Doğal Logaritma ve Doğal Üstel Fonksiyon

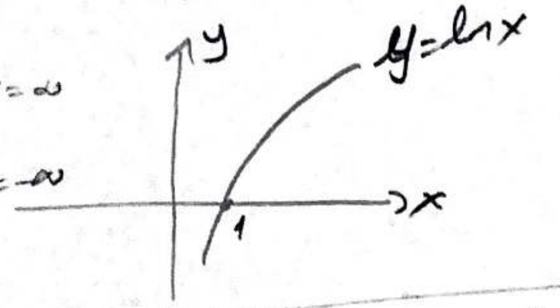
<u>Tanım:</u> Doğal logaritma

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \,, \quad x>0$$

formülüyle verilen bir fonksiyondur.

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

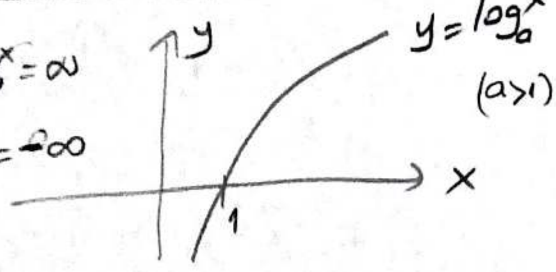
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$



* $x>0$ için tanımlı
* fonksiyon artandır.
* $f(x)=\ln x$ fonksiyonuna "Doğal Logaritma" denir

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a^x = \infty$

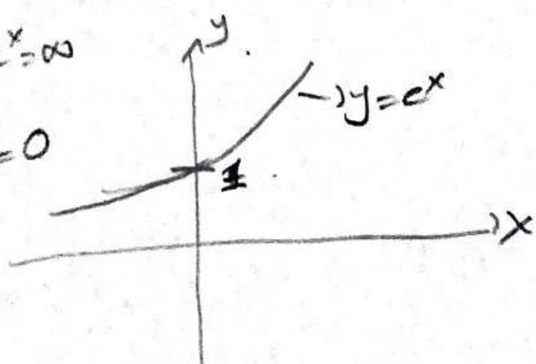
$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a^x = -\infty$



* $x>0$ için tanımlı.
* fonksiyon artandır.
* $f(x)=\log_a^x$ fonksiyonuna "Genel logaritmik fonksiyon" denir.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

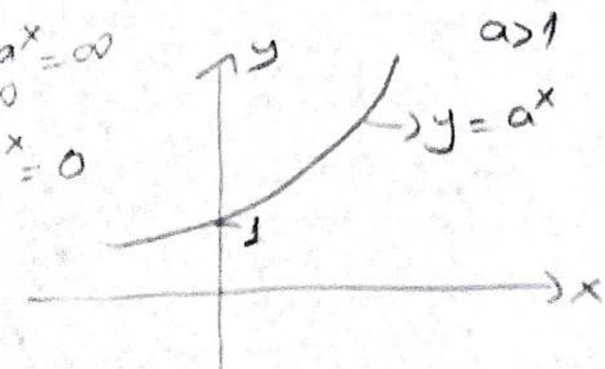
$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$



* $\ln x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur yani $\ln^{-1} x = e^x$ dir.
* $f(x)=e^x$ fonksiyonuna "doğal üstel fonksiyon" denir.
* fonksiyon artandır.

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$



* $\log_a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur.
* $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ fonksiyonuna "Genel üstel fonksiyon" denir
* fonksiyon artandır.

Özellikleri (Doğal Logaritma)

(1) $\ln e = 1$ (2) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(4) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. (5) $\ln x^r = r \ln x$ (6) $\ln e^x = x$

(7) $\ln 1 = 0$

Tanım: $\frac{d}{dx}(\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Ör: Aşağıdaki fonksiyonların x'e göre türevini hesaplayınız.

a.) $(\ln(x^2+3))' = \frac{2x}{x^2+3}$ b.) $(\ln 2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

Tanım: $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Ör: $\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 . \sin x)$

Ör: $\ln\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$

Ör: $\ln \frac{1}{8} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 8 = -\ln 8 = -\ln 2^3 = -3 \ln 2$

Özellikler: (Genel Logaritma)

(1) $\log_a^a = 1$ (2) $\log_a^{(xy)} = \log_a^x + \log_a^y$ (3) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a^x - \log_a^y$

(4) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a^x$ (5) $\log_a x^r = r \log_a^x$ (6) $\log_a a^x = x$ (7) $\log_a^1 = 0$

(8) $\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Özellikler: (Üstel Fonksiyonlar)

① $e^{\ln x} = x$ $\xrightarrow{} (x>0)$ ③ $x^n = e^{n.\ln x}$ $\xrightarrow{} (x>0)$ ⑤ $\log_a x = y \Rightarrow x = a^y$.

② $a^{\log_a x} = x$. $\xrightarrow{} x>0$. ④ $a^x = e^{x \ln a}$. ⑥ $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$ $(x>0)$

Ör: x için $e^{2x-6} = 4$ denklemini çözünüz

$e^{2x-6} = 4 \Rightarrow \ln e^{2x-6} = \ln 4$.

$2x - 6 = \ln 4$

$x = \dfrac{\ln 4 + 6}{2}$.

$x = \dfrac{2\ln 2 + 6}{2} = \ln 2 + 3$.

Türevler:

① $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ② $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ③ $(e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}$

④ $(e^x)' = e^x$ ⑤ $(a^{f(x)})' = f'(x)\, a^{f(x)} \ln a$.

⑥ $(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$.

Ör: a.) $(5e^x)' = 5e^x$ b.) $(e^{\sin x})' = \cos x\, e^{\sin x}$

c.) $(e^{-x})' = -e^{-x}$ d.) $(e^{\sqrt{3x+1}})' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} \cdot e^{\sqrt{3x+1}}$

Örn: $y = \dfrac{(x^2+1).(x+3)^{1/2}}{x-1}$, $x>1$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$\ln y = \ln \dfrac{(x^2+1).(x+3)^{1/2}}{(x-1)}$

$\ln y = \ln (x^2+1).(x+3)^{1/2} - \ln(x-1)$

$\ln y = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1)$

türetirsek

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-1}$

$y' = \dfrac{(x^2+1).(x+3)^{1/2}}{x-1}\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2(x+3)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Örn: $f(x) = x^x$, $x>0$, $f'(x) = ?$ $(y=f(x))$

$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

I. yol: $\ln y = x\ln x$

$\dfrac{y'}{y} = 1.\ln x + x.\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$

$y' = y.(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$

II. yol $y = x^x \Rightarrow y = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$y = e^{x\ln x} \Rightarrow y' = (x\ln x)'e^{x\ln x}$

$= \left(1\ln x + x.\dfrac{1}{\cancel{x}}\right)e^{x\ln x}$

$= (\ln x+1)\underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x} = x^x(\ln x+1)$

** Bir Limit Olarak e sayısı

① $e = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

yada

$e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

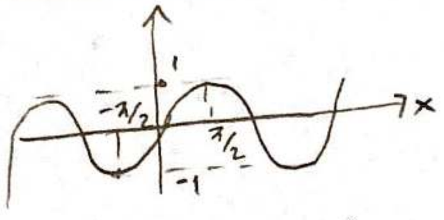
② $\lim\limits_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{a}$

yada

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$

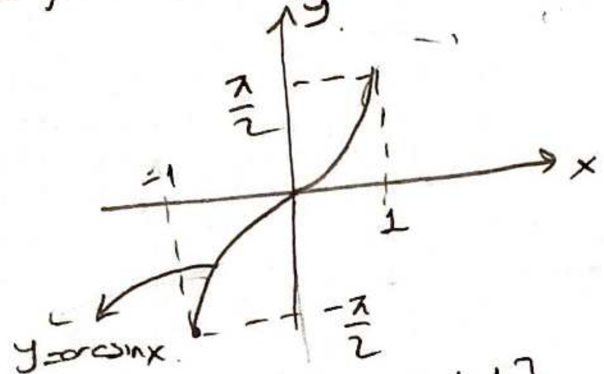
Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

* $y = \sin x$.



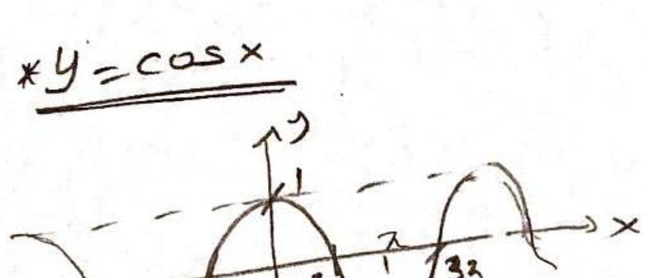
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Görüntü Kümesi: $-1 \le y \le 1$
* $y = \sin x$, bire-bir değildir

Eğer $y = \sin x$ fonksiyonunun, tanım kümesi $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alınırsa bire-bir olur ve ters fonksiyonu $y = \sin^{-1}x = \arcsin x$ şeklindedir.



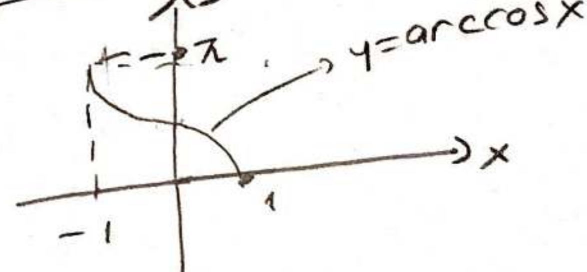
* Tanım Kümesi $[-1, 1]$
* Görüntü Kümesi: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

* $y = \cos x$



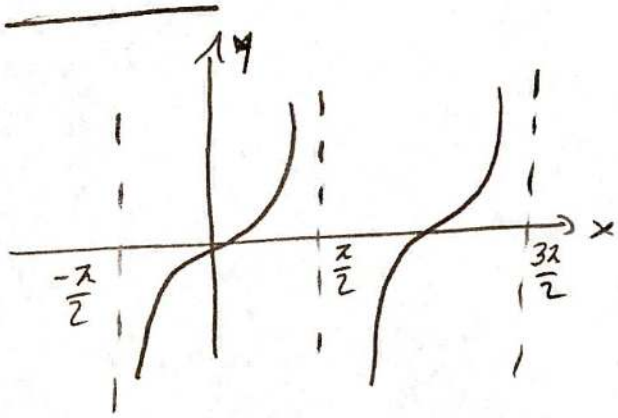
Tanım Kümesi: $(-\infty, \infty)$
Görüntü Kümesi: $[-1, 1]$
* $y = \cos x$, bire-bir değildir

Eğer $y = \cos x$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \pi]$ alınırsa $y = \cos x$ fonksiyonu bire-bir fonksiyonu olur ve ters fonksiyonu şeklindedir
* $y = \cos^{-1}x = \arccos x$



Tanım Kümesi: $-1 \le x \le 1$
Görüntü Kümesi: $0 \le y \le \pi$.

* $y = \tan x$

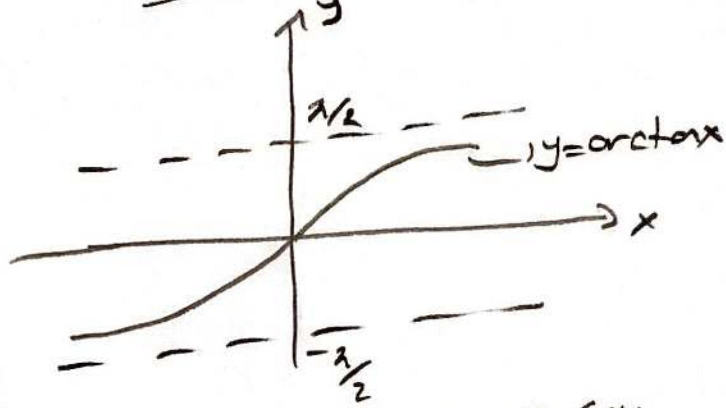


Tanım kümesi: $x \neq \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Görüntü kümesi: $(-\infty, \infty)$

$y = \tan x$ bire-bir değildir

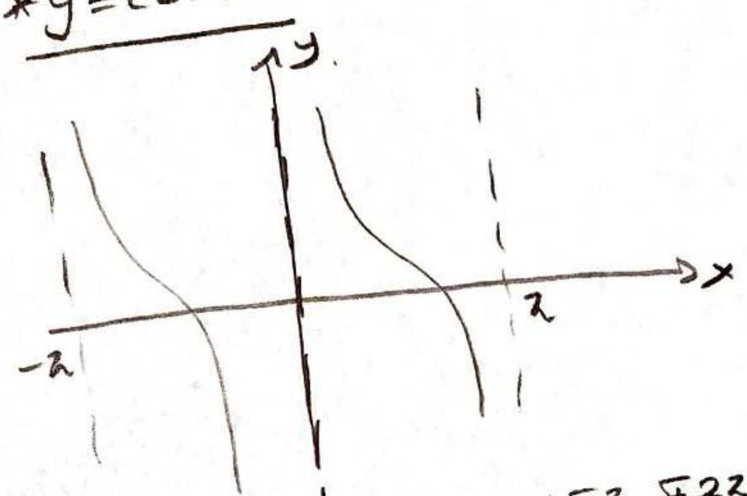
Eğer $y = \tan x$ fonksiyonunun tanım aralığı $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ alınırsa fonksiyon bire-bir olur ve tersi $y = \tan^{-1}x = \arctan x$ dir.



Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$

Görüntü kümesi: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

* $y = \cot x$

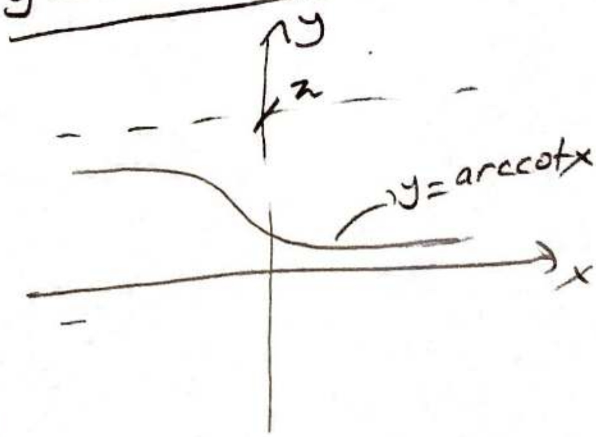


Tanım kümesi: $x \neq 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \ldots$

Görüntü kümesi: $(-\infty, \infty)$

$y = \cot x$ bire-bir değildir.

Eğer $y = \cot x$ fonksiyonunun tanım aralığı $(0, \pi)$ alınırsa fonksiyon bire-bir olur ve ters fonksiyonu $y = \cot^{-1}x = \operatorname{arccot} x$ dir.



Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$

Görüntü kümesi: $0 < y < \pi$

NOT: * $y = \operatorname{arcsec} x$ fonksiyonunun tanım kümesi: $x \leq -1$ veya $x \geq 1$
görüntü kümesi: $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}$ dır.

$y = \operatorname{arccosec} x$ fonksiyonunun tanım kümesi: $x \leq -1$ veya $x \geq 1$
görüntü kümesi: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$ dır.

Tanım: * $y = \arcsin x$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin y = x$ olan sayıdır.

* $y = \arccos x$, $[0, \pi]$ aralığında $\cos y = x$ olan sayıdır.

Ör: $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arccos(-\frac{1}{2})$ değerlerini hesaplayınız

$\arcsin x = y \Rightarrow \sin y = x$ dır

$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = a \Rightarrow \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$, $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = b \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$, $b \in [0, \pi]$

Ör:

x	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$

x	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Tanım: * $y = \arctan x$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında $\tan y = x$ olan sayıdır.

* $y = \text{arccot} x$, $(0, \pi)$ aralığında $\cot y = x$ olan sayıdır.

Ör: $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\arctan(-\sqrt{3})$ değerlerini bulunuz

$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = a \Rightarrow \tan a = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\arctan(-\sqrt{3}) = b \Rightarrow \tan b = -\sqrt{3} \rightarrow b = -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ör:

x	$y = \arctan x$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
0	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$

x	$y = \arctan x$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$

Özdeşlikler:

i.) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

ii.) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

iii.) $\arctan x + \text{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

iv) $\text{arcsec} x + \text{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

i.) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

ii.) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

iii.) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\arctan u(x))' = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

iv.) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

v.) $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$, $(\operatorname{arcsec} u(x))' = \dfrac{u'(x)}{|u(x)|\cdot\sqrt{u^2(x)-1}}$, $(|u|>1)$

vi.) $(\operatorname{arccosec} x)' = \dfrac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$, $(\operatorname{arccosec} u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{|u(x)|\cdot\sqrt{u^2(x)-1}}$, $(|u|>1)$

Hiperbolik Fonksiyonlar

$* \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $* \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Buradan $2\sinh x . \cosh x = 2 . \frac{(e^x - e^{-x})}{\cancel{2}} . \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$

Hiperbolik Fonksiyonların Özdeşlikleri

$* \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $* \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

$* \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ $* \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$

$* \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$* \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$* \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$* \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

$* \tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$

$* \coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

$(\sinh x)' = \cosh x \quad , \quad (\sinh u(x))' = u'(x)\cosh u(x)$

$(\cosh x)' = \sinh x \quad , \quad (\cosh u(x))' = u'(x)\sinh u(x)$

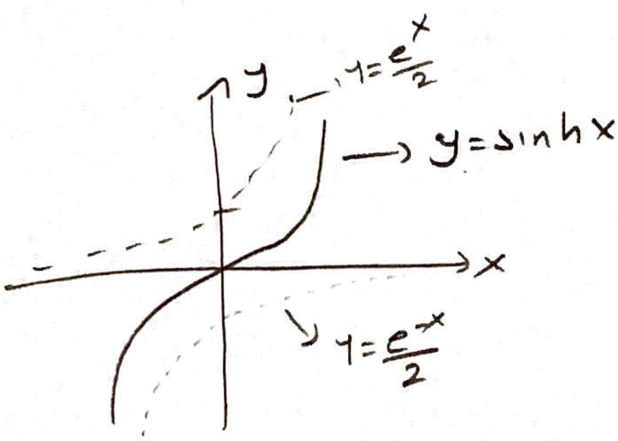
$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x \quad , \quad (\tanh u(x))' = u'(x)\operatorname{sech}^2 u(x)$

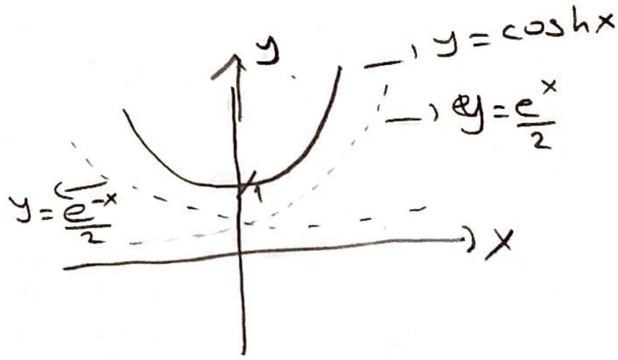
$(\coth x)' = -\operatorname{cosech}^2 x \quad , \quad (\coth u(x))' = -u'(x)\operatorname{cosech}^2 u(x)$

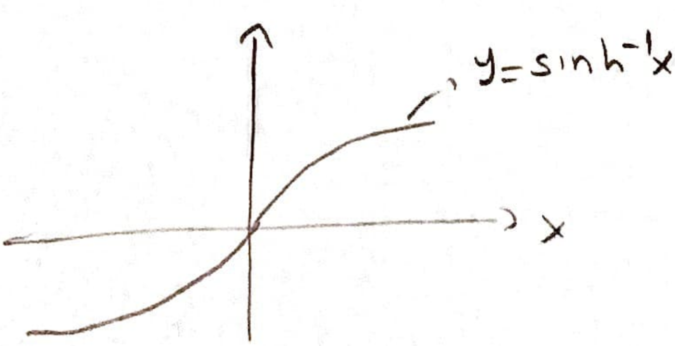
$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x . \tanh x$

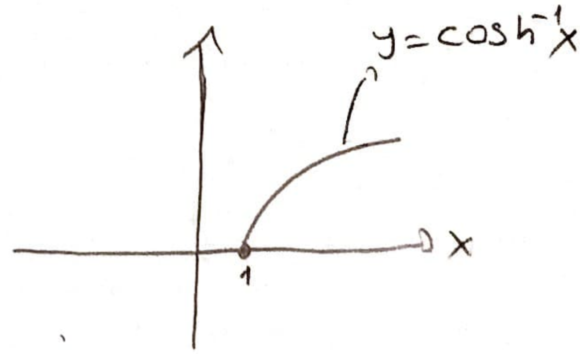
$(\operatorname{cosech} x)' = -\operatorname{cosech} x . \coth x$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar









$* \ y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y$

$* \ y = \cosh^{-1} x \Rightarrow x = \cosh y$

* $y = \tanh^{-1}x \Rightarrow x = \tanh y$
* $y = \coth^{-1}x \Rightarrow x = \coth y$
* $y = \operatorname{cosech}^{-1}x \Rightarrow x = \operatorname{cosech} y$
* $y = \operatorname{sech}^{-1}x \Rightarrow x = \operatorname{sech} y$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar İçin Özdeşlikler

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cosech}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

i.) $(\sinh^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\sinh^{-1}u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$

ii.) $(\cosh^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\cosh^{-1}u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$

iii.) $(\tanh^{-1}x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $(\tanh^{-1}u(x))' = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$

iv.) $(\coth^{-1}x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $(\coth^{-1}u(x))' = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$

v.) $(\operatorname{sech}^{-1}x)' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{sech}^{-1}u(x))' = \dfrac{-u'(x)}{u(x)\sqrt{1-u^2(x)}}$

vi.) $(\operatorname{cosech}^{-1}x)' = \dfrac{-1}{|x|\cdot\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{cosech}^{-1}u(x))' = \dfrac{-u'(x)}{|u(x)|\cdot\sqrt{1+u^2(x)}}$

$\underline{\text{Ör}}$: $2\cosh(\ln x) = ?$

$$2\cosh(\ln x) = \cancel{2}\cdot\frac{(e^{\ln x} + e^{-\ln x})}{\cancel{2}}$$

$$= e^{\ln x} + e^{-\ln x}$$

$$= x + x^{-1}$$

$$= x + \frac{1}{x}$$

$\underline{\text{Ör}}$: $y = \ln(\sinh x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{(\sinh x)'}{\sinh x}$$

$$y' = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$$

$\underline{\text{Ör}}$: $y = \sinh(e^{\cosh x}) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \cosh(e^{\cosh x}) \cdot \sinh x \cdot e^{\cosh x}$$

$\underline{\text{Ör}}$: $y = \operatorname{sech}(\ln(\cos x)) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = -\operatorname{sech}(\ln\cos x) \cdot \tanh(\ln\cos x) \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

ör: $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ör: $\sec\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ör: $\lim\limits_{x \to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$

ör: $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

ör: $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arccosec} x = 0.$

ör: $y = \arcsin e^x \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

ör: $y = \arccos(\ln \sin x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{-(\ln \sin x)'}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}} = \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}} = \frac{-\cot x}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}}$$

ör: $y = \ln \arctan x \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{(\arctan x)'}{\arctan x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} = \frac{1}{(1+x^2).\arctan x}$$