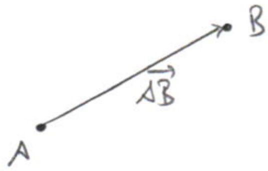
VEKTÖRLER ve UZAY GEOMETRİSİ

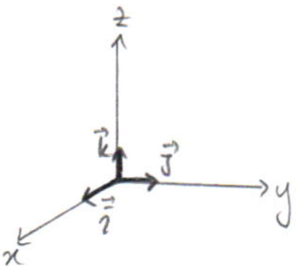
VEKTÖRLER



$\vec{AB}$ yönlü doğru parçasına vektör denir.

A: başlangıç noktası

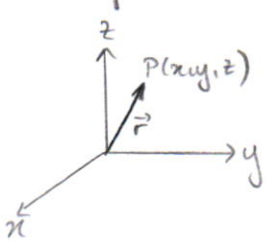
B: bitiş noktası



3 boyutlu uzayda bir kartezyen koordinat sistemi verildiğinde sırasıyla orijinden $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ noktalarına olan, oklarla temsil edilen 3 standart baz vektörü $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ olarak tanımlanır.

3 boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Örneğin, (x, y, z) noktasının yer vektörü:



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ile verilir.

$\vec{r}$ vektörünün uzunluğu: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dir.

* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 3-boyutlu uzayda iki nokta ise P_1'den P_2'ye olan $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ vektörü;

$$\vec{v} = \vec{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ve $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ vektörünün uzunluğu;

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Vektörlerde Cebirsel İşlemler:

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ birer vektör ve α bir skaler olsun.

1) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1)\vec{i} + (u_2+v_2)\vec{j} + (u_3+v_3)\vec{k}$

2) $\alpha . \vec{u} = \alpha u_1 \vec{i} + \alpha u_2 \vec{j} + \alpha u_3 \vec{k}$

* $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v}$

Birim vektör: Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}=(1,0,0)\\ \vec{j}=(0,1,0)\\ \vec{k}=(0,0,1)\end{array}\right\}\text{ standart birim vektörler}$$

* Her vektör, standart birim vektörlerin bir lineer bileşimi olarak ifade edilir:

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)=u_1(1,0,0)+u_2(0,1,0)+u_3(0,0,1)$$
$$=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$$

* Her vektörün kendi doğrultu ve yönünde birim vektörü vardır.

$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ için;

$\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ yönünde ve doğrultusunda olan birim vektördür.

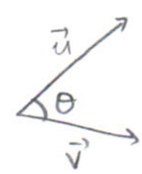
Skaler Çarpım:

$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ ve $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ vektörleri için skaler çarpım

$$\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

olarak tanımlanır.

İki vektör arasındaki açı: $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı



$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

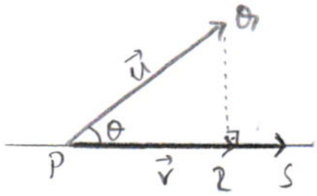
ile bulunur.

* $\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\quad(\vec{u}\perp\vec{v})$

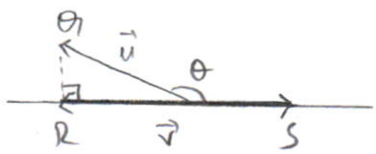
Skaler çarpımın özellikleri: $\vec{u},\vec{v}$ ve $\vec{w}$ birer vektör, α bir skaler olsun.

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
3) $\alpha(\vec{u}.\vec{v})=(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})$
4) $\vec{0}.\vec{u}=0$
5) $\vec{u}.\vec{u}=|\vec{u}|^2$
6) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq|\vec{u}|.|\vec{v}|$
7) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

Vektör İzdüşümleri:



$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ vektörünün sıfırdan farklı $\vec{v}=\overrightarrow{PS}$ vektörüne izdüşümü, Q dan PS doğru parçasına dik bir çizgi çizilmesiyle elde edilen $\overrightarrow{PR}$ vektörüdür. Bu vektör $proj_v(u)$ (u nun v ye izdüşümü) ile gösterilir.



$|\vec{u}|\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ vektörünün $\vec{v}$ yönündeki skaler bileşeni

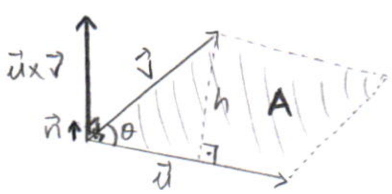
$$proj_v(u) = (|\vec{u}|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$

Vektörel Çarpım:

* Skaler çarpım $\mathbb{R}^n$ de geçerlidir fakat vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ te geçerlidir.

! * İki vektörün skaler çarpımı sonucu bir sayı, vektörel çarpımı sonucu bir vektör oluşur.

* Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ teki vektörleri çarpmanın bir diğer yoludur.



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değillerse bir düzlem belirlerler.
$\vec{u}\times\vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine diktir.
$|\vec{u}\times\vec{v}|$ taralı bölgenin (A) alanına eşittir. (paralelkenar)

$\sin\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|}$

$A = |\vec{u}|.h = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

$\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine dik olan birim vektör olmak üzere,

$\vec{u}\times\vec{v} = (|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta).\vec{n}$ dir.

$$\left.\begin{array}{c}\theta=0\\ \text{veya}\\ \theta=\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=0 \qquad (\vec{u}\parallel\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=0)$$

Vektörel çarpımın özellikleri: $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ birer vektör, r, s skaler olsun.

1) $(r\vec{u})\times(s\vec{v}) = (rs)(\vec{u}\times\vec{v})$

2) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

3) $\vec{0}\times\vec{u} = \vec{u}\times\vec{0}$

4) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$

5) $(\vec{v}+\vec{w})\times\vec{u} = \vec{v}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{u}$

6) $\left.\begin{array}{l}(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{u} = 0\\ (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v} = 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}\\ \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}\end{array}$

7) $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{u}\times\vec{v}$ sağ el kuralı ile belirlenen bir üçlü oluştururlur.

8) $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

Vektörel çarpım için determinant formülü: $\vec{u} = u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ ve $\vec{v} = v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Karışık Çarpım:

Herhangi $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ vektörleri için $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ büyüklüğüne $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektörlerinin karışık çarpımı denir.

Bu çarpım,

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

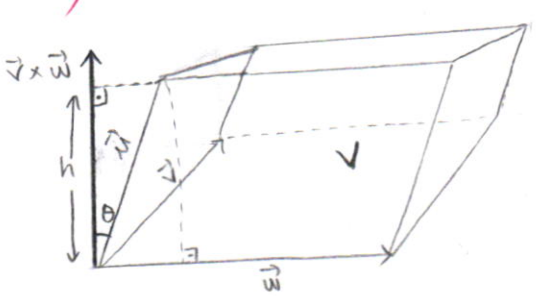
ile hesaplanır.

Karışık çarpımın özellikleri:

1) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v})$

2) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = -\vec{u}.(\vec{w}\times\vec{v})$

3) $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$ ise vektörler aynı düzlemdedir.



$h = |\vec{u}|.\cos\theta$: yükseklik

$A = |\vec{v}\times\vec{w}|$: taban alanı

$V = h.A = |\vec{u}|.|\cos\theta|.|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$

* $\vec{u}, \vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri ile oluşturulmuş paralel yüzlünün hacmi $|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$'dir.