}{1-x}, \quad |x| < 1$$

33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+2}{3} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{n-1} \quad a = \frac{x+2}{3}, \quad |r| = \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1 \Rightarrow -3 < x+2 < 3$$

$$\Rightarrow \boxed{-5 < x < 1}$$

yakınsaklık aralığı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \boxed{\frac{x+2}{1-x}} \quad \text{yakınsadığı fonk. (toplama)}$$

34) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+3}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1 \xrightarrow{x^3 \text{ ile çarp}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{\text{Türev al}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{x \text{ ile çarp}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+3} = \frac{3x^3(1-x)+x^4}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

toplamı yak. aralığı

(35) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$ ifadesinden yararlanarak $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

• $x \rightarrow -x^2$ dönüşümü ile, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, $|-x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$.

• integral alınırsa, $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $|x| < 1$

$-1 < x < 1$ olduğundan $x=0$ seçilebilir.

$x=0 \Rightarrow c=0$.

• $x \rightarrow \frac{x}{2}$ dönüşümü ile, $\arctan \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)}$, $|\frac{x}{2}| < 1 \Rightarrow |x| < 2$

• x ile çarpılırsa, $f(x) = x \arctan \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(2k+1)}$, $|x| < 2$

(36) $f(x) = xe^{-2x}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız. Elde ettiğimiz seriden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ toplamını bulunuz

$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$

$f(x) = xe^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$

$x=1$ yazılırsa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} = 1 \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

(37) $f(x) = \sinh 2x$ ve $g(x) = \cosh 2x$ fonksiyonlarının Maclaurin serilerini yazınız.

$$f(x) = \sinh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \quad \text{ve} \quad e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sinh 2x = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} (1 - (-1)^n) \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} n=2m+1 \text{ ise } 1 - (-1)^n = 2 \\ n=2m \text{ ise } 1 - (-1)^n = 0 \end{array} \right\} \sinh 2x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$g(x) = \cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} (1 + (-1)^n) \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} n=2m+1 \text{ ise } 1 + (-1)^n = 0 \\ n=2m \text{ ise } 1 + (-1)^n = 2 \end{array} \right\} \cosh 2x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m} x^{2m}}{(2m)!}$$

(38) $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında 3. mertebe Taylor polinomunu yazınız.

$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x, \quad f''(x) = 2 \sec^2 x \tan x$$

$$f'''(x) = 4 \sec x \cdot \sec x \tan x - \tan x + 2 \sec^2 x \cdot \sec^2 x = 4 \sec^2 x \tan^2 x + 2 \sec^4 x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$$

$$P_3(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{16\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}$$

$$P_3(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a) + \frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-a)^3$$

Not: $f(x) = \tan x$ Maclaurin serisi:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = 2 \\ f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(0) = 16 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$f(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

39) $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt$ fonksiyonunun Maclaurin açılımının genel terimini bulunuz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$x \rightarrow -t^2 \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

$$\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\right)}{t^2} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \dots\right) dt = t - \frac{t^3}{3 \cdot 2!} + \frac{t^5}{5 \cdot 3!} + \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!} \end{aligned}$$

40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2! \cdot 4} - \frac{x^8}{3! \cdot 8} + \dots\right)}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} - \dots}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8}$$

41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \tan x}{\tan x + 3x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots\right)}{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots\right) + 3x^2 - x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{6} - \dots}{3x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 + \frac{x}{6} - \dots\right)}{3x^2 \left(1 + \frac{x}{9} + \dots\right)} = \frac{1}{3}$$

42) $f(x) = e^x - e^{-x}$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = ?$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right)}{x} = 2$$