Chương 6. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH – DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.1. Dạng song tuyến tính

6.1.1. Định nghĩa và các ví dụ.

Định nghĩa 1: Giả sử X là một không gian vectơ (KGVT) trên R. Ánh xạ $f: X \times X \to R$ được gọi là một dạng song tuyến tính (DSTT), nếu $\forall x, x', y, y' \in X, \forall \lambda \in R$ ta có:

1) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$,
2) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$,
3) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$,
4) $f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Nói cách khác, f(x,y) là tuyến tính theo từng biến.

Chú ý 1: Điều kiện 1) + 2) có thể thay thế bởi điều kiện sau:

1') $f(\lambda x + \mu x', y) = \lambda f(x, y) + \mu f(x', y)$, $\forall x, x', y \in X, \forall \lambda, \mu \in R$.

Điều kiện 3) + 4) có thể thay thế bởi điều kiện sau:

2') $f(x, \lambda y + \mu y') = \lambda f(x, y) + \mu f(x, y')$, $\forall x, y, y' \in X, \forall \lambda, \mu \in R$.

Nói cách khác , f(x,y) là tuyến tính theo từng biến, tức là f(x,y) tuyến tính đối với x khi y cố định và tuyến tính đối với y khi x cố định.

Ví dụ 1: Cho $f: C[a,b] \times C[a,b] \to R$

$$f(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt, \quad u, v \in C[a,b]$$ - là một DSTT trên C[a,b].

Ví dụ 2: Cho $f: R^2 \times R^2 \to R$

$f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ - là một DSTT trên R^2.

Ví dụ 3: Cho $f: R \times R \to R$.

$f(x, y) = c$ - là một DSTT?

Giải: * Nếu c = 0, dễ dàng kiểm tra được f thỏa mãn 4 điều kiện của DSTT . Vậy f(x,y) = 0 là DSTT.

* Nếu $c \neq 0$, ta thấy với $\lambda \neq 1$:

$$f(x, y) = c \neq \lambda c = f(\lambda x, y).$$

Vậy f không là DSTT.

6.1.2. Biểu diễn dạng song tuyến tính.

Định lý 1: Mọi DSTT f(x,y) trong không gian tuyến tính (KGTT) n chiều với cơ sở (e) $=\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$ cho trước có thể biểu diễn duy nhất với dạng:

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \qquad (1),$$

trong đó $x=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, $y=\{y_1, y_2,\ldots, y_n\}$ là các tọa độ của x, y trong cơ sở (e), còn $a_{ij}= f(e_i, e_j)$.

Định nghĩa 2: Ma trận $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ trong đó $a_{ij}= f(e_i, e_j)$, gọi là ma trận của DSTT trong cơ sở (e).

Chú ý 2: Ma trận vuông $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ bất kỳ là ma trận của DSTT nào đó trong cơ sở (e) $=\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$.

Để thấy điều đó chỉ cần đặt

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j .$$

Chú ý 3: Nếu các tọa độ của các vectơ viết dưới dạng ma trận cột

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ và } x^T=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

thì công thức (1) trở thành: $f(x,y)=x^T.A.y$

Định nghĩa 3: DSTT f được gọi là đối xứng (phản đối xứng) nếu

$$f(x,y)=f(y,x), \forall x,y\in X.$$
$$(f(x,y)=-f(y,x), \forall x,y\in X)$$

Chú ý 4:

1) Nếu DSTT f là đối xứng thì ma trận A của nó trong một cơ sở nào đó là đối xứng và ngược lại.

2) Nếu DSTT f là phản đối xứng thì ma trận A của nó trong một cơ sở nào đó là phản đối xứng và ngược lại.

Định nghĩa 4: Hạng của DSTT f (x,y) là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó và kí hiệu là rankf. Vậy rankf = r(A).

Định nghĩa 5: DSTT f (x,y) cho trong KGTT X n chiều gọi là không suy biến (tương ứng, suy biến), nếu rankf = n (tương ứng, rankf < n).

6.2. Dạng toàn phương.

Định nghĩa 6: Cho DSTT đối xứng f(x,y). Nếu thay y = x thì f(x,x) được gọi là một dạng toàn phương (DTP).

Vậy trong cơ sở (e) cho trước của X ta có:

$$f(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (3),$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

Hay ta có thể viết (3) dưới dạng:

$$f(x,x) = x^T.A.x,$$

với $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Chú ý 5: Khai triển (3) ta được:

$$f(x,x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+\ldots+2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n \qquad (3').$$

Chú ý 6: DTP được xác định qua DSTT, nên những tính chất đã đúng cho DSTT cũng đúng cho DTP. Đặc biệt ta cũng có công thức đổi cơ sở (2):

$$A_{\bar{e}} = T_{e\bar{e}}^T.A_e.T_{e\bar{e}}.$$

6.3. Dạng chính tắc của DTP.

Định nghĩa 7: Nếu DTP f(x,x) trong một cơ sở (e) nào đó của KGTT n chiều X có dạng:

$$f(x,x)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\ldots+\lambda_nx_n^2 \qquad (4),$$

trong đó $\lambda_k (k\in\overline{1,n})$ là các hằng số (có thể bằng 0 hoặc khác 0), thì (4) gọi là dạng chính tắc (DCT) của DTP f(x,x); $\lambda_k (k\in\overline{1,n})$ gọi là các hệ số chính tắc; cơ sở (e) để f(x,x) có dạng chính tắc (4) gọi là cơ sở chính tắc tương ứng.

6.3.1. Đưa DTP về DCT bằng phép biến đổi trực giao.

Do ma trận A của DTP là ma trận đối xứng , nên bài toán trở thành chéo hóa trực giao ma trận A. Khi đó DTP được đưa về DCT:

$$f=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\ldots+\lambda_nx_n'^2,$$

với phép biến đổi trực giao:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \text{ hay } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5),$$

trong đó $\lambda_k (k \in \overline{1,n})$ - GTR của A, Q là ma trận chéo hóa trực giao ma trận A. Ma trận trực giao Q biến cơ sở trực chuẩn đã cho thành cơ sở trực chuẩn gồm các VTR của A.

Ví dụ 5: Đưa DTP sau về DCT bằng phép biến đổi trực giao.

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Giải: Ma trận của DTP f (trong cơ sở trực chuẩn $(e) = \{e_1,\ e_2, e_3\}$ đã cho các tọa độ của VT $x = (x_1, x_2, x_3)$) là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện chéo hóa trực giao ma trân A (Xem ví dụ 10 chương 5)

Kết quả thu được:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy DTP f được đưa về DCT:

$$f = 5x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2,$$

bằng phép biến đổi trực giao:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3 \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \qquad\qquad - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 \quad \text{(từ công thức (5))} \\ x_2' = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} x_3 \end{cases}$$

6.3.2. Đưa DTP về DCT bằng phương pháp Lagrange.

Nội dung của phương pháp này là dùng các phép biến đổi sơ cấp không suy biến đưa DTP về DCT. Phương pháp này không đòi hỏi phải giải pt đặc trưng để tìm các GTR – là một công việc không đơn giản đối với các pt bậc cao.

Xét 2 trường hợp:

I) Trước hết ta xét trường hợp $\exists a_{ii} \neq 0$. Ta có thể giả thiết $a_{11} \neq 0$, vì nếu $a_{11} = 0$ và $\exists a_{ii} \neq 0 (i \in \overline{2,n})$, ví dụ chẳng hạn $a_{22} \neq 0$ thì ta chỉ việc đổi thứ tự 2 vectơ e_1 và e_2 của cơ sở (e), tức là dùng phép biến đổi:

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = x_1, x'_3 = x_3, ..., x'_n = x_n.$$

Ta đưa về trường hợp $a'_{11} \neq 0$ (hệ số của x'^2_1).

***Phương pháp Lagrange tiến hành theo các bước sau:**

B1: Nhóm tất cả các số hạng có chứa thừa số x_1 và thêm hoặc bớt vào tổng các số hạng dạng $b_k x_i^2, c_k x_i x_j (i, j \geq 2)$ để được một bình phương đủ và được:

$$f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n)^2 + g(x,x),$$

trong đó g(x,x) chỉ chứa các bình phương và các số hạng là các tích chéo của $x_2, ..., x_n$.

B2: Đặt $\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = x_2 \\ .... \\ x'_2 = x_n \end{cases}$. Khi đó

$$f(x,x) = \frac{1}{a_{11}} x'^2_1 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j.$$

B3: Lặp lại các bước 1, 2 đối với $\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$.

Thực hiện sau một số hữu hạn lần như trên, ta đưa được DTP về DCT:

$$f = \lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + ... + \lambda_r \overline{x}_r^2 \quad (r \leq n) \quad (6).$$

Chú ý 7: 1) DCT (6) có ma trận dạng đường chéo (cũng chính là ma trận của f trong cơ sở mới $(\overline{e})$)

$$A_{\overline{e}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Ma trận $T_{e\bar{e}}$ chuyển từ cơ sở cũ (e) sang cơ sở mới $(\bar{e})$ được xác định bởi phép biến đổi Lagrange:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = T_{e\bar{e}}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ hay } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_{e\bar{e}} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad (7),$$

Ví dụ 6: Đưa DTP sau về DCT:

$$f(x,x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

Hãy tìm cơ sở mới $(\bar{e})$, ma trận chuyển cơ sở $T_{e\bar{e}}$ để trong cơ sở $(\bar{e})$ DTP f có DCT trên và ma trận $A_{\bar{e}}$ của f trong cơ sở $(\bar{e})$.

Giải: (Trong cơ sở $(e) = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ x có tọa độ $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$f(x,x) = (9x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3) + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_2x_3 =$$

$$= [(3x_1)^2 - 2.3x_1.x_2 - 2.3x_1.x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3] - x_2^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_2x_3 =$$

$$= (3x_1 - x_2 - x_3)^2 + (5x_2^2 + 5x_3^2 + 10x_2x_3) =$$

$$= (3x_1 - x_2 - x_3)^2 + 5(x_2 + x_3)^2.$$

Đặt $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$ (*), ta đưa được DTP f về DCT: $f = x_1'^2 + 5x_2'^2 \quad (**)$.

Từ (*) ta có

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \overset{(7)}{\Rightarrow} T_{e\bar{e}}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{e\bar{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hoặc tìm $T_{e\bar{e}}$ bằng cách giải hệ (*) để tìm biểu diễn tọa độ cũ qua tọa độ mới:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1' + \frac{1}{3}x_2' \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \Rightarrow T_{e\bar{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy cơ sở mới $(\bar{e})$ là $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)$, $\bar{e}_3 = (0, -1, 1)$. Và từ (**) ta có:

$$A_{\overline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 7: Cho DTP:

$$f(x,x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Hãy đưa DTP f về DCT bằng phương pháp Lagrange. Xác định cơ sở mới mà trong đó f có DCT trên.

Giải: (Trong cơ sở $(e) = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ x có tọa độ $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$f(x,x) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3) + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 + \frac{5}{2}(x_2 - \frac{x_3}{5})^2 + \frac{9}{10}x_3^2.$$

Đặt $\begin{cases} x_1' = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + \frac{1}{2}x_2' - \frac{9}{10}x_3 \\ x_2 = x_2' + \frac{1}{5}x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

DTP f được đưa về DCT:

$$f = 2x_1'^2 + \frac{5x_2'^2}{5} + \frac{9}{10}x_3'^2.$$

Ma trận $T_{e\overline{e}}$ chuyển từ cơ sở $(e) = \{e_1,\ e_2, \ldots,\ e_n\}$ sang cơ sở $(\overline{e}) = \{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ để f có DCT trên:

$$T_{e\overline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy cơ sở mới $(\overline{e})$ là $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = \left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overline{e}_3 = \left(-\frac{9}{10},\frac{1}{5},1\right)$.

Chú ý 8: Một DTP có thể được biểu diễn dưới dạng nhiều DCT khác nhau, do đó có nhiều cơ sở để DTP có DCT trong cơ sở đó.

Ví dụ 8: Từ ví dụ 6 ta đã đưa DTP:

$$f(x,x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3,$$

về DCT

$$f = x_1'^2 + 5x_2'^2.$$

Bây giờ, ta xét một phép biến đổi khác:

$$f(x,x) = 9(x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 - \frac{2}{3}x_1x_3) + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_2x_3 =$$

$$= 9(x_1^2 - 2x_1.\frac{1}{3}x_2 - 2x_1.\frac{1}{3}x_3 + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{9} + 2\frac{x_2}{3}\frac{x_3}{3}) + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 10x_2x_3 =$$

$$= 9(x_1 - \frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{3})^2 + 5(x_2 + x_3)^2.$$

Bằng cách đổi biến:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \dfrac{x_2}{3} - \dfrac{x_3}{3} \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + \dfrac{x_2'}{3} \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases},$$

ta đưa f về DCT:

$$f = 9x_1'^2 + 5x_2'^2 \quad (3^*).$$

Nhận xét: (**) và (3*) là hai DCT khác nhau của một DTP. Tuy nhiên số các hệ số chính tắc khác 0 của chúng là như nhau.

II) Nếu trong biểu thức của DTP có $a_{ii} = 0, \forall i = 1,2,..,n$ thì phải $\exists\, a_{ij} \neq 0, (i,j \in \overline{1,n}, i \neq j)$, ví dụ chẳng hạn $a_{12} \neq 0$ (vì nếu $a_{ij} = 0, (\forall i,j \in \overline{1,n}, i \neq j)$ ta được DCT f(x,x) = 0). Khi đó dùng phép biến đổi:

$$x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2},\ x_2' = \frac{x_2 - x_1}{2},\ x_3' = x_3,\ ...,\ x_n' = x_n$$

$$\Rightarrow x_1 = x_1' - x_2',\ x_2 = x_1' + x_2',\ x_3 = x_3',\ ...,\ x_n = x_n'.$$

Vậy:

$$f = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) + 2a_{13}(x_1' - x_2')x_3 + ... =$$

$$= 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 + ...$$

Ví dụ 9: Bằng phương pháp Lagrange hãy đưa DTP sau về DCT:

$$f(x,x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$$

Tìm cơ sở để f có DCT tắc.

Giải: Đặt $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ x_3 = x_3' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$. Thay vào DTP đã cho ta có:

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x_1'^2 - x_2'^2 + x_1'x_3' + x_2'x_3' + x_3'x_4' = \\ &= (x_1'^2 + 2x_1'\frac{x_3'}{2} + \frac{x_3'}{4}) - x_2'^2 + x_2'x_3' + x_3'x_4' - \frac{x_3'}{4} = \\ &= (x_1' + \frac{x_3'}{2})^2 - (x_2'^2 - 2x_2'\frac{x_3'}{2} + \frac{x_3'}{4}) + x_3'x_4' = \\ &= (x_1' + \frac{x_3'}{2})^2 - (x_2' - \frac{x_3'}{2})^2 + x_3'x_4'. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} \overline{x}_1 = x_1' + \dfrac{x_2'}{2} \\ \overline{x}_2 = x_2' - \dfrac{x_3'}{2} \\ \overline{x}_3 = \dfrac{x_3' + x_4'}{2} \\ \overline{x}_4 = \dfrac{x_4' - x_3'}{2} \end{cases}$ (4*).

Khi đó f có DCT trong cơ sở mới $(\overline{e}) = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$: $f(x,x) = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2 - \overline{x}_4^2$.

Để tìm ma trận chuyển cơ sở $T_{e\overline{e}}$ từ hệ (4*), ta có:

$$\begin{cases} x_1' = \overline{x}_1 - \dfrac{\overline{x}_3}{2} + \dfrac{\overline{x}_4}{2} \\ x_2' = \overline{x}_2 - \dfrac{\overline{x}_3}{2} + \dfrac{\overline{x}_4}{2} \\ x_3' = \overline{x}_3 - \overline{x}_4 \\ x_4' = \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \\ x_2 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 - \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \\ x_3' = \overline{x}_3 - \overline{x}_4 \\ x_4' = \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{e\overline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy cơ sở mới $(\overline{e})$: $\overline{e}_1 = (1,1,0,0)$; $\overline{e}_2 = (-1,1,0,0)$; $\overline{e}_3 = (0,-1,1,1)$; $\overline{e}_4 = (0,1,-1,1)$.