Artan / Azalan Fonksiyonlar (T12)

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevli olsun.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)>0$ ise $f(x)$ $[a,b]$ de artandır.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)<0$ " $f(x)$ $[a,b]$ de azalandır.

---

* $f(x)=6x^2-x^4-4$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıklar?

$f'(x)=12x-4x^3=0 \qquad x=0 \quad x=\mp\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0 +	0 −	
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	

$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}] \to$ artan

$[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},\infty) \to$ azalan

(Not: Aralıkları açık aralık olarak da yazabiliriz!!)

---

* $f(x)=3x^5-15x^4+15x^3$ artan/azalan old. aralıklar?

$f'(x)=15x^4-60x^3+45x^2=15x^2(x^2-4x+3)=0 \qquad \boxed{x=0}$ Ç.K.K. $\qquad \boxed{x=3,\ x=1}$

x	$-\infty$	0	1	3
f'	+	0 +	0 −	0 +
f	↗	↗	↘	↗

$(-\infty,1)\cup(3,\infty) \to$ Artan

$(1,3) \to$ Azalan

Not

Ters fonksiyonlar ve Türevleri:

Bire-bir Fonksiyon:

D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonu D tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur denir.

☆ $y=f(x)$ in grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere keserse bire-birdir.

☆ Bir fonksiyon bir I aralığında bire-bir ise o aralıkta artan veya azalandır.

Ters fonksiyon:

f, D tanım kümesi üzerinde görüntü kümesi R olan bire-bir bir fonk. olsun. Ters fonksiyon f^{-1} şöyle tanımlanır:

eğer $f(b)=a$ ise $f^{-1}(a)=b$ dir.

f^{-1} nin tanım kümesi R, görüntü kümesi D dir.

Özellikler:

① $y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$

② f^{-1} nin tanım kümesi, f in değer kümesidir.

③ " " değer " , " " tanım "

④ $f^{-1}(f(x))=x$, $f(f^{-1}(x))=x$ dir.

⑤ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ dir.

⑥ f ve f^{-1} nin grafikleri $x=y$ doğrusuna göre simetriktirler.

Ters fonksiyonu Bulma:

$f(x)$ den $f^{-1}(x)$ i bulmak için:

① $y=f(x)$ den x çözülür. Yani $x=f^{-1}(y)$ bulunur.

② y ile x yer değiştirilir, $y=f^{-1}(x)$ oluşturulur.

Ters Fonksiyonun Türevi:

T14

Eğer f in tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ varsa ve hiç 0 olmuyorsa, f^{-1} tanım kümesinin her noktasında (f in görüntü kümesinde) türevlenebilirdir; ve türevi

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ dir.}$$

☆ $a = f^{-1}(b)$ için $(f(a) = b)$

☆ $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \dfrac{1}{f'(a)}$ ☆

İspat:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x)).(f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

(*) $f(x) = x^2 \quad (x>0) \Rightarrow (f^{-1}(x))' = ?$

I. Yol

$x^2 = y \to x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Yol

$(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(*) $f(x) = x^3 - 2$ olsun. $f^{-1}(x)$ için formül bulmadan $(f^{-1})'(\underset{b}{6})$ değerini bulunuz.

$6 = x^3 - 2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \to a$

$(f^{-1})'(6) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{12}$

$f'(x) = 3x^2$

Logaritmik Türev

① Çarpım, bölüm, kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri; türev almadan önce iki tarafın doğal logaritması alınarak daha kolay bulunur.

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$\ln f(x) = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \cdots + \ln f_n(x)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

---

② $f(x) = (g(x))^{h(x)} \Rightarrow \ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = f(x) \left[h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)} \right]$$

(*) $f(x) = \dfrac{(x^2+1) \cdot (x-1)^2}{x^4+4}$ $(x \neq 1)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ türevini logaritmik türev ile bulunuz.

$$\ln f(x) = \ln(x^2+1) + \underbrace{\ln(x-1)^2}_{2\ln(x-1)} - \ln(x^4+4)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x^4+4} \cdot \left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4} \right]$$

T16

(*) $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = ?$

$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$

↓ Türev

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x \left[\ln x + 1 \right]$$

(*) $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \ln(\ln x)^x - \ln(x)^{\ln x}$

$\ln y = x \ln(\ln x) - \dfrac{\ln x . \ln x}{(\ln x)^2}$

↓ Türev

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ şeklindeki ifadeler belirsizdirler (aritmetik olarak bir anlamları yoktur).

Belirsizlik Tipi	Örnek	
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$	① Cebirsel işlemler ② L'Hopital ile çözülür
∞/∞	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot x^2}$	
$0.\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$	Cebirsel işlemler ile $0/0$, ∞/∞ haline dönüştürülür
$\infty-\infty$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi-2x}\right)$	
0^0	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$	Logaritmik limit ile çözülür
∞^0	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$	
1^∞	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	

L'Hopital Kuralı :

① $x \to a$ için $f(x) \to 0, g(x) \to 0$

② $x \to a$ için $f(x) \to \mp\infty$, $g(x) \to \mp\infty$

$\Bigg\}$ ise $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

✯ $x \to a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir.

✯ $x \to a$ ifadesi $x \to a^+$, $x \to a^-$ ifadeleri ile değiştirilebilir.

✯ $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$

✯ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\frac{\operatorname{Sec} x}{1 + \operatorname{Tan} x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{Sec} x \operatorname{Tan} x}{\operatorname{Sec}^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}}{\frac{1}{\operatorname{Cos} x}} = \underline{\underline{1}}$

✯ $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{2\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}}_{0/0} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{2\operatorname{Cos} x - 2\operatorname{Cos} 2x}{2e^x - 2 - 2x}}_{0/0} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{-2\operatorname{Sin} x + 4\operatorname{Sin} 2x}{2e^x - 2}}_{0/0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-2\operatorname{Cos} x + 8\operatorname{Cos} 2x}{2e^x} = \frac{-2+8}{2} = \underline{\underline{3}}$

✯ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{Sin} x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{Sin} x - x}{x \operatorname{Sin} x}}_{0/0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{Cos} x - 1}{\operatorname{Sin} x + x\operatorname{Cos} x}}_{0/0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{Sin} x}{2\operatorname{Cos} x - x\operatorname{Sin} x}$

$= \underline{\underline{0}}$

✯ $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{x^2 \cdot \left(1 - \operatorname{Cos} \frac{1}{x}\right)}_{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{\frac{1 - \operatorname{Cos} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}_{0/0} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \frac{1}{2}$

Logaritmik Limit

T19

1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} belirsizliklerini veren limitleri çözmek için kullanılır.

(*) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=?$ ∞^0 belirsizliği

$$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y=\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\sin x.\underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{\ln x^{-1}=-\ln x}=-\sin x.\ln x$$

$$\ln y=-\sin x.\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\underset{0.\infty}{(-\sin x.\ln x)}=\lim_{x\to 0^+}-\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}.\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0^+}y\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}y=\underline{\underline{1}}$$

(*) $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\cot x}=?$ 1^{∞} belirsizliği

$$y=(\cos x)^{\cot x} \Rightarrow \ln y=\cot x.\ln\cos x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\underset{\infty.0}{\cot x.\ln\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\underbrace{\cot x}_{\tan x}}}=\lim_{x\to 0^+}\underset{\frac{0}{0}\to L'H.}{\frac{\ln\cos x}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}.\cos^{\cancel{2}} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=0 \Rightarrow \ln\underbrace{\left(\lim_{x\to 0^+}y\right)}_{1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}y=\underline{\underline{1}}$$