FONKSİYONLAR

A ve B gibi boş olmayan iki küme verildiğinde; A kümesinin her elemanını B'nin bir tek elemanına eşleyen bir f kuralına A'dan B'ye bir fonksiyon denir. Bu ilişki sembolik olarak $f: A \to B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde ifade edilir.

$x \in A$ bir f kuralıyla $y \in B$'ye eşlenmiş ise bu ilişki $y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Burada x'e bağımsız değişken, y'ye bağımlı değişken denir.

$A = D(f)$ kümesine f'in tanım kümesi denir.

$R(f) = \{ y \in B \mid y = f(x),\ x \in A \}$ ile belirlenen kümeye f'in değer kümesi denir.

Fonksiyonun Tanım Kümesi:

Bağımsız değişkenin belirli bir reel değerine karşılık, bir f fonksiyonu vasıtasıyla belirli bir reel değer bulunabiliyorsa, bağımsız değişkenin o değeri için f fonksiyonu tanımlıdır denir.

Herhangi bir f fonksiyonu tanım kümesi belirtilmeden tanımlanmışsa, bu fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonun reel bir sayıya karşılık getirdiği tüm reel sayıların kümesini alacağız.

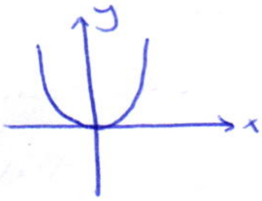
(*)

Fonksiyon	Tanım Kümesi
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$

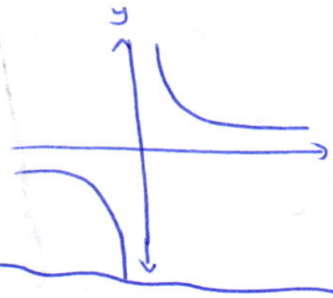
Bir Fonksiyonun Grafiği

Bir f fonksiyonunun grafiği ; $y=f(x)$ denklemini sağlayan noktaların kartezyen düzlemdeki yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafiktir.

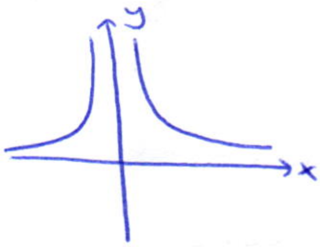
* $y=x^2$



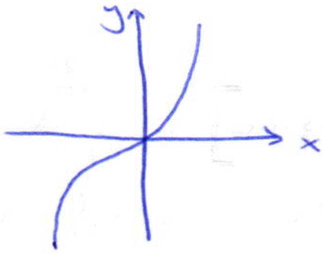
* $y=\frac{1}{x}$



* $y=\frac{1}{x^2}$



* $y=x^3$



Fonksiyonlarla İlgili Bazı Kavramlar

① **Artan-Azalan fonksiyonlar:** $f(x)$ fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. $\forall\, x_1, x_2 \in I$ için

a) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, I aralığında artandır.

b) $x_1 < x_2$ " $f(x_1) > f(x_2)$ " f, " " azalandır.

② **Tek-Çift fonksiyonlar:**

$y=f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için

* $f(-x)=f(x)$ ise f çift fonksiyondur ve y-eksenine göre simetrik bir grafiği vardır.

* $f(-x)=-f(x)$ ise f Tek fonksiyondur ve orjine göre simetrik bir grafiği vardır.

③ **Lineer fonksiyonlar:** m ve b sabitleri için $y=mx+b$ şeklindeki fonksiyona lineer fonksiyon denir.

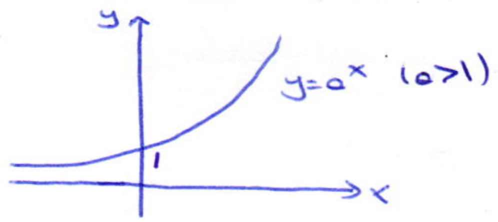
④ <u>Polinomlar:</u> $n \in Z^+$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ şeklindeki $P(x)$ fonksiyonuna polinom denir. a_n başkatsayı, n ise polinomun derecesi olarak adlandırılır.

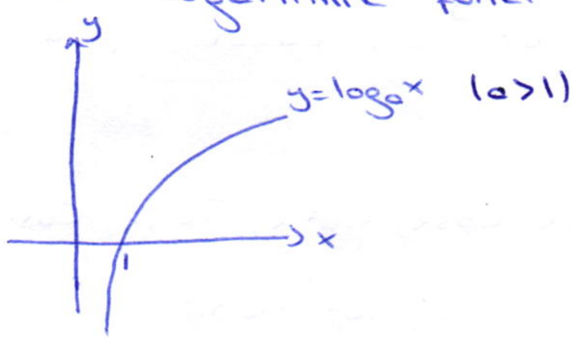
⑤ <u>Rasyonel fonksiyonlar:</u> $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere,

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ bölümüne rasyonel (kesirli) fonk. denir. Bir rasyonel fonksiyonun tanım kümesi $Q(x) \neq 0$ şartını sağlayan tüm reel x sayılarının kümesidir.

⑥ <u>Üstel fonksiyonlar:</u> $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $y = f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonk. denir. Bütün üstel fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ tanım kümesine ve $(0, \infty)$ görüntü kümesine sahiptir.



⑦ <u>Logaritmik fonksiyon:</u> $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonuna logaritmik fonk. denir. Logaritmik fonk. $x > 0$ için tanımlıdır.



⑧ <u>Bileşke fonksiyon:</u> f ve g fonksiyonları için, bileşke fonksiyon:

$f \circ g(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanır. $f \circ g$ nin tanım kümesi, $g(x)$ in f in tanım kümesi içinde olması şartıyla, g'nin tanım kümesindeki x sayılarını içerir.

9) Fonksiyonun Grafiğinin Kaydırılması:

a) Dikey kaydırma: $y=f(x)+k$ → $k>0$ ise; f'in grafiğini k birim yukarı kaydırır

→ $k<0$ ise; f'in grafiğini $|k|$ birim aşağı kaydırır

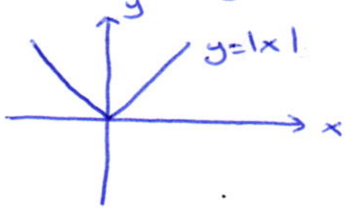
b) Yatay Kaydırma: $y=f(x+h)$ → $h>0$ ise; f in grafiğini h birim sola kaydırır

→ $h<0$ ise; f in grafiğini $|h|$ birim sağa kaydırır

10) Parçalı Fonksiyonlar:

Bazen bir fonksiyonu, tanım kümesinin farklı parçaları üzerinde farklı formüller kullanarak tanımlamak gerekir. Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

⊛ $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$

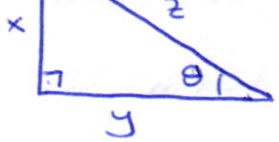


11) Periyodik Fonksiyonlar:

Her x değeri için $f(x+p)=f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonk. denir. Böyle bir en küçük p değerine f in periyodu denir.

12) Trigonometrik fonksiyonlar:

Sinx, Cosx, Cotx, Tanx, Cosecx, Secx fonksiyonlarına Trigonometrik fonksiyonlar denir.



$\sin\theta = \frac{x}{z}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{y}{z}$

$\tan\theta = \frac{x}{y}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{y}{x}$

$\sec\theta = \frac{z}{y}$ $\quad$ $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{z}{x}$

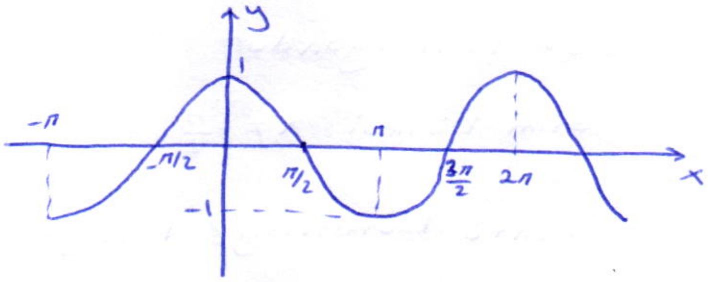
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

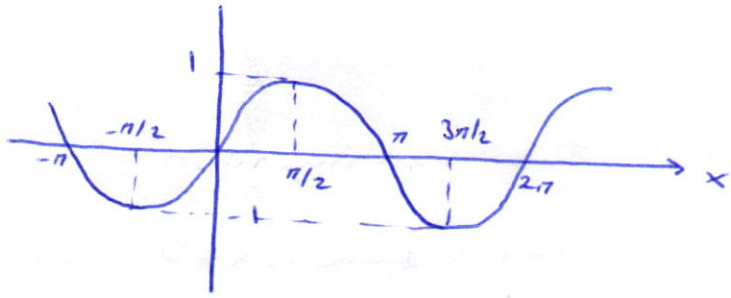
$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

a) y = Cosx fonksiyonu:



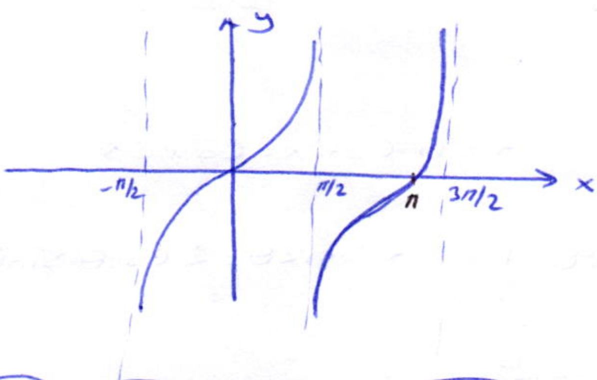
- Çift fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \le y \le 1$
- Periyodu: 2π

b) y = Sinx fonksiyonu:



- Tek fonksiyondur
- Tanım Kümesi: $-\infty < x < \infty$
- Görüntü Kümesi: $-1 \le y \le 1$
- Periyodu: 2π

c) y = Tanx fonksiyonu:



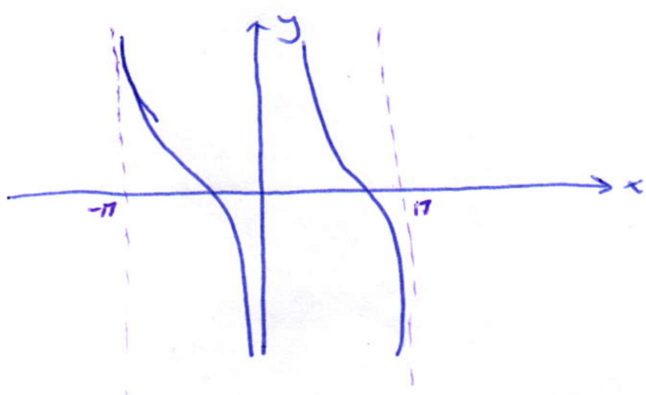
Tek fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$

Periyodu: π

d) y = Cotx fonksiyonu:



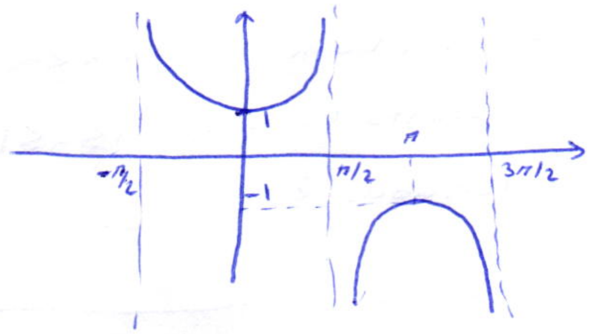
Tek fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq 0, x \neq \mp\pi, x \neq \mp 2\pi$

Görüntü Kümesi: $-\infty < y < \infty$

Periyodu: π

e) $y = \text{Sec}x = \dfrac{1}{\text{Cos}x}$ fonksiyonu:



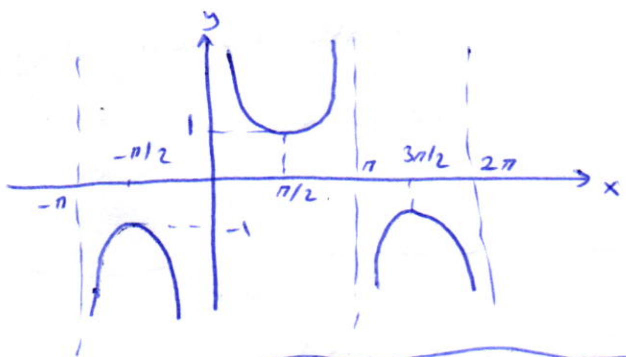
Çift fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$

Periyodu: 2π

f) $y = \text{Cosec}x = \dfrac{1}{\text{Sin}x}$ fonksiyonu:



Tek fonksiyondur

Tanım Kümesi: $x \neq 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \ldots$

Görüntü Kümesi: $y \leq -1$ veya $y \geq 1$

Periyodu: 2π

Bazı Trigonometrik Özdeşlikler:

* $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = 1$ * $1 + \text{Tan}^2x = \text{Sec}^2x$ * $1 + \text{Cot}^2x = \text{Cosec}^2x$

* $\text{Cos}2\theta = \text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta = 1 - 2\text{Sin}^2\theta = 2\text{Cos}^2\theta - 1$ * $\text{Sin}2\theta = 2\,\text{Cos}\theta\,\text{Sin}\theta$

* $\text{Cos}^2\theta = \dfrac{1 + \text{Cos}2\theta}{2}$ * $\text{Sin}^2\theta = \dfrac{1 - \text{Cos}2\theta}{2}$

* $\text{Cos}(a+b) = \text{Cos}a . \text{Cos}b - \text{Sin}a\,\text{Sin}b$

$\text{Cos}(a-b) = \text{Cos}a\,\text{Cos}b + \text{Sin}a\,\text{Sin}b$

$\text{Sin}(a+b) = \text{Cos}b\,\text{Sin}a + \text{Cos}a\,\text{Sin}b$

$\text{Sin}(a-b) = \text{Sin}a . \text{Cos}b - \text{Sin}b\,\text{Cos}a$