

VERİ YAPILARI VE ALGORİTMALAR

BLM2512 Gr.2

2020-2021 Bahar Yarıyılı (Uzaktan Eğitim)

Dr.Öğr.Üyesi Göksel Biricik

ALGORİTMA ANALİZİ TEMELLERİ

Algoritma Analizi

- Algoritma Analizi, farklı çözüm yöntemlerinin başarımını analizi etmeyi sağlayan araçlar sunan Bilgisayar Bilimlerinde bir alandır.
- Neden algoritmayı analiz ederiz?
 - Algoritmanın performansını ölçmek için
 - Farklı algoritmalarla karşılaştırmak için
 - Daha iyisi mümkün mü? Olabileceklerin en iyisi mi?
- Aynı problemi çözen iki algoritmanın performansı nasıl karşılaştırılır?
 - Teorik analiz
 - Empirik analiz

Empirik Yöntemle Algoritma Analizi

- Basit yöntem, algoritmaların bir programlama dili ile gerçekleştirilerek çalıştırılması ve işletim sürelerinin karşılaştırılmasıdır. Algoritma yerine programın başarımının karşılaştırılmasının da zorluk ve sakıncaları bulunmaktadır.
 - Algoritma nasıl kodlandı?
 - İşletim sürelerinin karşılaştırılması gerçekleştirmelerin karşılaştırılmasıdır.
 - Kodlar, programcının stiline bağlıdır ve algoritma başarımının düzgün ölçülmesine engel olabilir.
 - Kullanılan bilgisayar sonucu etkileyebilir.
- Algoritma başarımının aşağıdaki unsurlardan bağımsız hesaplanabilmesi gerekir:
 - Belirli bir bilgisayarın özelliklerinden
 - Kullanılan verinin özelliklerinden
 - Programlama dili avantaj/dezavantajlarından

Teorik Algoritma Analizi

- Algoritma analizi sırasında, algoritmanın başarımını gerçekleştirim, bilgisayar ya da veriden bağımsız değerlendirmeye olanak sağlayan matematiksel yöntemler kullanılabilmesi gereklidir.
- Algoritma Analizinde;
 - Belirli bir çözümün etkinliğini belirlemek için öncelikle önemli işlemlerin sayısı belirlenir.
 - Ardından büyüme fonksiyonları (growth function) kullanılarak algoritma etkinliği ifade edilir.

Algoritmaların İşletim Süresi

- Bir algorithmadaki her bir işlemin bir maliyeti vardır.
 - Her işlem belirli bir sürede tamamlanır.
 - `count = count + 1; //` Belirli bir süre gerekir. Bu süre sabittir.
- Birden çok işlem
 - `count = count + 1;` Maliyet: c1
 - `sum = sum + count;` Maliyet : c2
- ➔ Toplam Maliyet = $c1 + c2$

Algoritmaların İşletim Süresi

- If komutu Maliyeti:

	<u>Maliyet</u>	<u>Tekrar</u>
if (n < 0)	c1	1
absV = -n	c2	1
else		
absV = n;	c3	1

- Toplam Maliyet = $c1 + \max(c2, c3)$

Algoritmaların İşletim Süresi

- Basit Döngü Maliyeti:

	<u>Maliyet</u>	<u>Tekrar</u>
<code>i = 1;</code>	<code>c1</code>	1
<code>sum = 0;</code>	<code>c2</code>	1
<code>while (i <= n) {</code>	<code>c3</code>	<code>n+1</code>
<code>i = i + 1;</code>	<code>c4</code>	<code>n</code>
<code>sum = sum + i;</code>	<code>c5</code>	<code>n</code>
<code>}</code>		

Toplam Maliyet = $c1 + c2 + (n+1)*c3 + n*c4 + n*c5$

➔ Bu algoritma için gereken süre ***n*** ile doğru orantılıdır.

Algoritmaların İşletim Süresi

- İç içe Döngü Maliyeti:

	<u>Maliyet</u>	<u>Tekrar</u>
<code>i=1;</code>	c1	1
<code>sum = 0;</code>	c2	1
<code>while (i <= n) {</code>	c3	n+1
<code>j=1;</code>	c4	n
<code>while (j <= n) {</code>	c5	n*(n+1)
<code>sum = sum + i;</code>	c6	n*n
<code>j = j + 1;</code>	c7	n*n
<code>}</code>		
<code>i = i + 1;</code>	c8	n
<code>}</code>		

$$\text{Total Cost} = c1 + c2 + (n+1)*c3 + n*c4 + n*(n+1)*c5 + n*n*c6 + n*n*c7 + n*c8$$

→ Bu algoritma için gereken süre n^2 ile doğru orantılıdır.

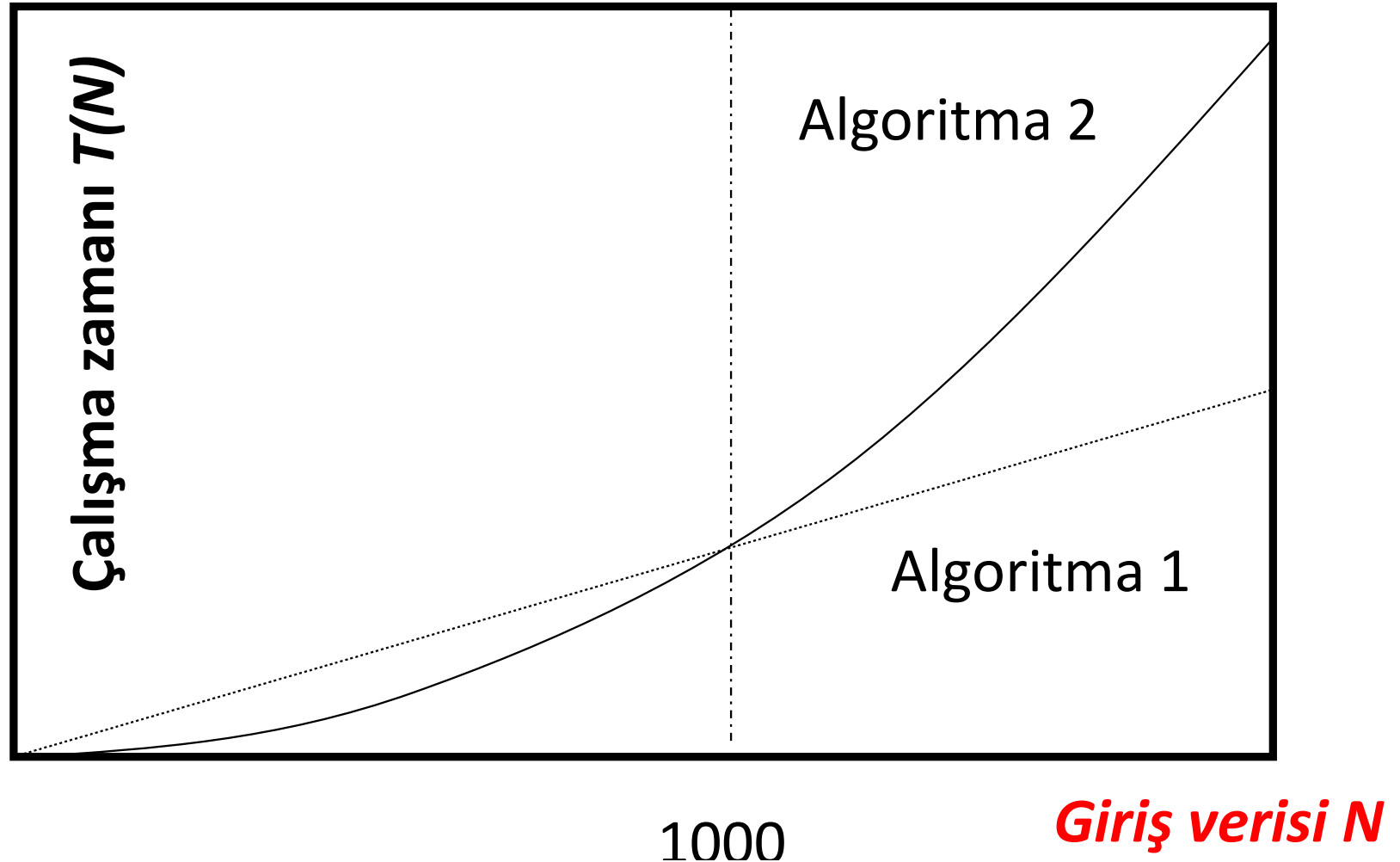
Genel Öngörü Kuralları

- **Döngü:** Döngü işletim süresi, azami olarak, iterasyon sayısı kere döngü içerisindeki komutların toplam işletim süresidir.
- **İç içe döngü:** İç içe döngü işletim süresi, en içte kalan döngü bloğundaki komutların toplam işletim süresinin tüm döngü iterasyon sayısı çarpımı ile bulunur.
- **Art arda Komutlar:** Basitçe her bir komutun işletim süreleri toplamı ile elde edilir.
- **If/Else:** **if** bloğundaki ve **else** bloğundaki işlemlerin daha çok zaman gerektirene, karşılaştırma için gereken işlem süresinin eklenmesiyle elde edilen toplamdan fazla olamaz.

Algoritmada Büyüme Oranları

- Algoritma zaman gereksinimi, problemin boyutunun bir fonksiyonu olarak ölçülür.
 - Problem boyutu uygulamaya bağlıdır: Sıralanacak eleman sayısı, arama yapılacak listedeki kullanıcı sayısı, vb..
- Problem boyutu n ise, örneğin;
 - A Algoritması $n^2/5$ birim zaman gerektirir.
 - B Algoritması $5 \cdot n$ birim zaman gerektirir.
- Anlaşılması gereken en önemli husus, problem boyutuna göre algoritmanın zaman gereksiniminin ne kadar hızlı arttığıdır.
 - A Algoritması n^2 ile orantılı zaman gerektirir.
 - B Algoritması n ile orantılı zaman gerektirir.
- Algoritmanın oransal zaman gereksinimi **büyüme oranı** olarak adlandırılır.
- Algoritmaların başarımları büyüme oranlarına bakılarak karşılaştırılabilir.

Algoritmada Büyüme Oranları



Algoritma Büyüme Oranları

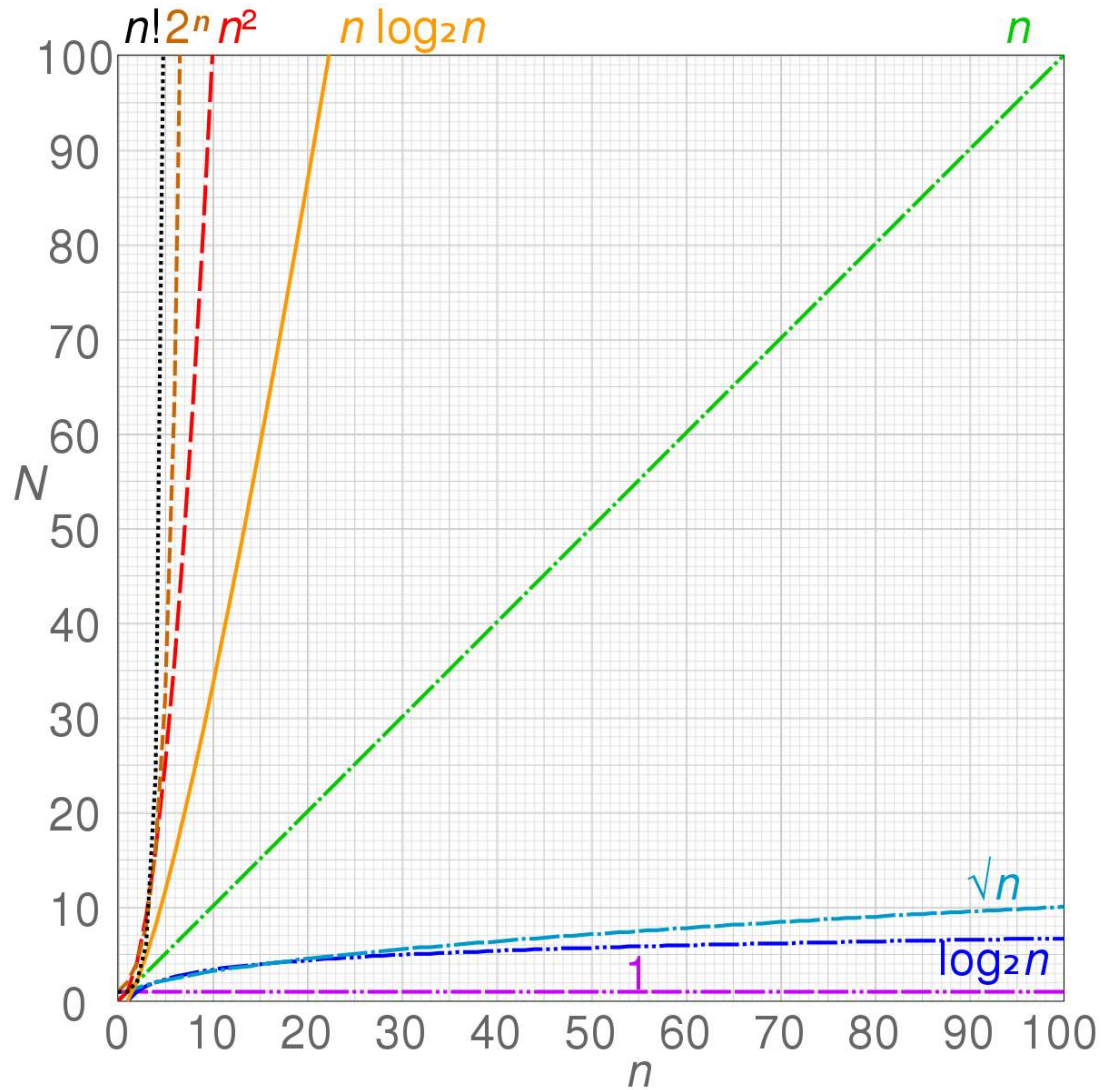
- $N < 1000$ için iki algoritma arasındaki yürütme zamanı ihmal edilebilir.

N	T1	T2
10	10^{-2} sn.	10^{-4} sn.
100	10^{-1} sn.	10^{-2} sn.
1000	1 sn.	1 sn.
10000	10 sn.	100 sn.
100000	100 sn.	10000 sn.

Yaygın Büyüme Oranları

Fonksiyon	Büyüme oranı İsmi
C	Sabit
$\log N$	Logaritmik
$\log^2 N$	Logaritmik kare
N	Doğrusal
$N \log N$	Doğrusal Logaritmik
N^2	İkinci derece (Kare)
N^3	Kübik
2^N	Üstel
$N!$	Faktöryel

Yaygın Büyüme Oranları



Döngülerin Büyüme Oranları

- `for (i=0; i<1000; i++)`
 - $f(n)=n$ (Doğrusal)
- `for (i=0; i<1000; i+=2)`
 - $f(n)=n/2$ (Doğrusal)
- `for (i=1; i<=1000; i*=2)`
 - $f(n)=\log n$ (Logaritmik)

Döngülerin Büyüme Oranları

- `for (i=0; i<1000; i++)`
 - `for (j=0; j<1000; j++)`
 - $f(n)=n^2$ (Kuadratik)
- `for (i=0; i<1000; i++)`
 - `for (j=0; j<i; j++)`
 - $f(n)=n(n+1)/2$ (Bağımlı Kuadratik)
- `for (i=0; i<1000; i++)`
 - `for (j=1; j<=1000; j*=2)`
 - $f(n)=n \log N$ (Doğrusal Logaritmik)

Fonksiyon Büyüme Analizi ve 'Büyük O' Gösterimi

- Bir algoritma $g(n)$ ile doğru orantılı zaman gerektiriyorsa, $g(n)$ seviyesinde olduğu söylenir ve **$O(g(n))$** şeklinde gösterilir.
- $g(n)$ fonksiyonu algoritmanın büyüme oranı fonksiyonu olarak adlandırılır.
- Gösterim için **O** (büyük harf) kullanıldığından **Büyük O** (**Big O**) gösterimi olarak adlandırılır.
 - A Algoritması n^2 ile doğru orantılı zaman gerektiriyor ise $O(n^2)$.
 - A Algoritması n ile doğru orantılı zaman gerektiriyor ise $O(n)$.

Büyüme Oranı Fonksiyonları

- **$O(1)$** Zaman gereksinimi sabittir ve problem boyutundan bağımsızdır.
- **$O(\log_2 n)$** Logaritmik algoritmaların zaman gereksinimi, boyut artışından daha yavaş artış.
- **$O(n)$** Doğrusal algoritma zaman gereksinimi, boyut artışına paralel artış.
- **$O(n \cdot \log_2 n)$** $n \cdot \log_2 n$ algoritmanın zaman gereksinimi, doğrusal algoritmadan çok daha hızlı artar.
- **$O(n^2)$** İkinci dereceden bir algoritmanın zaman gereksinimi, problem boyutuna göre süratle artar.
- **$O(n^3)$** Üçüncü dereceden bir algoritmanın zaman gereksinimi, problem boyutuna göre ikinci dereceden bir algoritmanın zaman gereksiniminden çok daha yüksek süratle artar.
- **$O(2^n)$** Üssel bir algoritmanın zaman gereksinimi, algoritmanın kullanışlı olmasının önüne geçecek şekilde aşırı yüksek süratle artar.

Büyüme Oranlarının Karşılaştırılması (N=10.000)

Büyüme Oranı	Big-O	İterasyon Sayısı	Tahmini süre
Logaritmik	$O(\log N)$	13	mikrosaniyeler
Doğrusal	$O(N)$	10.000	saniyeler
Doğrusal Logaritmik	$O(N \log N)$	140.000	saniyeler
Quadratik	$O(N^2)$	10.000^2	dakikalar
Polinomiyal	$O(N^k)$	10.000^k	saatler
Üssel	$O(c^N)$	$2^{10.000}$	Felaket :)
Faktoryel	$O(N!)$	$10.000!$	Ölümcül :)

Büyüme Oranlarının Karşılaştırılması (N=10.000)

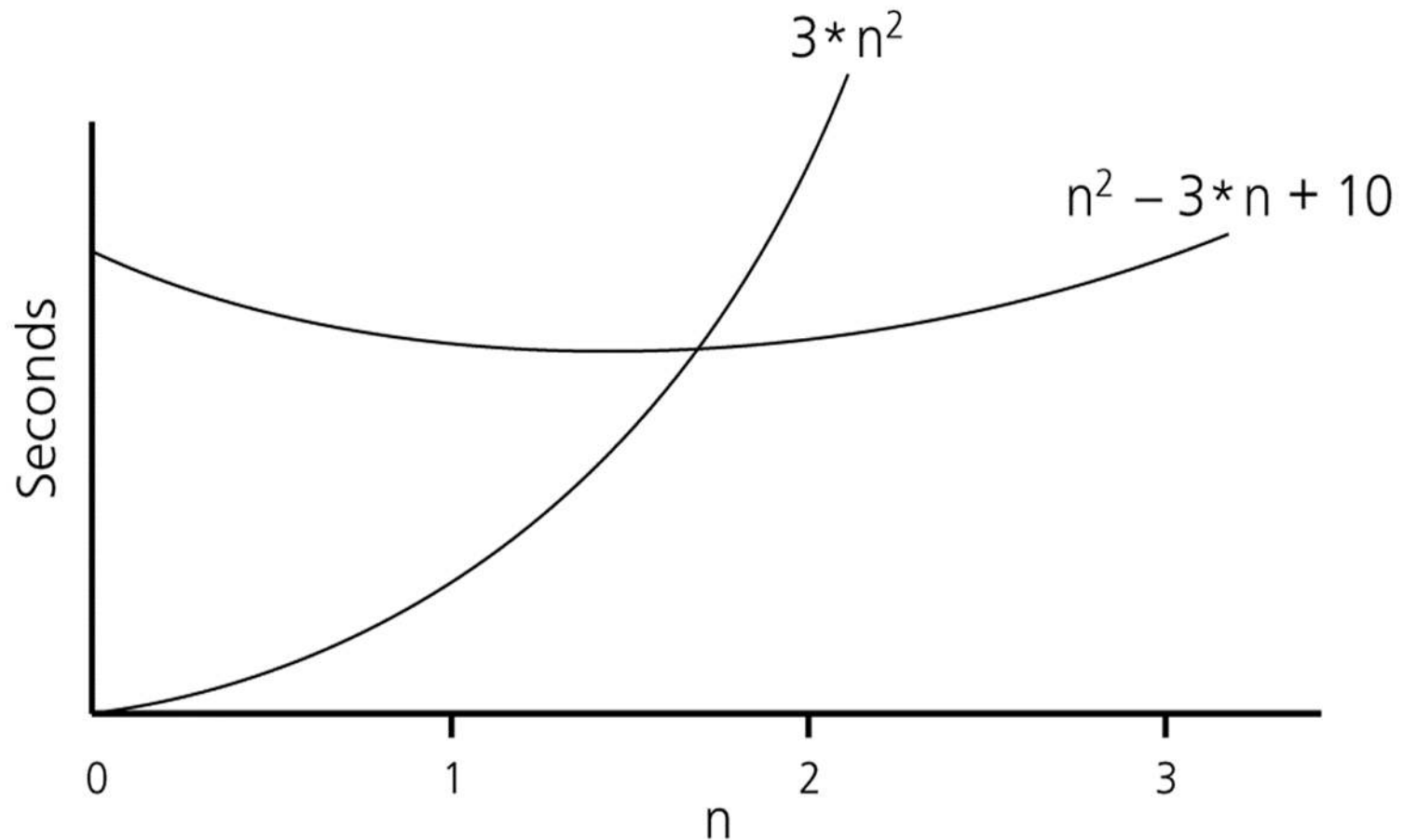
(a)

Function	n					
	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
1	1	1	1	1	1	1
$\log_2 n$	3	6	9	13	16	19
n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$n * \log_2 n$	30	664	9,965	10^5	10^6	10^7
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
2^n	10^3	10^{30}	10^{301}	$10^{3,010}$	$10^{30,103}$	$10^{301,030}$

Algoritma Seviyesi

- Bir algoritma n boyutundaki bir problemi çözmek için $f(n)=n^2-3*n+10$ saniye gerektiriyor.
- $k*n^2 > n^2-3*n+10$ (her $n \geq n_0$ için) olacak şekilde
- k ve n_0 sabitleri bulunabiliyorsa, algoritma n^2 seviyesindedir.
- $k = 3$ ve $n_0 = 2$ ile;
- $3*n^2 > n^2-3*n+10$ ($n \geq 2$ için) .
- Dolayısıyla, algoritma $n \geq n_0$ olduğunda $k*n^2$ birim zamandan fazlasına gerek duymaz ve seviyesi **$O(n^2)$** olur.

Algoritma Seviyesi



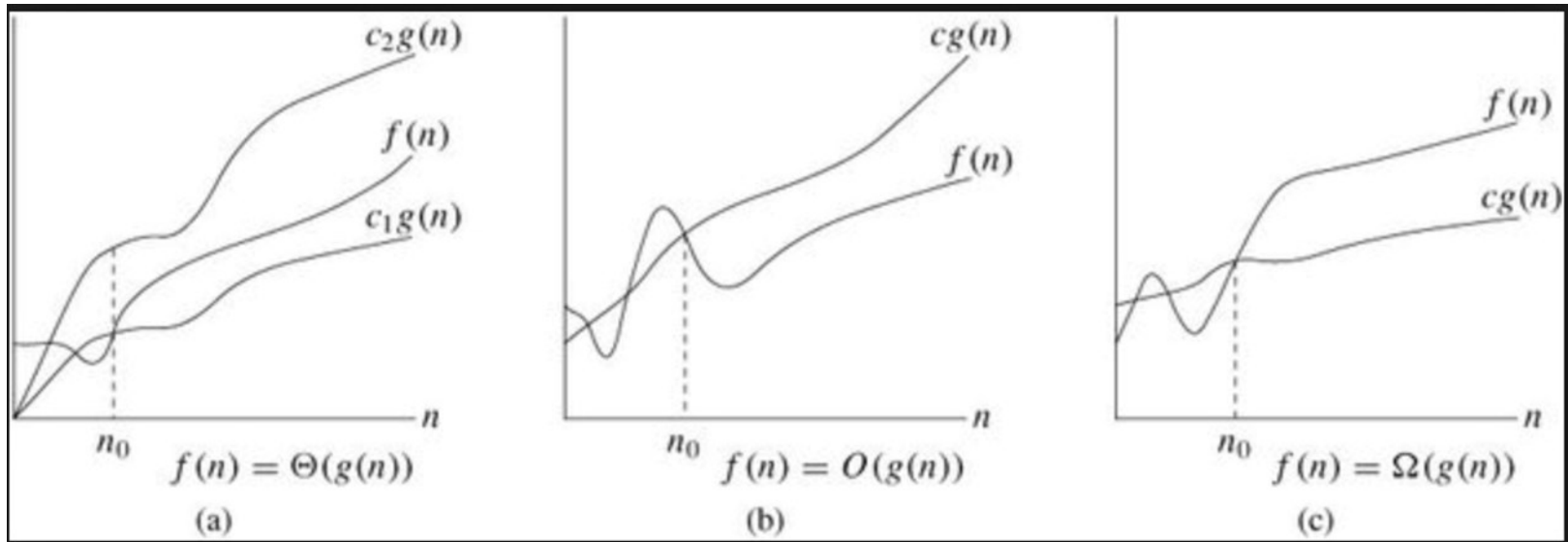
Algoritma Seviyesi Tanımı

- A algoritmasının,
 - $n \geq n_0$ boyutundaki problemi çözmek için
 - asgari $k \cdot g(n)$ birim zamana ihtiyaç duyacağı şekilde
 - k ve n_0 sabitleri bulunabiliyorsa,
-
- A'nın omega $g(n)$ seviyesinde olduğu söylenir ve
 - $\Omega(g(n))$ olarak gösterilir.
 - $f(n) \geq k \cdot g(n)$; her $n \geq n_0$ için

Algoritma Seviyesi Tanımı

- A algoritmasının,
 - $n \geq n_0$ boyutundaki problemi çözmek için
 - asgari $k_1 * g(n)$ ve
 - azami $k_2 * g(n)$ birim zamana ihtiyaç duyacağı şekilde
 - k_1 , k_2 ve n_0 sabitleri bulunabiliyorsa,
-
- A'nın teta $g(n)$ seviyesinde olduğu söylenir ve
 - $\Theta(g(n))$ olarak gösterilir.
 - $k_2 * g(n) \geq f(n) \geq k_1 * g(n)$; her $n \geq n_0$ için

Algoritma Seviyesi Tanımı



- O fonksiyonu üstten, Ω alttan bağlarken, Θ hem alttan hem üstten bağlamaktadır. Başka açıdan:
- $\Theta(n)$: $O(n) \geq f(n) \geq \Omega(n)$ olur.
- \geq yerine $>$ konursa sırasıyla o , ve ω gösterimleri elde edilir.

Büyük-O Özellikleri

1. Düşük seviyeli terimler göz ardı edilebilir.
 - Bir algoritma $O(n^3+4n^2+3n)$ ise aynı zamanda $O(n^3)$ 'dür.
 - Büyüme oranı fonksiyonu olarak **sadece en yüksek seviyeli terim** kullanılır.
2. Sabit bir çarpan göz ardı edilebilir.
 - Bir algoritma $O(5n^3)$ ise aynı zamanda $O(n^3)$ 'dür.
3. Büyüme oranı fonksiyonları birleştirilebilir.
 - $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n)+g(n))$
 - Bir algoritma $O(n^3) + O(4n^2)$ ise aynı zamanda $O(n^3 + 4n^2)$ olur
 - ➔ $O(n^3)$.
 - Çarpma için de aynı kural geçerlidir.

Büyük-O Örnek-1

	<u>Maliyet</u>	<u>Tekrar</u>
<code>i = 1;</code>	<code>c1</code>	1
<code>sum = 0;</code>	<code>c2</code>	1
<code>while (i <= n) {</code>	<code>c3</code>	<code>n+1</code>
<code>i = i + 1;</code>	<code>c4</code>	<code>n</code>
<code>sum = sum + i;</code>	<code>c5</code>	<code>n</code>
<code>}</code>		

$$\begin{aligned}T(n) &= c1 + c2 + (n+1)*c3 + n*c4 + n*c5 \\&= (c3+c4+c5)*n + (c1+c2+c3) \\&= a*n + b\end{aligned}$$

➔ Algoritmanın büyüme oranı fonksiyonu (karmaşıklığı) **O(n)** olur.

Büyük-O Örnek-2

```
i=1;
sum = 0;
while (i <= n) {
    j=1;
    while (j <= n) {
        sum = sum + i;
        j = j + 1;
    }
    i = i + 1;
}
```

<u>Maliyet</u>	<u>Tekrar</u>
c1	1
c2	1
c3	n+1
c4	n
c5	n*(n+1)
c6	n*n
c7	n*n
c8	n

$$\begin{aligned}T(n) &= c1 + c2 + (n+1)*c3 + n*c4 + n*(n+1)*c5 + n*n*c6 + n*n*c7 + n*c8 \\&= (c5+c6+c7)*n^2 + (c3+c4+c5+c8)*n + (c1+c2+c3) \\&= a*n^2 + b*n + c\end{aligned}$$

→ Algoritmanın büyüme oranı fonksiyonu (karmaşıklığı) **O(n²)** olur.

Büyük-O Örnek-3

```
for (i=1; i<=n; i++)  
    for (j=1; j<=i; j++)  
        for (k=1; k<=j; k++)  
            x=x+1;
```

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j 1$$

Algoritmanın büyüme oranı fonksiyonu **$O(n^3)$** olur.

Özyinelemeli Algoritmelerde Büyük-O

- Özyineli fonksiyonların zaman karmaşıklık fonksiyonu $T(n)$, kendisi cinsinden ifade edilir ve $T(n)$ yineleme denklemi (recurrence equation) olarak adlandırılır.
- Özyineli bir fonksiyonun büyüme oranı fonksiyonunu çözebilmek için yineleme ilişkisini çözmek gerekir.

- Örnek: Fibonacci Sayıları

```
int fib(int n)
{
    if (n <= 1)
        return n;
    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

Özyinelemeli Algoritmelerde Büyük-O

- $n=0$ $T(0) = c_1$
- $n=1$ $T(1) = c_2$
- $n>1$ ise $T(n)=c_1+c_2+T(n-1)+T(n-2) \rightarrow T(n-1)+T(n-2)+c$
- Yineleme ilişkisi denklemini çözmek gereklidir.
- $T(n-1) \sim T(n-2)$ kabul edebiliriz
 - aslında $T(n-1) \geq T(n-2)$ ama üstten sınırlayabiliriz (upper bound)

Özyinelemeli Algoritmelerde Büyük-O

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c \\&= 2T(n-1) + c \quad // T(n-1) \sim T(n-2) \text{ yaklaşımı ile} \\&= 2*(2T(n-2) + c) + c \\&= 4T(n-2) + 3c \\&= 8T(n-3) + 7c \\&= 2^k * T(n-k) + (2^k - 1)*c\end{aligned}$$

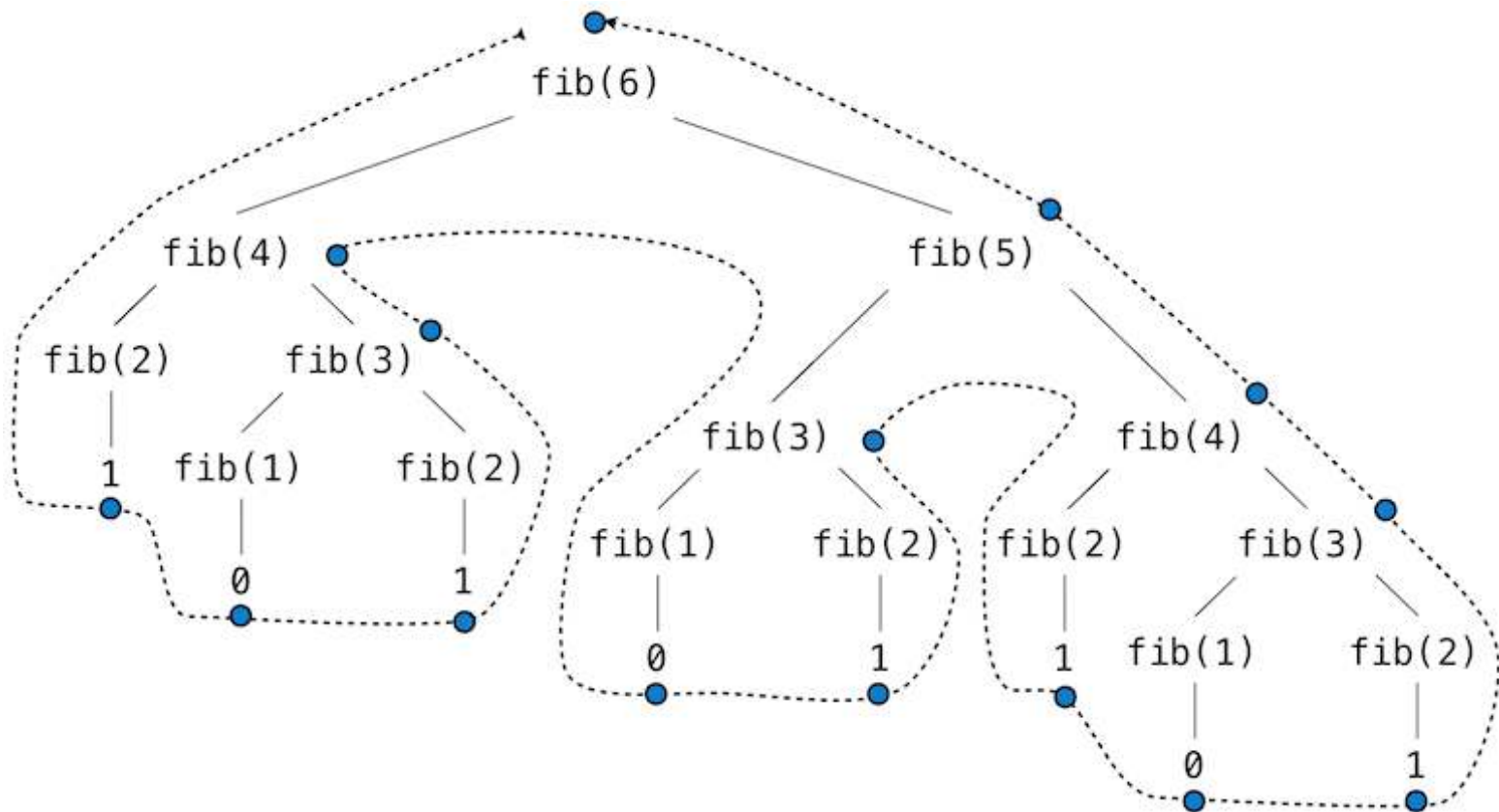
$$n-k=0, \quad \mathbf{k=n}$$

$$\begin{aligned}T(n) &= 2^n * T(0) + (2^n - 1) * c \\&= 2^n * (1 + c) - c\end{aligned}$$

$$T(n) \sim 2^n$$

- ➔ Algoritmanın büyüme oranı fonksiyonu **$O(2^n)$** olur.

Özyinelemeli Algoritmelerde Büyük-O



Değerlendirme

- Bir algoritma aynı boyuttaki farklı sorunları çözmek için farklı sürelerle gereksinim duyabilir.
 - n elemanlı bir dizide, sıradan arama yapmanın maliyeti. $\rightarrow 1, 2, \dots, n$
- **En kötü durum (Worst-Case) Analizi** – Algoritmanın n boyutundaki problemi çözmesi için gereken azami süre.
 - Algoritma karmaşıklığı için üst sınır verir.
 - Genel olarak algoritmaların en kötü durum davranışı incelenir.
- **En iyi durum (Best-Case) Analizi** – Algoritmanın n boyutundaki problemi çözmesi için gereken asgari süre.
 - Çok kullanışlı değildir.
- **Ortalama durum (Average-Case) Analizi** – Algoritmanın n boyutundaki problemi çözmesi için gereken ortalama süre.
 - Çoğunlukla belirlenmesi zordur.
 - Olası veri durumu değerlendirilip, dağılımına bakılır.
 - **En kötü durum analizi, ortalama durum analizinden daha çok kullanılır.**

Sıralı Arama

```
int sequentialSearch(int a[], int size, int x) {  
    int i;  
  
    for (i=0; i<size && a[i]!=x; i++);  
  
    if (i==size)  
        return -1;  
  
    return i;  
}
```

- Bulunamazsa **$O(n)$**
- Bulunursa,
 - En iyi durum: aranan değer ilk eleman, **$O(1)$**
 - En kötü durum: aranan değer son elemandır **$O(n)$**
 - Ortalama durum: karşılaştırma sayısı $1, 2, \dots, n$ $(\sum_{i=1}^n i)/n$ **$O(n)$**

İkili Arama

- Dizi sıralı ise, ikili arama kullanılabilir.
- Aranılan eleman dizide yoksa, döngü içerisindeki yineleme sayısı $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
 $\rightarrow O(\log_2 n)$
- Başarılı arama :
En iyi durum: *aranan değer dizinin bakılan ilk elemanıdır* $\rightarrow O(1)$
En kötü durum: *aranan değer son bakılacak konumdadır* $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$
 $\rightarrow O(\log_2 n)$
Ortalama durum : karşılaştırma sayısı $< \log_2 n$ $\rightarrow O(\log_2 n)$

0 1 2 3 4 5 6 \leftarrow 7 elemanlı dizi

3 2 3 1 3 2 3 \leftarrow yineleme sayısı

Ortalama yineleme sayısı : $= 17/7 = 2.4285 < \log_2 7$

$O(\log N)$ Performansi

<u>n</u>	<u>$O(\log_2 n)$</u>
16	4
64	6
256	8
1024	10
16,384	14
131,072	17
262,144	18
524,288	19
1,048,576	20
1,073,741,824	30

Binary Search

```
int binarySearch(int a[], int size, int x) {
    int low =0;
    int high = size -1;
    int mid; // aranan değer bulunursa mid konumu tutar.

    while (low <= high) {
        mid = (low + high)/2;

        if (a[mid] < x)
            low = mid + 1;
        else if (a[mid] > x)
            high = mid - 1;
        else
            return mid;
    }
    return -1;
}
```