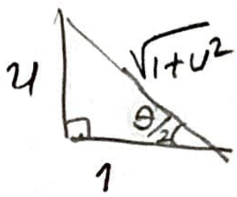
Tan $\frac{\theta}{2}$ Dönüşümü



$$\boxed{\tan\frac{x}{2}=u}$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{x}{2}=\arctan u$$

$$x=2\arctan u$$

$$dx=2\frac{1}{1+u^2}du$$

$$\boxed{dx=\frac{2du}{1+u^2}}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\sin x\ 2\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\boxed{\sin x=\frac{2u}{1+u^2}}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{1+u^2}-\frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\boxed{\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

Ör: $$\int\frac{dx}{1-2\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-2\cdot\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$\tan\frac{x}{2}=u$

$dx=\frac{2du}{1+u^2}$

$$=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1+\cancel{u^2}-4u+1-\cancel{u^2}}{1+u^2}}$$

$$=\int\frac{2du}{2-4u}$$

$$=\int\frac{du}{1-2u}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|1-u|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

Simetrik Fonksiyonların Belirli İntegrali

$[-a;a]$ simetrik bir aralık olsun

a.) f çift fonksiyon ise

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

b.) f tek fonksiyon ise.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Ör: $\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = ?$, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ çift fonksiyon

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x \Big|_0^2 \right]$$

$$= 2\left[\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12 \right]$$

$$= 2\left[-\frac{64}{15} + 12 \right]$$

$$= \frac{232}{15}$$

Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlerle İntegrasyonu

Ör: $\displaystyle\int \frac{5x-3}{(x+1).(x-3)}\,dx$?

$$\frac{5x-3}{(x+1).(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$5x-3 = Ax-3A+Bx+B$$

$$5 = A+B$$
$$-3 = -3A+B$$

$$A=2,\ B=1$$

$$\frac{5x-3}{(x+1).(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3}$$

$$\int \frac{5x-3}{(x+1).(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$= \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x+1| + \ln|x-3| + C.$$

* $\frac{f(x)}{g(x)}$ pay paydadan küçük olmalı.

* $(x-r)^m$, $g(x)$ in bir çarpanı için

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\dots+\frac{A_m}{(x-r)^m}$$

* $(x^2+px+q)^n$, $g(x)$ in indirgenemez kuadratik bir çarpanı olsun

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

Ön: $I=\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1).(x+3)}dx=?$

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1).(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

Kapama yöntemi ile $A=\frac{6}{2.4}=\frac{3}{4}$, $B=\frac{-2}{-2.2}=\frac{1}{2}$, $C=\frac{-2}{-4.(-2)}=-\frac{1}{4}$

* $\frac{x^2+4x+1}{(x-1).(x+1).(x+3)}=\frac{3}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x+3}$

$$I=\int\left(\frac{3}{4.(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4.(x+3)}\right)dx=\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+c$$

Örn: $\displaystyle\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = ?$

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$6x+7 = Ax+2A+B$$

$$A=6,\quad B = 7-2A = 7-12 = -5$$

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int\left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{6\,dx}{x+2} - \int \frac{5\,dx}{(x+2)^2}$$

$$= 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c$$

$x+2=u$

$dx=du$

$$\int \frac{5}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{5}{u^2}\,du$$

$$= \int 5.u^{-2}\,du$$

$$= \frac{5.u^{-1}}{-1}$$

$$= \frac{-5}{u}$$

$$= \frac{-5}{x+2}$$

Ör: $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-4x^2-x-3 & x^2-2x-3 \\ \underline{-\,2x^3-4x^2-6x} & 2x \\ 5x-3 & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \left(2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\right)dx$$

$$= \int 2x\,dx + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$= x^2 + \underbrace{\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx}_{I_1}$$

$$= x^2 + 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + c.$$

$$I_1 = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x-3).(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Kapama yöntemiyle $A = \frac{12}{4} = 3$, $B = \frac{-8}{-4} = 2$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{3}{x-3}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx = 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + c$$

ör: $\displaystyle\int \frac{4-2x}{(x^2+1)\cdot(x-1)}\,dx = ?$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$4-2x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$$

$$4-2x = (A+B)x^2 + (C-B)x + A-C.$$

$$A+B=0$$
$$C-B=-2$$
$$A-C=4$$
$$+ \qquad +$$
$$2A = +2$$
$$A=+1$$
$$B=-1$$
$$C=-3$$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)\cdot(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x-3}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \ln|x-1| + \int\frac{-x}{x^2+1} - 3\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + c$$

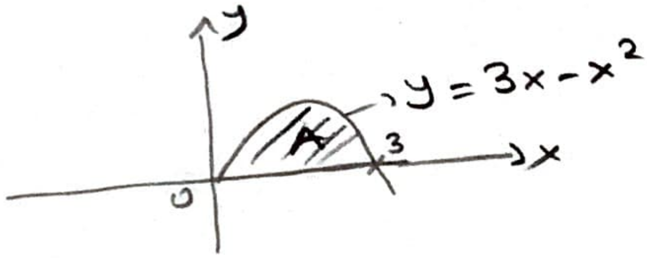
Alan.

$[a,b]$ aralığında $f(x)\geq 0$ olmak üzere $f(x)$ in grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan alan.

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile verilir.

Ör: X-ekseni üzerinde, $f(x)=3x-x^2$ eğrisinin altında kalan bölgenin alanını bulunuz.



Alan = A

$$A=\int_0^3 (3x-x^2)dx = \frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$=\frac{3}{2}.9-9$$

$$=\frac{9}{2}$$

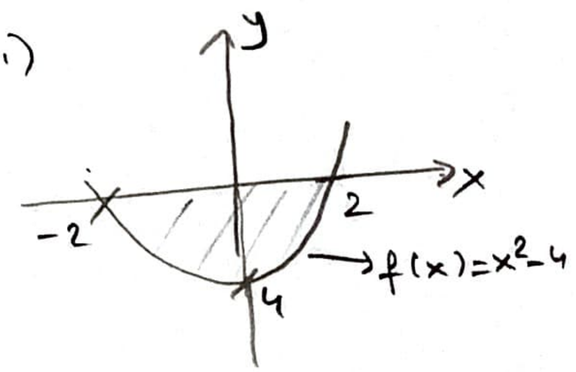
Toplam Alan.

Ör: $f(x)=x^2-4$ ün grafiği ve onun x-ekseni üzerinde aynada yansıtılmış görüntüsü $g(x)=4-x^2$ yi göstermektedir. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

a.) $[-2,2]$ aralığında belirli integrallerini

b.) $[-2,2]$ aralığında grafikler ve x-ekseni arasındaki alanı hesaplayınız.

a.)



$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-4x\Big|_{-2}^{2}$$

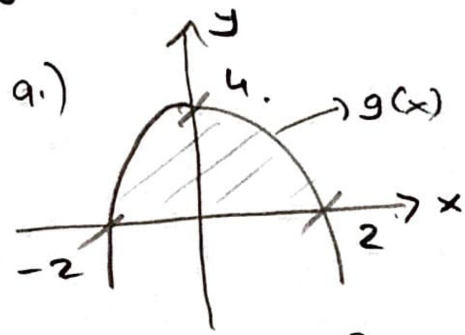
$$=\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(\frac{-8}{3}+8\right)$$

$$=\frac{16}{3}-16$$

$$=\frac{-32}{3}$$

b.) $Alan_{f(x)}=\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{32}{3}$

a.)



$$\int_{-2}^{2} g(x)dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$

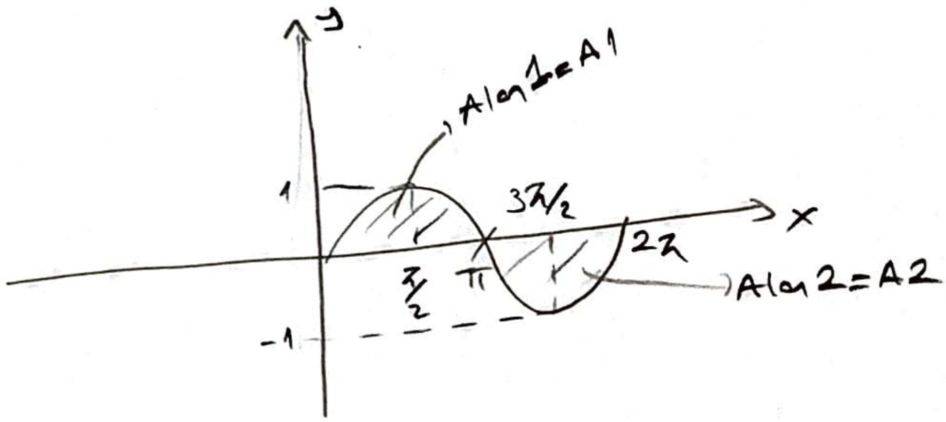
$$=\frac{32}{3}$$

b.) $Alan_{g(x)}=\frac{32}{3}$

Ör: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun $x=0$ ve $x=2\pi$ arasındaki grafiğini göstermektedir.

a.) $[0,2\pi]$ aralığında $f(x)$'in belirli integralini

b.) $[0,2\pi]$ 〃 $f(x)$'in grafiği ve x-ekseni arasındaki alanı hesaplayınız.



a.) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x.dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = \underbrace{2}_{A_1}$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2$

$A2 = |-2|$

$A2 = |-2| = 2.$

$\text{Alan} = A1 + A2 = 2 + 2 = 4$

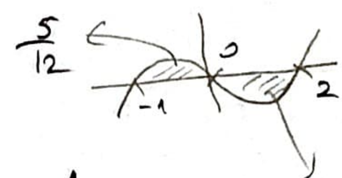
Özet: $[a,b]$ üzerinde $y=f(x)$ grafiği ile x-ekseni arasındaki alanı bulmak için

① f nin sıfır olduğu yerlerde $[a,b]$ yi alt aralıklara bölünüz

② Her alt aralıkta f yi integre ediniz

③ İntegrallerin mutlak değerlerini toplayınız.

Ör: $-1 \leq x \leq 2$ için $f(x)=x^3-x^2-2x$ in grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgenin alanını bulunuz.



$x^3-x^2-2x=0$

$x.(x^2-x-2)=0$, $x=0$, $x=2$, $x=-1$.

$\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}$

$[-1,2]$ aralığını iki alt aralığa böler.

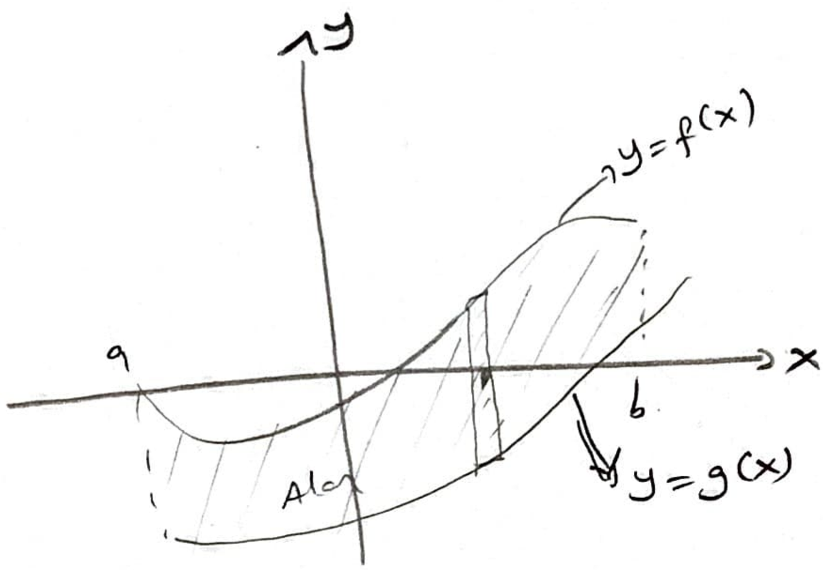
$$\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Big|_{0}^{2}=4-\frac{8}{3}-4=-\frac{8}{3}$$

$$\text{Alan}=\frac{5}{12}+\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}.$$

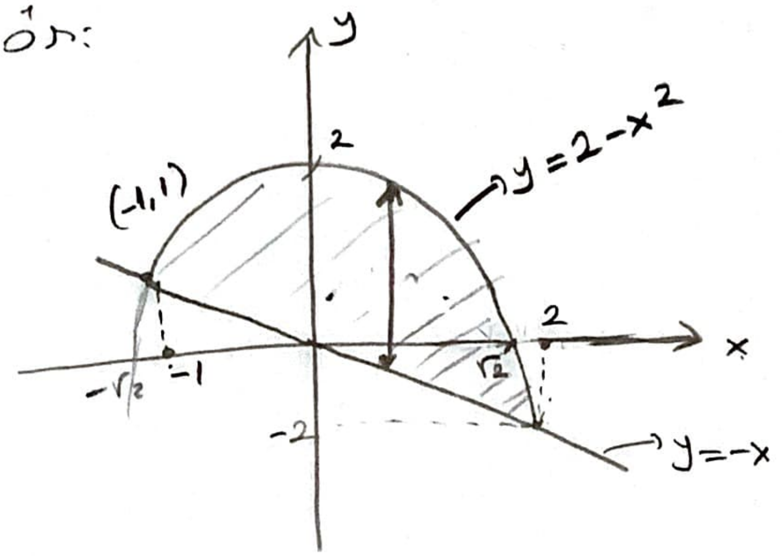
Eğriler Arasındaki Alanlar.

f ve g, [a, b] aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere sürekli ise bu durumda a'dan b'ye kadar $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri arasındaki bölgenin alanı



$$\text{Alan} = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Ör:



$y=2-x^2$ parabolü ve $y=-x$ doğrusuyla çevrili bölgenin alanını bulunuz.

$2-x^2=-x$

$x^2-x-2=0$

$x \quad -2$

$x \quad +1$

$x=2$

$x=-1$.

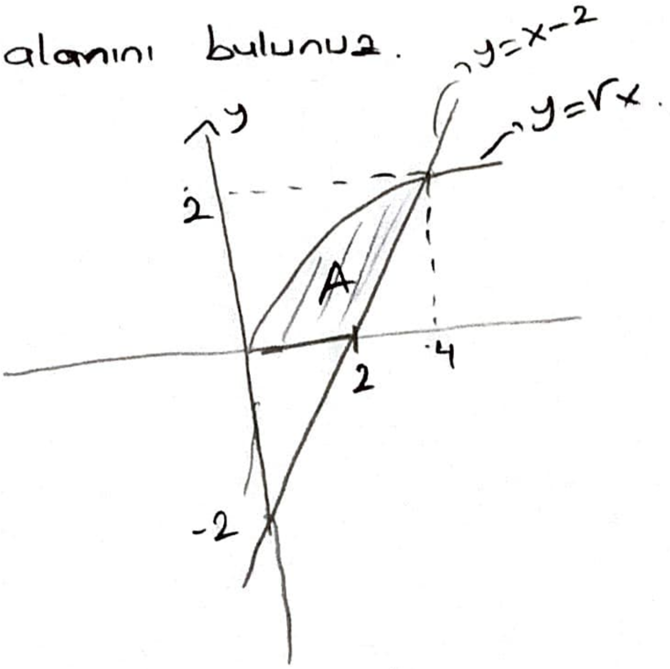
$$\text{Alan} = \int_{-1}^{2} \left[(2-x^2)-(-x)\right] dx = \int_{-1}^{2} (2-x^2+x)\, dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

Ör: Birinci dörtte birlik bölgede üstten $y=\sqrt{x}$, alttan x-ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



Alan = A = ?

$\sqrt{x} = x-2$

$x = (x-2)^2$

$x = x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$x \quad -4$

$x \quad -1$

$x=4$

$x=1$

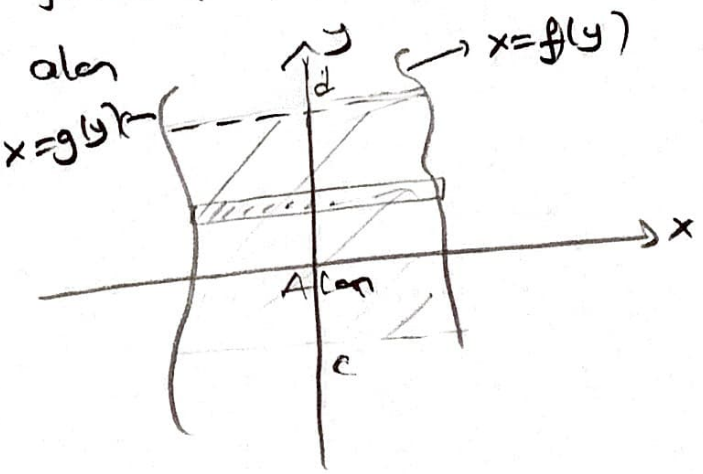
$$A = \int_0^2 \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}}\,dx + \int_2^4 [\sqrt{x}-(x-2)]\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_2^4$$

$\sqrt{x} - x + 2$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} + \left(\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - 2 + 4\right)$$

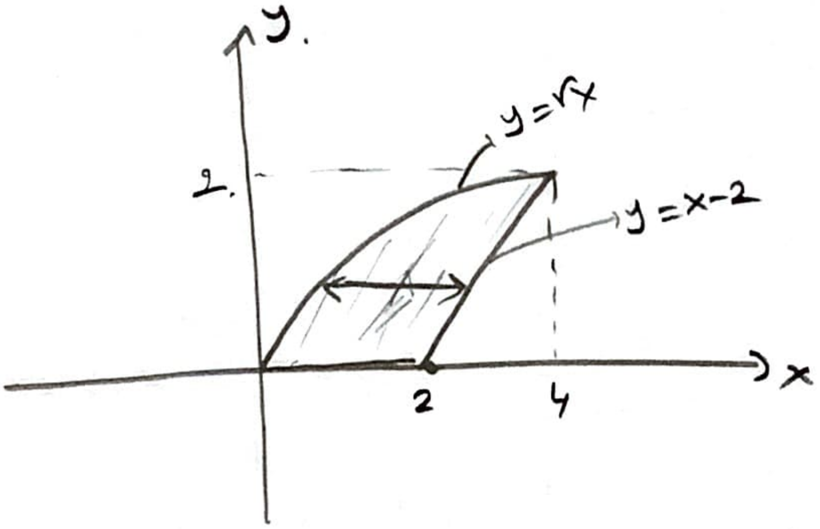
$$= \frac{2}{3}\cdot 8 - 2 = \frac{16-6}{3} = \frac{10}{3}$$

y'ye Göre İntegral : Eğer bir bölgenin eğrileri y nin fonksiyonları ile tanımlanmış ise iki eğri arasında kalan alan



$$\text{Alan} = \int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy$$

Ör: Birinci dörtte birlik bölgede üstten $y=\sqrt{x}$, alttan x-ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz



$A=?$

$$A=\int_0^2 \left[(y+2)-(y^2)\right]dy.$$

$$=\int_0^2 (y+2-y^2)\,dy$$

$$=\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\Big|_0^2$$

$$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-0$$

$$=\frac{10}{3}.$$

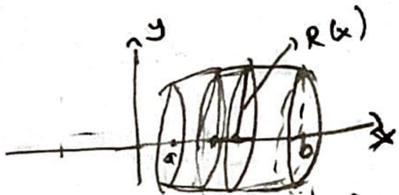
Dönel Cisimlerin Hacimleri

Dönel Cisimler: Disk Yöntemi

Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cisme dönel cisim denir.

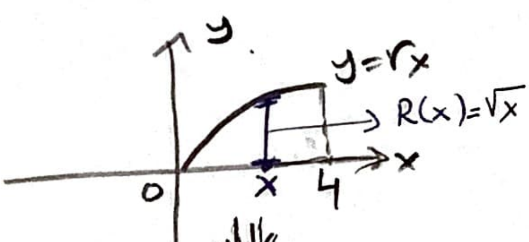
x-ekseni etrafında dönen disk ile hacim

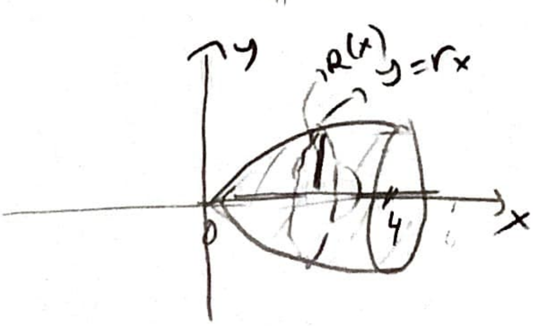
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx$$



NOT: $A(x) = \pi.(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(x)]^2$.

Ör: $y=\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölge bir dönel cisim elde etmek için x-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.





x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim

$$V = \int_0^4 \pi[R(x)]^2\,dx$$

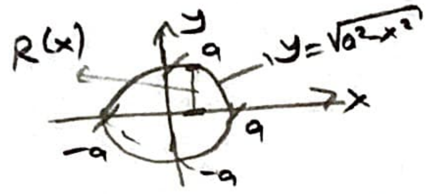
$$= \int_0^4 \pi.(\sqrt{x})^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\pi \Big|_0^4$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot(16-0)$$

$$= 8\pi.$$

Ör: $x^2+y^2=a^2$ çemberi bir küre elde etmek için x-ekseni etrafında döndürülüyor. Kürenin hacmini bulunuz.



$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left[R(x)\right]^2dx \qquad R(x)=\sqrt{a^2-x^2}$$

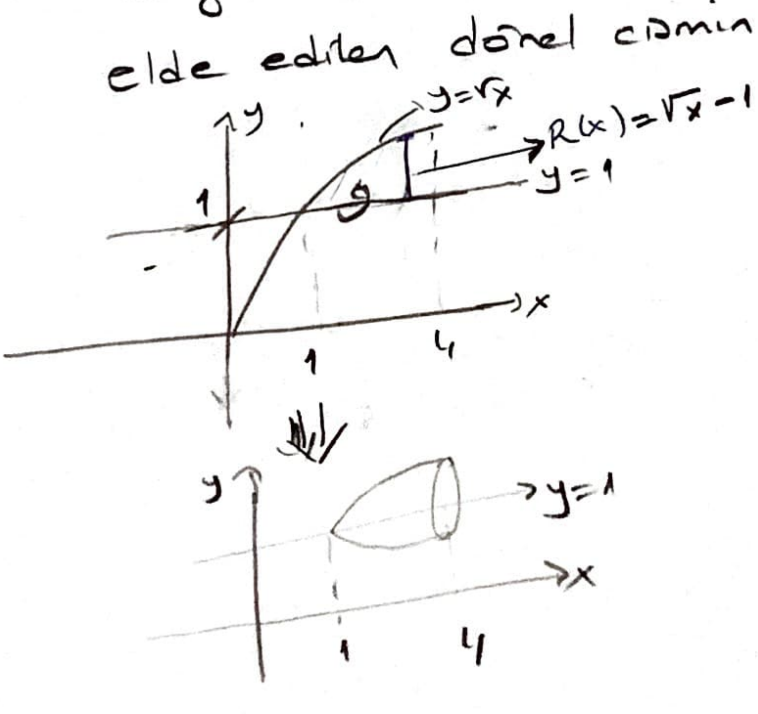
$$V=\int_{-a}^{a}\pi.\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^2-x^2\right)dx=\pi.\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}\right]$$

$$=\pi.\left[\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-\left(-a^3+\frac{a^3}{3}\right)\right]$$

$$=\pi.\left(2a^3-\frac{2a^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4\pi a^2}{3}$$

Ör: $y=\sqrt{x}$ eğrisi ile $x=1$ ve $x=4$ doğruları arasındaki bölgenin $y=1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V=\int_{1}^{4}\pi\left[R(x)\right]^2dx$$

$$=\int_{1}^{4}\pi.\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx$$

$$=\int_{1}^{4}\pi.\left(x-2\sqrt{x}+1\right)dx$$

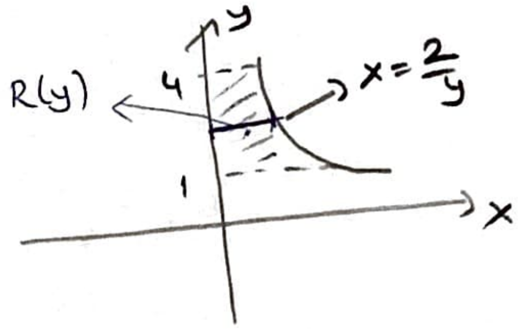
$$=\pi.\left[\frac{x^2}{2}-2.\frac{2}{3}x^{3/2}+x\Big|_{1}^{4}\right]$$

$$=\pi.\left[\left(8-\frac{4}{3}.8+4\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)\right]=\frac{7\pi}{6}$$

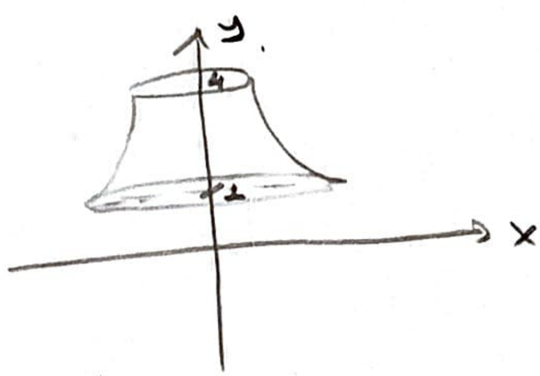
y-ekseni etrafında dönen disk ile hacim

$$V = \int_c^d \pi \left[R(y)\right]^2 dy$$

Ör: y-ekseni ile $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$ eğrisi arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulunuz



$\Downarrow$



$$V = \int_1^4 \pi \left[R(y)\right]^2 dy$$

$$= \int_1^4 \pi \cdot \left[\frac{2}{y}\right]^2 dy$$

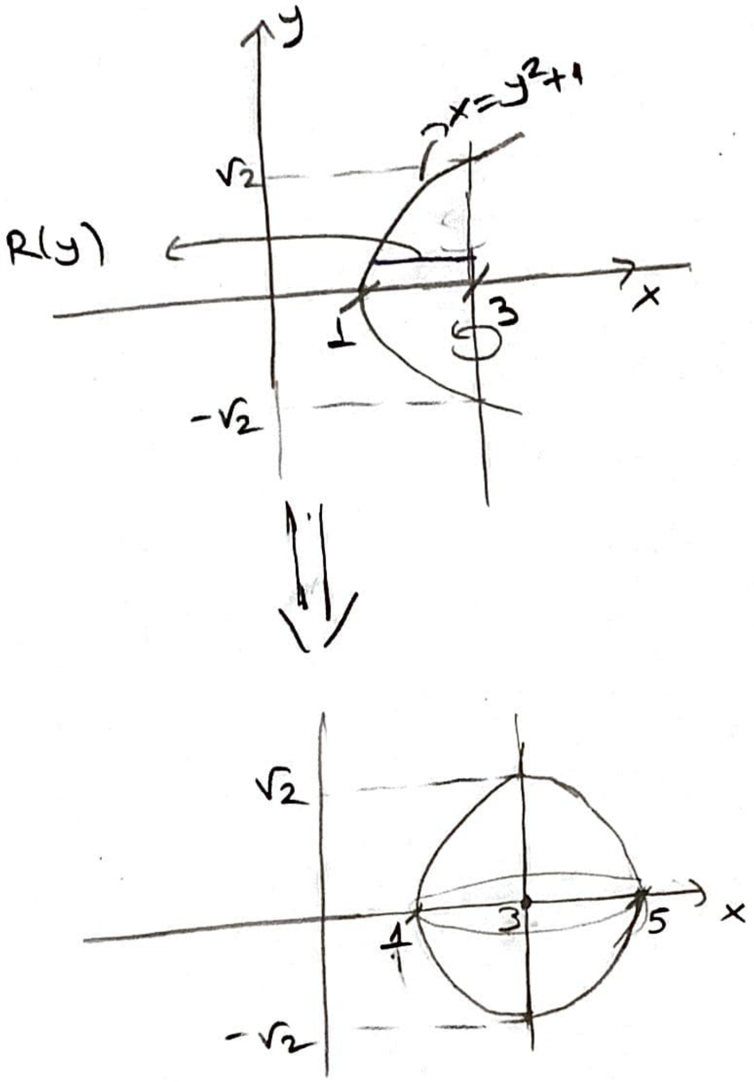
$$= \int_1^4 4\pi \frac{1}{y^2} dy$$

$$= -\frac{4\pi}{y} \Big|_1^4$$

$$= -4\pi \cdot \left[\frac{1}{4} - 1\right]$$

$$= 3\pi$$

Ör: $x=y^2+1$ parabolü ile $x=3$ doğrusu arasındaki bölgenin $x=3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi\,[R(y)]^2\,dy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi\cdot[3-(y^2+1)]^2\,dy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi\cdot(2-y^2)^2\,dy$$

$$=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\underbrace{4}_{\text{çift fonk}}-\underbrace{4y^2}_{\text{çift fonk}}+\underbrace{y^4}_{\text{çift fonk}})\,dy$$

$$=2\pi\left[4y-\frac{4}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right]_0^{+\sqrt{2}}$$

$$=2\pi\cdot\left[4\sqrt{2}-\frac{4}{3}\cdot2\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right]$$

$$=2\pi\left[8\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right]$$

$$=\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

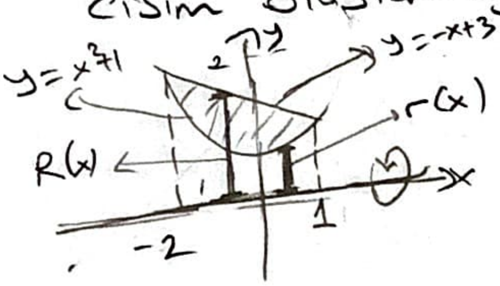
Dönel Cisimler: Pul Yöntemi

x-ekseni etrafında dönen pullar ile hacim.

R(x): Dış yarıçap
r(x): İç yarıçap.

$$V=\int_a^b \pi\left[[R(x)]^2-[r(x)]^2\right]dx.$$

Ör: $y=x^2+1$ eğrisi ve $y=-x+3$ doğrusu ile sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(x)=-x+3$

$r(x)=x^2+1$

$$V=\int_{-2}^{1}\pi.\left[[R(x)]^2-[r(x)]^2\right]dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\pi.\left[(-x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx$$

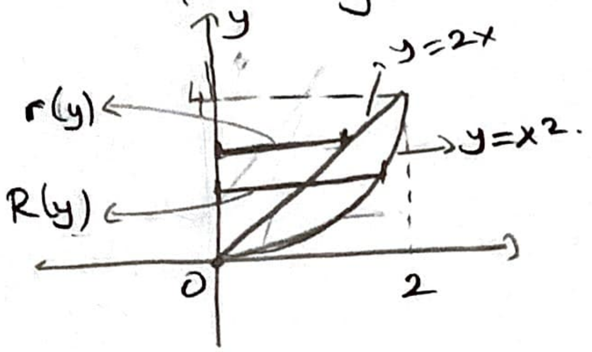
$$=\pi.\int_{-2}^{1}\left(x^2-6x+9-x^4-2x^2-1\right)dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{1}\left(-x^4-x^2-6x+8\right)dx$$

$$=\pi.\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\,\Big|_{-2}^{1}\right]$$

$$=\frac{117\pi}{5}$$

Ör: Birinci dörtte bir bölgede $y=x^2$ parabolü ve $y=2x$ doğrusuyla sınırlanan alan y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.



$R(y)=\sqrt{y}$

$r(y)=\frac{y}{2}$

$$V=\int_0^4 \pi.\left[[R(y)]^2-[r(y)]^2\right]dy$$

$$=\int_0^4 \pi.\left[(\sqrt{y})^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]dy$$

$$=\int_0^4 \pi.\left[y-\frac{y^2}{4}\right]dy$$

$$=\pi.\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\Big|_0^4\right]$$

$$=\pi\left[8-\frac{16}{3}\right]$$

$$=\frac{8\pi}{3}$$

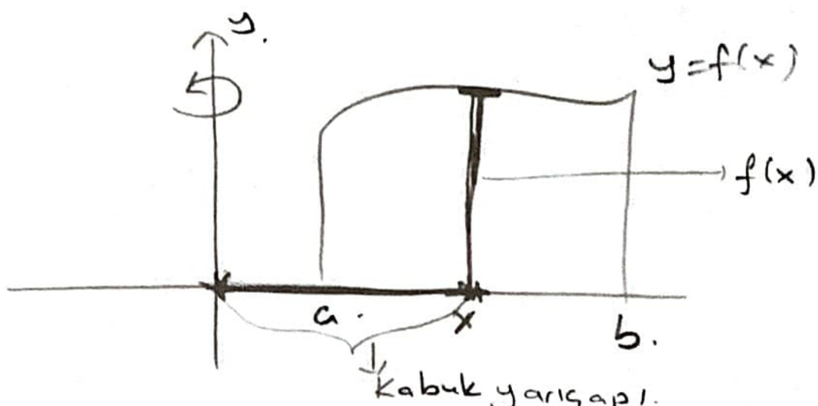
NOT: y-ekseni etrafında dönme.

$$V=\int_c^d \pi\left[[R(y)]^2-[r(y)]^2\right]dy$$

Silindirik Kabuklarla Hacim Bulmak (Kabuk Yöntemi)

* y-Ekseni Etrafında Dönme İçin Kabuk formülü

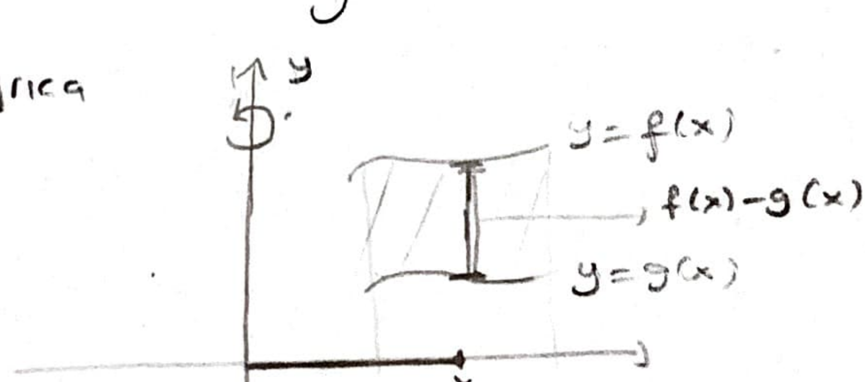
* Sürekli bir $y=f(x)\geq 0$, $a\leq x\leq b$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi



$$V=2\pi\int_a^b \underbrace{(\text{Kabuk Yarıçapı})}_{\substack{\text{Dönme eksenine}\\ \text{olan uzaklık}}}\cdot(\text{Kabuk Yüksekliği})\,dx$$

$$=2\pi\int x\,f(x)\,dx$$

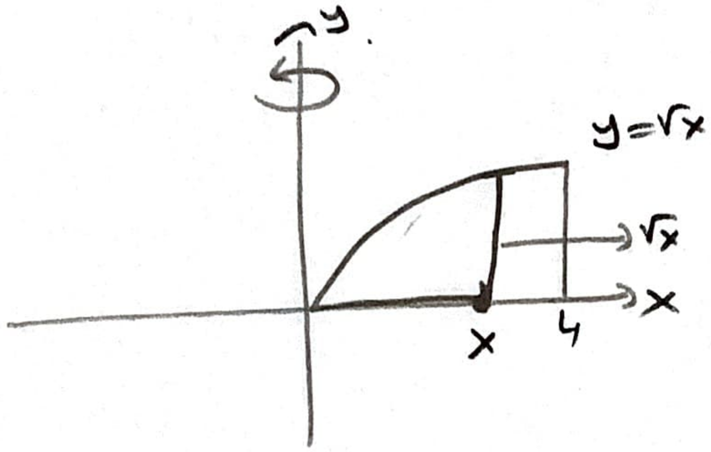
* Ayrıca



f(x) ve g(x) eğrileri ile sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülürse

$$V=2\pi\int_a^b(\text{Kabuk Yarıçapı})\cdot(\text{Kabuk Yüksekliği})\,dx=2\pi\int_a^b x\,(f(x)-g(x))\,dx$$

Ör: $y=\sqrt{x}$ eğrisi x-ekseni ve $x=4$ doğrusu ile çevrelenen bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini silindirik kabuk yöntemiyle bulunuz.

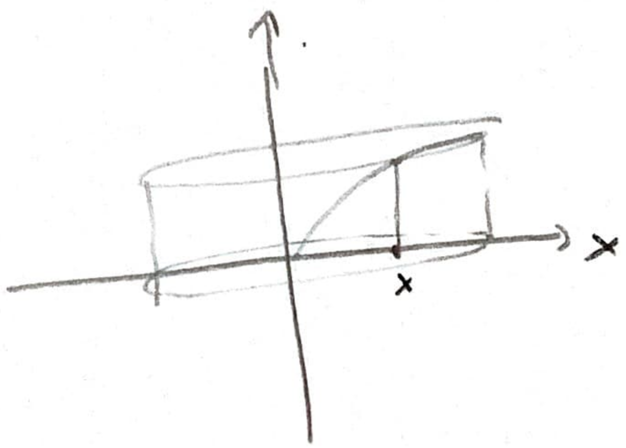


$$V = 2\pi \int_0^4 \underbrace{x \cdot \sqrt{x}}_{x^{3/2}}\, dx$$

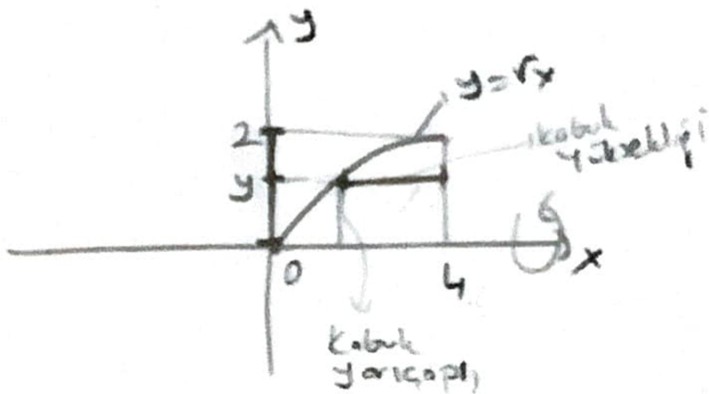
$$= 2\pi \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4$$

$$= \frac{4\pi}{5} \cdot \left[4^{5/2}\right]$$

$$= \frac{128\pi}{5}.$$



Ör: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x=4$ doğrusu ile çevrelenen bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.



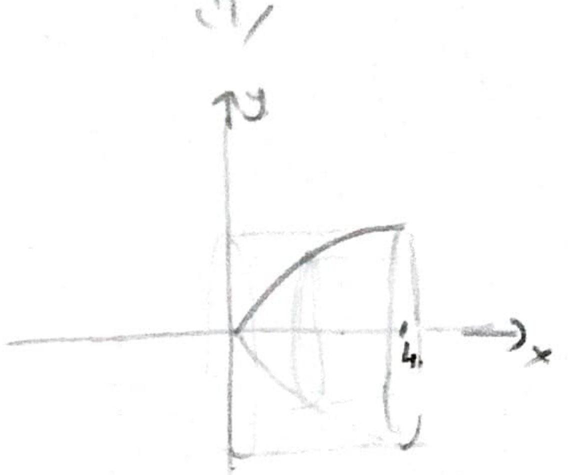
$$V = 2\pi \int_0^2 y.(4-y^2)\,dy$$

$$= 2\pi. \int_0^2 (4y-y^3)\,dy$$

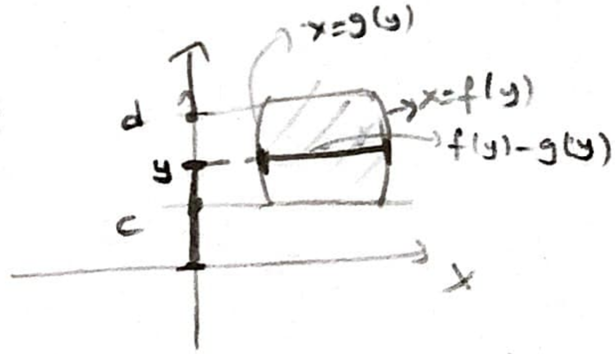
$$= 2\pi. \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 \right]$$

$$= 2\pi.[8-4]$$

$$= 8\pi.$$



NOT:



$$V = 2\pi. \int_c^d y.(f(y)-g(y))\,dy$$

$x=f(y)$ ve $x=g(y)$, $x=c$ ve $x=d$ arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

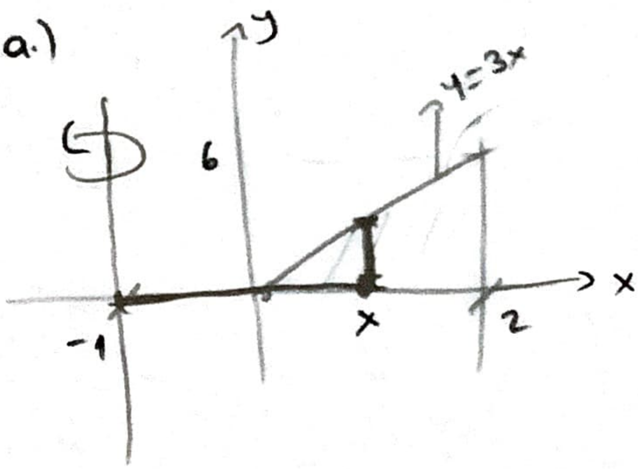
Ör: $y=3x$, $y=0$ ve $x=2$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin $x=-1$ etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini

a.) Silindirik kabuk yöntemiyle

b.) Pul yöntemi ile

hesaplayınız

a.)

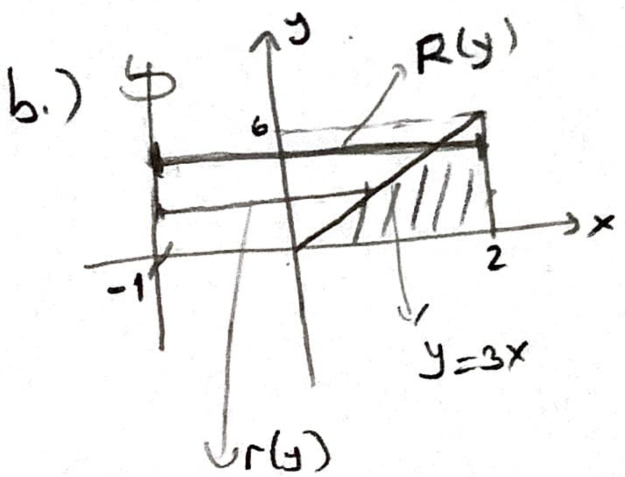


$$V = 2\pi \cdot \int_0^2 (x+1)\cdot 3x \, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^2 (3x^2+3x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^2 \right] = 28\pi$$

b.)



$R(y) = 2-(-1)$

$r(y) = \frac{y}{3} - (-1)$

$$V = \int_0^6 \pi \left[[R(y)]^2 - [r(y)]^2 \right] dy$$

$$= \int_0^6 \pi \left[[2-(-1)]^2 - \left[\frac{y}{3}+1\right]^2 \right] dy$$

$$= \pi \int_0^6 \left(9 - \frac{y^2}{9} - \frac{2y}{3} - 1 \right) dy$$

$$= \pi \left[8y - \frac{y^3}{27} - \frac{y^2}{3} \Big|_0^6 \right]$$

$$= 28\pi.$$