

О.Н. Оруджова, Н.В. Шабунина, В.М. Юлкова

КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Электронное учебное издание



Архангельск 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»

О.Н. Оруджова, Н.В. Шабунина, В.М. Юлкова

**КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Архангельск
САФУ
2024

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

О-70

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом
Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова

Авторы:

О.Н. Оруджова, доцент кафедры фундаментальной и прикладной физики САФУ,
кандидат технических наук;

Н.В. Шабунина, доцент кафедры фундаментальной и прикладной физики САФУ,
кандидат педагогических наук;

В.М. Юлкова, доцент кафедры фундаментальной и прикладной физики САФУ,
кандидат физико-математических наук

Рецензенты:

М.Г. Берденникова, учитель физики ГБОУ АО АСШИ № 1, кандидат педагоги-
ческих наук;

М.А. Пустовалова, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и
графики САФУ имени М.В. Ломоносова, кандидат технических наук

Оруджова, О.Н.

О-70 Краткий курс физики с примерами решения задач: учебное пособие /
О.Н. Оруджова, Н.В. Шабунина, В.М. Юлкова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т
им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: САФУ, 2024. – 150 с. – 1 электрон.
цифровой диск (DVD). – Текст: электронный.

ISBN 978-5-261-01749-3

В учебном пособии даны основные понятия и формулы, необходимые при
решении задач по механике, молекулярной физике и термодинамике, электро-
динамике, оптике и атомной физике. Приведены варианты контрольных зада-
ний, а также справочный материал.

Предназначено для студентов заочной иочно-заочной форм обучения
Высшей школы естественных наук и технологий, обучающихся по направле-
ниям подготовки 18.03.01 «Химическая технология» и 35.03.01 «Лесное дело».

УДК 53(075)
ББК 22.3я73

Издательский дом им. В.Н. Булатова САФУ
163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 56

ISBN 978-5-261-01749-3

© Оруджова О.Н., Шабунина Н.В.,
Юлкова В.М., 2024

© Северный (Арктический) федеральный
университет им. М.В. Ломоносова, 2024

Оглавление

Введение.....	5
1. Методические указания для обучающихся	8
2. Контрольная работа № 1 по теме «Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. Электростатика и постоянный ток»	10
2.1. Теоретические положения	10
2.1.1. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела	10
2.1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела	14
2.1.3. Вращательное движение твердых тел.....	15
2.1.4. Тяготение	18
2.1.5. Работа и энергия.....	19
2.1.6. Молекулярное строение вещества	21
2.1.7. Уравнение состояния идеального газа.....	22
2.1.8. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов.....	23
2.1.9. Теплоемкости идеального газа	24
2.1.10. Первое начало термодинамики. Применение его к газовым законам.....	25
2.1.11. Тепловая машина. Цикл Карно.....	27
2.1.12. Явления переноса.....	27
2.1.13. Реальные газы.....	29
2.1.14. Основные уравнения электродинамики	29
2.1.15. Электрический ток	34
2.2. Примеры решения задач	37
2.3. Варианты контрольной работы № 1	67
3. Контрольная работа № 2 по теме «Электромагнетизм. Оптика и атомная физика»	72
3.1. Теоретические положения.....	72
3.1.1. Магнитное поле тока	72
3.1.2. Колебания и волны	77
3.1.3. Интерференция света.....	85
3.1.4. Дифракция света	87
3.1.5. Поляризация света	88
3.1.6. Законы теплового излучения	88
3.1.7. Фотоны. Фотоэлектрический эффект	90
3.1.8. Эффект Комptonа	91
3.1.9. Давление света	92
3.1.10. Основы атомной физики и квантовой механики	93
3.1.11. Элементы квантовой статистики и физики твердого тела	96
3.1.12. Физика атомного ядра и элементарных частиц	96

3.2. Примеры решения задач.....	98
3.3. Варианты контрольной работы № 2.....	138
Приложения	144
Приложение А	144
Приложение Б.....	145
Приложение В	146
Приложение Г	147
Приложение Д	148
Библиографический список.....	150

ВВЕДЕНИЕ

Целями освоения дисциплины «Физика» являются формирование у студентов общего физического мировоззрения, развитие физического мышления, ознакомление с основными законами физики и возможностями их применения при решении задач, возникающих в последующей профессиональной деятельности обучающихся.

Задачи курса физики:

- изучение законов окружающего мира в их взаимосвязи;
- овладение фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач;
- формирование навыков по применению положений фундаментальной физики к грамотному научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новой техники и новых технологий;
- освоение основных физических теорий, позволяющих описать явления в природе, и пределов применимости этих теорий для решения современных и перспективных технологических задач;
- формирование у студентов основ естественно-научной картины мира;
- ознакомление студентов с историей и логикой развития физики и основных её открытий.

Физика как наука об общих законах природы лежит в основе изучения теоретических и специальных дисциплин инженерных направлений и специальностей. В процессе обучения физике студенты усваивают знания общих законов развития науки, приобретают навыки теоретических и экспериментальных исследований. Дисциплина «Физика» предназначена для ознакомления студентов с современной физической картиной мира, приобретения навыков экспериментального исследования физических явлений и процессов, изучения теоретических методов анализа физических явлений, обучения грамотному применению положений фундаментальной физики к научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новой техники и технологий, а также выработки у студентов основ естественно-научного мировоззрения.

В результате освоения дисциплины «Физика» студент должен:

- 1) изучить физические явления и законы физики, их применение в важнейших практических приложениях;
- 2) познакомиться с основными физическими величинами, знать их определение, смысл, способы и единицы их измерения;
- 3) представлять себе фундаментальные физические опыты и их роль в развитии науки;
- 4) знать назначение и принципы действия важнейших физических приборов.

Кроме того, студент должен приобрести следующие навыки:

- а) работы с приборами и оборудованием современной физической лаборатории;
- б) использования различных методик физических измерений и обработки экспериментальных данных;
- в) проведения адекватного физического и математического моделирования, а также применения методов физико-математического анализа к решению конкретных технических проблем.

В сочетании с другими дисциплинами общего естественно-научного цикла курс физики должен способствовать формированию цельного представления о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, научного способа мышления, умения видеть естественно-научное содержание проблем, возникающих в практической деятельности специалиста. Дисциплина «Физика» закладывает базовые знания механики, термодинамики, электродинамики, оптики для их применения в профессиональной деятельности.

Например, знания механики играют определяющую роль при создании новых образцов технических устройств – транспортных машин широкого профиля и соответствующей инфраструктуры, строительных объектов различного типа, медицинской техники, роботов, буровой техники, трубопроводных систем, технических устройств военного назначения и т.д.

Знание законов термодинамики, которые носят общий характер и не зависят от конкретных деталей строения вещества на атомарном уровне, применяется в широком круге вопросов науки и техники, таких как энергетика, теплотехника, фазовые переходы, химические реакции, явления переноса. Термодинамика является фундаментом химических и физико-химических процессов в строительном производстве, имеет важное значение для самых разных областей физики и химии, химической технологии, аэрокосмической техники, машиностроения, клеточной биологии, биомедицинской инженерии, материаловедения.

Законы электродинамики лежат в основе всей электротехники и радиотехники, включая телевидение, видеозапись и почти все средства связи. Электродинамика составляет фундамент таких актуальных направлений современной физики, как физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, нелинейная оптика, магнитная гидродинамика, астрофизика, конструирование вычислительных машин, ускорителей элементарных частиц и т.д.

Оптические явления связаны с явлениями, изучаемыми в других разделах физики, а оптические методы исследования относятся к наиболее тонким и точным. Использование лазеров и систем фокусировки позволяет фокусировать лазерное излучение в одной точке, что применяется в резке различных веществ, устройствах для чтения и записи компакт-дисков, лазерных дальномерах. Оптические системы широко распространены в геодезии для измерения углов и превышений (нивелиры, теодолиты и др.). Использование призм для разложения белого света на спектры привело к созданию спектрографов и спектроскопов. Они позволяют наблюдать спектры поглощений и испусканий твердых тел и газов. Использование оптоволокна в системах связи позволило получить высокоскоростные каналы для передачи информации.

В ходе изучения дисциплины студенты осваивают следующие разделы физики: «Механика», «Основы молекулярной физики и термодинамики», «Электродинамика», «Колебания и волны», «Оптика», «Атомная физика».

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Процесс изучения дисциплины «Физика» включает следующие этапы: посещение лекций, лабораторных и практических занятий, самостоятельную работу по учебникам и учебным пособиям, выполнение контрольных работ, сдачу экзамена.

Содержание лекционного курса определяется рабочей программой дисциплины. При этом, как правило, в целях стимуляции самостоятельной работы студентов часть учебного материала, предусмотренного программой, может быть предложена им для самостоятельного усвоения.

При изучении курса «Физика» в качестве основного следует использовать один из учебников или учебных пособий, рекомендованных в списках литературы. Другие учебные пособия можно использовать в том случае, если основное пособие не дает полного ответа на некоторые вопросы программы. Начиная изучать материал какого-либо раздела, необходимо прочитать весь раздел учебника, не задерживаясь на трудном материале. При повторном чтении следует сначала уяснить сущность физического явления или процесса, затем составить конспект, в котором дать краткое пояснение этого физического явления или процесса, привести схемы, рисунки, формулы, иллюстрирующие и поясняющие изучаемый материал. Составление конспекта облегчает запоминание прочитанного, помогает контролировать восприятие изучаемого материала. Материал можно считать усвоенным, если при его повторении не возникает необходимости заглянуть в книгу или конспект.

Лабораторные работы предназначены для анализа основных физических явлений, приобретения навыков работы в физической лаборатории, закрепления и освоения теоретического материала.

Контрольные работы помогают закрепить усвоение теоретической части каждого раздела курса.

На экзамене студент должен показать прочные знания теории, формулировок основных законов, формул, единиц физических величин, относящихся к изучаемым разделам физики, умение решать теоретические и экспериментальные задачи.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие правила:

1. Контрольную работу следует выполнять согласно СТО 60-02.2.3-2018, сдать на проверку в распечатанном виде.
2. Контрольная работа должна начинаться с титульного листа. Обязательно укажите номер студенческого билета.
3. В контрольной работе студент должен решить задачи того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра. Номера задач определяются по таблице вариантов.
4. Условия задач в контрольной работе необходимо переписывать полностью без сокращений. Каждую задачу следует начинать с новой страницы.
5. Постарайтесь к каждой задаче сделать рисунок, на котором можно изобразить все величины, о которых идет речь в задаче. Рисунок должен быть обязательно в тех задачах, где речь идет о векторных величинах и/или углах, электрической схеме, циклах.
6. В конце контрольной работы следует указать учебники и учебные пособия, которыми студент пользовался при решении задач.
7. В том случае, если при рецензировании работы в решениях задач обнаружены ошибки, контрольная работа возвращается студенту для доработки. Студент должен изучить все замечания рецензента, уяснить свои ошибки, внести исправления и выслать файл повторно.
8. Если при решении отдельных задач встречаются затруднения и вы не можете решить их самостоятельно, оформите работу, изложив ваши соображения и затруднения. Такая работа не будет зачтена, но письменная консультация рецензента поможет вам найти правильное решение.
9. Зачет по контрольной работе (выставление итогового балла) может быть получен только после собеседования с преподавателем по существу решения задач, входящих в контрольную работу.

2. Контрольная работа № 1 по теме «МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК»

2.1. Теоретические положения

2.1.1. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела

1. Материальной точкой называют тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь и считать, что вся масса тела сосредоточена в одной геометрической точке. Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

где x, y, z – координаты точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты).

Движение материальной точки в пространстве описывается одним векторным уравнением $\vec{r} = \vec{f}(t)$ или эквивалентными ему тремя скалярными: $x = f(t); y = f(t); z = f(t)$, где t – время.

2. Мгновенная скорость материальной точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на оси координат, $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt},$

$$v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль мгновенной скорости равен первой производной пути S по времени t :

$$v = \frac{dS}{dt} \text{ или } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

3. Средняя скорость

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t},$$

где $\vec{\Delta r}$ – перемещение материальной точки за промежуток времени Δt .

4. Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, который проходит материальная точка за промежуток времени Δt .

5. Мгновенное (полное) ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x , a_y , a_z – проекции вектора ускорения на оси координат, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$,
 $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$.

Модуль мгновенного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Полное ускорение можно представить как геометрическую сумму тангенциальной \vec{a}_τ и нормальной \vec{a}_n составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;$$

в скалярной форме

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Числовые значения тангенциальной и нормальной составляющих ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

6. Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки относительно оси x :

$$x = x_0 + v_x t,$$

где x – координата материальной точки в момент времени t ; x_0 – начальная координата (координата в момент времени $t = 0$); v_x – проекция вектора скорости на ось x .

При равномерном движении $v_x = \text{const}$, $a_x = 0$.

7. Кинематическое уравнение равнопеременного движения относительно оси x :

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

где v_{0x} – проекция вектора скорости на ось x в момент времени $t = 0$; a_x – проекция вектора ускорения на ось x .

При равнопеременном движении $a_x = \text{const}$ и скорость точки определяется уравнением

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

8. Кинематическое уравнение вращательного движения материальной точки (или абсолютно твердого тела) относительно заданной оси вращения

$$\vec{\varphi} = f(t),$$

где $\vec{\varphi}$ – угол поворота; t – время.

9. Угловая скорость $\vec{\omega}$ при вращательном движении определяется как первая производная угла поворота $\vec{\varphi}$ по времени t :

$$\vec{\omega} = \frac{d \vec{\varphi}}{d t}.$$

Средняя угловая скорость

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\vec{\Delta \varphi}}{\Delta t},$$

где $\vec{\Delta \varphi}$ – приращение угла поворота за промежуток времени Δt .

10. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ равно первой производной угловой скорости по времени t :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

11. Кинематическое уравнение равномерного вращения относительно оси z :

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t,$$

где φ – угол поворота в момент времени t ; φ_0 – начальное значение угла поворота (угол поворота в момент времени $t = 0$); ω_z – проекция вектора угловой скорости на ось z .

При равномерном вращении $\omega_z = \text{const}$, $\varepsilon_z = 0$.

Равномерное вращательное движение характеризуется периодом вращения T , то есть промежутком времени, за которое точка (тело) совершает один полный оборот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_z}.$$

Количество оборотов, совершаемых точкой (телем) при равномерном вращении в единицу времени, называют частотой вращения:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_z}{2\pi}.$$

12. Кинематическое уравнение равнопеременного движения относительно оси z :

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2},$$

где ω_{0z} – проекция вектора угловой скорости на ось z в момент времени $t = 0$; ε_z – проекция вектора углового ускорения на ось z .

При равнопеременном вращении $\varepsilon_z = \text{const}$ и угловая скорость точки (тела) определяется уравнением

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t.$$

13. Связь между линейными и угловыми величинами выражается следующими формулами:

$$v = R\omega; \quad a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R,$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

14. Среднее значение функции $y = f(t)$ за промежуток времени от t_1 до t_2 определяется выражением

$$\langle y \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} y dt .$$

2.1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

1. Импульс материальной точки массой m , движущейся со скоростью v :

$$\vec{p} = m \vec{v} .$$

2. Второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt} ,$$

где \vec{F} – результирующая всех сил, действующих на материальную точку.

Учитывая, что масса в классической механике есть величина постоянная, второй закон Ньютона можно записать так:

$$\vec{F} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = m \vec{a} ,$$

где \vec{a} – ускорение, которое приобретает материальная точка массой m под действием силы \vec{F} .

3. Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N ,$$

где μ – коэффициент трения; N – сила нормального давления.

4. Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const},$$

где m_i – масса i -го тела; \vec{v}_i – скорость i -го тела.

2.1.3. Вращательное движение твердых тел

1. Момент инерции материальной точки массой m относительно произвольной оси

$$I = mr^2,$$

где r – расстояние от точки до оси.

2. Момент инерции механической системы, состоящей из n материальных точек, относительно произвольной оси равен сумме произведений масс этих точек на квадраты их расстояний r_i до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где m_i – масса i -й материальной точки.

3. Момент инерции тела массой m относительно оси, проходящей через центр масс:

а) полого тонкостенного цилиндра (обруча) относительно оси цилиндра (для обруча относительно оси, перпендикулярной его плоскости)

$$I = mR^2,$$

где R – радиус цилиндра (обруча);

б) сплошного однородного цилиндра (диска) относительно оси цилиндра

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

где R – радиус цилиндра (диска);

в) однородного шара радиусом R

$$I = \frac{2}{5}mR^2;$$

г) однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно к нему,

$$I = \frac{1}{12}ml^2,$$

где l – длина стержня.

4. Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой

параллельной оси определяется теоремой Штейнера: момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$I = I_0 + md^2.$$

5. Моментом силы \vec{F} относительно некоторой точки О называют векторную величину \vec{M} , которая определяется выражением

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы;

$[\vec{r} \vec{F}]$ – векторное произведение векторов \vec{r} и \vec{F} .

Вектор \vec{M} перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы \vec{r} и \vec{F} . Направление вектора \vec{M} определяют по правилу правого винта: вектор \vec{M} направлен в сторону поступательного движения острия правого винта, головка которого вращается по кратчайшему пути от первого множителя ко второму.

Векторы, перпендикулярные плоскости рисунка, изображают кружком с крестиком, если вектор направлен от нас за плоскость рисунка, и кружком с точкой в его центре, если вектор направлен на нас от плоскости рисунка. В соответствии с этим правилом на рис. 1 вектор изображен кружком с вписанным в него крестиком.

Числовое значение вектора \vec{M} равно

$$M = rF \sin \alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов \vec{r} и \vec{F} .

6. Моментом силы \vec{F} относительно оси z называют параллельную этой оси составляющую момента силы относительно точки О (лежащей на оси):

$$\vec{M}_z = [\vec{r} \vec{F}]_z.$$

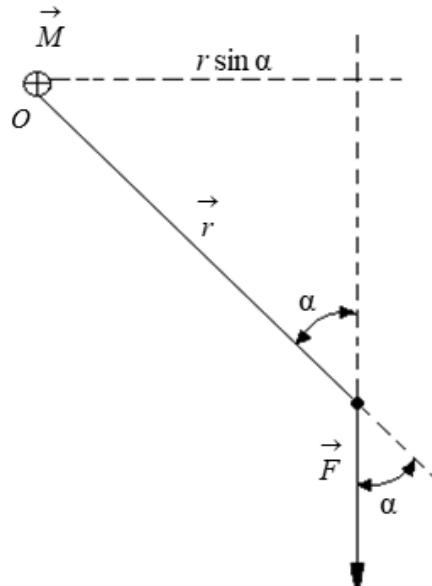


Рис. 1

7. Момент импульса материальной точки относительно точки О (рис. 2)

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}] = m [\vec{r} \vec{v}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из точки О в ту точку пространства, где находится материальная точка массой m ; \vec{p} – импульс точки, $\vec{p} = m \vec{v}$.

Числовое значение момента импульса

$$L = rp \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{p} .

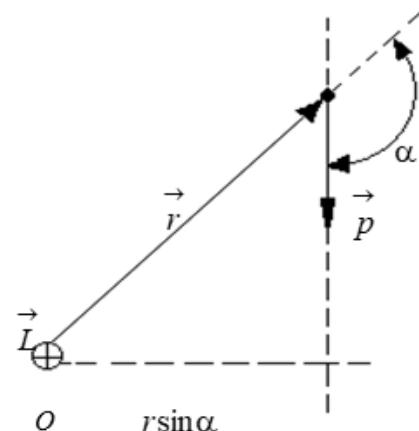


Рис. 2

8. Моментом импульса относительно оси z называют составляющую \vec{L}_z по этой оси момента импульса \vec{L} относительно точки О, лежащей на оси:

$$\vec{L}_z = [\vec{r} \vec{p}]_z.$$

9. Проекция вектора момента импульса твердого тела (материальной точки) на ось z

$$L_z = I_z \omega_z,$$

где ω_z – проекция вектора угловой скорости на ось z ; I_z – момент инерции тела относительно оси z .

10. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M}_z = \frac{d \vec{L}_z}{dt}.$$

Учитывая, что $L_z = I_z \omega_z$, уравнение динамики вращательного движения можно записать так:

$$M_z = I_z \varepsilon_z,$$

где ε_z – проекция вектора углового ускорения на ось вращения.

Уравнения для твердого тела справедливы и для системы тел, если считать, что момент импульса системы тел (материальных точек)

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{iz},$$

а сумма моментов всех внешних сил $\vec{M}_z = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iz}$.

11. Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой механической системы с течением времени не изменяется:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{iz} = \sum_{i=1}^n I_{iz} \vec{\omega}_{iz} = \text{const}.$$

2.1.4. Тяготение

1. Закон всемирного тяготения:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2},$$

где F – сила взаимного притяжения двух материальных точек массами m_1 и m_2 ; r – расстояние между точками; G – гравитационная постоянная.

Это уравнение справедливо также для взаимодействующих тел, представляющих собой однородные шары. В этом случае r – расстояние между центрами масс шаров.

2. Напряженность гравитационного поля

$$\vec{g}_0 = \frac{\vec{F}}{m},$$

где \vec{F} – сила, действующая на материальную точку массой m в данной точке гравитационного поля.

Напряженность гравитационного поля вблизи поверхности Земли приближенно равна ускорению свободного падения.

3. Сила тяжести

$$\vec{P} = m \vec{g},$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения.

4. Весом тела \vec{P}' называют силу, с которой тело вследствие тяготения действует на опору или подвес.

5. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$E_p = -\frac{G m_1 m_2}{r}.$$

6. Потенциал гравитационного поля

$$\varphi = \frac{E_p}{m},$$

где E_p – потенциальная энергия материальной точки массой m , помещенной в данную точку поля.

7. Первой космической скоростью называют такую минимальную скорость, которую следует сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, то есть превратиться в искусственный спутник Земли.

8. Второй космический скоростью называют такую наименьшую скорость, которую следует сообщить телу, чтобы оно могло без воздействия каких-либо дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца.

2.1.5. Работа и энергия

1. Работа силы F на пути S :

$$A = \int_S F \cos \alpha \cdot dS,$$

где α – угол между направлением силы и направлением движения точки приложения силы.

В случае постоянной силы F , действующей под углом α к перемещению,

$$A = FS \cos \alpha.$$

2. Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \alpha,$$

где $\vec{F} \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение векторов \vec{F} и \vec{v} ; α – угол между векторами \vec{F} и \vec{v} .

3. Кинетическая энергия тела массой m , движущегося поступательно со скоростью v :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

4. Потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли:

$$E_p = mgh,$$

где h – высота, отсчитываемая от нулевого уровня, для которого $E_{p0} = 0$.

Эта формула справедлива при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли.

5. Сила упругости

$$F_{yx} = -k x,$$

где k – коэффициент упругости (в случае пружины – жёсткость); x – величина деформации.

6. Потенциальная энергия упругодеформированного тела (пружины)

$$E_p = \frac{k x^2}{2}.$$

7. Кинетическая энергия тела массой m , вращающегося относительно оси z ,

$$E_k = \frac{I_z \omega_z^2}{2},$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω_z – проекция вектора угловой скорости на ось z .

8. Кинетическая энергия тела, участвующего в поступательном и вращательном движении,

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z \omega_z^2}{2},$$

где v – скорость центра масс тела; I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

9. Работа внешних сил при вращении твердого тела

$$A = \int_0^\phi M_z d\phi,$$

где M_z – проекция результирующего момента приложенных к телу внешних сил на ось z ; ϕ – угол, на который поворачивается тело за время t .

10. Закон сохранения механической энергии: в замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, механическая энергия с течением времени не изменяется:

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

2.1.6. Молекулярное строение вещества

1. Количество вещества v – физическая величина, определяемая числом структурных элементов, из которых состоит вещество. В молекулярной физике для измерения количества вещества вводится единица – моль. В одном моле различных веществ содержится одинаковое число молекул (число Авогадро):

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

2. Молярная масса (масса моля) любого вещества выражается соотношением

$$\mu = N_A m_1,$$

где m_1 – масса одной молекулы данного вещества.

Масса моля μ численно равна относительной молекулярной массе M_r данного вещества, умноженной на 10^{-3} ($\mu = M_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль), например:

$$\mu_{H_2O} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

3. Число молей v , содержащихся в данной массе вещества m ,

$$v = \frac{m}{\mu}.$$

4. Число молекул N , содержащееся в данной массе вещества m ,

$$N = v N_A = \frac{m}{\mu} N_A.$$

5. Плотность вещества

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_1 N}{V} = m_1 n,$$

где m – масса вещества, заключенного в объеме V ; n – число молекул в единице объема.

6. Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температурах и давлениях занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем $V_\mu = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

7. Массовая доля i -го компонента смеси газов

$$\alpha = \frac{m_i}{m},$$

где m_i – масса i -го компонента смеси; m – масса смеси.

2.1.7. Уравнение состояния идеального газа

1. Состояние данной массы идеального газа описывается уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где P , T – давление и температура газа; V – объем, занимаемый данной массой газа (объем сосуда); $\frac{m}{\mu}$ – число молей, содержащихся в данной массе газа; R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$.

2. Исходя из уравнения состояния, можно определить плотность идеального газа:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}.$$

Между температурой t (по шкале Цельсия) и температурой T (по шкале Кельвина) существует следующая связь:

$$T = (t + 273,15) \text{ К} \cong (t + 273) \text{ К}.$$

3. При введении постоянной Больцмана $k = R / N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ уравнение состояния примет следующий вид:

$$P = nkT,$$

где P – давление газа; n – концентрация молекул.

4. Закон Дальтона для смеси газа.

Если в сосуде V при температуре T содержится смесь газов, то необходимо считать, что каждый из компонентов этой смеси распространяется по всему объему сосуда. Парциальное давление P_i , создаваемое

отдельным i -м компонентом смеси, определяется из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P_i = \frac{m_i}{\mu_i} \frac{RT}{V},$$

где m_i – масса данного компонента в смеси; μ_i – масса одного моля этого компонента.

Давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, входящих в нее газов:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_i$$

или

$$P_{\text{см}} = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_i}{\mu_i} \right) \frac{RT}{V}.$$

В равновесном состоянии плотность смеси $\rho_{\text{см}}$ равна сумме плотностей компонентов смеси:

$$\rho_{\text{см}} = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_i.$$

2.1.8. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

1. Основное уравнение кинетической теории газов для давления:

$$P = \frac{1}{3} m_1 n \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle,$$

где m_1 – масса одной молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

2. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{m_1 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Данная формула раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры: это мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.

3. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: на каждую степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} kT .$$

4. Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы данного газа: для одноатомных молекул $i = 3$ (поступательных), для двухатомных $i = 5$ (3 поступательных + 2 вращательных), для всех многоатомных $i = 6$ (3 поступательных + 3 вращательных).

5. Внутренняя энергия массы m газа

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT .$$

6. Скорости газовых молекул:

- средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}} \text{ или } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} ;$$

- средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} \text{ или } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} ;$$

- вероятная

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} \text{ или } v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} .$$

2.1.9. Теплоемкости идеального газа

1. Теплоемкость системы (тела)

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} ,$$

где ΔQ – количество теплоты, сообщенное системе (телу); ΔT – изменение температуры системы (тела), вызванное сообщением этого количества теплоты.

2. Молярная и удельная теплоемкости:

$$C_{\mu} = \frac{\Delta Q}{v \Delta T}; \quad C_{yд} = \frac{\Delta Q}{m \Delta T},$$

где v – количество вещества.

3. Молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме $C_{V\mu}$ и постоянном давлении $C_{p\mu}$:

$$C_{V\mu} = \frac{i}{2} R, \quad C_{p\mu} = C_{V\mu} + R = \frac{i+2}{2} R.$$

4. Соотношение между молярной и удельной теплоемкостями:

$$C_{yд} = \frac{C_{\mu}}{\mu}.$$

5. Удельные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$C_{Vyд} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}, \quad C_{pyд} = \frac{(i+2)}{2} \frac{R}{\mu}.$$

6. Отношение теплоемкостей (показатель адиабаты):

$$\gamma = \frac{C_{p\mu}}{C_{V\mu}}, \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{C_{pyд}}{C_{Vyд}}, \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

7. Количество теплоты, израсходованное на нагревание данного вещества,

$$Q = \frac{m}{\mu} C_{\mu} \Delta T = m C_{yд} \Delta T.$$

2.1.10. Первое начало термодинамики. Применение его к газовым законам

1. Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу в рассматриваемом процессе; A – работа, совершенная газом; ΔU – изменение внутренней энергии газа в данном процессе.

2. Работа, совершаемая газом,

$$A = \int P dV .$$

3. Для любого процесса, происходящего с идеальным газом, изменение внутренней энергии рассчитывается по одной и той же формуле:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_{V\mu} \Delta T .$$

4. Количество теплоты и работа, совершаемая газом, зависят от вида процесса:

- изотермический процесс: $T = \text{const}$, $\Delta T = 0$, $\Delta U = 0$,

$$Q_T = A_T = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2} ;$$

- изохорический процесс: $V = \text{const}$, $\Delta V = 0$, $A = 0$,

$$Q_V = \Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_{V\mu} \Delta T = mc_{V \text{ уд}} \Delta T ;$$

- изобарический процесс: $P = \text{const}$,

$$A_P = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1), \quad Q_P = \frac{m}{\mu} C_{P\mu} \Delta T = mc_{P \text{ уд}} \Delta T ;$$

• адиабатный процесс – процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой:

$$Q_{\text{адиаб}} = 0,$$

$$A_{\text{адиаб}} = -\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_2)$$

или

$$A_{\text{адиаб}} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где γ – показатель адиабаты, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$.

5. В адиабатном процессе изменяются все параметры идеального газа: P , V и T . Уравнения адиабатного процесса имеют вид уравнений Пуассона:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma;$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1};$$

$$T_2 P_1^{(\gamma-1)/\gamma} = T_1 P_2^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

2.1.11. Термическая машина. Цикл Карно

1. Термический КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где A – работа, совершаемая рабочим телом (газом) за цикл; Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом за цикл от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное за цикл окружающим телам.

2. Термический КПД цикла Карно – наиболее экономичного обратимого кругового процесса, состоящего из двух изотерм и двух адиабат (рис. 3):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

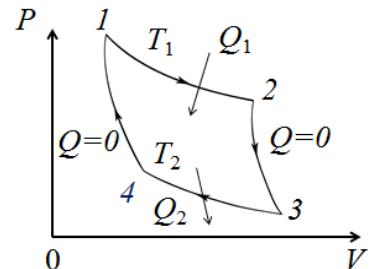


Рис. 3

где Q_1 – количество теплоты, которое газ получает при изотермическом расширении 1-2 при температуре нагревателя T_1 ; Q_2 – количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии 3-4 при температуре холодильника T_2 .

2.1.12. Явления переноса

1. Средняя длина свободного пробега молекулы газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\text{эфф}}^2 n}},$$

где $d_{\text{эфф}}$ – эффективный диаметр молекул газа; n – концентрация молекул газа.

2. Закон Фика для диффузии:

$$\Delta M = -D \frac{d\rho}{dx} S \Delta t,$$

где ΔM – масса вещества, перенесенная в результате диффузии через площадь S , перпендикулярную оси X , за время Δt ; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности данного вещества; D – коэффициент диффузии этого вещества.

3. Коэффициент диффузии для газов

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения газовых молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

4. Импульс (количество движения), передаваемый молекулами от слоя к слою через элемент поверхности площади S за время Δt ,

$$\Delta P_{\text{имп}} = -\eta \frac{du}{dz} S \Delta t,$$

где $\frac{du}{dz}$ – градиент скорости течения слоев; η – динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения).

5. Динамическая вязкость газа

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho,$$

где ρ – плотность газа.

6. Закон Ньютона для силы внутреннего трения:

$$F = \frac{\Delta P_{\text{имп}}}{\Delta t} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа или жидкости (рис. 4).

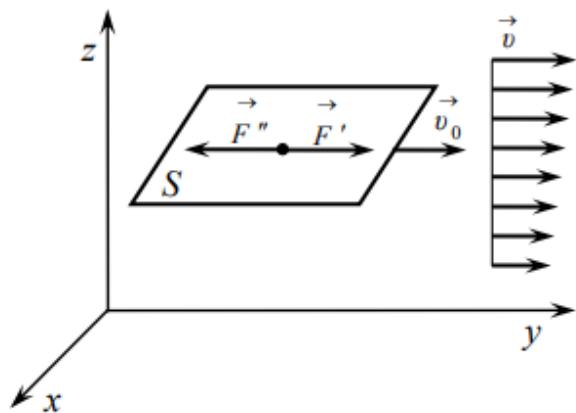


Рис. 4

7. Закон Фурье для теплопроводности:

$$\Delta Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Delta t,$$

где ΔQ – количество теплоты, переносимой посредством теплопроводности через площадь S , перпендикулярную оси X , за время Δt ; λ – коэффициент теплопроводности; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры.

8. Коэффициент теплопроводности газа

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho C_{V_{\text{уд}}},$$

где $C_{V_{\text{уд}}}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

2.1.13. Реальные газы

1. Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:

- для одного моля газа $\left(\frac{m}{\mu} = 1 \text{ моль}\right)$

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT;$$

- для произвольной массы m газа

$$\left(P + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

где P – давление газа на стенки сосуда; a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса, рассчитанные для одного моля газа (см. прил. Б); V_μ – объем, занимаемый одним молем газа; V – объем, занимаемый газом.

2. Внутреннее давление в газе, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$P_i = \frac{a}{V_\mu^2} \quad \text{или} \quad P_i = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}.$$

2.1.14. Основные уравнения электродинамики

1. Закон сохранения электрического заряда:

$$\sum_{i=1}^N q_i = \text{const},$$

где $\sum_{i=1}^N q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; N – число зарядов.

2. Закон Кулона. Сила взаимодействия \vec{F} между двумя точечными зарядами и модуль этой силы F :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}; \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\epsilon r^2},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, соединяющий заряды; ϵ_0 – электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi / \text{м}$, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой расположены заряды q_1, q_2 .

Здесь коэффициент

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м} / \Phi.$$

3. Характеристики электрического поля:

– напряженность

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q};$$

– потенциал

$$\varphi = \frac{W_p}{q},$$

где \vec{F} – сила, действующая на точечный положительный заряд q , помещенный в данную точку поля; W_p – потенциальная энергия точечного положительного заряда q , помещенного в данную точку поля.

4. Напряженность \vec{E} и потенциал φ поля точечного заряда q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из точки, в которой расположен заряд q , до интересующей нас точки.

5. Напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого зараженной сферической поверхностью радиусом R , несущей заряд q , на расстоянии r от центра сферы:

- внутри сферы ($r < R$)

$$E = 0, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R};$$

- на поверхности сферы ($r = R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{\epsilon R^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R};$$

- вне сферы ($r > R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{\epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}.$$

6. Распределение зарядов. Для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды

имеют дискретную структуру, и считать, что они «размазаны» определенным образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. При переходе к непрерывному распределению вводят понятия о плотностях заряда – объемной ρ , поверхностной σ , линейной τ :

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \text{ Кл}/\text{м}^3; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \text{ Кл}/\text{м}^2; \quad \tau = \frac{dq}{dl}, \text{ Кл}/\text{м},$$

где dq – заряд, заключенный в объеме dV , на поверхности dS , на длине dl .

7. Напряженность электрического поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от его оси,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau}{\epsilon r},$$

где τ – линейная плотность заряда.

8. Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

9. Поток Φ_E вектора напряженности \vec{E} электрического поля:

- через плоскую поверхность, помещенную в однородное поле,

$$\Phi_E = ES \cos \alpha;$$

- через произвольную поверхность S , помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \cos \alpha,$$

где $d\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением единичного вектора нормали \vec{n} к элементу поверхности, $d\vec{S} = \vec{n} dS$; α – угол между вектором напряженности \vec{E} и нормалью \vec{n} к элементу поверхности (рис. 5).

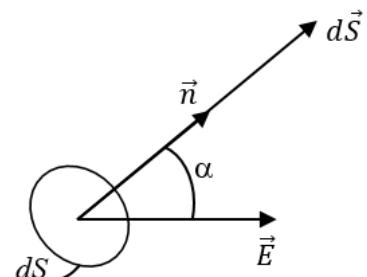


Рис. 5

10. Теорема Остроградского–Гаусса. Поток вектора напряженности \vec{E} через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды q_1, q_2, \dots, q_N ,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i ,$$

где $\sum_{i=1}^N q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности; N – число зарядов.

11. Связь между напряженностью и потенциалом:

$$\vec{E} = - \left(i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \text{ или } \vec{E} = - \operatorname{grad} \phi ,$$

где i, j, k – единичные векторы координатных осей x, y, z .

Знак «минус» показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь выражается таким образом:

$$E = - \frac{d\phi}{dr}; \quad \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 E dr .$$

В случае однородного поля

$$E = \frac{\Delta\phi}{d}; \quad \Delta\phi = Ed ,$$

где $\Delta\phi$ – разность потенциалов двух точек поля вдоль силовой линии, $\Delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)$; d – расстояние между этими точками.

12. Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i ; \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i ,$$

где \vec{E} – напряженность результирующего поля, созданного несколькими точечными зарядами, равная векторной сумме напряженностей складываемых полей; ϕ – потенциал поля, созданного системой N точечных зарядов, равный алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными точечными зарядами.

13. Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда q из одной точки поля, имеющей потенциал ϕ_1 , в другую, имеющую потенциал ϕ_2 ,

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

14. Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i,$$

где Φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, в которой находится заряд q_i , всеми зарядами, кроме i -го.

15. Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2},$$

где q – заряд, накопленный на конденсаторе; $(\Phi_1 - \Phi_2)$ – разность потенциалов между обкладками.

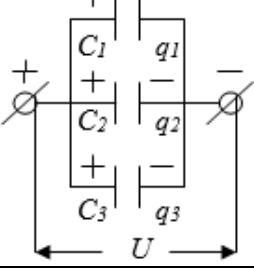
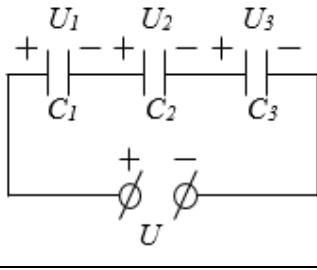
16. Электроемкость уединенной проводящей сферы радиусом R , находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ :

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R,$$

где S – площадь пластин; d – расстояние между пластинами; ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

17. Соединение конденсаторов в батареи (табл. 1).

Таблица 1

Соединение	Параллельное	Последовательное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$U_1 = U_2 = U_3 = U_n = \text{const}$	$q_1 = q_2 = q_3 = q_n = \text{const}$
Суммируемые величины	$q = \sum_{i=1}^n q_i$	$U = \sum_{i=1}^n U_i$
Результирующая емкость	$C = \sum_{i=1}^n C_i$	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

18. Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2},$$

где q – заряд конденсатора; C – электроемкость; U – разность потенциалов между обкладками.

19. Пондеромоторная сила – сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга,

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 S},$$

где знак «минус» указывает, что сила F – сила притяжения.

20. Объемная плотность энергии

$$\omega_E = \frac{dW}{dV}.$$

В случае однородного поля, то есть поля, напряженность которого в каждой точке его одинакова как по модулю, так и по направлению ($\vec{E} = \text{const}$),

$$\omega_E = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Для электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ плотность энергии через напряженность поля E :

$$\omega_E = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2.$$

21. Полная энергия электрического поля через объемную плотность энергии

$$W = \int_V \omega_E dV.$$

2.1.15. Электрический ток

1. Сила тока есть скалярная физическая величина, определяемая зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

2. Постоянный ток – ток, сила и направление которого не изменяются со временем:

$$I = \frac{q}{t},$$

где q – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t .

3. Плотность тока есть величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$J = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

4. Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho_s \frac{l}{S},$$

где ρ_s – удельное сопротивление вещества проводника; l – его длина; S – площадь поперечного сечения.

5. Закон Ома:

- для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R_{12}}, \quad \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \otimes \end{array} \xrightarrow{-} \left| \begin{array}{c} \varepsilon_{12} \\ | \end{array} \right| \xrightarrow{+} \begin{array}{c} \varphi_2 \\ \otimes \end{array};$$

- для однородного участка цепи ($\varepsilon_{12} = 0$)

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{12}}, \quad \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \otimes \end{array} \xrightarrow{I} \begin{array}{c} R \\ R \end{array} \xrightarrow{\varphi_2};$$

- для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad \begin{array}{c} \varepsilon \\ | \end{array} \xrightarrow{r} \begin{array}{c} R \\ R \end{array},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; U_{12} – падение напряжения на участке цепи; R_{12} – сопротивление участка цепи; R – сопротивление внешней цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока; ε – ЭДС всех источников тока цепи.

6. Работа постоянного тока на участке за время t :

$$A = IUt.$$

7. Мощность тока P_R при прохождении тока по участку с сопротивлением R :

$$P_R = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

8. Полная мощность цепи – мощность, развивающаяся источником тока:

$$P = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R+r}.$$

9. Коэффициент полезного действия источника тока

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{UI}{\varepsilon I} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R+r}.$$

10. Закон Джоуля–Ленца. Если ток проходит по неподвижному проводнику, то вся работа идет на его нагревание. Количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время dt ,

$$dQ = I^2 R dt .$$

В случае постоянного тока ($I = \text{const}$)

$$Q = I^2 R t .$$

11. Законы Кирхгофа:

- первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 ,$$

где n – число токов, сходящихся в узле;

- второй закон Кирхгофа: в любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивление R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС ε_i , встречающихся в этом контуре, т.е.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i ,$$

где n – число участков, содержащих активное сопротивление; k – число источников в контуре.

При решении задач по законам Кирхгофа надо придерживаться следующих правил:

1. Обозначить на схеме буквами узлы и контуры.
2. Произвольно выбрать направления токов (если они не оговорены условием задачи) во всех участках цепи и обозначить их на чертеже стрелками.

3. Учесть направление токов при составлении первого закона. Положительными считать токи, подходящие к узлу, а отрицательными – отходящие от узла.

4. Составить систему уравнений для первого закона Кирхгофа. Число уравнений, составленных по этому закону, должно быть на единицу меньше числа узлов в цепи.

5. Выбрать произвольно направление обхода контуров. Условиться, что ЭДС в уравнении будет положительной, если направление от отрицательного полюса к положительному совпадает с направлением обхода, в противном случае ЭДС следует считать отрицательной.

6. Считать падение напряжения в цепи (IR) положительным, если выбранное ранее направление тока на этом участке (между двумя узлами) совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным, если направление тока не совпадает с направлением обхода контура.

7. Первый контур выбрать произвольно. При составлении уравнений следующих контуров надо включать в них контуры, ранее не входящие.

8. Число уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, определяется следующими условиями. Если число контуров в цепи m , а узлов в ней n , то число независимых уравнений, достаточных для решения, будет равно $m - n + 1$.

9. Получение в ответе токов с отрицательными знаками означает, что было выбрано направление, обратное действительному.

2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = 6t - 0,125 t^3$. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

Дано: $x = 6t - 0,125 t^3$; $t_1 = 2$ с; $t_2 = 6$ с.

Найти: $\langle v \rangle$.

Решение. Найдем координаты точки в моменты времени t_1 и t_2 :

$$x_1 = 6t_1 - 0,125 t_1^3 = 6 \cdot 2 - 0,125 \cdot 2^3 = 11 \text{ м};$$

$$x_2 = 6t_2 - 0,125 t_2^3 = 6 \cdot 6 - 0,125 \cdot 6^3 = 9 \text{ м}.$$

Проекция вектора скорости на ось x изменяется с течением времени по закону

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6t - 0,125 t^3) = 6 - 0,375 t^2.$$

Найдем значения v_x в моменты времени t_1 и t_2 :

$$v_{1x} = 6 - 0,375t_1^2 = 6 - 0,375 \cdot 2^2 = 4,5 \text{ м/с};$$

$$v_{2x} = 6 - 0,375t_2^2 = 6 - 0,375 \cdot 6^2 = -7,5 \text{ м/с.}$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что направление движения точки изменяется на противоположное, так как в момент времени $t_1 = 2$ с точка движется в сторону положительного направления оси x (положительное значение v_x), а в момент времени t_2 – в противоположном направлении (отрицательное значение v_x). Момент времени t_0 , когда точка изменяет направление движения, найдем из условия

$$v_x = 6 - 0,375t_0^2 = 0.$$

Тогда

$$t_0 = \pm \sqrt{\frac{6}{0,375}} = \pm 4 \text{ с.}$$

Отрицательное значение корня не удовлетворяет условию задачи, поэтому принимаем $t_0 = 4$ с.

Найдем координату точки в момент времени t_0 :

$$x_0 = 6t_0 - 0,125t_0^3 = 6 \cdot 4 - 0,125 \cdot 4^3 = 16 \text{ м.}$$

Найдем среднюю путевую скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{(x_0 - x_1) + (x_0 - x_2)}{t_2 - t_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\langle v \rangle = \frac{(16 - 11) + (16 - 9)}{6 - 2} \text{ м/с} = 3 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\langle v \rangle = 3$ м/с.

Пример 2. Точка движется по дуге окружности радиуса R . Ее скорость зависит от пройденного пути S по закону $v = \alpha\sqrt{S}$, где α – постоянная. Найти угол φ между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от S .

Дано: R – радиус окружности, по которой движется точка; $v = \alpha\sqrt{S}$ – зависимость скорости от пройденного пути; α – постоянная.

Найти: $\varphi = f(S)$.

Решение. Из рис. 6 видно, что

$$\varphi = \arctg \frac{a_n}{a_\tau}, \quad (1)$$

где a_n , a_τ – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения.

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha^2 S}{R}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\alpha \sqrt{S}) = \frac{\alpha}{2\sqrt{S}} \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha v}{2\sqrt{S}} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Подставляя значения a_n и a_τ в уравнение (1), получим $\varphi = \arctg 2S/R$.

Анализ размерности показывает, что $2S/R$ – величина безразмерная, и убеждает в правдоподобности ответа.

Ответ: $\varphi = \arctg 2S/R$.

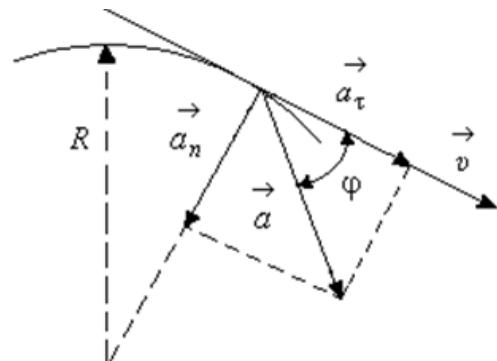


Рис. 6

Пример 3. Вентилятор вращается с частотой $n_0 = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ оборотов. Какое время t прошло с момента выключения до полной его остановки?

Дано: $n_0 = 900 \text{ мин}^{-1} = 15 \text{ с}^{-1}$; $N = 75$.

Найти: t .

Решение. Пусть вентилятор вращается относительно оси z (рис. 7).

Так как движение является равнозамедленным, то вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$ направлен противоположно вектору угловой скорости $\vec{\omega}$. Запишем уравнение движения относительно оси z :

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\epsilon_z t^2}{2}. \quad (2)$$

Проекция вектора угловой скорости на ось z изменяется с течением времени по закону

$$\omega_z = \omega_{0z} + \epsilon_z t.$$

В момент остановки $\omega_z = 0$, поэтому

$$\epsilon_z = -\frac{\omega_{0z}}{t},$$

где t – время движения вентилятора после выключения до остановки.

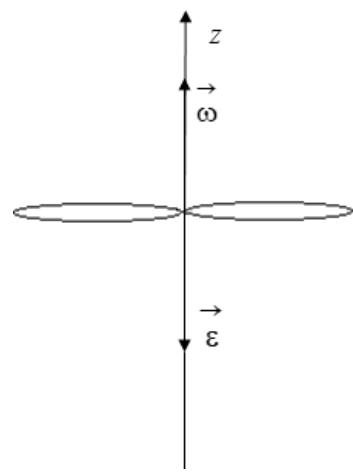


Рис. 7

Подставим это выражение в уравнение (2), учитывая, что $\varphi = 0$:

$$\varphi = \omega_{0z}t - \frac{\omega_{0z}t}{2} = \frac{\omega_{0z}t}{2}.$$

Так как $\varphi = 2\pi N$, $\omega_{0z} = \omega_0 = 2\pi n_0$, то

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_{0z}} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{2\pi n_0} = \frac{2N}{n_0}.$$

Выполним проверку размерности:

$$[t] = \frac{[N]}{[n_0]} = \frac{1}{c^{-1}} = c.$$

Произведем вычисления:

$$t = \frac{2 \cdot 75}{15} = 10 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 10 \text{ с.}$

Пример 4. Груз массой 80 кг находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 17° . Горизонтально направленная сила вызывает движение груза по плоскости вверх с ускорением $0,20 \text{ м/с}^2$. Найти величину этой силы, если коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен 0,25.

Дано: $m = 80 \text{ кг}$; $\alpha = 17^\circ$; $a = 0,20 \text{ м/с}^2$; $\mu = 0,25$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Найти: F .

Решение. Изобразим рис. 8 и укажем все силы, действующие на груз.

На груз действуют четыре силы: $m\vec{g}$ – сила тяжести; \vec{F} – горизонтально направленная сила; \vec{F}_{tp} – сила трения скольжения; \vec{N} – сила нормальной реакции опоры.

Рассмотрим движение груза в декартовой системе координат. Ось x проведем по направлению движения груза параллельно наклонной плоскости, а ось y – перпендикулярно к ней. Укажем направление вектора ускорения \vec{a} .

Запишем уравнение второго закона Ньютона для груза в векторной форме:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{tp} + \vec{F} = m\vec{a}. \quad (3)$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось y :

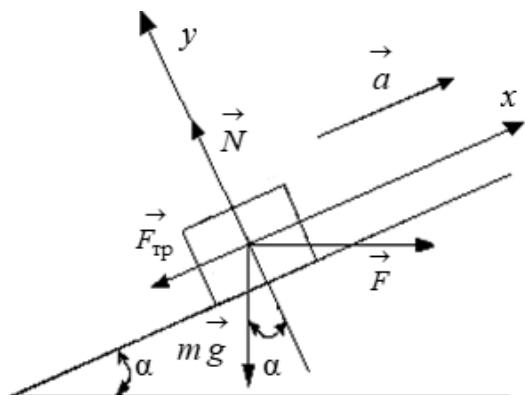


Рис. 8

$$N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha = 0.$$

Тогда $N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha$. Сила трения скольжения пропорциональна силе нормальной реакции опоры, поэтому

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu (mg \cos \alpha + F \sin \alpha).$$

Запишем уравнение (3) в проекциях на ось x :

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha = ma.$$

Подставляя выражение для $F_{\text{тр}}$, получим

$$F \cos \alpha - \mu mg \cos \alpha - \mu F \sin \alpha - mg \sin \alpha = ma.$$

Тогда

$$F = \frac{m(\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha + a)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Сделаем подстановку числовых значений:

$$F = \frac{80(0,25 \cdot 9,81 \cdot \cos 17^\circ + 9,81 \cdot \sin 17^\circ + 0,20)}{\cos 17^\circ - 0,25 \sin 17^\circ} \approx 4,9 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Ответ: $F = 4,9 \cdot 10^2 \text{ Н.}$

Пример 5. Блок массой $m = 0,4 \text{ кг}$, имеющий форму диска, вращается под действием силы натяжения невесомой нерастяжимой нити, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 0,3 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,7 \text{ кг}$. Определить силы натяжения нити по обе стороны блока.

Дано: $m = 0,4 \text{ кг}$; $m_1 = 0,3 \text{ кг}$; $m_2 = 0,7 \text{ кг}$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Найти: T_1 ; T_2 .

Решение. Изобразим рис. 9 и укажем силы, действующие на грузы и блок. На каждый из грузов действуют две силы: сила тяжести $m g$ и сила натяжения нити \vec{T} . Так как $m_1 < m_2$, то первый груз будет подниматься вверх, а второй – опускаться вниз. Диск будет вращаться по часовой стрелке.

Из условия нерастяжимости нити следует, что грузы будут двигаться с одинаковым ускорением a . Запишем уравнение второго закона Ньютона для первого и второго грузов в векторной форме:

$$m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}; \quad m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}.$$

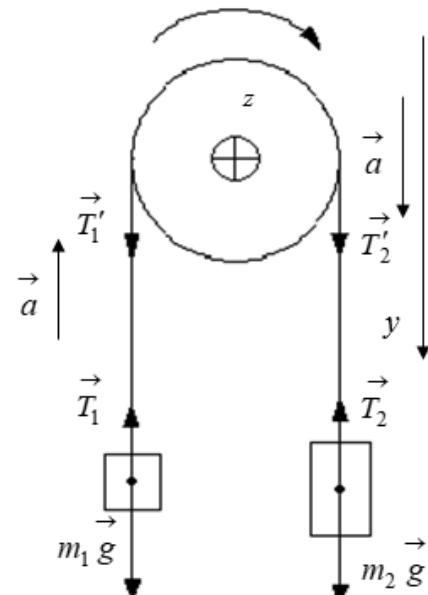


Рис. 9

Запишем эти уравнения в проекциях на ось y :

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= m_1(g + a) \\ T_2 &= m_2(g - a) \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Со стороны нити на диск действуют силы натяжения \vec{T}_1' и \vec{T}_2' . Вращающий момент, создаваемый этими силами относительно оси z , проходящей через центр диска и направленной перпендикулярно плоскости рисунка от нас,

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} = -T_1' R + T_2' R = (T_2' - T_1') R,$$

где R – радиус диска.

Так как нить по условию задачи невесомая, то $T_2' = T_2$; $T_1' = T_1$.

Тогда

$$M_z = (T_2 - T_1) R.$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения для диска:

$$M_z = I_z \varepsilon_z.$$

Так как $I_z = \frac{mR^2}{2}$, $\varepsilon_z = \frac{a}{R}$, то, делая подстановку, можем записать

$$(T_2 - T_1) R = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R}; \quad a = \frac{2(T_2 - T_1)}{m}.$$

Подставив выражения (4), определяющие T_1 и T_2 , после несложных преобразований получим формулу

$$a = \frac{2g(m_2 - m_1)}{m + 2(m_2 + m_1)}.$$

Подставим в нее числовые значения:

$$a = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot (0,7 - 0,3)}{0,4 + 2 \cdot (0,7 + 0,3)} = 3,27 \text{ м/с}^2.$$

Найдем значения T_1 и T_2 :

$$T_1 = m_1(g + a) = 0,3(9,81 + 3,27) \approx 3,9 \text{ Н};$$

$$T_2 = m_2(g - a) = 0,7(9,81 - 3,27) \approx 4,6 \text{ Н}.$$

Ответ: $T_1 = 3,9 \text{ Н}$; $T_2 = 4,6 \text{ Н}$.

Пример 6. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вдоль оси вращения скамейки (вертикально). Стержень служит осью вращения колеса, находящегося на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n_0 = 10 \text{ c}^{-1}$. Радиус R колеса равен 20 см, его масса $m = 3 \text{ кг}$. Определить частоту вращения скамьи n , если человек повернет стержень на угол 180° . Суммарный момент инерции человека и скамьи $I = 6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Масса колеса равномерно распределена по ободу.

Дано: $n_0 = 10 \text{ c}^{-1}$; $R = 0,2 \text{ м}$; $m = 3 \text{ кг}$; $I = 6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $\alpha = 180^\circ$.

Найти: n .

Решение. Согласно условию задачи момент внешних сил относительно оси вращения z можно считать равным нулю. В этом случае проекция вектора момента импульса всей системы (рис. 10) на ось z изменяться не будет (закон сохранения момента импульса).

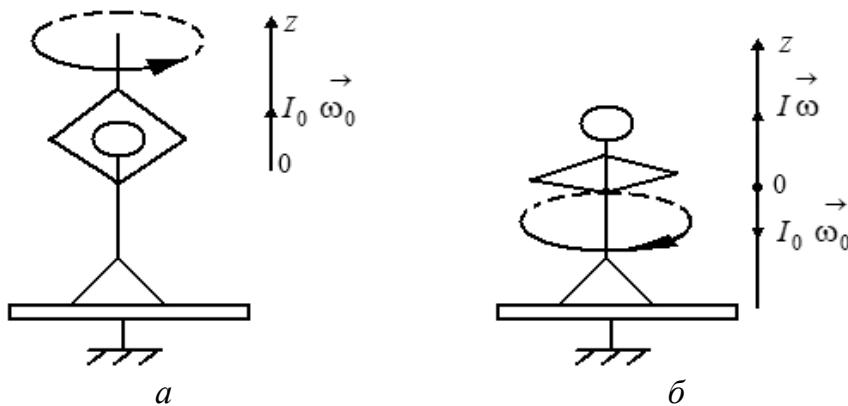


Рис. 10

Запишем закон сохранения момента импульса в проекциях на ось z , учитывая, что в начальный момент времени скамья и человек были неподвижны:

$$L_{oz} = L_z + L'_{oz} \quad \text{или} \quad I_0\omega_0 = I\omega - I_0\omega_0, \quad (5)$$

где $L_{oz} = I_0\omega_0$ проекция вектора момента импульса колеса на ось z в начальный момент времени; I_0 – момент инерции колеса относительно оси z ; ω_0 – угловая скорость колеса; $L_z = I\omega$ – проекция вектора момента импульса скамьи и человека на ось z , после того как человек повернул стержень; ω – угловая скорость скамьи; $L'_{oz} = -I_0\omega_0$ – проекция вектора момента импульса колеса на ось z , после того как человек повернул стержень.

Из уравнения (5) выразим ω :

$$\omega = \frac{2I_0\omega_0}{I}. \quad (6)$$

Момент инерции колеса с массой, равномерно распределенной по ободу, $I_0 = mR^2$. Так как $\omega = 2\pi n$, $\omega_0 = 2\pi n_0$, то, делая подстановку в уравнение (6) и произведя сокращения, получим

$$n = \frac{2I_0\omega_0}{I} = \frac{2mR^2n_0}{I}.$$

Подставив числовые значения и выполнив вычисления, получим

$$n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,2^2 \cdot 10}{6} = 0,4 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n = 0,4 \text{ с}^{-1}$.

Пример 7. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой $m = 30 \text{ кг}$. Определить работу A , которая при этом будет совершена силами гравитационного поля Земли. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и её радиус R считать известными.

Дано: $m = 30 \text{ кг}$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$.

Найти: A .

Решение. Механическую систему Земля–метеорит можно считать замкнутой. Со стороны Земли на метеорит действует сила тяготения. Это консервативная сила, поэтому при движении метеорита в поле тяготения Земли его механическая энергия изменяться не будет.

Так как метеорит был бесконечно далеко удален от Земли, то его потенциальная энергия в начальный момент времени была равна нулю:

$$E_{p1} = -G \frac{mM}{r} = 0,$$

где G – гравитационная постоянная; m – масса метеорита; M – масса Земли; r – расстояние от центра масс Земли до метеорита.

Если $r \rightarrow \infty$, то $E_p \rightarrow 0$. Потенциальная энергия метеорита вблизи поверхности Земли

$$E_{p2} = -G \frac{mM}{R},$$

где R – радиус Земли.

В соответствии с законом сохранения механической энергии

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$

где E_{k1}, E_{k2} – кинетические энергии метеорита в начальный момент времени и вблизи поверхности Земли.

По мере приближения к Земле потенциальная энергия метеорита будет убывать, а его кинетическая энергия – увеличиваться. При движении метеорита в гравитационном поле Земли сила тяготения совершают работу. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии метеорита и совершается за счет убыли его потенциальной энергии.

$$A = E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} = -E_{p2} = -G \frac{mM}{R}. \quad (7)$$

На метеорит вблизи поверхности Земли действует сила тяготения

$$F = G \frac{mM}{R^2}.$$

Если пренебречь суточным вращением Земли, то в соответствии со вторым законом Ньютона $G \frac{mM}{R^2} = mg$, тогда $GM = gR^2$. Делая подстановку в уравнение (7), получим $A = mgR$.

Выполним вычисления:

$$A = 30 \cdot 9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 1,9 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 1,9 \cdot 10^9 \text{ Дж.}$

Пример 8. Диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости (рис. 11). Найти линейную скорость v центра масс диска у основания наклонной плоскости, если ее высота $h = 0,5 \text{ м}$, начальная скорость движения диска v_0 равна нулю, угол α , который плоскость составляет с горизонтом, равен 30° . Сколько времени будет скатываться диск?

Дано: $h = 0,5 \text{ м}$; $v_0 = 0 \text{ м/с}$;
 $\alpha = 30^\circ$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Найти: v ; t .

Решение. В начальный момент времени кинетическая энергия диска E_{k1} равна нулю, а его потенциальная энергия

$$E_{p1} = mgh,$$

где m – масса диска; g – ускорение свободного падения.

У основания наклонной плоскости потенциальная энергия диска E_{p2} равна нулю, а его кинетическая энергия

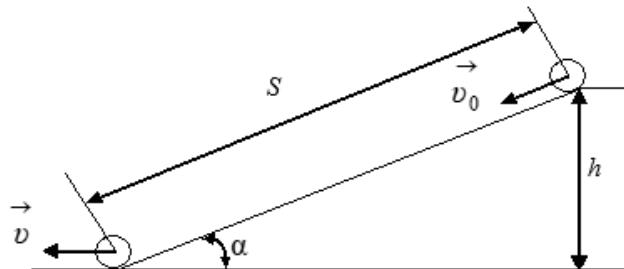


Рис. 11

$$E_{\text{к2}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения; $\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения; I – момент инерции диска относительно его геометрической оси (ось, проходящая через центр масс диска перпендикулярно плоскости рисунка); ω – угловая скорость диска относительно его геометрической оси.

Так как $I = \frac{mR^2}{2}$; $\omega = \frac{v}{R}$, где R – радиус диска, то $\frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{4}$. Тогда

$$E_{\text{к2}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}mv^2.$$

В соответствии с законом сохранения механической энергии

$$E_{\text{к1}} + E_{\text{р1}} = E_{\text{к2}} + E_{\text{р2}}.$$

Сделав подстановку, получим $mgh = \frac{3}{4}mv^2$.

Найдем скорость диска у основания наклонной плоскости:

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{3}gh}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{3} \cdot 9,81 \cdot 0,5} \approx 2,6 \text{ м/с.}$$

На диск во время движения действуют постоянные по величине силы. Следовательно, диск будет двигаться с постоянным по модулю ускорением a . В этом случае

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}; \quad (8)$$

$$v = v_0 + a t = a t, \quad (9)$$

где S – длина наклонной плоскости.

Решая уравнения (8) и (9) совместно, найдем время скатывания:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{2S}{v} = \frac{2h}{v \sin \alpha}.$$

Выполним вычисления:

$$t = \frac{2 \cdot 0,5}{2,6 \cdot \sin 30^\circ} \approx 0,77 \text{ с.}$$

Ответ: $v = 2,6 \text{ м/с}$; $t = 0,77 \text{ с}$.

Пример 9. Пружина жесткостью $k = 500 \text{ Н/м}$ сжата силой $F = 100 \text{ Н}$. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $l = 2 \text{ см}$.

Дано: $k = 500 \text{ Н/м}$; $F = 100 \text{ Н}$; $l = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$.

Найти: A .

Решение. Пусть внешняя сила F сжимает пружину на величину l_0 . В соответствии с законом Гука $F = k l_0$. Так как $l_0 = \frac{F}{k}$, то потенциальная энергия пружины в этом состоянии

$$E_{p1} = \frac{k l_0^2}{2} = \frac{F^2}{2k}.$$

Потенциальная энергия пружины, сжатой на величину $(l_0 + l)$,

$$E_{p2} = \frac{k (l_0 + l)^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{F}{k} + l \right)^2.$$

Работа, совершаемая внешней силой при сжатии пружины, идет на увеличение ее потенциальной энергии. В соответствии с законом сохранения механической энергии

$$A = E_{p2} - E_{p1} = \frac{k}{2} \left(\frac{F}{k} + l \right)^2 - \frac{F^2}{2k} = F l + \frac{k l^2}{2}.$$

Подставим числовые значения:

$$A = 100 \cdot 0,02 + \frac{500 \cdot 0,02^2}{2} \approx 2,1 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 2,1 \text{ Дж}$.

Пример 10. Якорь двигателя вращается с частотой $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$. Определить врачающий момент M , если двигатель развивает мощность $N = 500 \text{ Вт}$.

Дано: $n = 1500 \text{ мин}^{-1} = 25 \text{ с}^{-1}$; $N = 500 \text{ Вт}$.

Найти: M .

Решение. При повороте якоря на угол $d\phi$ врачающий момент M совершает работу

$$dA = M_z d\phi = M d\phi,$$

где $M_z = M$ – проекция вектора момента силы на ось вращения z .

Мощность двигателя

$$N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \omega = 2\pi n M,$$

где $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость якоря.

Найдем вращающий момент:

$$M = \frac{N}{2\pi n}.$$

Выполним проверку размерности:

$$[M] = \frac{[N]}{[n]} = \frac{\text{Вт}}{\text{с}^{-1}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Выполним вычисления:

$$M = \frac{500}{2 \cdot 3,14 \cdot 25} \approx 3,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $M = 3,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Пример 11. Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси, зависит от угла поворота φ по закону $E_k \sim \varphi^4$. При этом вращающий момент $M \sim \varphi^n$. Найти значение n .

Дано: $E_k \sim \varphi^4$; $M \sim \varphi^n$.

Найти: n .

Решение. Пусть тело вращается относительно неподвижной оси z . Его кинетическая энергия

$$E_k = \frac{I_z \omega_z^2}{2},$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω_z – проекция вектора угловой скорости на ось z .

Так как $E_k \sim \varphi^4$, то $\frac{I_z \omega_z^2}{2} \sim \varphi^4$. Тогда $\omega_z \sim \varphi^2$.

Запишем уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси z :

$$M_z = I_z \varepsilon_z \quad \text{или} \quad M_z = I_z \frac{d\omega_z}{dt}, \quad (10)$$

где M_z – проекция вектора момента силы на ось z ; $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ – проекция вектора углового ускорения на ось z .

Делая подстановку $\omega_z \sim \varphi^2$ в уравнение (10), получим

$$M_z \sim \frac{d\varphi^2}{dt} \sim \varphi \frac{d\varphi}{dt} \sim \varphi \omega_z \sim \varphi^3,$$

где $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$.

Ответ: $n = 3$.

Пример 12. Смесь азота и гелия при температуре 27 °С находится под давлением $P = 1,3 \cdot 10^2$ Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов.

Дано: $P = 1,3 \cdot 10^2$ Па; $m_1 = 0,7 m$; $\mu_1 = 28$ г/моль = $28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\mu_2 = 4$ г/моль = $4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 27 + 273 = 300$ К.

Найти: n_1 и n_2 .

Решение. Давление смеси выразим по закону Дальтона:

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2.$$

где P_1 – парциальное давление азота в смеси; P_2 – парциальное давление гелия.

Выразим P_1 и P_2 из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V}; \quad P_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \frac{RT}{V}.$$

Найдем соотношение между P_1 и P_2 :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1 / \mu_1}{m_2 / \mu_2} = \frac{0,7m \cdot 4}{28 \cdot 0,3m} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } P_2 = 3P_1.$$

Так как

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2 = P_1 + 3P_1 = 4P_1,$$

следовательно,

$$P_1 = \frac{1}{4} P_{\text{см}}; \quad P_2 = \frac{3}{4} P_{\text{см}}.$$

С другой стороны, давление любого газа можно легко выразить через концентрацию его молекул n и температуру:

$$P_1 = n_1 kT; \quad P_2 = n_2 kT.$$

Отсюда

$$n_1 = \frac{P_1}{kT} = \frac{1}{4} \frac{P_{\text{см}}}{kT}; \quad n_2 = \frac{P_2}{kT} = \frac{3}{4} \frac{P_{\text{см}}}{kT} = 3n_1.$$

Проверим размерность:

$$[n] = \frac{\text{Па}}{\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \text{К}} = \frac{\text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{м}^{-3}.$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{1}{4} \frac{1,3 \cdot 10^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 0,8 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3};$$

$$n_2 = 3n_1 = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $n_1 = 0,8 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$; $n_2 = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$.

Пример 13. Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекул гелия и азота при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Определить полную энергию всех молекул каждого из газов. Массы газов одинаковы: $m_1 = m_2 = 100$ г.

Дано: $t = 27^\circ\text{C}$; $T = 300$ К; $m_1 = m_2 = 100$ г = $100 \cdot 10^{-3}$ кг; $\mu_1 = 4$ г/моль = $= 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $i_1 = 3$; $\mu_2 = 28$ г/моль = $= 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $i_2 = 5$.

Найти: $\langle \varepsilon_{\text{пост}_1} \rangle$; $\langle \varepsilon_{\text{пост}_2} \rangle$; $\langle \varepsilon_1 \rangle$; $\langle \varepsilon_2 \rangle$; $\langle v_{\text{кв}_1} \rangle$; $\langle v_{\text{кв}_2} \rangle$; U_1 ; U_2 .

Решение:

1. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы при данной температуре T одинакова для любых молекул, т.е.

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}_1} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост}_2} \rangle = \frac{3}{2} kT .$$

2. Полная кинетическая энергия молекулы газа определяется по формуле

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT .$$

Тогда для молекул двух разных газов

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{i_1}{2} kT , \quad \langle \varepsilon_2 \rangle = \frac{i_2}{2} kT .$$

3. Внутренняя энергия, заключенная в 100 г каждого из газов, определяется по формулам

$$U_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{i_1}{2} RT , \quad U_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \frac{i_2}{2} RT .$$

4. Средняя квадратичная скорость молекул этих газов зависит от их молярной массы газа или от их масс, т.е.

$$\langle v_{\text{кв}_1} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_1}} , \quad \langle v_{\text{кв}_2} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2}} .$$

Проверим размерность:

$$[U] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} = \text{Дж} ;$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Произведем вычисления:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}_1} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост}_2} \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж};$$

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{3}{2} kT = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{Дж};$$

$$\langle \varepsilon_2 \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 10,4 \cdot 10^{-21} \text{Дж};$$

$$U_1 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \frac{3}{2} 8,31 \cdot 300 = 93,5 \cdot 10^3 \text{Дж} = 93,5 \text{ кДж};$$

$$U_2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} 8,31 \cdot 300 = 22,3 \cdot 10^3 \text{Дж} = 22,3 \text{ кДж};$$

$$\langle v_{\text{кв1}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 300}{4 \cdot 10^{-3}}} = 13,7 \cdot 10^2 \text{ м/с};$$

$$\langle v_{\text{кв2}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} = 5,17 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_{\text{пост1}} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост2}} \rangle = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $\langle \varepsilon_1 \rangle = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$;
 $\langle \varepsilon_2 \rangle = 10,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $U_1 = 93,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; $U_2 = 22,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$;
 $\langle v_{\text{кв1}} \rangle = 13,7 \cdot 10^2 \text{ м/с}$; $\langle v_{\text{кв2}} \rangle = 5,17 \cdot 10^2 \text{ м/с}$.

Пример 14. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей $\gamma = 1,67$.

Дано: $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $\gamma = 1,67$.

Найти: $C_{V\text{уд}}$, $C_{P\text{уд}}$.

Решение. Исходя из классической теории теплоемкостей идеального газа, имеем

$$C_{V\text{уд}} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}, \quad C_{P\text{уд}} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}.$$

Определим i из выражения

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i},$$

отсюда

$$i = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad i = \frac{2}{1,67 - 1} = \frac{2}{0,67} = 3.$$

Следовательно, газ одноатомный.

Проверим размерность:

$$[C_{\text{уд}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Произведем вычисления:

$$C_{V_{\text{уд}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8,31}{4 \cdot 10^{-3}} = 3,10 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)};$$

$$C_{P_{\text{уд}}} = \frac{3+2}{2} \cdot \frac{8,31}{4 \cdot 10^{-3}} = 5,16 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Ответ: $C_{V_{\text{уд}}} = 3,10 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}$; $C_{P_{\text{уд}}} = 5,16 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Пример 15. Азот, занимавший при давлении $P_1 = 10^5 \text{ Па}$ объем $V_1 = 10 \text{ л}$, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершенную газом при следующих процессах: а) изобарном; в) изотермическом; с) адиабатном (рис. 12).

Дано: $P_1 = 10^5 \text{ Па}$; $V_1 = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$;
 $\frac{V_2}{V_1} = 2$; $i = 5$.

Найти: P_2 ; A_{1-2} ; P_3 ; A_{1-3} ; P_4 ; A_{1-4} .

Решение:

1. Рассмотрим изобарический процесс 1-2:
 $P = \text{const}$, следовательно, $P_2 = P_1$,

$$A_{1-2} = P_1(V_2 - V_1);$$

$$A_{1-2} = 10^5(20 - 10) \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ Дж.}$$

2. При изотермическом расширении 1-3 давление уменьшается.
По закону Бойля–Мариотта

$$P_1 V_1 = P_3 V_2;$$

$$P_3 = \frac{P_1 V_1}{V_2}, \quad P_3 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$A_{1-3} = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad A_{1-3} = 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \ln 2 = 690 \text{ Дж.}$$

3. В адиабатном процессе 1-4 P_4 найдем из уравнения Пуассона:

$$P_1 V_1^\gamma = P_4 V_2^\gamma;$$

$$P_4 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = 1,4; \quad P_4 = P_1 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{2} \right)^{1,4} = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении, равна убыли внутренней энергии газа:

$$A_{1-4} = -\Delta U_{1-4} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_4).$$

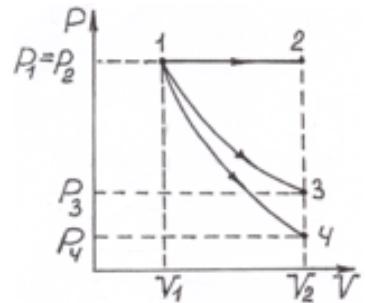


Рис. 12

По уравнению Менделеева–Клапейрона

$$\frac{m}{\mu} RT_1 = P_1 V_1 \quad \text{и} \quad \frac{m}{\mu} RT_4 = P_4 V_2,$$

следовательно,

$$A_{1-4} = \frac{i}{2} (P_1 V_1 - P_4 V_2) = \frac{5}{2} (10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} - 0,38 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}) = 600 \text{ Дж.}$$

Ответ: $P_2 = 10^5$; $A_{1-2} = 1000$ Дж; $P_3 = 0,5 \cdot 10^5$ Па; $A_{1-3} = 690$ Дж;
 $P_4 = 0,38 \cdot 10^5$ Па; $A_{1-4} = 600$ Дж.

Пример 16. 1 моль идеального газа, имеющий первоначально температуру $T_1 = 290$ К, расширяется изобарически до тех пор, пока его объем не возрастает в два раза. Затем газ охлаждается изохорически до первоначальной температуры T_1 . Определить приращение внутренней энергии газа ΔU , работу A , совершающую газом, количество полученной газом теплоты Q .

Дано: $\frac{m}{\mu} = 1$ моль; $P_2 = P_1$; $V_2 = 2V_1$; $V_3 = V_2$;

$$T_3 = T_1.$$

Найти: ΔU_{1-2-3} ; A_{1-2-3} ; Q_{1-2-3} .

Решение. Изобразим графики процессов в координатах P – V (рис. 13).

Внутренняя энергия газа – это функция состояния; ее изменение не зависит от пути перехода системы из начального состояния в конечное.

Поэтому

$$\Delta U_{1-2-3} = U_3 - U_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_3 - T_1),$$

но так как $T_3 = T_1$ (по условию задачи), то $\Delta U_{1-2-3} = 0$.

Работа, совершаемая газом,

$$A_{1-2-3} = A_{1-2} + A_{2-3}.$$

Так как в изохорическом процессе не происходит изменения объема ($\Delta V = 0$), то $A_{2-3} = 0$, следовательно,

$$A_{1-2-3} = A_{1-2} = P_1(V_2 - V_1) = P_1(2V_1 - V_1) = P_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1.$$

Количество теплоты, полученное в сложном процессе 1-2-3, найдем из первого начала термодинамики:

$$Q_{1-2-3} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3}.$$

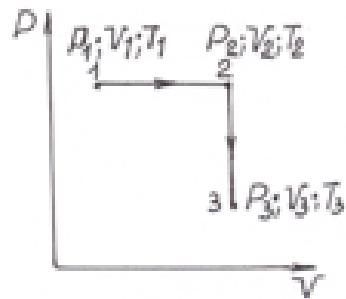


Рис. 13

Учитывая, что $\Delta U_{1-2-3} = 0$, имеем

$$Q_{1-2-3} = A_{1-2-3} = \frac{m}{\mu} RT_1.$$

Произведем вычисления:

$$Q_{1-2-3} = A_{1-2-3} = 8,31 \cdot 290 = 2,41 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\Delta U = 0$, $Q_{1-2-3} = A_{1-2-3} = 2,41 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$

Пример 17. Углекислый газ CO_2 , начальная температура которого 360 К, адиабатически сжимается до $1/20$ своего первоначального объема. Определить: а) температуру газа в конце сжатия T_2 ; б) изменение внутренней энергии ΔU ; в) работу, совершенную над газом при сжатии, A (масса газа 20 г).

Дано: $m = 20 \text{ г} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$; $\mu = 44 \text{ г/моль} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; $T_1 = 360 \text{ К}$; $i = 6$; $V_2 = 1/20 V_1$.

Найти: T_2 ; ΔU ; A .

Решение:

1. Температуру в конце сжатия определим по уравнению адиабатного процесса, записанного для переменных T и V :

$$T_1 V_1^{i-1} = T_2 V_2^{i-1} \text{ или } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{i-1}. \quad (11)$$

Так как CO_2 – трехатомный газ, $i = 6$ и $\gamma = 4/3$.

2. Адиабатный процесс происходит без теплообмена и изменение внутренней энергии осуществляется за счет работы внешних сил, т.е. $Q = 0$;

$$\Delta U = -A.$$

Тогда работа газа в адиабатном процессе

$$A_{\text{ад}} = -\Delta U.$$

Изменение внутренней энергии определяется по формуле

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1). \quad (12)$$

Произведя подстановку (см. формулу (11)), получим

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{i-1} - 1 \right].$$

Проверим размерность:

$$[\Delta U] = \frac{\text{кг}}{\text{кг / моль}} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \text{К} = \text{Дж.}$$

Произведем вычисления:

$$T_2 = 360 \left(\frac{20}{1} \right)^{1/3} = 985 \text{ К};$$

$$\Delta U = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{6}{2} \cdot 8,31 \cdot 360 \left[(20)^{4/3-1} - 1 \right] = 7,05 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 7,05 \text{ кДж.}$$

Ответ: $T_2 = 985 \text{ К}$; $\Delta U = 7,05 \text{ кДж}$; $A = -7,05 \text{ кДж}$.

Пример 18. Температура пара, поступающего в паровую машину, $t_1 = 127 \text{ }^{\circ}\text{C}$; температура в конденсаторе $t_2 = 27 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Определить теоретически максимальную работу при затрате количества теплоты $Q = 4,2 \text{ кДж}$.

Дано: $t_1 = 127 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_1 = 127 + 273 = 400 \text{ К}$; $t_2 = 27 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_2 = 300 \text{ К}$; $Q_1 = Q = 4,2 \text{ кДж}$.

Найти: A .

Решение. Для того чтобы работа, совершаемая тепловым двигателем, была максимальной, необходимо, чтобы цикл, по которому работает двигатель, был обратимым. При наличии только двух терmostатов – нагревателя T_1 и холодильника T_2 – возможен только один обратный цикл – цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 3).

Коэффициент полезного действия этого цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (13)$$

но КПД любого теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (14)$$

где A – полезная работа, совершаемая двигателем за цикл; Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя (в цикле Карно это теплота, полученная в процессе изотермического расширения газа 1-2).

Приравнивая выражения (13) и (14), находим работу A :

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда

$$A = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{4,2(400 - 300)}{400} = 1,05 \text{ кДж.}$$

Ответ: $A = 1,05 \text{ кДж}$.

Пример 19. На высоте $h = 20$ см над горизонтальной трансмиссионной лентой, движущейся со скоростью $u_1 = 70$ м/с, подвешена параллельно ей пластинка площадью $S = 4$ см² (рис. 14). Какую силу надо приложить к этой пластинке, чтобы она оставалась неподвижной? Вязкость воздуха при нормальных условиях $\eta_0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с. В условиях опыта температура $t = 27$ °C.

Дано: $h = 20$ см, $u_1 = 70$ м/с, $S = 4$ см², $\eta_0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $t = 27$ °C, $T = 300$ К.

Найти: F .

Решение. Слои воздуха, непосредственно находящиеся над движущейся лентой, увлекаются ею, и в воздухе создается некоторый градиент скоростей $\frac{du}{dz}$. Между слоями движущегося воздуха создается сила трения $F_{\text{тр}}$. Эта сила действует и на пластинку со стороны движущихся слоев. Пластинка будет неподвижна, если приложенная внешняя сила F и сила трения $F_{\text{тр}}$ скомпенсируются, т.е.

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{тр}}; \quad F = F_{\text{тр}}.$$

Сила трения может быть найдена по уравнению Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S, \quad (15)$$

где $\frac{du}{dz}$ – производная скорости u движения слоя по координате z , причем ось oz перпендикулярна плоскостям трансмиссии и пластинки, направлена от трансмиссии к пластинке.

Вязкость газа η может быть рассчитана по формуле

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\text{ср}}^2 n}} \frac{\mu}{N_A} n.$$

Как видно, вязкость зависит только от природы газа (эффективного диаметра молекул d и молярной массы μ) и температуры T . Сравним вязкость при температуре T с вязкостью при нормальных условиях ($T_0 = 273$ К):

$$\eta_0 = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi \mu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\text{ср}}^2 n}} \frac{\mu}{N_A} n.$$

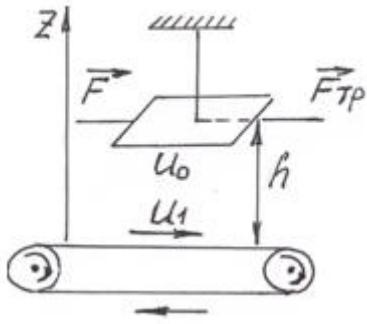


Рис. 14

Вязкость η при температуре T связана с вязкостью η_0 при нормальных условиях следующим соотношением:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}; \quad \eta = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (16)$$

Градиент скорости направленного движения слоев газа считают постоянным. Производная $\frac{du}{dz} = \text{const}$, ее можно заменить отношением изменения скорости Δu к приращению координаты Δz , $\Delta u = (0 - u_1)$, $\Delta z = h$ (рис. 4):

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = \left| \frac{\Delta u}{\Delta z} \right| = \frac{u_1}{h}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (16) и (17) в уравнение (15), получим

$$F = F_{\text{tp}} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{u_1}{h} S.$$

Проверим размерность:

$$[F] = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{М} \cdot \text{с} \cdot \text{с} \cdot \text{М}} \text{М}^2 = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{с}^2} = \text{Н.}$$

Произведем вычисления:

$$F = 1,7 \cdot 10^{-5} \frac{300}{273} \frac{70}{0,2} 4 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Ответ: $F = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Н.

Пример 20. 2 моля азота охлаждены до температуры -100 °С. Определить давление P , оказываемое газом на стенки сосуда, если объем, занимаемый газом, равен 0,1 л. Сравнить полученное давление P с давлением $P_{\text{ид}}$, которое имел бы азот, если бы сохранил при рассматриваемых условиях свойства идеального газа.

Дано: $\frac{m}{\mu} = 2$ моля; $t = -100$ °С; $T = 173$ К; $V = 0,1$ л $= 0,1 \cdot 10^{-3}$ м³ $= 10^{-4}$ м³.

Найти: $\frac{P}{P_{\text{ид}}}$.

Решение. Из уравнения состояния реального газа выразим давление P :

$$P = \frac{\frac{m}{\mu} RT}{V - \frac{m}{\mu} \alpha} - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}.$$

Значения постоянных a и b находим по прил. Б, табл. Б.1: для азота $a = 0,135 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$; $b = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Произведем вычисления:

$$P = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 173}{0,1 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 3,9 \cdot 10^{-5}} - (2)^2 \frac{0,135}{(10^{-4})^2} = 0,76 \cdot 10^8 \text{ Па} = 760 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Для сравнения найдем давление $P_{\text{ид}}$ из уравнения состояния идеального газа $P_{\text{ид}}V = \frac{m}{\mu}RT$:

$$P_{\text{ид}} = 2 \cdot 8,31 \cdot 173 / 10^{-4} = 2880 \cdot 10^4 = 0,28 \cdot 10^8 \text{ Па} = 280 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Тогда

$$\frac{P}{P_{\text{ид}}} = \frac{760 \cdot 10^5}{280 \cdot 10^5} = 2,65.$$

Следовательно, в этом случае уравнение Менделеева–Клапейрона непригодно для описания состояния охлажденного и сжатого азота.

Ответ: $\frac{P}{P_{\text{ид}}} = 2,65$.

Пример 21. Три точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 1 \text{ нКл}$ расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

Дано: $q_1 = q_2 = q_3 = 1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$.

Найти: q_4 .

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например q_1 , находился в равновесии.

Заряд q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (рис. 15):

$$\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} = 0, \quad (18)$$

где $\vec{F}_{1,2}$, $\vec{F}_{1,3}$, $\vec{F}_{1,4}$ – силы, с которыми действуют на заряд q_1 заряды q_2 , q_3 , q_4 .

Заменим векторное равенство (18) скалярным соотношением в проекции на ось x . Учитывая расположение зарядов, выберем ось x , проходящую

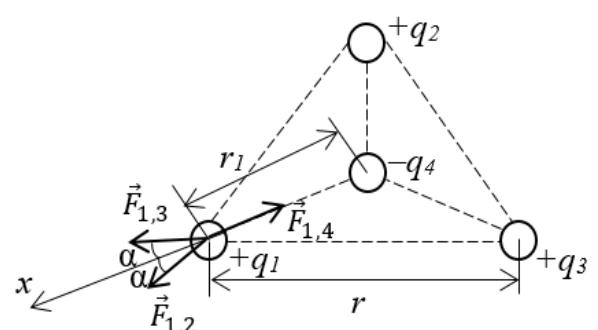


Рис. 15

через заряды q_1 и q_4 , то есть совпадающую с биссектрисой угла равностороннего треугольника:

$$F_{1,2} \cos \alpha + F_{1,3} \cos \alpha - F_{1,4} = 0.$$

Учитывая, что $F_{1,2} = F_{1,3}$, получим

$$2F_{1,2} \cos \alpha - F_{1,4} = 0.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3$, получим

$$2 \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cos \alpha - \frac{|q_1||q_4|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1^2} = 0$$

или

$$2 \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{|q_1||q_4|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1^2}.$$

Выполнив преобразования, найдем

$$|q_4| = \frac{2q_1r_1^2 \cos \alpha}{r^2}. \quad (19)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos \alpha} = \frac{r}{2\cos \alpha}; \quad \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

С учетом этого формула (19) примет следующий вид:

$$|q_4| = \frac{q_1}{2\cos \alpha} = \frac{q_1}{\sqrt{3}}.$$

Подставив численные значения, получим

$$|q_4| = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 577 \text{ пКл}.$$

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Ответ: $q_4 = -577 \text{ пКл}$.

Пример 22. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 30 \text{ нКл}$ и $q_2 = -10 \text{ нКл}$. Расстояние между двумя зарядами $d = 20 \text{ см}$. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15 \text{ см}$ от первого заряда, на расстоянии $r_2 = 10 \text{ см}$ от второго заряда (рис. 16).

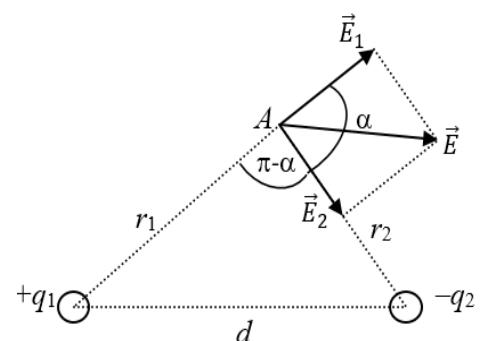


Рис. 16

Дано: $q_1 = 30 \text{ нКл} = 30 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$, $q_2 = -10 \text{ нКл} = -10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$, $d = 20 \text{ см} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $r_1 = 15 \text{ см} = 15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $r_2 = 10 \text{ см} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Найти: E .

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов.

Поэтому напряженность \vec{E} электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напряженность электрического поля, созданного в вакууме ($\epsilon = 1$)

первым зарядом q_1 : $E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$,

вторым зарядом q_2 : $E_1 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$.

Вектор \vec{E}_1 (рис. 16) направлен по силовой линии от заряда q_1 , так как заряд q_1 положителен; вектор \vec{E}_2 направлен так же по силовой линии, но к заряду q_2 , так как заряд q_2 отрицателен.

Абсолютное значение вектора \vec{E} найдем, используя теорему косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \alpha}, \quad (20)$$

где α – угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , может быть найден из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d ,

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} = \frac{20^2 - 15^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = \frac{75}{300} = 0,25.$$

Производя подстановку в уравнение (20) и вынося общий множитель $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ за знак корня, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}.$$

Подставив численные значения, получим

$$E = 9 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{(3 \cdot 10^{-8})^2}{(15 \cdot 10^{-2})^4} + \frac{(1 \cdot 10^{-8})^2}{(10 \cdot 10^{-2})^4} + 2 \frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{(15 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2} \cdot 0,25} = \\ = 1,67 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 16,7 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $E = 16,7 \text{ кВ/м}$.

Пример 23. Тонкое кольцо радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10^{-8}$ Кл/м. Какова напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 10$ см?

Дано: $R = 8$ см = $8 \cdot 10^{-2}$ м, $\tau = 10^{-8}$ Кл/м, $r = 10$ см = $10 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: E .

Решение. Поле создано зарядом, распределенным по тонкому кольцу заданного радиуса. Оно не обладает достаточной симметрией даже при равномерном распределении заряда (нельзя указать точную конфигурацию силовых линий), поэтому для расчета напряженности можно использовать только принцип суперпозиции \vec{E} .

Разобьем кольцо на элементарные участки dl (рис. 17a).

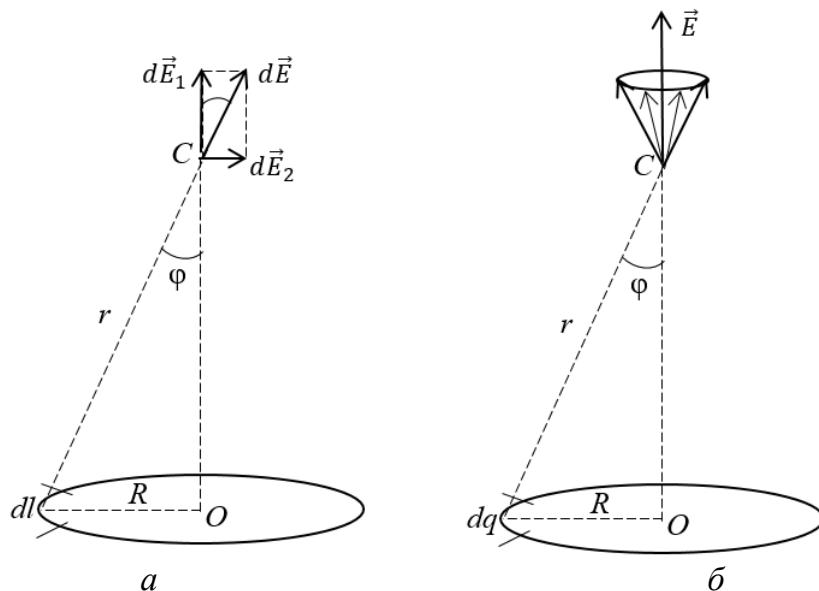


Рис. 17

Каждый такой участок можно принять за точечный заряд, несущий заряд $dq = \tau dl$. Элементарный заряд dq , находящийся на элементе dl , создает в данной точке С на расстоянии r вектор напряженности $d\vec{E}$, соответствующий по модулю

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от элемента заряда dq до точки поля С.

Векторы $d\vec{E}$ от всех элементарных участков образуют симметричный конический веер (рис. 17б). Из соображений симметрии можно заключить, что результирующий вектор \vec{E} направлен вдоль оси кольца.

Каждый из составляющих векторов $d\vec{E}$ вносит в результирующий вектор вклад $d\vec{E}_1$, составляющий по модулю

$$dE_1 = dE \cos \varphi$$

или

$$dE_1 = \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \varphi. \quad (21)$$

При этом составляющие $d\vec{E}_2$, параллельные плоскости кольца, в сумме дают нуль. Проинтегрировав по всему кольцу уравнение (21) и заменив $\cos \varphi$ через r и R ($\cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}$), получим абсолютное значение результирующего вектора \vec{E} :

$$\begin{aligned} E &= \int dE_1 = \oint \frac{\tau d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \varphi \int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\tau 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \varphi, \\ E &= \frac{\tau 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} = \frac{\tau R \sqrt{r^2 - R^2}}{2\epsilon_0 r^3}. \end{aligned}$$

Подставив численные значения, получим

$$E = \frac{10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-2} \sqrt{(10 \cdot 10^{-2})^2 - (8 \cdot 10^{-2})^2}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (10 \cdot 10^{-2})^3} = 2,71 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 2,71 \text{ кВ/м.}$$

Ответ: $E = 2,71 \text{ кВ/м.}$

Пример 24. Точечный заряд $Q = -2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$ расположен на продолжении оси диполя, электрический момент которого $P_q = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}\cdot\text{м}$, на расстоянии $r = 10 \text{ см}$ от центра (ближе к положительному заряду диполя). Какую работу надо совершить, чтобы перенести этот заряд в симметрично расположенную точку по другую сторону диполя? Плечо диполя $l \ll r$ (рис. 18).

Дано: $Q = -2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$, $P_q = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}\cdot\text{м}$, $r = 10 \text{ см} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $l \ll r$.

Найти: A^* .

Решение. Работа A^* , совершаемая внешними силами при перемещении заряда в электрическом поле, равна работе сил поля, взятой с обратным знаком:

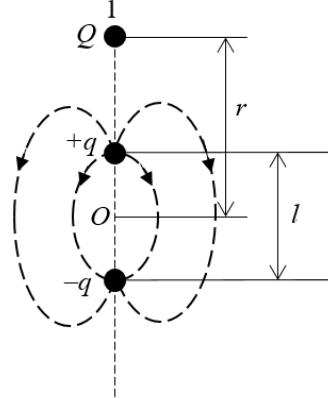


Рис. 18

$$A_{12}^* = -A_{12} = -Q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (22)$$

где φ_1, φ_2 – потенциалы соответственно начальной и конечной точек.

Поле создается двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$ диполя, и потенциалы точек 1 и 2 следует искать методом суперпозиции.

Как видно из рис. 18, точка 1 находится на расстоянии $(r - \ell/2)$ от положительного заряда и на расстоянии $(r + \ell/2)$ от отрицательного заряда. В соответствии с этим потенциал первой точки

$$\varphi_1 = \varphi'_+ + \varphi'_- = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r - \ell/2)} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r + \ell/2)}, \quad (23)$$

где φ'_+, φ'_- – потенциалы в первой точке, созданные соответственно положительным и отрицательным зарядами:

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r - \ell/2)}; \quad \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r + \ell/2)}.$$

Аналогично находим потенциал второй точки:

$$\varphi_2 = \varphi''_+ + \varphi''_- = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r + \ell/2)} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0(r - \ell/2)}. \quad (24)$$

Приведем к общему знаменателю каждое из выражений (23) и (24):

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\ell}{r^2(1 - \ell^2/4r^2)}; \quad (25)$$

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\ell}{r^2(1 - \ell^2/4r^2)}. \quad (26)$$

Если учесть, что $ql = P_q$ и при $r \gg l$ членами $\ell^2/4r^2$ можно пренебречь, то выражения (25) и (26) примут такой вид:

$$\varphi_1 = \frac{P_q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}; \quad \varphi_2 = -\frac{P_q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнении (22), получим

$$A^* = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = -Q\left(\frac{P_q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} + \frac{P_q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}\right) = -\frac{2QP_q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2};$$

$$A^* = -\frac{2(-2 \cdot 10^{-10}) \cdot 1,5 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1^2} = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ Дж.}$$

Ответ: $A^* = 5,4 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Пример 25. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным, с линейной плотностью $\tau = 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0,5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра в средней его части (рис. 19).

Дано: $R = 1$ см $= 10^{-2}$ м, $\tau = 20$ нКл/м $= 20 \cdot 10^{-9}$ Кл/м, $a_1 = 0,5$ см $= 5 \cdot 10^{-3}$ м, $a_2 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: $\Delta\varphi$.

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала:

$$\vec{E} = -q \operatorname{grad} \varphi .$$

Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать в таком виде:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = -Edr .$$

Проинтегрировав это выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_{r_1}^{r_2} Edr \text{ или } \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} Edr . \quad (27)$$

Так как цилиндр и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, созданного бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\tau}{\epsilon r} .$$

Произведя подстановку в уравнение (27), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} . \quad (28)$$

Так как величины r_1 и r_2 входят в формулу (28) в виде отношения, то их можно выразить в любых, но только одинаковых единицах:

$$r_1 = R + a_1 = 1,5 \text{ см}; r_2 = R + a_2 = 3 \text{ см}.$$

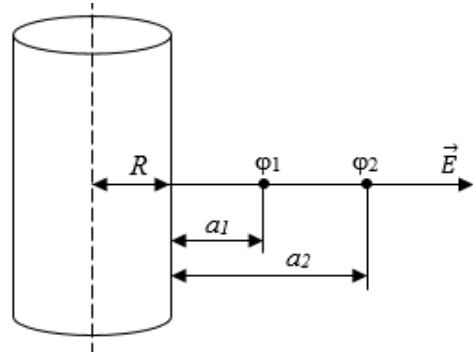


Рис. 19

Подставим численные значения в формулу (28), получим

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 20 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9 \ln \frac{3}{1,5} = 250 \text{ В.}$$

Ответ: $\Delta\varphi = 250 \text{ В.}$

Пример 26. Найти токи, протекающие в каждой ветви электрической цепи (рис. 20), если $\varepsilon_1 = 130 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 117 \text{ В}$, $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,3 \text{ Ом}$, $R_3 = 120 \text{ Ом}$. Внутреннее сопротивление источника тока не учитывать.

Дано: $\varepsilon_1 = 130 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 117 \text{ В}$, $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,3 \text{ Ом}$, $R_3 = 120 \text{ Ом}$.

Найти: I_1 , I_2 , I_3 .

Решение. Задача дана для расчета разветвленных цепей, когда в них есть несколько источников тока. При решении задач такого типа рационально пользоваться законами Кирхгофа.

1. Обозначаем на схеме (рис. 20) контуры, узлы и направление токов.
2. Устанавливаем число ветвей m (в данной схеме их три) и число узлов n (в данной схеме их два – в точках В и Н).
3. Для составления уравнений по первому закону Кирхгофа достаточно выбрать один из указанных узлов. Выберем узел В, в котором сходятся токи от трех проводников. Учитывая направления токов, получим

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (29)$$

4. Устанавливаем число уравнений, необходимых для решения задач по второму закону Кирхгофа. Это число уравнений равно $m - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$. Выбираем контуры BCDHB и ABHTA.

5. Устанавливаем обход по контуру BCDHB, учитывая правило знаков при обходе тока внутри источников ЭДС. Выбираем обход по часовой стрелке, при котором ЭДС ε_2 будет положительной. С учетом выбранного ранее направления токов составляем первое уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2. \quad (30)$$

Составляем уравнение для второго контура – ABHTA. Так как в этом контуре два источника тока ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), обход начинаем от ε_1 к ε_2 по часовой стрелке.

Кроме того, знаки при ЭДС и падения напряжения IR устанавливаем в соответствии с ранее приведенными правилами:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (31)$$

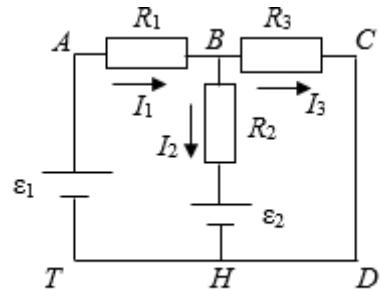


Рис. 20

Подставив в равенства (29), (30), (31) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ -0,3I_2 + 12I_3 = 117, \\ 0,5I_1 + 0,3I_2 = 130 - 117 = 13. \end{cases}$$

Эту систему уравнений с тремя неизвестными можно решить обычными алгебраическими приемами, в данной задаче удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения еще раз в следующем виде:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ 0 - 0,3I_2 + 12I_3 = 117, \\ 0,5I_1 + 0,3I_2 + 0 = 13. \end{cases}$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}; I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}; I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы уравнений; $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$ – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов трех вышеприведенных уравнений.

Составим и вычислим определитель системы и определители для I_1, I_2, I_3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -0,3 & 12 \\ 0,5 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} = -9,75; \Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 117 & -0,3 & 12 \\ 13 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} = -195;$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 117 & 12 \\ 1,5 & 13 & 0 \end{vmatrix} = -97,5; \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -0,3 & 117 \\ 0,5 & 0,3 & 13 \end{vmatrix} = -97,5.$$

Отсюда получаем

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{-195}{-9,75} = 20 \text{ A}; I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{-97,5}{-9,75} = 10 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{-97,5}{-9,75} = 10 \text{ A}.$$

Ответ: $I_1 = 20 \text{ A}; I_2 = 10 \text{ A}; I_3 = 10 \text{ A}$.

2.3. Варианты контрольной работы № 1

Контрольная работа включает десять задач. Вариант выбирается по последней цифре шифра. Справочные данные, необходимые при решении задач, приведены в приложениях.

Задача 1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям

$$x_1 = A_1 t^n + B_1 t^k + C_1 t^m, \quad x_2 = A_2 t^m + B_2 t^n + C_2 t^k.$$

В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости точек в этот момент. Исходные данные приведены в табл. 2 в системе СИ по вариантам.

Таблица 2

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_1	1	2	3	4	-5	6	7	-18	9	10
A_2	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
B_1	8	10	-12	14	16	18	20	22	24	26
B_2	-3	4	-5	-6	-1	-7	-9	-8	-1	-2
C_1	-15	-16	-17	-18	-19	-20	-14	-13	-12	-11
C_2	8	3	9	2	7	5	6	4	1	5
n	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
m	3	1	1	3	1	2	3	1	2	3
k	2	3	2	2	3	1	2	3	1	2

Задача 2. Два упругих резиновых шарика массами m_1 и m_2 подвешены на легких нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Если шары сильно прижать друг к другу, а затем отпустить, то они, разлетаясь, поднимутся на высоты h_1 и h_2 соответственно (рис. 21). Определите значение величины, обозначенной * (табл. 3).

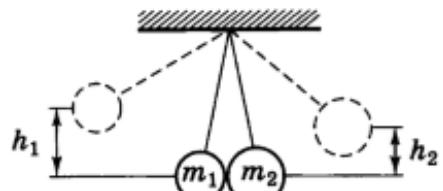


Рис. 21

Таблица 3

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1 , кг	0,20	*	0,15	0,20	0,25	*	0,20	0,15	0,10	*
m_2 , кг	0,25	0,20	*	0,15	0,30	0,25	*	0,20	0,15	0,10
h_1 , см	10	15	8,0	*	14	12	10	*	9,0	8,0
h_2 , см	*	10	12	8,0	*	6,0	8,0	16	*	6,0

Задача 3. Два горизонтальных диска массами m_1 и m_2 , радиусами R_1 и R_2 соответственно свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1 и J_2 , а угловые скорости ω_1 и ω_2 . После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться с одинаковой угловой скоростью. Работа сил трения равна A . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 4).

Таблица 4

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1 , кг	1,0	0,7	*	0,6	2,0	0,9	3,0	*	1,2	1,2
m_2 , кг	0,9	0,6	0,4	0,4	1,4	*	2,3	0,3	*	1,0
R_1 , см	50	118	60	35	106	70	141	85	60	70
R_2 , см	20	108	30	18	112	45	132	65	38	50
ω_1 , рад/с	6	*	4	5	*	7	3	8	10	4
ω_2 , рад/с	3	4	1	3	5	4	*	6	4	2
A , Дж	*	0,75	0,37	*	1,50	0,90	0,62	0,75	0,80	*

Задача 4. Строительная лебедка мощностью N , имеющая коэффициент полезного действия η , за время t поднимает на высоту h емкость объемом V , полностью наполненную бетонным раствором плотностью ρ . Емкость при подъеме движется равномерно. Определите значение величины, обозначенной * (табл. 5). Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2 . Массу пустой емкости не учитывайте.

Таблица 5

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N , кВт	*	3,5	5,0	4,5	5,5	5,0	*	4,0	5,0	5,5
t , с	45	*	36	25	20	28	36	*	36	32
h , м	15	18	*	10	12	14	11	15	*	17
V , м ³	0,30	0,35	0,45	*	0,30	0,35	0,40	0,30	0,45	*
ρ , 10^3 кг/м ³	1,8	2,0	2,0	1,8	*	2,0	1,9	1,8	2,0	1,9
η	0,60	0,65	0,65	0,60	0,60	*	0,65	0,60	0,65	0,60

Задача 5. Вычислите удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении газа при давлении p и температуре T , если плотность газа равна ρ (табл. 6).

Таблица 6

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	гелий	водо- род	угле- кислый газ	азот	кисло- род	воз- дух	ам- миак	аргон	крип- тон	ксе- нон
p , кПа	100	110	120	130	140	150	160	100	120	130
T , К	273	275	277	279	280	285	290	273	280	290
ρ , кг/ м ³	1,43	0,18	1,98	1,25	1,43	1,29	0,71	1,78	3,74	5,89

Задача 6. В процессе адиабатного сжатия идеального газа, количество вещества которого равно v , внешними силами совершается работа A и температура газа возрастает от t_1 до t_2 . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 7). Приведите пример практического применения описанного физического процесса.

Таблица 7

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	гелий	водо- род	угле- кислый газ	азот	кис- лород	воз- дух	ам- миак	аргон	крип- тон	ксе- нон
v , моль	*	1,0	2,0	1,5	*	2,0	1,0	0,5	*	1,5
A , кДж	1,4	8,3	4,0	*	6,5	6,5	7,7	*	4,5	2,6
t_1 , °C	20	30	*	40	30	40	*	20	40	10
t_2 , °C	250	*	180	240	380	*	650	280	400	*

Задача 7. Начертите изотерму массы m газа для температуры t .

Таблица 8

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	гелий	водо- род	угле- кислый газ	азот	кис- лород	воз- дух	ам- миак	аргон	крип- тон	ксе- нон
m , г	3,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
t , °C	0	100	120	140	160	0	100	120	140	160

Задача 8. Наружная поверхность кирпичной стены площадью S и толщиной d имеет температуру t_1 , а внутренняя поверхность – t_2 . Помещение отапливается электроплиткой мощностью N . Теплопроводность

кирпича равна λ . Считать, что температура в помещении поддерживается постоянной. Определите значение величины, обозначенной * (табл. 9).

Таблица 9

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S, \text{м}^2$	25	20	30	35	25	*	20	25	30	35
$d, \text{см}$	35	32	37	40	*	30	35	30	32	25
$t_1, ^\circ\text{C}$	-14	-10	-5	*	-20	-8	-12	0	3	*
$t_2, ^\circ\text{C}$	20	19	*	21	21	22	23	18	*	22
$N, \text{kВт}$	0,92	*	0,85	0,82	0,96	0,88	0,84	*	0,95	0,96
$\lambda, \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	*	0,40	0,35	0,41	0,39	0,38	*	0,42	0,43	0,40

Задача 9. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1 и q_2 , расположенными на расстоянии d . Точка А удалена от заряда q_1 на расстояние r_1 , а от заряда q_2 – на расстояние r_2 (табл. 10). Определите напряженность и потенциал поля в точке А. Решение задачи поясните рисунком (см. рис. 22).

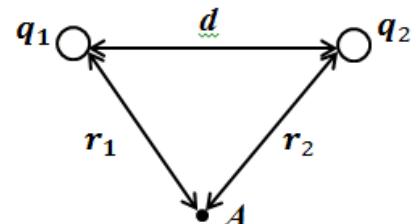


Рис. 22

Таблица 10

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_1, \text{nКл}$	+10	+5	-8	-5	+10	-6	-7	+1	-15	+3
$q_2, \text{nКл}$	-10	+6	-10	+15	-8	-12	+5	+2	+8	-5
$d, \text{см}$	5	10	6	7	15	8	20	30	5	10
$r_1, \text{см}$	3	7	12	4	8	5	10	15	10	6
$r_2, \text{см}$	2	3	6	5	8	5	15	20	8	8

Задача 10. В электрической цепи (рис. 23) к любой паре точек может быть подключен источник тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (плюс источника тока соединяют с первой точкой из указанных в табл. 11 пар). Внутреннее сопротивление каждого источника $r = 2 \Omega$, сопротивление каждого резистора $R = 2 \Omega$. Вычислите силу тока в каждом элементе и напряжение на них.

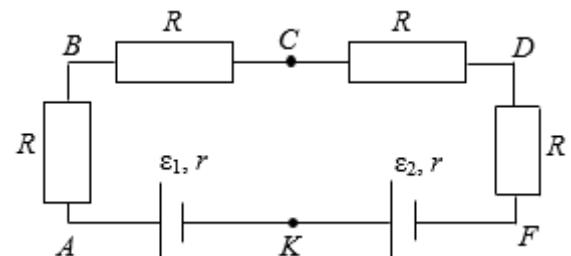


Рис. 23

Таблица 11

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε , В	3	4	2	2	1	4	1	3	2	1
ε_1 , В	2	3	5	4	1	6	2	4	3	1
ε_2 , В	4	5	6	4	2	8	1	2	2	4
Точки под- ключения	BK	CK	DK	KB	KC	KD	CF	AC	AD	BF

3. Контрольная работа № 2 по теме «ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ОПТИКА И АТОМНАЯ ФИЗИКА»

3.1. Теоретические положения

3.1.1. Магнитное поле тока

1. Характеристики магнитного поля:

\vec{B} – вектор магнитной индукции: характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками;

\vec{H} – вектор напряженности: характеризует магнитное поле, создаваемое только макротоками.

В случае однородной изотропной среды

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость среды; μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

2. Закон Био–Савара–Лапласа. Элемент проводника $d\vec{l}$ с током I создает в некоторой точке А индукцию поля:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}; \quad dB = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ проводника в точку А; α – угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе проводника (рис. 24).

3. Магнитная индукция поля, созданного бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \mu \mu_0 \frac{I}{2\pi r_0},$$

где r_0 – кратчайшее расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция.

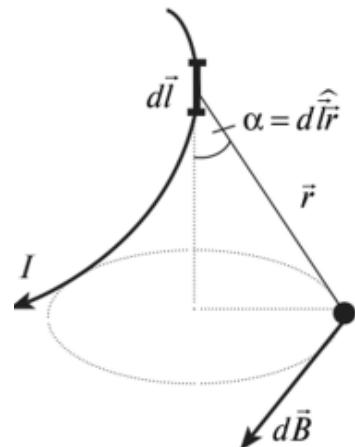


Рис. 24

Вектор индукции \vec{B} направлен по касательной к силовой линии. Для бесконечно длинного проводника силовыми линиями являются окружности.

Направление силовой линии (а значит, и направление вектора \vec{B}) определяется по правилу правого винта (рис. 25).

4. Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника с током,

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

где φ_1, φ_2 – углы между направлением тока в проводнике и радиус-векторами, проведенными от концов проводника к рассматриваемой точке А (рис. 26).

Вектор индукции \vec{B} перпендикулярен плоскости чертежа, направлен к нам и поэтому изображен точкой.

5. Магнитная индукция в центре кругового тока

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R},$$

где R – радиус кругового тока.

Вектор индукции \vec{B} перпендикулярен плоскости кругового тока (рис. 27).

6. Магнитная индукция на оси кругового тока

$$B = \mu\mu_0 \frac{IR^2}{2(R^2 + x_0^2)^{3/2}},$$

где x_0 – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Вектор индукции \vec{B} направлен вдоль оси контура (рис. 28).

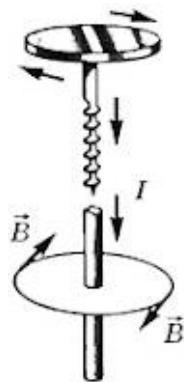


Рис. 25

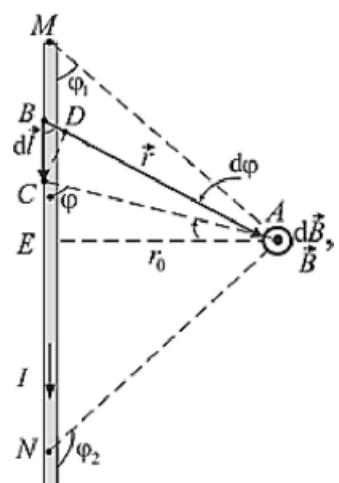


Рис. 26

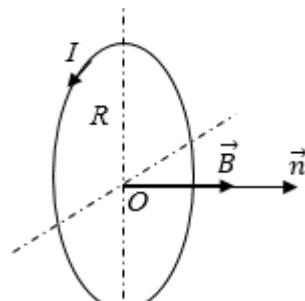


Рис. 27

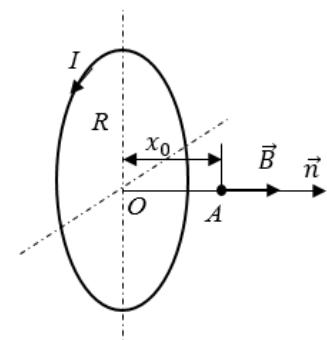


Рис. 28

7. Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным соленоидом в средней его части (или тороида на его оси),

$$B = \mu\mu_0 n I,$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в соленоиде.

Линии \vec{B} поля соленоида показаны на рис. 29.

8. Принцип суперпозиции магнитных полей. Магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \dots, \vec{B}_n$ складываемых полей, т.е.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

9. Закон Ампера: на каждый элемент тока $Id\vec{l}$ в магнитном поле индукции \vec{B} действует сила:

$$d\vec{F} = [Id\vec{l}, \vec{B}]; \quad dF = IdlB \sin \alpha,$$

где α – угол между элементом тока $Id\vec{l}$ и вектором \vec{B} .

Для однородного поля ($\vec{B} = \text{const}$) и прямого отрезка проводника действует закон Ампера:

$$F = IBl \sin \alpha,$$

где α – угол между направлением тока в проводнике и вектором магнитной индукции \vec{B} .

10. Сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок проводника длиной l ,

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

11. Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{P}_m = \vec{n} p_m; \quad p_m = IS,$$

где \vec{n} – единичный вектор положительной нормали к плоскости контура; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура (рис. 30).

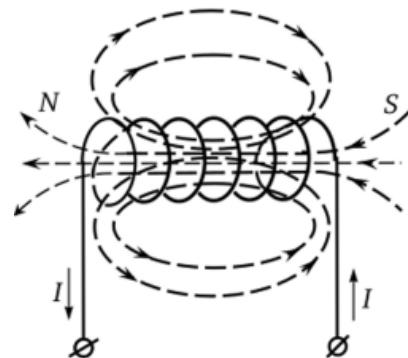


Рис. 29

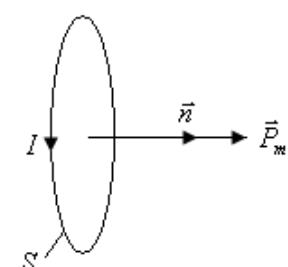


Рис. 30

Механический (вращающий) момент, действующий на контур с током в однородном магнитном поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{P}_m, \vec{B} \right]; \quad M = P_m B \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{P}_m и \vec{B} .

12. Сила \vec{F} , действующая на заряд, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} :

$$\vec{F} = q \left[\vec{v}, \vec{B} \right]; \quad F = qvB \sin \alpha,$$

где q – заряд частицы; α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Если имеются одновременно электрическое \vec{E} и магнитное поле \vec{B} , сила, действующая на заряженную частицу (сила Лоренца),

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \left[\vec{v}, \vec{B} \right].$$

13. Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S :

- в случае однородного поля и плоского контура

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \left(\vec{n}; \vec{B} \right);$$

- в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B \cos \alpha dS,$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением единичного вектора нормали \vec{n} к элементу поверхности (рис. 31).

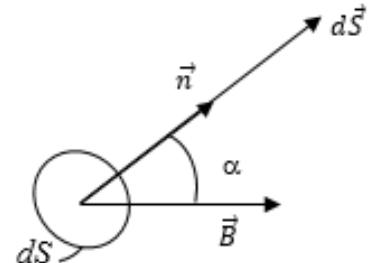


Рис. 31

14. Потокосцепление, т.е. полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида или тороида,

$$\psi = N\Phi \text{ или } \psi = LI,$$

где Φ – магнитный поток через один виток; N – число витков соленоида или тороида; L – индуктивность контура.

15. Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром; I – сила тока в контуре.

16. Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt},$$

где ε_i – электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока.

Этот закон является универсальным: ЭДС ε_i не зависит от способа изменения магнитного потока.

17. Разность потенциалов на концах провода длиною l , движущегося в магнитном поле со скоростью \vec{v} ,

$$U = Blv \sin(\vec{v}; \vec{B}).$$

18. Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида (тороида); V – объем соленоида.

19. Электродвижущая сила самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении в нем тока,

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI),$$

если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется ($L = \text{const}$),

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

20. Экстраполки самоиндукции:

- при замыкании цепи

$$I = I_0 \left(1 - e^{-R \cdot t / L}\right);$$

- при размыкании цепи

$$I = I_0 \cdot e^{-R \cdot t / L},$$

где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ – установившийся ток ($t \rightarrow \infty$) при замыкании цепи или начальное значение тока ($t = 0$) при размыкании цепи; ε – ЭДС источника тока; R – сопротивление контура.

21. Энергия магнитного поля, сцепленного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия, заключенная в единице объема)

$$\omega_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

22. Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего контур,

$$q = \frac{\Delta\Psi}{R} \quad \text{или} \quad q = \frac{N\Delta\Phi}{R}.$$

3.1.2. Колебания и волны

1. Механические гармонические колебания.

- Уравнение гармонических колебаний и его решение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)^*,$$

где x – значение колеблющейся величины в момент времени t ; A – амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся величины); φ – фаза колебаний в момент времени t , $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$; φ_0 – начальная фаза в момент времени $t = 0$; ω_0 – собственная циклическая частота колебаний.

- Период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad T = \frac{1}{v},$$

где v – частота колебаний (число полных колебаний в единицу времени).

- Скорость точки, совершающей колебания,

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

- Ускорение точки, совершающей колебания,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

* В пособии используется функция косинуса.

Амплитуда скорости и ускорения соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$.
Фаза скорости отличается от фазы смещения на $\frac{\pi}{2}$, а фаза ускорения на π .

- Сила, под действием которой точка массой m совершает колебания,

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx,$$

где k – коэффициент упругости, $k = \omega_0^2 m$.

- Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)].$$

- Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F ,

$$\begin{aligned} E_p &= - \int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \end{aligned}$$

- Полная энергия

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

На рис. 32 изображены графики зависимости энергий от времени. Энергии E_k и E_p изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. с частотой, которая в два раза превышает частоту изменения x от времени.

Гармонические осцилляторы: пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур (системы, совершающие гармонические колебания).

- Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса тела, подвешенного на пружине;
 k – жесткость пружины.

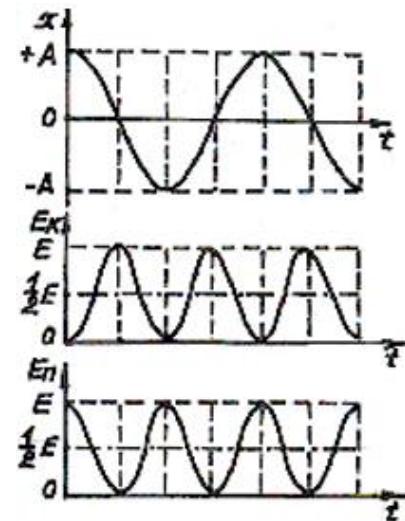


Рис. 32

- Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

- Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – масса маятника; d – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний; L – приведенная длина физического маятника, $L = \frac{I}{md}$.

Сложение гармонических колебаний:

- При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

и с начальной фазой, определяемой из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}},$$

где A_1, A_2 – амплитуды составляющих колебаний; $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ – их начальные фазы.

При сложении колебаний

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

используют метод вращающего вектора амплитуды (рис. 33).

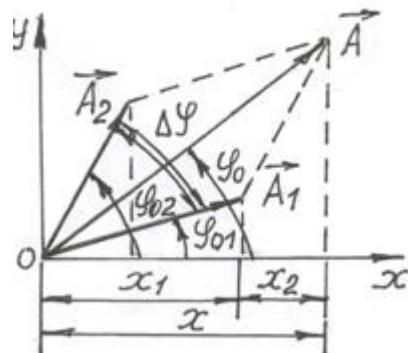


Рис. 33

- При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ уравнение траектории результирующего движения в координатах x, y имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 \cdot A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

2. Затухающие колебания.

- Уравнение затухающих колебаний и его решение:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0),$$

где $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний; A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$; δ – коэффициент затухания, $\delta = \frac{r}{2m}$; r – коэффициент сопротивления; ω – циклическая частота затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; ω_0 – собственная циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы.

- Время релаксации

$$\tau = \frac{1}{\delta},$$

где τ – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшится в e раз (e – основание натурального логарифма).

- Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где $A(t)$, $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период; N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

3. Вынужденные колебания.

- Уравнение вынужденных колебаний и его установившееся решение:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \quad x = A \cos(\omega t - \phi_0),$$

где $F_0 \cos(\omega t)$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая колебания; ω – циклическая частота изменения внешней вынуждающей силы.

- Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

- Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

4. Электромагнитные колебания.

- Уравнение свободных колебаний в идеальном колебательном контуре и его решение:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

где q – заряд на обкладках конденсатора в момент времени t ; q_{\max} – амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой конденсатора ω_0 , называемой собственной частотой контура,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

а также периодом (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где C – емкость конденсатора колебательного контура; L – индуктивность катушки колебательного контура.

- Полная энергия идеального колебательного контура

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{маг}} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}$$

или

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{маг}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{\dot{L}\dot{q}^2}{2} = \text{const},$$

где C – емкость конденсатора; L – индуктивность катушки, составляющих колебательный контур.

В контуре возникают электрические колебания, сопровождающиеся превращениями энергий электрического $W_{\text{эл}}$ и магнитного $W_{\text{маг}}$ полей.

Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре:

- Уравнение затухающих колебаний в контуре и его решение:

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad q = q_{\max} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0),$$

где q_{\max} – величина заряда на пластинах конденсатора в момент времени $t = 0$;

ω – частота затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; ω_0 – собственная частота, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; δ – коэффициент затухания, $\delta = \frac{R}{2L}$.

- Логарифмический декремент затухания

$$\Lambda = \delta T = \frac{\pi R}{L\omega},$$

где R – активное сопротивление контура; L – индуктивность контура; ω – частота затухания контура.

- Добротность контура

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)},$$

где $W(t)$ – энергия, запасенная в контуре к моменту времени t ; ΔW – уменьшение энергии за период колебаний T , $\Delta W = W(t) - W(t+T)$.

В случае слабого затухания добротность

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{L\omega}{R}.$$

Вынужденные электрические колебания:

- Уравнение, описывающее изменения заряда на конденсаторе и установившиеся вынужденные колебания при последовательном включении в контур напряжения $U = U_{\max} \cos \omega t$:

$$\ddot{q} + 2\delta \ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_{\max}}{L} \cos \omega t, \quad q = q_{\max} \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$q_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\frac{1}{\omega c} - \omega L};$$

φ – сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением.

- Сила тока при установившихся колебаниях

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t - \varphi) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}),$$

где амплитуда тока

$$I_{\max} = \omega q_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}.$$

Силу тока можно записать так:

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \phi_0),$$

где ϕ_0 – сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением, $\phi_0 = \phi - \frac{\pi}{2}$.

Этот сдвиг по фазе ϕ_0 находят по формуле

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}.$$

5. Упругие (механические) волны – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

- Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в однородной непоглощающей среде:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - k x + \phi_0)$$

или

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi_0 \right],$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t ; A – амплитуда волны; ω – циклическая частота волны; ϕ_0 – начальная фаза волны (определяется выбором начала отсчета x и t); v – фазовая скорость; k – волновое число.

- Фаза волны

$$\phi = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \phi_0 = \omega t - k x + \phi_0.$$

- Длина волны

$$\lambda = v T = \frac{v}{\nu}.$$

- Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v T} = \frac{\omega}{v}.$$

где v – скорость волны.

- Волновой вектор – вектор \vec{k} , направленный по нормали к волновой поверхности, модуль его равен волновому числу k .
- Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором \vec{k} :

$$\xi(r, t) = A \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0).$$

- Уравнение сферической волны:

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - k r + \phi_0),$$

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Это уравнение справедливо лишь для r , превышающих размеры источника.

- Фазовая v и групповая U скорости, а также связь между ними:

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad U = \frac{d\omega}{dk}; \quad U = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

- Скорость распространения звуковых волн в газах

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

где R – универсальная газовая постоянная; μ – молярная масса газа; γ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$; T – термодинамическая температура.

6. Электромагнитные волны.

- Уравнения плоской электромагнитной волны:

$$E = E_0 \cos(\omega t - k x + \phi_0);$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - k x + \phi_0),$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – циклическая частота; k – волновое число, $k = \frac{\omega}{v}$; ϕ_0 – начальная фаза колебаний в точках с координатой $x = 0$.

- Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где C – скорость распространения света в вакууме, $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

- Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического E и магнитного H полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H.$$

- Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

- Плотность потока электромагнитной волны (вектор Умова–Пойнтинга):

$$\vec{S} = w \vec{v}; \quad \vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}],$$

где w – объемная плотность энергии волны, \vec{v} – фазовая скорость волны.

- Интенсивность электромагнитной волны I – величина, численно равная энергии, которую переносит волна за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны:

$$I = \langle w \rangle v; \quad I = \langle S \rangle,$$

где $\langle w \rangle$ – среднее значение объемной плотности энергии электромагнитного поля волны; $\langle S \rangle$ – среднее значение модуля вектора Умова–Пойнтинга.

3.1.3. Интерференция света

1. Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; n – абсолютный показатель преломления среды.

2. Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

3. Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = |L_1 - L_2|.$$

При отражении света от оптически более плотной среды фаза колебаний светового вектора \vec{E} испытывает скачок фазы на π . Изменение фазы колебаний на π приводит к изменению оптического пути световой волны на $\frac{\lambda}{2}$ (λ – длина волны в вакууме).

4. Оптическая разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки или пленки, находящейся в воздухе (рис. 34),

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пластиинки (пленки);
 i – угол падения луча на пластиинку;
 λ – длина световой волны в вакууме.

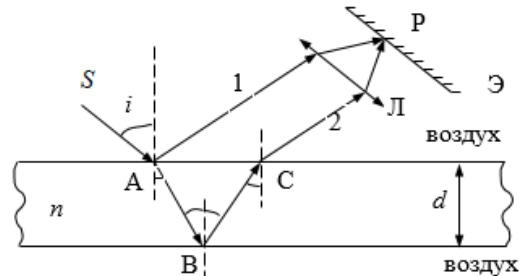


Рис. 34

Слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ учитывает изменение оптической длины пути световой волны при отражении ее от среды, оптически более плотной (в точке А).

5. Условие максимумов интенсивности света при интерференции:

$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

6. Условие минимумов интенсивности света при интерференции:

$$\Delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

7. Кольца Ньютона. При отражении света от поверхностей воздушной прослойки, образованной между стеклянной пластиинкой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы с радиусом кривизны R (рис. 35), возникающая интерференционная картина носит название колец Ньютона.

- В отраженном свете оптическая разность хода лучей при отражении от поверхностей воздушной прослойки

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных – в проходящем)

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R(\lambda/2)},$$

где k – номер кольца ($k = 1, 2, 3, \dots$); R – радиус кривизны поверхности линзы.

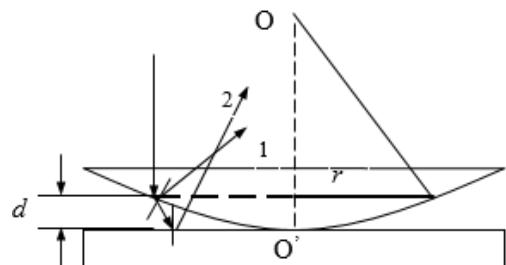


Рис. 35

- Радиусы темных колец в отраженном свете (или светлых – в проходящем)

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

3.1.4. Дифракция света

1. Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей.

- Условие минимумов интенсивности света:

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; k – номер минимума.

- Условие максимумов интенсивности света на щели:

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

2. Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей.

- Условие главных максимумов интенсивности:

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где d – период (постоянная) решетки; k – номер главного максимума; φ – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением на данный максимум.

3. Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где k – порядок дифракционной картины; N – число штрихов решетки; $\Delta\lambda$ – минимальная разница двух разрешаемых световых волн с длинами волн λ_1 и λ_2 , $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$.

4. Формула Вульфа–Брегга. Условие дифракционных максимумов:

$$2d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; φ – угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла).

3.1.5. Поляризация света

1. Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_6 = n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1},$$

где i_6 – угол Брюстера, т.е. угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; $n_{2,1}$ – относительный показатель преломления среды, от которой происходит отражение света.

2. Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I – интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из анализатора; I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α – угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

3. Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется по следующим формулам:

- в твердых телах

$$\varphi = [\alpha] d,$$

где $[\alpha]$ – постоянная вращения; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

- в растворах

$$\varphi = [\alpha] c d,$$

где c – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

3.1.6. Законы теплового излучения

1. Поток энергии (мощность излучения) – энергия электромагнитного излучения, испускаемого телом за единицу времени:

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt}.$$

2. Излучательность (энергетическая светимость) тела – поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям:

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot dS}.$$

3. Спектральная плотность излучательности (спектральная плотность энергетической светимости) – поток энергии с единицы площади поверхности тела, приходящийся на единичный интервал длин волн, выбранный около конкретной длины волны λ :

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_{\lambda;\lambda+d\lambda}}{d\lambda}.$$

4. Закон Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4.$$

где R_e – излучательность абсолютно черного тела; T – термодинамическая температура тела; σ – постоянная Стефана–Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴).

Излучательность серого тела

$$R_e^* = a_T \sigma T^4,$$

где a_T – коэффициент черноты (коэффициент излучения) серого тела.

6. Закон смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела; b – постоянная закона смещения Вина, $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м · К.

7. Зависимость максимальной спектральной плотности излучательности абсолютно черного тела от температуры:

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = c' T^5,$$

где c' – постоянная величина, $c' = 1,30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³ · К⁵).

Количество лучистой энергии, излучаемой телом с поверхности площадью S за время Δt (при равномерном излучении),

$$W = R_e S \Delta t.$$

3.1.7. Фотоны. Фотоэлектрический эффект

1. Энергия ε , масса m и импульс p фотона выражаются соответствующими формулами:

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda};$$

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda};$$

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

где ν – частота излучения; λ – длина волны в вакууме; c – скорость света в вакууме; h – постоянная Планка, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Единица измерения энергии 1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

2. Формула Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max}$$

или

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

где ε – энергия фотона, падающего на металл, $\varepsilon = h\nu$; A – работа выхода электрона из данного металла; T – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов,

$$T = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Фотоэффект наблюдается, если $h\nu > A$, и не наблюдается при $h\nu < A$. Равенство $h\nu_0 = A$ определяет «красную» границу фотоэффекта:

$$\nu_0 = \frac{A}{h}; \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A},$$

где ν_0 – минимальная частота, при которой еще возможен фотоэффект в данном металле; λ_0 – максимальная длина волны, соответствующая частоте ν_0 .

3. Кинетическая энергия фотоэлектронов связана с задерживающей разностью потенциалов U_3 следующей зависимостью:

$$T_{\max} = eU_3,$$

где e – заряд электрона, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Максимальная кинетическая энергия электрона в нерелятивистском и релятивистском случаях выражается различными формулами:

- если фотоэффект вызван фотоном, имеющим энергию, которая намного меньше энергии покоя электрона (т.е. $h\nu \ll m_0c^2 \equiv 0,51 \text{ МэВ}$, где m_0 – масса покоя электрона, c – скорость света), то можно воспользоваться нерелятивистским выражением для кинетической энергии электрона:

$$T_{\max} = \frac{1}{2}m_0v_{\max}^2;$$

- если фотоэффект вызван фотоном, обладающим энергией порядка или энергией, которая больше энергии покоя электрона (т.е. $h\nu \geq m_0c^2 \equiv 0,51 \text{ МэВ}$), то следует пользоваться релятивистским выражением для кинетической энергии электрона:

$$T_{\max} = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right].$$

3.1.8. Эффект Комптона

1. Изменение длины волны фотона $\Delta\lambda$ при рассеянии его на свободном электроне в металле на угол θ определяется так:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

или

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где m_0 – масса электрона отдачи; λ , λ' – длины волн фотона до и после рассеяния соответственно; c – скорость света в вакууме.

2. Импульс фотона

$$p_\phi = m_\phi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

3. Комптоновская длина волны

$$\Lambda = \frac{h}{m_0c}.$$

При рассеянии фотона на электроне $\Lambda = 2,436 \text{ пм}$.

4. Энергия покоя электрона

$$E_0 = m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ.}$$

При комптоновском рассеянии закон сохранения имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon' + T,$$

где ε , ε' – энергии фотона до и после рассеивания соответственно; T – кинетическая энергия электронов отдачи.

Если эффект Комптона вызван фотоном, имеющим энергию, которая намного меньше энергии покоя электрона, то можно пользоваться нерелятивистским выражением для кинетической энергии. В противном случае следует применять формулы релятивистской механики.

3.1.9. Давление света

1. Давление, производимое светом при нормальном падении,

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho),$$

$$p = w(1 + \rho),$$

где E_e – облученность поверхности ($E_e = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot S_n}$ – энергия всех фотонов, падающих на единицу площади за единицу времени); c – скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; ρ – коэффициент отражения; w – объемная плотность энергии излучения ($w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$).

2. Количество лучистой энергии, падающей на поверхность S_n за время Δt ,

$$\Delta W = E_e S_n \Delta t = \Phi_e \Delta t = N \varepsilon,$$

где S_n – площадь поверхности, перпендикулярной к потоку энергии; Φ_e – поток лучистой энергии; N – число фотонов, падающих на поверхность S_n за время Δt ; ε – энергия одного фотона.

3. Объемная плотность энергии излучения

$$w = n \varepsilon,$$

где n – концентрация фотонов в пучке ($n = \frac{N}{V}$); ε – энергия одного фотона.

3.1.10. Основы атомной физики и квантовой механики

1. Обобщенная формула Бальмера для атома водорода:

$$v = R c \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где v – частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной стационарной орбиты на другую; R – постоянная Ридберга; c – скорость распространения света в вакууме.

В этой формуле $k = 1$ для серии Лаймана, $k = 2$ – для серии Бальмера, $k = 3$ – для серии Пашена, $k = 4$ для серии Брэкета и т.д. При заданном k число n может принимать все целочисленные значения, начиная с $k + 1$.

2. Частота излучения водородоподобных ионов, состоящих из ядра и одного электрона,

$$v = R c z^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

3. Энергия ионизации атома водорода (водородоподобного иона) – минимальная энергия, которую необходимо затратить, чтобы удалить электрон из атома (водородоподобного иона) в бесконечность.

4. Первый постулат Бора:

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где m – масса электрона; v_n – скорость электрона на n -й орбите; r_n – радиус n -й стационарной орбиты; n – главное квантовое число; h – постоянная Планка.

5. Второй постулат Бора:

$$v = \frac{E_n - E_k}{h},$$

где v – частота излучения, соответствующая переходу атома из одного стационарного состояния в другое; E_n, E_k – значения энергии стационарных состояний атома.

6. Соотношение де Бройля, определяющее длину волны микрочастицы, движущейся со скоростью v :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

или

$$\lambda = \frac{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0 v},$$

где h – постоянная Планка, p – импульс микрочастицы; m – релятивистская масса частицы, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; m_0 – масса покоя частицы; c – скорость света в вакууме.

Если $v \ll c$, то допустимо принимать $m = m_0$, тогда $\lambda = \frac{h}{p_0} = \frac{h}{m_0 v}$.

7. Связь импульса p с кинетической энергией E_k микрочастицы:

- кинетическая энергия частицы меньше ее энергии покоя:

$$p = \sqrt{2m_0 E_k};$$

- кинетическая энергия частицы соизмерима с энергией покоя или больше ее:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + E_k) E_k},$$

где E_0 – энергия покоя микрочастицы, $E_0 = m_0 c^2$.

8. Полная энергия микрочастицы

$$E = h\nu,$$

где ν – частота волны де Бройля.

9. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для координат и импульса:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \Delta y \Delta p_y \geq \hbar; \Delta z \Delta p_z \geq \hbar,$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – неопределенности координат; $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ – неопределенности проекций импульса на оси x, y, z ; \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π .

10. Соотношение неопределенностей для энергии E и времени t :

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – интервал времени.

11. Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний, когда потенциальная энергия частицы не зависит от времени:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0,$$

где Ψ – волновая функция, зависящая только от координат x, y, z ; m – масса микрочастицы; E – полная энергия микрочастицы; U – потенциальная энергия микрочастицы.

Квадрат модуля волновой функции $|\Psi|^2$ определяет вероятность нахождения микрочастицы в единичном объеме (плотность вероятности):

$$w = \frac{dW}{dV} = |\Psi|^2,$$

где w – плотность вероятности; dW – вероятность нахождения микрочастицы в элементе объема dV .

Уравнение Шрёдингера для микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенками», имеет следующее решение:

$$\Psi_n = A \sin \frac{\pi x n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где A – нормирующий множитель; n – квантовое число.

Частица, находящаяся в «потенциальной яме», может иметь только квантованные значения энергии

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

12. Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний в сферических координатах r, ϑ, φ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0.$$

3.1.11. Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

1. Распределение свободных электронов в металле по состояниям с различной энергией при $T = 0$ К:

$$dn_E = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE,$$

где dn_E – количество свободных электронов в единице объема металла (концентрация электронов), энергии которых заключены в пределах от E до $E + dE$; m_0 – масса покоя электрона.

2. Энергия Ферми в металле при $T = 0$ К:

$$E_{F_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(3\pi^2 n \right)^{2/3},$$

где n – концентрация электронов проводимости в металле.

3. Температура вырождения (температура Ферми)

$$T_F = \frac{E_{F_0}}{k},$$

где E_{F_0} – энергия Ферми при $T = 0$ К; k – постоянная Больцмана.

Температурой вырождения T_F называют температуру, ниже которой проявляются квантовые свойства электронного газа. Если $T \gg T_F$, то поведение системы частиц подчиняется классической статистике.

4. Температурная зависимость удельной электрической проводимости собственных полупроводников:

$$\gamma = \gamma_0 \exp \left[-\Delta E / (2kT) \right],$$

где γ_0 – множитель, мало изменяющийся с изменением температуры; ΔE – ширина запрещенной зоны.

3.1.12. Физика атомного ядра и элементарных частиц

1. Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – количество нераспавшихся ядер в начальный момент времени ($t = 0$); N – количество нераспавшихся ядер по истечении времени t ; λ – постоянная радиоактивного распада.

2. Зависимость периода полураспада $T_{1/2}$ (промежуток времени, в течение которого количество нераспавшихся ядер уменьшается в два раза) от постоянной распада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

3. Активность радиоактивного вещества

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N,$$

где N – количество ядер, содержащихся в радиоактивном веществе.

4. Удельная активность радиоактивного вещества

$$a = \frac{A}{m} = \frac{\lambda N}{m},$$

где m – масса распадающегося вещества.

5. Среднее время жизни радиоактивного ядра (время, в течение которого количество нераспавшихся ядер уменьшается в e раз)

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

6. Массовое число ядра (количество нуклонов в ядре)

$$A = N + Z,$$

где Z – зарядовое число ядра, равное количеству протонов в ядре; N – количество нейтронов в ядре.

7. Дефект массы ядра (разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра)

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a,$$

где m_p – масса покоя протона; m_n – масса покоя нейтрона; m_a – масса покоя ядра.

8. Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_a] c^2,$$

где Δm – дефект массы ядра; c – скорость света в вакууме; m_H – масса покоя изотопа водорода ${}_1^1\text{H}$; m_a – масса покоя атома.

9. Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2 \left(\sum m_1 - \sum m_2 \right) = \sum E_{k2} - \sum E_{k1},$$

где $\sum m_1$ – сумма масс покоя частиц до реакции; $\sum m_2$ – сумма масс покоя частиц после реакции; $\sum E_{k1}$ – сумма кинетических энергий частиц до реакции; $\sum E_{k2}$ – сумма кинетических энергий частиц после реакции.

Если $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии (экзотермическая реакция), если $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии (эндотермическая реакция).

10. В ядерных реакциях выполняются законы сохранения:

– суммарного количества нуклонов

$$\sum A_1 = \sum A_2;$$

– зарядовых чисел

$$\sum Z_1 = \sum Z_2;$$

– релятивистской полной энергии

$$\sum E_1 = \sum E_2;$$

– импульса

$$\sum \vec{p}_1 = \sum \vec{p}_2,$$

где индекс 1 обозначает частицы до реакции, индекс 2 – частицы после реакции.

Решение задач по физике элементарных частиц основано на закономерностях, рассмотренных в предыдущих разделах курса. При решении некоторых задач необходимо использовать формулы специальной теории относительности.

3.2. Примеры решения задач

Пример 1. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводнику течет ток $I = 100$ А. Вычислить магнитную индукцию \vec{B} в точке, лежащей на внутренней биссектрисе угла и удаленной от вершины угла на $a = 100$ см (среда – вакуум).

Дано: $I = 100$ А, $a = 1$ м, $\mu = 1$.

Найти: B .

Решение. Изогнутый провод можно рассматривать как два провода, концы которых соединены в точке С. Искомая индукция \vec{B} в точке А (рис. 36) является векторной суммой индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , создаваемых в этой точке токами, текущими в каждом из двух проводов ВС и СД, являющихся сторонами угла ВСД, то есть

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

В соответствии с правилом буравчика вектора \vec{B}_1 и \vec{B}_2 будут перпендикулярны плоскости угла и направлены от нас. Это позволяет векторное равенство заменить скалярным:

$$B = B_1 + B_2.$$

Действительно, магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника с током, выражается формулой

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Согласно этой формуле

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_{01}} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad B_2 = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_{02}} (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha'_2), \quad (32)$$

где r_{01}, r_{02} – кратчайшие расстояния от точки поля А до проводников ВС и СД соответственно (в нашем случае $r_{01} = r_{02} = r_0$ согласно свойствам биссектрисы угла); α_1, α_2 – углы, образованные направлением тока в проводнике ВС и радиусами-векторами, проведенными от концов проводника ВС к точке поля А; α'_1, α'_2 – углы, образованные направлением тока в проводнике СД и радиусами-векторами, проведенными от концов проводника СД к точке поля А (рис. 36).

В нашем случае $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 180^\circ$ ($\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$), $\alpha'_1 = 45^\circ$, $\alpha'_2 = 135^\circ$.

Соотношения между ними:

$$\alpha_2 = \pi - \alpha'_1; \quad \cos \alpha_2 = -\cos \alpha'_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда выражения (32) примут вид

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad B_2 = \mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right),$$

откуда $B_1 = B_2$.

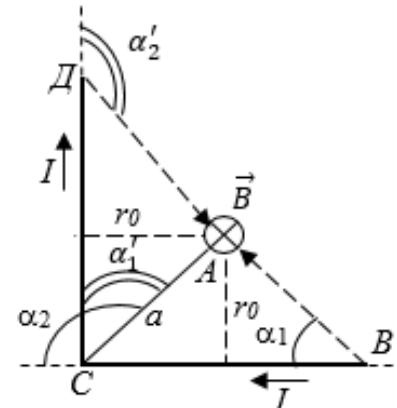


Рис. 36

Формула для вычисления результирующей индукции поля в точке А примет вид

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1 = 2\mu\mu_0 \frac{I}{4\pi r_0} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Заметив, что

$$\left(\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad r_0 = a \sin 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2},$$

получим

$$B = 2\mu\mu_0 \frac{I}{4\pi a \sqrt{2}/2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi a} \left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-2}} \cdot (1,41 + 1) = 4,82 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 48,2 \text{ мкТл}.$$

Ответ: $B = 48,2 \text{ мкТл}$.

Пример 2. Квадратная рамка со стороной $a = 2 \text{ см}$, содержащая 100 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити, постоянная кручения C , которая равна $10 \text{ мкН}\cdot\text{м/град}$. Плоскость рамки совпадает с направлением линий индукции внешнего магнитного поля. Определите индукцию внешнего магнитного поля, если при пропускании по рамке током силой $I = 1 \text{ А}$ она повернулась на угол $\varphi = 60^\circ$.

Дано: $a = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $N = 100$ витков, $C = 10 \text{ мкН}\cdot\text{м/град} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{м/град}$, $I = 1 \text{ А}$, $\varphi = 60^\circ$.

Найти: B .

Решение. Индукция B внешнего поля может быть найдена из условия равновесия рамки в поле. Рамка будет находиться в равновесии, если сумма механических моментов, действующих на нее, будет равна нулю:

$$\sum_{i=2}^2 \vec{M}_i = 0. \quad (33)$$

В данном случае на рамку действуют два момента (рис. 37): M_1 – момент сил, с которым внешнее магнитное поле действует на рамку с током; M_2 – момент упругих сил, возникающих при закручивании нити, на которой рамка подвешена.

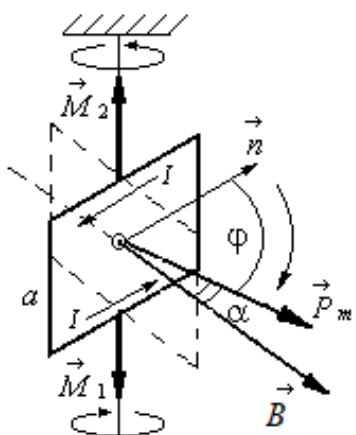


Рис. 37

Следовательно, формула (33) может быть переписана в таком виде:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0.$$

Выразив M_1, M_2 в этом равенстве через величины, от которых зависят моменты сил, получим

$$P_m B \sin \alpha - c\varphi = 0, \quad (34)$$

где α – угол между нормалью к плоскости рамки и направлением линий индукции магнитного поля; φ – угол, на который поворачивается рамка.

Знак «минус» перед моментом M_2 означает, что этот момент противоположен по направлению моменту M_1 .

Магнитный момент рамки

$$P_m = ISN,$$

где I – сила тока в рамке; S – площадь рамки, $S = a^2$; N – число витков.

Тогда равенство (34) можно записать в виде

$$Ia^2 N B \sin \alpha - c\varphi = 0.$$

Откуда

$$B = \frac{c\varphi}{NIa^2 \sin \alpha}. \quad (35)$$

Из рис. 37 видно, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$, значит, $\sin \alpha = \cos \varphi$. С учетом этого равенство (35) примет вид

$$B = \frac{c\varphi}{NIa^2 \cos \varphi}.$$

Проведем вычисления:

$$B = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 60}{100 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cos 60} = 3 \cdot 10^{-2} = 30 \text{ мТл}.$$

Ответ: $B = 30 \text{ мТл}$.

Пример 3. Протон, имеющий скорость $v = 10^4 \text{ м/с}$, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01 \text{ Тл}$ (рис. 38). Вектор скорости протона направлен под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям индукции. Определить траекторию движения протона, ее параметры, а также путь S , пройденный протоном по траектории за время $t = 10 \text{ мкс}$.

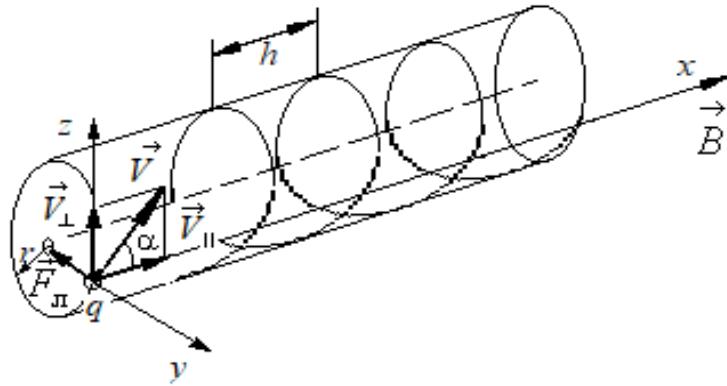


Рис. 38

Дано: $v = 10^4$ м/с, $B = 0,01$ Тл, $\alpha = 60^\circ$, $t = 10$ мкс = $10 \cdot 10^{-6}$ с, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг; $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (характеристики протона берем из прил. В, табл. В.4).

Найти: S ; h .

Решение. Известно, что на заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца

$$F_L = qvB \sin\left(\vec{v}, \vec{B}\right) = qvB \sin \alpha.$$

Эта сила, перпендикулярная вектору скорости, не совершает работы, поэтому кинетическая энергия протона и модуль вектора скорости остаются неизменными.

Следовательно, путь, пройденный по траектории,

$$S = vt.$$

Подставив значения v и t , получим

$$S = 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см.}$$

Для описания траектории протона удобно представить вектор скорости \vec{v} как сумму составляющих, одна из которых \vec{v}_{\parallel} направлена по линиям индукции, вторая \vec{v}_{\perp} – перпендикулярна им.

Составляющая скорости \vec{v}_{\parallel} в магнитном поле не изменяется ни по модулю, ни по направлению и обеспечивает перемещение протона вдоль силовой линии (действием силы тяжести можно пренебречь).

Составляющая скорости \vec{v}_{\perp} в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению. Сила Лоренца \vec{F}_L (рис. 38) сообщает протону нормальное ускорение, так как $\vec{F}_L \perp \vec{v}_{\perp}$, и вызывает вращение по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции. Таким образом, протон участвует в двух движениях – равномерном и прямолинейном со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$, параллельной линиям

индукции (вдоль оси OX), и равномерном вращении по окружности в плоскости yOz со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

В результате одновременного участия в движениях по окружности и по прямой протон будет двигаться по винтовой линии радиусом r и шагом h .

Радиус окружности, по которой движется протон, найдем следующим образом. Сила Лоренца \vec{F}_L сообщает протону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_{\perp}^2}{r}$. По второму закону Ньютона $F = ma_n$, где $F = F_L = qv_{\perp}B$.

$$\text{Тогда } qv_{\perp}B = ma_n, \text{ откуда } r = \frac{mv_{\perp}}{qB} \text{ или } r = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Выполним вычисления:

$$r = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^4 \cdot \sin 60^\circ}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,01} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9 \text{ мм}.$$

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному протоном вдоль поля со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ за время, равное периоду обращения T :

$$h = v_{\parallel}T. \quad (36)$$

Период обращения связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}}.$$

Подставив это выражение в формулу (36), найдем шаг винтовой линии:

$$h = v_{\parallel} \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = 2\pi r \frac{v \cos \alpha}{v \sin \alpha} = 2\pi r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Произведя подстановку числовых значений, получим

$$h = 2 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,3 \text{ см.}$$

Ответ: $S = 10 \text{ см}$; $h = 3,3 \text{ см}$.

Пример 4. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$ равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$, площадь рамки $S = 150 \text{ см}^2$ (рис. 39). Определить мгновенное значение ЭДС эндукции ϵ_i для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет с линиями поля угол $\varphi = 60^\circ$.

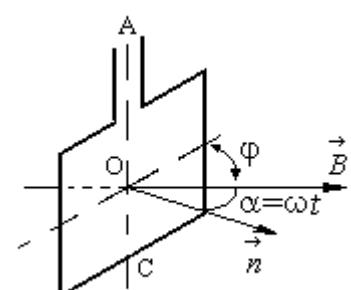


Рис. 39

Дано: $B = 0,1$ Тл, $\varphi = 60^\circ$, $S = 150 \text{ см}^2 = 150 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $N = 1000$ витков.

Найти: ε_i .

Решение. Мгновение значение ЭДС индукции ε_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея–Максвелла

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (37)$$

Потокосцепление

$$\psi = N\Phi,$$

где N – число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ .

Подставив выражение для потокосцепления в формулу (37), получим

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (38)$$

При вращении катушки (рис. 39) магнитный поток Φ , пронизывающий катушку в момент времени t , изменяется по закону

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; α – угол между нормалью к плоскости рамки и направлением вектора индукции поля \vec{B} ; ω – круговая частота.

Угловая скорость вращения постоянна, следовательно, $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \rightarrow & \wedge \\ n, & B \end{smallmatrix} \right)$ изменяется со временем по закону $\alpha = \omega t$, если принять, что в начальный момент плоскость рамки перпендикулярна линиям индукции. Подставив в формулу (38) выражение магнитного потока Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (39)$$

Круговая частота ω связана с частотой вращения n соотношением $\omega = 2\pi n$. Подставив ω в формулу (39), получим

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \sin \omega t.$$

Заметив, что $\omega t = \pi/2 - \varphi$ (рис. 39), мгновенное значение ЭДС индукции для заданных моментов времени будет составлять

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \sin(\pi/2 - \varphi) = 2\pi n NBS \cos \varphi.$$

Проведем вычисления:

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 150 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 60^\circ = 47,1 \text{ В.}$$

Ответ: $\varepsilon_i = 47,1$ В.

Пример 5. В магнитном поле, индукция которого равна 0,1 Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки $S_0 = 1 \text{ мм}^2$, площадь рамки $S = 25 \text{ см}^2$, нормаль к плоскости рамки направлена по силовым линиям поля. Какое количество электричества q пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля?

Дано: $B = 0,1 \text{ Тл}$, $S_0 = 1 \text{ мм}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, $S = 25 \text{ см}^2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $\rho_{\text{меди}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Найти: q .

Решение. При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникнет ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить, воспользовавшись законом Ома для полной цепи:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt},$$

где R – сопротивление рамки.

Так как мгновенное значение индукционного тока $I_i = \frac{dq}{dt}$, то заряд dq , который протекает через поперечное сечение рамки за время dt , будет равен

$$dq = I_i dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Phi.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд:

$$q = \int dq = -\frac{1}{R} \int_1^2 d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметим, что при выключенном поле $\Phi_2 = 0$, тогда

$$q = \frac{\Phi_1}{R}.$$

Найдем магнитный поток Φ_1 . По определению магнитного потока

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

где S – площадь рамки, α – угол между нормалью к плоскости рамки и вектором индукции, в нашем случае $\alpha = 0^\circ$.

Сопротивление проволоки материала, из которого сделана рамка,

$$R = \rho_s \frac{\ell}{S}, \quad (40)$$

где ρ_s – удельное сопротивление материала, из которого сделана рамка; ℓ – длина проволоки, равная периметру рамки, $\ell = 4a$; a – сторона рамки, $a = \sqrt{S}$.

Произведя подстановки в формулу (40), получим

$$q = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{BS \cos 0^\circ}{\rho_s \ell / S_0} = \frac{BSS_0}{\rho_s \ell} = \frac{BSS_0}{\rho_s 4a} = \frac{BSS_0}{\rho_s 4\sqrt{S}} = \frac{BS_0 \sqrt{S}}{4\rho_s}.$$

Воспользовавшись табл. В.1 прил. В, запишем $\rho_{\text{меди}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Проведем вычисления:

$$q = \frac{0,1 \cdot 10^{-6} \sqrt{25 \cdot 10^{-4}}}{4 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Кл} = 74 \text{ мКл}.$$

Ответ: $q = 74 \text{ мКл}$.

Пример 6. Материальная точка участвует одновременно в двух колебательных процессах, происходящих в одном направлении по гармоническому закону с одинаковой частотой, амплитудами $A_1 = 5 \text{ см}$ и $A_2 = 10 \text{ см}$ и сдвигом по фазе $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего процесса.

Дано: $A_1 = 5 \text{ см}$; $A_2 = 10 \text{ см}$; $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Найти: A ; φ_0 .

Решение. Законы движения для каждого из процессов могут быть записаны в виде

$$x_1 = A_1 \cos \omega t, \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x_1 , x_2 – смещения от общего для обоих процессов положения равновесия; ω – циклическая частота (поскольку начальная фаза φ_0 определяется выбором начала отсчета времени, можно положить $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = \Delta\varphi$).

Закон движения точки, участвующей в двух колебательных процессах:

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi), \quad (41)$$

где x – результирующее смещение точки от положения равновесия.

Поскольку оба колебания гармонические с одинаковой частотой и одного направления, результирующее колебание точки гармоническое с той же частотой и закон движения может быть записан в таком виде:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (42)$$

где A – амплитуда результирующего колебания; φ_0 – начальная фаза результирующего колебания, равная сдвигу по фазе относительно первого колебания.

Неизвестные A и φ_0 могут быть найдены либо аналитическим методом, либо методом векторного сложения колебаний.

Аналитический метод. Согласно уравнениям (41) и (42) получим

$$A \cos(\omega t + \varphi_0) = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi). \quad (43)$$

Используя формулы косинуса суммы двух углов, перепишем уравнение (43):

$$A \cos \varphi_0 \cos \omega t - A \sin \varphi_0 \sin \omega t = (A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi) \cos \omega t - A_2 \sin \Delta\varphi \sin \omega t.$$

Это уравнение будет тождеством относительно переменной t , если коэффициенты при ($\cos \omega t$) и ($\sin \omega t$) в левой части тождества равны соответствующим коэффициентам в правой части:

$$A \cos \varphi_0 = A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi; \quad -A \sin \varphi_0 = A_2 \sin \Delta\varphi.$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных A и φ_0 , получаем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi};$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{A_2 \sin \Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi}.$$

Векторный метод. Любой гармонический процесс можно привести в однозначное соответствие с вращением вектора \vec{A} с угловой скоростью ω , равной циклической частоте колебаний. Модуль вектора \vec{A} равен амплитуде колебаний, угол φ_0 , образованный этим вектором с осью ox , равен начальной фазе колебаний. Проекция вектора \vec{A} на ось ox в любой момент времени будет меняться по гармоническому закону:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

При сложении колебаний, происходящих с одинаковой частотой, угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 не изменяется с течением времени и равен $\Delta\varphi$ – разности начальных фаз. Поэтому при сложении таких колебаний

все векторы можно показать для момента $t = 0$. Векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 показаны на рис. 40 $|\vec{A}_1| = A_1$, $|\vec{A}_2| = A_2$.

Вектор \vec{A}_1 направлен вдоль оси ox , поскольку начало отсчета времени выбрано так, что $\varphi_{01} = 0$. Угол наклона вектора \vec{A}_2 к оси ox равен $\varphi_{02} = \Delta\varphi$.

Согласно теореме косинусов амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}.$$

Угол наклона вектора \vec{A} к оси ox и будет начальной фазой результирующего колебания

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0},$$

причем $y_0 = A_2 \sin \Delta\varphi$, $x_0 = A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi$, откуда $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{A_2 \sin \Delta\varphi}{A_1 + A_2 \cos \Delta\varphi}$.

Таким образом, оба метода дают достаточно простые решения задачи. Выполним вычисления:

$$A = \sqrt{5^2 + 10^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos \pi / 3} = 13 \text{ см.}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{10 \cdot \sin \pi / 3}{5 + 10 \cos \pi / 3} = 41^\circ = 0,23 \pi.$$

Ответ: $A = 13 \text{ см}$, $\varphi_0 = 0,23 \pi$.

Пример 7. Математический маятник длиной $l = 50 \text{ см}$ совершает небольшие колебания в среде, в которой коэффициент затухания $\delta = 09 \text{ с}^{-1}$. Определить время τ и число полных колебаний N , по истечении которых амплитуда маятника уменьшится в пять раз. Во сколько раз должен возрасти коэффициент трения, чтобы колебания оказались невозможными?

Дано: $l = 50 \text{ см} = 0,50 \text{ м}$; $\delta = 09 \text{ с}^{-1}$.

Найти: τ , N , $\frac{r_{\max}}{r}$.

Решение. При отсутствии трения колебания маятника в вертикальной плоскости происходят по гармоническому закону с собственной циклической частотой

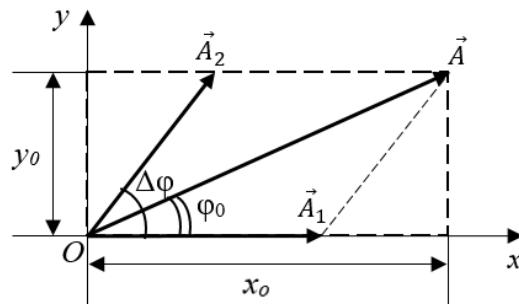


Рис. 40

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (44)$$

Вследствие трения колебания маятника будут затухающими:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\delta t} \sin \omega t,$$

где α – угол отклонения нити маятника от вертикали в момент t (записанный закон движения соответствует такому началу отсчета времени, что при $t = 0$ маятник проходит через положение равновесия, т.е. $\alpha = 0$).

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (45)$$

Амплитуда A затухающих колебаний изменяется со временем по экспоненциальному закону:

$$A(t) = \alpha_0 e^{-\delta t}. \quad (46)$$

Запишем выражение (46) для моментов времени t и $t + \tau$:

$$A_1 = \alpha_0 e^{-\delta t}, \quad A_2 = \alpha_0 e^{-\delta(t+\tau)}.$$

Отношение амплитуд $\frac{A_1}{A_2} = e^{\delta \tau} = 5$. Логарифмируя это выражение, находим

$$\tau = \frac{\ln 5}{\delta} = \frac{\ln 5}{0,9} = 1,79 \text{ с.}$$

Число полных колебаний, прошедших за время τ , равно отношению

$$N = \frac{\tau}{T}.$$

Определим из выражения (44) собственную циклическую частоту математического маятника и, подставив её в выражение (45), получим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \delta^2}} = \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{\frac{9,8}{0,5} - 0,9^2}} = 1,45 \text{ с.}$$

Из сравнения T и τ видно, что $1 < N < 2$ ($N = \frac{\tau}{T} = \left[\frac{1,79}{1,45} \right] = 1$), т.е. по прошествии двух полных колебаний амплитуда уменьшится более чем в 5 раз, что соответствует уменьшению энергии маятника более чем в 25 раз (полная энергия колебательного движения маятника пропорциональна квадрату амплитуды, $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$).

Затухающие колебания по записанному выше закону возникают только при условии $\delta < \omega_0$ (это очевидно из выражения периода (45): при $\delta > \omega_0$ период и циклическая частота оказываются мнимыми величинами). При $\delta \geq \omega_0$ происходит апериодический процесс.

Предельное значение коэффициента затухания δ , при котором возможны колебания, $\delta_{\max} = \omega_0$, причем $\delta = \frac{r}{2m}$, где m – масса маятника, постоянная по условию задачи; r – коэффициент трения. Следовательно, искомое значение отношения коэффициентов трения:

$$\frac{r_{\max}}{r} = \frac{\delta_{\max}}{\delta} = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{\sqrt{g/l}}{\delta} = \frac{\sqrt{9,8/0,50}}{0,9} = 4,9.$$

Ответ: $\tau = 1,79$ с; $N = 1$; $\frac{r_{\max}}{r} = 4,9$.

Пример 8. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Интенсивность волны, т.е. средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, составляет $21,2$ мкВт/м². Определить амплитуду напряженности электрического поля волны.

Дано: $\epsilon = 1$; $\mu = 1$; $I = 21,2$ мкВт/м² = $2,12 \cdot 10^{-5}$ Вт/м².

Найти: E_0 .

Решение. Так как интенсивность электромагнитной волны определяется как средняя энергия, проходящая через единицу поверхности за единицу времени, то

$$I = \langle S \rangle, \quad (47)$$

где $\langle S \rangle$ – среднее значение модуля вектора плотности потока электромагнитной энергии – вектора Умова–Пойнтинга.

Согласно определению,

$$S = EH,$$

где E и H – соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны, описываемые уравнениями

$$E = E_0 \cos(\omega t - k x);$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - k x),$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – циклическая частота; k – волновое число, $k = \frac{\omega}{v}$ (φ_0 – начальная фаза колебаний, принятая равной нулю).

Мгновенное значение модуля вектора Умова–Пойнтинга

$$S = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - k x),$$

а его среднее значение, с учетом того что $\langle \cos^2(\omega t - k x) \rangle = \frac{1}{2}$,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0. \quad (48)$$

В бегущей электромагнитной волне мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H,$$

откуда (с учетом того что эта электромагнитная волна распространяется в вакууме)

$$H_0 = \frac{\sqrt{\epsilon \epsilon_0}}{\sqrt{\mu \mu_0}} E_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} E_0. \quad (49)$$

Подставив выражение (49) в (48) и учитывая (47), получим искомую амплитуду напряженности электрического поля волны:

$$E_0 = \sqrt{2 \cdot I \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}.$$

Выполним вычисления:

$$E_0 = \sqrt{2 \cdot 2,12 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}}} = 126 \cdot 10^{-3} \frac{\text{B}}{\text{M}} = 126 \frac{\text{мB}}{\text{M}}.$$

Ответ: $E_0 = 126 \frac{\text{мB}}{\text{M}}$.

Пример 9. Поверхности стеклянного клина ($n = 1,5$) образуют между собой угол $\alpha = 0,1'$. На клин падает нормально к его поверхности пучок монохроматических лучей длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ (рис. 41). Найти расстояние между полосами.

Дано: $n = 1,5$; $\alpha = 0,1'$; $\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Найти: ℓ .

Решение. Клин представляет собой частный случай тонкой пленки, имеющей переменную толщину d . Когерентные волны образуются при отражении света от верхней и нижней граней клина. При малых углах клина α когерентные лучи 1 и 2 идут практически параллельно и интерферируют (рис. 41a).

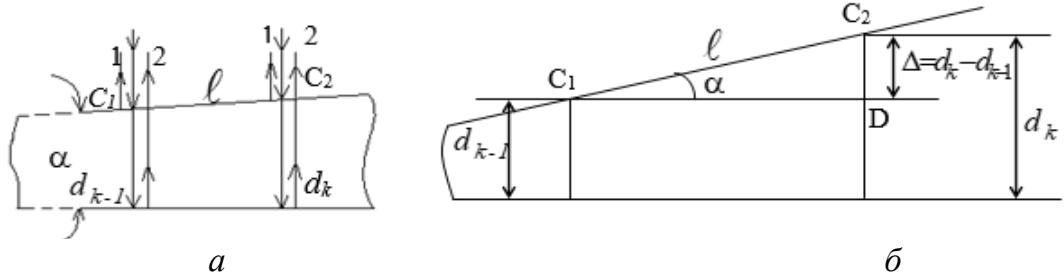


Рис. 41

Оптическую разность хода этих лучей находим по формуле

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}.$$

В данной задаче угол падения лучей на клин $i = 0$ и разность хода Δ приблизительно равны:

$$\Delta \cong 2dn + \frac{\lambda}{2}.$$

Пусть точкам C_1 и C_2 на рис. 41 b соответствуют две соседние светлые интерференционные полосы, тогда для разностей хода Δ_1 и Δ_2 в этих точках имеем

$$\Delta_1 = 2d_k n + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

$$\Delta_2 = 2d_{k-1} n + \frac{\lambda}{2} = (k-1)\lambda,$$

где d_k, d_{k-1} – толщины клина в тех местах, где наблюдаются светлые полосы; $k, (k-1)$ – номера полос (номера интерференционных максимумов).

Вычитая почленно эти два равенства друг из друга, получим

$$2n(d_k - d_{k-1}) = \lambda,$$

откуда

$$d_k - d_{k-1} = \frac{\lambda}{2n}. \quad (50)$$

Искомое расстояние между соседними полосами ℓ можно легко выразить из $\Delta C_1 C_2 D$:

$$\ell = \frac{d_k - d_{k-1}}{\sin \alpha} \cong \frac{d_k - d_{k-1}}{\alpha},$$

$\sin \alpha \approx \alpha$, так как по условию задачи угол α очень мал.

Подставляя в последнюю формулу вместо разности $d_k - d_{k-1}$ ее значение из формулы (50), получим

$$\ell = \frac{\lambda}{2n\alpha}.$$

Найдем численное значение ℓ ($\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $n = 1,5$).

Переведем α в радианы ($\pi = 3,14$):

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}; \quad 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ рад};$$

$$\alpha = \frac{0,1' \cdot 3,14}{180 \cdot 60} = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Тогда получим

$$\ell = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1,5 \cdot 2,9 \cdot 10^{-5}} = 0,56 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5,6 \text{ мм.}$$

Ответ: $\ell = 5,6 \text{ мм.}$

Эта задача может быть решена и в обратном порядке, то есть по расстоянию между интерференционными полосами ℓ можно найти угол клина α .

Пример 10. На дифракционную решетку Δ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$. На экране \mathcal{E} , расположенном параллельно решетке и отстоящем от нее на расстояние $L = 0,6 \text{ м}$, наблюдается дифракционная картина (рис. 42). Расстояние между дифракционными максимумами первого порядка на экране $\ell = 10 \text{ см}$. Определить постоянную дифракционной решетки d и общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решетки.

Дано: $\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $L = 0,6 \text{ м}$; $\ell = 0,1 \text{ м}$; $k = 1$.

Найти: d ; N .

Решение:

1. Запишем условие главных максимумов для дифракционной решетки:

$$ds \sin \varphi = \pm k\lambda. \quad (51)$$

где d – период решетки, k – порядок максимума.

Для того чтобы найти постоянную решетки d , необходимо знать угол φ , под которым получается k -й максимум.

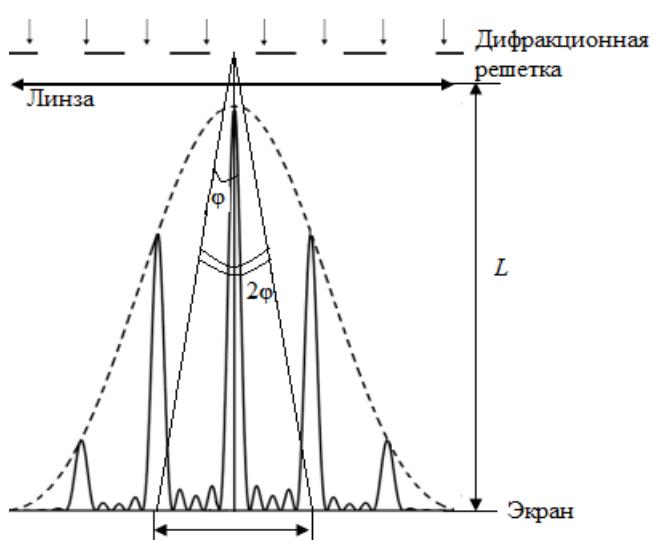


Рис. 42

По условию задачи $k = 1$. Так как $\frac{\ell}{2} \ll L$ (рис. 42), то можно считать, что

$$\sin \varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\ell}{2L}. \quad (52)$$

Подставляя формулу (52) в формулу (51), получим

$$d \frac{\ell}{2L} = 1\lambda; \quad d = \frac{2L\lambda}{\ell}.$$

Находим числовое значение:

$$d = \frac{2 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6} \cdot 0,6}{0,1} = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 7,8 \text{ мкм.}$$

2. Для определения общего числа главных максимумов N , даваемых дифракционной решеткой, исходим из условия, что максимальный угол отклонения лучей от нормального направления распространения не может превышать 90° , а $\sin \varphi_{\max} = 1$.

Тогда, используя формулу (51), находим максимальное значение k_{\max} :

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}. \quad (53)$$

Производим вычисления:

$$k_{\max} = \frac{7,8 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-6}} = 12.$$

Общее число максимумов $N = 2k_{\max} + 1$, значит, слева и справа от центрального (нулевого) максимума будут наблюдаться по однаковому числу максимумов, равному k_{\max} , то есть всего $2k_{\max}$. Если учесть центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов:

$$N = 2 \cdot 12 + 1 = 25.$$

Ответ: $d = 7,8 \text{ мкм}; N = 25$.

Если по формуле (53) k_{\max} получится не целым числом, то за число максимумов нужно брать целую часть получившегося числа.

Пример 11. Какой угол образуют плоскости поляризации двух николей, если интенсивность света, вышедшего из второго николя, была ослаблена в пять раз? Учесть, что поляризатор поглощает 10 %, а анализатор 8 % падающего на них светового потока (рис. 43).

Дано: $\frac{I_{\text{есл}}}{I} = 5$; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,08$.

Найти: α .

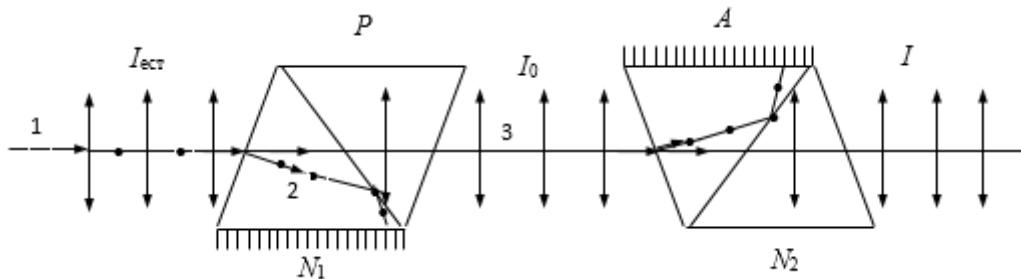


Рис. 43

Решение. Естественный луч 1 ($I_{\text{ест}}$), падая на грань призмы Николя N_1 , претерпевает двойное лучепреломление. В результате возникают два луча: обыкновенный 2 и необыкновенный 3 (рис. 43).

Оба луча поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, интенсивность их одинакова и составляет половину интенсивности естественного света. Обыкновенный луч 2 вследствие полного отражения отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч 3 проходит через николь. При этом и интенсивность света изменяется: уменьшается еще и вследствие поглощения в веществе николя.

Таким образом, интенсивность света I_0 , прошедшего через первую призму (поляризатор P), с учетом поглощения будет составлять

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} (1 - k_1),$$

где $I_{\text{ест}}$ – интенсивность естественного света, падающего на первый николь; k_1 – относительная потеря интенсивности света в поляризаторе.

Поляризованный луч 3 интенсивности I_0 , попадая на второй николь (анализатор A), также расщепляется на обыкновенный, который полностью поглощается в николе 2, и необыкновенный.

Интенсивность необыкновенного пучка света I , вышедшего из анализатора, определяется законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где α – угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора.

Учитывая потери интенсивности света во втором николе, получим

$$I = I_0 (1 - k_2) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя находим так:

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} (1 - k_1)(1 - k_2) \cos^2 \alpha.$$

Выразим $\cos^2 \alpha$:

$$\cos^2 \alpha = \frac{2I}{I_{\text{ект}}(1-k_1)(1-k_2)}.$$

Но по условию задачи

$$\frac{I_{\text{ект}}}{I} = 5,$$

то есть

$$\frac{I}{I_{\text{ект}}} = \frac{1}{5}.$$

Значит,

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{5(1-0,1)(1-0,08)} = 0,483.$$

Искомый угол $\alpha = \arccos \sqrt{0,483} = 48^\circ$.

Ответ: $\alpha = 48^\circ$.

Пример 12. Во сколько раз увеличится мощность излучения абсолютно черного тела, если максимум в спектре энергии излучения перенесется от красной границы видимого спектра ($\lambda_{m_1} = 0,76$ мкм) к его фиолетовой границе ($\lambda_{m_2} = 0,38$ мкм)?

Дано: $\lambda_{m_1} = 0,76$ мкм = $0,76 \cdot 10^{-6}$ м; $\lambda_{m_2} = 0,38$ мкм = $0,38 \cdot 10^{-6}$ м.

Найти: $n = \frac{N_2}{N_1}$.

Решение. Длина волны λ_m , на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, связана с температурой тела T законом смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (54)$$

По формуле (54) определяем температуры тела T_1 и T_2 :

$$T_1 = \frac{b_1}{\lambda_{m_1}}; \quad T_2 = \frac{b_2}{\lambda_{m_2}}. \quad (55)$$

Мощность излучения абсолютно черного тела

$$N = R_e S,$$

где R_e – излучательность; S – площадь поверхности излучающего тела.

По закону Стефана–Больцмана излучательность абсолютно черного тела

$$R_e = \sigma T^4.$$

Отсюда выражаем мощности излучения тела при температурах T_1 и T_2 :

$$N_1 = \sigma T_1^4 S, \quad N_2 = \sigma T_2^4 S.$$

Находим их отношение:

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4.$$

Из формул (55) следует, что $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m_1}}{\lambda_{m_2}}$.

Тогда

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{\lambda_{m_1}}{\lambda_{m_2}} \right)^4 = \left(\frac{0,76}{0,38} \right)^4 = 2^4 = 16.$$

Ответ: $\frac{N_2}{N_1} = 16$.

Пример 13. Определить «красную» границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость v_{\max} фотоэлектронов равна $0,65$ Мм/с.

Дано: $\lambda = 400$ нм; $v_{\max} = 0,65$ Мм/с = $0,65 \cdot 10^6$ м/с; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (данные m , h , c взяты из прил. Г).

Найти: λ_0 .

Решение. При облучении металла светом, длина волны λ_0 которого соответствует «красной» границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю, то есть $hv_0 = A$.

Учитывая, что $v_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, получим

$$h \frac{c}{\lambda_0} = A, \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A},$$

где λ_0 – длина волны, соответствующая «красной» границе фотоэффекта; v_0 – частота волны, соответствующая «красной» границе фотоэффекта.

Работу выхода для цезия определим из уравнения Эйнштейна:

$$A = hv - T_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_{\max}^2}{2}}. \quad (56)$$

Выполним вычисления, подставив в формулу (56) числовые значения величин:

$$\lambda_0 = \frac{\frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} - \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (0,65 \cdot 10^6)^2}{2}}{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 640 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 640 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda_0 = 640 \text{ нм.}$

Пример 14. Фотон с энергией 0,500 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом 60° . Найти энергию рассеянного фотона, кинетическую энергию, импульс электрона отдачи и его направление.

Дано: $\varepsilon = 0,500 \text{ МэВ}$; $\theta = 60^\circ$; $E_0 = 0,511 \text{ МэВ}$ (энергия покоя электрона).

Найти: ε' ; T ; $\left| \vec{p}_s \right|$; ϕ .

Решение:

1. Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (57)$$

Выразим длины волн через энергию фотона:

$$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{hc}{\varepsilon}; \quad \lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'}. \quad (58)$$

Подставив выражения для длин волн (58) в (57), получим

$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta).$$

Разделим обе части этого равенства на hc :

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos \theta}{m_0 c^2}.$$

Обозначив энергию покоя электрона $m_0 c^2$ через E_0 , получим

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon / E_0 (1 - \cos \theta) + 1}.$$

Подставим числовые значения энергий фотона и электрона, выполним вычисления:

$$\varepsilon' = \frac{0,500}{\frac{0,500}{0,511} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1} = 0,335 \text{ МэВ.}$$

2. Кинетическую энергию электрона отдачи T определим из закона сохранения энергии:

$$\varepsilon = \varepsilon' + T.$$

Отсюда выражим $T = \varepsilon - \varepsilon'$ и, подставив числовые значения, получим

$$T = 0,500 - 0,335 = 0,165 \text{ МэВ.}$$

3. Импульс электрона отдачи найдем из закона сохранения импульса (рис. 44):

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e,$$

где \vec{p} и \vec{p}' – импульсы падающего и рассеянного фотонов; \vec{p}_e – импульс электрона отдачи.

Модули импульсов фотонов выражим через их энергии:

$$p = \frac{\varepsilon}{c}; \quad p' = \frac{\varepsilon'}{c}.$$

Зная p , p' и угол θ (рис. 44), можно определить p_e по теореме косинусов:

$$p_e = \sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta} = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos \theta}.$$

Выполним вычисления, подставив числовые значения в единицах СИ:

$$(1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}):$$

$$p_e = \frac{1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{0,5^2 + 0,335^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,335 \frac{1}{2}} = 0,235 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}.$$

Проверим размерность:

$$[p] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}/\text{с}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Для определения направления импульса рассеянного фотона найдем угол φ (рис. 44).

По теореме синусов

$$\frac{p'}{\sin \varphi} = \frac{p_e}{\sin \theta},$$

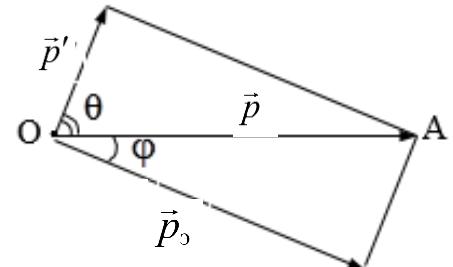


Рис. 44

отсюда

$$\sin \varphi = \frac{p'}{p_0} \sin \theta.$$

Заменив импульс рассеянного фотона соотношением $p' = \frac{\varepsilon'}{c}$, получим

$$\sin \varphi = \frac{\varepsilon'}{cp_0} \sin \theta.$$

Вычислим $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \frac{0,335 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 0,235 \cdot 10^{-21} \cdot 2} = 0,660; \quad \varphi = 41^\circ.$$

Ответ: $\varepsilon' = 0,335$ МэВ; $T = 0,165$ МэВ; $p_0 = 0,235 \cdot 10^{-21}$ кг·м/с; $\varphi = 41^\circ$.

Пример 15. Пучок параллельных лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток излучения $\Phi_e = 0,6$ Вт. Определить: 1) силу давления F , испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов ΔN , ежесекундно падающих на поверхность.

Дано: $\lambda = 663$ нм = $663 \cdot 10^{-9}$ м; $\Phi_e = 0,6$ Вт; $\rho = 1$; поток падает нормально к поверхности, $S_n = S$.

Найти: F ; ΔN .

Решение:

1. Определяем силу светового давления F на поверхность S :

$$F = pS. \quad (59)$$

Световое давление p можно найти по формуле

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho), \quad (60)$$

где ρ – коэффициент отражения.

Подставляя формулу (60) в формулу (59), получим

$$F = \frac{E_e S}{c} (1 + \rho). \quad (61)$$

Произведение E_e на S есть величина, численно равная энергии, падающей на данную площадку в единицу времени, то есть поток излучения

$$\Phi_e = E_e S.$$

С учетом этого формула (61) примет вид

$$F = \frac{\Phi_e}{c} (1 + \rho).$$

Вычислим силу давления F (значение скорости света в вакууме берем из прил. Г, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с):

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1 + 1) = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Н.}$$

2. Произведение энергии ε одного фотона на число фотонов, падающих на поверхность в единицу времени, равно потоку энергии света, падающему на данную поверхность:

$$\Delta N \varepsilon = \Phi_e.$$

Так как $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, то $\Phi_e = \Delta N h \frac{c}{\lambda}$.

Отсюда

$$\Delta N = \frac{\Phi_e \lambda}{hc}.$$

Подставляем числовые значения (значения постоянной Планка берем из прил. Г, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с):

$$\Delta N = \frac{0,6 \cdot 663 \cdot 10^{-9}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

Проверим размерность:

$$[\Delta N] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с}} = \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $F = 4 \cdot 10^{-9}$ Н, $\Delta N = 2 \cdot 10^{18}$ с⁻¹.

Пример 16. Определить длину волны, соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.

Дано: $k = 2$ – номер орбиты, на которую перешел электрон; $n = 5$ – номер орбиты, с которой перешел электрон;

$$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

Найти: λ .

Решение. Третья спектральная линия в серии Бальмера соответствует переходу электрона с пятой орбиты на вторую. Частота излучения ν , возникающего при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую (рис. 45), определяется обобщенной формулой Бальмера для водорода:

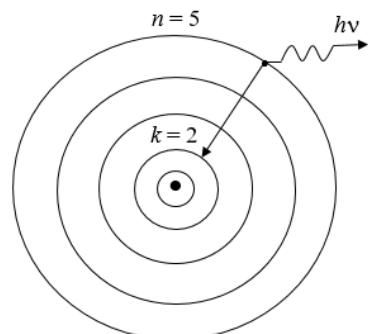


Рис. 45

$$v = R c \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где R – постоянная Ридберга; c – скорость распространения света в вакууме.

Так как $\lambda = \frac{c}{v}$, то, делая подстановку, получим

$$\lambda = \frac{1}{R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)}.$$

Выполним анализ размерности полученного выражения:

$$[\lambda] = \frac{1}{[R]} = \frac{1}{\text{м}^{-1}} = \text{м.}$$

Анализ размерности показывает, что полученная единица является единицей длины.

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\lambda = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right)} \text{ м} \approx 4,341 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 434,1 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda = 434,1$ нм.

Пример 17. Энергия возбужденного атома водорода 0,85 эВ. Вычислить длину волны де Броиля для электрона в этом состоянии атома.

Дано: $|E| = 0,85$ эВ ** $= 1,36 \cdot 10^{-19}$ Дж; $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Найти: λ .

Решение. Электрон в атоме водорода движется по круговой орбите. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

где e – элементарный заряд; r – радиус орбиты электрона; v – скорость движения электрона по орбите; m – масса покоя электрона; ϵ_0 – электрическая постоянная.

Кинетическая энергия электрона

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

** Электрон-вольт – внесистемная единица измерения энергии и работы, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Потенциальная энергия отрицательно заряженного электрона в поле положительно заряженного ядра является отрицательной и равна

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -2E_k,$$

где E_k – кинетическая энергия.

Полная механическая энергия электрона определяется выражением

$$E = E_k + E_p = E_k - 2E_k = -E_k.$$

Таким образом, $E_k = |E|$. Так как кинетическая энергия электрона во много раз меньше его энергии покоя ($E_0 = 0,511 \text{ МэВ}$), то можем использовать уравнение классической механики, определяющее связь импульса p с кинетической энергией:

$$p = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2m|E|}.$$

Найдем длину волны де Броиля:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m|E|}},$$

где h – постоянная Планка.

Выполним проверку размерности:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг}^{1/2} \cdot \text{Дж}^{1/2}} = \frac{\text{Дж}^{1/2} \cdot \text{с}}{\text{кг}^{1/2}} = \frac{\text{Н}^{1/2} \cdot \text{м}^{1/2} \cdot \text{с}}{\text{кг}^{1/2}} = \frac{\text{кг}^{1/2} \cdot \text{м}^{1/2} \cdot \text{м}^{1/2} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{кг}^{1/2}} = \text{м}.$$

Полученная единица измерения соответствует искомой величине. Подставив числовые значения, получим

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,36 \cdot 10^{-19}}} \approx 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 1,33 \text{ нм.}$$

Ответ: $\lambda = 1,33 \text{ нм.}$

Пример 18. Электрон обладает кинетической энергией $E_k = 1,02 \text{ МэВ}$. Во сколько раз изменится длина волны де Броиля, если кинетическая энергия электрона уменьшится вдвое?

Дано: $E_{k1} = 1,02 \text{ МэВ} = 1,63 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}; E_{k2} = 0,5E_{k1} = 0,51 \text{ МэВ} = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}; m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}; c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

Найти: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Решение. Длина волны де Броиля для микрочастицы определяется по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где h – постоянная Планка; p – импульс микрочастицы.

Пусть p_1 – импульс электрона в начальном состоянии, p_2 – импульс электрона в конечном состоянии. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{p_2}, \quad \text{а} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Найдем энергию покоя электрона:

$$E_0 = m_0 c^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3,00 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} \approx 8,20 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$$

где m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме.

Так как кинетическая энергия соизмерима с энергией покоя электрона, то при решении задачи необходимо учитывать релятивистские эффекты. В этом случае связь импульса с кинетической энергией частицы определяется формулой

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}.$$

Импульсы электрона в начальном и конечном состояниях равны соответственно

$$p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{E_{k1}(E_{k1} + 2E_0)} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{E_{k2}(E_{k2} + 2E_0)}.$$

Вычисления показали, что практически $E_0 = E_{k2} = 0,5E_{k1}$. Учитывая это, найдем отношение длин волн де Броиля:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{E_{k1}(E_{k1} + E_{k1})}}{\sqrt{E_{k2}(E_{k2} + 2E_{k2})}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{E_{k1}}{E_{k2}}.$$

Анализ размерности полученного выражения показывает, что отношение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ – величина безразмерная, и убеждает в правдоподобности ответа.

Выполним вычисления:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1,63 \cdot 10^{-13}}{8,16 \cdot 10^{-14}} \approx 1,63.$$

Ответ: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,63$.

Пример 19. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальную энергию электрона E_{\min} , находящегося в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной $l = 5 \text{ \AA}$.

Дано: $l = 5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$; $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

Найти: E_{\min} .

Решение. Соотношение неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса в случае одномерной задачи $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ позволяет оценить неопределенность импульса электрона:

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad (62)$$

где Δp_x – неопределенность импульса; Δx – неопределенность координаты; \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π .

Так как ширина «потенциальной ямы» равна l , а электрон находится в этой «яме», то неопределенность его координаты равна $\Delta x = \frac{l}{2}$ (рис. 46).

Потенциальная энергия электрона E_p внутри «ямы» равна нулю, следовательно, его полная механическая энергия E равна кинетической E_k . За пределами «ямы», ограниченной бесконечно высокими «стенками», $E_p \rightarrow \infty$.

Связь импульса p с кинетической энергией электрона для нерелятивистского случая имеет вид (учитываем, что по условию задачи $E_k = E$)

$$p = \sqrt{2m_0 E_k} = \sqrt{2m_0 E},$$

где m_0 – масса покоя электрона.

Выразим полную энергию E в виде

$$E = \frac{p^2}{2m_0}.$$

Из этого уравнения видно, что энергия электрона тем меньше, чем меньше его импульс. Неопределенность значения импульса равна Δp_x . Минимальное значение импульса электрона p_{\min} должно быть не меньше Δp_x , то есть $p_{\min} \geq \Delta p_x$. Учитывая это, можем записать

$$E \geq \frac{(\Delta p_x)^2}{2m_0}.$$

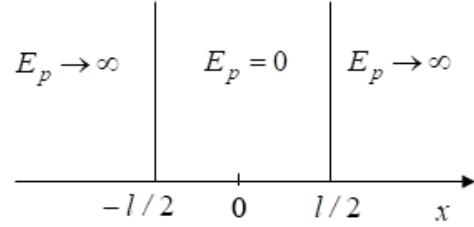


Рис. 46

Сделав подстановку Δp_x из уравнения (62), с учетом того что $\Delta x = \frac{l}{2}$, придем к уравнению

$$E \geq \frac{2\hbar^2}{m_0 l^2}.$$

Следовательно, минимальная энергия электрона

$$E_{\min} = \frac{2\hbar^2}{m_0 l^2}.$$

Анализ размерности убеждает, что ответ правдоподобен, так как энергия действительно измеряется в джоулях:

$$[E] = \frac{[\hbar]^2}{[m_0][l]^2} = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{Дж}.$$

Подставим числовые значения в конечную формулу и выполним вычисления (оцениваем лишь порядок вычисляемой величины):

$$E_{\min} = \frac{2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^{-10})^2} \approx 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Ответ: $E_{\min} = 10^{-19} \text{ Дж}$.

Пример 20. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с непроницаемыми «стенками». Ширина «ямы» $l = 37,8 \text{ эВ}$. Определить, на каком энергетическом уровне находится электрон. Чему равна плотность вероятности обнаружения электрона в середине «ямы»?

Дано: $l = 0,2 \text{ нм} = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$; $E_n = 37,8 \text{ эВ} = 6,06 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$;
 $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Найти: n ; w .

Решение. Запишем уравнение Шрёдингера для стационарных состояний. Для рассматриваемой одномерной задачи это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0,$$

где Ψ – координатная часть волновой функции, зависящая только от x ; E – полная энергия электрона; U – потенциальная энергия электрона; \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π .

Электрон находится в «яме», где его потенциальная энергия $U = 0$ (рис. 47). За пределами «ямы», ограниченной бесконечно высокими «стенками», $U \rightarrow \infty$. Электрон не может проникнуть за пределы «ямы», поэтому вероятность его обнаружения (а следовательно, и волновая функция) за пределами «ямы» равна нулю.

Из условия непрерывности волновой функции следует, что ψ должна быть равна нулю и на границах «ямы»:

$$\psi_{x=0} = \psi_{x=l} = 0.$$

В пределах «ямы» ($0 \leq x \leq l$) уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (63)$$

Это уравнение, описывающее движение электрона в одномерной «потенциальной яме», удовлетворяется при дискретных значениях энергии электрона

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 l^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где n – квантовые числа, определяющие энергетические уровни электрона.

Выразим из этой формулы n :

$$n = \sqrt{\frac{2E_n m_0 l^2}{\pi^2 \hbar^2}} = \frac{l}{\pi \hbar} \sqrt{2E_n m_0}.$$

Анализ размерности правой части полученного выражения показывает, что n – величина безразмерная, и это соответствует действительности.

После подстановки числовых значений, данных в условии примера, получим

$$n = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} \sqrt{2 \cdot 6,06 \cdot 10^{-18} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 2.$$

Решение дифференциального уравнения (63) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\psi = A \sin \frac{\pi x n}{l}.$$

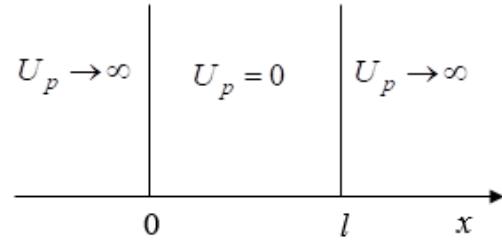


Рис. 47

Коэффициент A находим из условия нормировки:

$$A^2 \cdot \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x n}{l} dx = 1.$$

В результате интегрирования получаем $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$, следовательно,

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Плотность вероятности обнаружения электрона на различных расстояниях x от стенок «ямы» для рассматриваемого примера равна

$$w = |\psi|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi x n}{l}.$$

Выполним анализ размерности (выражение под знаком \sin безразмерное):

$$[w] = \left[\frac{1}{l} \right] = \frac{1}{\text{м}}.$$

Полученная единица соответствует искомой величине.

Вычислим значение w при $n = 2$ для $x = \frac{l}{2}$:

$$w = \frac{2}{l} \sin^2 \pi = 0.$$

Такой результат означает, что в состоянии с $n = 2$ электрон не может находиться в середине «ямы». Зависимость плотности вероятности обнаружения электрона на различных расстояниях от стенок «ямы» приведена на рис. 48.

Ответ: $n = 2; w = 0$.

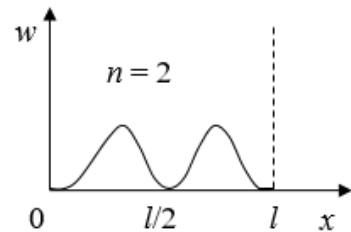


Рис. 48

Пример 21. Пси-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = A \exp \left[-r^2 / (2a^2) \right]$, где r – расстояние частицы от силового центра, $a = 1,0 \cdot 10^{-10}$ м – константа. Найти значение коэффициента A и наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ частицы от центра.

Дано: $\psi = A \exp \left[-r^2 / (2a^2) \right]; a = 1,0 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: $A; r_{\text{вер}}$.

Решение. Движение микрочастицы в центральном силовом поле (например, движение электрона в поле положительно заряженного ядра) описывается уравнением Шрёдингера в сферических координатах.

По условию задачи функция ψ зависит только от r и не зависит от углов ϑ и ϕ . В этом случае уравнение Шрёдингера для стационарных состояний принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где r – расстояние микрочастицы от силового центра; m_0 – масса покоя микрочастицы; \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π ; E – полная энергия микрочастицы; U – потенциальная энергия микрочастицы.

Перепишем уравнение Шрёдингера, выполнив дифференцирование в первом слагаемом:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения по условию задачи имеет вид

$$\psi = A \exp \left[-r^2 / (2a^2) \right].$$

Коэффициент A найдем из условия нормировки пси-функции, которое для рассматриваемой задачи запишем в виде

$$1 = \int_V \psi^2 dV = \int_0^\infty \psi^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int_0^\infty \psi^2 r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-r^2/a^2} \cdot r^2 dr,$$

где dV – элемент объема в сферических координатах ($dV = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi dr$).

Интеграл в полученном выражении равен $\frac{a^3}{4} \sqrt{\pi}$, следовательно,

$$1 = \pi A^2 a^3 \sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3 \sqrt{\pi}}}.$$

Выполним анализ размерности полученного выражения:

$$[A] = \frac{1}{[a]^{3/2}} = M^{-3/2}.$$

Анализ размерности подтверждает правдоподобность ответа. Действительно, квадрат модуля волновой функции имеет смысл плотности вероятности обнаружения микрочастицы

$$w = \frac{dW}{dV} = |\psi|^2 = A^2 \exp \left(-r^2 / a^2 \right),$$

где dW – вероятность нахождения частицы в элементе объема dV .

Так как размерность $[w] = \text{м}^{-3}$, то размерность $[A] = \text{м}^{-3/2}$.

Выполним вычисления:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3,14(1,0 \cdot 10^{-10})^3 \sqrt{3,14}}} \text{м}^{-3/2} \approx 4,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3/2}.$$

Вероятность нахождения микрочастицы на расстоянии между r и $r+dr$ от силового центра в любом направлении определяется формулой

$$dW = w_r dr = 4\pi\psi^2 r^2 dr.$$

Следовательно, плотность вероятности

$$w_r = 4\pi\psi^2 r^2 = \frac{4r^2}{a^3 \sqrt{\pi}} \exp(-r^2/a^2).$$

Из формулы видно, что плотность вероятности w_r обращается в нуль при $r = 0$ и асимптотически стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ частицы от силового центра найдем из условия, что при $r = r_{\text{вер}}$ плотность вероятности должна быть максимальна. Для этого исследуем функцию $w_r = f(r)$ на экстремум. Найдем первую производную $\frac{dw_r}{dr}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{8r}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-r^2/a^2} - \frac{2r}{a^2} e^{-r^2/a^2} \frac{4r^2}{a^3 \sqrt{\pi}} = 0; \quad \frac{8r}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-r^2/a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = 0.$$

Это равенство выполняется при $r = 0$; $r \rightarrow \infty$; $r = a$. Первые два решения соответствуют минимумам функции $w_r = f(r)$. Следовательно, наиболее вероятное расстояние микрочастицы от силового центра $r_{\text{вер}} = a = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Ответ: $A = 4,2 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3/2}$; $r_{\text{вер}} = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Пример 22. Определить отношение концентраций свободных электронов при $T = 0$ К в литии n_1 и цезии n_2 , если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $E_{F_1} = 4,72$ эВ и $E_{F_2} = 1,53$ эВ.

Дано: $E_{F_1} = 4,72$ эВ = $7,55 \cdot 10^{-19}$ Дж; $E_{F_2} = 1,53$ эВ = $2,45 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: $\frac{n_1}{n_2}$.

Решение. Уровень Ферми при абсолютном нуле определяется выражением

$$E_{F_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(3\pi^2 n \right)^{2/3},$$

где \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π ; m_0 – масса покоя электрона; n – количество свободных электронов в единице объема металла.

Используя эту формулу, запишем соотношения, определяющие концентрации n_1 и n_2 свободных электронов в литии и цезии:

$$n_1 = \left(\frac{2E_{F_1}m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{3\pi^2}; \quad n_2 = \left(\frac{2E_{F_2}m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{3\pi^2}.$$

Выполним анализ размерности:

$$\begin{aligned} [n] &= \frac{[E_F]^{3/2} [m_0]^{3/2}}{[\hbar]^3} = \frac{\text{Дж}^{3/2} \cdot \text{кг}}{\text{Дж}^3 \cdot \text{с}^3} = \frac{\text{кг}^{3/2}}{\text{Дж}^{3/2} \cdot \text{с}^3} = \frac{\text{кг}^{3/2}}{\text{Н}^{3/2} \cdot \text{м}^{3/2} \cdot \text{с}^3} = \\ &= \frac{\text{кг}^{3/2}}{\text{кг}^{3/2} \cdot \text{м}^{3/2} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^{3/2} \cdot \text{с}^3} = \text{м}^{-3}. \end{aligned}$$

Полученный результат соответствует действительности.

Найдем отношение концентраций свободных электронов:

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{E_{F_1}}{E_{F_2}} \right)^{3/2}.$$

Подставим в это выражение числовые значения и выполним вычисления:

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{7,55 \cdot 10^{-19}}{2,45 \cdot 10^{-19}} \right)^{3/2} \approx 5,41.$$

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 5,41$.

Пример 23. Найти относительное количество $\frac{\Delta N}{N}$ свободных электронов в металле, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на $\eta = 2,0\%$. Температура металла $T = 0\text{ K}$.

Дано: $T = 0\text{ K}$; $\eta = 0,02$ ($2,0\%$).

Найти: $\frac{\Delta N}{N}$.

Решение. Распределение свободных электронов в металле по состояниям с различной энергией при $T = 0$ К имеет вид

$$dn_E = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE,$$

где dn_E – концентрация свободных электронов, энергии которых заключены в пределах от E до $E + dE$; m_0 – масса покоя электрона; \hbar – постоянная Планка h , деленная на 2π .

Концентрацию свободных электронов в металле найдем путем интегрирования:

$$n = \int_0^{E_{F0}} AE^{1/2} dE,$$

где E_{F0} – энергия Ферми при $T = 0$ К; $A = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{3/2}$.

Если образец металла имеет объем V , то количество свободных электронов в этом образце

$$N = nV = AV \int_0^{E_{F0}} E^{1/2} dE.$$

Концентрация свободных электронов, энергии которых отличаются от энергии Ферми не более чем на 2 %,

$$\Delta n = \int_{0,98E_{F0}}^{E_{F0}} AE^{1/2} dE.$$

Количество таких электронов в образце металла объемом V

$$\Delta N = \Delta nV = AV \int_{0,98E_{F0}}^{E_{F0}} E^{1/2} dE.$$

Найдем относительное количество свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2 %:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\int_{0,98E_{F0}}^{E_{F0}} E^{1/2} dE}{\int_0^{E_{F0}} E^{1/2} dE}.$$

Произведя вычисления, получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{E_{F0}^{3/2} - 0,98^{3/2} E_{F0}^{3/2}}{E_{F0}^{3/2}} = 1 - 0,98^{3/2} \approx 0,03.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,03$ (или 3 %).

Пример 24. Найти постоянную распада радона λ , если известно, что количество атомов радона уменьшается за сутки на 18,2 %.

$$\text{Дано: } \delta N = \frac{N_0 - N}{N_0} = 0,182; \quad t = 24 \text{ ч} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ с}.$$

Найти: λ .

Решение. По закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 – количество нераспавшихся ядер радона в момент времени $t = 0$; N – количество нераспавшихся ядер по истечении времени t .

Количество ядер, распавшихся за время t ,

$$N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t}.$$

Так как $\frac{N_0 - N}{N_0} = \delta N$, то $\delta N = 1 - e^{-\lambda t}$.

Тогда $e^{-\lambda t} = 1 - \delta N$, $\lambda = -\frac{\ln(1 - \delta N)}{t}$.

Выполним анализ размерности:

$$[\lambda] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Полученный результат соответствует действительности.

Сделаем подстановку числовых значений и произведем вычисления:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0,182)}{8,64 \cdot 10^4} \text{ с}^{-1} \approx 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\lambda = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$.

Пример 25. Найти энергию связи, приходящуюся на один нуклон в ядре $^{27}_{13}\text{Al}$.

Дано: $^{27}_{13}\text{Al}$; $Z = 13$; $A = 27$; $m_a = 4,4805 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $m_{\text{H}} = 1,6736 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$; $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Найти: $\frac{E_{\text{св}}}{A}$.

Решение. Энергия связи нуклонов в ядре определяется выражением

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a]c^2,$$

где Z – зарядовое число ядра; A – массовое число ядра; m_{H} – масса изотопа водорода $^1_{\text{H}}$; m_n – масса покоя нейтрона; m_a – масса покоя изотопа $^{27}_{13}\text{Al}$; c – скорость света в вакууме.

Найдем удельную энергию связи:

$$\frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{[Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a]c^2}{A}.$$

Выполним анализ размерности:

$$[E_{\text{св}}] = [m][c]^2 = \text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с})^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим

$$\frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{[13 \cdot 1,6736 \cdot 10^{-27} + (27 - 13) \cdot 1,6750 \cdot 10^{-27} - 4,4805 \cdot 10^{-26}] \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{27} \approx \\ \approx 1,34 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/нуклон.}$$

В атомной физике при решении задач часто используют внесистемные единицы: массы – атомная единица массы (а. е. м.); энергии – электрон-вольт (эВ) и мегаэлектрон-вольт (МэВ). Эти единицы допускаются к применению наравне с единицами СИ.

При использовании внесистемных единиц энергия связи нуклонов в ядре будет определяться формулой

$$E_{\text{св}} = 931\Delta m,$$

где 931 – размерный коэффициент, МэВ/а. е. м.; Δm – дефект массы ядра, а. е. м.

Удельная энергия связи

$$\frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{931\Delta m}{A}.$$

Сделаем подстановку числовых значений и выполним вычисления:

$$\frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{[13 \cdot 1,0078 + (27 - 13) \cdot 1,0087 - 26,982] \cdot 931}{27} \approx 8,32 \text{ МэВ/нуклон.}$$

Ответ: $\frac{E_{\text{св}}}{A} = 1,34 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/нуклон}$ (или 8,32 МэВ/нуклон).

Пример 26. Определить энергию Q ядерной реакции ${}^{16}_8\text{O}(d,\alpha){}^{14}_7\text{N}$.

Выделяется или поглощается энергия в этой реакции?

Дано: ${}^{16}_8\text{O} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He}$.

Найти: Q .

Решение. В результате взаимодействия ядра кислорода ${}^{16}_8\text{O}$ и deutрона d (ядро атома дейтерия ${}^2_1\text{H}$) возникает ядро азота ${}^{14}_7\text{N}$ и испускается α -частица (ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$). Энергия ядерной реакции определяется выражением

$$Q = c^2 \left[(m_O + m_H) - (m_N + m_{He}) \right], \quad (64)$$

где m_O – масса покоя ядра кислорода; m_H – масса покоя ядра дейтерия; m_N – масса покоя ядра азота; m_{He} – масса покоя ядра гелия.

При выполнении расчетов массы ядер можно заменить массами нейтральных атомов. Масса нейтрального атома складывается из массы ядра и массы электронов, образующих электронную оболочку. При подстановке в уравнение (64) масс атомов массы электронов сокращаются:

$$(m_O + 8m_e + m_H + m_e) - (m_N + 7m_e + m_{He} + 2m_e) = (m_O + m_H) - (m_N + m_{He}).$$

В этом уравнении m_e – масса покоя электрона. Таким образом, замена масс ядер массами атомов не влияет на результат вычислений.

При выполнении расчетов будем использовать внесистемные единицы. В этом случае $c^2 = 931$ МэВ/а. е. м. Массы атомов и частиц, участвующих в реакции, возьмем из табл. Д.2 прил. Д: $m_O = 15,9949$ а. е. м.; $m_H = 2,01410$ а. е. м.; $m_N = 14,0031$ а. е. м.; $m_{He} = 4,00260$ а. е. м.

Выполним вычисления:

$$Q = 931 \left[(15,9949 + 2,01410) - (14,0031 + 4,00260) \right] \approx 3,1 \text{ МэВ}.$$

Так как $Q > 0$, то энергия в реакции выделяется (экзотермическая реакция).

Ответ: $Q = 3,1$ МэВ.

Пример 27. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром (рис. 49) замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу ядер замедляющего вещества. Ответ записать в атомных единицах массы.

Дано: $m_1 = 1,0$ а. е. м.; $\frac{m_2}{m_1} = k$; $n = 1,4$; $v_2 = 0$.

Найти: m_2 .

Решение. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2},$$

где m_1, m_2 – массы покоя нейтрона и ядра замедляющего вещества; v_1, u_1 – скорости нейтрона до и после соударения соответственно; v_2, u_2 – скорости ядра замедляющего вещества до и после соударения соответственно.

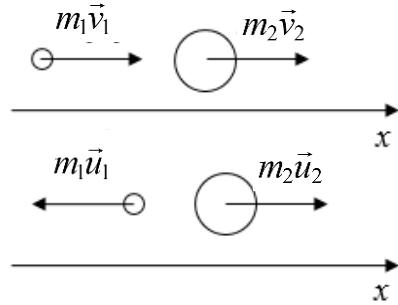


Рис. 49

Преобразуем эти уравнения, учитывая, что по условию задачи $v_2 = 0$:

$$\begin{aligned} m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1 \right) &= m_2 \vec{u}_2 ; \\ m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1 \right) \left(\vec{v}_1 + \vec{u}_1 \right) &= m_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2 . \end{aligned} \quad (65)$$

Сопоставление последних двух выражений показывает, что

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 .$$

Умножим все члены этого уравнения на m_2 :

$$m_2 \vec{v}_1 + m_2 \vec{u}_1 = m_2 \vec{u}_2 \quad (66)$$

Вычтем почленно из уравнения (65) уравнение (66):

$$m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{u}_1 - m_2 \vec{v}_1 - m_2 \vec{u}_1 = 0 .$$

Тогда

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1}{m_1 + m_2} . \quad (67)$$

Масса ядер замедляющего вещества больше массы нейтрона, то есть $m_2 > m_1$. В этом случае, как видно из уравнения (67), вектор \vec{u}_1 будет направлен противоположно направлению вектора \vec{v}_1 . Запишем выражение (67) в проекциях на ось x (см. рис. 49):

$$-u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} .$$

Тогда

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} . \quad (68)$$

По условию задачи $\frac{m_1 v_1^2}{2} / \frac{m_1 u_1^2}{2} = n$, тогда $\frac{v_1}{u_1} = \sqrt{n}$. Так как $m_2 = k m_1$,

то, делая подстановку $\frac{v_1}{u_1}$ и m_2 в формулу (68), получим

$$\sqrt{n} = \frac{k m_1 + m_1}{k m_1 - m_1} = \frac{k+1}{k-1} .$$

Решим это уравнение относительно k :

$$k = \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} .$$

Тогда

$$m_2 = km_1 = \frac{m_1(\sqrt{n} + 1)}{\sqrt{n} - 1}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим

$$m_2 = \frac{1(\sqrt{1,4} + 1)}{\sqrt{1,4} - 1} \approx 12 \text{ а. е. м.}$$

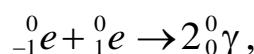
Ответ: $m_2 \approx 12$ а. е. м/ (графит).

Пример 28. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии, равные 0,24 МэВ, при соударении превратились в два одинаковых фотона. Определить энергию ε каждого фотона и соответствующую ему длину волны λ .

Дано: ${}_{-1}^0e; {}_1^0e; E_k = 0,24 \text{ МэВ} = 3,84 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}; m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}; c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}; h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$

Найти: $\varepsilon; \lambda$.

Решение. Запишем уравнение реакции взаимодействия электрона ${}_{-1}^0e$ и позитрона ${}_1^0e$:



где ${}_0^0\gamma$ – фотон (квант электромагнитного излучения).

В ходе этой реакции выполняется закон сохранения релятивистской полной энергии

$$m_0c^2 + E_k + m_0c^2 + E_k = 2\varepsilon, \quad (69)$$

где m_0 – масса покоя электрона (позитрона); c – скорость света в вакууме; m_0c^2 – энергия покоя электрона (позитрона); E_k – кинетическая энергия электрона (позитрона).

Выразим из формулы (69) энергию фотона:

$$\varepsilon = m_0c^2 + E_k. \quad (70)$$

Так как $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, то

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}, \quad (71)$$

где h – постоянная Планка.

Подставим числовые значения физических величин в формулы (70) и (71) и выполним вычисления:

$$\varepsilon = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2 + 3,84 \cdot 10^{-14} \approx 1,20 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$$

$$\lambda = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,0 \cdot 10^8 / 1,20 \cdot 10^{-13} \approx 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Ответ: $\varepsilon = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$; $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$

3.3. Варианты контрольной работы № 2

Контрольная работа включает десять задач. Вариант выбирается по последней цифре шифра. Справочные данные, необходимые при решении задач, приведены в приложениях.

Задача 1. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи I_1 и I_2 . Точка С удалена от первого проводника на расстояние l_1 , а от второго проводника – на расстояние l_2 (рис. 50). Магнитная индукция в точке С равна B . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 12).

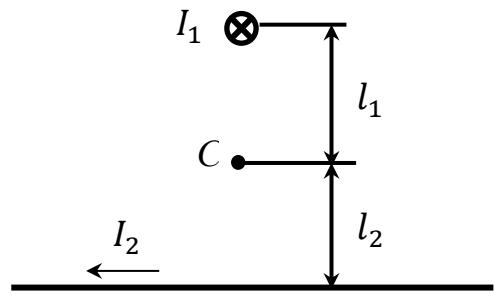


Рис. 50

Таблица 12

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$I_1, \text{ А}$	25	80	50	30	*	40	80	60	70	*
$I_2, \text{ А}$	40	70	80	*	55	60	30	90	*	35
$l_1, \text{ см}$	10	30	*	25	30	15	40	*	35	18
$l_2, \text{ см}$	14	*	45	35	20	20	*	50	45	20
$B, \text{ мкТл}$	*	950	155	140	80	*	100	250	350	400

Задача 2. Горизонтально расположенный прямой проводник длиной l подведен с помощью двух одинаковых невесомых пружин жесткостью k . По проводнику течет ток I . При включении вертикального магнитного поля с индукцией B оси пружин составляют с вертикалью угол α , при этом абсолютное удлинение каждой пружины составляет Δl (рис. 51).

Плотность материала проводника равна ρ . Площадь поперечного сечения проводника S . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 13).

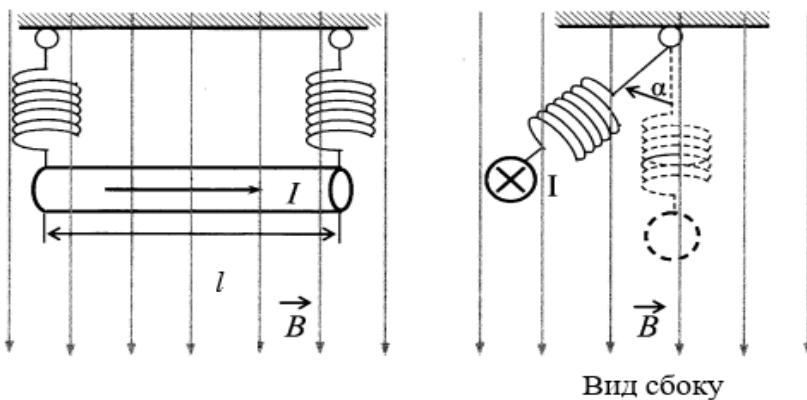


Рис. 51

Таблица 13

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l , см	90	110	100	85	95	120	*	130	125	80
k , Н/м	100	90	120	100	110	*	95	140	110	130
I , А	12	10	9	11	*	15	13	10	14	15
α , °	30	45	35	*	40	50	60	45	35	55
Δl , мм	8	6	*	7	9	12	10	11	8	*
ρ , кг/м³	8000	*	7800	7900	8900	8000	7800	7900	*	8000
S , мм²	*	12,5	12,2	13,0	11,0	11,5	13,5	*	12,0	10,5

Задача 3. Проводящее кольцо диаметром D расположено в однородном магнитном поле так, что плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции. При скорости изменения магнитной индукции поля по времени $\left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$ в кольце возникает индукционный ток I . Диаметр провода кольца равен d , удельное сопротивление ρ . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 14).

Таблица 14

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D , см	40	30	10	20	*	30	40	10	25	*
$\left \frac{\Delta B}{\Delta t} \right $, Тл/с	2,0	3,0	4,0	*	1,8	1,5	3,5	2,5	*	1,0
I , А	6	15	*	10	7	8	6	*	15	7
d , мм	1,5	*	1,0	2,0	2,5	3,0	*	1,5	2,5	2,0
ρ , 10^{-8} Ом·м	*	1,68	1,70	1,72	1,74	*	1,69	1,71	1,70	1,69

Задача 4. Тело массой m совершают гармонические колебания так, что координата тела изменяется с течением времени по закону $x = x(t)$. Определите амплитуду, круговую частоту, частоту, период колебаний, фазу, скорость, ускорение, кинетическую энергию и силу, действующую на тело в момент времени t (табл. 15).

Таблица 15

Вариант	$x = x(t)$, м	m , кг	t , с
0	$x(t) = 0,05 \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$	3,0	1,0
1	$x(t) = 0,5 \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$	2,0	3,0
2	$x(t) = 0,08 \cos\left(0,02\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$	1,0	2,0
3	$x(t) = 1,2 \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$	4,0	8,0
4	$x(t) = 0,77 \sin\left(7\pi t + \frac{\pi}{7}\right)$	0,7	7,0
5	$x(t) = 0,04 \sin\left(400\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$	0,2	0,1
6	$x(t) = 0,03 \cos\left(9\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$	6,0	3,0
7	$x(t) = 0,5 \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$	9,0	2,0
8	$x(t) = 0,4 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$	8,0	4,0
9	$x(t) = 0,06 \cos\left(0,2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$	7,0	1,0

Задача 5. Для уменьшения коэффициента отражения поверхности оптической детали на ее поверхность (линзу) нанесена специальная тонкая прозрачная пленка минимальной толщины d с показателем преломления n . При этом в отраженном свете с длиной волны λ возникает интерференционный минимум и потери световой энергии на отражение уменьшаются. Определите значение величины, обозначенной * (табл. 16).

Таблица 16

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	*	1,30	1,28	*	1,22	1,30	*	1,26	1,24	*
d , мкм	0,11	*	0,11	0,14	*	0,12	0,13	*	0,10	0,12
λ , мкм	0,55	0,55	*	0,70	0,60	*	0,65	0,65	*	0,60

Задача 6. На дифракционную решетку, имеющую N штрихов на 1 мм, нормально падает белый свет. На экране, установленном на расстоянии L от решетки, наблюдается дифракционный спектр. Расстояние на экране между двумя дифракционными максимумами k -го порядка для светового излучения с частотой v равно x . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 17).

Таблица 17

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N, \text{мм}^{-1}$	*	400	250	500	100	*	300	450	110	350
$L, \text{м}$	1,5	*	2,5	1,6	2,0	2,4	*	1,8	2,2	3,0
$v, 10^{12}, \text{Гц}$	500	375	*	600	700	550	400	*	650	450
$x, \text{см}$	25	20	30	*	35	24	15	35	*	24
k	4	3	2	2	*	3	2	4	3	*

Задача 7.

Варианты 0–4. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания равен α . Интенсивность света при прохождении через один николь N_1 уменьшилась в a раз, а при прохождении через оба николя – в b раз. В первом николе потери на отражение и поглощение света составляют k_1 , а во втором – k_2 . Определите значение величины, обозначенной * (табл. 18). Решение задачи поясните рисунком.

Таблица 18

Вариант	0	1	2	3	4
$\alpha, {}^\circ$	*	30	60	45	*
a	2	5	1,5	4	3
b	8	8	*	9	6
$k_1, \%$	5	10	8	*	5
$k_2, \%$	10	*	10	8	8

Варианты 5–9. Луч естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины луч составляет угол ϕ с падающим лучом, а угол преломления равен γ . Отраженный свет полностью поляризован, если показатель преломления жидкости равен n_1 , а показатель преломления стекла равен n_2 . Скорость света в жидкости и в стекле равна v_1 и v_2 соответственно. Определите значение величин, обозначенных * (табл. 19). Решение задачи поясните рисунком.

Таблица 19

Вариант	5	6	7	8	9
$\varphi, {}^\circ$	97	—	*	*	100
$\gamma, {}^\circ$	—	*	40	*	*
n_1	*	1,32	—	—	—
n_2	1,50	*	*	1,52	*
$v_1, 10^8 \text{ м/с}$	*	*	2,20	2,24	2,28
$v_2, 10^8 \text{ м/с}$	*	1,97	*	*	*

Задача 8. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности излучательности соответствует длине волны λ_m . Солнце как абсолютно черное тело имеет следующие характеристики: R_s – излучательность Солнца; Φ_e – поток энергии, излучаемый Солнцем; m – масса электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 секунду. Вычислите значение величин, обозначенных * (табл. 20).

Таблица 20

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda_m, \text{ нм}$	*	450	600	*	500	*	480	560	*	455
$R_s, 10^7 \text{ Вт/м}^2$	6,4	*	*	5,8	*	6,0	*	*	5,5	*
$\Phi_e, 10^{26} \text{ Вт}$	3,9	*	5,6	*	4,0	3,5	*	4,9	*	5,0
$m, 10^9 \text{ кг}$	*	3,5	*	3,9	*	*	4,3	*	4,0	*

Задача 9. Максимальная скорость, которую могут приобрести вырванные из металла электроны при облучении его монохроматическим светом с длиной волны λ , составляет v . Работа выхода для данного металла равна $A_{\text{вых}}$. Определите значение величины, обозначенной * (табл. 21). Во сколько раз увеличится скорость фотоэлектронов при уменьшении длины волны излучения в n раз?

Таблица 21

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda, \text{ мкм}$	*	0,15	0,25	*	0,65	0,35	*	0,30	0,16	*
$v, \text{ км/с}$	1500	*	510	270	*	700	460	*	1200	630
$A_{\text{вых}}, \text{ эВ}$	5,2	4,4	*	2,3	1,3	*	1,5	3,9	*	2,4
n	4	3	2	4	3	2	1,5	2,5	3	4

Задача 10. Первоначальная масса радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада T , равна m . Число атомов, распавшихся за время t , составляет ΔN . Вычислите значение величины, обозначенной * (табл. 22).

Таблица 22

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T , сут	*	14,3	270	8	*	152	28	87	*	51
m , г	12	*	2,2	2,62	12	*	10,2	0,7	23,9	*
t , сут	449	2,86	*	2,4	194	7,6	*	1,74	891	20,4
$\Delta N, 10^{23}$	12	0,40	0,03	*	0,60	0,60	0,15	*	0,30	0,01
Изотоп	${}^3_1\text{H}$	${}^{32}_{15}\text{P}$	${}^{110}_{47}\text{Aq}$	${}^{131}_{53}\text{I}$	${}^{60}_{27}\text{Co}$	${}^{45}_{28}\text{Ca}$	${}^{51}_{24}\text{Cr}$	${}^{35}_{16}\text{S}$	${}^{239}_{94}\text{Pu}$	${}^{89}_{38}\text{Sr}$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица А.1. Некоторые физические и астрономические постоянные (округленные значения)

Постоянная	Значение
Стандартное ускорение свободного падения у поверхности Земли	$g = 10 \text{ м/с}^2$
Масса Земли	$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Масса Луны	$M_{\text{Л}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Средний радиус Земли	$R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Средний радиус Луны	$R_{\text{Л}} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$

Таблица А.2. Множители и приставки для образования кратных и дольных единиц системы СИ и их наименования

Приставка	Множитель	Обозначение
Пико	10^{-12}	п
Нано	10^{-9}	н
Микро	10^{-6}	мк
Милли	10^{-3}	м
Санти	10^{-2}	с
Деци	10^{-1}	д
Кило	10^3	к
Мега	10^6	М

Приложение Б

Таблица Б.1. Поправки Ван-дер-Ваальса

Газ	a , Н·м ⁴ /моль ²	ϵ , 10 ⁻⁵ м ³ /моль
Азот	0,135	3,86
Гелий	0,0033	2,34
Кислород	0,136	3,17
Углекислый газ	0,361	4,28

Таблица Б.2. Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, нм
Азот	30
Водород	23
Кислород	27

Приложение В

Таблица В.1. Удельное сопротивление материалов ρ , при 0°C

Металл	Удельное сопротивление, нОм·м	Металл	Удельное сопротивление, нОм·м
Медь	17	Железо	98
Алюминий	28	Нихром	1100

Таблица В.2. Плотность вещества ρ

Вещество	Плотность, кг/м ³	Вещество	Плотность, кг/м ³
Медь	$8,9 \cdot 10^3$	Железо	$7,8 \cdot 10^3$
Алюминий	$2,7 \cdot 10^3$	Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$

Таблица В.3. Диэлектрическая относительная проницаемость вещества ϵ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Парафин	2,0	Керосин	2,0
Стекло	6,0	Масло (трансформаторное)	2,2
Вода	81,0		

Таблица В.4. Характеристики некоторых частиц, атомов

Частица	Масса, кг	Заряд, Кл
Электрон e_{-1}^0	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$-1,6 \cdot 10^{-19}$
Протон p_1^1	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$+1,6 \cdot 10^{-19}$
α_2^4 -частица (ядро атома гелия He_2^4)	$6,64 \cdot 10^{-27}$	$+3,2 \cdot 10^{-19}$
Дейtron (ядро тяжелого водорода) H_1^2	$3,35 \cdot 10^{-27}$	$+1,6 \cdot 10^{-19}$

Приложение Г

Таблица Г.1. Некоторые физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м ² / кг ²
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31$ Дж/(моль·К)
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона; энергия покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг ; $E_0 = 0,511$ МэВ
Масса протона; энергия покоя протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг ; $E_0 = 938$ МэВ
Постоянная Планка	$h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м ² · К ⁴
Первая постоянная Вина; вторая постоянная Вина	$b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м · К; $c' = 1,30 \cdot 10^{-5}$ Вт/м ³ · К ⁵
Постоянная Ридберга	$R = 1,097 \cdot 10^7$ 1/м
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Приложение Д

Таблица Д.1. Массы покоя некоторых частиц

Частица	Масса	
	а. е. м.	кг
Электрон	$5,48580 \cdot 10^{-4}$	$9,10953 \cdot 10^{-31}$
Протон	1,00728	$1,67265 \cdot 10^{-27}$
Нейтрон	1,00867	$1,67495 \cdot 10^{-27}$
Дейtron	2,01354	$3,34362 \cdot 10^{-27}$
Альфа-частица	4,00149	$6,64473 \cdot 10^{-27}$
Положительный π^+ -мезон	0,1498	$2,488 \cdot 10^{-28}$
Отрицательный π^- -мезон	0,1498	$2,488 \cdot 10^{-28}$
Нейтральный π^0 -мезон	0,1449	$2,406 \cdot 10^{-28}$
Нейтрино	0	0
Мюон	0,1134	$1,884 \cdot 10^{-28}$

Таблица Д.2. Массы некоторых нейтральных атомов

Изотоп	Масса	
	а. е. м.	кг
${}_1^1\text{H}$	1,00783	$1,67357 \cdot 10^{-27}$
${}_1^2\text{H}$	2,01410	$3,34454 \cdot 10^{-27}$
${}_1^3\text{H}$	3,01605	$5,00835 \cdot 10^{-27}$
${}_2^3\text{He}$	3,01603	$5,00832 \cdot 10^{-27}$
${}_2^4\text{He}$	4,00260	$6,64658 \cdot 10^{-27}$
${}_3^6\text{Li}$	6,01512	$9,98850 \cdot 10^{-27}$
${}_6^{13}\text{C}$	13,0033	$2,15929 \cdot 10^{-26}$
${}_7^{13}\text{N}$	13,0057	$2,15969 \cdot 10^{-26}$
${}_7^{14}\text{N}$	14,0031	$2,32530 \cdot 10^{-26}$
${}_8^{16}\text{O}$	15,9949	$2,65606 \cdot 10^{-26}$
${}_8^{17}\text{O}$	16,9991	$2,82282 \cdot 10^{-26}$
${}_{13}^{27}\text{Al}$	26,9815	$4,48047 \cdot 10^{-26}$
${}_{92}^{235}\text{U}$	235,044	$3,90306 \cdot 10^{-25}$

Таблица Д.3. Плотности некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м ³
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$
Калий	$0,87 \cdot 10^3$
Медь	$8,93 \cdot 10^3$
Натрий	$0,97 \cdot 10^3$

Таблица Д.4. Коэффициенты перевода некоторых внесистемных единиц в единицы СИ

Величина	Соотношение с единицами СИ
Длина	$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$
Масса	$1 \text{ а. е. м.} = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Энергия	$1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Библиографический список

- Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2015. – 720 с.
- Калашников, Н.П. Основы физики: учебное пособие: в 3-х т. / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Лаборатория знаний. – Т. 3. Упражнения и задачи. – 2019. – 387 с.
- Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3-х т. / И.В. Савельев. – 8-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2007:
- Т. 1: Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – СПб.: Лань. – 432 с.
- Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – 2007. – 496 с.
- Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И.В. Савельев. – 7-е изд., стереотип. – 2007. – 320 с.
- Трофимова, Т.И. Физика. Справочник с примерами решения задач: справочное издание / Т.И. Трофимова. – М.: Юрайт: Высшее образование, 2010. – 448 с.
- Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Высшая школа, 2009. – 640 с.

КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Авторы:

Ольга Низамиевна Оруджова, Наталья Владимировна Шабунина,
Виктория Михайловна Юлкова

Минимальные системные требования:

Процессор одноядерный, 1,7 ГГц; 512 Мб; Windows XP;
устройство чтения DVD-ROM; программное обеспечение: Adobe Reader.

Подписано к использованию 19.12.2024. Электронное издание.
Объем: Мб, тираж 10 электрон. цифровых дисков (DVD).

Издательский дом им. В.Н. Булатова САФУ
163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 56