Bài tập chương 4,5,6

1) Trong KG R^3 cho qui tắc:

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3, \langle x,y\rangle = 2x_1y_1+3x_2y_2.$$

Qui tắc trên có phải là một tích vô hướng trong KG R^3 không? Tại sao?

2) Trong KG R^3 cho tích vô hướng:

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3, \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+3x_3y_3.$$

Hãy trực giao hóa hệ vector $S=\{u_1=(1,1,1), u_2=(1,1,0), u_3=(1,0,0)\}$.

3) Trên $P_2[x]$, cho hệ vector $B=\{u_1=5, u_2=3x^2\}$. Hãy trực chuẩn hóa B với tích vô hướng:

$$\forall p,q\in P_2[x],\quad \langle p,q\rangle=\int_0^1 pq\,dx.$$

4) Tìm giá trị riêng, vector riêng, cơ sở của không gian riêng tương ứng của ma trận

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

5) Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -2 & 4 & -1\\ -2 & -4 & -2\end{pmatrix}$. Ma trận A có chéo hóa được trên R hay không? Tại sao?

6) Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) Chéo hóa ma trận A.

b) Tính A^n.

7) Tính A^n, n = 1,2,... với

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

8) Cho ma trận đối xứng thực

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) Hãy chéo hóa trực giao ma trận A.

b) Hãy thực hiện phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương $f(x,x)$ có ma trận biểu diễn diễn là ma trận A về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc đó.

9) Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange:

a) $f(x,x) = 4x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_2x_3 - 9x_1x_3.$

b) $f(x,x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4.$

10) Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao:

a) $f(x,x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2.$

b) $f(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$