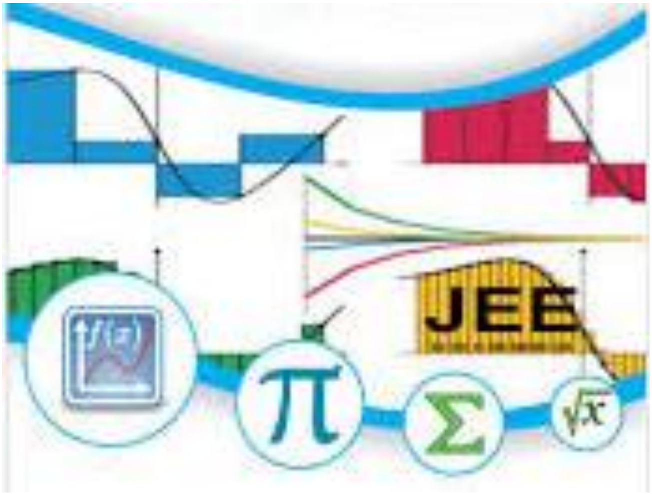
Doğrusal (Lineer) Olmayan Eşitliklerin Çözümü



Lineer Olmayan Bir Bilinmeyenli Denklem Nedir ?
(Nonlinear Equations in One Variable

<u>Sayısal Analiz</u>

*. Analitik Çözümü Olmayan

Diferansiyel Denklemler
……

Belirli İntegral
……

Lineer olmayan bir, iki, …
bilinmeyenli denklemler
……

$4x - 16 = 0$ → lineer bir bilinmeyenli denklem

$x^2 - 4x = 0$ → lineer olmayan bir bilinmeyenli denklem

Ancak, analitik olarak çözülüyor.

$x(x-4) = 0 \qquad x=0 \quad x=4$

Lineer Olmayan ve Analitik Çözümü Olmayan Bir Bilinmeyenli Denklemler

$x^4 - 5x^3 + 7x + 1 = 0 \qquad x=?$

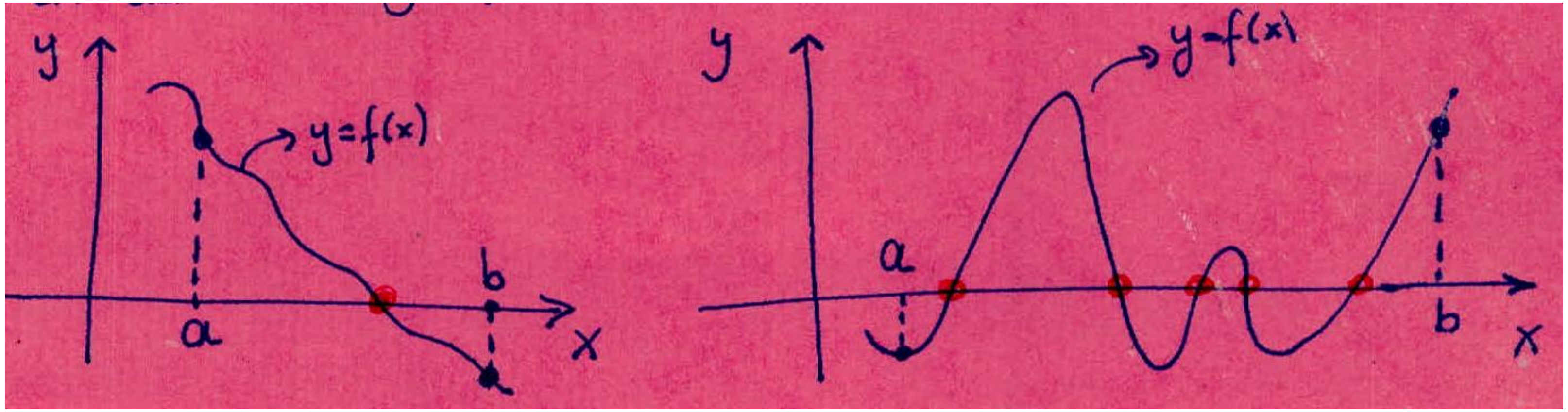
- Sayısal analiz → yaklaşık sonuç verir
- Analitik yöntemler → tam sonuç verir

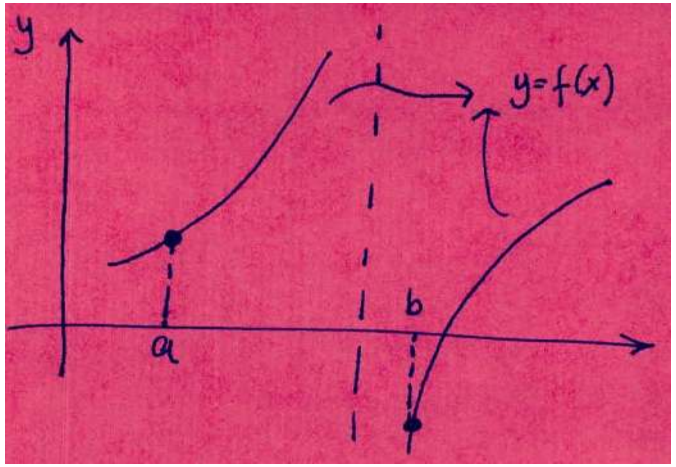
$x^2 + \sin x + e^{3x} = 0$ (lineer olmayan bir bilinmeyenli denklem) $x=?$

$x^3 + e^x \tan x + 1/x = 0$ (lineer olmayan bir bilinmeyenli denklem) $x=?$

$x + \sin y = 0$ (lineer olmayan iki bilinmeyenli denklem) $x=?$ $y=?$

Teorem :
Eğer, f(x), x=a ve x=b aralığında sürekli ve f(a), f(b) ters işaretli iseler
(a, b) aralığında en az bir gerçek kök vardır.





f(a) ve f(b) ters işaretli olmasına rağmen fonksiyon sürekli olmadığı için bu aralıkta kök yoktur.

Lineer olmayan bir denklem takımı verildiğinde problemin çözümü için kullanılacak yöntem;

- Verilen denklem veya denklem takımının bir kökünün veya köklerinin bulunmasına
- Köklerin gerçek veya sanal olmasına
- Kökler için yaklaşık değerlerin bulunup, bulunmamasına

bağlı olarak seçilir. Bazı yöntemler tek bir denklemin çözümüne, bazıları ise denklem takımlarının çözümüne daha uygundur.

Doğrusal (Lineer) Olmayan Eşitliklerin Çözümü

Kapalı Yöntemler (Bracketing Methods)

- Grafik Yöntemi
- İkiye Bölme - Aralık Yarılama (Bisection)
- Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta/Lineer Interpolasyon)

Kökler, bir alt ve üst sınırla belirlenen bir aralığın içerisinde yer alır. Bu yöntemlerin tekrarlanması ile her zaman kökün gerçek değerinin yaklaşık tahmini yapılır. İterasyon sayısı artıkça gerçek değere daha fazla yaklaşıldığından bu yöntemlere aynı zamanda yakınsak yöntemler de denir.

Açık Yöntemler

- Newton-Raphson
- Secant (Kiriş)
- Tekrarlama Metodu (Fixed Point Iteration Method)

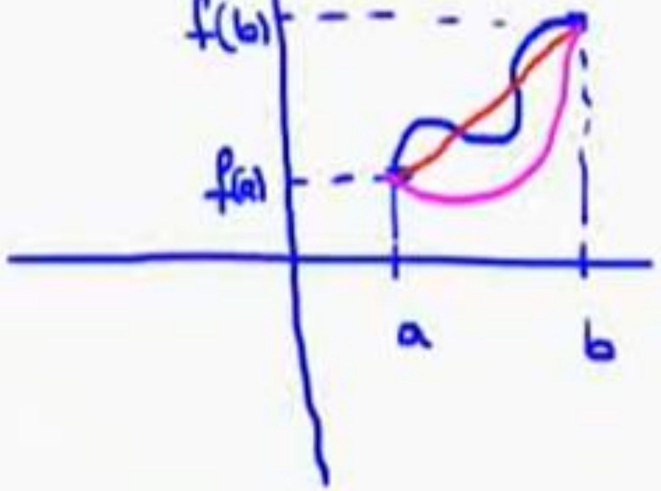
X'in sadece bir tek başlangıç değerine gerek duyulan veya kökü kıskaca almayan iki başlangıç değeri gerektiren formüllerden oluşurlar. Bu yöntemler hesaplama sürecinde bazen ıraksarlar ve gerçek değerden uzaklaşırlar. Ancak, açık yöntemler yakınsadıkları zaman kapalı yöntemlerden daha hızlı çalışırlar.

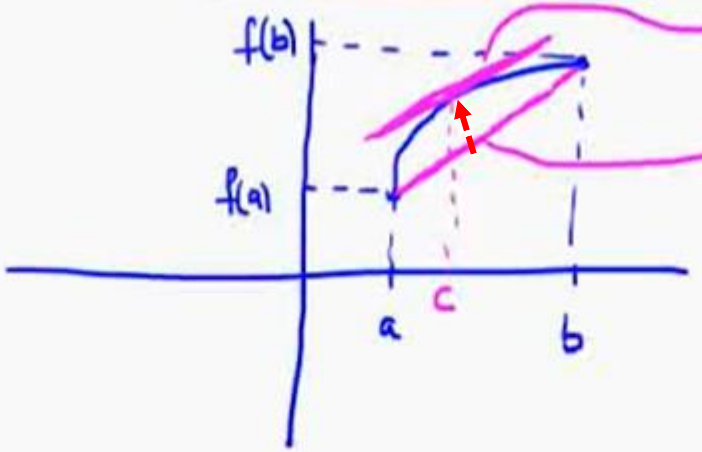
ORTALAMA DEĞER TEOREMİ
(Mean Value Theorem)

__Thm:__ $\boxed{f(x) \text{ fonksiyonu } [a,b] \text{ aralığında sürekli olsun.}}$

$$\text{Ortalama değer} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ c \in [a,b] \end{gathered}}$$



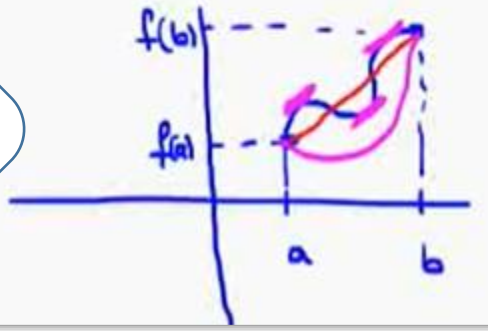


eğimi $= f'(c)$

eğimi $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

3 teğet noktası olduğu için 3 tane c değeri bulunur. C sayısı fonksiyondaki dalgalanma hakkında bize bilgi verir.



Soru: $f(x) = x^2+5$ fonksiyonunun $[1, 5]$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan değerlerini bulunuz.

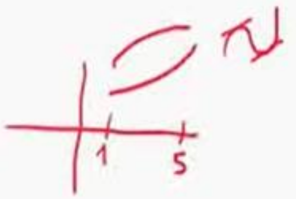
1.adım $f(x)$ fonksiyonu $[1,5]$ aralığında süreklidir.

2.adım ortalama değer $= \dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{30-6}{4} = 6$

$f'(c) = 6$ $\qquad f'(x) = 2x$

$2c = 6$

$c = 3$ $\qquad 3 \in [1,5]$ //



Soru: $f(x) = x^3 + 2x - 5$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan noktaları bulunuz.

1. adım $\quad f(x) = x^3 + 2x - 5$, $[-1, 1]$ aralığında süreklidir.

2. adım $\quad$ ortalama değer $= \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{-2 - (-8)}{2} = 3$

$f'(c) = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$3c^2 + 2 = 3$

$c^2 = \dfrac{1}{3}$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ veya $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in [-1, 1]$ //

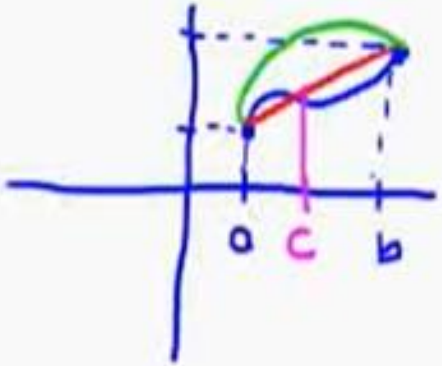
ARA DEĞER TEOREMİ

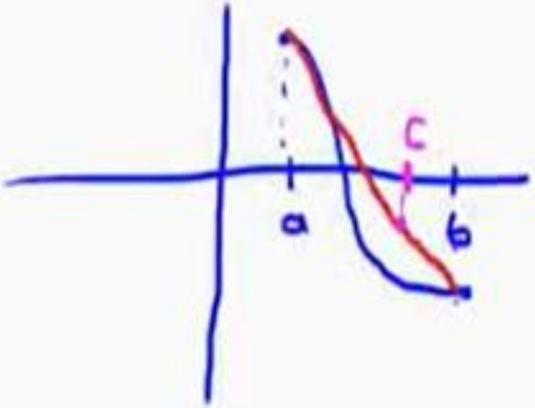
(Intermediate Value Theorem)

Tanım: $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a) \neq f(b)$ ise

$f(a) < f(b)$ $\qquad\qquad$ $f(a) > f(b)$





c = ara değer

$f(a) < f(c) < f(b)$ $\qquad\qquad$ $f(a) > f(c) > f(b)$

Ara Değer Teoremi ile Bir Denklemin Köklerinin Varlığının Hesaplanması

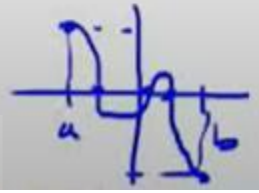
$f(x)$ fonksiyonu $\longrightarrow$ KÖK $f(x)=0$ çıkmasını sağlayan x değerine kök denir.

KURAL: $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a).f(b)<0$ ise

$f(a)$	$f(b)$
$-$	$+$
$+$	$-$

en az 1 tane $[a,b]$ aralığında x değeri vardır $f(x)=0$.



Soru: $x^3-5x+1=0$ fonksiyonunun $[1,3]$ aralığında en az 1 kökü olduğunu ispatlayınız.

1. adım $f(x)=x^3-5x+1$ bu fonksiyon her x reel sayı değeri için süreklidir.

* tanımsızlık yok

* parçalı fonksiyon

$(-\infty, +\infty)$

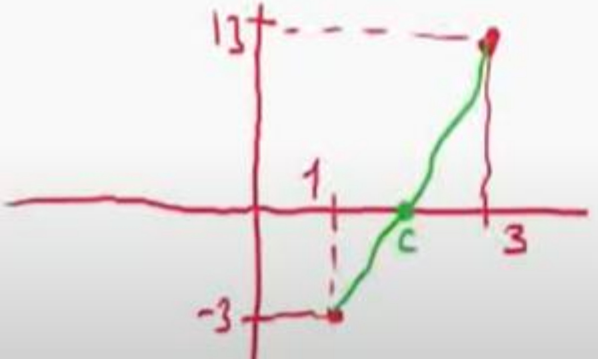
$f(x)=x^3-5x+1$ fonksiyonu $[1,3]$ aralığında süreklidir.

2. adım

$f(1)=1-5+1=-3<0$

$f(3)=27-15+1=13>0$

$f(1).f(3)<0$



$f(x)=0$ $x=c$ var

PARÇALI FONKSİYON

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x>3 \\ x^2+1 , & x \leq 3 \end{cases}$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$$f(4) = 2.4 + 1 = 9$$

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK OLMA ŞARTI

*LIMIT gerekli şart ama yeterli değildir.

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}\ ☆☆$$

SÜREKSİZLİK

Tanımsızlıklarda

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ $\quad f(3) =$ yoktur.

$x=3$ tanımsız

$x=3$ süreksiz

KESİN süreksiz noktalardır.

Parçalı fonksiyonların parçalanma noktası

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>5 \\ x+1, & x\le 5 \end{cases}$$

Süreksizlik olabilir

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 9 \quad \lim_{x\to 5^-} f(x) = 6$

$f(5) = 6$

$f(x) = 2x-1 \longrightarrow$ tanımsız yapan hiçbir x yok + parçalı fonk. değil

$\longrightarrow$ her yerde süreklidir

Durma Koşulları

① Gerçek kök verildiğinde

$$|x - x_n| < \text{Hata}$$

x = gerçek kök

x_n = n. iterasyondaki elde edilen kök

Bağıl hata verilirse

$$\left|\frac{x - x_n}{x}\right| < \text{Bağıl hata}$$

② Gerçek kök verilmediğinde

$$\boxed{\frac{b-a}{2^n} < \text{Hata}}$$

n = iterasyon sayısı

b = n. iterasyondaki üst sınır

a = n. " alt sınır

$|x_{n+1} - x_n| \leq$ hata ****

Kapalı Yöntemler (Bracketing Methods)

- Grafik Yöntemi
- İkiye Bölme - Aralık Yarılama (Bisection) Yöntemi
- Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta/Lineer Interpolasyon) Yöntemi

Grafik Yöntemi

Fonksiyonun kökünü bulmak için:

1. Fonksiyonun değişkenine başlangıç değeri verilir (x_0)
2. x değerleri arasındaki artım miktarı belirlenir (Δx)
3. X_0, fonksiyonda yerine konularak, $f(x_0)$ hesaplanır
4. Bir sonraki x değeri ($x+\Delta x$) alınarak $f(x+\Delta x)$ hesaplanır
5. Bu işlem, hesaplanan son iki fonksiyon değerleri ters işaretli olana kadar tekrarlanır
6. Ters işaretli durum elde edildiğinde ilk iterasyon tamamlanmış olur
7. Bir sonraki iterasyon, ters işaretli sonucu veren iki x değişkenin arasında aynı işlemler tekrarlanır
8. Çünkü, kök bu x değerleri arasında yer almaktadır
9. Her yeni iterasyonda Δx değeri, yarıya bölünerek kullanılır
10. İterasyonların tekrarı, ters işaretli fonksiyon değerini veren x değerleri arasındaki mutlak farkın, verilen hata değerinden küçük eşit oluncaya kadar devam ettirilir

GRAFİK YÖNTEMİ $-1,5$ $\boxed{x=5}$ $x=1$

$f(x) = x^2 - 6x + 5 \qquad x_0 = 1.5 \qquad \Delta x = 0.75$

1. iterasyon $\qquad \varepsilon = 0.0235$

	x	$f(x)$
$+0.75$	1.5	−1.75
$+0.75$	2.25	−3.43
	3	−4
	3.75	−3.43
	4.50	−1.75
	5.25	+1.0625

2. iterasyon $\quad \Delta x = 0.75/2 = 0.375$

	x	$f(x)$
$+0.375$	4.50	−1.75
	4.875	−0.4844
$+\Delta x$	5.25	+1.0625

3. iterasyon $\quad \Delta x = 0.375/2 = 0.1875$

	x	$f(x)$
	4.875	−0.4844
Δx	5.0625	0.2539

$\Delta x = 0.1875/2 = 0.094$

4. iterasyon

	x	$f(x)$
	4.875	−0.4844
Δx	4.969	−0.1230
Δx	5.063	0.2559

$\Delta x = 0.094/2 \cong 0.047$

5. iterasyon

	x	$f(x)$
	4.969	−0.1230
Δx	5.016	0.064

6. iterasyon $\quad \Delta x = 0.047/2 = 0.0235$

	x	$f(x)$
	4.969	−0.1230
Δx	4.9925	−0.0299
Δx	5.016	$\boxed{0.0640}$

$f(x) \cong 0$

$|fark| < \varepsilon \qquad X_{kök} \cong 5$

Videoda anlatımı yapılan grafik yöntemine ait sorunun çözümü.

Kapalı Yöntemler (Bracketing Methods)

- Grafik Yöntemi Yöntemi
- **İkiye Bölme - Aralık Yarılama (Bisection) Yöntemi**
- Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta/Lineer Interpolasyon) Yöntemi

İkiye Bölme - Aralık Yarılama (Bisection)

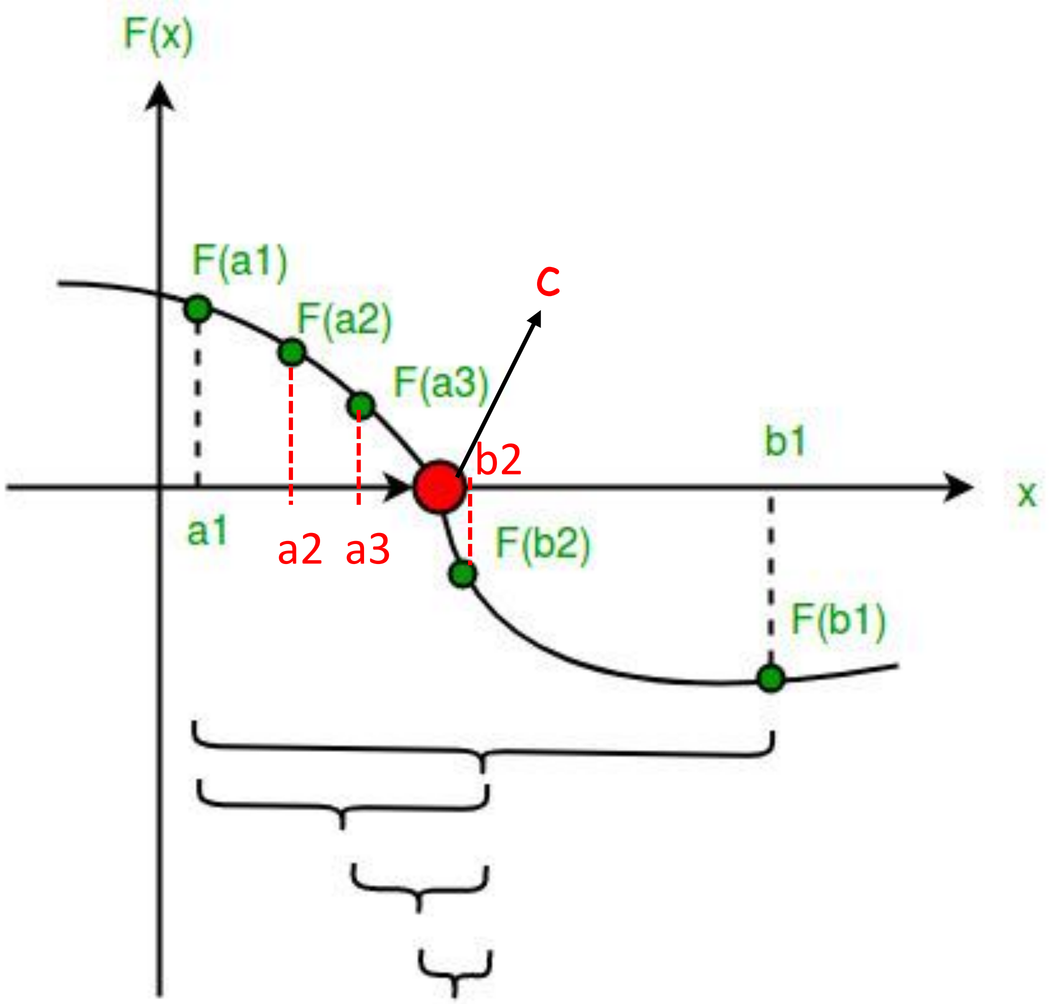
1. Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılır.
2. Kapalı aralık metodudur [a, b]. Kök, bu aralığın içindedir.
3. Bu kapalı aralıkta bir çözüm olduğunu göstermemiz gerekir.

$x^3-7x^2+14x-6=0$ fonksiyonunun [0,1] aralığında bir kökü olduğunu göstermeliyiz.
Kökü bulmadan önce, bu aralıkta kök olduğunu ispat etmek gerekir.

1. Adım $f(x) = x^3-7x^2+14x-6$

Bu fonksiyonu tanımsız yapan bir x değeri yoktur. Bütün reel sayılarda süreklidir.
Bu sebeple [0,1] aralığında süreklidir.
$f(0) = -6$
$f(1) = 2$

$f(0)*f(1) < 0$ ise bu aralıkta en az bir kök vardır.



F(a1) * F(b1) < 0 ise bu aralıkta kök vardır

b2 = (a1+b1)/2

F(a1) * F(b2) < 0 ise bu aralıkta kök vardır

a2 = (a1 + b2)/2

F(a2) * F(b2) < 0 ise bu aralıkta kök vardır

a3 = (a2 + b2)/2

F(a3) * F(b2) < 0 ise bu aralıkta kök vardır

c = (a3 + b2)/2 F(c)=0 veya F(c) ≈ 0

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6 \quad [0,1] \quad Hata = \varepsilon = 0.01$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & - & - & + & + & + \\ 0 & & 0.5 & 0.5625 & 0.625 & 0.75 & 1 \end{array}$$

1. iterasyon $\quad [0,1]$

$f(0) = -6$

$f(1) = 2$

$f(0) * f(1) < 0$

$Hata = \dfrac{1-0}{2^1} < 0.01$ X

$c = \dfrac{1+0}{2} = 0.5 \quad f(0.5) = -0.625$

$f(0.5) * f(1) < 0$

2. iterasyon $\quad [0.5, 1]$

$Hata = \dfrac{1-0.5}{2^2} < 0.01$ X

$f(0.5) = -0.625$

$f(1) = 2$

$c = \dfrac{1+0.5}{2} = 0.75 \quad f(0.75) = 0.9844$

$f(0.5) * f(0.75) < 0$

3. iterasyon $\quad [0.5, 0.75]$

$Hata = \dfrac{0.75-0.5}{2^3} < 0.01$ X

$f(0.5) = -0.625$

$f(0.75) = 0.9844$

$c = \dfrac{0.75+0.5}{2} = 0.625 \quad f(0.625) = 0.2598$

$f(0.5) * f(0.625) < 0$

4. iterasyon $\quad [0.5, 0.625]$

$f(0.5) = -0.625$

$f(0.625) = 0.2598$

$c = \dfrac{0.5+0.625}{2} = 0.5625 \quad f(0.5625) = -0.1618$

$f(0.5625) * f(0.625) < 0$

$Hata = \dfrac{0.625-0.5}{2^4} < 0.01$ ✓

$X_{kök} \cong 0.5625$

Videoda anlatımı yapılan yarıya bölme-bisection yöntemine ait sorunun çözümü.

Kapalı Yöntemler (Bracketing Methods)

- Grafik Yöntemi Yöntemi
- İkiye Bölme - Aralık Yarılama (Bisection) Yöntemi
- **Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta/Lineer Interpolasyon) Yöntemi**

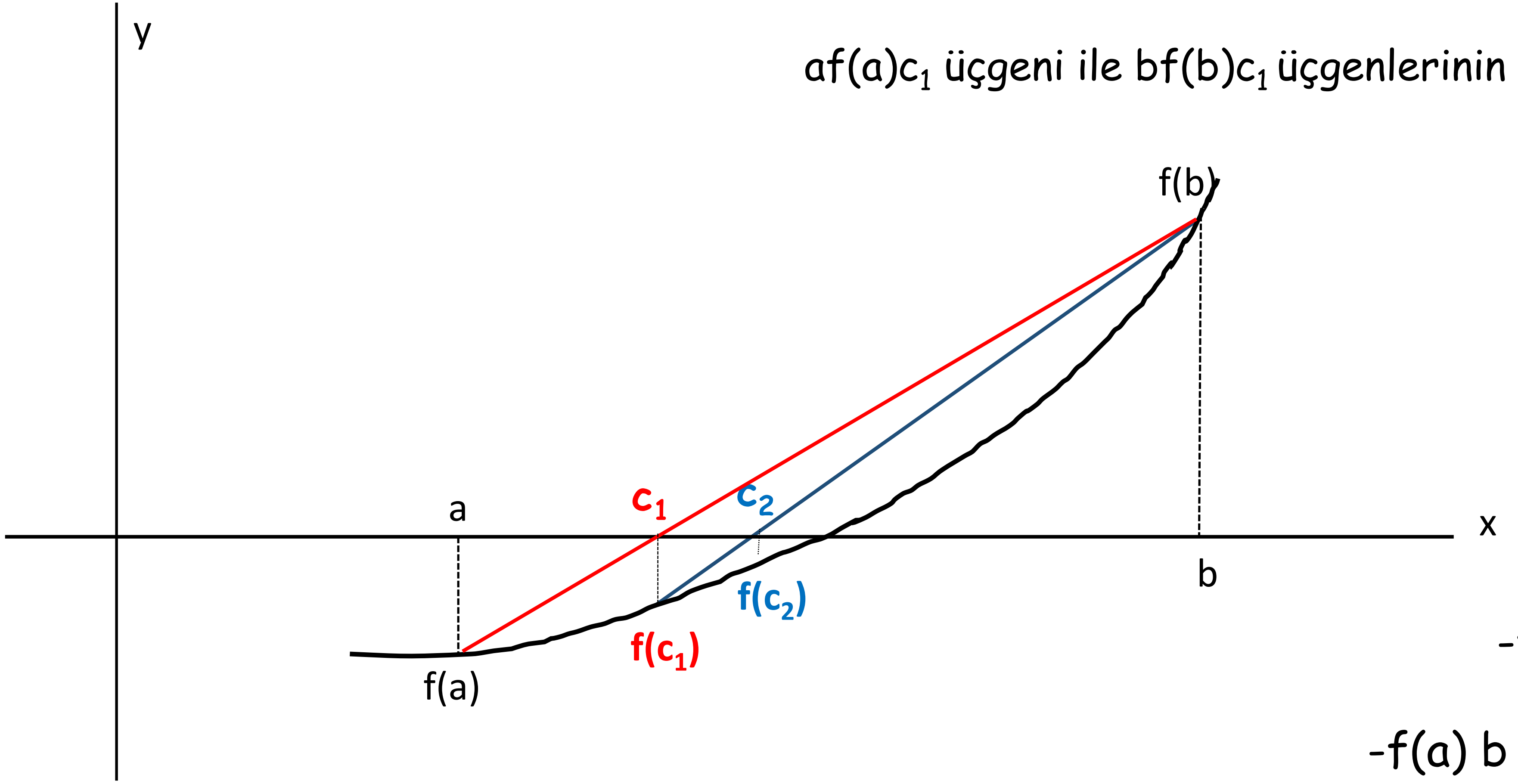
Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta/Lineer Interpolasyon)

1. Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılır.
2. Kapalı aralık metodudur [a, b]. Kök, bu aralığın içindedir.
3. Bu kapalı aralıkta bir çözüm olduğunu göstermemiz gerekir.
4. Eğrinin bir doğruyla yer değiştirmesi sonucunda, kökün konumunun yanlış belirlenmesi nedeniyle, latince "yanlış nokta" anlamında olan «**Regula Falsi**» olarak adlandırılır.
5. Regula Falsi yönteminde köke yakınsama yavaş olmasına rağmen, mutlaka yakınsama olduğundan «Yarıya Bölme-Bisection» yönteminden daha hızlı çalışır.

İşlem Adımları

1. f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığında kökü hesaplanmak istensin. [a, f(a)] ve [b, f(b)] noktaları arasına bir kiriş (doğru) çizilir.
2. Doğrunun x eksenini kestiği noktanın (c) alt ve üst kısmında iki benzer üçgen oluşur.
3. İki üçgenin benzerliğinden x eksenini kestiği nokta (c) hesaplanır.
4. İstenilen hassasiyet (hata) sağlanmadıysa, [c , f(c)] ve [b, f(b)] veya [c , f(c)] ve [a, f(a)] noktaları için tekrar edilir.

$af(a)c_1$ üçgeni ile $bf(b)c_1$ üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak



$$\frac{-f(a)}{c_1-a} = \frac{f(b)}{b-c_1}$$

$$-f(a)\,(b-c_1) = f(b)\,(c_1-a)$$

$$-f(a)\,b + f(a)\,c_1 = f(b)\,c_1 - f(b)\,a$$

$$f(a)\,c_1 - f(b)\,c_1 = f(a)\,b - f(b)\,a$$

$$c_1\,(f(a) - f(b)) = f(a)\,b - f(b)\,a$$

$$\boxed{c_1 = \frac{b * f(a) - a * f(b)}{f(a) - f(b)}}$$

f(a)*f(b) < 0 ise c=(b*f(a)-a*f(b)) / (f(a)-f(b)

f(a)*f (c) < 0 ise b=c

f(a)*f (c) > 0 ise a=c

f(a)*f (b) = 0 a veya b den biri yada herikisi de kök olabilir.

Örnek : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ fonksiyonunun en az bir kökünü [2,3] aralığında 0,01 hata ile bulunuz.

1.adım $f(x)=x^3-2x^2-5$ fonksiyonu $[\overset{a}{2},\overset{b}{3}]$ aralığında süreklidir.

$$f(2) = 8 - 8 - 5 = -5$$

$$f(3) = 27 - 18 - 5 = 4$$

$f(2) \cdot f(3) < 0$ olduğunda bu aralıkta kesinlikle kök vardır.

2.adım

Hata $\frac{3-2,556}{2^2} < 0,01$

$0,111 < 0,01$ X

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{2 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2)}{f(3) - f(2)} = \frac{8+15}{4+5} = \frac{23}{9} = 2,556$$

$f(2,556) = -1,36757384$ Kök $\Rightarrow$ [2,556 , 3] arasındadır

$f(2,556) = -1,367576384$ Kök $\Rightarrow$ $[2,556, 3]$ arasındadır

3.adım

$a = 2,556$ $(-)$ $b = 3$ $(+)$

$f(2,669) = -0,234137691$

$$x_2 = \frac{2,556 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2,556)}{f(3) - f(2,556)} = 2,669124411$$

Hata $\frac{3-2,669124411}{2^3} < 0,01$

$0,041359 < 0,01$ X

$f(3) = 4$

Hata $\frac{3-2,687318278}{2^4} < 0,01$

$0,019542 < 0,01$

4.adım

$a = 2,669$ $(-)$ $b = 3$ $(+)$

$x_{kök} \approx 2,69$

$$x_3 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{2,669 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2,669)}{f(3) - f(2,669)} = 2,687318278$$

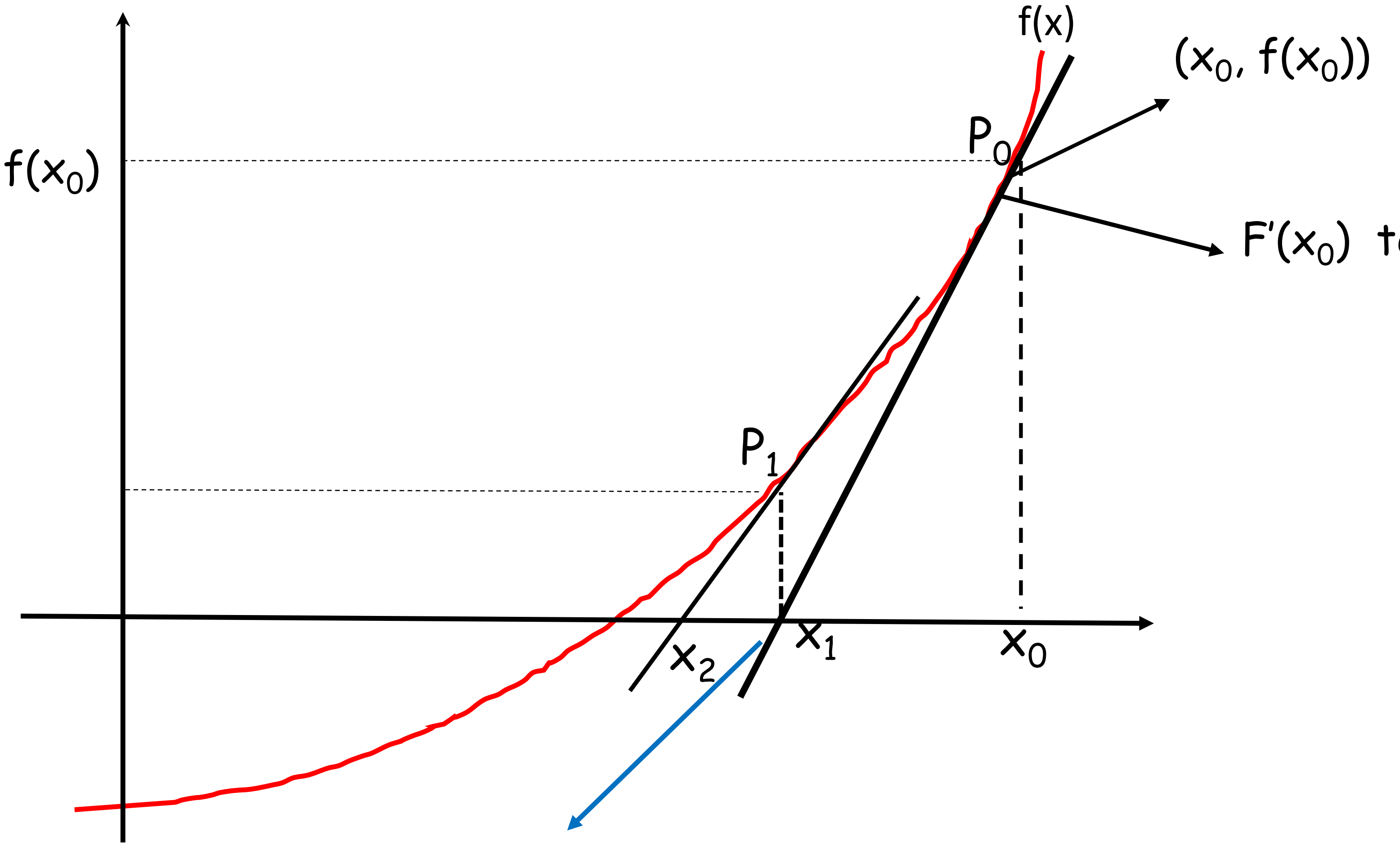
$f(2,6873) = -0,0366$

Açık Yöntemler

- **Newton-Raphson Yöntemi**
- Secant (Kiriş) Yöntemi
- Fixed Point Iteration Method (Tekrarlama Metodu)

Newton Raphson Yöntemi

1. Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılır.
2. Açık aralık metodudur.
3. Yine [a, b] aralığı verilir ama kökü bulma işlemi sırasında hesaplanan değerler bu aralığına dışına çıkabilir.
4. Bazen sonuçlar ıraksayabilir ancak yakınsadığı zaman da kökü en hızlı şekilde bulan bir yöntemdir.
5. Köke, türev ile yaklaşım mantığını kullanır.
6. İşleme bir başlangıç değeri ile başlanır. Başlangıç değeri verilir, verilmez ise en doğrusu küçük olan aralık değerinden başlamaktır.



Teğet doğrusunun x eksenini
kestiği nokta bir sonraki **kök** değeridir

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Formülü genelleştirirsek $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(xk)}{f'(xk)}$

Durma Koşulları

1) Gerçek kök verilmişse $= p$

$|p - x_n| <$ **Hata**

2) Gerçek kök verilmemişse

$|x_{n+1} - x_n| <$ **Hata**

SORU: $x^3-7x^2+14x-6=0$ denkleminin newton raphson metodunu kullanarak $[0,1]$ aralığında 10^{-6} dan az hatayla bir kökünü bulunuz.

1. adım: $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$

$f'(x)=3x^2-14x+14$

Soruda başlangıç değeri verilmeyebilir.
İlk sınırın alt sınır alınması önerilir. Son sınır alındığında Newton Raphson ıraksayabilir. Tam terside olabilir. $x_0=0$

2. adım $n=0$ için

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1=0-\frac{f(0)}{f'(0)}$$

$$x_1=-\frac{-6}{14}=\frac{3}{7}=0,42857142\ldots$$

Hata $|0,42857142-0|<10^{-6}$ X

$n=1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,42857\ldots - \frac{f(0,42857\ldots)}{f'(0,42857\ldots)}$$

$$= 0,42857\ldots - \frac{-1,20699\ldots}{8,55402\ldots}$$

Hata $|0,56972383 - 0,42857142| < 10^{-6}$ X

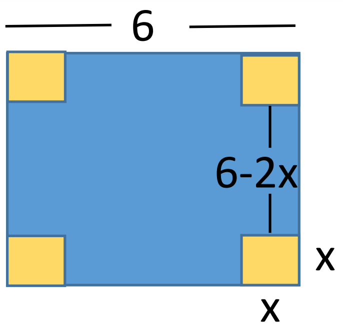
$$\boxed{x_2 = 0,56972383\ldots}$$

$n=2$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = 0,56\ldots - \frac{f(0,56\ldots)}{f'(0,56\ldots)}$$

İterasyon sayısı ardışık iki kök değerinin mutlak değerce farkı hata miktarından küçük oluncaya kadar devam ettirilir.

Soru
Kenar uzunluğu a olan (a=6) bir kare dört köşesinden x uzunluğunda kesilerek üstü açık bir kare haline getirilmektedir. Bu kutunun hacmini maksimum yapan x değerini Newton Raphson Yöntemi ile bulunuz. Başlangıç değerini 0, kabul edilebilir hatayı da 0,001 olarak alınız.



$V = (6 - 2x)^2 * x$

$V = (36 - 24x + 4x^2)\, x$

$V = 4x^3 - 24\, x^2 + 36\, x$

$V = x^3 - 6x^2 + 9x$

Bir sistemin minimum, maksimum noktalarını bulmak için türevi alınır ve 0 eşitlenir.

$V = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$V' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ köklerini bulmak için Newton Raphson kullanılacak

$f(x)' = 2x - 4$

x_k	X_{k+1}
0	0 + ¾ = 0,75
0,75	0,75 – (0,5625 / -2,5) = 0,975
0,975	0,975 – (0,050625 / -2,05) = 0,9996
0,9996	0,9996 – (9,903 10^{-4} / - 2.00008) = 1,000095

$x_{k+1} = 1$ için $V = (6 - 2 * 1)^2 * 1 = 16\ br^3$

Soru
Newton Raphson yönteminin formülünü Taylor Serisinden yararlanarak çıkarabilir miyiz?

$f(x) = 0$
$h = x_1 - x_0$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h / 1! + f''(x_0)\, h^2 / 2! + f'''(x_0)\, h^3/3! + \ldots$

İlk iki terimi alacak olursak…

$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) / 1!$

$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) / 1! = 0$

$f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = - f(x_0)$

$(x_1 - x_0) = - f(x_0) / f'(x_0)$

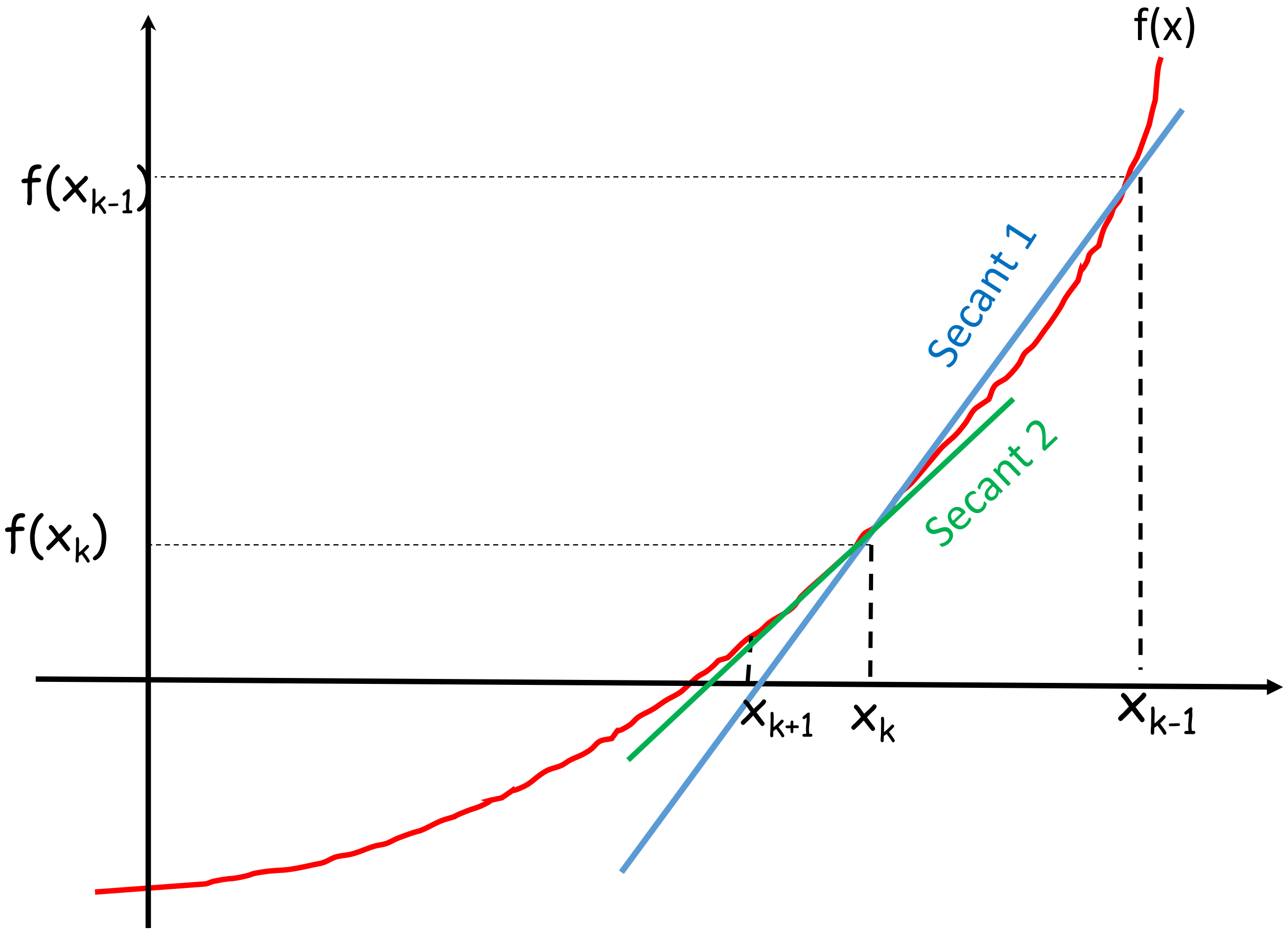
$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$

Açık Yöntemler

- Newton-Raphson Yöntemi
- **Secant (Kiriş) Yöntemi**
- Tekrarlama Metodu (Fixed Point Iteration Method)

Secant (Kiriş) Yöntemi

1. Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılır.
2. Açık aralık metodudur.
3. Newton Raphson yönteminde fonksiyonun türevinde yaşanan zorluktan dolayı ihtiyaç duyulmuştur.
4. $f'(x_k)$'nın yerine, $f(x)$ fonksiyonu üzerinde birbirine yakın iki başlangıç noktası seçilip bunlardan elde edilen eğim ifadesinin konulması fikrine dayanır.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(xk)}{f'(xk)}$$

- $f'(x_k)$ türev ifadesi yerine fonksiyonun x_k noktasındaki teğetin eğim değeri konulacaktır.
- Fonksiyonun x_k noktasındaki teğetin eğimini bulmak için x_k noktasına yakın bir değer alınarak (x_{k-1}) bu iki noktanın fonksiyondaki değerleri bir doğru ile birleştirilir.
- x_k noktasındaki teğetin eğimi

$$f'(x_k) = f(x_{k-1})-f(x_k) \,/\, (x_{k-1} - x_k)$$

- Bulunan eğim, Newton Raphson formülündeki türevin yerine konulur.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(xk)}{f(xk_{-1})-f(xk) \,/\, (xk_{-1} - x_k)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{(xk_{-1} - x_k)\, f(xk)}{f(xk_{-1}) - f(xk)}$$

SORU

Kiriş metodunu kullanarak $f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2x - 10$ fonksiyonunun kökünü hesaplayınız. Başlangıç değeri olarak $x_{-1} = 10$ ve $x_0 = 5$ kullanınız.

$$X_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n).[x_{n-1} - x_n]}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Sin(5) yazabilmek için hesap makinesi radyanda olmalıdır. Aksi şartlarda radyana çevirmek lazım.

$$\begin{array}{cc} \pi & 180^\circ \\ 5 & x \end{array}$$

<u>1. iterasyon:</u> $n=0$

$$X_1 = X_0 - \frac{f(x_0).[x_{-1} - x_0]}{f(x_{-1}) - f(x_0)} = 5 - \frac{f(5).[10-5]}{f(10) - f(5)}$$

$$= 4,931924$$

$$f(5) = \frac{e^5}{5} - \frac{\sin 5 \; {}^{\nearrow \frac{900}{\pi}}}{25} + \cancel{10} - \cancel{10} = 29,7209\ldots$$

$$f(10) = \frac{e^{10}}{10} - \frac{\sin 10}{100} + 20 - 10 = \ldots$$

2. İterasyon:

$n=1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1).[x_0 - x_1]}{f(x_0) - f(x_1)} = 4,931924 - \frac{f(4,93..).[5 - 4,93..]}{f(5) - f(4,93..)}$$

$$= 3,813366$$

3. iterasyon

$n=2$

$\boxed{Kök = 2,543009}$

$x_3 = 3,234529$

$x_4 = 2,754669$

$x_5 = 2,578048$

$x_6 = 2,544745$

$x_7 = 2,543023$

$x_8 = 2,543009$

$x_9 = 2,543009$

10^{-3} hata ile kökü bulunuz. (daha küçük)

$f(2,543009) = 0$ //

Açık Yöntemler

- Newton-Raphson Yöntemi
- Secant (Kiriş) Yöntemi
- **Tekrarlama Metodu (Fixed Point Iteration Method)**

Tekrarlama Metodu (Fixed Point Iteration Method)

1. Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılır.
2. Kökü bulunacak olan f(x) fonksiyonu x değişkeni sol tarafta tek kalacak şekilde x=g(x) olacak şekilde parçalanır.
3. Bu şartı sağlayan birden fazla x=g(x) çifti olabilir. Hangilerinin seçilerek çözüme gidileceğini bazı şartların gerçekleşme durumu belirler.
4. Çözülecek denklem sayısı bir iken ikiye çıkarılır ama denklemler daha basitleştirilmiş olur.
5. Çözüme başlamadan önce f(x)=0 fonksiyonu x=g(x) haline getirilir.
6. g(x) in [a,b] aralığında bazı şartları sağlayıp, sağlamadığı kontrol edilir.
7. Şartlar sağlanıyorsa başlangıç x değeri, g(x) fonksiyonunda yerine konularak yeni x değeri elde edilir ve işlemler durma noktasına kadar devam ettirilir.

$f(x) = 0 \quad x?$

$x = g(x)$

$f(x) = x - g(x) = 0$

Ör

$\sin x + x + 1 = 0$

$x = -\sin x - 1$

Ör

$x^2 - 9x - 10 = 0$

$x^2 = 9x + 10$

$x = (9x + 10)^{1/2}$

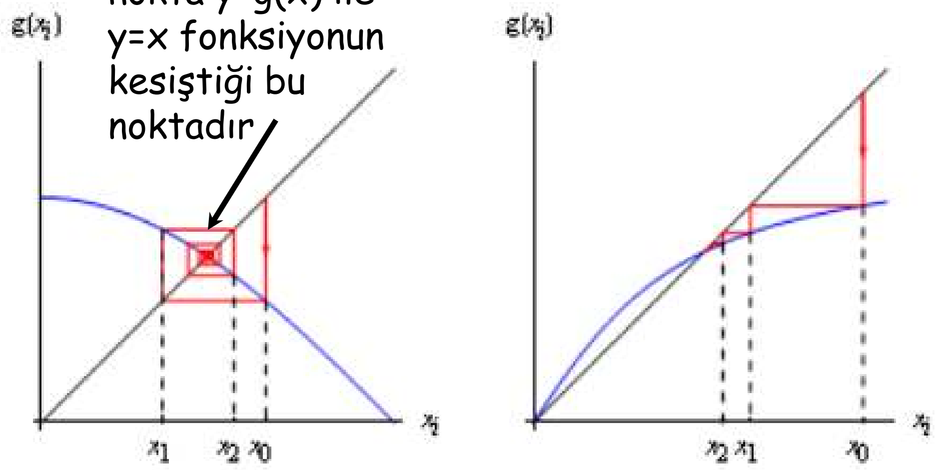
Ör

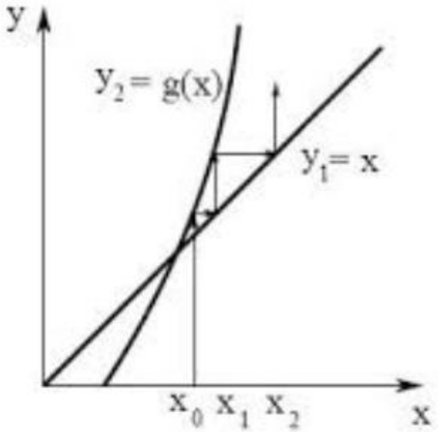
$x^2 - 9x - 10 = 0$

$x^2 - 10 = 9x$

$x = (x^2 - 10) / 9$

f(x)=0 yapan nokta y=g(x) ile y=x fonksiyonun kesiştiği bu noktadır





İşlem adımları

1- $f(x) = 0 \quad x = g(x)$ haline getirilir

2- $g(x)$ [a, b] için belli şartları sağlamalıdır *****

3- Şart 2 sağlanmış ise denklemin köklerinin hesaplama işlemini başlanır

$x_{i+1} = g(x_i)$

$x_{i+2} = g(x_{i+1})$

$x_{i+3} = g(x_{i+2})$

…………………

$f(x) = 0$

$[a,b]$

Tekrarlama metodu :

1. adım

$x = g(x)$ oluşturulmalı

$[a,b]$

2.adım $\boxed{f(a) . f(b) < 0}$ sağlanmalı

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir olmalı.

$|g'(a)| < 1$ ve $|g'(b)| < 1$

bu iki şart sağlanırsa , $[a,b]$ aralığından her nokta seçilerek $x = g(x)$ tekrarlama metodu için kullanılabilir.

Bu şart sağlanmaz ise !!!

1- Yeni x=g(x) aranır veya

2- $x_i \in [a,b]$ $0 < \left|\frac{g(xi)-g(xi+1)}{xi-x\,i+1}\right| < 1$

SORU: $\sin x + x - 1 = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığında yaklaşık kökünü bulunuz.

* $f(x) = \sin x + x - 1$

$[0,1]$

Tekrarlama metodu

1.adım

$x = g(x)$ elde edilmeli

$x = -\sin x + 1$

$x = g(x) = -\sin x + 1$

$g(x) = -\sin x + 1$

2.adım $\boxed{x = -\sin x + 1}$ tekrarlama metodu için uygun mu?

f(0) = -1   f(1) = 0,84…   f(0)*f(1) < 0   f(x) g(x) [0, 1] türevlenebilir

$g'(x) = -\cos x$

$|g'(0)| = 1 < 1$ X

$|g'(1)| = 0{,}54 < 1$ ✓

[0,1] aralığındaki her nokta başlangıç olarak seçilemez.

$x_i = 1$ ✓

$g(x) = -\sin x + 1$

$$0 < \left| \frac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \right| < 1$$

$$\left| \frac{g(1) - g(0{,}158529015)}{1 - 0{,}158529015} \right|$$

$$0 < \left| \frac{0{,}683633798}{0{,}842} \right| < 1$$

Aralıktan seçmiş olduğumuz bir x değeri için ikinci kontrolü yaptık. Şart sağlandığı için $x_0 = 1$ başlangıç değeri alınarak devam edilebilir.

$\underline{x_0 = 1}$ $\longrightarrow$ $x_1 = 0{,}158529015$ $\longrightarrow$ bulunan değer sürekli g(x) e konularak bir sonraki kök adayı bulunur.

$x_2 = 0{,}842134161$

$g(x) = -\sin x + 1$

$x_3 = 0{,}253934103$

$x_4 =$

⋮

Tekrarlama Metodunda Durma Koşulları

(Stopping Conditions for Fixed Point Iteration Method)

$x^5 + x - 3 = 0 \quad , \quad [1,3]$

1.adım $\quad f(x) = x^5 + x - 3$

$f(1) \cdot f(3) < 0$ ✓ $\quad$ Bu aralıkta kök var.

2.adım $\quad x = g(x)$ haline getiririz.

$\boxed{x = 3 - x^5}$

$g(x) = 3 - x^5$

veya

$\boxed{x = \sqrt[5]{3 - x}}$

$g(x) = \sqrt[5]{3 - x}$

3.adım $\quad x = g(x)$ uygun mu test edilir.

UYGUN OLDUĞUNU İSPATLADIK DİYELİM

4. adım $\quad x_{i+1} = g(x_i) \quad x_0 = ? \xrightarrow{\epsilon} [1,3]$

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$x_3 = g(x_2)$

$x_4 = g(x_4)$

Kökü 10^{-3} den az hata ile bulmak isteyelim

Durma Koşulları

1. durum

N iterasyon yapın.

x_N = kök kabul ederiz.

2. durum

p = gerçek kök

$|p - x_{i+1}| < \text{Tolerans}$ (10^{-3})

Dururuz.

x_{i+1} = kökümüz //

3. durum

gerçek kök verilmez ise

$|x_{i+1} - x_i| < TOL.$

dururuz.

Soru : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun köklerini $x_0=4$ başlangıç noktası ve 0,005 hata ile bulunuz.

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x^2 = 2x + 3$
$x = (2x + 3)^{½}$

$g(x) = (2x + 3)^{½}$

$g(x_i)$	$g(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
4	3,316	0,684
3,316	3,104	0,212
3,104	3,034	0,07
3,034	3,011	0,023
3,011	3,004	0,007
3,004	3,001	0,003

0,003 < HATA $x_{kök} = 3{,}001$

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x^2 - 2x = 3$
$x (x - 2) = 3$
$x = 3 / (x-2)$

$g(x) = 3 / (x-2)$

$g(x_i)$	$g(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
4	1,5	2,5
1,5	-6	7,5
-6	-0,375	5,625
-0,375	-1,29032	0,91532
-1,29032	-0,91176	0,37856
-0,91176	-1,03030	0,11854
-1,03030	-0,98999	0,04031
-0,98999	-1,00335	0,0133
-1,00335	-0,99888	0,00446
-0,99888	-1,00037	0,00149

0,001 < HATA $x_{kök} = -1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$2x = x^2 - 3$
$x = (x^2 - 3)/ 2$

$g(x) = (x^2 - 3)/ 2$

$g(x_i)$	$g(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
4	6,5	2,5
6,5	19,625	13,125
19,625	191,07031	171,44531
191,07031	18252,43216	18061,361

IRAKSIYOR - ŞART SAĞLANMIYOR

$1 > |g'(x0)|$

Kaynaklar

(www.buders.com)
Ders kitapları