Bài tập chương 3 .

1) Xét xem các tập hợp cùng với phép cộng và phép nhân vô hướng cho sau đây có phải là KGVT trên R không?

   a) $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2: (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$,
   $\forall(x_1,x_2)\in R^2, \forall\lambda\in R: \lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,0)$,

   b) $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2_+: (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$,
   $\forall(x_1,x_2)\in R^2_+, \forall\lambda\in R: \lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$, $(R^2_+=\{(x_1,x_2)\in R \mid x_1>0, x_2>0)$

   c) P^0_n là tập các đa thức bậc n với các phép toán thông thường:cộng hai đa thức và nhân đa thức với một số.

   d) $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2_+: (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$,
   $\forall(x_1,x_2)\in R^2_+, \forall\lambda\in R: \lambda(x_1,x_2)=(x_1^\lambda,x_2^\lambda)$.

2) Kiểm tra các tập sau đây có là không gian vector (KGVT) con của các không gian vector tương ứng không?

   a) $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 / x_i>0, i=1,2,3\}$

   b) $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 / x_1+2x_2=3x_3\}$

   c) $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 / x_1+3x_2=1\}$

   d) $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2 / b+c=0\right\}$

   e) $W=\{a_0+a_1t+a_2t^2\in P_2[t] / a_0+a_1+a_2=0\}$

3) Cho các vector u = (1, -3, 2) và v = (2,-1,1) trong R^3

   a) Hãy biểu diễn tuyến tính vector w = (1,7,-4) qua u,v.

   b) Xác định m để w = (1, m, 5) là tổ hợp tuyến tính của u,v.

   c) Tìm điều kiện của a,b,c để w = (a,b,c) là tổ hợp tuyến tính của u,v.

4) Xét sự độc lập tuyến tính (đltt) của các hệ vector sau trong các KGVT tương ứng:

   a) $a_1=(3,2,-1), a_2=(2,3,5), a_3=(-1,1,2)$

   b) $b_1=(2,1,1,-1), b_2=(1,-1,2,1), b_3=(3,4,5,1), b_4=(1,2,-1,-2)$

   c) $c_1=(1,2,-1,3), c_2=(3,7,9,13), c_3=(-2,-4,2,-6)$

   d) $d_1=(6,3,5,7), d_2=(5,9,8,11), d_3=(13,17,25,31), d_4=(25,18,19,41)$,
   $d_5=(33,79,81,1)$

   e) $e_1=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

   f) $f_1=x^3-2x+2, f_2=x^2-1, f_3=x^3+2x^2-2x, f_4=x^3+1$ trong $P_3[x]$.

5) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của R^4 sinh bởi hệ vector sau:

a) $\alpha_1 = (1,2,-1,3), \alpha_2 = (2,-1,2,4), \alpha_3 = (0,-5,4,-2)$

b) $\beta_1 = (-1,0,1,2), \beta_2 = (1,1,0,-3), \beta_3 = (2,1,-1,-5), \beta_5 = (1,-1,1,2), \beta_4 = (-2,3,1,-3),$

6) Cho các vector

$$u_1 = (1,2,-1,2,0), u_2 = (2,3,4,1,2), u_3 = (0,2,-12,6,-4), u_4 = (-1,1,a,7,b),$$

và các không gian

$$L_1 = \text{span}\{u_1,u_2,u_3\}, L_2 = \text{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}.$$

a) Tìm một cơ sở và số chiều của L_1.

b) Tùy vào điều kiện của a, b tìm số chiều của L_2. Khi nào $L_1 \equiv L_2$.

7) Trong R^3, cho không gian con

$$L_1 = \text{span}(S), S = \{u_1 = (1,-3,2), u_2 = (2,-1,1), u_3 = (1,m,5)\}.$$

a) Với giá trị nào của m thì $L \equiv R^3$.

c) Cho m = -8. Tìm điều kiện của a, b, c để $x = (a,b,c) \in L$.

8) Tập nào là không gian con của R^4? Tìm một cơ sở của nó (nếu là không gian con)

a) $L_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1 = x_4, x_i \in R\}$

b) $L_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1^2 = x_2, x_i \in R\}$

9) Tìm chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

10) Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

(Một hệ nghiệm cơ bản là một cơ sở của không gian nghiệm)

11) Trong R^3 cho các hệ vector:

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,1,2), \alpha_3 = (1,2,3) \quad (1)$$

$$\beta_1 = (2,1,-1), \beta_2 = (3,2,5), \beta_3 = (1,-1,m) \quad (2)$$

a) Chứng minh rằng (1) là một cơ sở của R^3.

b) Tìm tọa độ của vector u = (2,3,1) đối với cơ sở (1).

c) Tìm m để (2) là một cơ sở của R^3.

d) Cho m=1.

-Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (1) sang (2) .

- Cho $(x)_{/(2)} = (-1,2,3)$. Tìm $(x)_{/(1)} = ?$