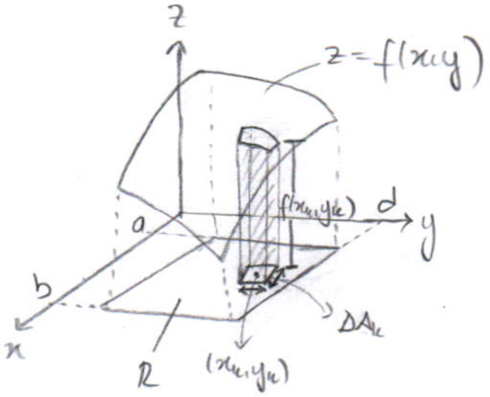
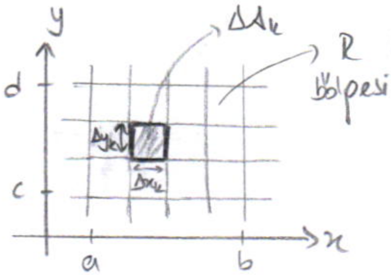
İKİ KATLI İNTEGRALLER

Dikdörtgenler Üzerinde İki Katlı İntegraller

$z=f(x,y)$ yüzeyi ile üstten, xy-düzleminde bir dikdörtgensel R bölgesi ile alttan sınırlı üç boyutlu bir katı bölgenin hacmi, f nin R bölgesi üzerinde iki katlı integrali ile hesaplanır.





$\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$

n adet dikdörtgensel parçaya böldüğümüzü varsayalım.

Dikey kutunun hacmi: $f(x_k,y_k)\cdot\Delta A_k$

Dikey kutuların toplam hacmi: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,\Delta A_k$

Ardışık integral

Katı cismin hacmi: $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx$

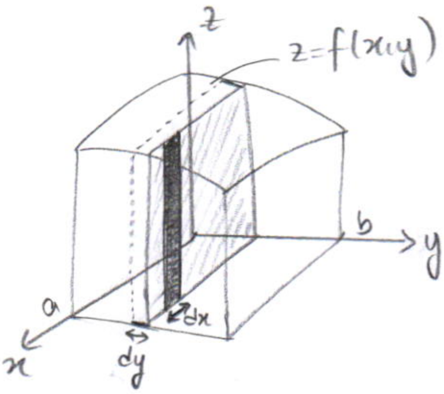
$z=f(x,y)$ fonksiyonunun $\underbrace{R}_{\text{integrasyon bölgesi}}$ bölgesinde iki katlı integrali

Fubini Teoremi (Birinci Şekli): Eğer $f(x,y)$, $R: a\leq x\leq b$ ve $c\leq y\leq d$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ise,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Bu teorem, dikdörtgenler üzerindeki iki katlı integrallerin ardışık integraller olarak hesaplanabileceğini belirtir. Yani iki katlı bir integrali her defasında bir değişkene göre integral alarak hesaplayabiliriz. Teorem aynı zamanda, iki katlı integrali herhangi bir sırada hesaplayabileceğimizi söyler.

(*) Katı cismin hacmini, bölgeyi dik kesitlere bölerek de hesaplayabiliriz. (dilimleyerek)



Koyu taralı dikdörtgenin alanı: $f(x,y)dx$

Dik kesitin alanı: $\int_0^a f(x,y)dx$ (y-değerine karşılık gelen şeridin alanı) $\bar{A}(y)$

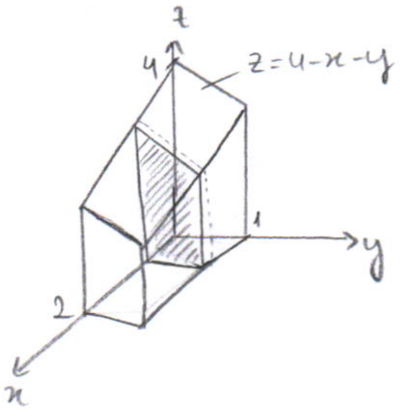
Kesiti üç boyutlu hale getirirsek (dy derinliğini eklersek),

Dik kesitin hacmi: $\int_0^a f(x,y)dxdy$

Katı cismin hacmi: $\int_0^b\int_0^a f(x,y)dxdy$

(Aynı işlemler x-eksenine dik kesitlerle de yapılabilir)

Örnek: $z=4-x-y$ düzlemi altındaki ve xy-düzleminde $R: 0\leq x\leq 2$ $0\leq y\leq 1$ bölgesi üzerindeki hacmi hesaplayalım.

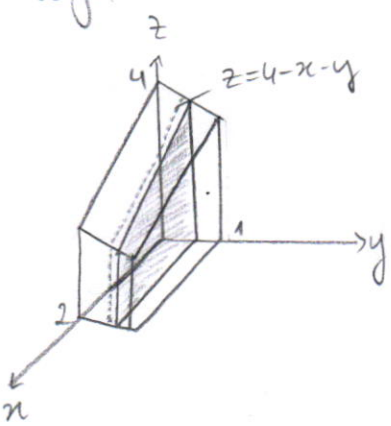


Taralı kesitin alanı: $\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)dy$ (x sabit y'ye göre int.)

$$V=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)dydx=\int_0^2\left(\int_0^1(4-x-y)dy\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(4y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx=\int_0^2\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=5$$

veya



Taralı kesitin alanı: $\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)dx$ (y sabit x'e göre int.)

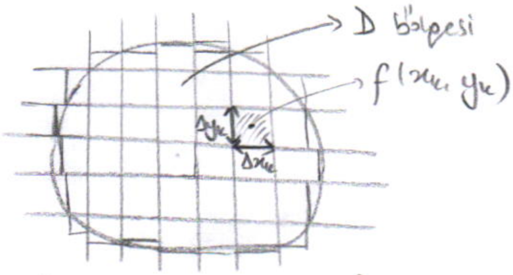
$$V=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^2(4-x-y)dx\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_0^2=\int_0^1(6-2y)dy=5$$

(*) Her iki ardışık integral de iki katlı integralin değerini vermektedir.

Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun dikdörtgensel olmayan sınırlı bir D bölgesi üzerinde iki katlı integralini tanımlamak için D'yi dikdörtgensel hücrelere böleriz.



(n parçaya böldük)

Taralı dikdörtgenin alanı: $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$

Dikdörtgen üzerindeki kutunun hacmi:

$f(x_k, y_k)\Delta A_k$

Kutuların toplam hacmi: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_D f(x,y)\,dA$$

: $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesi üzerinde iki katlı integrali

V: D bölgesinin çevresi üzerinde üstten $z=f(x,y)$ alttan $z=0$ düzleminin sınırladığı bölgenin hacmi

D: integrasyon bölgesi

⊛ Eğer D, $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$ eğrileri ve kenarlardan $x=a$, $x=b$ doğrularıyla sınırlı bir bölge ise hacmi yine dik kesitlere bölerek hesaplayabiliriz.

Fubini Teoremi (Kapsamlı şekli): $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

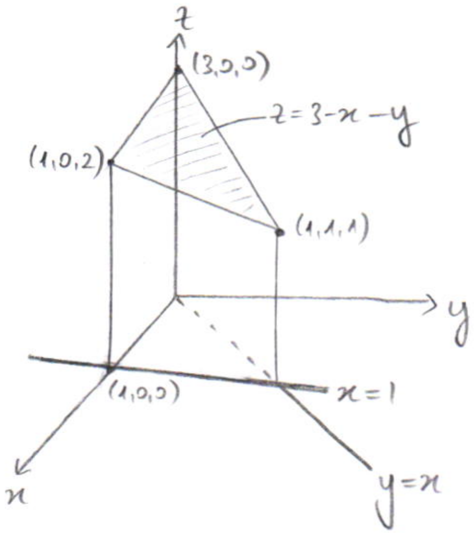
1) D: $a\le x\le b$, $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ ise

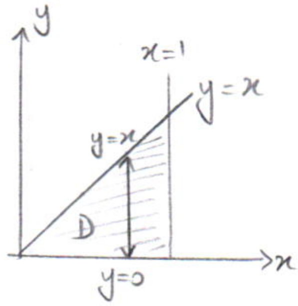
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

2) D: $c\le y\le d$, $h_1(y)\le x\le h_2(y)$ ise

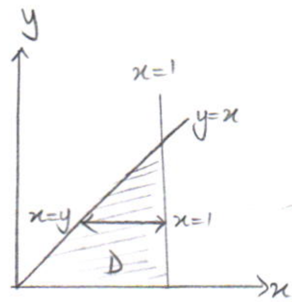
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Örnek: Tabanı xy-düzleminde olan ve x-ekseni, $y=x$ ve $x=1$ doğruları ile sınırlanan ve üstten $z=3-x-y$ ile sınırlanan prizmanın hacmini bulun.





(1)



(2)

(1) $$V=\int_0^1\int_0^x (3-x-y)\,dy\,dx=\int_0^1\left(3y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x dx=\int_0^1\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)dx=1$$

(2) $$V=\int_0^1\int_y^1 (3-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(3x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_y^1 dy=\int_0^1\left(3-\frac{1}{2}-y-3y+\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy$$

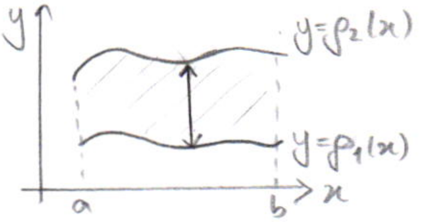
$$=\int_0^1\left(\frac{5}{2}-4y+\frac{3}{2}y^2\right)dy=1$$

Düzgün Bölge: Eğer D bölgesinin çevresi, eksenlere dik doğrularla en çok 2 noktada kesiliyorsa böyle bölgelere düzgün bölge denir.

İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

Dik kesitleri kullanmak:

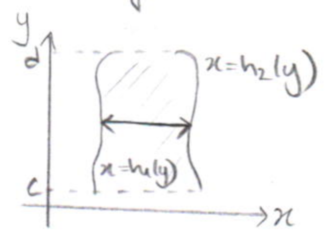
* Bölge x'e göre düzgündür
* Bölge x'e dik doğrularla taranır. ↕
* $dydx$ sıralaması ile integral alınır.



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Yatay kesitleri kullanmak:

* Bölge y'ye göre düzgündür
* Bölge y'ye dik doğrularla taranır. ⟷
* $dxdy$ sıralaması ile integral alınır.



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

İki katlı integrallerin Özellikleri: f ve g, sınırlı D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1) $\iint_D c f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA$ $(c: \text{sayı})$

2) $\iint_D (f(x,y) \mp g(x,y))\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA \mp \iint_D g(x,y)\,dA$

3) $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise $\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$

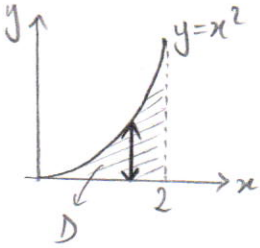
4) $D = D_1 \cup D_2$ ve $D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$

Örnek: D: $y=0$, $x=2$, $y=x^2$ } integrasyon bölgesi üzerinde $\iint_D y\,dx\,dy$ integralini

a) x'e göre düzgün bölge

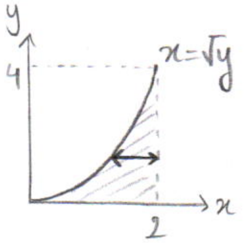
b) y'ye " " " alarak hesaplayın.

a)



$$\int_0^2\int_{y=0}^{y=x^2} y\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right) dx = \frac{x^5}{10}\Big|_0^2 = \frac{32}{10}$$

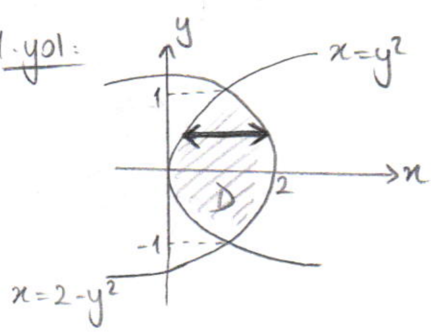
b)



$$\int_0^4\int_{x=\sqrt{y}}^{2} y\,dx\,dy = \int_0^4 \left(yx\Big|_{\sqrt{y}}^{2}\right) dy = \int_0^4 \left(2y - y^{3/2}\right) dy = \frac{32}{10}$$

Örnek: D: $x=y^2$, $x=2-y^2$ } bölgesinde $f(x,y)=1+5y$ fonksiyonunun integralini hesaplayın.

1. yol:

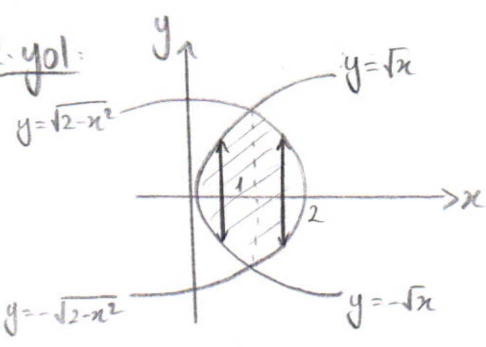


$x=y^2$, $x=2-y^2$ } $y=\mp 1$, $x=1$

$$\iint_D (1+5y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{2-y^2} (1+5y)\,dx\,dy$$ (y'ye göre düzgün bölge aldık)

$$= \int_{-1}^{1} (x+5yx)\Big|_{y^2}^{2-y^2} dy = \int_{-1}^{1} \left(2-2y^2+10y-10y^3\right) dy = \frac{8}{2}$$

2. yol:

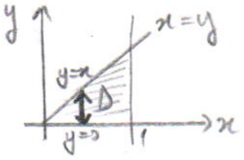


$$\iint_D (1+5y)\,dA = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+5y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+5y)\,dy\,dx$$

(x'e göre düzgün bölge aldık)

Örnek: $I=\int_0^1\int_y^1 \sin x^2\,dx\,dy = ?$ ($\int_y^1 \sin x^2\,dx$ hesaplanamayacağı için integrasyon sırası değiştirilmeli)

D: $y=0$ $\quad x=y$
$\quad y=1$ $\quad x=1$



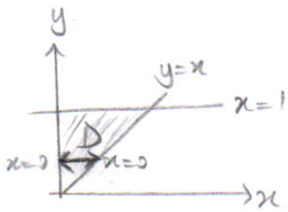
$$I=\int_0^1\int_0^x \sin x^2\,dy\,dx = \int_0^1 y\sin x^2 \Big|_0^x dx = \int_0^1 x\sin x^2\,dx$$

$x^2=u \quad 2x\,dx=du$, $\quad x=1 \to u=1$
$\quad x=0 \to u=0$

$$I=\int_0^1 \frac{\sin u}{2}\,du = -\frac{1}{2}\cos u \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

Örnek: $I=\int_0^1\int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx = ?$

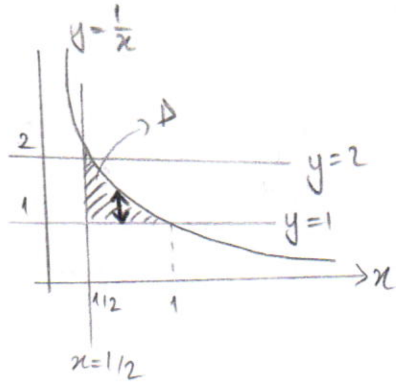
D: $x=0$ $\quad y=x$
$\quad x=1$ $\quad y=1$



$$I=\int_0^1\int_0^y e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{e^{x/y}}{1/y}\Big|_0^y dy = \int_0^1 (ey-y)\,dy$$
$$= \frac{ey^2}{2}-\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

Örnek: $\int_1^2\int_{1/2}^{1/y} e^{\ln x - x}\,dx\,dy = ?$

D: $y=1$ $\quad x=1/2$
$\quad y=2$ $\quad x=1/y$



$$\int_1^2\int_{1/2}^{1/y} e^{\ln x - x}\,dx\,dy = \int_{1/2}^1\int_1^{1/x} e^{\ln x - x}\,dy\,dx$$
$$= \int_{1/2}^1 \left(e^{\ln x - x}\cdot y \Big|_1^{1/x}\right) dx$$
$$= \int_{1/2}^1 \underbrace{e^{\ln x - x}}_{e^u} \underbrace{\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}_{du}$$

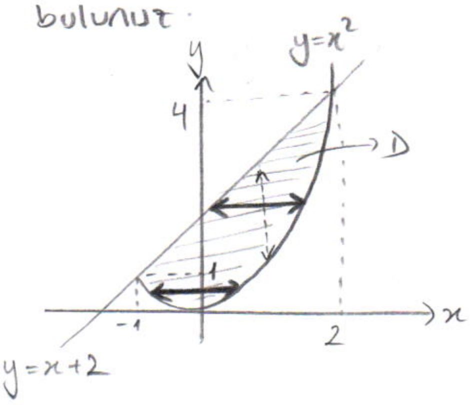
$\left.\begin{array}{l} \ln x - x = u \\ \left(\frac{1}{x}-x\right)dx = du \end{array}\right\}$ $= e^{\ln x - x}\Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$

İki Katlı İntegral ile Alan Hesabı

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde $f(x,y)=1$ ise $\iint_D dx\,dy$ integrali D bölgesinin alanını verir. (Yüksekliği 1 olan cismin hacmi, taban alanına eşittir)

$$A=\iint_D dA=\iint_D dx\,dy$$

Örnek: $y=x^2$ ve $y=x+2$ doğrusu ile çevrelenen D bölgesinin alanını bulunuz.



⊛ x'e göre düzgün bölge alırsak,

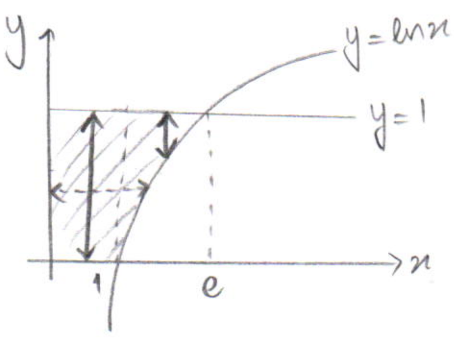
$$A=\iint_D dy\,dx=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_{-1}^{2} y\Big|_{x^2}^{x+2}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\frac{9}{2}$$

⊛ y'ye göre düzgün bölge alırsak,

$$A=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy=\frac{9}{2}$$

Örnek: $y=\ln x$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ eğrilerinin sınırladığı alanı veren iki katlı integrali yazınız.



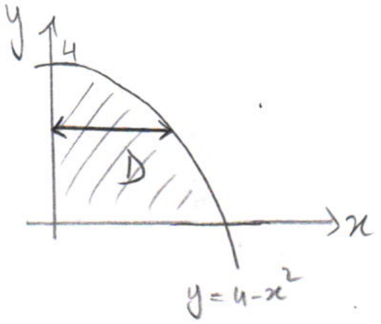
⊛ x'e göre düzgün bölge,

$$A=\int_0^1\int_0^1 dy\,dx+\int_1^e\int_{\ln x}^{1} dy\,dx$$

⊛ y'ye göre düzgün bölge,

$$A=\int_0^1\int_0^{e^y} dx\,dy$$

Örnek: D bölgesi, 1. bölgede $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$ arasında kalan bölge ise $\iint\limits_D \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dA$ integralini hesaplayınız.



$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^4 (4-y)\frac{e^{2y}}{4-y}\,dy = \frac{e^{2y}}{4}\Big|_0^4 = \frac{e^8-1}{4}$$

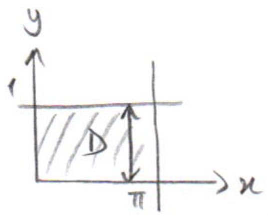
($dA=dydx$ sıralaması ile integral çözülemez!)

İki Katlı İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Bir D bölgesi üzerinde integrallenebilir $f(x,y)$ fonksiyonunun ortalama değeri:

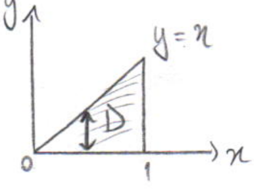
$$\bar{f} = \frac{1}{D'\text{nin alanı}}\iint\limits_D f(x,y)\,dA$$

Örnek: $f(x,y)=x\cos xy$ fonksiyonunun $D: 0\leq x\leq \pi,\ 0\leq y\leq 1$ dikdörtgeni üzerinde ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi\int_0^1 x\cos xy\,dydx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin xy\Big|_0^1 dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

Örnek: Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ de olan dik üçgende x^2+y^2 fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\int_0^x (x^2+y^2)\,dydx = 2\int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_0^x\right)dx$$

$$= 2\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{2}{3}$$

Not: Eğer f, D bölgesini kaplayan bir levhanın sıcaklığı ise, f nin D üzerinde iki katlı integralinin D nin alanına bölümü, levhanın ortalama sıcaklığıdır.

Kutupsal Formda İki Katlı İntegraller (Kartezyen İntegralleri Kutupsal İntegrallere Dönüştürmek)

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde D bölgesi, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleri ile $r = f_1(\theta)$, $r = f_2(\theta)$ eğrileri ve $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ doğrularının sınırladığı bölgeye dönüşür. Bu dönüşümle, $dx\,dy = dy\,dx = r\,dr\,d\theta$ ve

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

elde edilir.

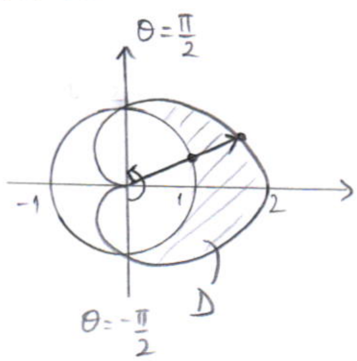
İntegrasyon Sınırlarını Bulmak

1) D bölgesi çizilir.

2) Orijinden çıkan bir ışının D'ye girdiği ve çıktığı yerdeki r değerleri belirlenir. Bu değerler integrasyonun r sınırlarıdır.

3) D'yi sınırlayan en küçük ve en büyük θ değerleri bulunur. Bunlar integrasyonun θ sınırlarıdır.

Örnek: $r = 1+\cos\theta$ kardiyoidinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan D bölgesi üzerinde $f(r,\theta)$ nın integralini almak için integrasyon sınırlarını bulunuz.



$$\iint_D f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Kutupsal Koordinatlarda Alan

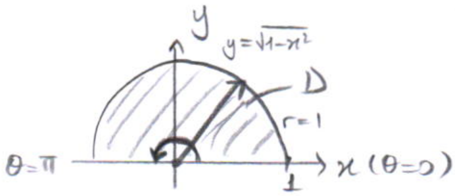
Kutupsal koordinat düzleminde kapalı ve sınırlı bir D bölgesinin alanı:

$$A = \iint_D r\,dr\,d\theta$$

⊛ Yukarıdaki örnekte, D bölgesinin alanı $= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

Örnek: $D: \left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}$ ile sınırlanan yarı dairesel bölge olmak üzere,

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = ?$$

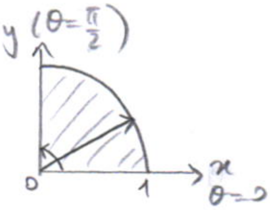


$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \underline{D \text{ bölgesi}} \\ 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\pi \end{array}$

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=1} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\,d\theta = \frac{(e-1)\pi}{2}$$

Örnek: $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\left.\begin{array}{ll} y=0 & y=\sqrt{1-x^2} \\ x=0 & x=1 \end{array}\right\}$



$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\}$ $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\,r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{8}$$

(*) İki katlı integrallerde hacim hesabı:

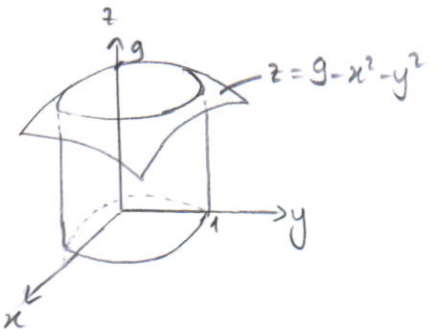
1) Üstten $z=f(x,y)$, alttan $z=0$ ile sınırlı cismin, bir D bölgesi üzerinde oluşturduğu cismin hacmi;

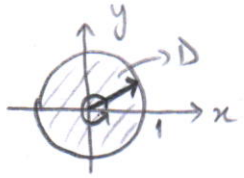
$$V=\iint_D f(x,y)\,dA$$

2) Eğer cisim üstten $z=f_1(x,y)\geq 0$, alttan $z=f_2(x,y)$ ile sınırlı ve bu yüzeylerin xy - düzlemi üzerindeki izdüşümü D bölgesi ise, oluşan cismin hacmi;

$$V=\iint_D \left(f_1(x,y)-f_2(x,y)\right)dA$$: iki yüzey arasındaki hacim

Örnek: Üstten $z=9-x^2-y^2$ paraboloidi ve alttan xy-düzlemindeki birim çemberle sınırlı katı cismin hacmini hesaplayınız.

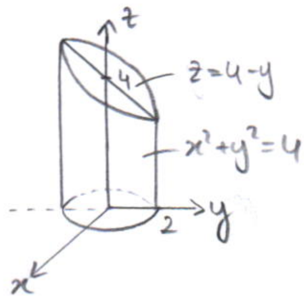




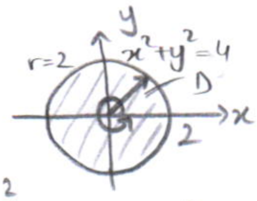
$$V=\iint_D (9-x^2-y^2)\,dA$$

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(9-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\frac{17\pi}{2}$$

Örnek: $x^2+y^2=4$ silindiri, $y+z=4$ ve $z=0$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.



D: izdüşüm bölgesi



⇒ çember ⇓ kut-dön.

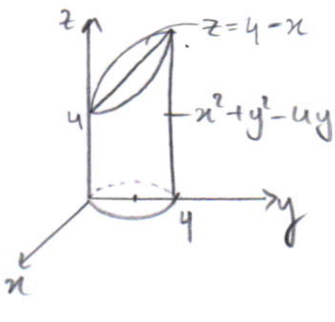
$$V=\iint_D (4-y)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

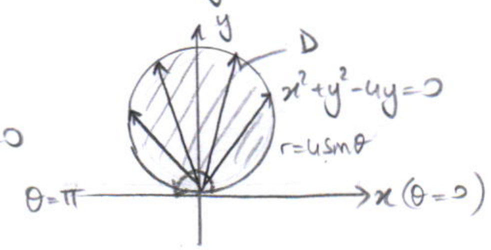
$$=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^3}{3}\sin\theta\Big|_0^2\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=8\theta+\frac{8}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi}=16\pi$$

Örnek: $x^2+y^2-4y=0$ silindiri, $x+z=4$, $z=0$ düzlemleri arasındaki cismin hacmini veren iki katlı integrali yazınız.

$x^2+y^2-4y+4-4=0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow (0,2)$ merkezli z boyunca uzanmış silindir



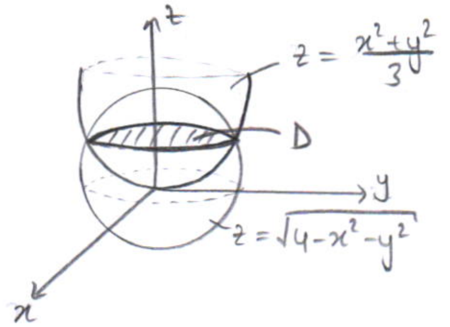


$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\ r^2-4r\sin\theta=0 \Rightarrow r=4\sin\theta$$

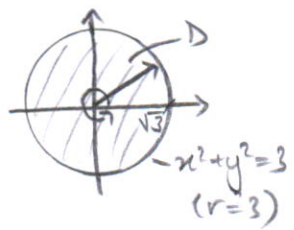
($r=2$ değil! θ'ya göre uzunluk değişiyor!)

$$V=\iint_D (4-x)\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta}(4-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Örnek: $x^2+y^2+z^2=4$ ün altında $3z=x^2+y^2$ nın üstünde kalan cismin hacmini hesaplayınız



$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=4 \\ x^2+y^2&=3z \end{aligned}\right\} z^2+3z-4=0 \overset{z>0}{\Rightarrow} z=1 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2=3}_{\substack{D \text{ bölgesi} \\ (\text{izdüşüm böl.})}}$$



$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \begin{aligned} dx\,dy&=r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2&=r^2 \end{aligned}$$

$$V=\iint_D\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr\,d\theta=\frac{19}{6}\pi$$

İki Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

Jakobien Determinantı

$x=g(u,v)$ ve $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün Jakobien determinantı veya Jakobien'i şöyledir:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Jakobien aynı zamanda, $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ olarak da gösterilebilir.

$\cancel{*}$ $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$ 'dir.

Değişken Dönüşümü

$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ değişken dönüşümü yapılırsa D bölgesi bir G bölgesine dönüşür. Bu durumda,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(g(u,v),\, h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$*$ Jakobiyen, D bölgesi G bölgesine dönüştürülürken, D de bir noktanın civarındaki alanın dönüşümde ne kadar genişlediğini veya büzüldüğünü ölçer.

Örnek: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal dönüşümü ile $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ olduğunu gösteriniz.

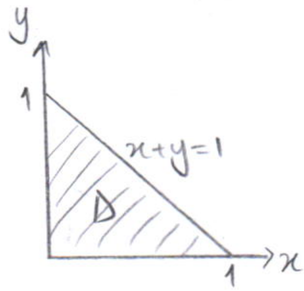
$$\left.\begin{matrix} x=g(r,\theta) \\ y=h(r,\theta)\end{matrix}\right\} J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$dx\,dy = |J(r,\theta)|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

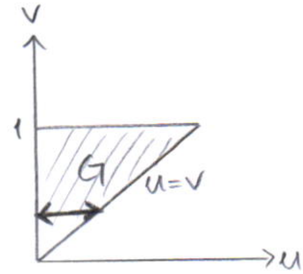
Örnek: $D:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ olmak üzere, $\iint\limits_D e^{\frac{x}{x+y}}\,dx\,dy = ?$

$\left.\begin{array}{l} x=u \\ x+y=v \end{array}\right\}$ dönüşümü yapalım

D		G
$x=0$	$\longrightarrow$	$u=0$
$y=0$	$\longrightarrow$	$x=v \Rightarrow u=v$
$x+y=1$	$\longrightarrow$	$v=1$



$\longrightarrow$



$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$$dx\,dy = |J(u,v)|\,du\,dv = du\,dv$$

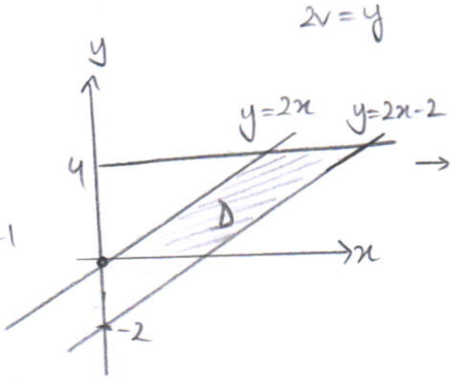
$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{x+y}}\,dx\,dy = \iint\limits_G e^{u/v}\,du\,dv = \int_0^1\int_0^v e^{u/v}\,du\,dv = \int_0^1 \left.\frac{e^{u/v}}{\frac{1}{v}}\right|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1)\,dv$$

$$= \frac{v^2}{2}(e-1)\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

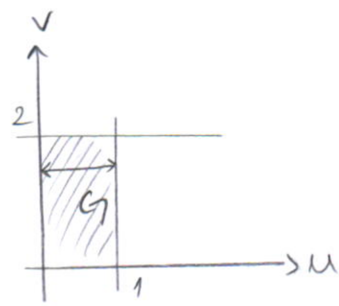
Örnek: $\displaystyle\int_0^4\int_{y/2}^{y/2+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ integralini $u=\frac{2x-y}{2}$, $v=\frac{y}{2}$ dönüşümünü uygulayarak hesaplayın.

$u+v=x$
$2v=y$

D		G
$x=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2x$	$\longrightarrow$	$u+v=v \Rightarrow u=0$
$x=\frac{y}{2}+1 \Rightarrow y=2x-2$	$\longrightarrow$	$u+v=v+1 \Rightarrow u=1$
$y=0$	$\longrightarrow$	$2v=0 \Rightarrow v=0$
$y=4$	$\longrightarrow$	$2v=4 \Rightarrow v=2$



$\longrightarrow$



$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow I = \iint\limits_G u\,|J(u,v)|\,du\,dv = \int_0^2\int_0^1 2u\,du\,dv$$

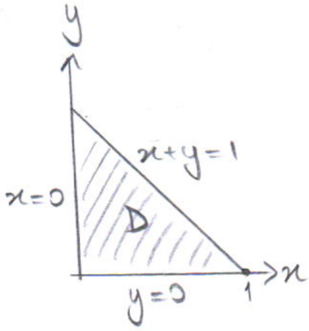
$$= \int_0^2 u^2\Big|_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

Örnek: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.

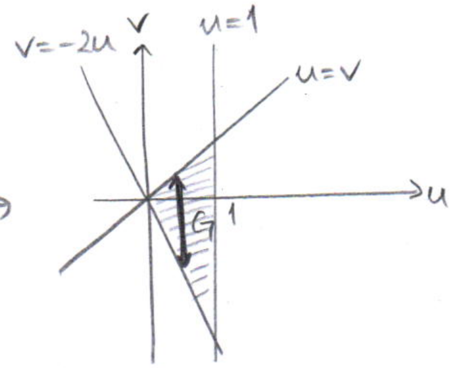
$\left.\begin{array}{l} u = x+y \\ v = y-2x \end{array}\right\}$ dönüşümü yapalım.

D		G
$y=1-x \Rightarrow x+y=1$	$\longrightarrow$	$u=1$
$x=0$	$\longrightarrow$	$u=v$
$y=0$	$\longrightarrow$	$v=-2u$

$x=1$ → sınır değil, nokta



$\longrightarrow$



$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \iint_G \sqrt{u}\,v^2 \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u}\,v^2\,dv\,du$$

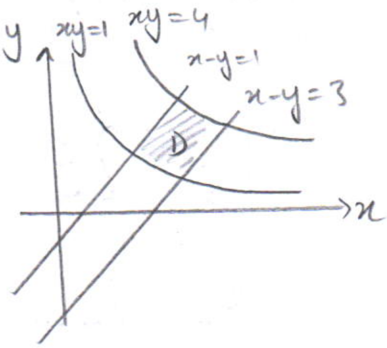
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{u}\,\frac{v^3}{3}\Big|_{-2u}^{u} du = \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{2}{9}$$

Örnek: $D: \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=3 \\ xy=1 \\ xy=4 \end{cases}$ eğrilerinin sınırladığı 1. bölgede

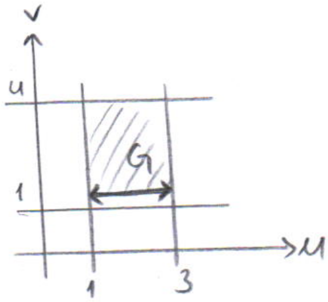
$$\iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy = ?$$

$\left.\begin{array}{l} x-y=u \\ xy=v \end{array}\right\}$ dönüşümü ile

D		G
$x-y=1$	$\rightarrow$	$u=1$
$x-y=3$	$\rightarrow$	$u=3$
$xy=1$	$\rightarrow$	$v=1$
$xy=4$	$\rightarrow$	$v=4$



$\rightarrow$



$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{x+y} \Rightarrow \iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_G (x^2-y^2)\cdot\frac{1}{x+y}\,du\,dv$$

$$= \iint_G (x-y)\,du\,dv = \int_1^4\int_1^3 u\,du\,dv = 12$$