

## Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri

### 1) İntegral Testi

İntegral testi, pozitif terimli bir serinin ora benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

**Teorem:**  $f$  fonksiyonu, bir pozitif  $N$  tamsayısı için,  $[N, \infty)$  aralığında pozitif, sürekli, azalan ve  $a_n = f(n)$  olsun. O zaman,  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  serisi ile  $\int_N^{\infty} f(x) dx$  integrali aynı karakterlidir. (Her ikisi de ıraksar veya her ikisi de yakınsar)

**Not:** Yukarıdaki teorem, verilen koşullar altında sadece seri ile integralin aynı karakterde olduğunu ifade eder, serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylenmez.

**Örnek:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$  serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  olsun.  $f$  fonksiyonu  $[1, \infty)$  aralığında pozitif ve sürekli.

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0$  olduğundan  $f$ , bu aralıktaki azalandır.

Dolayısıyla integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan R - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow$  Improper integral yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

### Harmonik Seri

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  serisine harmonik seri denir.

⊗ Harmonik seri  $+\infty$ 'a ıraksar. Ancak bu sonucu  $n$ -terim testi ile ulaşamayız, integral testi kullanmalıyız:

$f(x) = \frac{1}{x}$   $[1, \infty)$  da pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - \ln 1) = \infty \Rightarrow \text{integral ıraksak}$$

$\Rightarrow$  Seri ıraksak

## p-Serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \text{ serisine } p\text{-serisi denir.}$$

⊗ p-serisi  $p > 1$  için yakınsak,  $p \leq 1$  için ıraksaktır. ( $+\infty$ 'a ıraksar)

$p > 1$  olsun.  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  fonksiyonu  $[1, \infty)$  da pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^R = \frac{1}{1-p} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{R^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

$\xrightarrow{+\infty (p-1 > 0)}$

olduğundan integral testine göre seri yakınsaktır. (Seri toplamı  $\frac{1}{p-1}$  değildir!)

$p \leq 1$  olsun. O zaman  $1-p > 0$  dir. O halde,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{R \rightarrow \infty} (R^{1-p} - 1) = \infty$$

olduğundan integral testine göre seri ıraksaktır.

## 2) Mukayese Testi

$\sum a_n$  ve  $\sum b_n$ , terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

a) Eğer her  $n$  için  $a_n \leq b_n$  ve  $\sum b_n$  serisi yakınsak ise  $\sum a_n$  serisi de yakınsaktır.

b) Eğer her  $n$  için  $a_n \geq b_n$  ve  $\sum b_n$  serisi ıraksak ise  $\sum a_n$  serisi de ıraksaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$  serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \text{ p-serisi olup } p=2 > 1 \text{ olduğundan yakınsaktır.}$$

Mukayese testine göre  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$  yakınsaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$  serisinin karakterini belirleyin.

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} \text{ ıraksaktır.}$$

harmonik seri ıraksak

Örnek:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  serisinin karakterini belirleyim.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri iraksak}} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre seri iraksaktır.}$$

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$  serisinin karakterini belirleyim.

1. ypl  $e^n > n \Rightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \frac{1}{n \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}}_{p=\frac{3}{2}>1 \text{ yakinsak}} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre seri yakinsak}$

2. ypl  $\frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \frac{1}{e^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ ,  $r = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{Mukayese testine göre seri yakinsak}$   
 geometrik seri yakinsak

### 3) Limit Testi

$\sum a_n$  ve  $\sum b_n$  pozitif terimli iki seri olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$  olsun.

- a)  $0 < L < \infty$  (L sonlu) ise her iki seri de aynı karakterdedir.
- b)  $L = 0$  ve  $\sum b_n$  yakinsak ise  $\sum a_n$  yakinsaktır.
- c)  $L = \infty$  ve  $\sum b_n$  iraksak ise  $\sum a_n$  iraksaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$  serisinin karakterini belirleyim.

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{iraksak}} \quad p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Mukayese testi sonucu vermez.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterde olup  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  iraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$  serisi de iraksaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$  serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^4-16} \rightarrow \frac{4}{3}}{n^2\sqrt{n+1} \rightarrow \frac{5}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}} = 1 \neq 0, \infty$$

$\frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$

Limit testine göre iki seri aynı karakterdedir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$   $p = \frac{7}{6} > 1$  olduğundan yakınsaktır, dolayısıyla seri yakınsaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}$  karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+2n^2+3n}{n^4+5n^2} = 1 \neq 0, \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  harmonik seri olup ıraksaktır, limit testinden seri ıraksaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$  serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3 = 1 \neq 0, \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$   $p=3 > 1$  olduğundan yakınsaktır, limit testinden seri yakınsaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$  serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^n \sqrt{n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \quad r = \frac{1}{e} < 1 \text{ yakınsaktır.}$$

geometrik seri

Limit testinden,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

Not: Seçilen seri  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  olsaydı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^n \sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0 \Rightarrow \text{limit testi sonucu vermezdi}$$

ıraksak



#### 4) Oran Testi

$\sum a_n$  pozitif terimli bir seri ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  olsun.

- a)  $L < 1$  ise seri yakınsaktır.
- b)  $L > 1$  ise seri ıraksaktır.
- c)  $L = 1$  ise test sonuç vermez.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyin.

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n + 5}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

Not: Bu durum serinin toplamının  $\frac{2}{3}$  olduğu anlamına gelmez.

Toplamını bulalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{1} + \frac{15}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2 > 1$$

Oran testine göre seri ıraksaktır.

$$\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Oran testine göre seri ıraksaktır.

$$\textcircled{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

$$\textcircled{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \Rightarrow \text{Oran testine göre yakınsak}$$

$$\textcircled{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{4^n n! n!}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot (n+1)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{2n+1} = 1 \Rightarrow \text{Test sonucu vermez.}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} > 1 \text{ olduğundan } a_{n+1} \text{ her zaman } a_n \text{ 'den büyüktür.}$$

Dolayısıyla serinin bütün terimleri  $a_1 = 2$  'den büyüktür. Yani dizinin  $n$ . terimi (genel terimi)  $n \rightarrow \infty$  iken 0' a yakınsamaz.  $n$ . term testinden seri ıraksaktır.

### 5) Kök Testi

$\sum a_n$  pozitif terimli bir seri ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$  olsun.

a)  $L < 1$  ise seri yakınsaktır.

b)  $L > 1$  ise seri ıraksaktır.

c)  $L = 1$  ise test sonucu vermez.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyim.

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1^2}{2} < 1$$

Kök testine göre seri yakınsaktır.

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n}{n}} = 0 < 1$$

Kök testine göre seri yakınsaktır.

$$③ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Kök testinden seri yakınsaktır.

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} > 1$$

Kök testinden seri ıraksaktır.

$$\begin{aligned} ⑤ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 5}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n(1 + 5 \cdot 2^{-n})}}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt[n]{1 + \frac{5}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{5}{2^n}\right)}_{\rightarrow 0}^{1/n} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Kök testinden seri yakınsaktır.

## 6) n. terim Testi

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ise  $\sum a_n$  serisi ıraksaktır.

Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyin.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 5} \quad (\text{pay ve paydının derecesi eşit, limit testi uygulanamaz})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 5} = 1 \neq 0 \Rightarrow n. \text{ terim testinden seri ıraksak}$$

$$② \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \text{kök testi sonuç vermez.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow n. \text{ terim testinden seri ıraksaktır.}$$

$$\text{Hatırlatma: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Not:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ise  $\sum a_n$  yakınsak da olabilir, ıraksak da olabilir.

## Alterne Seriler

Bir serinin terimleri sırasıyla bir pozitif bir negatif değerler alıyorsa böyle serilere alterne seri denir. Genel olarak, bir alterne seri  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için  $a_n > 0$  olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

şeklinde dir.

Alterne seri testi:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  serisi için,

- 1)  $a_n > 0$  ( $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ )
- 2)  $a_{n+1} \leq a_n$  ( $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ )
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Şartları sağlanıyorsa alterne seri yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$  serisinin yakınsaklığını inceleyim.

- 1)  $a_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$  ( $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ )
  - 2)  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} = a_n$
  - 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$
- Şartları sağlandığından alterne seri testine göre yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık: Eğer  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  serisi yakınsak ise  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisine mutlak yakınsaktır denir.

\* Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

Şartlı yakınsaklık: Eğer  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse bu seriye şartlı yakınsaktır denir.

\* Şartlı yakınsaklık için alterne seri testi kullanılır.



?

Alternan Harmonik Seri:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  serisine alternan harmonik seri denir.

\*  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  alternan harmonik serisinin yakınsaklığını inceleyip, türünü araştıralım.

①  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  serisi harmonik seridir ve ıraksaktır. O halde  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  mutlak yakınsak değildir.

② Şartlı yakınsak olup olmadığını anlamak için alternan seri testi uygulayalım:

$$\left. \begin{array}{l} a) a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad (\forall n=1,2,\dots) \\ b) \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ serisi yakınsaktır. Ancak mutlak} \\ \text{yakınsak olmadığından } \underline{\text{şartlı yakınsaktır.}} \end{array}$$

Örnek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$  serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$$

Seri mutlak yakınsak mı? Yani,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  yakınsak mı?

Kök testinden,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$  olduğundan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  yakınsaktır.

O halde,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$  serisi mutlak yakınsaktır.

Örnek:  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$  serisinin yakınsaklık türünü belirleyin.

Mutlak yakınsak mı? Yani  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$  yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ( $p=2>1 \Rightarrow$  yakınsak) seçerek limit testini kullanalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 \ln^2 n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0 \Rightarrow \text{Limit testine göre } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ yakınsak olduğundan}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$  serisi de yakınsaktır.

$\Rightarrow$  O halde,  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$  serisi mutlak yakınsaktır.

⊗ Serinin sadece p-serisi değil ise limit veya mukayese kullan.

Örnek:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$  serisinin mutlak/sartlı yakınsak olup olmadığını inceleyin, yakınsaklık türünü belirleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

①  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$  mutlak yakınsak mı?

Mukayese testi kullanalım:

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri ıraksak}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \Rightarrow \text{Mukayese testinden } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ ıraksaktır. O halde,}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \text{ mutlak yakınsak değildir.}$$

②  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$  şartlı yakınsak mı?

a)  $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$

b)  $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

Alternan seri testine göre seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

### Serilerde Terimlerin Yeniden Düzenlenmesi:

Teorem: Eğer  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi mutlak yakınsak bir seri ise ve  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  dizisi  $\{a_n\}$  dizisinin herhangi bir sıralamada yeniden yazımı ise o zaman  $\sum b_n$  serisi mutlak yakınsaktır ve  $\sum a_n$  serisinin toplamına yakınsar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

⊗ Eğer şartlı yakınsak bir serinin terimlerini yer değiştirirsek farklı sonuçlar elde ederiz.

1) Eğer bir seri mutlak yakınsak ise, serinin pozitif terimleri ile oluşturulan alt seri ile negatif terimlerden oluşturulan alt serinin ikisi de yakınsar.

2) Eğer bir seri şartlı yakınsak ise, negatif terimli alt seri  $-\infty$ 'a, pozitif terimli alt seri  $+\infty$ 'a ıraksar.

⊗ Eğer bir seri şartlı yakınsak ise o zaman serinin terimleri  $\pm \infty$ 'a ıraksayacak veya bir LER sayısına yakınsayarak şekilde yeniden düzenlenebilir.

## Testlerin Özeti:

### 1) Geometrik seri:

$|r| < 1$  ise  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  geometrik serisi yakınsar, değilse ıraksar.

### 2) p-Serisi:

$p > 1$  ise  $\sum \frac{1}{n^p}$  serisi yakınsar, değilse ıraksar.

### 3) n. terim testi: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

4) Pozitif terimli seriler: integral testi, oran testi, kök testi, mukayese testi, limit testi kullanılarak bu serilerin yakınsaklığı incelenir. Mukayese ve limit testleri için yakınsaklığı / ıraksaklığı bilinen (geometrik seri, harmonik seri, p-serisi (pibi)) seriler seçilir.

5) Alternan seriler: Alternan seri testi koşullarını sağlayan seri yakınsaktır. Bu yakınsaklık iki tür olabilir.

a) Mutlak yakınsaklık:  $\sum |a_n|$  yakınsak ise  $\sum a_n$  mutlak yakınsaktır.

b) Şartlı yakınsaklık:  $\sum a_n$  yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse şartlı yakınsaktır, denir.

