* Belirsizlikler ve L'Hopital Kuralı

* $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ için $f(a)=g(a)=0$ ise.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ şeklinde çözülür.

Ör: $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3 - \cos x}{1} = \frac{3-1}{1} = 2.$$

Ör: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}.$$

Ör: $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

$\underline{\text{ör:}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2} \to \dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$$

$\underline{\text{ör:}}$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x^2} \to \dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty .$$

$\underline{\text{ör:}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \to \dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \;\; \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} \;\; \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x}$$

$$= \frac{-2+8}{2}$$

$$= 3 .$$

* $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (f(x) \to \mp\infty \text{ ve } g(x) \to \mp\infty \text{ iken})$$

Ör: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \to \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Ör: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} \to \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\sec x}.\tan x}{\sec^{\cancel{2}} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sec x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x$$

$$= 1$$

Ör: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

$\infty.0$ Belirsizliği

* $\infty.0$ Belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek çözülür.

Ör: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \to \infty.0$ belirsizliği

$x=\frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}_{\to\infty.0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Ör: $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x \to 0.\infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\to\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} -2.\sqrt{x} = 0.$$

Ör: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \to \infty.0$ belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty} x^2.\underbrace{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)}_{\to\infty.0} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-2.x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} +\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \frac{1}{2}$$

* $\infty - \infty$ Belirsizliği

Ör: $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \to \infty - \infty$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

Belirsiz Kuvvetler (1^∞, 0^0, ∞^0)

Eğer,

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = L \text{ ise.}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = e^L \text{ dir.}$$

(a sonlu ya da sonsuz olabilir)

Ör: $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \to \infty^0$ belirsizliği

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{1}{x}\ln x}^{0.\infty} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{\ln x}{x}}^{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$$

$\underline{\text{Ör:}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \to 1^{\infty}$ belirsizliği

$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x \to 0^+} \overbrace{\frac{1}{x}\ln(1+x)}^{\to \infty . 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = 1 \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$

$\underline{\text{Ör:}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \to \infty^0$ belirsizliği

$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \overbrace{\sin x \underbrace{\ln \frac{1}{x}}_{\substack{\ln x^{-1} \\ -\ln x}}}^{0.\infty} = \lim\limits_{x \to 0^+} \overbrace{-\sin x \ln x}^{\to 0.\infty} = \lim\limits_{x \to 0^+} \overbrace{-\frac{\ln x}{\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\operatorname{cosec} x}}}^{\frac{\infty}{\infty}}.$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} - \frac{\frac{1}{x}}{\underbrace{-\operatorname{cosec} x}_{-\frac{1}{\sin x}} . \underbrace{\cot x}_{\frac{\cos x}{\sin x}}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} . \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0}$

$= 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} y = e^0 = 1$

Yani $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

* Fonksiyonların Ekstremum Değerleri

Tanım: $f(x)$ in tanım kümesi D olsun. Eğer

$f(x) \leq f(c)$ (D deki her x için) ise

f fonksiyonu D üzerindeki bir c'
noktasında bir mutlak maksimum değere
sahiptir.

ve

$f(x) \geq f(c)$ (D deki her x için) ise.

f fonksiyonu D üzerindeki bir c
noktasında bir mutlak minimum değere
sahiptir.

* Bir fonksiyonun maksimum minimum değerlerine
extremum değerleri denir.

Ör:

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Mutlak max-min
$y=x^2$	$(-\infty, \infty)$	mutlak max. yok $x=0$ da mutlak min
$y=x^2$	$[0,2]$	$x=2$ mutlak max ve mutlak max değeri $f(2)=4$ $x=0$ mutlak min. ve mutlak min değeri $f(0)=0$
$y=x^2$	$(0,2]$	$x=2$ mutlak max ve mutlak max değeri $f(2)=4$ mutlak min yok.
$y=x^2$	$(0,2)$	mutlak max ve mutlak min YOK

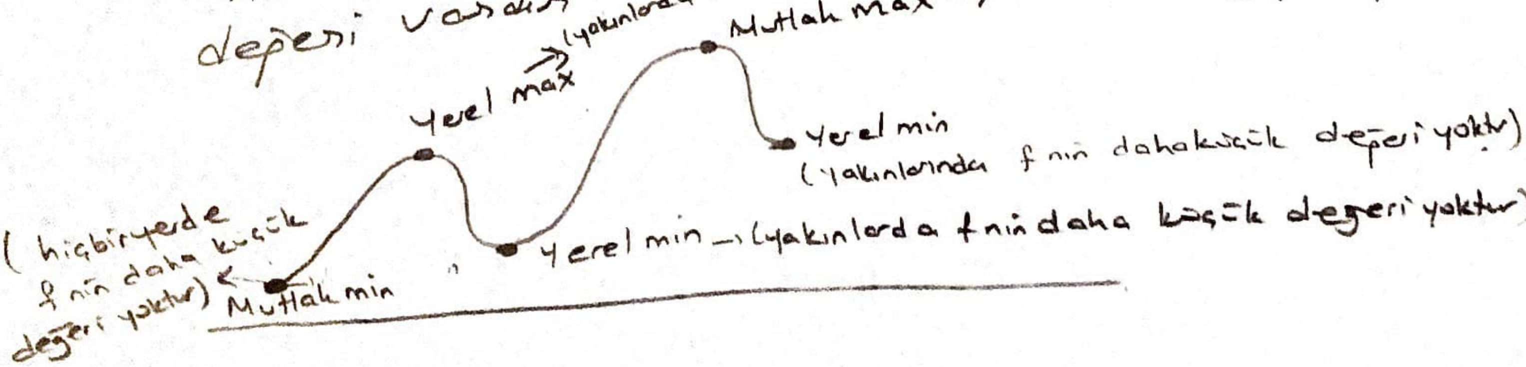
Ekstremum Değer Teoremi

Eğer f kapalı $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ise $[a,b]$ aralığında bir mutlak max değer M'ye ve bir mutlak min değer m'ye ulaşır. Yani $[a,b]$ aralığında $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır. ve $[a,b]$ aralığındaki diğer her x için $m \leq f(x) \leq M$ dir.

Yerel Bağıl Ekstremum Değerleri

Tanım: *Bir f fonksiyonunun D tanım aralığının bir c iç noktasında eğer c'yi içeren bir açık aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ ise bir yerel max değeri vardır.

*Bir f fonksiyonunun D tanım aralığının bir c iç noktasında eğer c'yi içeren bir açık aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ ise bir yerel minimum değeri vardır.



* Yerel Ekstremum Değerleri

Bir f fonksiyonu D tanım bölgesinin bir iç noktasında

eğer c'yi içeren bir açık aralıkta

$f(x) \geq f(c) \Rightarrow c$'de bir yerel minimumu

$f(x) \leq f(c) \Rightarrow c$'de bir yerel maksimumu vardır

* Kritik Nokta

Bir f fonksiyonunun tanım aralığının bir

iç noktasında. f' türevi sıfır veya tanımsız

ise. bu noktaya f fonksiyonunun kritik noktası

denir

Yani;

* $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ tanımsız ise c bir

kritik noktadır.

* Bir fonksiyonun (yerel veya mutlak) bir extremum

değerinin bulunabileceği tek yer aşağıdaki noktalardır.

1- $f'(x)=0$ olduğu iç noktalar.

2- $f'(x)$ değerinin tanımlı olmadığı iç noktalar

} Kritik Noktalar

3- f in tanım kümesinin uç noktaları.

Teorem: Bir I aralığında tanımlı f fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktasında yerel max yada yerel min değere sahipse o zaman x_0 noktası ya $f$in bir kritik noktasıdır ya da I nın bir uç noktasıdır.

* Sonlu Kapalı Bir Aralıkta Bir Sürekli Fonksiyonun Mutlak Extremumlarını Bulmak

1- f fonksiyonunun bütün kritik ve uç noktaları hesaplanır.

2- Bu değerlerin en büyüğü mutlak max, en küçüğü mutlak minimumdur.

Ör: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[-2, 1]$ aralığındaki mutlak max ve min değerlerini hesaplayınız.

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ kritik nokta.

$f(0) = 0 \rightarrow$ kritik nokta değeri

uç noktalar $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(-2) = 4. \end{cases}$ $\rightarrow x = -2$ noktasında mutlak max

$f(0) = 0 \rightarrow x = 0$ noktasında mutlak min.

mutlak max değeri 4., mutlak max noktası -2.

mutlak min değeri 0, mutlak minimum noktası 0

Ör: $g(t)=8t-t^4$, $[-2,1]$ aralığında mutlak max ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$g(t)=8t-t^4$

$g'(t)=8-4t^3 \Rightarrow g'(t)=0 \Rightarrow 8-4t^3=0 \Rightarrow t^3=2 \Rightarrow t=\sqrt[3]{2}$

$t=\sqrt[3]{2}$ kritik nokta olamaz çünkü tanım kümesinde yok. Dolayısıyla sadece uç noktalar incelenir

uç noktalar
$g(1)=8-1=7$
$g(-2)=-16-16=-32.$

$g(1)=7 \Rightarrow t=1$ noktası mutlak max noktadır ve 7, mutlak max değeridir

$g(-2)=-32 \Rightarrow t=-2$ noktası mutlak min nokta ve -32, mutlak min değeridir

Ör: $f(x)=x^{2/3}$ fonksiyonunun $[-2,3]$ aralığında mutlak max ve mutlak min değerlerini bulunuz.

$f(x)=x^{2/3} \rightarrow$ tanım aralığı $(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} \rightarrow x=0$ için $f'(x)$ tanımsız dolayısıyla $x=0 \Rightarrow$ kritik nokta.

uç noktalar
$f(-2)=(-2)^{2/3}=4^{1/3}$
$f(3)=3^{2/3}=9^{1/3} \rightarrow x=3$ noktasında mutlak max.dır ve değeri $f(3)=9^{1/3}$ dür.

$f(0)=0 \rightarrow x=0$ noktasında mutlak minimumdur ve değeri $f(0)=0$ dır.

Artan / Azalan Fonksiyonlar.

$f(x)$ in $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

* Her $x \in (a,b)$ noktasında $f'(x) > 0$ ise f, $[a,b]$ aralığında artandır.
* Her $x \in (a,b)$ noktasında $f'(x) < 0$ ise f, $[a,b]$ aralığında azalandır.

Ör: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ kritik noktalarını bulunuz ve f nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyiniz.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow$ $3.(x^2-4) = 0 \Rightarrow \underbrace{x = \mp 2}$ Kritik Noktalar.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

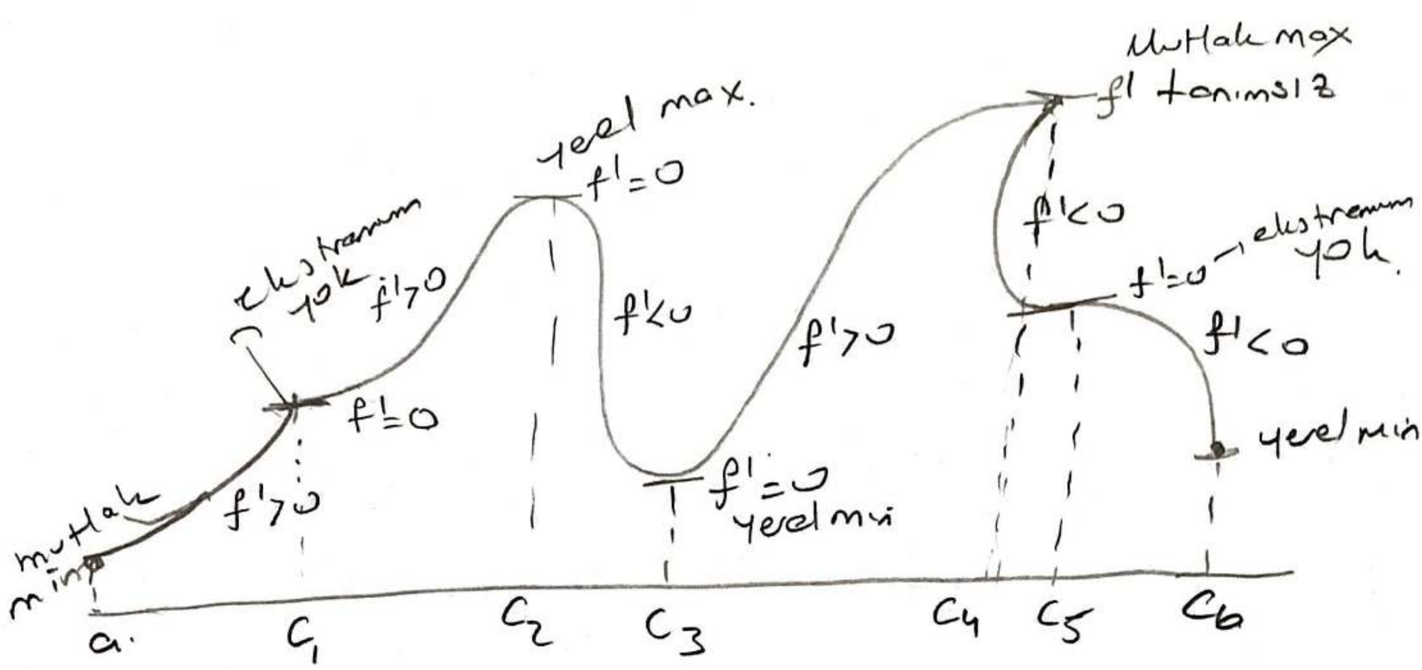
Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

Bir sürekli f fonksiyonunun kritik noktası c olduğunu ve c'yi içeren bir aralığın her noktasında (c nin kendisi hariç olabilir) f'nin türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu aralıkta soldan sağa ilerlerken

1- Eğer f', c de negatiften pozitife değişiyorsa f nin c de yerel bir minimumu vardır.

2- Eğer f', c de pozitiften negatife değişiyorsa f nin c de yerel bir maximumu vardır.

3- Eğer f' c de işaret değiştirmiyorsa (yani f' c nin her iki tarafında pozitif veya her iki tarafında negatif ise f nin c de bir yerel ekstremumu yoktur.



Ör: $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. fonksiyonun artan ve azalan aralıklarını belirleyiniz. Fonksiyonun Yerel ve mutlak extremum değerlerini bulunuz.

$f(x)=x^{4/3}-4x^{1/3}$ → Tanım kümesi $(-\infty,\infty)$

$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{4}{3}x^{-2/3}$

$=\frac{4}{3}\cdot(x^{1/3}-x^{-2/3})$

$=\frac{4}{3}\cdot\left(x^{1/3}-\frac{1}{x^{2/3}}\right)$

$=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{x^{2/3}}\right)$, $x=1$ ve $x=0$ çift kat

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	↓	↘		↗	
			$x=0$'da extremum değer yok		yerel min		

$f(1)=1\cdot(-3)=-3$

$x=1$ noktası yerel min noktasıdır. $f(1)=-3$ yerel minimum değeridir.

$x=1$ noktası aynı zamanda mutlak min noktasıdır.