Chương 5. GIÁ TRỊ RIÊNG – VECTƠ RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN

5.1. Trị riêng – vectơ riêng

5.2. Chéo hóa ma trận

5.3. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

* ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa và ví dụ.

1.1. **Định nghĩa**: *Cho X, Y là hai K- không gian vectơ. Ánh xạ* $f: X \to Y$ *là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa mãn 2 điều kiện:*

1) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K$

Chú ý: *Các điều kiện 1 và 2 tương đương điều kiện sau*:

3) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K$

Một ánh xạ tuyến tính $f: X \to X$ *được gọi là một phép biến đổi tuyến tính của X.*

Như vậy muốn chứng minh f là một ánh xạ tuyến tính thì ta cần kiểm tra điều kiện 1 và 2 hoặc 3.

1.2. Các ví dụ.

1. Ánh xạ không

$O: X \to Y$

$a \mapsto O(a) = \theta$

là ánh xạ tuyến tính.

2. Ánh xạ đồng nhất

$id: X \to Y$

$a \mapsto id(a) = a$

là ánh xạ tuyến tính.

3. Ánh xạ

$f: R^2 \to R$

$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$

là ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh:

- $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$, ta có

$$f(x+y)=f(x_1+y_1,x_2+y_2)=$$
$$=(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)=$$
$$=(x_1+3x_2)+(y_1+3y_2)=f(x)+f(y)$$

- $\forall x=(x_1,x_2)\in R^2, \forall\alpha\in R$, ta có

$$f(\alpha x)=f(\alpha x_1,\alpha x_2)=\alpha x_1+3\alpha x_2=$$
$$=\alpha(x_1+3x_2)=\alpha f(x).$$

I. GIÁ TRỊ RIÊNG – VECTƠ RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN

1. Giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận.

1.1. Giá trị riêng, giá trị riêng của ma trận.

1.1.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1: Số $\lambda\in K$ gọi là giá trị riêng (GTR) của A nếu tồn tại vectơ $x=(x_1,x_2,...,x_n)^\tau\in K^n, x\neq\theta$ sao cho:

$$Ax=\lambda x\ (*)\quad \left(A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right).$$

Khi đó vectơ x gọi là vectơ riêng (VTR) của A ứng với GTR λ.

Nhận xét: Từ $(*)$ ta có: $(A-\lambda I)x=\theta\ (x\neq\theta)$.

Định nghĩa 2: Cho $A=(a_{ij})\in M_n(K), \lambda\in K.$

a) Đa thức

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

gọi là đa thức đặc trưng của A.

b) Phương trình

$$P_A(\lambda)=0$$

gọi là phương trình đặc trưng của A.

Định nghĩa 3: *Tập hợp tất cả các VTR của A ứng với GTR λ và bổ sung vectơ θ gọi là không gian riêng (KGR) của A ứng với GTR λ.*

Nhận xét: KGR của A ứng với GTR λ là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$(A-\lambda I)x=\theta.$$

Định nghĩa 4: *Hai ma trận* $A, B \in M_n(K)$ *gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P không suy biến (*$\det P \neq 0$*) sao cho:*

$$B = P^{-1}AP.$$

1.1.2. Tính chất.

Định lý 1: *Nếu x là VTR của A ứng với GTR* λ*, thì* $\alpha x\ (\alpha \neq 0)$ *cũng là VTR của A ứng với GTR* λ.

Định lý 2: *Hai ma trận đồng dạng có cùng GTR.*

1.1.3. Cách tìm GTR, VTR của ma trận vuông A.

Ta tiến hành các bước sau:

1) Giải phương trình đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (**).$$

Nghiệm của $(**)$ là GTR của A.

2) Giả sử λ_k là một nghiệm của $(**)$. Ta giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$(A - \lambda_k I)x = \theta \quad (3*).$$

Nghiệm không tầm thường của $(3*)$ là VTR của A ứng với GTR λ_k.

Chú ý: $r = r(A - \lambda_k I) < n$ (vì $\det(A - \lambda_k I) = 0$) nên KGR S_k của A ứng với GTR λ_k (tức là không gian nghiệm S_k của $(3*)$) có $\dim S_k = n - r$ (hay nói cách khác, KGR S_k của A ứng với GTR λ_k có $(n - r)$ VTR độc lập tuyến tính).

Ví dụ 1. Tìm GTR, VTR, cơ sở của KGR và các KGR của ma trận A

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Giải: a) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

Ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \quad (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 \quad (m_2 = 2) \end{array}\right. .$$

- $\lambda_1 = -1\ (m_1 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A + I)x = \theta$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0, \quad t \in R \setminus \{0\}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$ có dạng:
  $x = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1), \quad t \in R \setminus \{0\}.$
- Một cơ sở của KGR $S_1 (\dim S_1 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$: $a_1 = (-1, 0, 1)$.
- KGR $S_1 = \text{span}\{a_1\} = \{x \in R^3 | \, x = t(-1, 0, 1), t \in R\}$

  - $\lambda_2 = 1 \, (m_2 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A - I)x = \theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - I)x = \theta \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v, \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$ có dạng:
  $x = (t, v, t) = t(1, 0, 1) + v(0, 1, 0), \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$
- Một cơ sở của KGR $S_2 (\dim S_2 = 2)$ của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$:
  $a_2 = (1, 0, 1), a_3 = (0, 1, 0).$
- KGR $S_2 = \text{span}\{a_2, a_3\} = \{x \in R^3 | x = t(1, 0, 1) + v(0, 1, 0), t, v \in R\}$

b) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

Ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 \\ -3 & -7-\lambda & -7 \\ 4 & 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\lambda_1=-1 & (m_1=2)\\ \lambda_2=3 & (m_2=1)\end{array}\right. .$$

- $\lambda_1=-1\,(m_1=2)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x=\theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix}2&4&6\\-3&-6&-7\\4&8&8\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to\frac{1}{4}h_3]{h_1\to\frac{1}{2}h_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-6&-7\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3-h_1]{h_2\to h_2+3h_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[h_2\leftrightarrow h_3]{h_2\to h_2+2h_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)x=\theta \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ -x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-2t\\ x_2=t\\ x_3=0\end{cases},\quad t\in R\setminus\{0\}.$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1=-1$ có dạng:
  $x=(-2t,t,0)=t(-2,1,0),\quad t\in R\setminus\{0\}$.
- Một cơ sở của KGR $S_1(\dim S_1=1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1=-1$: $a_1=(-2,1,0)$.
- KGR $S_1=\text{span}\{a_1\}=\{x\in R^3 \mid x=t(-2,1,0), t\in R\}$

- $\lambda_2=3\,(m_2=1)$

Giải hệ phương trình $(A-3I)x=\theta$.

$$\begin{pmatrix}-2&4&6\\-3&-10&-7\\4&8&4\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to\frac{1}{4}h_3]{h_1\to\frac{1}{2}h_1}\begin{pmatrix}-1&2&3\\-3&-10&-7\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3+h_1]{h_2\to h_2-3h_1}\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&-16&-16\\0&4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3-4h_2]{h_2\to -\frac{1}{16}h_2}\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-3I)x=\theta \Leftrightarrow \begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=-t,\\ x_3=t\end{cases}\quad t\in R\setminus\{0\}.$$

Vậy:

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2=3$ có dạng:
  $x=(t,-t,t)=t(1,-1,1),\quad t\in R\setminus\{0\}$.
- Một cơ sở của KGR $S_2(\dim S_2=1)$ của A ứng với GTR $\lambda_2=3$: $a_2=(1,-1,1)$.

KGR $S_2=\text{span}\{a_2\}=\{x\in R^3 \mid x=t(1,-1,1), t\in R\}$

2. Chéo hóa ma trận.

2.1. Chéo hóa ma trận.

2.1.1. Định nghĩa 7**:** Cho *ma trận vuông A*, nếu *tồn tại ma trận khả đảo T* sao cho

$T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo thì ta nói rằng *ma trận A chéo hóa được và ma trận T làm chéo hóa ma trận A* hay *ma trận A đưa được về dạng chéo hóa nhờ ma trận T.*

2.1.2. Điều kiện chéo hóa được của một ma t rận.

Trong các định lý sau đây, ta luôn giả thiết rằng A ma trận vuông cấp n.

Định lý 4: *Điều kiện cần và đủ để ma trận A chéo hóa được là nó có n VTR độc lập tuyến tính.*

Định lý 5: *Nếu ma trận A đưa được về dạng chéo B thì các phần tử trên đường chéo chính của B là các GTR của A.*

Định lý 6: *p VTR ứng với p GTR khác nhau của A là độc lập tuyến tính (đltt).*

Định lý 7: *Nếu λ_k là nghiệm bội m_k của phương trình đặc trưng của A và nếu*

$$r(A-\lambda_k I)=n-m_k$$

thì A có m_k VTR đltt ứng với GTR λ_k đó.

Từ các định lý trên ta có:

Định lý 8: *Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi với mỗi GTR λ_k bội m_k của A $(m_1+m_2+...+m_p=n)$, có*

$$r(A-\lambda_k I)=n-m_k \quad (\forall k=1,2,...,p).$$

Chú ý: Nếu ma trận vuông A cấp n có n GTR phân biệt thì A chéo hóa được.

Ví dụ 4: Cho $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Từ kết quả của ví dụ 1, ta có:

$$r(A-\lambda_1 I)=2=3-1,$$
$$r(A-\lambda_2 I)=1=3-2.$$

Vậy (theo định lý 8) A chéo hóa được.

Ví dụ 5: Cho $A=\begin{pmatrix}1&4&6\\-3&-7&-7\\4&8&7\end{pmatrix}$.

Từ kết quả của ví dụ 2, ta có:

$$r(A-\lambda_1 I)=2\neq 3-2=1.$$

Vậy (theo định lý 8) A không chéo hóa được.

Ví dụ 6: Cho $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&2&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 & (m_2 = 1) \\ \lambda_3 = 2 & (m_3 = 1) \end{array}\right. .$$

Vì A la ma trận vuông cấp 3 có 3 GTR phân biệt nên A chéo hóa được.

Ví dụ 7: Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bản thân A là ma trận đường chéo. Dễ dàng thấy A thỏa mãn điều kiện chéo hóa.

Thực vậy đối với GTR $\lambda = 0 (m = 3)$, ta có:

$$r(A - \lambda I) = r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = 3 - 3.$$

2.1.3. Cách chéo hóa ma trận.

1) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ để tìm các GTR của A: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ với bội tương ứng $m_1, m_2, ..., m_p$.

2) Kiểm tra điều kiện chéo hóa.

   a) Nếu $p = n$ thì A chéo hóa được.

   b) Nếu $\forall k \, (k = 1, 2, ..., p)$: $r(A - \lambda_k I) = n - m_k$ thì A chéo hóa được.

   c) Nếu $\exists k : r(A - \lambda_k I) \neq n - m_k$ thì A không chéo hóa được.

Chú ý: Nếu A chéo hóa được thì A được đưa về ma trận chéo B có dạng:

a) $$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\ \ B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} \lambda_1 \\ \ddots \\ \lambda_1 \end{matrix}}\right\} m_1 \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} \lambda_p \\ \ddots \\ \lambda_p \end{matrix}}\right\} m_p \end{matrix}$$

Để tìm ma trận T không suy biến $(\det T \neq 0)$: $B = T^{-1}AT$ ta tiến hành bước tiếp sau:

3) • Ứng với mỗi GTR λ_k, giải hệ phương trình $(A - \lambda_k I)x = \theta$, tìm được m_k VTR đltt

$$a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{m_k}^k \text{ ứng với } \lambda_k.$$

• Sau đó ta lập hệ:

$$(a) = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{m_1}^1, \ldots, a_1^p, a_2^p, \ldots, a_{m_p}^p\}$$

là cơ sở của không gian K^n, bao gồm các VTR.

• Lập ma trận T

$$T = \begin{pmatrix} | & & | & & | & & | \\ a_1^1 & \cdots & a_{m_1}^1 & \cdots & a_1^p & \cdots & a_{m_p}^p \\ | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

là ma trận mà có cột thứ j là vectơ thứ j trong cơ sở (a).

Ví dụ 8: Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải: Trong ví dụ 4 đã chỉ ra rằng ma trận A chéo hóa được. Ví dụ 1 đưa ra một cơ sở mới bao gồm các VTR

$a_1 = (-1,0,1), \quad a_2 = (1,0,1), \quad a_3 = (0,1,0),$

Lập ma trận T

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Chú ý:** Nếu A là ma trận chéo hóa được thì ta luôn tìm được ma trận T và ma trận chéo B như trong phương pháp trên: $A = TBT^{-1}$.Khi đó

$$A^2 = A.A = (TBT^{-1}).(TBT^{-1}) = TB(T^{-1}T)BT^{-1} = TB^2T^{-1}$$

$$A^3 = A^2.A = (TB^2T^{-1}).(TBT^{-1}) = TB^3T^{-1}$$

….

$$A^n = A^{n-1}.A = TB^{n-1}T^{-1}.TBT^{-1} = TB^nT^{-1}$$

Đây là một trong những lợi ích của việc chéo hóa ma trận.

Ví dụ 9: Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^n.

Giải: Theo ví dụ 8, ta biểu diễn được: $A = TBT^{-1}$, trong đó

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-1)^n & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & 2 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 0 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

3. Chéo hóa ma trận đối xứng thực.

3.1. Ma trận trực giao.

Định nghĩa 8.1: *Ma trận trực giao la ma trận vuông có tổng bình phương các phần tử của mỗi hàng bằng 1, còn tổng các tích các phần tử tương ứng của hai hàng khác nhau thì bằng 0.*

Ví dụ: Các ma trận sau đây là ma trận trưc giao:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 8.1: *Cho* $A \in M_n(R)$, $\det A \neq 0$. *Ma trận A là ma trận trực giao nếu* $A^T = A^{-1}$.

Định lý 10: *Cho A là ma trận đối xứng thực. Khi đó*

a) Mọi GTR của ma trận đối xứng thực A là các số thực.

b) Nếu λ_k *là một GTR bội* m_k *của A thì KGR ứng với* λ_k *là không gian* m_k *chiều, nghĩa là nó có* m_k *VTR (ứng* λ_k*) đltt.*

3.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

1) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

2) Tìm một cơ sở trực chuẩn cho KGR ứng với mỗi GTR.

   a) Nếu λ_k bội $m_k = 1$, thì lấy một VTR bất kỳ ứng với λ_k, rồi chuẩn hóa nó.

   b) Nếu λ_k bội $m_k > 1$, thì có thể tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với λ_k bằng cách tìm một cơ sở của KGR ứng với λ_k, sau đó áp dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.

Cuối cùng ta được cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_k, \forall k$. Và ghép chúng lại ta được cơ sở trực chuẩn gồm các VTR.

Ví dụ 10: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm ma trận trực giao Q để đưa A về dạng chéo $B = Q^{-1}.A.Q$. Tìm ma trận chéo B.

Giải: Trước hết ta nhận xét A là ma trận đối xứng nên A chéo hóa trực giao được.

1) Giải phương trình đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5\ (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = -1\ (m_2 = 2) \end{array} \right.$$

2) Tìm một cơ sở trực chuẩn của từng KGR:

- $\lambda_1 = 5\,(m_1 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A-5I)x = \theta.$

Ta có:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (A-I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t, \quad t \in R \setminus \{0\}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Lấy $a_1 = (1,1,1)$, chuẩn hóa a_1 được $a_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

- $\lambda_2 = -1\,(m_2 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x = \theta \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v \quad , \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0. \\ x_3 = -t - v \end{cases}$$

Để tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_2 = -1$, ta làm như sau:

Lấy $a_2 = (1,0,-1)$, $a_3 = (0,1,-1)$ là cơ sở.

Đặt $a_2' = \frac{a_2}{\|a_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

$$\overline{a}_3 = a_3 - \langle a_3, a_2' \rangle a_2' = (0,1,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a_3' = \frac{\overline{a}_3}{\|\overline{a}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$

3) Ma trận Q và B cần tìm là:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Ma trận Q không là duy nhất vì Q phụ thuộc vào cách chọn VTR.