MAT1072 / Matematik 2

Lineerleştirme - Diferansiyel / Ekstremum Değerler

1) Bir $f(x,y)$ fonksiyonu için $f(1,2)=5$ ve f nin $\vec{i}+\vec{j}$ vektörü yönündeki türevi $3\sqrt{2}$ olsun. $f(1.1, 2.1)$ değerini (yaklaşık olarak) hesaplayınız.

$$\vec{v}=\vec{i}+\vec{j} \quad , \quad |\vec{v}|=\sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$(D_{\vec{u}}f)_{(1,2)}=\left(f_x(1,2)\vec{i}+f_y(1,2)\vec{j}\right).\vec{u}=f_x(1,2)\frac{1}{\sqrt{2}}+f_y(1,2)\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f_x(1,2)+f_y(1,2)=6$$

$$f(1.1, 2.1)\approx f(1,2)+f_x(1,2)\overbrace{(1.1-1)}^{\Delta x}+f_y(1,2)\overbrace{(2.1-2)}^{\Delta y}$$

$$=5+\left(f_x(1,2)+f_y(1,2)\right)(0.1)=5+6(0.1)=5.6$$

2) $\sin[\pi(0.01)(1.05)+\ln(1.05)]$ nin yaklaşık değerini toplam diferansiyel veya lineer yaklaşım kullanarak hesaplayınız.

$$f(x,y)=\sin(\pi xy+\ln y)$$

$$f(0,1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\pi y\cos(\pi xy+\ln y) \quad , \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x}=\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\pi x+\frac{1}{y}\right)\cos(\pi xy+\ln y) \quad , \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}=1$$

$$\Delta x=0.01-0=0.01$$
$$\Delta y=1.05-1=0.05$$

$$f(0.01, 1.05)\approx 0+0.01\pi+0.05\cdot 1\approx 0.814$$

3) $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ yaklaşık değerini hesaplayınız.

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f(3,4)=5$, $\Delta x = 2{,}98-3=-0{,}02$, $\Delta y = 4{,}03-4=0{,}03$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f(3,4)}{\partial x}=\frac{3}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f(3,4)}{\partial y}=\frac{4}{5}$

$f(2.98,4.03)=\sqrt{(2,98)^2+(4,03)^2}\approx 5+\left(\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02)+\frac{4}{5}\cdot(0{,}03)\right)=5{,}012$

4) $z=f(x,y)=xy+2x-4y$ fonksiyonunun $(2.4,\ 2.8)$ noktasındaki yaklaşık değerini hesaplayınız.

$L(x,y)=f(2,3)+f_1(2,3)(x-2)+f_2(2,3)(y-3)$

$f(2,3)=2.3+2.2-4.3=-2$

$f_1(x,y)=y+2 \Rightarrow f_1(2,3)=5$

$f_2(x,y)=x-4 \Rightarrow f_2(2,3)=-2$

$\Rightarrow L(x,y)=-2+5(x-2)+(-2)(y-3)$

$\Rightarrow f(2.4,\ 2.8)\approx L(2.4,\ 2.8)=-2+5(2.4-2)+(-2)(2.8-3)=0.6$

5) $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ fonksiyonu verilsin. $f(2{,}2,\ -0{,}2)$ için yaklaşık bir değer bulunuz.

$f(2,0)=3$

$f_x=\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \Rightarrow f_x(2,0)=\frac{4}{3}$

$f_y=\frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \Rightarrow f_y(2,0)=\frac{1}{3}$

$L(x,y)=f(2,0)+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{1}{3}(y-0)$

$f(2{,}2,\ -0{,}2)\approx L(2{,}2,\ -0{,}2)$

$=3+\frac{4}{3}(2{,}2-2)+\frac{1}{3}(-0{,}2)$

$=3{,}2$

6) $f(1,2)=-3$, $f(1{,}01,\ 1{,}99)=-2{,}96$ şartını sağlayan bir $f(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $P(1,2)$ noktasında $\vec{u}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ vektörü yönündeki türevinin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$L(x,y)=f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)$$

$$L(1{,}01,\ 1{,}99)=-3+f_x(1,2)(0{,}01)+f_y(1,2)(-0{,}01)$$

$$f(1{,}01,\ 1{,}99)=-2{,}96\approx L(1{,}01,\ 1{,}99)$$

$$\Rightarrow f_x(1,2)-f_y(1,2)\approx\frac{-2{,}96+3}{0{,}01}=4$$

$$(D_{\vec{u}}f)_P=\nabla f|_P\cdot\vec{u}=\langle f_x(1,2),\ f_y(1,2)\rangle\cdot\left\langle-\frac{2}{\sqrt8},\ \frac{2}{\sqrt8}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt8}\underbrace{\left(-f_x(1,2)+f_y(1,2)\right)}_{=-4}$$

$$=-\sqrt8$$

7) $\dfrac{(2{,}05)^2}{(0{,}95)^2}$ sayısının yaklaşık değerini toplam diferansiyel ile hesaplayınız.

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^2},\quad f(2,1)=4,\quad f_x=\frac{2x}{y^2},\quad f_y=-\frac{2x^2}{y^3}$$

$$df=f_x(x_0,y_0)\,dx+f_y(x_0,y_0)\,dy$$

$x_0=2,\ y_0=1$
$x=2{,}05,\ y=0{,}95$
$\Big\}\ f_x(2,1)=4,\quad f_y(2,1)=-8$

$$dx=x-x_0=2{,}05-2=0{,}05,\quad dy=y-y_0=0{,}95-1=-0{,}05$$

$$df\approx\Delta f=f(2{,}05,\ 0{,}95)-f(2,1)=\frac{(2{,}05)^2}{(0{,}95)^2}-4\approx4\cdot(0{,}05)-8\cdot(-0{,}05)$$

$$\Rightarrow\frac{(2{,}05)^2}{(0{,}95)^2}\approx4+0{,}2+0{,}4=4{,}6$$

8) $f(x,y) = 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 12xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$f_x = 6x - 12y = 0 \Rightarrow x = 2y$

$f_y = 6y^2 - 6y - 12x = 0 \Rightarrow 6y^2 - 6y - 24y = 0 \Rightarrow y^2 - 5y = 0$ → $y = 0$, $y = 5$

$y = 0 \xRightarrow{x=2y} x = 0 \Rightarrow (0,0)$
$y = 5 \xRightarrow{x=2y} x = 10 \Rightarrow (10,5)$
} kritik noktalar

$A = f_{xx} = 6 \qquad B = f_{xy} = -12 \qquad C = f_{yy} = 12y - 6$

	$A=6$	$B=-12$	$C=12y-6$	B^2-AC	
$(0,0)$	6	-12	-6	$(-12)^2 - 6.(-6) > 0$	$(0,0)$ eyer noktası
$(10,5)$	6	-12	54	$(-12)^2 - 54.6 < 0$, $A=6>0$	$(10,5)$ yerel min.

9) $f(x,y) = x + y\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$f_x = 1 + y\cos x = 0$

$f_y = \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = \pi$

$1 + y\cos x = 0 \xRightarrow{x=0} y = -1 \Rightarrow (0,-1)$
$1 + y\cos x = 0 \xRightarrow{x=\pi} y = 1 \Rightarrow (\pi,1)$
} kritik noktalar

$A = f_{xx} = -y\sin x \qquad B = f_{xy} = \cos x \qquad C = f_{yy} = 0$

	$A=-y\sin x$	$B=\cos x$	$C=0$	B^2-AC	
$(0,-1)$	0	1	0	$1^2 - 0 > 0$	$(0,-1)$ eyer noktası
$(\pi,1)$	0	-1	0	$(-1)^2 - 0 > 0$	$(\pi,1)$ eyer noktası

10) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \\ f_y = x - \frac{8}{y^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{y^2} \end{array}\right\} \quad x = \frac{8}{\left(\frac{1}{x^4}\right)} \Rightarrow x - 8x^4 = 0 \Rightarrow \underbrace{x=0}_{\notin D(f)}, \ \underbrace{x = \frac{1}{2}}_{\text{kritik nokta}}$$

$\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ noktası için $\quad A = f_{xx} = \frac{2}{x^3}$, $B = f_{xy} = 1$, $C = f_{yy} = \frac{16}{y^3}$

$$B^2 - AC = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \frac{16}{4^3} = -3 < 0 \quad \text{ve} \quad A = 16 > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 4\right) : \text{yerel min.}$$

11) $f(x,y) = (x-1)(y+1)(x+y-3)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$f_x = (y+1)(x+y-3) + (x-1)(y+1) = (y+1)(2x+y-4) = 0 \Rightarrow y=-1 \text{ veya } 2x+y-4=0$$

$$f_y = (x-1)(x+y-3) + (x-1)(y+1) = (x-1)(x+2y-2) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ veya } x+2y-2=0$$

$y = -1 \rightarrow x+2y-2 = 0 \Rightarrow x = 4$; $\quad y=-1 \rightarrow x = 1$

$x = 1 \rightarrow 2x+y-4 = 0 \Rightarrow y = 2$; $\quad x=1 \rightarrow y = -1$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-4=0 \\ x+2y-2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}$$

$$\underbrace{P_1(4,-1) \quad P_2(1,-1) \quad P_3(1,2) \quad P_4(2,0)}_{\text{kritik noktalar}}$$

$A = f_{xx} = 2(y+1)$, $B = f_{xy} = (2x+y-4) + y + 1 = 2x+2y-3$, $C = f_{yy} = 2(x-1)$

	$A = 2(y+1)$	$B = 2x+2y-3$	$C = 2(x-1)$	$B^2 - AC$	
$P_1(4,-1)$	0	3	6	$9>0$	eyer n.
$P_2(1,-1)$	0	-3	0	$9>0$	eyer n.
$P_3(1,2)$	6	3	0	$9>0$	eyer n.
$P_4(2,0)$	2	1	2	$-3<0$ $A=2>0$	yerel min.

12) $f(x,y) = 1-x^4-y^4-4x^2y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = -x(4x^2+8y^2) = 0 \Rightarrow x=0 \\ f_y = -y(4y^2+8x^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \text{ : tek kritik nokta}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = f_{xx} = -12x^2-8y^2 \\ B = f_{xy} = -16xy \\ C = f_{yy} = -12y^2-8x^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (0,0) \text{ noktasında } B^2-AC=0 \\ \Rightarrow 2.\text{ türev testi sonuç vermez.} \end{array}$$

O halde,

$$f(0+h,0+k) - \underbrace{f(0,0)}_{=1} = 1-h^4-k^4-4h^2k^2-1 = -h^4-k^4-4h^2k^2 < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ yerel max

13) $2x^2+y^2+z^2-2xz-2=0$ kapalı denklemi ile verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

x'e göre türev : $4x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z-4x}{2z-2x}$

y'ye göre türev : $2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{2z-4x}{2z-2z} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow z = 2x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\dfrac{y}{z} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x^2+0+4x^2-2x\cdot 2x-2=0 \\ \Rightarrow 2x^2-2=0 \Rightarrow x = \mp 1 \end{array}$$

$P_1(1,0,2)$, $P_2(-1,0,-2)$: kritik noktalar

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-4\right)(2z-2x) - \left(2\frac{\partial z}{\partial x}-2\right)(2z-4x)}{(2z-2x)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 2$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-z + y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = -\frac{1}{4}, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = 0$$

$B^2 - AC\Big|_{P_1} = 0^2 - (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ ekstremum var

$A\big|_{P_1} = -2 < 0 \Rightarrow P_1(1,0,2)$ yerel max.

$B^2 - AC\big|_{P_2} = 0^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ ekstremum var

$A\big|_{P_2} = 2 > 0 \Rightarrow P_2(-1,0,-2)$ yerel min.

14) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{4-x-y}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(4-x-y)^2} = 0 \\ f_y &= -\frac{4}{y^2} + \frac{9}{(4-x-y)^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{y^2} \Rightarrow y = \mp 2x$$

$y = 2x \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(4-x-2x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{9}{(4-3x)^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$y = -2x \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(4-x+2x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{9}{(4+x)^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 9x^2 = 16 + 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1 \quad x = 2$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow P_2(-1,2)$

$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow P_3(2,-4)$

$A = f_{xx} = \frac{2}{x^3} + \frac{18}{(4-x-y)^3}, \quad B = f_{xy} = \frac{18}{(4-x-y)^3}, \quad C = f_{yy} = \frac{8}{y^3} + \frac{18}{(4-x-y)^3}$

	A	B	C	B^2-AC
$P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$	9	$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{8}$	$-\frac{729}{16} < 0$, $A = 9 > 0$: yerel min.
$P_3(2,-4)$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{7}{288} > 0$: eyer noktası
$P_2(-1,2)$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{24}{9} > 0$: eyer noktası