Ç.O. 24

Teğet Düzlem / Normal Doğru

$f(x,y,z)=c$ fonksiyonu için;

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\Rightarrow P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen teğet düzleme dik

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\Rightarrow P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen normal doğruya paraleldir

$$\nabla f|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}\vec{k}$$ olduğundan;

① $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki teğet düzlemi;

$f_x(P_0).(x-x_0)+f_y(P_0).(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$ dır.

② $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki normal doğrusu:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + f_x(P_0).t \\ y &= y_0 + f_y(P_0).t \\ z &= z_0 + f_z(P_0).t \end{aligned}\right\} \text{ dır.}$$

$\nabla f x = (-2x, -2y, -1)$

$-2(x-1)-4(y-2)-(z-4)$

⊛ $z=9-x^2-y^2$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ deki teğet düzlemi ve normal doğrusu?

$(-2,-4,-1)$

$f: z+x^2+y^2-9=0$ $\quad f_x=2x \quad f_y=2y \quad f_z=1$

$\nabla f = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$ $\quad \nabla f(P_0)=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k} = \langle \underset{A}{\overset{a}{2}}, \underset{B}{\overset{b}{4}}, \underset{C}{\overset{c}{1}} \rangle$ → Teğete dik düzleme → Normale doğruya paralel

$2.(x-1)+4(y-2)+1.(z-4)=0 \rightarrow 2x+4y+z=14$ → Teğet düzlem

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 2+4t \\ z &= 4+t \end{aligned}\right\} \text{ Normal doğru}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1}$$

$\boxed{C.0.25}$

(*) (0,0,0) noktasında $z = x\cos y - ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlem?

$0 = x\cos y - ye^x - z$ $\qquad \nabla f_x = \langle \cos y - ye^x, -xy\sin y - e^x, -1 \rangle$

$F: z - x\cos y + ye^x = 0$ $\qquad F_x = (-\cos y + ye^x)$ $\qquad F_x(0,0,0) = -1$ $\qquad \nabla f_x(1,-1,-1)$

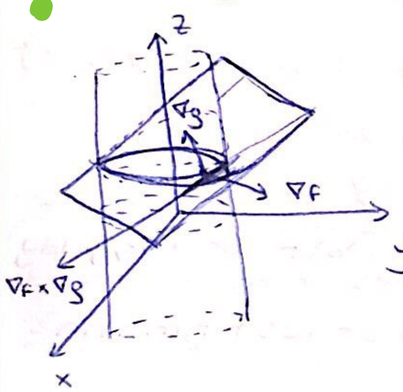
$F_y = (x\sin y + e^x)$ $\qquad F_y(0,0,0) = 1$

$F_z = 1$ $\qquad x - y - z = 0$

$\nabla F = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \langle \overset{A}{-1}, \overset{B}{1}, \overset{C}{1} \rangle \Rightarrow -1.(x-0) + 1.(y-0) + 1.(z-0) = 0$

$$\boxed{-x + y + z = 0}$$

(*) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ silindiri ve $g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$ düzlemi bir E elipsi boyunca kesişirler. $P_0(1,1,3)$ noktasında E'ye teğet olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.



Teğet doğru P_0 da hem ∇f'e hem de ∇g'ye diktir. Yani $\nabla f \times \nabla g$ ye paraleldir.

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ $\qquad \nabla f\big|_{P_0} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\nabla g = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{v} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = \langle \underset{a}{2}, \underset{b}{-2}, \underset{c}{-2} \rangle$$

$$\boxed{x = 1 + 2t \qquad y = 1 - 2t \qquad z = 3 - 2t}$$

Lineerleştirme: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) daki lineerleştirmesi:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b).\Delta x + f_y.(a,b)\Delta y$$

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0).(y-y_0) \text{ dır.}$$

$f(x,y) \approx L(x,y)$ dır. $L(x,y)$ yaklaşımı f in (x_0,y_0) daki lineer yaklaşımıdır.

(*) 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki lineerleştirmesi:

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0).(z-z_0)$$

$f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$

$\circledast$ $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ fonksiyonun ~~[illegible]~~ $(3,2)$ deki lineerleştirmesini bulun. $2x-y$ $-x+y$ Ç.0.26

$L(x,y) = f(3,2) + f_x(3,2).(x-3) + f_y(3,2).(y-2)$

$f_x = 2x - y \quad f_x(3,2) = 4$

$f_y = -x + y \quad f_y(3,2) = -1$

$f(3,2) = 8$

$L(x,y) = 8 + 4(x-3) - (y-2) = 4x - y - 2$

$\circledast$ $(1,1)^2 + (2,5)^3$ sayısı için bir yaklaşık değer bulunuz. x^2+y^3 $f_x = 2x$ $f_y = 3y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^3 \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 2$

$9 + 2.0,1 + 12.0,5$

$f_x = 2x \quad f_y = 3x^2 \quad f_x(1,2) = 2 \quad f_y(1,2) = 12 \quad f(1,2) = 9$

$9 + 0,2 + 6$ $\quad 15,2$

$L(x,y) = 9 + 2.(x-1) + 12(y-2)$

$f(x,y) \approx L(x,y) \Rightarrow f(1,1,\ 2,5) \approx L(1.1,\ 2.5) = 9 + 2.(1.1-1) + 12(2.5-2)$

$= 9 + 0.2 + 6$

$= \underline{\underline{15,2}}$

Diferansiyel: Eğer (x_0,y_0) dan yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek, f in lineerleştirmesinden elde edilen değişim:

$$\boxed{df = f_x(x_0,y_0).dx + f_y(x_0,y_0)dy}$$

f'in tam (toplam) diferansiyeli olarak adlandırılır. $\left(\begin{array}{l} dx \cong \Delta x, \quad dy \cong \Delta y \\ \Delta f \approx df \end{array}\right)$

$\circledast$ Silindirik bir konserve kutusunun 3cm yarıçap ve 12cm yüksekliğe sahip olacak şekilde tasarlandığını ancak yarıçap ve yüksekliğin sırasıyla $dr = 0,08$, $dh = -0,3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki değişim?

$3 \quad 12$

$+0,08 \quad -0,3$

$V = \pi r^2 h$

$V_r = 2\pi r h \quad dr = 0,08$

$V_h = \pi r^2 \quad dh = -0,3$

$r_0 = 3 \quad h_0 = 12$

$V_r(3,12) = 72\pi$

$V_h(3,12) = 9\pi$

$\Delta V \approx dv = V_r(r_0,h_0)dr + V_h(r_0,h_0)dh$

$= 72\pi.(0,08) + 9\pi.(-0,3)$

$= 5,76\pi - 2,7\pi$

$= \underline{\underline{3,06\pi}}$

$\pi r^2.h$

$2\pi rh.0,08 - \pi.r^2.0,3$

$2\pi.3.12.0,08 - \pi.9.0,3$

Maksimum - Minimum Değerler

Ekstrem Değerler :

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$f(x,y)$ bir $D \subset \mathbb{R}^2$ de tanımlı bir fonksiyon, $(a,b) \in D$ olsun. Eğer (a,b) nin uygun bir komşuluğundaki tüm (x,y) ler için ;

$f(x,y) \leq f(a,b)$ ise $f(x,y)$, (a,b) de yerel maksimuma

$f(x,y) \geq f(a,b)$ " " " " " minimuma

sahiptir.

1-) $D(x_0,y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ ise (x_0,y_0) yerel min

2-) $D(x_0,y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ ise (x_0,y_0) yerel max

3-) $D(x_0,y_0) < 0$ ise (x_0,y_0) eyer noktasıdır.

4-) $D(x_0,y_0) = 0$ ise Başka tekniklere başvurulmalıdır.

Eğer $f(x,y)$ bir noktada yerel max. veya yerel min. sahip ise $f(x,y)$ nin o noktada bir extramuma sahip olduğunu söyleriz.

<u>Teorem</u>: Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktadır:

a) $f_x(a,b) = 0$ ve $f_y(a,b) = 0$

b) $f_x(a,b)$ veya $f_y(a,b)$ mevcut değildir.

Yerel Ekstramum için Gerekli Şartlar :

$f(x,y)$, bir (a,b) noktasında yerel ekstramuma sahipse ve aynı noktada 1. mertebe kısmi türevleri mevcutsa $f_x(a,b) = 0$ ve $f_y(a,b) = 0$ dır.

<u>Eyer noktası</u>: $f(x,y)$ bir (a,b) kritik noktasında yerel ekstramuma sahip değilse bu noktaya eyer (semer) noktası denir.

☆ Bir (a,b) kritik noktası ve yeterince küçük her h,k sayısı için:

$f(a+h,b+k) - f(a,b) \geq 0$ $\Rightarrow$ f , (a,b) de bir yerel minimuma

$f(a+h,b+k) - f(a,b) \leq 0$ $\Rightarrow$ " " " " " max.

sahiptir.

Ç.0.28

⊛ $f(x,y)=x^2+y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulun, sınıflandırın. $f_x=2x$ $f_y=2y$ $\nabla f_x(0,0)$

$F_x=2x$ $F_y=2y$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2x=0 \\ f_y&=2y=0 \end{aligned}\right\} \quad x=y=0 \rightarrow (0,0) \text{ K.N}$$

$2.2-0$ 2 4 Y.M.

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=h^2+k^2 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel min noktası

⊛ $f(x,y)=(x+y)^2+y^4$ $f_x=2x+2y$ $f_y=2x+2y+4y^3$ $KN=0,0$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2x+2y=0 \quad (1) \\ f_y&=2x+2y+4y^3=0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad 2x+2y=0 \xrightarrow{(2)} 4y^3=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$$

(0,0) K.N.

$2(2+12y^2)-4$ $4-4=0$

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=(h+k)^2+k^4 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel min

---

⊛ $f(x,y)=x^2-y^2$ $f_x=2x$ $f_y=-2y$ $KN=(0,0)$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2x=0 \\ f_y&=-2y=0 \end{aligned}\right\} \quad x=y=0 \Rightarrow (0,0) \text{ K.N.}$$

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=h^2-k^2$

$2.-2-0^2$

-4

$h^2-k^2 \Rightarrow \geq 0$ veya ≤ 0 olabilir. Eyer noktası

---

2. Türev Testi

$f(x,y)$ nin bir $(a,b)\in D(f)$ noktasında bir kritik noktaya sahip olduğunu kabul edelim. $f(x,y)$ ile onun 1. ve 2. mertebe türevleri sürekli ve $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ olsun.

$A=f_{xx}(a,b)$ $B=f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ $C=f_{yy}(a,b)$ olmak üzere

a) $B^2-AC<0$ ve $A>0$ ise f, (a,b) de yerel min. sahiptir

b) $B^2-AC<0$ " $A<0$ " " " " " max. "

c) $B^2-AC>0$ ise f, (a,b) de bir eyer noktasına sahiptir.

d) $B^2-AC=0$ ise test sonuç vermez. f, (a,b) de bir max/min değere veya bir eyer noktasına sahip olabilir.

⊛ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik nokta- $\boxed{ç.0.29}$ larını bulup sınıflandırın. $f_x = 6x^2 - 6y$ $f_y = -6x + 6y$

$f_x = 6x^2 - 6y = 0$ ① $f_{xx} = 12x$ ② $\rightarrow x = y$ $\xrightarrow{①}$ $6x^2 - 6x = 0$ $x=0$, $x=1$

$f_y = -6x + 6y = 0$ ② $f_{yy} = 6$ $6x(x-1) = 0$ $x=0$ $x=1$ $y = x$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \rightarrow (1,1)$ K.N.

$72x - 36$

$KN = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,1 \end{pmatrix}$

$(0,0) \rightarrow$ eyer n.

$(1,1) \rightarrow$ min

$A = f_{xx} = 12x$

$B = f_{xy} = -6$

$C = 6$

	$A = 12x$	$B = -6$	$C = 6$	$B^2 - AC$	
(0,0)	0	-6	6	$36 - 0 = 36 > 0$	(0,0) Eyer noktası
(1,1)	12	-6	6	$36 - 12.6 < 0$	$A = 12 > 0$ (1,1) yerel min.

⊛ $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy^2 - 3y^2$

$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2$ $f_{xx} = 6x - 6$

$f_y = 6xy - 6y$ $f_{yy} = 6x - 6$ $f_{xy} = 6y$

$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0$ ①

$f_y = 6xy - 6y = 0$ ②

② $\rightarrow 6y(x-1) = 0 \rightarrow y = 0$ $x = 1$

$x = 1 \xrightarrow{①} y^2 = 1 \rightarrow y = \mp 1 \rightarrow (1,1)$ $(1,-1)$

$y = 0 \xrightarrow{①} 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 2 \rightarrow (0,0)$ $(2,0)$ K.N.

$(6x-6)^2 - 36y^2$ $6x - 6$

0,0 → max
2,0 → min
1,-1 → eyer
1,1 → eyer

$3x^2 = 6x$ $3x = 6$ $x=2$ $6y(x-1) = 0$ $y=0$ $x=1$

$3y^2 = 3$ $y = 1$ $y = -1$

1,1
1,-1
0,0
2,0

$A = f_{xx} = 6x - 6$ $B = f_{xy} = 6y$ $C = f_{yy} = 6x - 6$

	$A = 6x - 6$	$B = 6y$	$C = 6x - 6$	$B^2 - AC$
(0,0)	-6	0	-6	$0 - 36 < 0$ $A = -6 < 0$ yerel max
(1,1)	0	6	0	$36 > 0$ Eyer nok.
(1,-1)	0	-6	0	$36 > 0$ Eyer nok.
(2,0)	6	0	6	$-36 < 0$ $A = 6 > 0$ yerel min.