Olasılıksal Robotik

Dr. Öğr. Üyesi Erkan Uslu

3

Temel Kalkülüs

- x=a noktasında sonsuz türevlenebilir f fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f(x)_{x=a} = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x)_{x=a} \approx f(a) + f^{'}(a)(x-a)$$

Temel Kalkülüs

- (x,y)=(a,b) noktasında sonsuz türevlenebilir iki değişkenli f fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f(x,y)_{x=a,y=b} \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- Sistem modeli

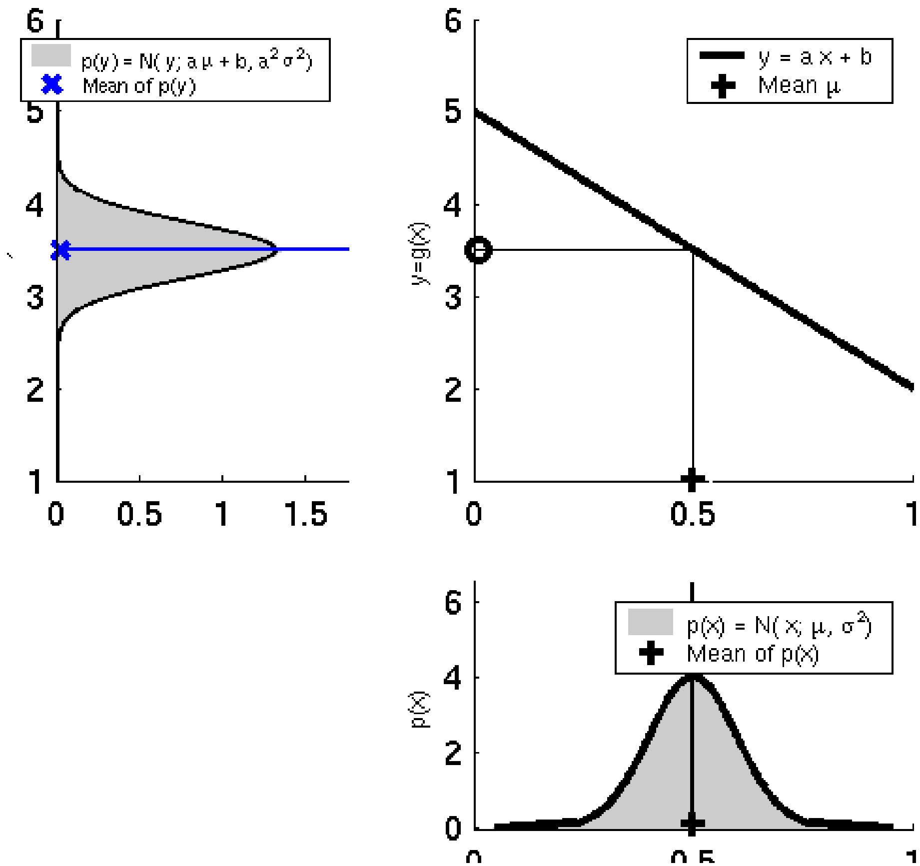
$$x_t = g\left(x_{t-1}, u_t\right)$$
$$z_t = h(x_t)$$

g ve h x ve u'ya göre
doğrusal ise Kalman Filtresi

g ve h x ve u'ya göre
doğrusal değilse EKF

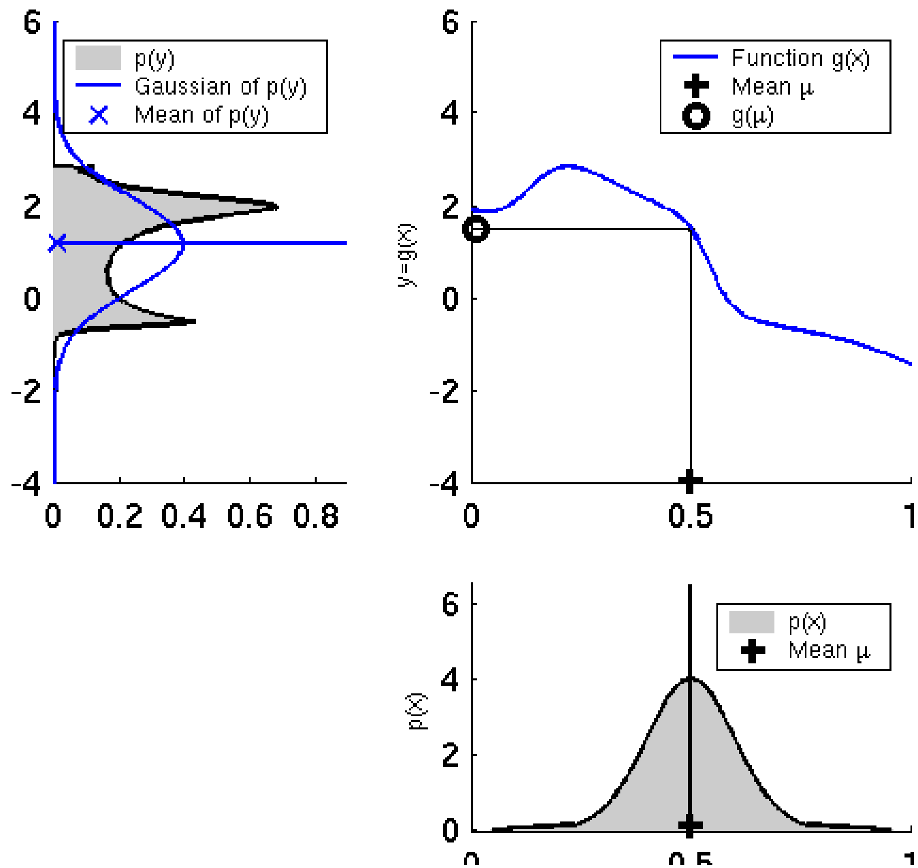
Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- Doğrusallık sonucu



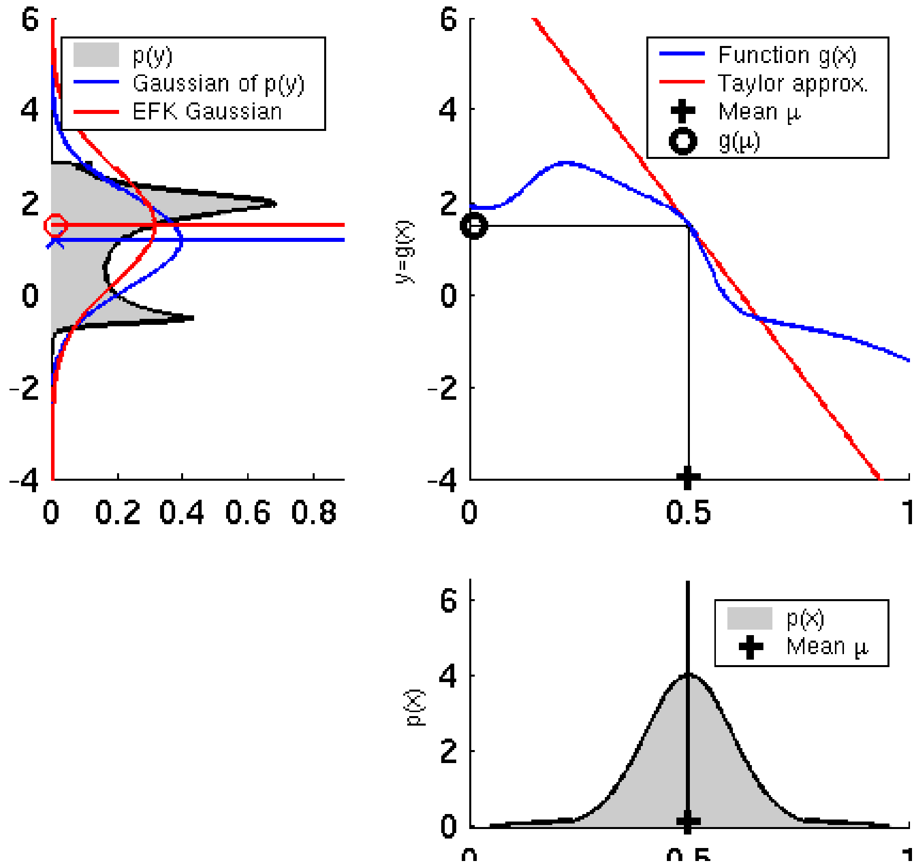
Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- Doğrusal olmayan sistem modeli sonucu



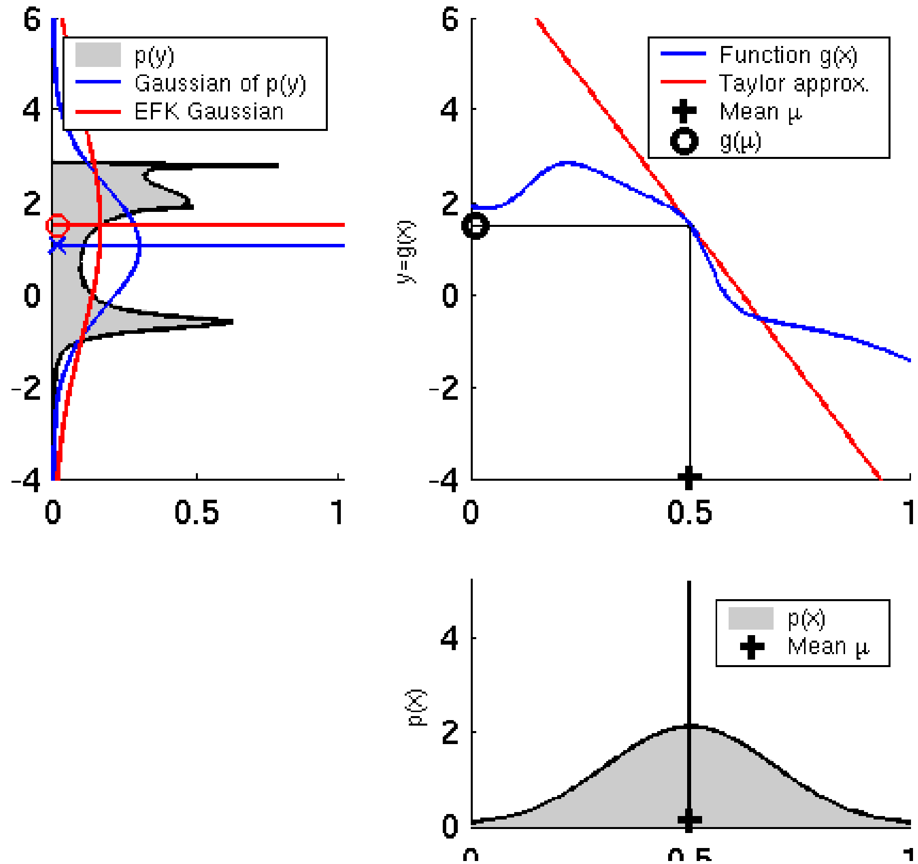
Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- EKF ile doğrusallaştırma



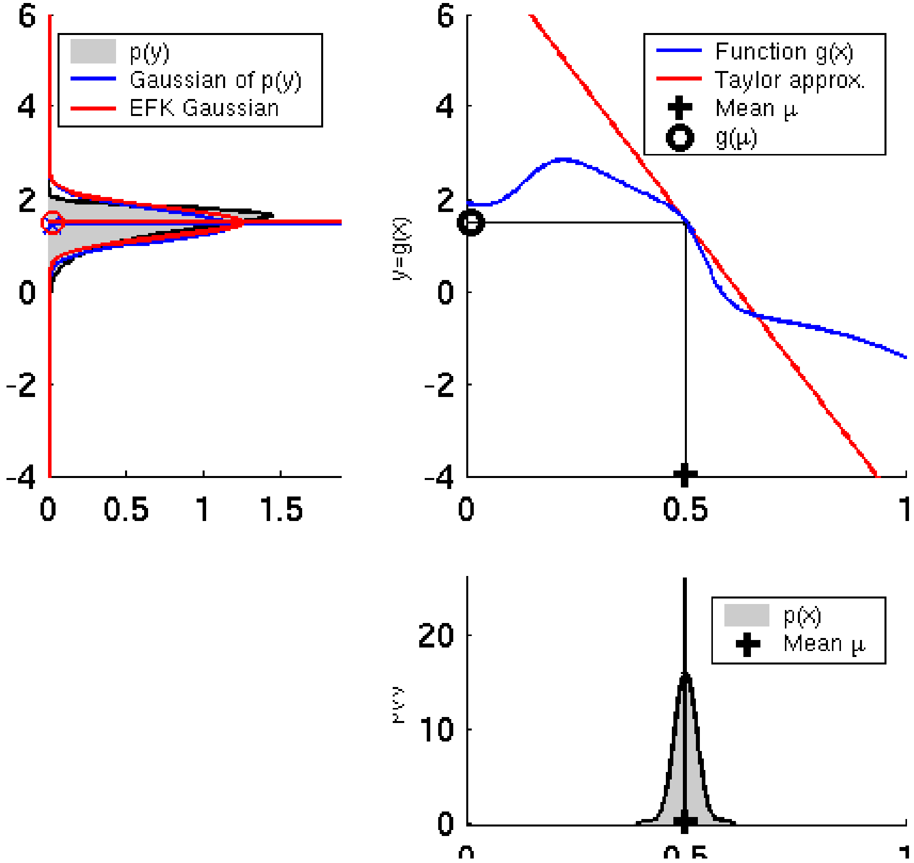
Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- EKF ile doğrusallaştırma



Genişletilmiş Kalman Filtresi
Extendet Kalman Filter - EKF

- EKF ile doğrusallaştırma



EKF

- **Prediction:**

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \left.\frac{\partial g(u_t, x_{t-1})}{\partial x_{t-1}}\right|_{x_{t-1}=\mu_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \left(x_{t-1} - \mu_{t-1}\right)$$

- **Correction:**

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \left.\frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t}\right|_{x_t=\bar{\mu}_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t \left(x_t - \bar{\mu}_t\right)$$

Temel Kalkülüs – Jacobian Matris

- Vektör değerli bir fonksiyon için

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{g}\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = \begin{pmatrix} g_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \\ g_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \\ \vdots \\ g_m\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \end{pmatrix}$$

Temel Kalkülüs – Jacobian Matris

- Jacobian matris nxm boyutlarında elde edilir

$$\mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Temel Kalkülüs – Jacobian Matris

- Jacobian matris: skalar bir fonksiyonun gradyen'inin genelleştirilmiş halidir
- Vektör değerli fonksiyonun verilen bir noktadaki teğet düzleminin yönelimini verir
- EKF'de de çok boyutlu g ve h fonksiyonları için Jacobian hesaplanmalıdır

EKF Algoritması

1. **Extended_Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2. **Prediction:**
3. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$
4. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$

5. **Correction:**
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - h(\bar{\mu}_t))$
8. $\Sigma_t = (I - K_t H_t)\bar{\Sigma}_t$

9. **Return** μ_t, Σ_t

$$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}$$

EKF Algoritması

1. **Extended_Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

Kalman Filtresi Karşılıkları

2. **Prediction:**
3. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$ ← $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$ ← $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$

5. **Correction:**
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$ ← $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$ ← $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$ ← $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$

9. **Return** μ_t, Σ_t

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} \qquad G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

Tek Değişkenli EKF - Örnek

- Fiziki modeli aşağıdaki gibi olan sistem için ilk tahmin ve ölçüler verildiği gibidir. EKF ile durum değişkenin tahminini yürütünüz.

$$\bar{x}_t = x_{t-1}^{1.2}$$

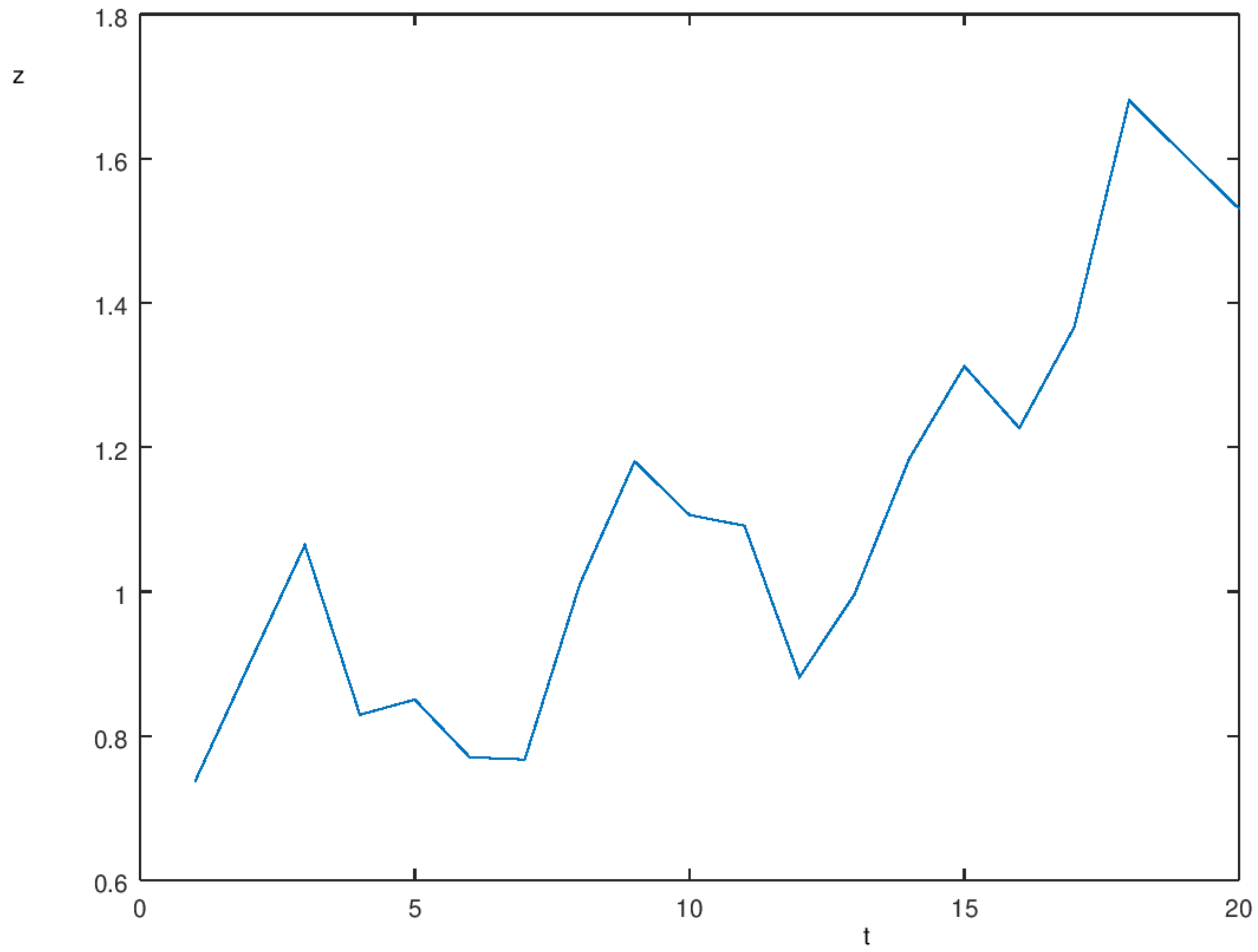
$$z_t = tan^{-1}\left(\bar{x}_t\right)$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\sigma_0^2 = 5$$

z ölçümleri				
1	2	3	4	5
0.7369	0.90162	1.0645	0.82941	0.85031
6	7	8	9	10
0.77043	0.76732	1.00957	1.18037	1.10605
11	12	13	14	15
1.09124	0.88138	0.99588	1.18426	1.31232
16	17	18	19	20
1.22655	1.36629	1.68047	1.60503	1.53051

Ölçüm - z



EKF Denklemleri

$$\overline{\mu}_t = \left(\mu_{t-1}\right)^{1.2}$$

$$\overline{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$$

$$G_t = \left.\frac{\partial g(u_t, x_{t-1})}{\partial x_{t-1}}\right|_{x_{t-1}=\mu_{t-1}}$$

$$= 1.2\left(\mu_{t-1}\right)^{0.2}$$

$$K_t = \overline{\Sigma}_t H_t^T \left(H_t \overline{\Sigma}_t H_t^T + Q_t\right)^{-1}$$

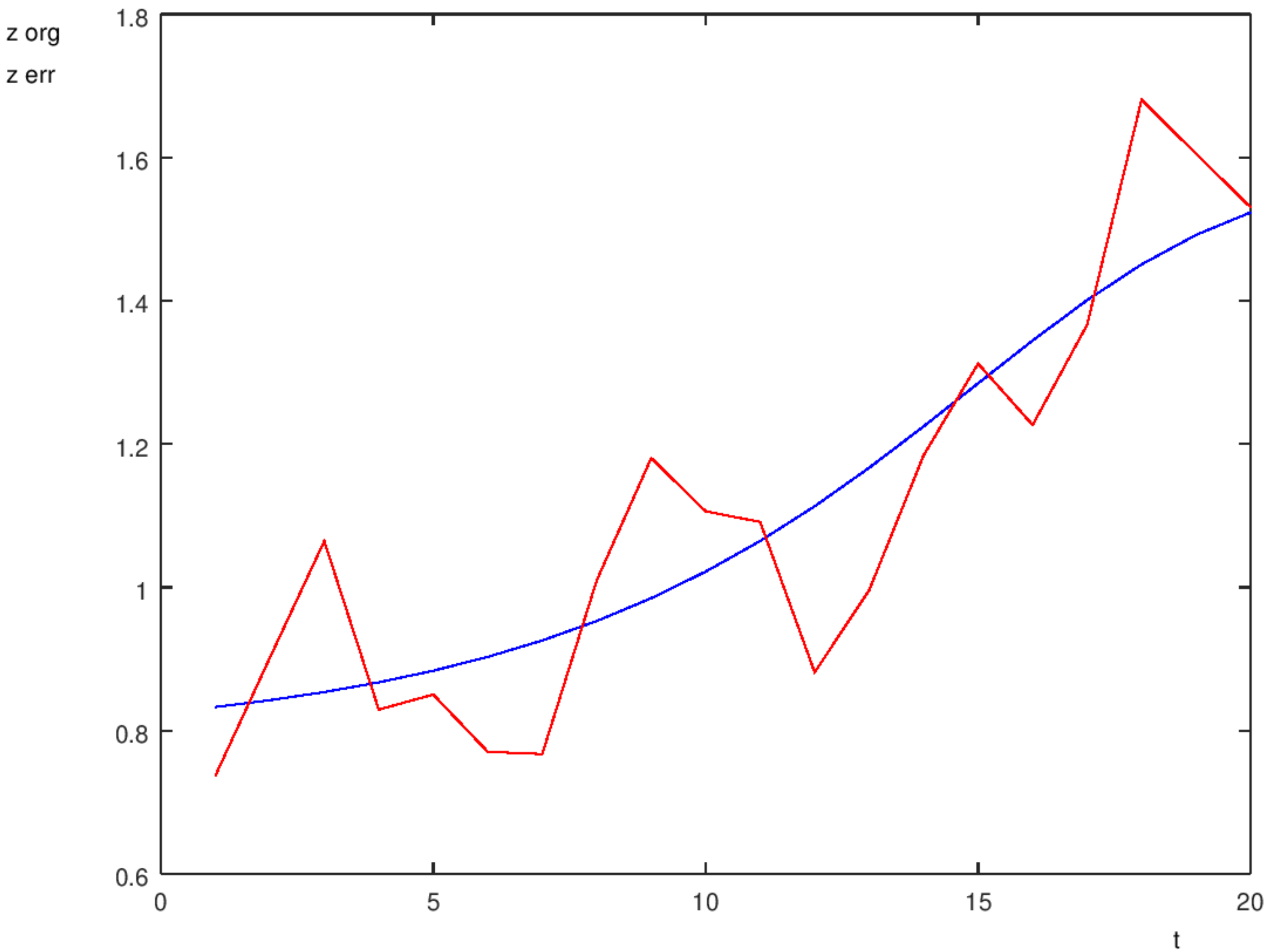
$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t\left(z_t - h\left(\overline{\mu}_t\right)\right)$$

$$\Sigma_t = \left(I - K_t H_t\right)\overline{\Sigma}_t$$

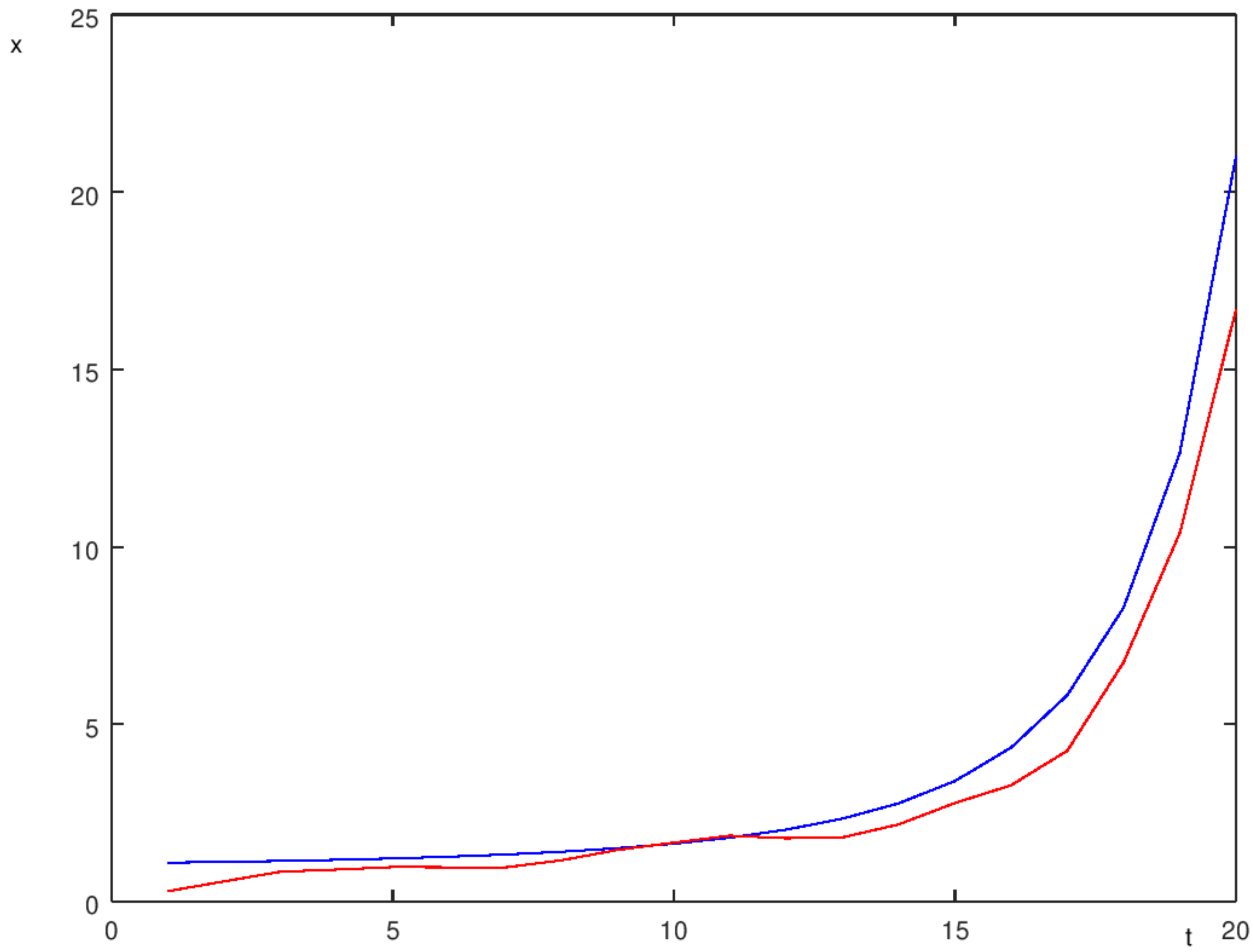
$$H_t = \left.\frac{\partial h(\overline{x}_t)}{\partial \overline{x}_t}\right|_{\overline{x}_t=\overline{\mu}_t}$$

$$= \frac{1}{1 + \overline{\mu}_t{}^2}$$

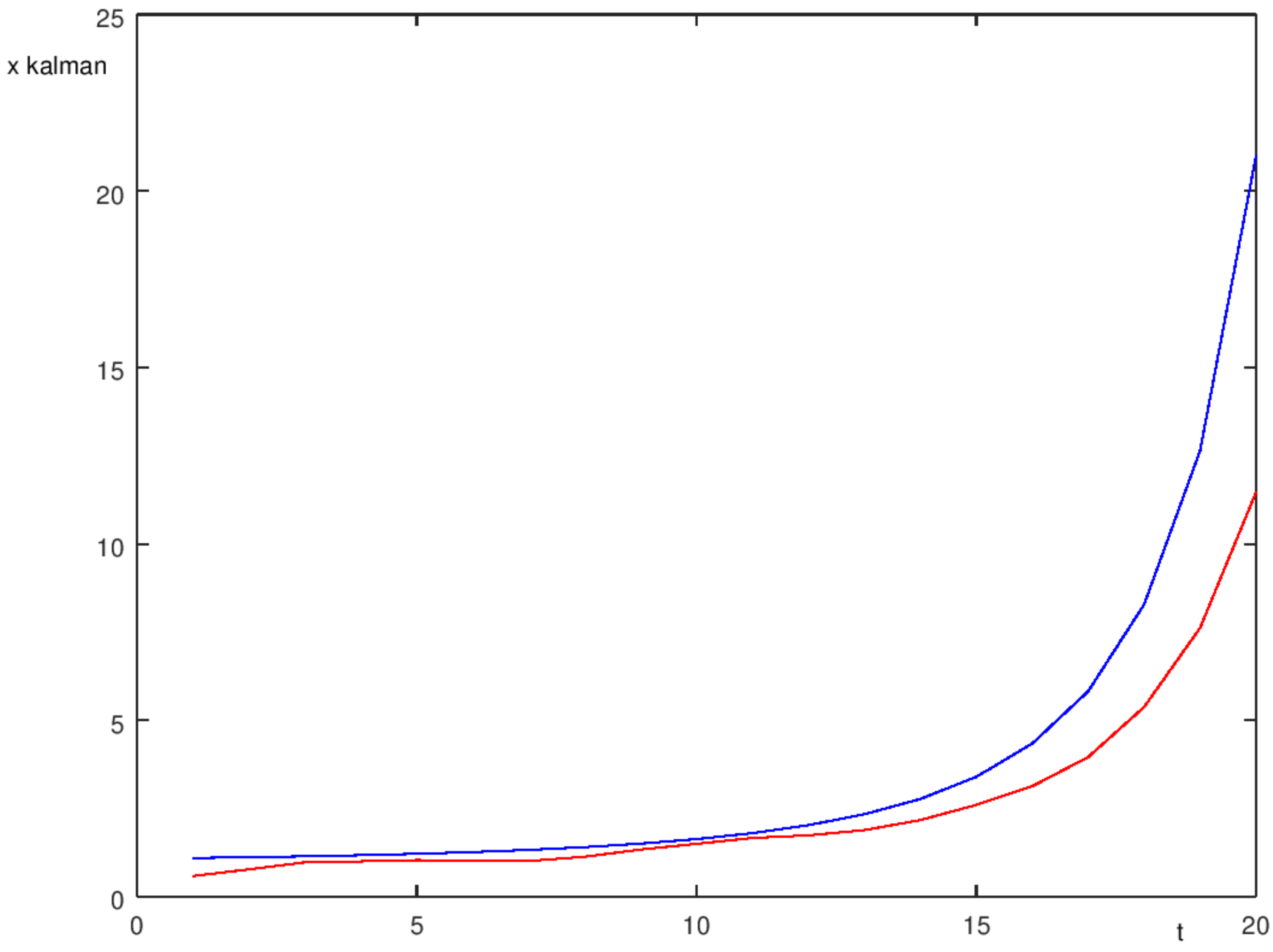
Alınan ve Gerçek Ölçümler



x tahmini - EKF



x tahmini - KF



Çok Değişkenli EKF - Örnek

- 2 boyutulu düzlemde hareket edebilen bir mobil robot için durum vektörü robotun konumu (x, y) ve robotun bakış açısından (θ) oluşmaktadır.
- Robotun herbir hareket komutunda sadece ileri yönde, düz bir doğrultuda, 1 birim ilerleyebildiği durumda, sonraki durum x' ile şimdiki durum x arasındaki bağıntı elde edilebilir.
- Robot ayrıca konumunun x eksenine izdüşümünü Q=0.01 varyansı ile ölçebilmektedir.

Sistem Modeli

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \cos\theta \\ y + \sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

İlk Durum İnancı

- Robotun başlangıç durumuna ilişkin inancının ortalama μ_0 ve kovaryansı Σ_0 aşağıda verilmektedir.

$$\mu_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{pmatrix}$$

- Bu başlangıç durumu, robotun başlangıç konumunun kabaca bilindiği fakat bakış açısının bilinmediği bir durumu ifade etmektedir.

Sorular

- Durum geçiş matrisini yazınız.
- EKF yöntemini kullanarak durum geçiş matrisinin doğrusal yaklaşıklığını elde ediniz.
- Robota hareket komutu verildikten sonraki durum inancını bulunuz.
- Ölçüm matrisini yazınız.
- EKF yöntemini kullanarak ölçüm matrisini doğrusal yaklaşıklığını elde ediniz.
- Alınan bir z_m ölçümü için durum inancını elde ediniz.

EKF Modeli

$$\mathbf{x}^{'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \cos\theta \\ y + \sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}^{'}$$

Jacobian Matrisi

$$\mathbf{G_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$