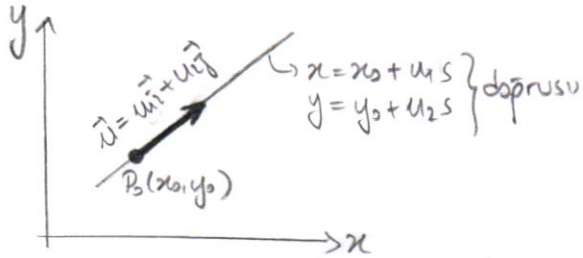


YÖNLÜ TÜREV

Gök değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonunda, x ve y 'ye göre kısmi türevler, pirdiği x veya y yönünde deüştirdiğimizde f deüi (yani ağıtıdaki) deüişimi vermekteydi. f nin pirdisini x veya y 'ye paralel olmayan bir yönde deüştirirsek, f deüi deüişim oranını "yönlü türev" ile bulmamız gerekecektir. Kısmi türev nasıl x ve y 'ye göre alınıyorsa, yönlü türev de pirdi uzayında belirli bir \vec{u} vektörü boyunca alınır. f nin \vec{u} yönündeki yönlü türevi, fonksiyonun ağıtısında ortaya çıkan deüişimdir. Kısacası yönlü türev, kısmi türevi genelleştirir.



s , P_0 'dan \vec{u} yönünde yay uzunluğunu ölaen parametre ise $\frac{df}{ds}$, f nin P_0 'da \vec{u} yönündeki deüişim oranını verir.

$P_0(x_0, y_0)$ noktasında, $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x,y)$ nin türevi, limitin mevcut olması halinde,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$f_x(x_0, y_0) \rightarrow f$ nin \vec{i} yönündeki
 $f_y(x_0, y_0) \rightarrow f$ nin \vec{j} yönündeki } yönlü türevleridir.

Örnek: Tanımı kullanarak, $P_0(1,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2 + yx$ fonksiyonunun

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$ vektörü yönündeki türevini bulun.

$$\begin{aligned} (D_{\vec{u}}f)_{P_0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) - f(1,2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right) - 3}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}s + s^2}{s} = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Hesaplama ve Gradyentler

$P_0(x_0, y_0)$ 'dan geçen, $u = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde s yay uzunluğu parametresi ile verilen $x = x_0 + su_1$, $y = y_0 + su_2$ doğrusu için,

$$\begin{aligned}\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{dy}{ds} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 \\ &= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \vec{j} \right]}_{f \text{ 'nin } P_0 \text{ 'daki gradyenti}} \cdot \underbrace{[u_1\vec{i} + u_2\vec{j}]}_{\vec{u} \text{ yönü}}\end{aligned}$$

Tanım: $f(x, y)$ 'nin $P_0(x_0, y_0)$ 'daki gradyent vektörü:

$$\text{Grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

Yönlü Türev: Eğer $f(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ 'i içeren bir bölgede türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

Örnek: $f(x, y) = xe^y + \cos xy$ 'nin $(2, 0)$ noktasındaki $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayın.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\nabla f = (e^y - y \sin xy) \vec{i} + (xe^y - x \sin xy) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \nabla f|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$(\nabla f)|_{(2,0)} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

*) $z=f(x,y)$ nin $(D_z f)_p$ türevi:

\vec{u} yönünde P daki yönlü türev

" " " artış hızı / oranı

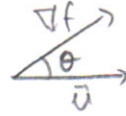
" " " azalış hızı / oranı

" " " değişim oranı

anlamlarına göre.

Yönlü Türevin Özellikleri:

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$



1) $\cos \theta = 1$ ($\theta = 0$) olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar (en büyük yönlü türev değerine ulaşır). Yani f en çok ∇f gradyent vektörü yönünde artar.

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos 0 = |\nabla f|$$

2) Benzer şekilde f fonksiyonu en çok $-\nabla f$ gradyent vektörü yönünde azalır. ($\theta = \pi$)

$$D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos \pi = -|\nabla f|$$

3) Bir $\nabla f \neq 0$ gradyentine dik olan herhangi bir \vec{u} yönü f 'deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir ve $D_{\vec{u}} f = |\nabla f| \cos \frac{\pi}{2} = |\nabla f| \cdot 0 = 0$.

Örnek: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) $(1,1)$ de en çok artan

b) $(1,1)$ de en çok azalan

c) $(1,1)$ de f 'deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$$\nabla f = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$$

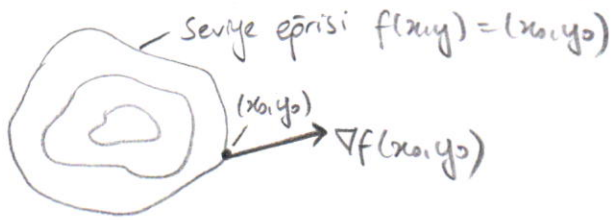
$$a) \vec{u} \text{ ile } \nabla f \text{ aynı yöndedir: } \vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{|\vec{i} + \vec{j}|} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$b) \vec{u} \text{ ile } \nabla f \text{ ters yöndedir: } -\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$c) \vec{u} \perp \nabla f: \left. \begin{array}{l} \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \nabla f = \vec{i} + \vec{j} \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \nabla f = a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}, \vec{u}_2 = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

Seviye Eğrilerinin Tepepleri ve Gradyentler

$f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonunun tanım kümesinin her (x_0, y_0) noktasında, f 'nin gradyent vektörü (x_0, y_0) boyunca seviye eğrisine normaldir.



İspat = $f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r} = p(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit bir değer alıyorsa, $f(p(t), h(t)) = c$ dir. t 'ye göre türev alınır:

$$f \rightarrow x,y \rightarrow t \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{dp}{dt} \vec{i} + \frac{dh}{dt} \vec{j} \right) = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\nabla f} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}$

$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f \perp \vec{r}'(t) \Rightarrow \nabla f \text{ eğriye normal.}$$

Gradyentler için Cebirsel Kurallar:

- 1) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
- 2) $\nabla(kf) = k \nabla f$
- 3) $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
- 4) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve bir $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ birim vektörü için:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad \text{ve}$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

$$= |\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

Daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için belirtilen kurallar üç değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek: $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ nin $P_0(1,1,0)$ noktasında $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ yönündeki türevini bulunuz. f fonksiyonu P_0 'da en hızlı hangi yönde değişir? Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla f = (3x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \nabla f|_{P_0} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$(D_{\vec{u}}f)_{(1,1,0)} = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \vec{u} = (2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \left(\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \right) = \frac{4}{7}$$

Fonksiyon en hızlı $\nabla f = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar ve $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yönlere değişim oranları:

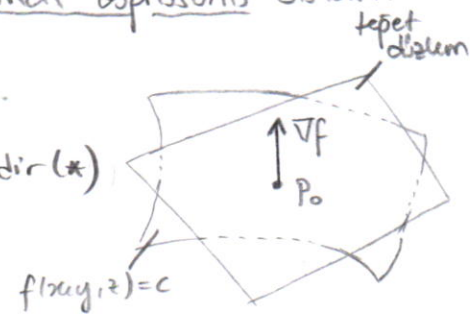
$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{ve} \quad -|\nabla f| = -3$$

TEGET DÜZLEMLER ve NORMAL DOĞRULAR

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun $f(x,y,z) = c$ seviye yüzeyi üzerinde bulunan bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki tepet düzlemini ve normal doğrusunu bulalım:

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ 'dan geçen teget düzleme diktir.} \\ P_0 \text{ 'dan geçen normal doğruya paraleldir (*)} \end{array} \right.$

$$\nabla f|_{P_0} = f_x(P_0)\vec{i} + f_y(P_0)\vec{j} + f_z(P_0)\vec{k} \quad \text{olduğundan,}$$



$f(x,y,z)$ nin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ daki teget düzlemi:

$$f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0) = 0$$

$f(x,y,z)$ nin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ daki normal doğrusu:

$$x = x_0 + f_x(P_0)t$$

$$y = y_0 + f_y(P_0)t$$

$$z = z_0 + f_z(P_0)t$$

(*) İki değişkenli fonk.lardaki ispata paralel şekilde kolayca görülebilir.

Not: İki değişkenli fonk.larda ∇f , seviye ekrisine dik (normal) idi,
" " " " ∇f , " yüzeyine diktir.

Örnek: $z = 9 - x^2 - y^2$ yüzeyinin $P_0(1, 2, 4)$ noktasındaki tepeet düzlemi ve normal doğrusunu bulunuz.

$$F: z + x^2 + y^2 - 9 = 0, \quad \nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla f|_{P_0} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} \begin{cases} \rightarrow \text{tepeet düzlemine dik} \\ \rightarrow \text{normal doğrusuna paralel} \end{cases}$$

$$2(x-1) + 4(y-2) + 1(z-4) = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 14 \quad \text{tepeet düzlem}$$

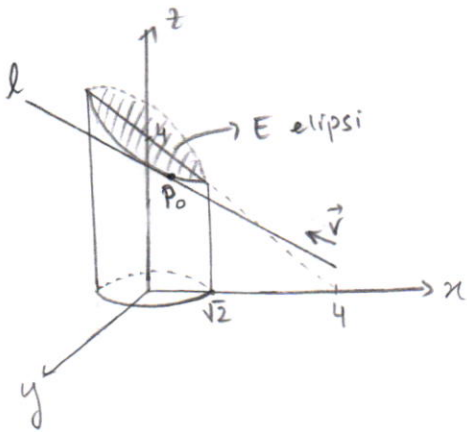
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{normal doğru}$$

Örnek: $(0, 0, 0)$ noktasında $z = x \cos y - y e^x$ yüzeyine tepeet olan düzlemi bulun.

$$F: z - x \cos y + y e^x = 0 \quad \nabla f = (-\cos y + y e^x)\vec{i} + (x \sin y + e^x)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla f|_{(0,0,0)} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{tepeet düzlemine dik} \Rightarrow -1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \\ \Rightarrow -x + y + z = 0.$$

Örnek: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ ve $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$ yüzeyleri bir E elipsi boyunca kesişirler. $P_0(1, 1, 3)$ noktasında E 'ye tepeet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{silindire}$$

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \quad \text{düzlem}$$

$$\begin{aligned} \text{doğru} \Rightarrow \text{silindire tepeet} & \left\{ \begin{array}{l} \nabla f \perp \vec{v} \\ \nabla f \Rightarrow \text{silindire dik} \end{array} \right. \\ \text{doğru} \Rightarrow \text{düzlem tepeet} & \left\{ \begin{array}{l} \nabla g \perp \vec{v} \\ \nabla g \Rightarrow \text{düzlem dik} \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \vec{v} \parallel \nabla f \times \nabla g$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{(1,1,3)} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\nabla g = \vec{i} + \vec{k} \Rightarrow \nabla g|_{(1,1,3)} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= 3 - 2t \end{aligned}$$