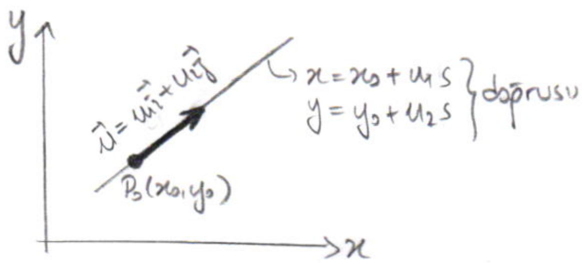
YÖNLÜ TÜREV

Çok değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonunda, x ve y'ye göre kısmî türevler, girdiyi x veya y yönünde değiştirdiğimizde f deki (yani çıktıdaki) değişimi vermekteydi. f nin girdisini x veya y'ye paralel olmayan bir yönde değiştirirsek, f deki değişim oranını "yönlü türev" ile bulmamız gerekecektir. Kısmî türev nasıl x ve y'ye göre alınıyorsa, yönlü türev de girdi uzayında belirli bir $\vec{u}$ vektörü boyunca alınır. f nin $\vec{u}$ yönündeki yönlü türevi, fonksiyonun çıktısında ortaya çıkan değişimdir. Kısacası yönlü türev, kısmî türevi genelleştirir.



s, P_0'dan $\vec{u}$ yönünde yay uzunluğunu ölçen parametre ise $\frac{df}{ds}$, f nin P_0'da $\vec{u}$ yönündeki değişim oranını verir.

$P_0(x_0,y_0)$ noktasında, $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x,y)$ nin türevi, limitin mevcut olması halinde,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+su_1,\, y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0) \to f \text{ nin } \vec{i} \text{ yönündeki} \\ f_y(x_0,y_0) \to f \text{ nin } \vec{j} \text{ yönündeki} \end{array}\right\} \text{yönlü türevleridir.}$$

Örnek: Tanımı kullanarak, $P_0(1,2)$ noktasında $f(x,y)=x^2+yx$ fonksiyonunun $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ vektörü yönündeki türevini bulun.

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s,\ 2+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)-f(1,2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2+\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)-3}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}s+s^2}{s} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Hesaplama ve Gradyentler

$P_0(x_0, y_0)$ 'dan geçen, $u = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde s yay uzunluğu parametresi ile verilen $x = x_0 + su_1$, $y = y_0 + su_2$ doğrusu için,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds}$$

$$f \xrightarrow{\partial} x,y \xrightarrow{d} s$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\vec{j}\right]}_{f\text{'nin } P_0\text{'daki gradyenti}} \cdot \underbrace{\left[u_1\vec{i} + u_2\vec{j}\right]}_{\vec{u} \text{ yönü}}$$

Tanım: $f(x,y)$ nin $P_0(x_0, y_0)$ daki gradyent vektörü:

$$\text{Grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Yönlü Türev: Eğer $f(x,y)$, $P_0(x_0, y_0)$'ı içeren bir bölgede türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

Örnek: $f(x,y) = xe^y + \cos xy$ nin $(2,0)$ noktasındaki $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayın.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\nabla f = (e^y - y\sin xy)\vec{i} + (xe^y - x\sin xy)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \nabla f|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$(D_{\vec{u}} f)_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{j})\left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

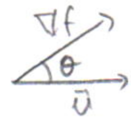
⊛ $z=f(x,y)$ nin $(D_{\vec{u}}f)_{P_0}$ türevi:

$\vec{u}$ yönünde P_0 daki yönlü türev
" " " artış hızı / oranı
" " " azalış hızı / oranı
" " " değişim oranı

anlamlarına gelir.

Yönlü Türevin Özellikleri:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f||\vec{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$



1) $\cos\theta = 1$ $(\theta = 0)$ olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar (en büyük yönlü türev değerine ulaşır). Yani f en çok ∇f gradyent vektörü yönünde artar.

$$D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cos 0 = |\nabla f|$$

2) Benzer şekilde f fonksiyonu en çok $-\nabla f$ gradyent vektörü yönünde azalır. $(\theta = \pi)$

$$D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cos\pi = -|\nabla f|$$

3) Bir $\nabla f \neq 0$ gradyentine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönü f'deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir ve $D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cos\frac{\pi}{2} = |\nabla f| . 0 = 0$.

Örnek: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) $(1,1)$ de en çok artan

b) $(1,1)$ de en çok azalan

c) $(1,1)$ de f'deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$$\nabla f = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$$

a) $\vec{u}$ ile ∇f aynı yöndedir: $\vec{u} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{|\vec{i}+\vec{j}|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$

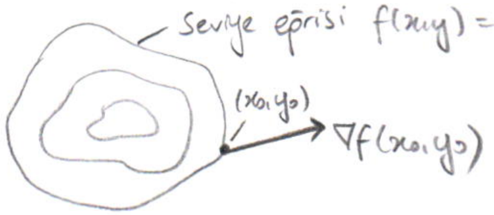
b) $\vec{u}$ ile ∇f ters yöndedir: $-\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

c) $\vec{u} \perp \nabla f$: $\left.\begin{array}{l}\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \nabla f = \vec{i} + \vec{j}\end{array}\right\}$ $\vec{u}.\nabla f = a+b = 0 \Rightarrow a=-b \rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$, $\vec{u}_1 = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$

$a=1$, $b=-1$; $a=-1$, $b=1$

Seviye Eğrilerinin Teğetleri ve Gradyentler

$f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonunun tanım kümesinin her (x_0,y_0) noktasında, f'nin gradyent vektörü (x_0,y_0) boyunca seviye eğrisine normaldir.



İspat: $f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r}=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit bir değer alıyorsa, $f(g(t),h(t))=c$ dir. t'ye göre türev alınırsa:

$$f \to x,y \to t \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dg}{dt}}_{g'(t)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{h'(t)}=0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)}_{\nabla f}\underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\vec{i}+\frac{dh}{dt}\vec{j}\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}=0$$

$\nabla f\cdot\vec{r}\,'(t)=0 \Rightarrow \nabla f\perp r'(t) \Rightarrow \nabla f$ eğriye normal.

Gradyentler için Cebirsel Kurallar:

1) $\nabla(f\mp g)=\nabla f\mp\nabla g$
2) $\nabla(kf)=k\nabla f$
3) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
4) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve bir $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ birim vektörü için:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \quad \text{ve}$$

$$D_{\vec{u}}f=\nabla f\cdot\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

$$=|\nabla f||\vec{u}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$$

Daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için belirtilen kurallar üç değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek: $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ nin $P_0(1,1,0)$ noktasında $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ yönündeki türevini bulunuz. f fonksiyonu P_0'da en hızlı hangi yönde değişir? Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{49}}=\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla f=(3x^2-y^2)\vec{i}-2xy\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \nabla f|_{P_0}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$$

$$(D_{\vec{u}}f)_{(1,1,0)}=\nabla f|_{(1,1,0)}\cdot\vec{u}=(2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})\left(\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}\right)=\frac{4}{7}$$

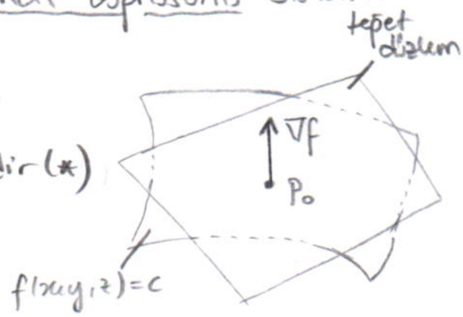
Fonksiyon en hızlı $\nabla f=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ yönünde artar ve $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yönlerde değişim oranları:

$$|\nabla f|=\sqrt{(2^2)+(-2)^2+(-1)^2}=3 \quad \text{ve} \quad -|\nabla f|=-3$$

TEĞET DÜZLEMLER ve NORMAL DOĞRULAR

Türevlenebilir bir f fonksiyonunun $f(x,y,z)=c$ seviye yüzeyi üzerinde bulunan bir $P_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki teğet düzlemini ve normal doğrusunu bulalım:

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\begin{cases} P_0\text{'dan geçen teğet düzleme diktir.} \\ P_0\text{'dan geçen normal doğruya paraleldir } (*) \end{cases}$



$\nabla f|_{P_0}=f_x(P_0)\vec{i}+f_y(P_0)\vec{j}+f_z(P_0)\vec{k}$ olduğundan,

$f(x,y,z)$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki teğet düzlemi:

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$$

(*) iki değişkenli fonk. lardaki ispata paralel şekilde kolayca görülebilir.

$f(x,y,z)$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki normal doğrusu:

$$x=x_0+f_x(P_0)t$$
$$y=y_0+f_y(P_0)t$$
$$z=z_0+f_z(P_0)t$$

Not: iki değişkenli fonk. larda ∇f, seviye eğrisine dik (normal) idi,
üç 〃 〃 ∇f, 〃 yüzeyine diktir.

Örnek: $z=9-x^2-y^2$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusunu bulunuz

$F: z+x^2+y^2-9=0$, $\nabla f = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$

$\nabla f|_{P_0} = 2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ → teğet düzleme dik → normal doğruya paralel

$2(x-1)+4(y-2)+1(z-4)=0 \Rightarrow 2x+4y+z=14$: teğet düzlem

$$\left.\begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=2+4t\\ z&=4+t \end{aligned}\right\} \text{ normal doğru}$$

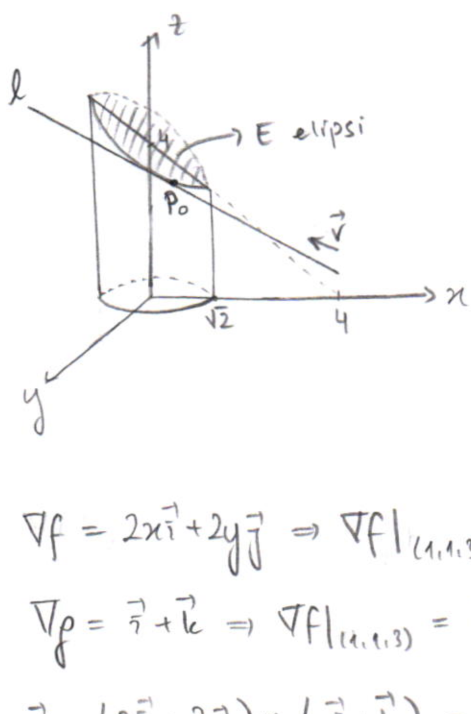
Örnek: $(0,0,0)$ noktasında $z=x\cos y-ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlemi bulun.

$F: z-x\cos y+ye^x=0$ $\nabla f = (-\cos y+ye^x)\vec{i}+(x\sin y+e^x)\vec{j}+\vec{k}$

$\nabla f|_{(0,0,0)} = -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$: teğet düzleme dik $\Rightarrow -1(x-0)+1(y-0)+1(z-0)=0$

$\Rightarrow -x+y+z=0$.

Örnek: $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ ve $g(x,y,z)=x+z-4=0$ yüzeyleri bir E elipsi boyunca kesişirler. $P_0(1,1,3)$ noktasında E'ye teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.



$f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$: silindir

$g(x,y,z)=x+z-4=0$: düzlem

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &l \text{ doğrusu} \Rightarrow \text{silindire teğet}\\ &\nabla f \Rightarrow \text{silindire dik} \end{aligned}\right\} \nabla f \perp \vec{v} \\ &\left.\begin{aligned} &l \text{ doğrusu} \Rightarrow \text{düzleme teğet}\\ &\nabla g \Rightarrow \text{düzleme dik} \end{aligned}\right\} \nabla g \perp \vec{v} \end{aligned}\right\} \vec{v} \parallel \nabla f \times \nabla g$$

$\nabla f = 2x\vec{i}+2y\vec{j} \Rightarrow \nabla f|_{(1,1,3)} = 2\vec{i}+2\vec{j}$

$\nabla g = \vec{i}+\vec{k} \Rightarrow \nabla f|_{(1,1,3)} = \vec{i}+\vec{k}$

$$\vec{v} = (2\vec{i}+2\vec{j})\times(\vec{i}+\vec{k}) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$$

$$l: \begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=1-2t\\ z&=3-2t \end{aligned}$$