

Burdaki veri noktaları için yapmış olduğunuz ben bu veri noktalarından geçen bir fonk bulmaya çalışıyorum

penelde görsel deperler elde etmeye çalışıyoruz

## ENTERPOLASYON

Her zaman bu nottalardan geçen bir font. bulamıyabilirim  
yaklaşık font. bulabilirim

Basit olarak interpolasyon işlemi, tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.

Genel anlamda ise interpolasyon; bilinmeyen bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gibi ayrık noktalarda verilen  $f_0, f_1, \dots, f_n$  değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun başka basit ve bilinen bir  $F(x)$  fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan  $F(x)$  fonksiyonuna "Interpolasyon Fonksiyonu" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.

Genelde interpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Benim bilinmeyen fonksiyonum küçük  $f(x)$

Enterpolasyonda biz büyük  $F(x)$ 'i bulcaz  
biz bu büyük  $F(x)$ 'e enterpolasyon fonksiyonu  
diyoruz. Çünkü ben birebir örtüşen bir fonksiyonda  
bulamıyabilirim, bazen küçük  $f(x)$  büyük  $F(x)$ 'le  
örtüşebilir

2. benim  $f(x)$  fonksiyonum  
enterpolasyonla  
yaklaşıklık fonksiyon

Entropolasyon fonksiyonunun seçiminde  $\delta$  i teorem kullanılır.  
10 Eger  $f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında süreklili ise  
entropolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir.  
Bu aralıkta

$$|f(x) - F(x)| \leq \epsilon \quad \text{esitligi saglanir.}$$

2. Periyodu  $2\pi$  olan süreklili bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

gibi sonlu bir trigonometrik açılım, entropolasyon  
fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir  $n$  değeri  
 $|f(x) - F(x)| < \epsilon$  sağlanabilir.



Enterpolasyon fonk. nasıl seçicem acaba ben bu noktalardan polinom mu geçirmeliyim yoksa trigonometrik bir fonksiyon mu geçirmeliyim

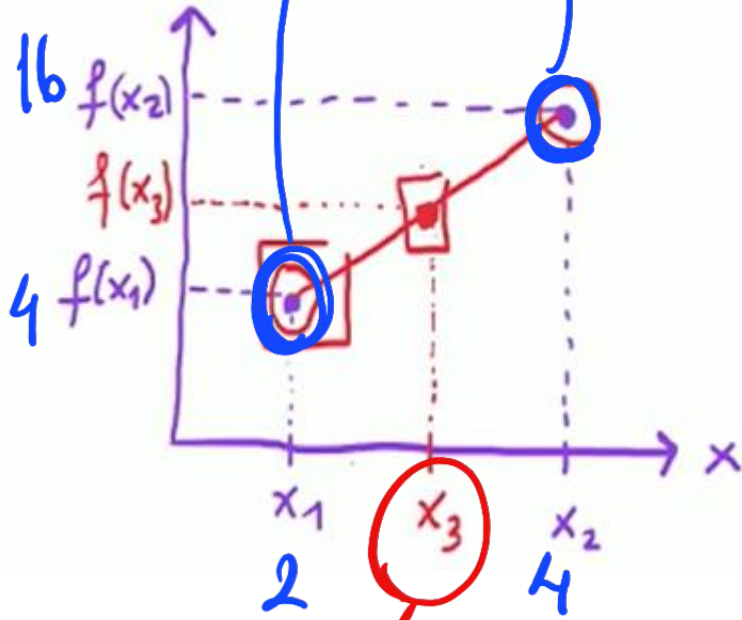
2 noktadan bir doğru böyle geçiriyorsanız



Doğruyu nasıl bulursunuz?

epimini hesaplarız

## Doğrusal Enterpolasyon



$$f(x) = x^2$$

→ mesela böyle bir fonk. var ama biz bu fonksiyonu bilmiyoruz

Eğim üzerinden doğru denklemini bulmak

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

2 ile 4 arasında bir nokta seçiyoruz ve bunun fonksiyondaki değerinin ne olacağını buluyoruz

U kara veriyor.



## Örnek

x	f(x)
-2	-0,909297
-1	-0,841471
0	0
1	0,841471
3	0,141120
4	-0,756802
6	-0,279415

Yanda  $f(x)$  fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Buna göre,

a)  $f(2)$  değerini  $x=1$  ve  $x=3$  kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

b)  $f(2)$  değerini  $x=-2$  ve  $x=6$  kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

$$a) f(2) = ?$$

$$f(1) = 0,841471$$

$$f(3) = 0,141120$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{0,141120 - 0,841471}{2} = \frac{f(2) - 0,841471}{1}$$

$$f(2) = 0,4912955$$

$$b) f(2) = ?$$

$$f(-2) = -0,909297$$

$$f(6) = -0,279415$$

$$\frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6}$$



## DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona **doğrusal (lineer) enterpolasyon** denir.

Eğer  $x$  değisteri  $[a, b]$  aralığında bir  $f(x)$ 'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak :

$$F(x) = Ax + B \text{ seçilirse,}$$

$$f(a) = F(a)$$

$$f(b) = F(b)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa + B = f(a)$$

$$Ab + B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

yazılır.

$F(x)$  fonksiyonu ise :

$$F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

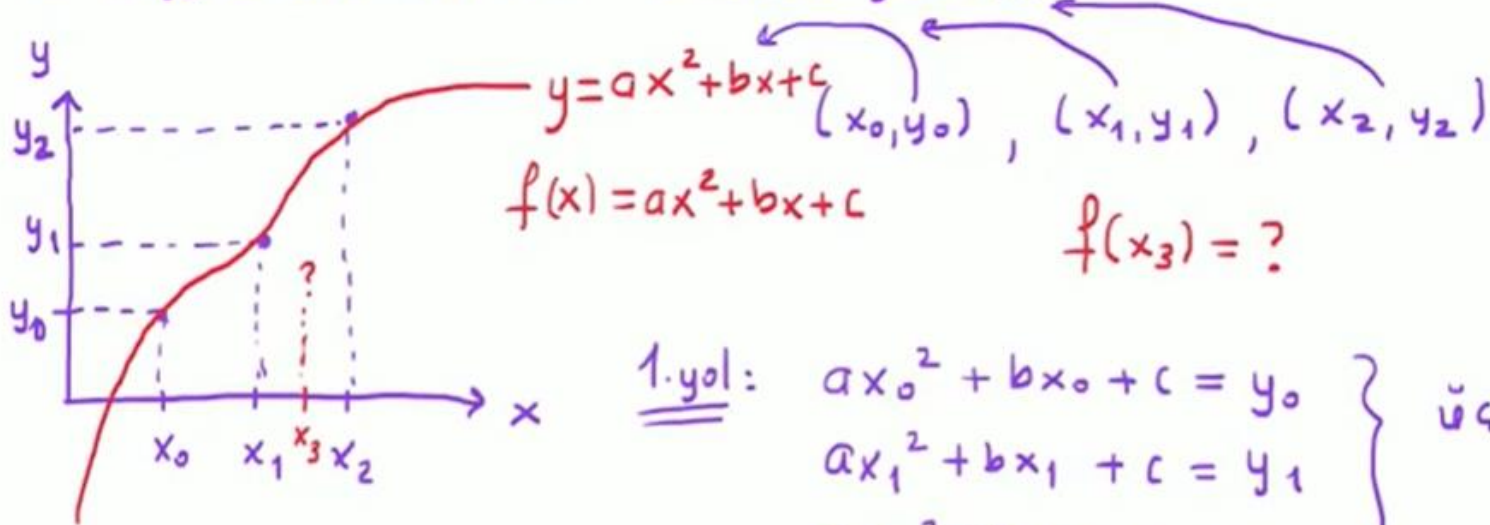
olur.



# Eğrisel İnterpolasyon Yöntemi

## Quadratic Interpolation Methods

\* Uygulanabilmesi için 3 nokta gereklidir.



1.yol:

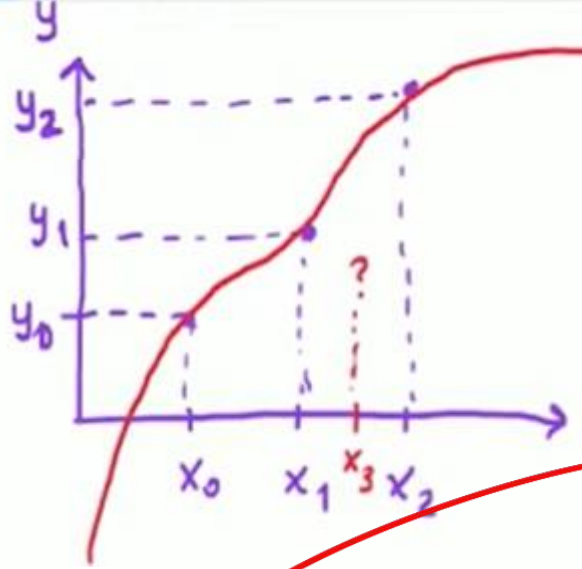
$$\left. \begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \end{aligned} \right\}$$

Üç bilinmeyenli  
denklemler  
sistemini  
çözüp  $a, b, c$   
bulunur.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x_3) = \dots$$







2. Aufl:

$$f(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

→ egrisele  
interpolation  
funktion

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$f(x_3) = \dots$



## Örnek

(1, -2), (2, -1) ve (3, 4) noktaları veriliyor. Bu noktalar kullanılarak eğrisel interpolasyon metodu ile  $x=2,5$  değere karşılık gelen  $y$  değeri bulunuz.

$$\begin{array}{lll} (1, -2) & (2, -1) & (3, 4) \\ (x_0, y_0) & (x_1, y_1) & (x_2, y_2) \end{array}$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2)$$

$$b_0 = f(x_0) = -2$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - (-2)}{2 - 1} = 1$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{4 - (-1)}{3 - 2} - \frac{(-1) - (-2)}{2 - 1}}{3 - 1} = 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 + x - 1 + 2(x^2 - 3x + 2) \\ f(x) &= 2x^2 - 5x + 1 \\ f(2,5) &= 1 \end{aligned}$$



# GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n \binom{k}{i} \Delta^i f_0$  olarak verilir. Bu formül açıl-

duğınca;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$  olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$  konulursa;





$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$F(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}}{1!} \Delta f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right) \left( \frac{x_i - x_0}{h} - 2 \right)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

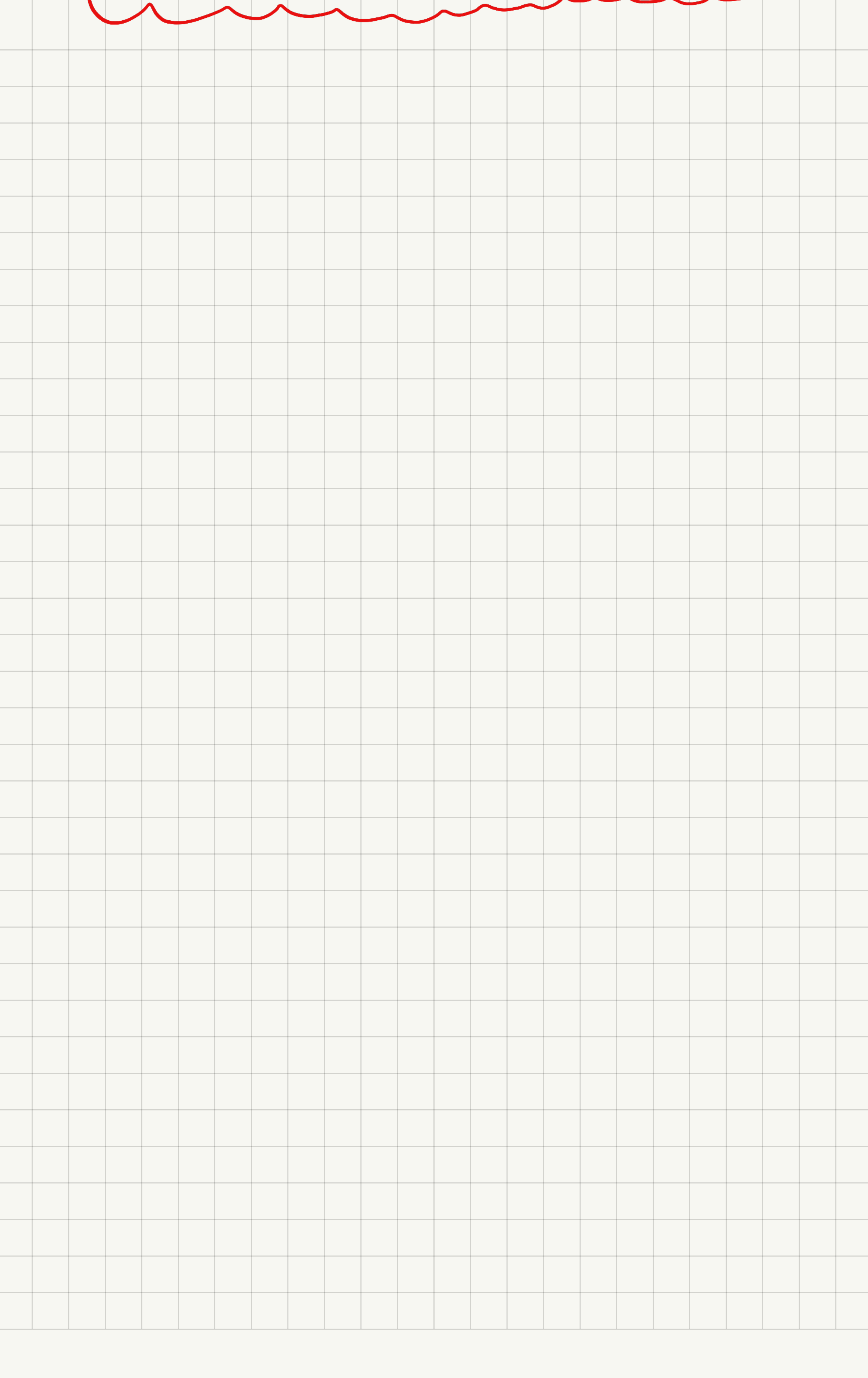
$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{x_i - x_0 - 2h}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - (x_0 + \overset{x_1}{h})}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - (x_0 + \overset{x_1}{h})}{h} \frac{x_i - (x_0 + \overset{x_2}{2h})}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$  ve  $x_0=0$  alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$



$h=1$  ve  $x_0=0$  alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_1 \Delta f_0 + \frac{x_1(x_1-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_1(x_1-1)(x_1-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x_i \rightarrow x$  alınırsa

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x - x_0$

0



II ÖRNEK:

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	<u>-4</u>			
1	-2	<u>2</u>		
2	14	16	<u>14</u>	
3	62	48	32	<u>18</u>
4	160	98	50	18
5	326	166	68	18
6	578	252	86	

$$x_0 = 0$$

$$h = 1$$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$$F(4) = 160$$





11  
DRNEK.

<u>x</u>	<u>f(x)</u>
2	<u>10</u>
4	50
6	122
8	226
10	362

$\Delta f(x)$

40  
72  
104  
136

$\Delta^2 f(x)$

32  
32  
32

$x_0 \neq 0$   
 $h \neq 1$

$$F(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{2} \overset{20}{\cancel{40}} + \frac{(x-2)(x-4)}{4} \frac{\cancel{32}^8}{2!}$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \Rightarrow F(8) = 226$$



Değişken dönüşümü yapılarak ayırık noktaların eşit aralıklı yapılması:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u><math>\Delta f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^2 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^3 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^4 f(x)</math></u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>			
0	1	9	<u>10</u>	<u>26</u>	
3	10	55	46	60	<u>24</u>
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				



<u><math>\tau</math></u>	<u><math>x</math></u>	<u><math>\Delta x</math></u>	<u><math>\Delta^2 x</math></u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	



<del>z</del>	$F(z)$ $x$	$\Delta x$	$\Delta^2 x$
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 x = -1 + z \cdot 1 + \frac{z^2 - z}{2} \cdot 2$$

$$x = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

F



$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u><math>\Delta f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^2 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^3 f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^4 f(x)</math></u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>10</u>		
0	1	9	46	<u>26</u>	
3	10	55	106	60	<u>24</u>
8	65	161	190	84	24
15	226	351			
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \frac{5}{10} \frac{z(z-1)}{2} + \frac{6}{36} \frac{z(z-1)(z-2)}{6} + \frac{24}{24} \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}$$

$$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2 \quad \text{Ara Interpolasyon Formülü}$$

$$f(x) = (\pm \sqrt{x+1})^4 - 2(\pm \sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$



II ÖRNEK:

<u>x</u>	<u>z</u>	<u>f(x)</u>	<u><math>\Delta f(x)</math></u>	<u><math>\Delta^2 f(x)</math></u>
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

<u>z</u>	<u>x</u>	<u><math>\Delta x</math></u>
0	2	2
1	4	2
2	6	2
3	8	2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$



$x$	$z$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \frac{8}{2} \frac{z(z-1)}{2} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4 \left( \frac{x-2}{2} \right)^2 + 3 \Rightarrow F(x) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(x) = x^2 - 4x + 7$$

II. 301

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!} \Delta^2 f_0$$



# LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun,  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  gibi ayrı noktalarındaki bilinen  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  değerleri varsa (bu noktaların aralıkları eşit olsun olmasın) ve  $f(x)$  fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna  $g(x)$  dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i \text{ şeklindedir.}$$

$L_i(x)$  katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$





Örnek:

Bir  $y = f(x)$  fonksiyonunun  $x_i$ 'ler için  $y_i$  değerleri şöyle olsun.

$i$	$x_i$	$y_i$
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$n=2$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x_0-x_0}} \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \\ &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow L_0(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{\cancel{x-x_1}}{\cancel{x_1-x_1}} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} \Rightarrow L_1(x) = -\frac{1}{2} (x^2-3x) \end{aligned}$$



$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0} \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6} (x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2-3x)(1) + \frac{1}{6} (x^2-x)(25)$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x - 5 \quad \text{bulunur.} \quad \Rightarrow \quad g(1) = 1 \quad g(2) = 11$$



ORNEK:

$i$	$x$	$y$
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$n=3$

$$g(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} * \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} * \frac{x-x_2}{x_1-x_2} * \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} * \frac{x-x_1}{x_2-x_1} * \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} * \frac{x-x_1}{x_3-x_1} * \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)$$



$$g(x) = -\frac{1}{912}(x-7)(x-15)(x-22)*\textcolor{brown}{(1)} + \frac{1}{480}(x-3)(x-15)(x-22)*\textcolor{brown}{(-8)} \\ - \frac{1}{672}(x-3)(x-7)(x-22)*\textcolor{brown}{(-22)} + \frac{1}{1995}(x-3)(x-7)(x-15)*\textcolor{brown}{(-9)}$$

$$\textcolor{brown}{g(4)} = -1.0296854$$

$$\textcolor{brown}{g(10)} = -14.973684$$



