KISMÎ TÜREV

$z = f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre 1. mertebe kısmî türevleri ;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = f_1(x,y) = z_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

(y sabit tutulup, x'e göre türev alınır. Yani $\partial f/\partial x$, f fonksiyonunun x'e göre değişim oranını verir.)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = f_2(x,y) = z_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

(x sabit tutulup, y'ye göre türev alınır. $\partial f/\partial y$, f fonk-nun y'ye göre değişim oranını verir.)

limitlerinin mevcut olması koşuluyla, $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ fonksiyonlarıdır.

Notasyon: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b) = f_1(a,b)$: z nin x'e göre türevinin (a,b)'deki değeri

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b) = f_2(a,b)$: z nin y'ye " " " "

✱ Toplam, çarpım, bölüm için geçerli olan tüm türev kuralları kısmî türevler için de geçerlidir.

Örnek: $z = x^3y^2 + \cos(x+y) + y^3x^3 + y^2 - 4 \Rightarrow \partial z/\partial x = ?$ $\partial z/\partial y = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - \sin(x+y) + 3x^2y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - \sin(x+y) + 3y^2x^3 + 2y$$

Örnek: $f(x,y) = y\sin xy \Rightarrow \partial f/\partial y = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin xy + y\cos xy \cdot x = \sin xy + xy\cos xy$$

Örnek: $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y) \Rightarrow f_1(0,\pi) = ?$

$$f_1(x,y) = ye^{xy}\cdot\cos(x+y) + e^{xy}(-\sin(x+y))$$

$$f_1(0,\pi) = \pi\cdot e^0\cos\pi - e^0\sin\pi = -\pi$$

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x} \Rightarrow f_x=?\quad f_y=?$

$$f_x=\frac{-2y\cdot(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

$$f_y=\frac{2(y+\cos x)-2y\cdot 1}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$

Örnek: $f(x,y)=x^2y$ fonksiyonu için f_y türevini türev tanımı ile bulun.

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)-x^2y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2h}{h}=x^2$$

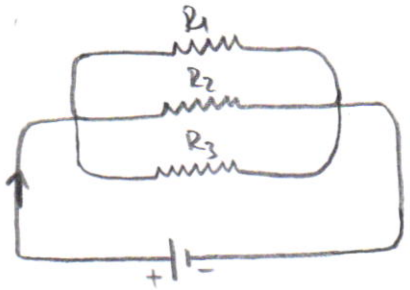
Örnek: $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ ve $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ mevcut ise hesaplayın.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0$$

ikiden fazla değişken

Örnek: Eğer R_1, R_2 ve R_3 ohmluk dirençler paralel bağlanarak R ohmluk bir direnç elde edilmişse R değeri aşağıdaki denklemle bulunur.



$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$R_1=30$, $R_2=45$, $R_3=90$ ohm olduğunda $\partial R/\partial R_2$ değerini bulunuz.

$$\left.\begin{matrix}R_1\\R_3\end{matrix}\right\}\text{sabit}\Rightarrow \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\Rightarrow -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2}=-\frac{1}{R_2^2}\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2}=\left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

$$R_1=30,\ R_2=45,\ R_3=90 \Rightarrow \frac{1}{R}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2}=\left(\frac{15}{45}\right)^2=\frac{1}{9}$$

Yani, R_2 direncindeki değişim R'de $1/9$'u oranında bir değişime yol açar.

Bileşke Fonksiyonun Türevi (Basit Zincir Kuralı):

$z=f(g(x,y))$ için $\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = f'(g(x,y)) \cdot g_x(x,y)$

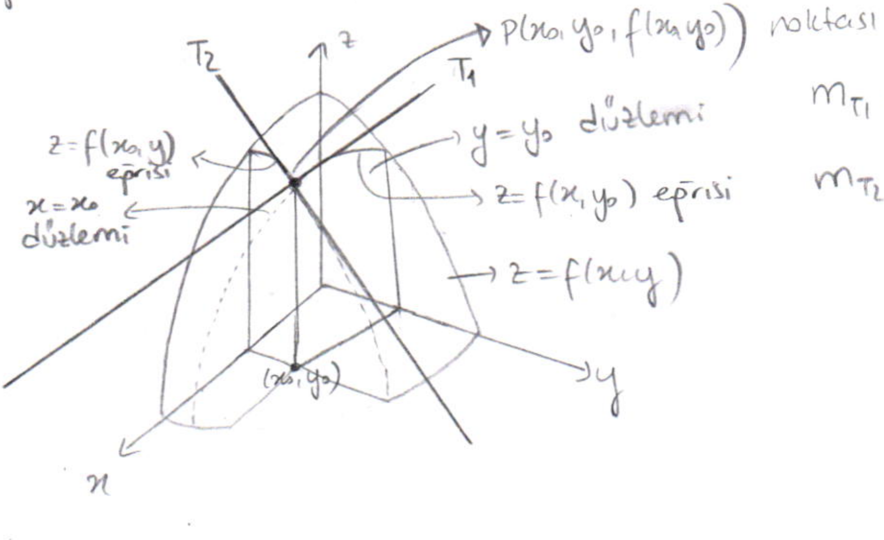
$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = f'(g(x,y)) \cdot g_y(x,y)$$

Örnek: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ ise $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot -\frac{x}{y^2} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y}\right) \end{array}\right\rangle x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

* Geometrik olarak, $z=f(x,y)$ yüzeyinin $x=x_0$ (veya $y=y_0$) düzlemi ile kesişmesiyle oluşan $z=f(x_0,y)$ (veya $z=f(x,y_0)$) eğrisinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasındaki eğimi f nin y'ye göre (veya x'e göre) (x_0,y_0) noktasındaki kısmî türevine eşittir.

Eğrinin P deki teğet doğrusu bu eğimle P den geçen doğrudur.



$m_{T_1} = f_x(x_0,y_0)$

$m_{T_2} = f_y(x_0,y_0)$

$z=f(x,y)$ yüzeyinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasında iki tane teğet doğrusu olduğundan, bu iki doğrunun tanımladığı düzleme "teğet düzlem" denir.

Yüksek Mertebeden Türevler

İkinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler, hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.

Örneğin, $z=f(x,y)$ için 2. mertebe kısmi türevleri:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{11}(x,y)=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{22}(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{21}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{12}(x,y)=f_{xy}(x,y)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & z=f(x,y) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & f_x(x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & f_y(x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f_{xx}(x,y) & & f_{xy}(x,y) & & f_{yx}(x,y) & & f_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

$w=f(x,y,z)$ ise:

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y\partial x\partial y^2\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right)\right)=f_{32212}(x,y,z)=f_{zyyxy}(x,y,z)$$

Örnek: $f(x,y)=x\cos y+ye^x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y+ye^x\right)=ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-x\sin y+e^x\right)=-x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos y+ye^x\right)=-\sin y+e^x$$

= her zaman sağlanmaz!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\sin y+e^x$$

Örnek: $z = \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+ \overline{}$$
$$0$$

Karışık Türev Teoremi (Schwarz Teoremi)

Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi türevleri f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx}, (a,b) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlı ve (a,b)'de sürekli iseler,

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Not: 2. mertebe türevlerde olduğu gibi, süreklilik şartı sağlandığı müddetçe tüm mertebeden türevlerde türev alma sırası önemsizdir. Türevi farklı sıralamada yapabilme imkanı hesaplamalarımızı kolaylaştırabilir.

Örnek: $w = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$ ise $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ yi bulunuz.

Teoremin şartları, w için her yerde geçerli olduğundan,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

Örnek: $z = e^{kx}\cos ky \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ olduğunu gösteriniz.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial z}{\partial y} = -ke^{kx}\sin ky & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 e^{kx}\sin ky \\ \frac{\partial z}{\partial x} = ke^{kx}\cos ky & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -k^2 e^{kx}\sin ky \end{array}\right\} =$$

Örnek: $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y \Rightarrow f_{yxyz} = ?$

$f_y = -4xyz + x^2$

$f_{yx} = -4yz + 2x$

$f_{yxy} = -4z$

$f_{yxyz} = -4$

İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artırım Teoremi: (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde $f(x,y)$ nin 1. mertebe türevleri tanımlı ve (x_0, y_0) da f_x ve f_y nin sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda R bölgesinde (x_0, y_0) dan başka bir $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x)$ noktasına taşınması ile oluşan f değerindeki değişim

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad \dots (*)$$

denklemini sağlar. Burada $\Delta x \to 0$ ve $\Delta y \to 0$ iken $\varepsilon_1 \to 0$ ve $\varepsilon_2 \to 0$ dır.

Eğer $f_x(x_0, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ mevcut ise ve Δz, $(*)$ denklemini sağlarsa $z=f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında türevlenebilirdir. (dif. bilir) Eğer f tanım bölgesinin her nokt. türevlenebilirse, f'e o bölgede dif. bilir denir.

Sonuç: Bir $f(x,y)$ fonksiyonu için f_x ve f_y açık bir R bölgesinde sürekli ise, f R nin her noktasında türevlenebilirdir.

$(*)$ Eğer tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$'da $f'(a)$ türevine sahipse fonksiyon $x=a$'da süreklidir. Ancak, $f(x,y)$ fonksiyonu belirli bir noktada hem x'e hem y'ye göre kısmi türevlere sahip olsa bile o noktada sürekli olmayabilir. Yukarıdaki sonuçta ifade edildiği gibi, $f(x,y)$ fonksiyonu için f_x ve f_y kısmi türevleri (x_0, y_0)'ı içeren bir bölgede sürekli ise, $f(x,y)$ (x_0, y_0) da süreklidir diyebiliriz.

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

a) $y=x$ boyunca $f(x,y)$ nin $(0,0)$ daki limiti?
b) f in $(0,0)$ da sürekli olmadığını gösterin.
c) f_x ve f_y nin $(0,0)$ da mevcut olduğunu gösterin

a) $\lim\limits_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{y=x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

b) $f(0,0) = 1 \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Rightarrow$ sürekli değil

c) $f_x(0,0) \to y$ sabit $\to xy=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_x(0,0)=0$
$f_y(0,0) \to x$ sabit $\to xy=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_y(0,0)=0$ $\Big\}$ mevcut

Örnek: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ türevlerinin mevcut ancak $(0,0)$ da sürekli olmadığını gösterin.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow y = kx \text{ için, } \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

$\Rightarrow$ limit mevcut değil $\Rightarrow$ sürekli değil.

Zincir Kuralı

* $z = f(x,y)$, birinci mertebe kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon ve $x = x(t)$, $y = y(t)$ türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

tek değ. (d)

$z \xrightarrow{\text{çok değ. } (\partial)} x,y \xrightarrow{\text{tek değ. } (d)} t$

* $z = f(x,y)$, birinci mertebe kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon ve $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

∂

$z \xrightarrow{\partial} x,y \xrightarrow{\partial} s,t$

* Benzer şekilde, çok değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilebilir.

$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad x_1 = x_1(p,q,\dots,t), \dots, x_n = x_n(p,q,\dots,t)$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial p}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

∂

$z \xrightarrow{\partial} x_1, \dots, x_n \xrightarrow{\partial} p, q, \dots, t$

Örnek: $w = xy + z \quad , x = \cos t \quad , y = \sin t \quad , z = t \Rightarrow \left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0} = ?$

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\partial"'] \arrow[rr, bend left, "d"] & x,y,z \arrow[r, "\partial"'] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = y(-\sin t) + x\cos t + 1.1$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1$$

$$= \cos 2t + 1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = \cos 0 + 1 = 2$$

Örnek: $\left.\begin{aligned} &w = 2y + x + z^2 \\ &x = \frac{r}{s} \\ &y = r^2 + \ln s \\ &z = 2r \end{aligned}\right\}$ $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ ve $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ türevlerini r ve s cinsinden bulunuz.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\partial"'] \arrow[rr, bend left, "\partial"] & x,y,z \arrow[r, "\partial"'] & r,s \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = 1.\frac{1}{s} + 2.2r + \overbrace{2z.2}^{4r.2}$$

$$= 1/s + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 1.\left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2.\frac{1}{s} + 2z.0$$

$$= 2/s - r/s^2$$

Örnek: $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x^2y, x+2y)$, $\dfrac{\partial}{\partial z} f(x^2y, x+2y)$ değerlerini f'in kısmi türevleri cinsinden bulun.

$\left.\begin{aligned} u &= x^2y \\ v &= x+2y \end{aligned}\right\}$ $f \rightarrow u,v \rightarrow x,y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_u . 2xy + f_v . 1 = 2xy f_u + f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = f_u . x^2 + f_v . 2 = x^2 f_u + 2f_v$$

Kapalı Fonksiyon Türevi:

$z=f(x,y)$ olmak üzere, $F(x,y,z)=0$ fonksiyonu için $\frac{\partial z}{\partial y}$ ve $\frac{\partial z}{\partial x}$ türevleri

1. yol: Direkt türetme ile bulunabilir.

2. yol: $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ $\left(F(x,y,z)=0 \Rightarrow \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}^{F_x} \cdot \overbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial F}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}^{F_z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \right.$

$F \to \underset{b.lı}{x,y,z} \to \underbrace{x,y}_{b.sız}$ $\left. \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \right)$

Örnek: $x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}$ değerlerini bulunuz.

$F(x,y,z)=0 \quad z=f(x,y)$

1. yol: x'e göre türev:

$$3x^2+2z\frac{\partial z}{\partial x}+y\left[ze^{xz}+x\frac{\partial z}{\partial x}e^{xz}\right]+\frac{\partial z}{\partial x}\cos y=0$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \frac{\partial z}{\partial x}=0$$

y'ye göre türev:

$$2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+e^{xz}+yx\frac{\partial z}{\partial y}e^{xz}+\frac{\partial z}{\partial y}\cos y-z\sin y=0$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} 1+\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

2. yol: $F: x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2+zye^{xz}}{2z+xye^{xz}+\cos y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz}-z\sin y}{2z+xye^{xy}+\cos y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}=-1$$

Örnek: $yz-\ln z=x+y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=?$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial x}\ln z=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{yz-1}$$