Ör: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevini türev tanımından hesaplayınız

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h.\cos x-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\sin h.\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x.\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{0}+\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}.\cos x$$

$$=\cos x$$

Ör: $y=\frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini hesaplayınız

$y=\frac{1}{1+x} \Rightarrow y=(1+x)^{-1}$ $\quad y'=-1.(1+x)^{-2}$ $\quad y''=2.(1+x)^{-3}$

$y'''=-2.3.(1+x)^{-4}$ $\quad y^{(4)}=2.3.4.(1+x)^{-5}$

$---$ $\quad y^{(n)}=(-1)^n.n!.(1+x)^{-(n+1)}$

Kapalı Fonksiyonlarda Türev

$x^3+y^3-9xy=0$, $x^2+xy^3+y=0$, $y^2-x=0$

$F(x,y)=0$ şeklindeki bir fonksiyon için

$y=f(x)$ şeklinde yazamayabiliriz

Ör: $y^2=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$ ($\frac{dy}{dx} \Rightarrow$ y fonksiyon x'e göre türev) $\frac{dy}{dx} = y'$

$y^2=x$

$2yy'=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{2y} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

II yol

$y^2=x \Rightarrow y=\mp\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ör: $(3,-4)$ noktasında $x^2+y^2=25$ çemberinin eğimini bulunuz

I. yol $x^2+y^2=25 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow 2yy'=-2x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-x}{y}}$

$m=y'\big|_{(3,-4)}=-\frac{3}{(-4)}=\frac{3}{4}$

II yol: $x^2+y^2=25 \Rightarrow y=\mp\sqrt{25-x^2}$ $\rightarrow y=\sqrt{25-x^2}$ X $\rightarrow y=-\sqrt{25-x^2}$ ✓

$y'=-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{3}{4}$

Ör: $y^2 = x^2 + \sin(xy) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$ $\left(\dfrac{dy}{dx} = y'\right)$

y fonksiyon x'e göre türev.

$2yy' = 2x + (xy)' \cdot \cos(xy).$

$2yy' = 2x + (y + xy') \cdot \cos(xy)$

$2yy' = 2x + y\cos(xy) + xy'\cos(xy).$

$2yy' - xy'\cos(xy) = 2x + y\cos(xy).$

$y' \cdot (2y - x\cos(xy)) = 2x + y\cos(xy)$

$$y' = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}.$$

Ör: $y^6 - y - x^3 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$ $\left(\dfrac{dy}{dx} = y'\right)$

$6y^5y' - y' - 3x^2 = 0.$

$y' \cdot (6y^5 - 1) - 3x^2 = 0$

$y'(6y^5 - 1) = 3x^2$

$$y' = \frac{3x^2}{6y^5 - 1}.$$

Ör: $x^2y - xy^3 + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$ ($\dfrac{dy}{dx} = y'$ y fonksiyon x'e göre türev)

x'e göre türev

$$x^2y - xy^3 + \sin(x+y) = 0$$

$$2x.y + x^2y' - y^3 - x.3y^2.y' + (x+y)'.\cos(x+y) = 0$$

$$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + (1+y').\cos(x+y) = 0$$

$$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + \cos(x+y) + y'\cos(x+y) = 0$$

$$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + \cos(x+y))y' = 0$$

$$2xy - y^3 + \cos(x+y) + (x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y))y' = 0$$

$$y' = -\frac{2xy - y^3 + \cos(x+y)}{x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y)}$$

Ör: $y = \sin(x+y) \Rightarrow y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

x'e göre türev

$$y = \sin(x+y)$$

$$y' = (x+y)'\cos(x+y)$$

x'e göre türev

$$y' = (1+y')\cos(x+y)$$

$(1+y')$

$$y'' = y''\cos(x+y) + (1+y').(x+y)'.(-\sin(x+y))$$

$$y'' = y''.\cos(x+y) - (1+y')^2.\sin(x+y)$$

$$y'' = \frac{(1+y')^2\sin(x+y)}{-1+\cos(x+y)}$$

Ör: $x+\tan(xy)=0 \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=?$

$x+\tan(xy)=0$

$1+(xy)'.(1+\tan^2(xy))=0$

$1+(y+xy').\underbrace{(1+\tan^2(xy))}_{\overset{\shortparallel}{\sec^2(xy)}}=0$

$1+(y+xy').\sec^2(xy)=0$

$1+y\sec^2(xy)+xy'\sec^2(xy)=0$

$xy'\sec^2(xy)=-(1+y\sec^2(xy))$

$$y'=-\frac{(1+y\sec^2(xy))}{x\sec^2(xy)}$$

$$y'=-\frac{(\cos^2(xy)+y)}{x}$$

* Normal doğrular: Teğet doğrusuna dik doğrulardır.

** Ör: (2,4) noktasının $x^3+y^3-9xy=0$ eğrisi üzerinde bulunduğunu gösteriniz. Eğrinin teğet ve normal doğrusunu bulunuz.

$8+64-9.2.4=0 \rightarrow$ (2,4) noktası eğri üzerinde

x'e göre türev

$x^3+y^3-9xy=0$

$3x^2+3y^2y'-9y-9xy'=0$

$(3y^2-9x)y'=9y-3x^2$

$$y'=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

$$m_T=y'\Big|_{(2,4)}=\frac{3.4-2^2}{4^2-3.2}=\frac{12-4}{16-6}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$m_T.m_N=-1 \Rightarrow m_N=-\frac{5}{4}$$

Teğet doğru denklemi: (2,4) noktadan geçen eğimi $m_T=\frac{4}{5}$ olan doğru.

$$y-4=\frac{4}{5}.(x-2)$$

$$\boxed{y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}}$$

Normal doğru denklemi: (2,4) noktadan geçen eğimi $m_N=\frac{-5}{4}$ olan doğru

$$y-4=-\frac{5}{4}.(x-2) \Rightarrow \boxed{y=\frac{-5}{4}x+\frac{13}{2}}$$

Lineerleştirme: Eğer f fonksiyonu $x=a$ noktasında türevlenebilir ise aşağıdaki yaklaşım fonksiyonu

$$L(x)=f(a)+f'(a).(x-a)$$

f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirmesi olarak tanımlanır. f in L ile

$$f(x)\approx L(x)$$

yaklaşımına f fonksiyonunun a noktasındaki lineer yaklaşımı denir. $x=a$ noktasına da bu yaklaşımın merkezi denir.

Ör: $f(x)=\sqrt{1+x}$ fonksiyonunun $x=0$ daki lineerleştirmesini bulunuz.

$f(0)=1$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$$L(x)=f(0)+f'(0).(x-0)$$

$$L(x)=1+\frac{1}{2}x$$

Ön: $(1,001)^5 - 3.(1,001)^{3/2}+2$ değerini lineerleştirme yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayınız.

$f(x) = x^5 - 3x^{3/2}+2$.

$f(1) = 1-3+2=0$

$f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2}$, $f'(1) = 5-\frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

$L(x) = f(1) + f'(1).(x-1)$

$L(x) = 0 + \frac{1}{2}.(x-1)$

$L(x) = \frac{1}{2}.(x-1)$

$f(x) \approx L(x)$.

$f(x) \approx \frac{1}{2}(x-1)$

$f(1,001) \approx \frac{1}{2}.(1,001-1)$

$\approx \frac{1}{2}.(0,001)$

$\approx 0,0005$

Diferansiyel: $y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir ve dy diferansiyeli

$$dy = f'(x)\,dx$$

ile tanımlanır.

Ör: $y = x^5 + 37x$ için a) dy diferansiyelini hesaplayınız ($y=f(x)$)

$dy = f'(x)\,dx$, $f'(x) = 5x^4 + 37$.

$dy = (5x^4+37)\,dx$

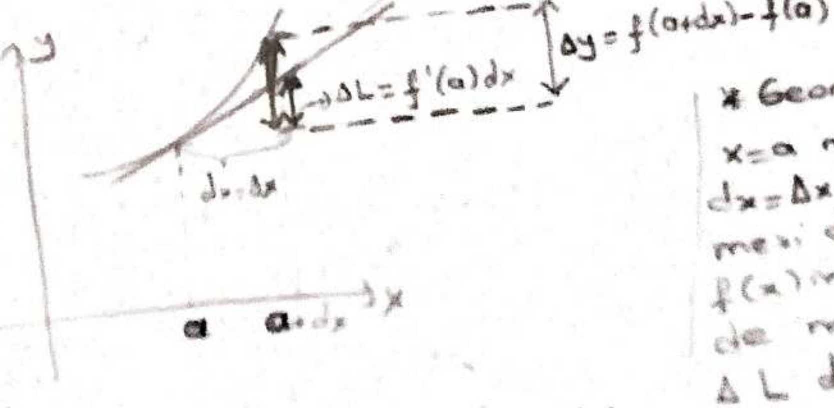
b.) $x=1$ ve $dx = 0{,}2$ için $dy = ?$

$dy = (5+37)\cdot(0{,}2)$

$dy = 42 \cdot 0{,}2$

$dy = 8{,}4$

* NOT



* Geometrik olarak $x=a$ noktasının $dx=\Delta x$ kadar değişmesi durumunda $f(x)$'in lineerleşmesinde meydana gelen ΔL değişimi dy diferansiyelidir.

$L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$\Delta L = L(a+dx) - L(a) = f(a) + f'(a)\cdot(a+dx-a) - f(a)$

$= f'(a)\,dx$

Ör: $(1{,}001)^5 - 3.(1{,}001)^{3/2} + 2$ değerini diferansiyel ile yaklaşık olarak hesaplayınız

$f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2 \quad , \quad f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

$f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2} x^{1/2} \quad , \quad f'(1) = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\Delta f \approx df} \quad (\Delta y \approx dy)$

$\boxed{f(x+dx) - f(x) \approx df}$

$f(x+dx) \approx f(x) + df \qquad (df = f'(x)dx)$

$\qquad (dy = y'.dx)$

$f(\underbrace{1}_{x} + \underbrace{0{,}001}_{dx}) \approx f(1) + df \qquad (df = f'(1).0{,}001)$

$df = \frac{1}{2} \cdot 0{,}001$

$= 0{,}0005$

$f(1{,}001) \approx 0 + 0{,}0005$

$f(1{,}001) \approx 0{,}0005$

Artan / Azalan Fonksiyonlar

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevli olsun.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$, $[a,b]$ de artandır.
* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$, $[a,b]$ de azalandır.

Ör: $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları bulunuz

$f'(x) = 12x - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0$

$(3 - x^2).x = 0$

$x = \mp\sqrt{3}$ $\quad x = 0$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
	↗		↘		↗		↘

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}] \Rightarrow$ artan

$[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty)$ azalan

Ör: $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 0.$

$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2.(x^2 - 4x + 3) = 0$

-3, -1

$x^2.(x-3).(x-1) = 0$

$x = 0$ (çift katlı kök) $\quad x = 3 \quad x = 1$

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
	artan		artan		azal		artan

Ters Fonksiyonlar ve Türevleri

Tanım: D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu D tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur denir.

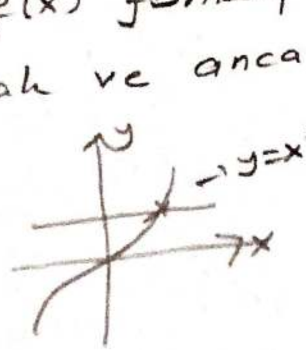
Ör: $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu negatif olmayan sayılardan oluşan herhangi bir tanım kümesi üzerinde bire-birdir çünkü

$x_1 \neq x_2$ iken $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ olur.

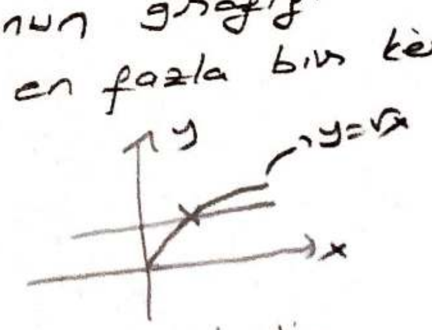
Ör: $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında bire-bir değildir çünkü $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ dır.

* Bire-bir fonksiyonlar için yatay doğru testi

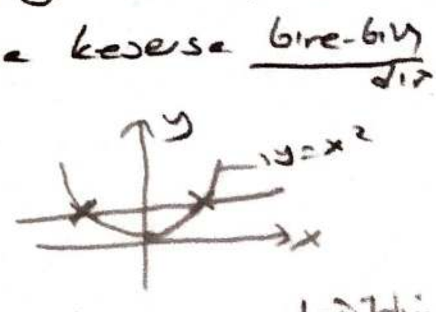
* $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere keserse bire-birdir.



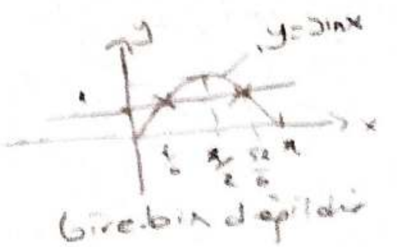
bire-bir dir



bire-bir dir



bire-bir değildir



bire-bir değildir

** Bir fonksiyon bir I aralığında birebir ise. O aralıkta artan veya azalandır.

Ters Fonksiyon: f'nin D tanım kümesi üzerinde görüntü kümesi R olan birebir bir fonksiyon olduğunu varsayalım ters fonksiyon f^{-1} şöyle tanımlanır

Eğer $f(b)=a$ ise $f^{-1}(a)=b$ dir

f^{-1}'in tanım kümesi R ve görüntü kümesi D dir

Ters Fonksiyonu Bulmak

Ör. $y=\frac{x}{2}+1$ fonksiyonunun tersini x in bir fonksiyonu olarak bulunuz

1. adım: x'i y cinsinden çöz

$$x=2y-2.$$

2. adım: x've y'yi yer değiştir

$$y=2x-2.$$

Buna göre $f(x)=\frac{x}{2}+1$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(x)=2x-2 \text{ dir.}$$

NOT: $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\left(\frac{x}{2}+1\right)-2=x$

$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f(2x-2)=\frac{2x-2}{2}+1=x$

Ters Fonksiyonlar İçin Türev Kuralı

Eğer f nin tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ varsa ve hiç sıfır olmuyorsa, f^{-1} tanım kümesinin (f nin görüntü kümesi) her noktasında türevlenebilirdir ve türevi

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dir.

* f^{-1} in tanım kümesindeki bir b noktasındaki $(f^{-1})'$ değeri ($f^{-1}(b)=a$ olmak üzere)

$f^{-1}(b)=a \Rightarrow f(a)=b$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$$

dir.

Ör: $f(x)=x^2 \quad (x>0) \Rightarrow f'(x)=?$

I. yol: $\underset{f(x)=x^2}{y=x^2} \Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow \underset{f^{-1}(x)=\sqrt{x}}{y=\sqrt{x}}$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. yol: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

($f(x)=x^2$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.)

Ör: $f(x)=x^3-2$ için $f^{-1}(x)$ için formül bulmadan $(f^{-1})'(6)$ değerini bulunuz.

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(b)}_{a})}=\frac{1}{f'(a)}$$

Burada $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$ dır.

$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(a)}, \qquad 6=x^3-2$$

$$8=x^3$$

$$\boxed{+2=x}$$

$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(2)},$$

$$f(x)=x^3-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(2)=12$$

$$(f^{-1})'(6)=\frac{1}{12}.$$