Off-diagonal Van der Waerden

Weronika Dyszkiewicz, Jakub Piotr Lange, Aleks Patryk Kapich

11 marca 2024

1 Treść zadania

Gra komputer kontra człowiek
Dane wejściowe:

- liczba naturalna r - liczba dopuszczalnych kolorów,
- liczby naturalne $\{k_1, k_2, ..., k_r\}$ - długości ciągów,
- liczba naturalna n

Gracze budują ciąg kolorowych żetonów. Pierwszy gracz wskazuje miejsce, w którym drugi gracz kładzie pokolorowany żeton. Żetony muszą być cały czas ułożone obok siebie, w jednej linii (traktujemy je jak liczby). W każdym kolejnym kroku można dostawić nowy żeton tuż przed już postawionymi, tuż za nimi albo gdzieś pomiędzy. Pierwszy gracz wygrywa, gdy uda mu się zmusić drugiego gracza do ułożenia monochromatycznego ciągu arytmetycznego koloru i o długości k_i dla dowolnego $i \leqslant r$, jeżeli mu się nie uda i zostanie położonych n żetonów, wygrywa gracz drugi.

2 Wstęp

Stworzyliśmy aplikację w języku programowania Python z wykorzystaniem biblioteki pygame. Gra zapisana jest w rozszerzeniu .exe tak, aby działała bez dodatkowego oprogramowania na komputerze z systemem Windows.
Na starcie aplikacja losuje konfigurację, w której odbędzie się rozgrywka. Losowana jest liczba kolorów r oraz przypisane im dlugości ciągów arytmetycznych $k_1, ..., k_r$.
Po upłynięciu krótkiego czasu graczowi zostaje zaprezentowany następny ekran, na którym odbywa się właściwa rozgrywka. Komputer wskazuje graczowi miejsce, w którym ten ma wstawić żeton. Gracz wybiera kolor żetonu za pomocą klawiatury. Rozgrywka kończy się, gdy gracz ułoży ciąg arytmetyczny złożony z żetonu $i-tego$ koloru o długości k_i.

3 Opis aplikacji

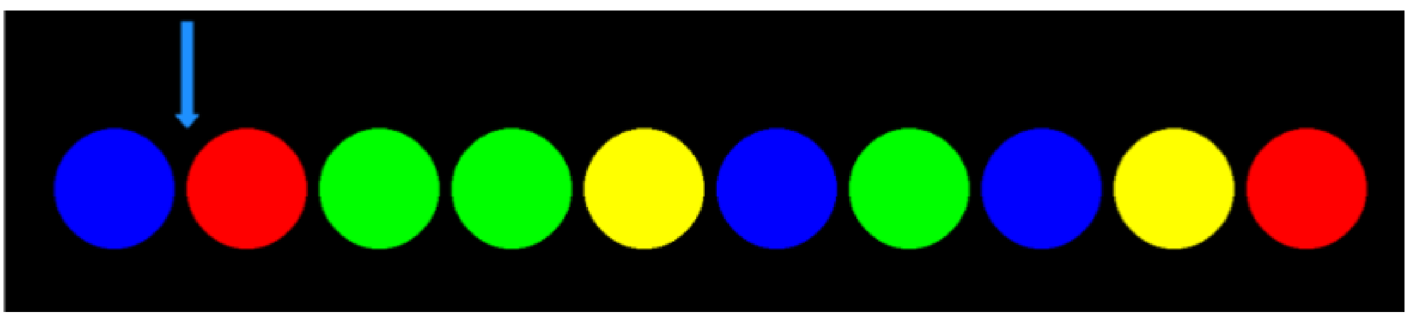
Komputer podczas rozgrywki posługuje się algorytmem wybierającym miejsce umieszczenia kolejnego żetonu, które maksymalizuje szansę pomyłki oponenta w następnym kroku. Robi to, weryfikując dla każdego potencjalnego położenia żetonu, dla jakiej liczby kolorów umieszczonych w tym położeniu rozgrywka zakończy się wygraną komputera w kolejnej rundzie. Domyślnie poszukuje miejsc, gdzie r kolorów zakończy rozgrywkę, czyli na pewno komputer wygra. Jeżeli takie miejsca nie istnieją, wybiera

miejsca gdzie $r-1$ spośród kolorów zakończy grę, stosując to podejście dopóki nie znajdzie najlepszego możliwego położenia. Jeżeli takich położeń jest więcej niz jedno, algorytm losuje miejsce z równym prawdopodobieństwem dla każdego z nich. W celu sprawdzenia algorytmu napisaliśmy testy jednostkowe, które potwierdziły jego poprawność. W naszej aplikacji liczba kolorów r losowana jest z przedziału [3,4], a długości poszczególnych ciągów odpowiednich kolorów są losowane z przedziału [3,5] tzn. żetony i-tego koloru o długości k_i. Aby zapobiec sytuacji, że komputer będzie tylko wygrywać, liczbę żetonów n ustawiamy na $\frac{7}{5}\sum_{i=1}^{r} k_i$.
Najlepszą strategią gracza na początku jest wstawienie wszystkich kolorów żetonów, a następnie próby nieułożenia poszczególnych ciągów arytmetycznych.

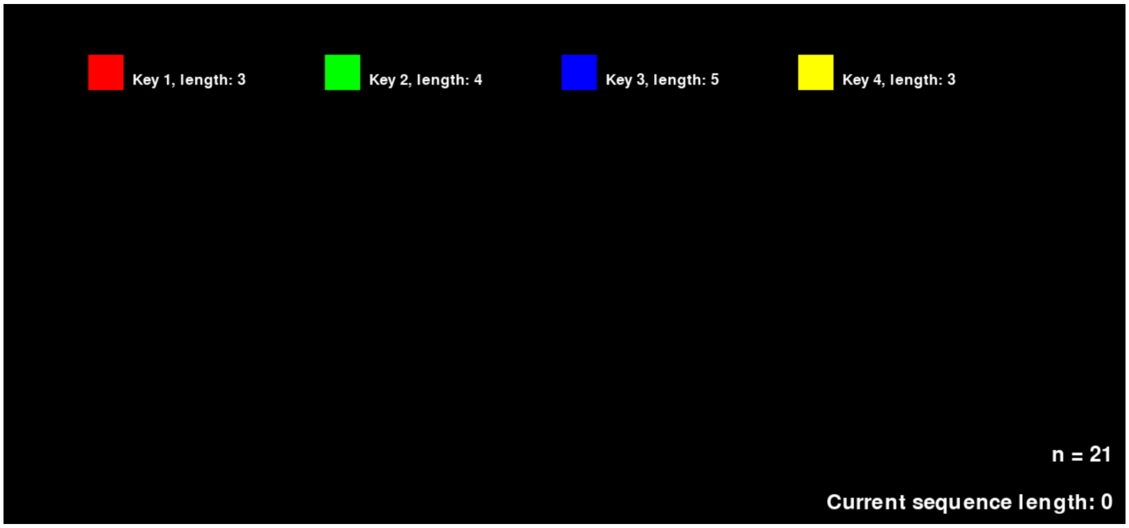
4 Przykładowa rozgrywka

Użytkownik włącza grę i losowana jest konfiguracja, w której odbędzie się rozgrywka. Otwiera się nowy ekran, na którym odbywa się rozgrywka. W naszym przykładowym eksperymencie zostały wylosowane 4 kolory: cz-czerwony, z-zielony, n-niebieski i $\dot{z}$-żółty, następujące długości ciągów $k_{czerwony}=3, k_{zielony}=4, k_{niebieski}=5, k_{zolty}=3$ oraz liczba maksymalnej długości ciągu żetonów $n=21$. Wylosowane parametry wyświetlają się na konsoli. Kolory wybierane są za pomocą odpowiednich przycisków klawiatury. W tym przypadku np. klawisz 1, gdy chce wybrać czerwony.

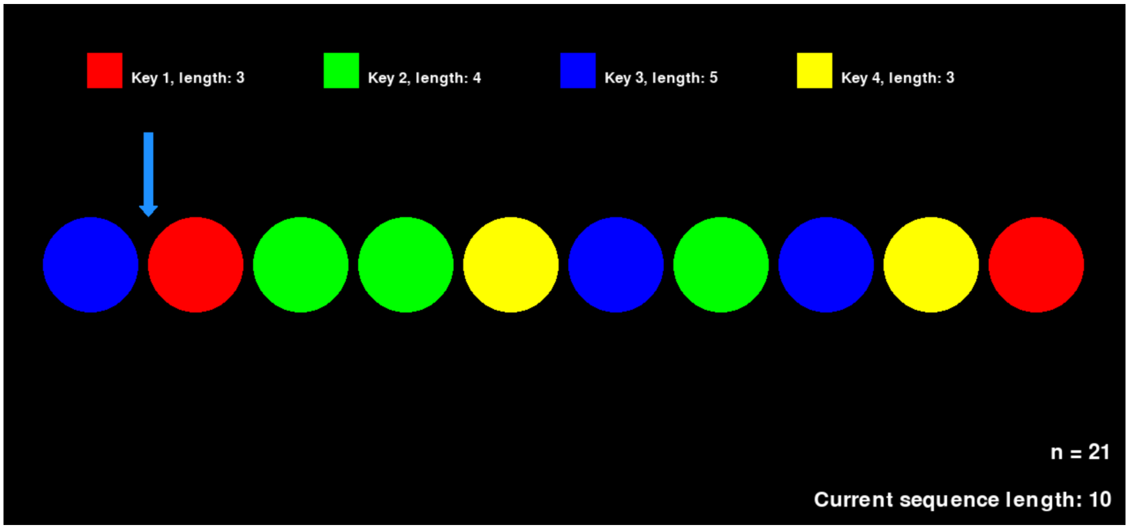
Użytkownik rozpoczyna grę wskazując kolor pierwszego żetonu i następnie komputer wykonuje swój ruch i wskazuje miejsce, w którym gracz w swojej kolejce ma położyć żeton wybranego koloru. Dochodzimy do momentu, gdy ciąg wygląda następująco $\{n,\ cz,\ z,\ z,\ \dot{z},\ n,\ z,\ n,\ \dot{z},\ cz\}$. Komputer wskazuje miejsce między niebieskim a czerwonym.



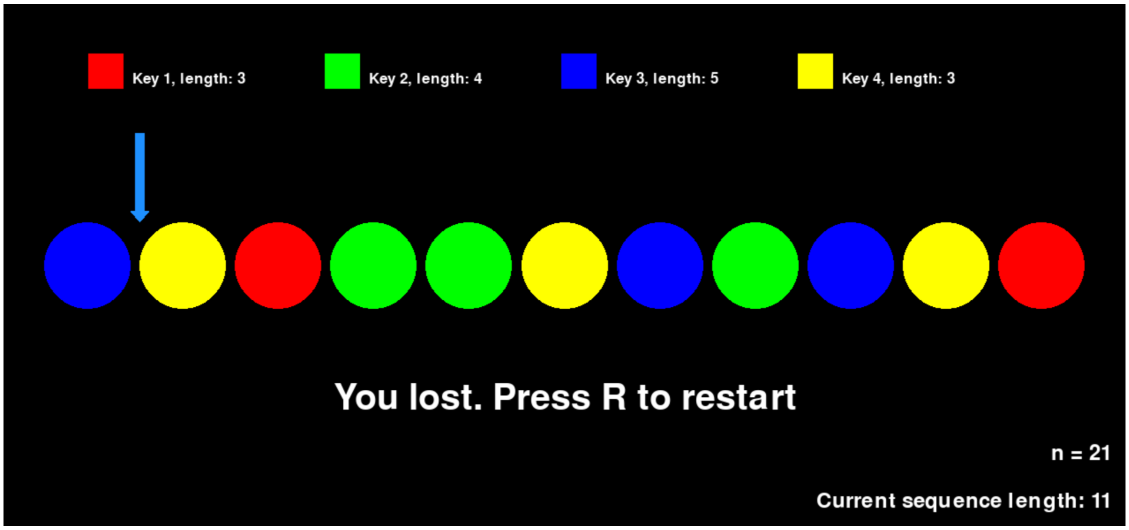
My wybieramy żeton żółty i w tym momencie przegrywamy, ponieważ powstał ciąg arytmetyczny z żółtych żetonów o długości $k_{zolty}=3$. Możemy ponownie zagrać naciskając klawisz R.
Poniżej przedstawiamy zrzutu ekranu z aplikacji, kórą widzi użytkownik w poszczególnych krokach tej przykładowej rozgrywki.



Rysunek 1: Ekran użytkowanika po uruchomieniu gry, pokazane są wylosowane kolory, długości poszczególnych k_i, liczba n oraz obecna długość ciągu



Rysunek 2: Ekran użytkowanika po paru ruchach, strzałka pokazuje miejsce wstawienia żetonu, które wybrał komputer



Rysunek 3: Użytkownik wstawia żółty żeton i przegrywa, ponieważ powstał ciąg arytmetyczny z trzema żółtymi żetonami

5 Definicje

Definicja 1. **Kolorowaniem** *nazywamy funkcję* $COL : [n] \rightarrow X$*, gdzie* X *jest zbiorem dostępnych kolorów,* $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

Definicja 2. **Monochromatycznym ciągiem długości n** *nazywamy taki ciąg* a_n*, że istnieją wyrazy* $a_{n_1}, ..., a_{n_n}$ *takie, że* $COL(a_{n_1}) = ... = COL(a_{n_n})$ *oraz wyrazy te tworzą podciąg arytmetyczny.*

5.1 Liczby van der Waerdena

Definicja 3. *Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych* r *i* k*, najmniejszą taką liczbą* N *jest* **liczba van der Waerdena** $W(r; k)$*, taka że jeśli liczby całkowite* $\{1, 2, ..., N\}$ *są pokolorowane, każda jednym z* r *różnych kolorów, to w ciągu arytmetycznym istnieje co najmniej* k *liczb całkowitych tego samego koloru.*

Definicja 4. *Stosowane jest również oznaczenie* $w(r; k_1, k_2, ..., k_r)$*, które oznacza najmniejszą liczbę* w *taką, że kolorowanie liczb* $\{1, 2, ..., w\}$*,* r *kolorami zawiera ciąg długości* k_i *koloru* i*. Takie liczby nazywane są* **off-diagonal van der Waerden numbers**.

Na przykład $w(2; 4, 4)$ ma takie samo znaczenie jak klasyczna liczba van der Waerdena $W(2; 4)$; $w(4; 3, 3, 3, 3)$ ma takie samo znaczenie jak $W(4; 3)$. Jeśli weźmiemy $w(3; 5, 4, 7)$ to reprezentuje ona najmniejsze dodatnie n takie, że każde (np. czerwone, niebieskie, zielone) kolorowanie $[1, n]$ daje czerwoną 5-krotny ciąg arytmetyczny, niebieski 4-krotny ciąg arytmetyczny lub zielony 7-wyrazowy ciąg arytmetyczny.

Badanie tych "mieszanych" liczb van der Waerdena spotkało się ze stosunkowo niewielkim zainteresowaniem, zwłaszcza w porównaniu z klasycznymi (mieszanymi) grafawo-teoretycznymi liczbami Ramseya. Najlepszą obecnie znaną górną granicę zawdzięczamy Timothy'emu Gowersowi, który ustalił:

$$W(r, k) \leqslant 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

Łatwo jest ręcznie obliczyć, że $w(2; 3, 3) = 9$. Inne nietrywialne wartości liczb van der Waerdena zostały opublikowane przez Chvatala [5], Browna [4], Stevens i Shantaram [6], Beeler i O'Neil [3] oraz Beeler [2] w latach odpowiednio 1970, 1974, 1978, 1979 i 1983.
W naszej aplikacji liczba kolorów losowana jest z przedziału [3,4], a długości poszczególnych ciągów odpowiednich kolorów są losowane z przedziału [3,5]. W poniższej tabelce wypisane są niektóre znane liczby dla tych z odpowiednich przedziałów.

Znane liczby van der Waerdena

$\mathbf{w(r; k_1, k_2, ..., k_r)}$	**Liczba**	**Odniesienie**
w(3; 3, 3, 3)	27	Chvátal
w(3; 3, 3, 4)	51	Beeler and O'Neil
w(3; 3, 3, 5)	80	Landman, Robertson i Culver
w(3; 4, 4, 4)	293	Kouril
w(4; 3, 3, 3, 3)	76	Beeler and O'Neil

5.2 Twierdzenie van der Waerdena

Twierdzenie 1. *Dla każdej danej dodatniej całkowitej liczby* c *oraz* k*, istnieje liczba* V*, taka że jeśli ciąg złożony z następujących po sobie* V *liczb jest pokolorowany na* c *różnych kolorów, wówczas istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości co najmniej* k*.*

Twierdzenie van der Waerdena oznacza, że dla każdego kolorowania skończonego zbioru liczb całkowitych dodatnich istnieje skończony, monochromatyczny ciąg arytmetyczny dowolnej długości. Kolorując kolejne liczby na pewną liczbę kolorów, przy pewnej (być może znacznej) długości ciągu uzyskamy pewien rodzaj regularności (nie ma „ucieczki w idealny chaos" przed tym specyficznym porządkiem, jeśli odpowiednio zwiększymy V).

Dowód. Udowodnimy szczególny przypadek, że

$$W(2,3) \leqslant 325.$$

Niech $c(n)$ będzie kolorowaniem liczb całkowitych $\{1, ..., 325\}$. Znajdziemy trzy elementy $\{1, ..., 325\}$ w ciągu arytmetycznym, które mają ten sam kolor.

Podzielmy $\{1, ..., 325\}$ na 65 bloków tzn.: $\{1, ..., 5\}$, $\{6, ..., 10\}$, ... $\{321, ..., 325\}$, więc każdy blok ma postać $\{5b + 1, ..., 5b + 5\}$ dla pewnego $b \in \{0, ..., 64\}$. Każda liczba całkowita jest pokolorowana na czerwono lub niebiesko, więc każdy blok jest pokolorowany na jeden z 32 różnych sposobów. Zgodnie z zasadą *szufladkową*, wśród pierwszych 33 bloków znajdują się dwa bloki, które są pokolorowane identycznie. Oznacza to, że istnieją dwie liczby całkowite b_1 i b_2, obie $\in \{0,...,32\}$, takie że

$$c(5b_1 + k) = c(5b_2 + k)$$

dla wszystkich k $\in \{1, ..., 5\}$. Wśród trzech liczb całkowitych $5b_1 + 1$, $5b_1 + 2$, $5b_1 + 3$ muszą być co najmniej dwie liczby tego samego koloru (znów zasada *szufladkowa*). Nazwijmy je $5b_1 + a_1$ i $5b_1 + a_2$, gdzie $a_i \in \{1,2,3\}$, a $a_1 < a_2$. Załóżmy (bez utraty ogólności), że obie te liczby całkowite są czerwone (jeśli obie są niebieskie, zamieńmy miejscami "czerwony" i "niebieski").

Niech $a_3 = 2a_2 - a_1$. Jeśli $5b_1 + a_3$ jest czerwone, to znaleźliśmy nasz ciąg arytmetyczny: $5b_1 + a_i$ są czerwone.

W przeciwnym razie $5b_1 + a_3$ jest niebieskie. Ponieważ $a_3 \leqslant 5$, to $5b_1 + a_3$ znajduje się w bloku b_1, a ponieważ blok b_2 ma identyczny kolor to $5b_2 + a_3$ jest również niebieskie.

Niech teraz $b_3 = 2b_2 - b_1$. Wtedy $b_3 \leqslant 64$. Rozważmy liczbę całkowitą $5b_3 + a_3$, która musi być $\leqslant 325$. Jakiego koloru jest ta liczba?

Jeśli czerwona, to liczby $5b_1 + a_1,\ 5b_2 + a_2,\ 5b_3 + a_3$ tworzą czerwony ciąg arytmetyczny. Ale jeśli jest niebieska, to $5b_1 + a_3,\ 5b_2 + a_3,\ 5b_3 + a_3$ tworzą niebieski ciąg arytmetyczny. Co udowadnia naszą tezę dla $W(2,3)$. Dowód dla $W(2,3)$ zależy zasadniczo od udowodnienia, że $W(32,2) \leqslant 33$. Dzielimy liczby całkowite $\{1,...,325\}$ na 65 bloków, z których każdy może być pokolorowany na 32 różne sposoby, a następnie pokazujemy, że dwa bloki z pierwszych 33 muszą być tego samego koloru i istnieje blok pokolorowany w przeciwny sposób. Podobnie, dowód dla W(3, 3) zależy od udowodnienia, że

$$W(3^{7(2\cdot 3^7+1)}, 2) \leqslant 3^{7(2\cdot 3^7+1)} + 1.$$

Przez podwójną indukcję na liczbie kolorów i długości ciągów, twierdzenie jest udowodnione w ogólności. □

6 Podsumowanie

Twiedzenie *Van der Waerdena* tak naprawdę dowodzi, że gdybyśmy nie ustawili maksymalnej długości ciągu to gracz byłby skazany na porażkę w każdej rozgrywce, ponieważ istniałby taki ciąg z wylosowanymi parametrami. Po parunastu rozgrywkach stwierdziliśmy, że łatwiej wygrać z komputerem, gdy wylosuje się mniejsza liczba kolorów. Istnieją dwa przypadki zakończenia gry:

- powstaje ciąg arytmetyczny o odpowiednim k_i,
- zostanie wyczerpana liczba ruchów (długość ciągu n).

Literatura

[1] Bruce Landman, Aaron Robertson, Clay Culver, *Some New Exact van der Waerden numbers*

[2] M. Beeler, *A new van der Waerden number*, Discrete Applied Math. 6 (1983), 207

[3] M. Beeler and P. O'Neil, *Some new van der Waerden numbers*, Discrete Math. 28 (1979), 135-146

[4] T.C. Brown, *Some new van der Waerden numbers* (preliminary report), Notices American Math. Society 21 (1974)

[5] V. Chv´atal, *Some unknown van der Waerden numbers, in Combinatorial Structures and their Applications*, 31-33, Gordon and Breach, New York, 1970

[6] R. Stevens and R. Shantaram, *Computer-generated van der Waerden partitions*, Math. Computation 32 (1978), 635-636

[7] Wikipedia, *en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waerden's_theorem*