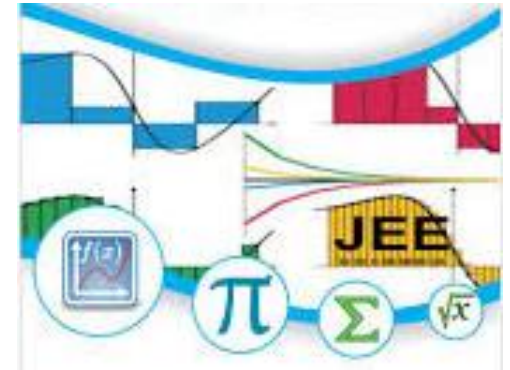




SAYISAL INTEGRAL




Sayısal Integrasyon Kavramı ve Çeşitleri

$$\int_a^b f(x).dx \approx \text{yaklaşık hesaplama}$$

fikirlerinin bütününe **sayısal integrasyon** denir

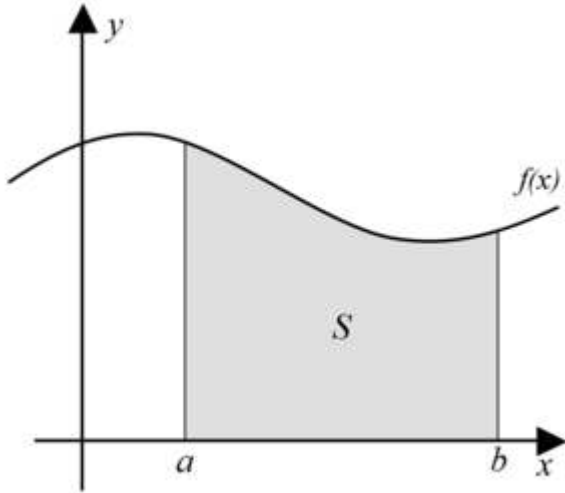
Sayısal Analiz dersinde Newton Cotes formüllerine odaklanacağız

$$\int_a^b f(x).dx \approx \int_a^b f_n(x).dx \approx$$

 polinom

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Polinomu doğru, parabol, kübik bir ifade olarak uydurabiliriz. Bunların her biri de Newton Cotes için bir alt başlıktır



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup, değeri $y=f(x)$ eğrisinin altında ve $x=a$ ile $x=b$ doğruları arasında kalan alana eşittir

Sayısal Integral Çeşitleri

Doğru Uydurma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x$$

YAMUK Kuralı
(Trapezoidal Rule)



2 nokta

Parabol Uydurma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Simpson's 1/3 kuralı

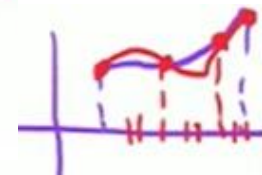


3 nokta

Kübik Polinom Uydurma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Simpson's 3/8 kuralı



4 nokta

TRAPEZ (YAMUK) YÖNTEMİ

Bu yöntemde integral n sayıda dikdörtgen kullanılarak hesaplanır
N ne kadar büyük ise gerçek değere o kadar yakın sonuç elde edilir

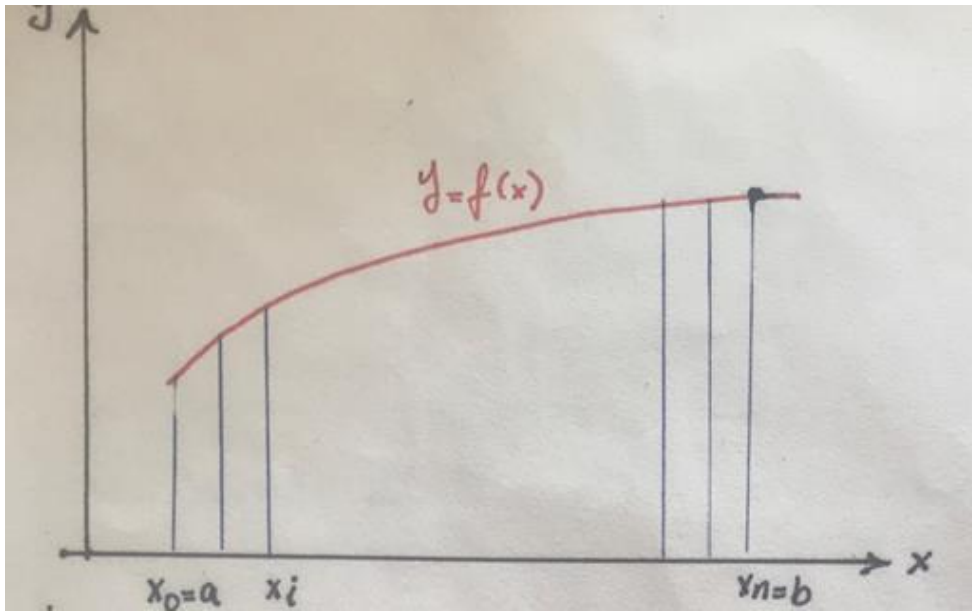
$$I = \sum h_i f_i$$

$$f_i \rightarrow f(x_i)$$

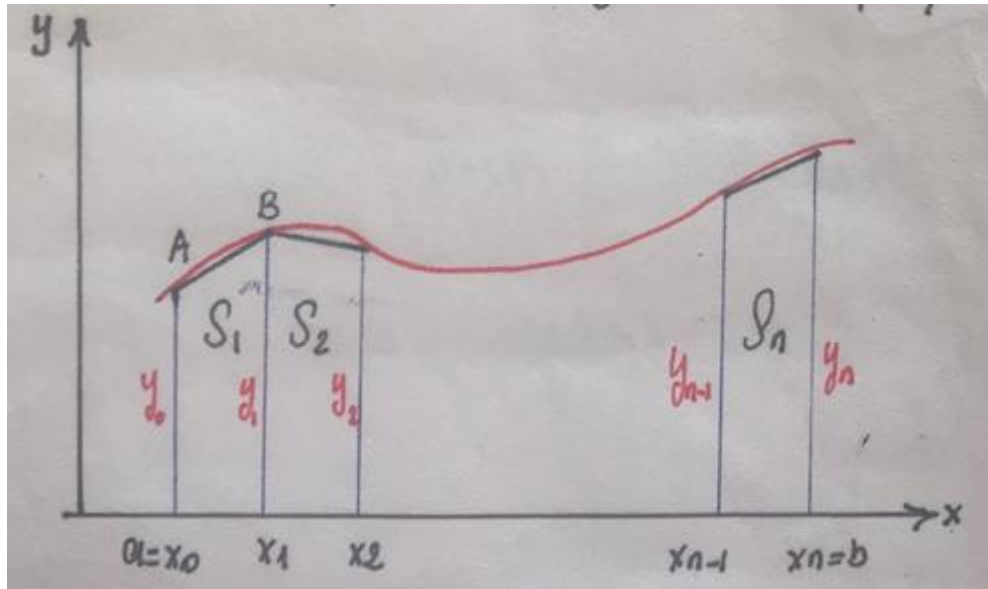
$$h_i \rightarrow i. \text{ dikdörtgenin genişliği}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \text{ olarak tanımlanır}$$

Eğer dikdörtgenlerin genişliği sabit olduğundan $h = \frac{b-a}{n}$ olarak yazılır



$I = \int_a^b f(x).dx$ integralinin değerini hesaplamak üzere $[a, b]$ kapalı aralığını n eşit parçaya ayıralım



Her bölme noktasından (x_i) dik doğrular çıkarak, diklerin $f(x)$ eğrisini kestiği noktaları birer doğru ile birleştirerek n tane yamuk elde edebiliriz x_0ABx_1 dik yamuğunun alanı :

$$S_1 = \frac{1}{2} h(y_0 + y_1)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} h(y_1 + y_2)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} h(y_2 + y_3)$$

.....

$$S_n = \frac{1}{2} h(y_{n-1} + y_n)$$

Toplam Alan $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ olacağından

$$S = \frac{1}{2} h(y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h(y_2 + y_3) + \dots + \frac{1}{2} h(y_{n-1} + y_n)$$

$$S = h/2 [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$S = h \left[\frac{(y_0 + y_n)}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right]$$

$$S = h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

$a \rightarrow x_0$ $b \rightarrow x_n$ $h = \Delta x = (x_n - x_0)/n$ olarak kabul edersek

$$S = \Delta x \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k\Delta x) \right]$$



$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

İntegralini $n=4$ olarak Trapez yöntemi ile hesaplayınız.

$$x_0 = 0 \quad x_n = 1 \quad h = (1 - 0) / 4 = 0,25$$

	x	f(x)
x0	0	1
x1	0,25	0,94118
x2	0,5	0,8
x3	0,75	0,64
x4	1	0,5

$$S = 0,25 \left[\frac{1 + 0,5}{2} + (0,9412 + 0,8 + 0,64) \right]$$
$$S = 0,78279 \text{ br}^2$$

Bu fonksiyon için gerçekte integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \arctg(x) \Big|_0^1 = \arctg(1) - \arctg(0) = 45^\circ$$

$$I = \pi/4 = 0,78539$$

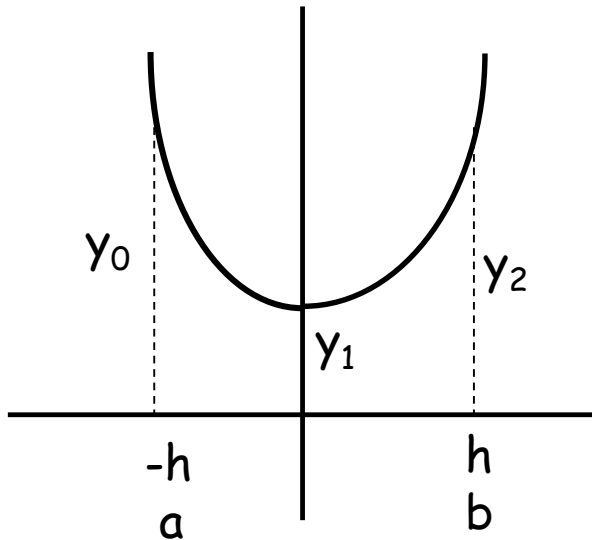
$$\text{Hata} = |0,78539 - 0,78279| = 0,0026$$

n=9 alınsaydı $I = 0,78488$ olurdu

$$\text{Hata} = |0,78539 - 0,78488| = 0,00051$$

SIMPSON YÖNTEMİ (1/3 kuralı)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde verilmiş ise



$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c) dx$$

Analitik olarak incelersek

$$S = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \bigg|_{-h}^h = a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^2}{2} + ch - \left[-a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^2}{2} - ch \right]$$

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini y_0, y_1, y_2 cinsinden bulalım

$$\begin{array}{lll} x = -h & \text{için} & f(x) = y_0 = ah^2 - bh + c \\ x = 0 & \text{için} & f(x) = y_1 = c \\ x = h & \text{için} & f(x) = y_2 = ah^2 + bh + c \end{array}$$

$$y_0 + y_2 = ah^2 - bh + c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 2c$$

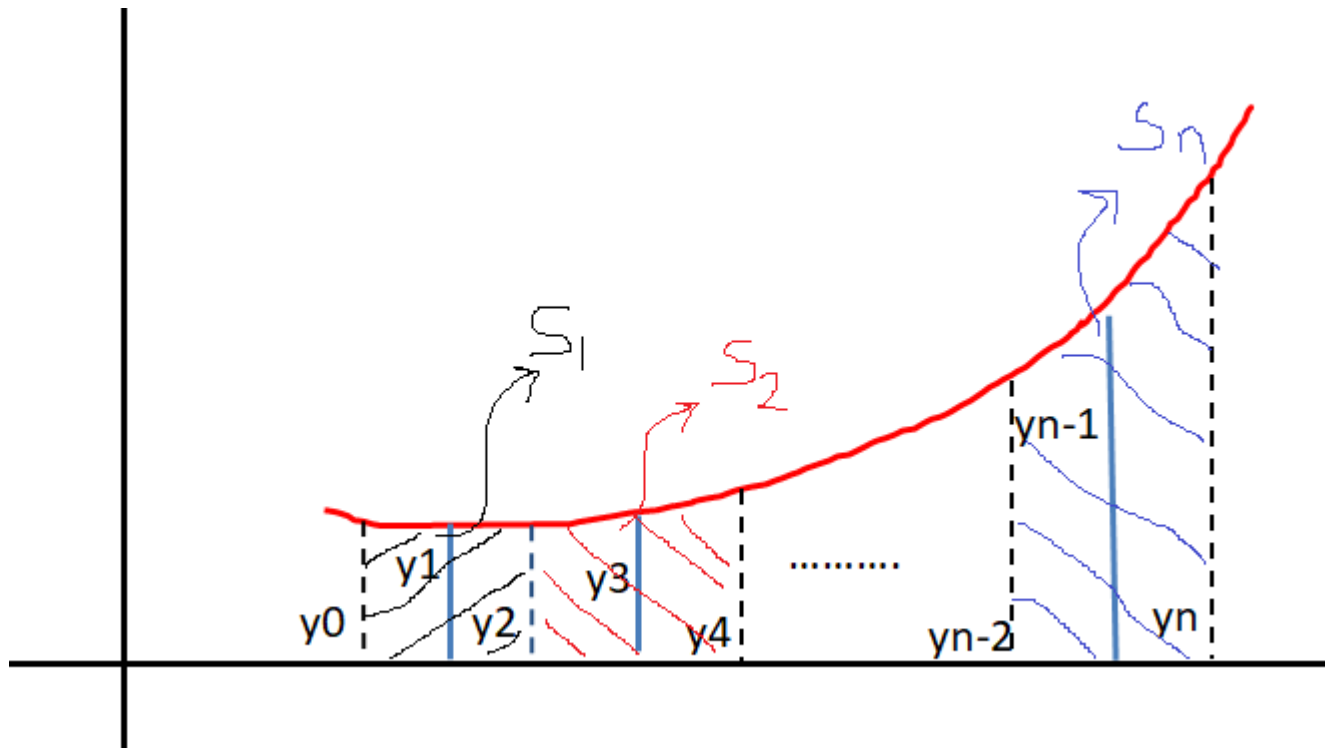
$c = y_1$ olduğundan:

$$2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2$$

$$2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$$S = h/3 (y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

$$S = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$$S_1 = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = h/3 (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$S_n = h/3 (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$S = \sum S_i$$

toplamı hesaplanacak integralin değeridir

!!!! Simpson yönteminde çubuklar ikiye ikiye alındığından
aralık sayısı **ÇİFT** olmalıdır

Simpson formülünde $h = (x_n - x_0) / n$ alınarak

$$S_1 = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = h/3 (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$S_n = h/3 (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

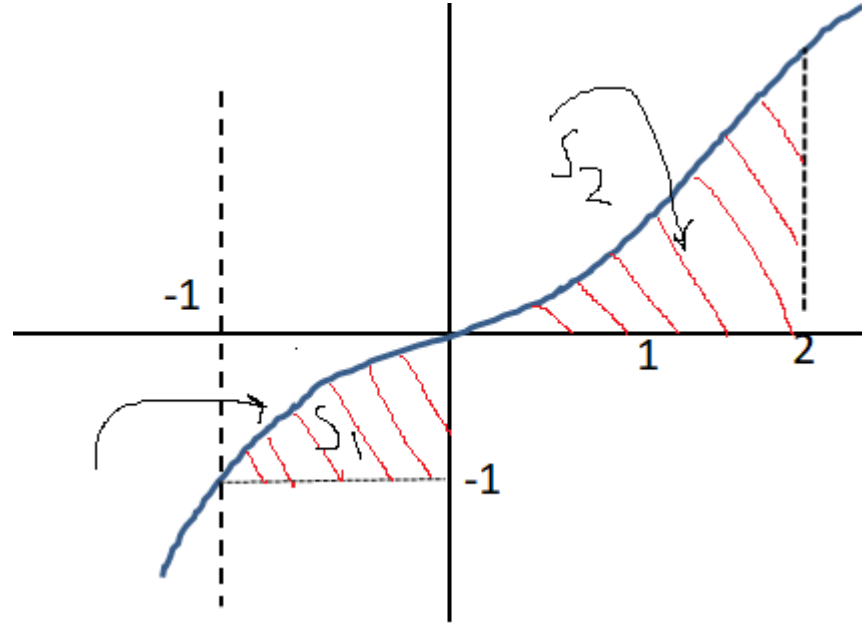
$$S = \sum S_i = h/3 (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

RESULTS

$$S = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h) \right]$$



$y = x^3$ eğrisinin $x=-1$, $x=2$ ve Ox eksenini ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$S_1 = - \int_{-1}^0 x^3 dx$$

$$n=4 \quad h=0,25$$

	x	f(x)
x0	-1	1
x1	-0,75	0,4218
x2	-0,5	0,125
x3	-0,25	0,0156
x4	0	0

$$S_1 = 0,25/3 [(1 + 0) + 2*(0,125) + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,2499$$

$$S_2 = \int_0^2 x^3 dx$$

$$n=4 \quad h=0,5$$

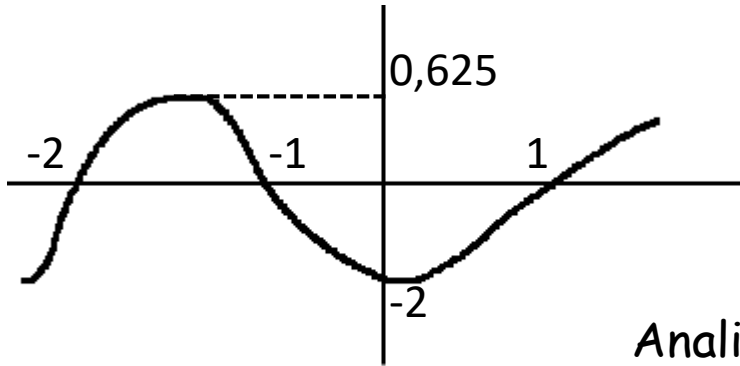
	x	f(x)
x0	0	0
x1	0,5	0,125
x2	1	1
x3	1,5	3,375
x4	2	8

$$S = 4 + 0,2499 = 4,25 \text{ br}^2$$

$$S_2 = 0,5/3 [(0 + 8) + 2*1 + 4*(0,125 + 3,375)] = 4$$



$f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ eğrisinin altında ve Ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını bulunuz $n=4$ olarak bulunuz.



Analitik çözüm

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx$$

$$I = \left. \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x \right|_{-2}^{-1} = 0,41 \text{ br}^2$$

Trapez Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^1 (x^2 - 1)(x + 2) dx$$

$$n=4 \quad h=(-1-(-2))/4 = 0,25$$

	x	f(x)
x0	-2	0
x1	-1,75	0,5156
x2	-1,50	0,625
x3	-1,25	0,4218
x4	-1	0

$$S_T = h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]$$

$$S_T = 0,25 \left[\frac{0+0}{2} + (0,5156 + 0,625 + 0,4218) \right]$$

$$S = 0,391 \text{ br}^2$$

$$\text{Hata} = |0,41 - 0,391| = 0,019 \text{ br}^2$$

Simpson Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^1 (x^2 - 1)(x + 2)dx$$

$$n=4 \quad h=(-1-(-2))/4 = 0,25$$

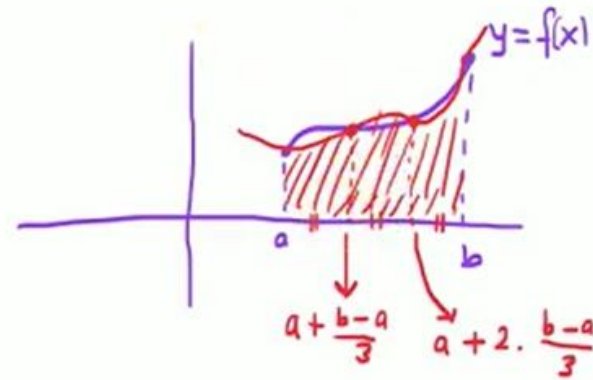
	x	f(x)
x0	-2	0
x1	-1,75	0,5156
x2	-1,50	0,625
x3	-1,25	0,4218
x4	-1	0

$$S_s = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h) \right]$$

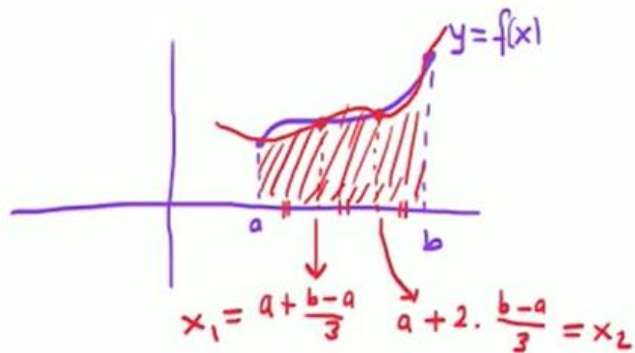
$$S_s = 0,25/3 [(0 + 0) + 2*0,625 + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,4166 \text{ br}^2$$

Simpson's 3/8 kuralı

$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_3(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_3(x) dx = \boxed{(b-a) \cdot \frac{f(a) + 3 \cdot f(x_1) + 3 \cdot f(x_2) + f(b)}{8}} \quad \begin{matrix} n=1 \\ \text{için} \end{matrix}$$



$$n=2 \text{ için} \quad \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx$$

Ör: $\int_0^6 \frac{1}{1+x^4} dx$ ile verilen integralin sayısal çözümünü Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ile $n=1$ ve $n=2$ için yapınız.

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow \int_0^6 \frac{1}{1+x^4} dx \approx (b-a) \cdot \frac{f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)}{8} \\ \frac{6-0}{3} &= 2 \\ x_1 &= 0 + 2 = 2 \\ x_2 &= 0 + 2 \cdot 2 = 4 \\ &\approx 6 \cdot \frac{1 + 3 \cdot (1/17) + 3 \cdot (1/257) + \frac{1}{1297}}{8} \\ &\approx 0,8917 \end{aligned}$$

$$n=2 \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_3^6 \frac{1}{1+x^4} dx \quad \frac{6-3}{3} = 1$$

$$\frac{3-0}{3} = 1$$

$$3 \cdot \frac{f(0) + 3 \cdot f(1) + 3 \cdot f(2) + f(3)}{8}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{17}\right) + \frac{1}{82}}{8}$$

$$1,0082$$

$$+ 3 \cdot \frac{f(3) + 3 \cdot f(4) + 3 \cdot f(5) + f(6)}{8}$$

$$+ 3 \cdot \frac{\frac{1}{82} + 3 \cdot \frac{1}{257} + 3 \cdot \frac{1}{626} + \frac{1}{1297}}{8}$$

$$0,0110$$

$$\approx 1,0192$$

İki Katlı Integralin Sayısal Çözümü

$$I = \int_2^3 \int_x^{2x^3} (x^2 + y) dy dx$$

$$I = \int_2^3 g(x) dx \quad n=4$$

$$h = (b-a)/n = (3-2)/4 = 0,25$$

	x	g(x)
x0	2	g0
x1	2,25	g1
x2	2,5	g2
x3	2,75	g3
x4	3	g4

1.Adım
 $x_0=2$ için

$$I = \int_2^{16} (x_0^2 + y) dy \quad h = (16-2)/4 = 3,5$$

	y	f(y)
y0	2	6
y1	5,5	9,5
y2	9	13
y3	12,5	16,5
y4	16	20

$$g_0 = 3,5/3 [(6 + 20) + 2*13 + 4*(9,5 + 16,5)] = 182$$

2.Adım

$x_1=2,25$ için

$$I = \int_{2,25}^{22,78} (x_1^2 + y) dy$$

$$h = (22,78-2,25)/4 = 5,13$$

$$g_1 = 5,13/3 [(7,31 + 27,76) + 2*17,57 + 4*(12,44 + 22,7)]$$

$$g_1 = 360,417$$

	y	f(y)
y0	2,25	7,31
y1	7,38	12,44
y2	12,51	17,57
y3	17,64	22,7
y4	22,77	27,76

3.Adım

$x_2=2,5$ için

$$I = \int_{2,5}^{31,25} (x_2^2 + y) dy$$

$$h = (31,25-2,5)/4 = 7,19$$

$$g_2 = 7,19/3 [(8,75 + 37,51) + 2*23,13 + 4*(15,94 + 30,32)]$$

$$g_2 = 665,22$$

	y	f(y)
y0	2,5	8,75
y1	9,69	15,94
y2	16,88	23,13
y3	24,07	30,32
y4	31,26	37,51

4.Adım
 $x_3=2,75$ için

$$I = \int_{2,75}^{41,59} (x_3^2 + y) dy \quad h = (41,59 - 2,75)/4 = 9,71$$

$$g_3 = 9,71/3 [(10,31 + 49,15) + 2*29,73 + 4*(20,02 + 39,44)]$$
$$g_3 = 1154,7$$

	y	f(y)
y0	2,75	10,31
y1	12,46	20,02
y2	22,17	29,73
y3	31,88	39,44
y4	41,59	49,15

5.Adım
 $x_4=3$ için

$$I = \int_3^{54} (x_4^2 + y) dy \quad h = (54 - 3)/4 = 12,75$$

$$g_4 = 12,75/3 [(12 + 63) + 2*37,5 + 4*(24,75 + 50,35)]$$
$$g_4 = 1912,5$$

	y	f(y)
y0	3	12
y1	15,75	24,75
y2	28,5	37,5
y3	41,25	50,35
y4	54	63

$$S_s = h/3 [g_0 + g_4 + 4*(g_1 + g_3) + 2*g_2]$$

$$S_s = 0,25/3 [182 + 1912,5 + 4*(360,417 + 1154,7) + 2*665,22] = 790,451$$

$$S_{\text{analitik}} = 790,55$$

$$S_s = 790,451$$

$$\text{Hata} = |790,451 - 790,55| = 0,099$$

