LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

2.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Lineer Denklem Sistemlerine Giriş

Lineer denklem sistemleri, matematik, fizik, kimya, mühendislikte karşılaşılan bir çok problemde karşımıza çıkarlar.

Lineer denklem sisteminin çözüm yöntemlerinin aranması sonucunda, matris kavramı ve matris cebiri ortaya çıkmıştır.

Matrisler, özellikle günümüzde mühendislikte, hareket geometrisinde, animasyon ve bilgisayar teknolojisinde bir çok problemin de çözümünü kolaylaştırmıştır.

Bu bölümde, lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerini inceleyerek, matris kavramının nasıl ortaya çıktığını göreceğiz.

Daha sonraki bölümlerde de, matris cebirinin ve determinantın kullanılmasıyla birlikte, lineer denklem sistemlerinin farklı çözüm yöntemlerini ele alacağız.

Doğrusal (Lineer) Denklem (Linear Equation)

Tanım

Bir lineer (doğrusal) denklem deyince, $a_1, a_2, ..., a_n, c$ reel sayılar, $x_1, x_2, ..., x_n$ ise değişkenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

formundaki bir denklem anlayacağız. Bu denklemde, $x_1, x_2, ..., x_n$'ye denklemin bilinmeyenleri de denir. Örneğin,

$$2x + 3y + \sqrt{3}z = 5$$

üç değişkenli, yani x, y, z bilinmeyenli bir lineer denklemdir.

Örnek

Aşağıdaki denklemlerin lineer olup olmadıklarını belirtiniz.

a) $2x + 3y - \sqrt{2}y = 3$ **b)** $3x - 2\sqrt{y} - 3 = 0$
c) $x + yz + z = 3$ **d)** $x_2 - (\sqrt{3} - 2)x_1 + x_3 = \sqrt{2}$
e) $x + \sin y + z = 1$ **f)** $x + \log y - z = 3$
g) $2x^2 - 3y + z = 1$ **h)** $(\ln 3)\, x - (\sin 45^\circ)\, y + \pi z = e$

Bir lineer denklemde, çarpım halindeki değişkenler, yüksek dereceden değişkenler, kök içindeki değişkenler, değişkenlerin üstel, logaritmik veya trigonometrik fonksiyonları lineerliği bozan durumlardır. Buna göre, b) seçeneğindeki $\sqrt{y}$ terimi, c) seçeneğindeki yz terimi, e) seçeneğindeki $\sin y$ terimi, f) seçeneğindeki $\log y$ terimi, g) seçeneğindeki x^2 terimi lineerliği bozarlar. Lineer olan seçenekler, sadece a), d) ve h) seçenekleridir.

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Sayıları

Bir lineer denklemin çözümü demek, bu denklemi sağlayan değerler demektir. **Çözüm sayısı,** değişkenlerin istendiği sayı kümesine ve denklemdeki bilinmeyen sayısına göre **olmayabilir** ya da, **tek** veya **sonsuz** olabilir. Örneğin,

$$2x + 3y + 3z = 5$$

üç değişkenli lineer denkleminin sonsuz çözümü vardır. $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 0$ veya $x = 4$, $y = 0$ ve $z = -1$ gibi çözümler bulunabilir. Bu lineer denklemin çözümlerini en genel şekilde parametreler yardımıyla verebiliriz.

Örnek

$x + 2y = 3$ lineer denkleminin çözümünü bulunuz.

X

Örnek

$x + 3y + 4z = 6$ lineer denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $x + 3y + 4z = 9$ lineer denkleminin çözümünü bulunuz.

Problem

$x + 3y = 9$ *lineer denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Problem

$4x + y + 3z = 10$ *lineer denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Problem

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ *ise,* $4x + y + 3z = 10$ *lineer denkleminin çözümünü bulunuz.*

Lineer Denklem Sistemi (System of Linear Equations)

Tanım

Birden fazla lineer denklemin oluşturduğu sisteme ise, **lineer denklem sistemi** denir. Bir lineer denklemin sisteminin çözümü demek, denklem sistemindeki her bir denklemi sağlayan değerler kümesi demektir. Örneğin,

$$\begin{cases} y + x = 3 \\ y - x = 5 \end{cases}$$

denklem sisteminde, $x = -1$ ve $y = 4$, her iki denklemi de sağladığından bir çözümdür ve bu çözüm tektir. Fakat, $y = 1$, $x = 2$ bir çözüm değildir. Çünkü sadece ilk denklemi sağlarlar. İkinci denklemi ise sağlamazlar. Bir denklem sisteminin tek çözümü olabileceği gibi, çözümü olmayabilir veya sonsuz çoklukta çözümü de olabilir. Eğer bir denklem sisteminin bir çözümü yoksa, bu sisteme **tutarsız** denilir.

Örnek

Örneğin,

$$\begin{cases} y-2x=4 \\ 2y-4x=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y-2x=4 \\ 2y-4x=8 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} y-2x=4 \\ y-x=3 \end{cases}$$

denklem sistemlerini göz önüne alalım. Bu denklem sistemlerinden ilkinin çözüm kümesi yoktur, ikincisinin sonsuz çözümü vardır, sonuncunun ise bir tek çözümü vardır. İlk denklem sisteminde, birinci denklem 2 ile çarpılırsa,

$$\begin{cases} 2y-4x=8 \\ 2y-4x=3 \end{cases}$$

olur ki, $2y-4x$ ifadesinin hem 8, hem de 3 olması mümkün değildir, yani sistem tutarsızdır ve çözüm yoktur.

Örnek

İkinci denklem sisteminde ise, ikinci denklem 2'ye bölünürse,

$$\begin{cases} y - 2x = 4 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$$

olur ki, aslında ortada bir tek denklem vardır ve bu denklemde de, $x = t$ denilirse, $y = 4 + 2t$ olur ve $t \in \mathbb{R}$ için sonsuz çözümün olduğu görülür.

Örnek

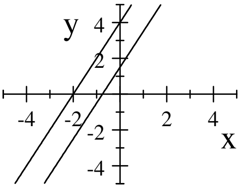
Üçüncü denklem sisteminde ise denklemler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$-x = 1 \Rightarrow x = -1$$

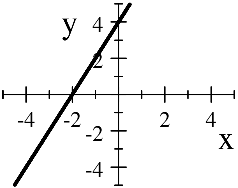
ve buradan da $y = 2$ elde edilir ve tek çözüm vardır.

İki Bilinmeyenli Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünün Yorumlanması

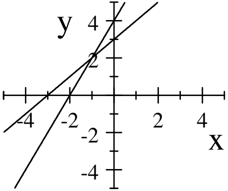
Bu sistemlerdeki her bir denklem, düzlemde bir doğru belirttiği için, bu doğruların grafikleri çizilerek de çözümleri hakkında yorum yapılabilir.



Çözüm Yok
(Paralel Doğrular)



Sonsuz Çözüm
(Çakışık Doğrular)



Tek Çözüm
(Kesişen Doğrular)

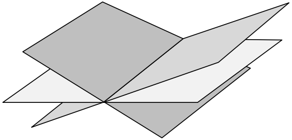
Üç Bilinmeyenli Lineer Denklem Sistemleri

Üç bilinmeyenli denklem sistemleri de, $ax + by + cz = d$ denkleminin uzayda bir düzlem belirttiği göz önüne alınarak yorumlanabilir.

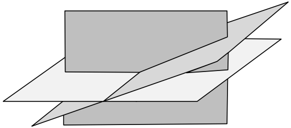
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

formunda verilen üç düzlemden oluşan bir denklem sistemini göz önüne alalım. Üç düzlem aynı bir noktada kesişiyorsa, tek çözüm vardır; üç düzlemden herhangi ikisinin paralel olması durumunda çözüm yoktur; düzlemlerden herhangi ikisinin veya üçünün çakışık olması; ya da üç düzlemin de bir doğru boyunca kesişmesi durumlarında da sonsuz çözüm vardır.

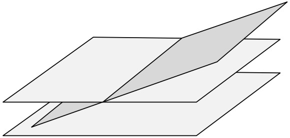
Üç Bilinmeyenli Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünün Yorumlanması



Sonsuz Çözüm
Bir Doğru Boyunca Kesişen 3 Düzlem



Tek Çözüm
Bir Noktada Kesişen 3 Düzlem



Çözüm Yok
Düzlemlerden İkisi Paralel

Lineer Denklemlerinde Üç Önemli Operasyon

- ★ Bir lineer denklem sisteminde, denklemlerin sırası önemli değildir. Yani, herhangi iki denklemin yeri değiştirilebilir.
- ★ Bir denklemi, sıfırdan farklı herhangi bir reel sayıyla çarpmak da çözüm kümesini değiştirmez.
- ★ Herhangi iki denklemin farkı, toplamı yine çözüm kümesini etkilemez.

Elemanter Operasyonlar ve Gauss - Jordan Eliminasyon Yöntemi

Tanım

Denklem sisteminin çözüm kümesini etkilemeyen aşağıdaki üç işleme, **denklemler arası elemanter operasyonlar** denir. Denklemleri yukarından aşağıya doğru $\mathbf{D}_1$,$\mathbf{D}_2$,... şeklinde harflendirirsek,

1. İki denklemin yerini değiştirme. (j'inci denklemle, i'inci denklemin yerinin değiştiğini $\mathbf{D}_j \leftrightarrow \mathbf{D}_i$ ile gösterelim.)

2. Bir denklemi sıfırdan farklı bir reel sayıyla çarpma. (i'inci denklemin λ katının alındığını da, $\mathbf{D}_i \rightarrow \lambda\mathbf{D}_i$ ile gösterelim.)

3. Bir denkleme, başka bir denklemin bir reel katını ekleme. (k'ıncı denkleme, j'inci denklemin λ katının eklendiğini, $\mathbf{D}_k \rightarrow \mathbf{D}_k + \lambda\mathbf{D}_j$ ile gösterelim.)

Bu üç işlemi uygun bir biçimde uygulayarak denklem sistemi çözülebilir. Bunun için, denklem sistemindeki bir denklem diğer denklemde kullanılarak değişkenlerin katsayıları yok edilip, denklemlerdeki değişken sayıları, yukarıdan aşağıya doğru azaltılarak çözülebilir. Bunu aşağıdaki örneklerde görelim. Bir lineer denklem sisteminin çözümünde kullanılan bu yönteme **Gauss - Jordan eliminasyon yöntemi** denir.

Lineer Bağımlı ve Lineer Bağımsız Denklemler

Tanım

Bir lineer denklem sisteminde, denklemlerden biri, denklemler arası operasyonlarla, diğer denklemlerden elde edilebiliyorsa, bu denklem diğerlerine bağımlıdır denir. Yani, birbirinden elde edilebilen denklemlere, **lineer bağımlı denklemler** denir. Bir denklem hiç bir şekilde, elemanter denklem operasyonuyla, sistemdeki diğer denklemlerden elde edilemiyorsa, bu denklem diğerlerinden bağımsızdır denir. Denklem sistemindeki hiç bir denklem diğerlerinden elde edilemiyorsa, bu sisteme **lineer bağımsız denklem sistemi** denir. Lineer bağımsız bir denklem sistemindeki her denklem önemlidir ve çözümde etkisi vardır. Fakat, lineer bağımlı bir denklem sisteminde diğerlerine bağımlı bir denklem gereksizdir, yani çözümü değiştirmeyeceğinden ihmal edilebilirler.

Örnek

Örneğin,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & y-x=3 \\ \mathbf{D}_3: & y-3x=5 \end{cases}$$

sistemindeki denklemler birbirine bağımlıdır. Üçüncü denklemin, $D_3 = 2D_1 - D_2$ şeklinde elde edilebileceği hemen görülebilir. Bu eşitliğe göre, bu sistemdeki her denklem diğer denklemlerden elemanter işlemlerle elde edilebilir. Yani bu denklem sistemi lineer bağımlıdır. Bu denklem sisteminin çözümüyle,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & y-x=3 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümü aynıdır. Yani, denklem sistemi üçüncü denklem ihmal edilerek çözülebilir.

Örnek

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = k \end{cases}$$

denklem sistemindeki denklemlerin birbirine bağımlı olması için k kaç olmalıdır?

Denk Denklem Sistemleri

Tanım

İki lineer denklem sisteminin çözüm kümeleri aynı ise, bu iki sisteme **denk denklem sistemleri** denir. Örneğin,

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \quad ve \quad \begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

denklem sistemlerinin ikisinin de çözümü $x=1$ ve $y=2$'dir.

Denklem ve Bilinmeyen Sayılarına Göre Denklem Sisteminin Çözüm Sayıları

n Bilinmeyen ve n lineer bağımsız denklem

1. n bilinmeyenli bir denklem sisteminde, birbirinden bağımsız tam n tane lineer denklem bulunabiliyorsa, bu denklem sisteminin ya çözümü yoktur, ya da bir tek çözümü vardır.

Örnek

Örneğin, 2 bilinmeyenli aşağıdaki denklemleri göz önüne alalım.

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1: & x+y=4 \\ \mathbf{D}_2: & x+y=3 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & y-x=3 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & 2y-4x=8 \end{cases}$$

denklem sistemlerinden ilkinin çözümü yok, ikincisinin ise bir tek çözümü vardır. Üçüncüsünde ise, 2 tane bağımsız denklem yoktur çünkü, $2y-4x=8$ denklemi, $y-2x=4$ denkleminin 2 katıdır ve bunlar bağımlıdır.

Denklem ve Bilinmeyen Sayılarına Göre Denklem Sisteminin Çözüm Sayıları

n Bilinmeyen ve n'den az lineer bağımsız denklem

2. n bilinmeyenli bir denklem sisteminde, birbirinden bağımsız denklem sayısı n'den azsa, bu lineer denklem sisteminin ya sonsuz çözümü vardır, ya da sistem tutarsızdır ve çözümü yoktur.

Örnek

Örneğin,

$$1.\left\{\begin{array}{rr} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & 2y-4x=4 \end{array}\right. , \qquad 2.\left\{\begin{array}{rr} \mathbf{D}_1: & x+y-2z=4 \\ \mathbf{D}_2: & x-y-z=3 \end{array}\right. ,$$

denklem sistemlerinin ilkinde, bilinmeyen sayısı 2'dir. Fakat, $D_2 = 2D_1$ olduğundan iki denklem birbirine bağımlıdır, yani, lineer bağımsız denklem sayısı sadece 1'dir. O halde, sonsuz çözüm vardır. İkincisinde ise, bilinmeyen sayısı 3, denklem sayısı 2'dir ve yine sonsuz çözüm vardır.

Denklem ve Bilinmeyen Sayılarına Göre Denklem Sisteminin Çözüm Sayıları

n Bilinmeyen ve n'den az lineer bağımsız denklem

$$3. \begin{cases} \mathbf{D}_1: & x+y-2z=4 \\ \mathbf{D}_2: & x+y-2z=5 \end{cases}, \quad 4. \begin{cases} \mathbf{D}_1: & x+y=1 \\ \mathbf{D}_2: & x+z=1 \\ \mathbf{D}_2: & y-z=0 \end{cases}$$

Üçüncü denklem sisteminde, lineer bağımsız 2 denklem vardır ama bu denklemler tutarsız olduğunundan çözüm yoktur. Son denklem sisteminde ise, üç bilinmeyen vardır. 2 denklem var gibi görünse de, $D_1 = D_2 + D_3$ olduğundan, denklemler birbirine bağımlıdır. Yani, birbirinden bağımsız 3 denklem yoktur ve yine sonsuz çözüm vardır.

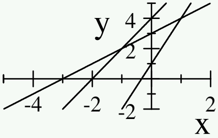
Denklem ve Bilinmeyen Sayılarına Göre Denklem Sisteminin Çözüm Sayıları

n Bilinmeyen ve n'den fazla lineer bağımsız denklem

3. n bilinmeyenli bir denklem sisteminde, birbirinden bağımsız denklem sayısı n'den fazlaysa, bu denklem sisteminin çözümü yoktur.

Örnek

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1: & y-2x=4 \\ \mathbf{D}_2: & y-x=3 \\ \mathbf{D}_3: & y-3x=1 \end{cases} \Rightarrow$$



denklem sistemindeki bir denklem, diğer denklemlerden elde edilemez. Yani, bu sistemdeki denklemler lineer bağımsızdır. Fakat, 2 bilinmeyen varken, 3 lineer bağımsız denklem olması, denklemlerden birinin denklem sisteminin tutarlılığını bozduğu anlamına gelir. Gerçekten de, sisteme göre $D_1 - 2D_2 : 2y - 3x = 5$ olması gerekirken, üçüncü denkleme göre $y - 3x = 1$ 'dir. $y - 3x$ değeri, hem 1, hem de 5 olamaz. Bu tutarsızlık sistemin çözümünün olmadığını gösterir. Grafikten de çözümün olmadığı görülmektedir.

Örnek

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 5 \\ x - 7y = k \end{cases}$$ **denklem sistemi veriliyor. Buna göre,**

a) Bu sistemin sonsuz çözümü olabilir mi?

b) Çözüm olmaması için k ne olmalıdır?

c) Tek çözüm olması için k kaçtır?

X

Çözüm

a) *Verilen denklem sistemindeki ilk iki denklemin birbirinden elde edilmesi mümkün değildir. Dolayısıyla, bilinmeyen sayısı 2 olduğundan ve en az iki bağımsız denklem bulunduğundan bu sistemin sonsuz çözümü olamaz. Ya tek çözüm vardır, ya da çözüm yoktur.*

Çözüm

b) *k sayısı 1 olmadığı takdirde, üçüncü denklem ilk iki denklemden elde edilemez. Yani, artık elimizde iki bilinmeyenli 3 tane lineer bağımsız denklem olmuş olur. Bu durumda, denklem sistemi tutarsız olacağından çözüm yoktur.*

Problem

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x - 7y = k \end{cases}$$ *denklem sistemi veriliyor. Buna göre,*

a) Bu sistemin sonsuz çözümü olabilir mi? b) Tek çözüm olması için k kaçtır?

c) Çözüm olmaması için k ne olmalıdır?

Problem

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + ky = 1 \end{cases}$ *denklem sistemi veriliyor. Buna göre,*

a) Bu sistemin sonsuz çözümü olabilir mi? b) Tek çözüm olması için k kaçtır?

c) Çözüm olmaması için k ne olmalıdır?

Gauss - Jordan Eliminasyon Yöntemi

Şimdiye kadar denklem sistemlerinin tutarsız, tek çözümlü veya sonsuz çözümlü olabileceğini, ve bunların **birbirinden bağımsız denklem sayısına** ve **bilinmeyen sayısına** bağlı olduğunu gördük. Denklemlerin ilk haliyle bunları görmek her zaman kolay değildir. Bu nedenle özellikle hem tutarlılığı, hem de lineer bağımsız denklem sayısını Gauss-Jordan eliminasyon yöntemiyle daha kolay görmek mümkündür. Öncelikle, bir lineer denklem sisteminin, **Gauss - Jordan eliminasyon yöntemiyle** nasıl çözülebileceğini örnekler üzerinde görelim. Daha sonra, bu yöntemi matrisler yardımıyla daha pratik hale getireceğiz.
Bu yöntemde dikkat edilecek hususlar şunlardır.
1. Denklemlerdeki bilinmeyenlerin aynı sırada olmasına dikkat ediniz.
2. Kolay katsayıya sahip denklemleri en üstte yazınız.
3. En soldaki bilinmeyenden itibaren bilinmeyen sayısını, aşağıya doğru azaltınız. Azaltma işleminde, üçüncü elemanter denklem operasyonu kullanılacaktır. Yani bilinmeyen sayısı, yukarıdan aşağıya doğru azalacak şekilde işlemler yapacağız.

Gauss - Jordan Eliminasyon Yöntemi

Bu işlemler sonucunda denklem sistemi,

$$\left\{ \begin{array}{r} a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} = 4 \\ d\mathbf{y} + e\mathbf{z} = 3 \\ f\mathbf{z} = 7 \end{array} \right.$$

biçiminde, ters merdiven, veya üçgensi bir denklem haline gelecektir. Sondan itibaren bu denklemleri kolayca çözebiliriz. Sırasıyla, $\mathbf{z}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{x}$ bulunabilir. Bu denklemin tutarsız olup olmadığı kolayca görülebilir. Aşağıda örnekler verilecektir.

Örnek

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y+2z=3 \\ x+3y+2z=7 \end{cases}$$ **denklem sistemini çözelim.**

Örnek

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 4 \\ \quad x - y + z = 3 \\ x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$ **denklem sistemini çözünüz.**

Problem

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=3 \\ x-y-z=3 \\ x-y+z=3 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$ *denklem sistemini çözünüz.*

Örnek

$$\begin{cases} -2x + 8y + 2z + 4w = 3 \\ x - y - z + w = 3 \\ x - y + z - w = 3 \\ x + y + z + w = 3 \end{cases}$$

denklem sistemini çözünüz.

Matris Kavramına Geçiş

Not : Çözdüğümüz örneklerde görüldüğü gibi, aslında yapılan işlemler tamamen katsayılar ve denklemin ikinci tarafı ile ilgilidir. Yani, denklem sistemini çözerken, her defasında değişkenleri yazmaya gerek yoktur. Böylece, işlemlerimizi daha hızlandırabiliriz.
Örneğin son örnekteki denklemi sadece katsayıları ve denklemin ikinci tarafını yazarak,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

şeklinde matris olarak adlandırdığımız bir sayı tablosunda gösterebiliriz.

Matrisler, bir lineer denklem sisteminin çözümünü kolaylaştırmak, denklemlerin çözümünün olup olmadığını daha kolay görmek, ya da denklemlerin birbirine bağımlı olup olmadığını incelemek için, bundan sonra sık olarak kullanılacaktır. **Matrislerdeki işlemler ve matrislerin cebirsel özellikleri bir sonraki bölüme bırakılmıştır.** Burada, sadece matris tanımını kısaca verelim.

denklemden oluşan Lineer Denklem Sistemi

Tanım

Reel katsayılı bir lineer denklem sistemini genel olarak, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

şeklinde ifade ederiz. Burada, **n bilinmeyenli**, **m denklemden oluşan** bir lineer denklem sistemi vardır.

Bir denklem sistemini yukarıdaki örneklerdeki gibi çözmek mümkündür. Fakat, bundan sonra bu yöntemi, her defasında bilinmeyenleri yazmak yerine, sadece değişkenlerin katsayılarını ve denklemin ikinci tarafındaki sabit değerleri bir sayı tablosu olarak yazıp, uygulayacağız. Bu tür sayı tablolarına matris diyoruz.

Matris

Tanım

Elemanları a_{ij} sayılarıyla oluşturulan $m \cdot n$ elemanlı $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ biçimindeki tabloya, $m \times n$ türünden bir **matris** denir. Bu matristeki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $n-$lilerine bu **matrisin satırları** ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sıralı $m-$lilerine de bu **matrisin sütunları veya kolonları** denir.

Genişletilmiş Katsayılar Matrisi (Augmented Matrix)

Tanım

n bilinmeyenli, m denklemden oluşan

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Bu denklem sisteminde, katsayıların oluşturduğu matris ve sağ taraftaki sabit değerlerin oluşturduğu matris sırasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ve \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Genişletilmiş Katsayılar Matrisi (Augmented Matrix)

Tanım

Bu iki matrisin yan yana,

$$[A:B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

şeklinde yazılmasıyla elde edilen matrise, verilen lineer denklem sisteminin **genişletilmiş katsayılar matrisi** (Augmented Matrix) denir. Bundan sonra, bir lineer denklem sisteminin çözümünü, genişletilmiş katsayılar matrisini kullanarak yapacağız.

Örnek

$$\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+2y+2z+3t=4 \\ x+y+2z+2t=5 \\ y+z+4t=7 \end{cases}$$ **denklem sistemini çözelim.**

Örnek

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$ **denklem sistemini çözelim.**

Örnek

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + 2y = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$ **denklem sistemini çözelim.**

Problem

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ \quad x-y-z=3 \\ \quad x-y+z=3 \end{cases}$$ *denklem sistemini, genişletilmiş matrisini kullanarak çözünüz.*

Problem

Genişletilmiş matrisi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ *olan denklem sistemini yazınız.*

Elemanter Satır (Sütun) İşlemleri I

Yukarıdaki denklem sistemlerini çözerken, denklemler üzerinde uyguladığımız ve denklemlerin çözüm kümesini değiştirmeyen üç çeşit işlemle karşılaştık. Şimdi, bu işlemlerin matrisler için genel tanımını ve gösterimini verelim.

Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin satırları üzerinde yapılan aşağıdaki üç çeşit işleme **elemanter satır işlemleri** denir.

Tanım

I) A matrisinin herhangi iki satırını kendi aralarında yer değiştirmek. $i - inci$ satır ile $j - inci$ satırın yer değiştirilmesi işlemini $S_i \leftrightarrow S_j$ şeklinde göstereceğiz. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Elemanter Satır (Sütun) İşlemleri II

Tanım

II) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak. $i - inci$ satırın bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ile çarpılmasını, $S_i \to \lambda S_i$ şeklinde göstereceğiz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \to 2S_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemanter Satır (Sütun) İşlemleri III

Tanım

III) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına eklemek. $i - inci$ satırın bir λ katının, $j - inci$ satıra eklenmesini, $S_j \rightarrow S_j + \lambda S_i$ şeklinde göstereceğiz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow S_2 + 2S_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Denk Matrisler

Tanım

A ve B matrisleri aynı türden iki matris olsun. B matrisi, A matrisi üzerinde yapılacak elemanter satır işlemleri sonucu elde edilebiliyor ise A ile B matrisine **denk matrisler** denir. Bu durum

$$A \sim B$$

şeklinde gösterilir.

Örnek

$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **matrisinin birim matrise denk bir matris olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

Elemanter operasyonları uygulayarak görelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \rightarrow S_1 + 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \rightarrow -S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denk matrislere karşılık gelen denklem sistemlerinin çözüm kümesi de denktir. Bu nedenle, bir denklem sisteminin katsayılar matrisine elemanter satır operasyonları uygulanarak denklem sistemi çözülebilir. Yani, **Gauss-Jordan eliminasyon yönteminde** matris kullanılarak çözüme ulaşılır. Bunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Denk Denklem Sistemleri

Teorem

Herbiri n bilinmeyenli, m denklemden oluşan

$$AX = B \qquad ve \qquad CX = D$$

denklem sistemlerini göz önüne alalım. Eger

$$[A : B] \qquad ve \qquad [C : D]$$

genişletilmiş katsayılar matrisleri birbirine denk ise, bu lineer denklem sistemleri de birbirine denktir ve çözüm kümeleri aynıdır.

Eşelon Form - Pivot

Tanım

Bir matrisin tamamı sıfır olmayan herhangi bir satırındaki en solda bulunan sıfırların sayısı, bu satırdan bir önceki satırın en solundaki sıfırların sayısından en az bir fazla ise bu matrise **eşelon formdadır** denir. Eşelon formdaki bir matrisin bir satırı tamamen sıfır ise, bu satırın altındaki tüm satırlar da tamamen sıfır olmalıdır. Eşelon formdaki bir matriste, her satırdaki soldan sıfırdan farklı ilk elemana **pivot** denir.

Örnek

Eşelon formdaki bir matriste, matrisin sol tarafında bulunan sıfırlar merdiven şeklinde basamaklar oluşturdukları için, matrisin basamak biçimi tanımı da kullanılır. Aşağıdaki matrislerin her biri eşelon formdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Örnek

Aşağıdaki matrisler ise, eşelon formda değildir. Çünkü, birinci matriste, 4'üncü satırda en soldaki sıfır sayısı 1'dir ve bir önceki üçüncü satırdaki en soldaki sıfır sayısından 1 fazla değildir. Yine ikinci matriste ise, üçüncü satırdaki soldaki sıfır sayısı, bir önceki satırın soldaki sıfır sayısından en az 1 fazla değildir. Son matriste de, üçüncü satırın tamamı sıfır olduğundan, bu satırın altındaki satırların da tamamen sıfır olması gerekirdi.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

İndirgenmiş Eşelon Form

Tanım

Bunun yanında, eşelon formdaki bir matriste her satırdaki soldan sıfırdan farklı ilk eleman 1 ise ve bu ilk 1'in olduğu sütundaki geri kalan tüm elemanlar 0 ise bu matrise **indirgenmiş eşelon formdadır** denir.

Örnek

Örneğin aşağıdaki matris indirgenmiş eşelon formdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bir Matrisin Eşelon Forma Dönüştürülmüş Denk Matrisi

Tanım

Herhangi bir A matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak, A matrisine denk olan eşelon matris elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen matrise A matrisinin **eşelon forma dönüştürülmüş matrisi** denir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$ **matrisini elemanter satır operasyonlarıyla eşelon forma getiriniz.**

Problem

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisini eşelon forma ve indirgenmiş eşelon forma getiriniz.*

Bir Matrisin Rankı

Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisini elemanter satır operasyonları yaparak eşelon forma getirebiliriz.
A matrisinin **eşelon formunda**, **en az bir elemanı sıfırdan farklı olan satır sayısına** A **matrisinin rankı** denir ve

$$Rank(A)$$

ile gösterilir. Özel olarak, herhangi bir sıfır matrisinin rankı 0 kabul edilir.

Örnek

Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım. İlk matris eşelon formdadır ve rankını doğrudan söyleyebiliriz. En az bir elemanı sıfırdan farklı olan 2 satır (ilk iki satır) olduğundan, rankı 2'dir. Diğer yandan, ikinci matris eşelon formda olmadığı için, önce eşelon forma getirilmelidir. Bu haliyle, en az bir elemanı sıfırdan farklı 4 satır var gibi görünse de, $S_3 \longrightarrow S_3 - S_2$ ve $S_4 \longrightarrow S_4 + S_2$ elemanter satır operasyonlarıyla eşelon forma getirildiğinde, son iki satırın tamamen sıfır olduğu, ve dolayısıyla rankın 2 olduğu görülür. O halde, rankı bulmak için, yapılacak ilk iş matrisi eşelon forma getirmek olmalıdır.

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ **matrisinin rankını bulunuz.**

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$ **matrisinin rankını bulunuz.**

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 2 & m \end{bmatrix}$ *matrisinin rankı 2 ise $k + m$ kaçtır.*

Problem

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ *matrisinin rankını bulunuz.*

Elemanter Sütun Operasyonları

NOT : Satırlarda yapılan elemanter operasyonlar, kolonlar için de yapılabilir. Lineer denklem sistemlerinin çözümünde sadece satır işlemlerini kullanacağız. Fakat, elemanter kolon işlemlerini matrisin rankının bulunmasında ve daha sonra öğreneceğimiz determinant hesaplamasında da kullanabiliriz. Kolonlarda yapılan elemanter operasyonları göstermek için, kolon kelimesinin ilk harfi olan K harfini kullanacağız. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.
$K_4 \longrightarrow K_4 + K_3$ gösterimi 4'üncü kolon yerine, 3'üncü ve 4'üncü kolonun toplamının yazıldığını ifade eder.
$K_2 \longrightarrow 3K_2 + K_3$ gösterimi 2'nci kolon yerine, 2'nci kolonun 3 katı ile 3'üncü kolonun toplamının yazıldığını ifade eder.
$K_i \longrightarrow K_i + K_1, \quad i = 1, 2, .., m$ gösterimi 1'inci, 2'nci, ... ve m'inci kolonlara 1'inci kolonun eklendiğini ifade eder.

Lineer Denklem Sisteminin Matrisinin Rankı ile Çözüm Sayıları

Aşağıdaki teorem, bir lineer denklem sisteminin genelleştirilmiş katsayılar matrisiyle, bu sistemin çözümü arasındaki ilişkiyi verir. Bu teoreme göre, bir denklem sisteminin çözüm sayısını, çözümün varlığını rank yardımıyla çözmeden söyleyebiliriz.

Teorem

A, $m \times n$ türünden bir matris olmak üzere,

$$AX = B$$

lineer denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul,

$$rankA = rank\left[A \mid B\right]$$

olmasıdır. Ayrıca,

i) $rankA = rank\left[A \mid B\right] = r$ ise, denklem sisteminin $n - r$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

ii) $r = n$ ise denklemin tek çözümü vardır.

Örnek

Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

$$\mathbf{a)}\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ x+3y=5 \end{array}\right. \qquad \mathbf{b)}\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ x+3y=-1 \end{array}\right. \qquad \mathbf{c)}\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right.$$

Örnek

$$\begin{cases} 2x - 12y + 9z = 5 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$ denklem sisteminin çözüm sayısını rank incelemesiyle bulunuz.

Problem

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 5y - 4z = 4 \end{cases}$$

Problem

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 5y - 4z = 5 \end{cases}$$

Problem

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 6 \\ x + 5y - 3z = 3 \end{cases}$$

Parametre İçeren Denklem Sistemlerinin İrdelenmesi

Örnek

Hangi k değeri için, genişletilmiş katsayılar matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 3-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k-6 & 3-k \end{array}\right]$$

olan denklem sisteminin çözümü yoktur?

Örnek

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+n^2z=n \\ x+n^2y+z=n^2 \end{cases}$$ **denklem sisteminin çözümünü n parametresine göre irdeleyiniz.**

Örnek

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$$ **denklem sisteminin çözümünü k'ya göre irdeleyiniz.**

Problem

$$\begin{cases} x - ky - kz = 3 \\ x + 2y + 2z = k + 2 \\ 2x + 4y + k^2 z = 3k + 6 \end{cases}$$ *denklem sisteminin çözümünü k'ya göre irdeleyiniz.*

Problem

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \\ y + kz = 1 \end{cases}$$ *denklem sisteminin hangi k değerleri için çözümü yoktur?*

Problem

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x-y+2z=b \\ x-7y+4z=c \end{cases}$$ *denklem sisteminin çözümünün olması için a, b, c arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır? Bu denklemin kaç çözümü olabilir.*

Homojen Denklem Sistemi

Tanım

İkinci yanı sıfır olan,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

biçimindeki lineer denklem sistemine lineer **homojen denklem sistemi** denir. Homojen denklem sistemini $AX = 0$ olarak yazabiliriz. Bu tür homojen denklem sistemleri için, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ değerlerinin bir çözüm olduğu aşikardır. Bu çözüme **aşikar çözüm** denir.

Homojen Lineer Denklem Sistemi ve Rank

Teorem

A, $m \times n$ türünde bir matris olmak üzere,

$$AX = 0$$

biçimindeki n **bilinmeyenli** *homojen lineer denklem sistemi için,*

$$Rank\,(A) = r$$

olmak üzere,
i) $r = n$ ise, sistemin tek çözümü aşikar çözümdür. Yani, tüm bilinmeyenler 0'dır.
ii) $r < n$ ise denklemin $n - r$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Denk Homojen Lineer Denklem Sistemleri

Teorem

Herbiri n bilinmeyenli, m denklemden oluşan

$$AX = 0 \qquad ve \qquad CX = 0$$

homojen denklem sistemlerini göz önüne alalım.
Eger A ve C matrisleri birbirine denk ise, bu homojen lineer denklem sistemleri de birbirine denktir ve çözüm kümeleri aynıdır.

Örnek

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$ **denklem sisteminin çözümünü bulunuz.**

Örnek

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$ **denklem sisteminin çözümünü bulunuz.**

Örnek

$$\left\{\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-3y+kz=0 \end{array}\right.$$ **denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre k nedir?**

Örnek

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

denklem sistemini çözünüz.

Problem

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - 7y + 4z = 0 \end{cases}$$ *denklem sistemini çözünüz.*

Problem

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+2y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ x-y+4z=0 \end{array}\right. \quad \textit{denklem sistemini çözünüz.}$$

Problem

$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ *denklem sisteminin* 1*'den fazla çözüme sahip olması için* k *kaç olmalıdır?*

Problem

$$\begin{cases} 2x+y+z+w=0 \\ x+2y+kz=0 \\ x-y+2z+w=0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$$ *denklem sisteminin sonsuz çözüme sahip olması için k kaç olmalıdır?*

Problem

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$ *denklem sistemini çözünüz.*

Problem

$\{x + 2y - z = 0$ *denklemini çözünüz.*

Çözümlü Örnekler

Örnek

Bir çiftlikte inekler, tavuklar ve atlardan oluşan 62 hayvan vardır. Tavukların sayısı, inek ve atların sayıları farkının 2 katıdır. Bu çiftlikte, inekler, atlardan fazladır ve tüm hayvanların ayakları sayısı da 184 olduğuna göre, bu çiftlikte hangi hayvandan kaç tane vardır?

Örnek

Üç kardeş 102 TL'yi bölüşecektir. Her kardeş kendisinden bir küçük olanın 2 katından 20 TL eksik alacaktır. Buna göre kaçar TL paylaşmışlardır?

Örnek

Bir bankamatik sadece 10 TL, 20 TL, 50 TL banknot verebilmektedir. Alper 200 TL çekiyor ve 7 banknot alıyor. Bankamatik Alper'e kaç tane 10TL'lik banknot vermiştir?

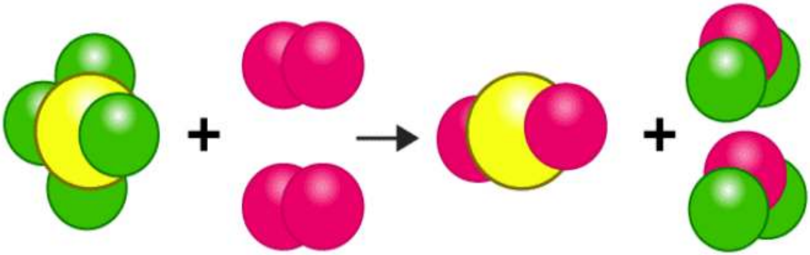
Problem

Bir fabrika sarı, lacivert ve beyaz olmak üzere üç farklı kablo üretmektedir. Salı günü, beyaz kablonun uzunluğu, diğerlerinin uzunluğu toplamının 2 katından 100 *metre daha fazla, lacivert kablonun uzunluğu da, sarı kablonun yarısından 100 metre fazla olacak şekilde kablo üretilmiştir. Fabrikada salı günü toplam* 1300 *metre bu üç kablodan ürettiğine göre, hangi üründen kaçar metre üretilmektedir?*

1. Kimyasal Denklemlerde Lineer Denklemlerin Kullanılması

Örnek

$a\,(CO) + 10H_2 + b\,(CO_2) \rightarrow c\,(CH_4)$ $+ d\,(H_2O)$ kimyasal denklemine göre, kullanılan (CO) karbonmonoksit molekülü sayısına göre, kullanılması gereken (CO_2) karbondioksit molekülü sayısını ve ortaya çıkan su (H_2O) ve metan (CH_4) gazı molekül sayılarını belirleyiniz. Bu denkleme uygun, katsayıları doğal sayı olan bir kimyasal denklem bulunuz.



Problem

Aşağıdaki kimyasal denkleme göre, x, y, z'yi bulunuz.

$$x\,(CO) + 11H_2 + y\,(CO_2) \rightarrow 3CH_4 + z\,(H_2O)$$

Problem

$$x\,(NH_3) + y\,(O_2) \longrightarrow z\,(NO) + t\,(H_2O)$$

kimyasal denklemine göre,

a) *ortaya çıkan su miktarına bağlı olarak diğer, moleküllerin katsayılarını belirleyiniz.*

b) 12 *su molekülü ortaya çıkması için,* x, y, z *nasıl alınmalıdır?*

Elektrik Devreleri Problemlerinde Lineer Denklem Sistemlerinin Kullanılması

Önce, elektrik devreleriyle ilgili olarak kullanacağımız bazı temel kanunları hatırlayalım.

Tanım

Ohm Kanunu : Bir elektrik devresinde, iki nokta arasındaki iletkenden geçen akım, bu iki nokta arasındaki gerilim miktarıyla (potansiyel fark) ile doğru, bu iki nokta arasındaki dirençle ters orantılıdır. Yani,

$$Akım = \frac{\text{Gerilim}}{\text{Direnç}}$$

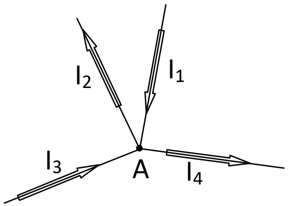
eşitliği vardır. Bu formülü kısaca, akımı I harfi, gerilimi V harfi ve direnci de R harfiyle gösterirsek

$$I = \frac{V}{R}$$

şeklinde yazarız. Birimleri de dikkate alınırsa, $Amper = \dfrac{Volt}{Ohm}$ eşitliği vardır.

Kirchhoff Akım Kanunu (KCL)

Kirchhoff Akım Kanunu (KCL) : Bir düğüme giren akımların toplamı, çıkan akımların toplamına eşittir.



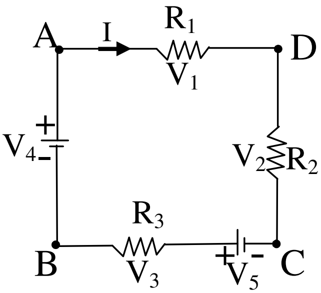
Kirchhoff Voltaj(Gerilim) Kanunu (KVL)

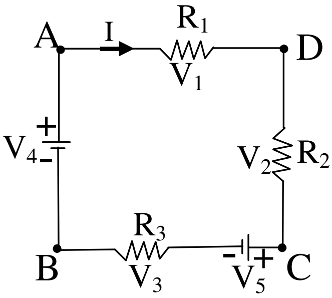
Enerjinin korunumu ilkesine dayanan bir kanundur.

Kapalı bir elektrik devresinde, harcanan tüm gerilimlerin toplamı, üretilen ya da sağlanan tüm gerilimlerin toplamına eşittir.

Yani, kapalı bir elektrik devresindeki pil, üreteç gibi enerji kaynaklarından elde edilen gerilimleri toplamı, bu devredeki direnç, motor gibi araçlar üzerinde oluşan gerilim harcamaları ve düşmeleri toplamına eşittir. Bunu, kapalı bir devre boyunca, potansiyel farklarının cebirsel toplamı sıfırdır şeklinde de ifade edebiliriz. Üreteçler ters bağlı olursa yani, kabul edilen akım yönüne ters yönde akım üretirse gerilim değerinin negatif $(-)$ olacağı unutulmamalıdır. Çünkü böyle bir durumda üretici değil tüketici gibi davranır.

Aşağıdaki elektrik devrelerini inceleyiniz.



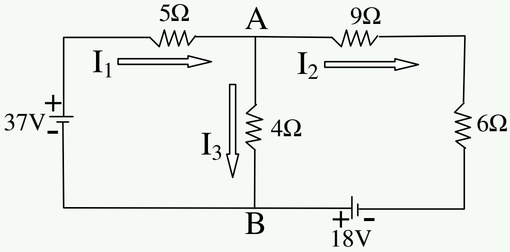


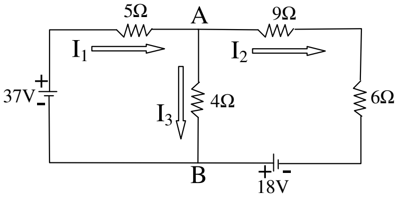
$$V_1 + V_2 + V_3 = V_4 + V_5$$
$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = V_4 + V_5$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_5 = V_4$$
$$IR_1 + IR_2 + IR_3 + V_5 = V_4$$

Örnek

Şekilde akım yönleriyle birlikte bir elektrik devresi verilmiştir. Buna göre I_1, I_2 ve I_3 akımlarının kaç amper olduklarını belirleyiniz.





Çözüm

A noktasındaki akım geçişine göre,

$$I_1 = I_2 + I_3$$

eşitliği vardır. B noktasındaki akım geçişine göre, yine

$$I_1 = I_2 + I_3$$

eşitliği vardır. Ohm kanununa göre,

$$\text{Potansiyel Farkı } = \text{Akım} \times \text{Direnç},$$

yani, $V = IR$ eşitliği olduğunu hatırlayalım.

Çözüm

Buna göre, Elektrik devresinin sol döngüsüne göre,

$$5I_1 + 4I_3 = 37$$

eşitliği vardır. Şimdi de, sağ döngüye göre bir denklem bulalım.

$$9I_2 + 6I_2 - 4I_3 = 18$$

olduğu hemen görülebilir. Böylece,

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 + 4I_3 = 37 \\ 15I_2 - 4I_3 = 18 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

Çözüm

Buradan,

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 37 \\ 0 & 15 & -4 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2 - 5S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 37 \\ 0 & 15 & -4 & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - 3S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 37 \\ 0 & 0 & -31 & -93 \end{array}\right]$$

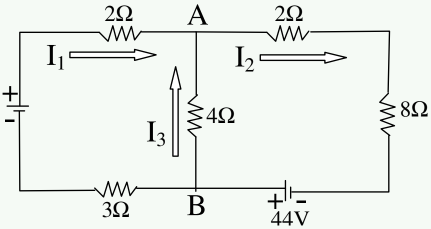
yazılırsa,

$$I_3 = 3, \; I_2 = 2 \quad ve \quad I_1 = 5$$

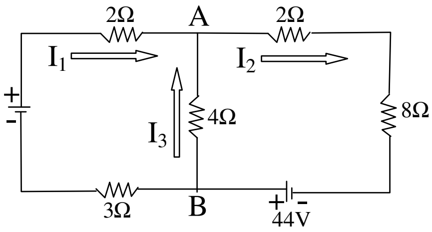
olduğu görülür.

Örnek

Şekilde akım yönleriyle birlikte bir elektrik devresi verilmiştir. Buna göre I_1, I_2 ve I_3 akımlarının kaç amper olduklarını belirleyiniz.



.



Örnek

A noktasındaki akım geçişine göre,

$$I_2 = I_1 + I_3$$

eşitliği vardır. Aynı şekilde B noktasındaki akım geçişine göre de, $I_1 + I_3 = I_2$ olur. Yani, 3Ω'luk dirençten geçen akımın I_1 olacağı görülür. Ohm kanunu göz önüne alınarak, elektrik devresinin sol ve sağ döngüsüne göre,

$$2I_1 - 4I_3 + 3I_1 = 11 \Rightarrow 5I_1 - 4I_3 = 11,$$
$$2I_2 + 8I_2 + 4I_3 = 44 \Rightarrow 5I_2 + 2I_4 = 22$$

denklemleri yazılabilir.

Örnek

Böylece,

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 5I_1 - 4I_3 = 11 \\ 5I_2 + 2I_3 = 22 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan,

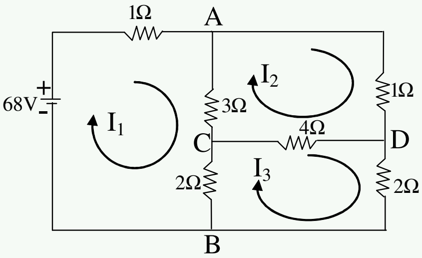
$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 5 & 2 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2 - 5S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 11 \\ 0 & 5 & 2 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right]$$

yazılırsa, $I_3 = 1$, $I_2 = 4$ ve $I_1 = 3$ olduğu görülür.

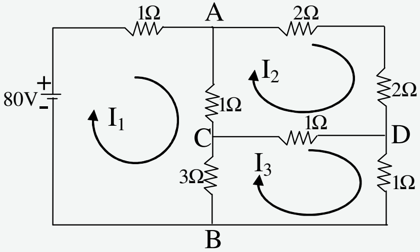
Örnek

Şekilde akım yönleriyle birlikte bir elektrik devresi verilmiştir. Buna göre I_1, I_2 **ve** I_3 **akımlarının kaç amper olduklarını belirleyiniz.**



Problem

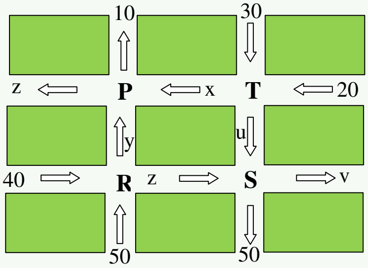
Şekilde akım yönleriyle birlikte bir elektrik devresi verilmiştir. Buna göre I_1, I_2 ve I_3 akımlarının kaç amper olduklarını belirleyiniz.



Yol Akışı Problemlerinde Lineer Denklem Sistemlerinin Kullanılması

Örnek

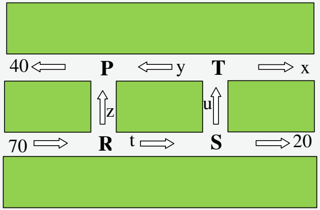
Şekilde, yönleri belirtilen tek yönlü yollar ile bir bölgenin yol haritası verilmiştir. P, R, S ve T kavşakları göstermektedir. Sabah 8.00 - 8.05 saatleri arasındaki 5 dakikada, her bir yoldan geçen arabaların sayısı okların yanında belirtilmiştir. Buna göre, bu 5 dakikada, R-P arasındaki yoldan geçen araba sayısı en az ve en fazla kaç olabilir bulunuz.



.

Problem

Şekilde, yolları ve yönleri gösteren yol haritasında, 1 saat içinde yoldan geçen araba sayıları, yolların yönlerini belirten okların yanında belirtilmiştir. Buna göre, yollardan geçen arabaların sayılarını veren genel çözümü bulunuz.



.

X

Bölüm Sonu Tekrar Testi

SORU

$$\begin{cases} y+2z=3 \\ -2x+y+z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 0 **E)** Sonsuz Çözüm

SORU

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \\ x - 8y - 5z = 1 \end{cases}$$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 0 **E)** Sonsuz Çözüm

SORU

$$\begin{cases} x+y=3 \\ mx+my=k \end{cases}$$ denklem sistemiyle ilgili aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. Bu sistemin daima sonsuz çözümü vardır.

II. Bu sistemin sadece $k=3m$ durumunda sonsuz çözümü vardır.

III. $k=3$ için sistemin çözümü yoktur.

IV. $m=3$ için sistemin çözümünün olabilmesi için, $k=9$ olmalıdır.

V. $m=2$ ve $k=2$ için sistemin bir tek çözümü vardır.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$\left\{\begin{aligned} y+z&=3 \\ x+y+z&=4 \end{aligned}\right.$ denklem sisteminin çözüm kümesi hangisidir?

A) $\{(1,2,1)\}$ **B)** Çözüm Yok

C) $\{(x,y,z)=(1,3-t,t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$

D) $\{(x,y,z)=(t,3-t,1)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$

E) $\{(x,y,z)=(t,3,0)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$

X

SORU

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+4z=4 \\ x+4y+7z=5 \end{cases}$$ denklem sistemi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+y+3z=1 \\ x+4y+7z=3 \end{cases}$ **B)** $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+3z=1 \\ z=0 \end{cases}$ **C)** $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+3z=1 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+3z=1 \\ x+2y+6z=3 \end{cases}$ **E)** $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ y+3z=1 \\ z=1 \end{cases}$

SORU

$$\begin{cases} \quad\quad y+2z=3 \\ -2x+y+z=3 \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$$ denklem sisteminin kaç çözümü vardır?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 0 **E)** Sonsuz Çözüm

X

SORU

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ kx + y + z = 3 \\ -x + y = m \end{cases}$$ denkleminin sonsuz çözümünün olması için $k + m = ?$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ kx+y-z=5 \\ x-3y-3z=r \\ 2x-y+mz=s \end{cases}$$ sisteminin sonsuz çözümü varsa $k+m+r+s=?$

A) 10 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 7

SORU

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ mx - y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$ homojen denkleminin sonsuz çözümü olması için m kaç olmalıdır.

A) $1/2$ **B)** $1/3$ **C)** $1/4$ **D)** $-1/3$ **E)** $-1/2$

SORU

$AX = B$ formundaki bir lineer denklem sisteminde, $[A : B]$ genelleştirilmiş katsayılar matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & m & m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 + m & m + 1 \end{array}\right]$$

matrisine denktir. Bu sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü olduğuna göre, m kaçtır?

A) 0 **B)** 1 **C)** -1 **D)** 2 **E)** Hiçbiri

SORU

x, y, z bilinmeyenlerine göre sırasıyla $AX = B$ formunda yazılan bir lineer denklem sisteminde, $[A : B]$ genelleştirilmiş katsayılar matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & m & 1 & m^2+1 \\ 0 & 0 & m^2-3 & m+1 \end{array}\right]$$

matrisine denk olduğuna göre, $m = 2$ için $y =?$

A) Çözüm yok **B)** 1 **C)** -1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

$AX = B$ formundaki bir lineer denklem sisteminde, $[A : B]$ matrisi elemanter satır operasyonlarıyla eşelon forma getiriliyor ve

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & m & m & m^2 - m \\ 0 & 0 & m^2 - m & m \end{array}\right]$$

matrisi elde ediliyor. Buna göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I) $m = 0$ için, sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.
II) $m = 1$ için, sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.
III) $m = 1$ için çözüm yoktur.
IV) $m = 0$ ve $m = 1$ için sonsuz çözüm vardır.
V) $m \neq 0$ için sistemin bir tek çözümü vardır.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$$\begin{cases} mx + y + z = m + 1 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$ denklem sistemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $m = 0$ için, sistemin 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.
B) $m = -2$ için, sistemin çözümü yoktur?
C) $m = 1$ için çözüm yoktur.
D) $m = -2$ ve $m = 1$ için sistemin çözümü yoktur.
E) $m \neq 1$ için sistemin bir tek çözümü vardır.

SORU

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax + y = b \\ x + by = a \end{cases}$$ denklem sistemi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $a = b = 1$ ise sonsuz çözüm vardır.

B) $a = 1$ ve $b \neq 1$ ise sistemin daima bir tek çözümü vardır.

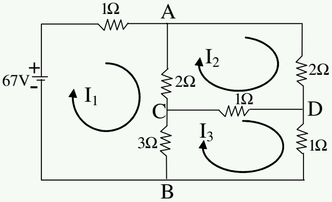
C) $a = 0$ ise çözüm yoktur.

D) $b = 0$ ise çözüm yoktur.

E) Hiçbiri

SORU

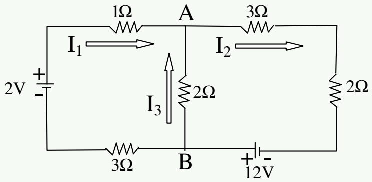
Aşağıdaki elektrik devresine göre I_1 akımı kaç amperdir?



A) 24 **B)** 13 **C)** 17 **D)** 12 **E)** 16

SORU

Aşağıdaki elektrik devresine göre I_3 akımı kaç amperdir?



A) 5 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 4

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.