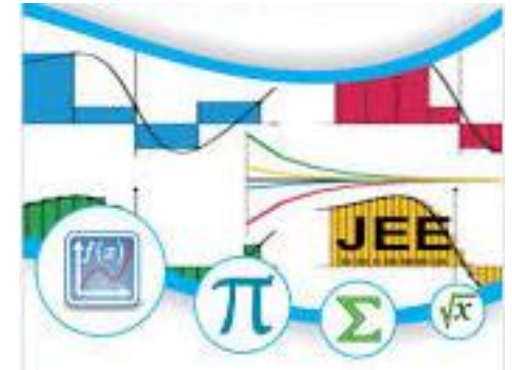


SAYISAL TÜREV



TÜREV NEDİR ?

- Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.
- Newton'un ikinci yasası temel bir örnek olup, bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

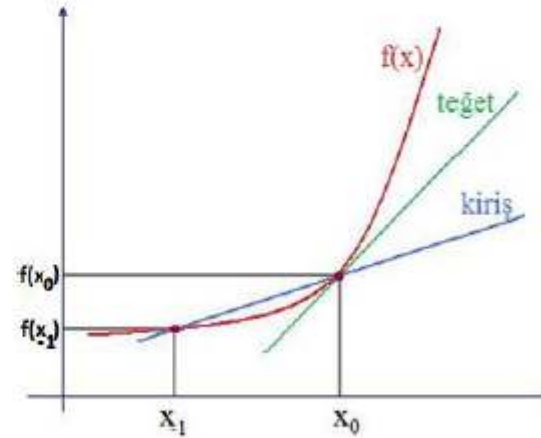
- Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.
- Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine göre bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimi göre ifade edilir.

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

- ❑ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ❑ Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- ❑ Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir **x** noktasındaki yatayla yaptığı aç yada diğer bir ifadeyle **x** noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.

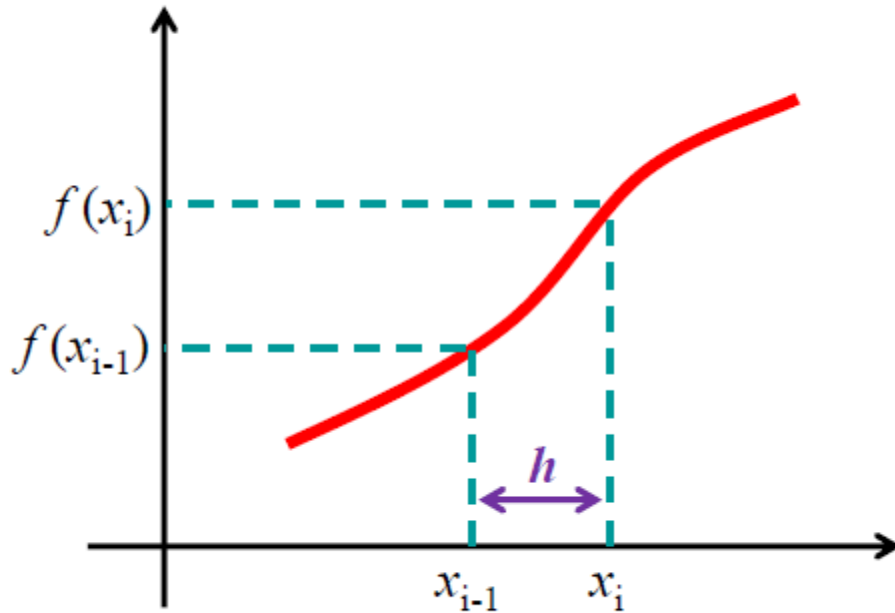
$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- ❑ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

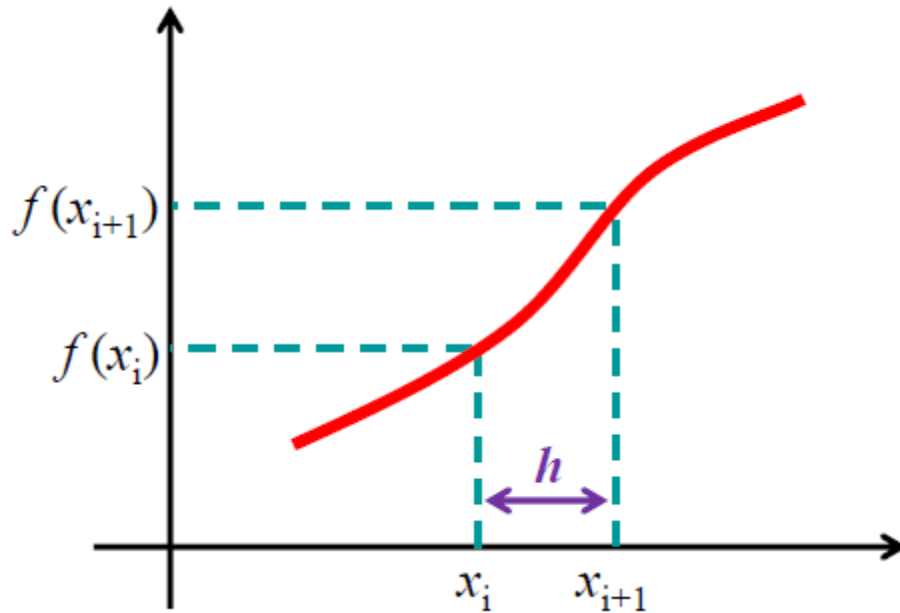
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\nabla f(x)}{\nabla x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f(x)}{\nabla x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

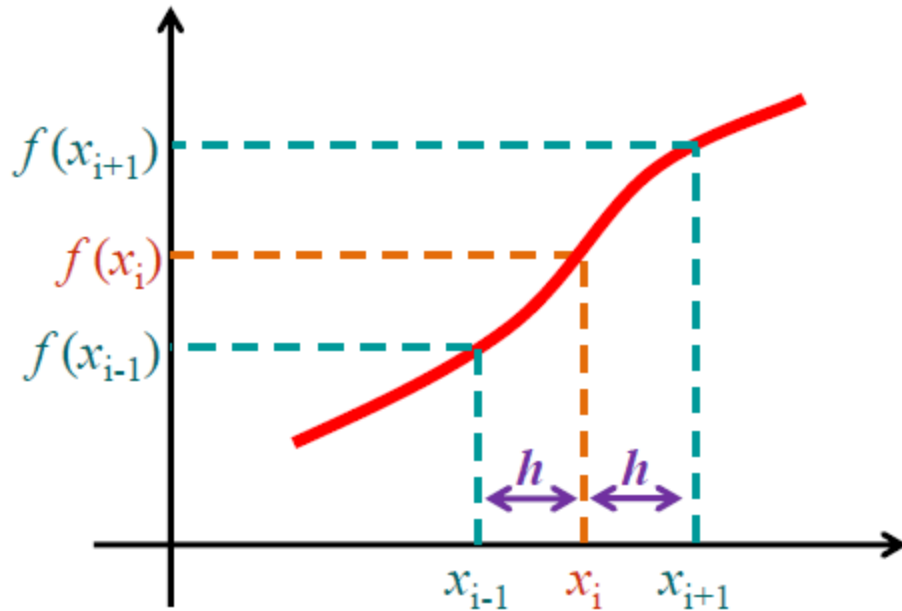
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



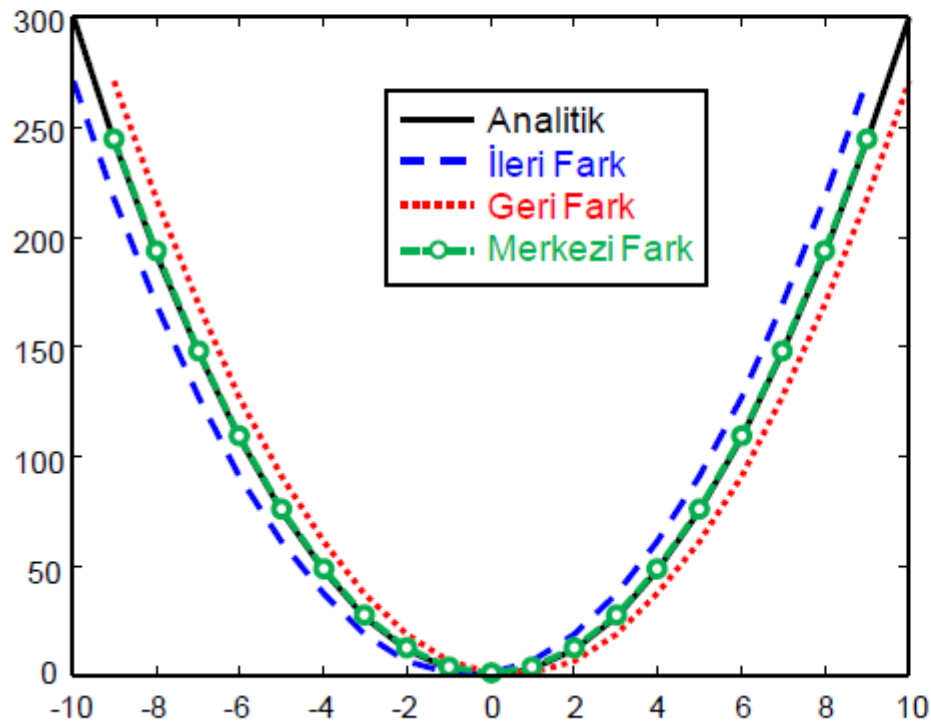
$$f'(x_i) = \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

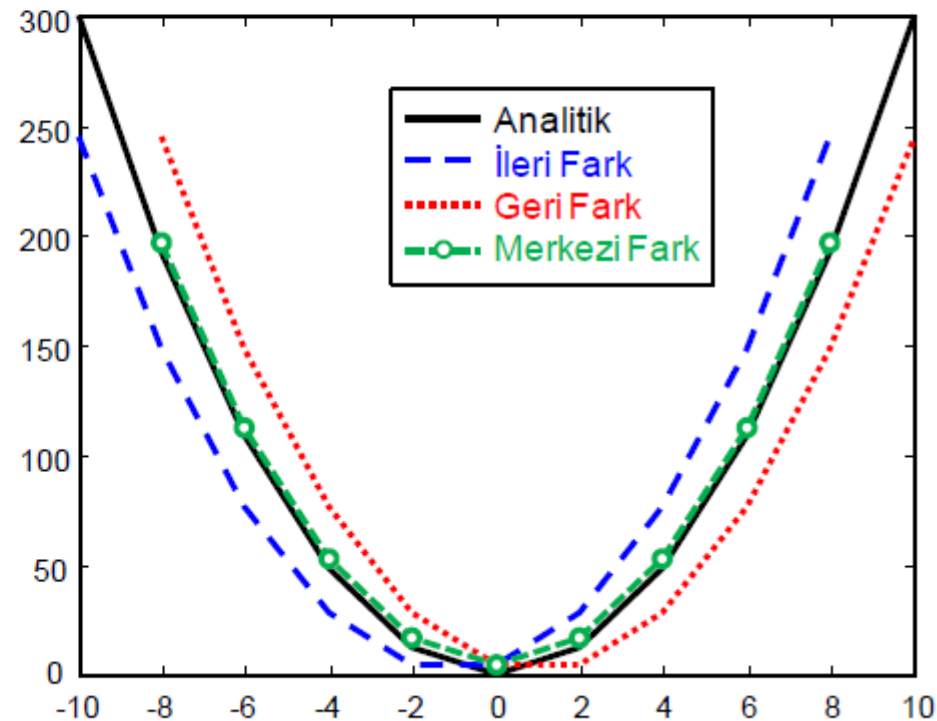
Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$h = 0.1$



$h = 2$





❑ $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevini $h=0,1$ kullanarak her üç yöntem ile hesaplayınız.

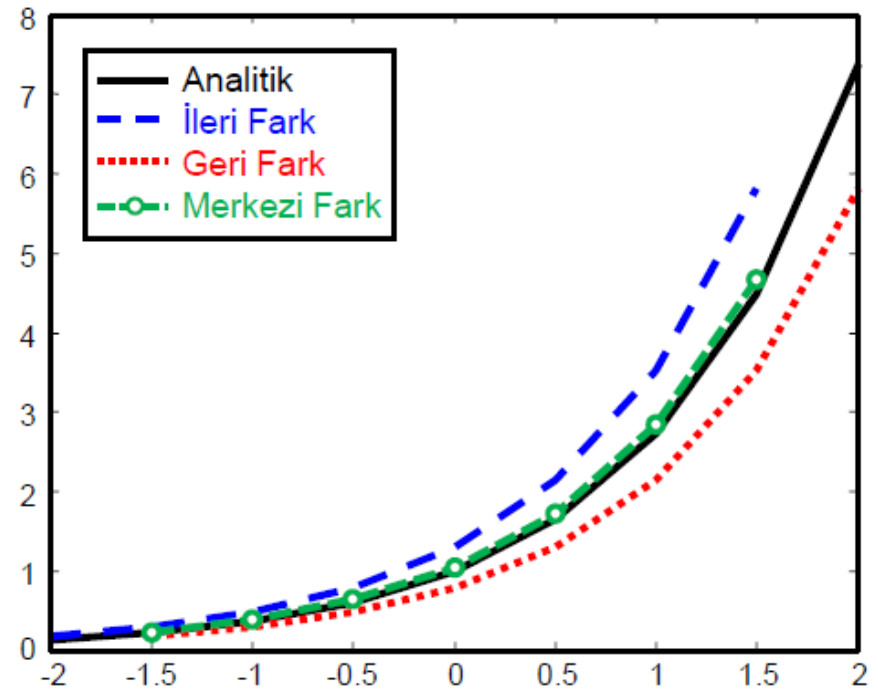
❑ **Çözüm:**

❑ Geri farklar

❑ İleri farklar

❑ Merkezi farklar

❑ Analitik Çözüm



2.7183

$$f(x) = e^x$$

İleri Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{e^{1.1} - e^1}{0.1} = \underline{\underline{2.86}}$$

Geri Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1) - f(1-0.1)}{0.1} = \frac{e^1 - e^{0.9}}{0.1} = \underline{\underline{2.59}}$$



Merkezi Fark ile $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x} = \frac{e^{1.1} - e^{0.9}}{0.2} = \underline{\underline{2.72}}$

Analitik: $y = e^x$ $y' = e^x$ $y' = e^1 = 2.72$ (merkezi farka yakın)



☐ $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

☐ **Çözüm:**

☐ Geri farklar

☐ İleri farklar

☐ Merkezi farklar

☐ Analitik Çözüm



Taylor Serisi İle Sayısal Türev

- ❑ Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- ❑ Bir fonksiyonun $x_i + \Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- ❑ Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx ' in mertebesine eşit olur.
- ❑ Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

$$-4 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-4f(x_i + h) = -4f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile \Rightarrow

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonunun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f''(x_i)$ yi çekelim.

$$-2 \quad / \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-2f(x_i + h) = -2f(x_i) - 2h.f'(x_i) - h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

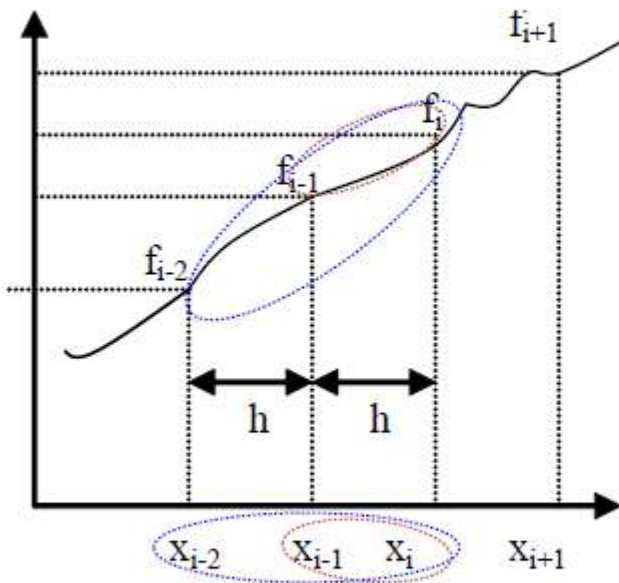
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile 

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}]$$

Taylor Serisi İle Geri Fark Yöntemi

- ❑ İleri fark yöntemindeki işlemler $f(x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile ➡

$$f'_i = \frac{1}{2h} [3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Homework

1

- Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.

$$f'_i = \frac{1}{6h} [-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}]$$

$$f''_i = \frac{1}{h^2} [2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}]$$

$$f'''_i = \frac{1}{h^3} [-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}]$$

Homework

2

- ❑ **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ fonksiyonunun $x=2$ yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. $h=0.1$ ve analitik çözüm $f'(2)=8$
- ❑ **Çözüm:**
- ❑ **Basit ileri farkla çözüm**
- ❑ **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

KAYNAKLAR

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*”, Seçkin Yayıncılık
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi