ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ ÔN TẬP CK MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
Học kỳ I, năm học 2020-2021

Thời gian làm bài: **90** phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_5 + 4x_6 - 10x_3 + x_2 - 2x_1 = 0 \\ 11x_3 - x_4 + 3x_1 = 0 \\ x_4 - 3x_6 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \end{array} \right\}$

a/ Hãy chứng minh rằng W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^6$.
b/ Hãy tìm hệ sinh, cơ sở và xác định số chiều cho W.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (\ 1,\ 0,\ 0),\ \alpha_2 = (\ -1,\ 1,\ 0),\ \alpha_3 = (\ 2,\ 2,\ 1)\}$ và
tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (\ -1,\ 1,\ -2),\ \beta_2 = (\ 0,\ -1,\ 1),\ \beta_3 = (\ 1,\ 0,\ 2)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b/ Cho vector $\alpha = (\ 12,\ 1,\ 2) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.
c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (\ 1,\ 0,\ 0),\ e_2 = (\ 0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (\ 0,\ 0,\ 1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a};\ Q = P_{\beta_0 \to \beta};\ \text{và}\ S = P_{a \to \beta}.$$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, $\forall m$ nguyên, $m \geq 0$.

Câu 4: (*1,5 điểm*)

Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $S = \{u_1 = (1,2,2), u_2 = (-2,2,-1), u_3 = (3,-5,8)\}$.

Hãy trực chuẩn hóa S, với tích vô hướng $<\alpha \mid \beta> = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

Cho dạng toàn phương $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
và $\beta_0 = \{e_1 = (\ 1,\ 0,\ 0),\ e_2 = (\ 0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (\ 0,\ 0,\ 1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

sao cho: $\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X,X) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 18x_2x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.
b/ Hãy chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc tìm được ở câu a/.

Hết