

Przybliżanie miejsc zerowych wielomianu trygonometrycznego

Jakub Lange, Aleks Kapich, Tymoteusz Kwieciński

Grudzień 2022

Spis treści

1	Opis zadania	2
2	Opisy metod szukania miejsc zerowych	2
2.1	Metoda parabol	2
2.2	Metoda siecznych	2
2.3	Metoda Newtona	2
3	Opis algorytmu Goertzela	3
4	Sposób implementacji	3
5	Szybkość zbieżności metod	3
6	Analiza kolejnych przykładów	11
7	Podsumowanie	23
8	Literatura	23

1 Opis zadania

Naszym zadaniem było obliczenie miejsc zerowych wielomianu

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$$

różnymi metodami, gdzie wartość wielomianu trygonometrycznego była wyznaczana za pomocą algorytmu Goertzela.

2 Opisy metod szukania miejsc zerowych

2.1 Metoda parabol

Algorytm działania metody parabol przybliżania miejsc zerowych zadanej funkcji f idącej z \mathbf{C} w \mathbf{C} jest iteracyjny.

Dane jest początkowo wybrane przybliżenie $x_0 \in \mathbf{C}$. Kolejne wartości przybliżeń wyznaczane są w następujący sposób:

- rozwiązujemy równanie $0 = f(x_k) + f'(x_k)y + \frac{1}{2}f''(x_k)y^2$ względem y , gdzie $y = x_{k+1} - x_k$, otrzymując wartości $y^{(1)}$ oraz $y^{(2)}$.
- jako y przyjmujemy tę z wartości $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ która jest położona bliżej x_k
- obliczamy x_{k+1} : $x_{k+1} = x_k + y$

2.2 Metoda siecznych

Algorytm działania metody siecznych przybliżania miejsc zerowych zadanej funkcji f idącej z \mathbf{C} w \mathbf{C} jest iteracyjny.

Dane są początkowo wybranych dwa przybliżenia $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ kolejne wartości przybliżeń wyznaczane są w następujący sposób:

$k+1$ przybliżenie jest miejscem zerowym siecznej poprowadzonej przez punkty $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $(x_k, f(x_k))$.

Innymi słowy tworzymy ciąg przybliżeń zadany jako, dla $k = 1, 2, \dots$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

2.3 Metoda Newtona

Algorytm zastosowany w metodzie Newtona pozwala przybliżyć miejsca zerowe funkcji f idącej z \mathbf{C} w \mathbf{C} . Początkowo dane jest przybliżenie $x_0 \in \mathbf{C}$. Kolejne przybliżenia wyznaczane są z pomocą wzoru iteracyjnego:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Korzystając z tego wzoru dla $k = 0, 1, \dots$ utworzymy ciąg punktów, który ma szansę być zbieżnym do miejsca zerowego funkcji f .

3 Opis algorytmu Goertzela

Aby wyznaczyć wartości wielomianu zadanego w zadaniu, wykorzystaliśmy algorytm Goertzela. Może on zostać użyty do obliczania wartości wielomianu postaci:

$$w(\lambda) = \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n$$

gdzie współczynniki $a_n \in \mathbf{C}$ oraz $n = 0, 1, \dots, N$.

Poniżej znajduje się algorytm obliczania $w(z)$ dla $z = x + iy$:

```
p = 2x
q = -(x2 + y2)
bN = aN
for n = N - 1, ..., 1:
    bn = an + p;    bn+1 + qbn+2
end
u = a1 + x;    b2 + qb3
v = yb2
w(z) = u + iv
```

4 Sposób implementacji

W celu wykonania zadania implementowaliśmy metody szukające miejsc zerowych oraz funkcje pomocnicze i skrypty w programie *MATlab*. Każdy z nas przygotował swoją funkcję będącą implementacją zadanej metody - która przyjmowała wielomian trygonometryczny, bądź jego współczynniki, a zwracała otrzymany punkt zerowy wraz z liczbą iteracji, a także własny skrypt wyczerpujący opisane poniżej przykłady.

Aby zwizualizować szybkość zbieżności metod dla poszczególnych przygotowaliśmy także funkcje przygotowujące wykresy szybkości zbieżności metod dla różnych punktów startowych oraz inne pomocnicze funkcje, takie jak funkcja implementująca algorytm wyznaczający wartość wielomianu lub jego pochodnych przy użyciu algorytmu Goertzela, a także rysujące wykresy funkcji.

Przy implementacji funkcji wyznaczającej wartości wielomianu lub jego pochodnych korzystaliśmy ze wzoru:

$$a_n \cos(nx) = a_n \frac{1}{2} e^{inx} + a_n \frac{1}{2} e^{-inx}$$

5 Szybkość zbieżności metod

Następne po implementacji metod w *MATlabie* porównaliśmy szybkość zbieżności zadanych metod używając takich samych wielomianów, sprawdzając liczbę

wymaganych iteracji w celu osiągnięcia zakładanego przybliżenia miejsca zerowego.

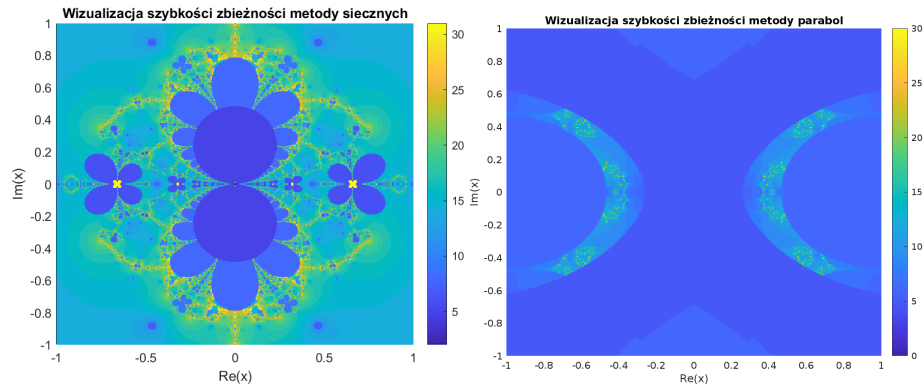
Wpierw, aby zbadać zadane metody poszukiwania miejsc zerowych wykonaliśmy wizualizacje szybkości zbieżności dla zespolonych punktów startowych z przedziałów ze zbioru $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in (-1, 1)\}$

W przypadku metody siecznych, która wymaga, aby zostały podane dwa miejsca startowe, wybraliśmy drugi punkt startowy jako $x_2 = 0$, aby wyniki były w pewien sposób ujednolicone.

Aby wyniki były porównywalne przyjęliśmy również ten sam warunek stopu oraz maksymalną liczbę iteracji. Każda metoda przy wizualizacjach zatrzymywała się z sukcesem po osiągnięciu różnicy kolejnych wartości przybliżenia mniejszej niż 0.01 lub z niepowodzeniem w przypadku wykonania więcej niż 30 iteracji.

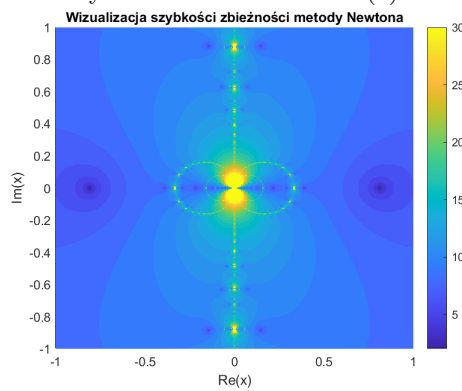
Przykład 1.

Bardzo prosty przykład - wielomian postaci $f(x) = 1 + \cos(x)$



(a) metoda siecznych

(b) metoda parabol

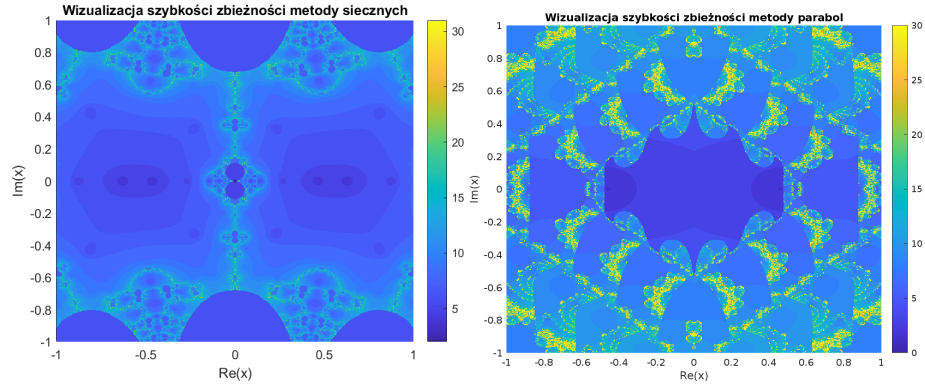


(c) metoda Newtona

Widać, że w tym przypadku najlepiej sprawdziła się metoda parabol oraz metoda Newtona. Metoda siecznych w wielu przypadkach nie zwróciła poprawnego wyniku, bądź w znacznie większej liczbie iteracji.

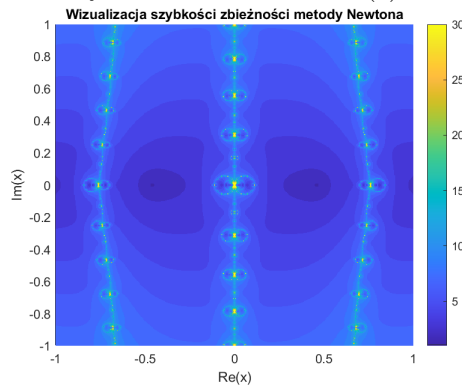
Przykład 2.

Wielomian postaci $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$, gdzie a_k to kolejne liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6



(a) metoda siecznych

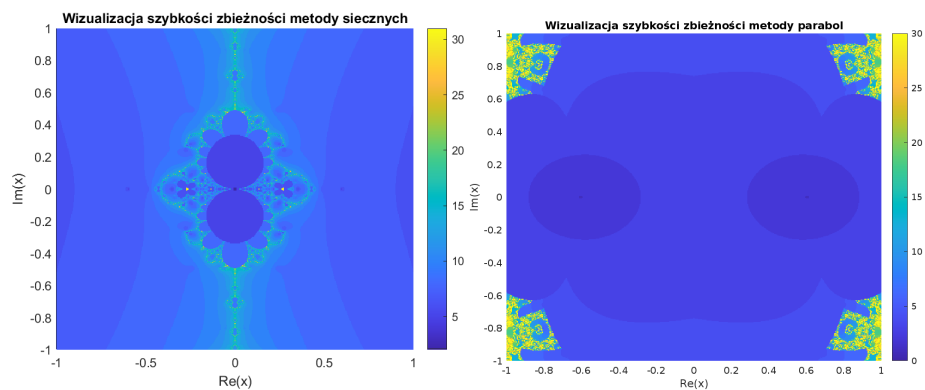
(b) metoda parabol



(c) metoda Newtona

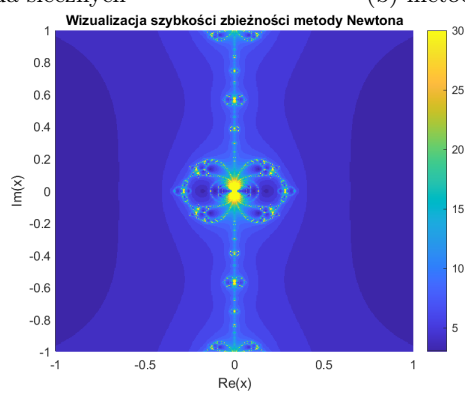
Przykład 3.

Wielomian postaci $f(x) = -1 + \cos(x) + \frac{1}{2}\cos 2x$



(a) metoda siecznych

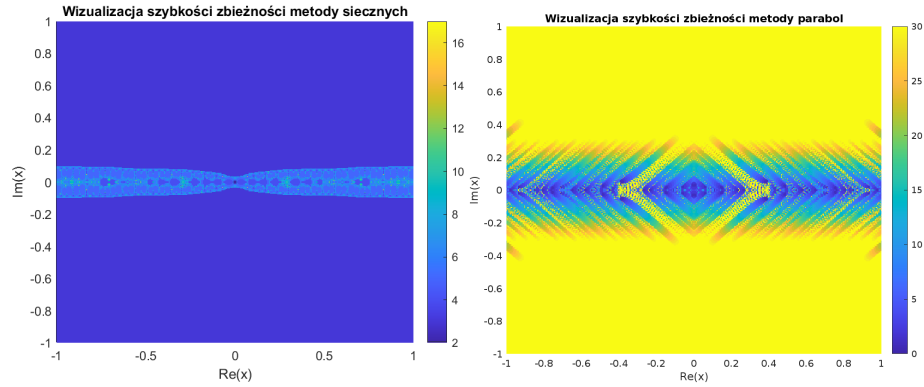
(b) metoda parabol



(c) metoda Newtona

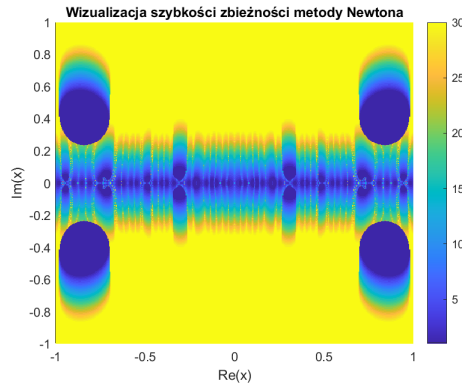
Przykład 4.

Wielomian postaci $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$, gdzie a_k dla $k = 1, 2, \dots, 100$ to liczby losowe z przedziału $(-1, 1)$



(a) metoda siecznych

(b) metoda parabol

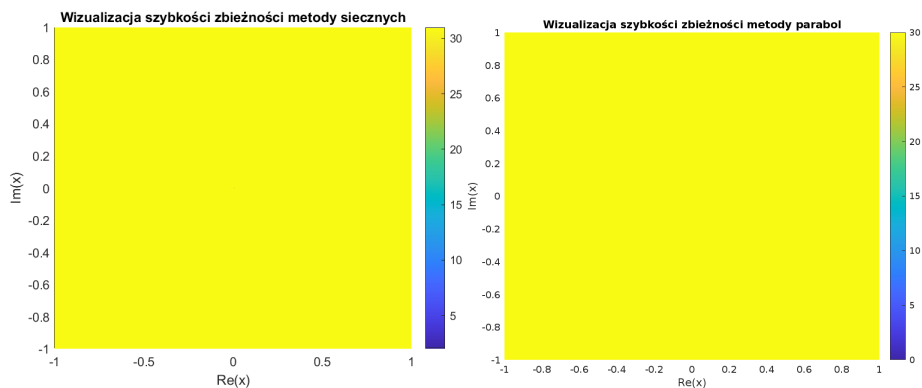


(c) metoda Newtona

W tym przypadku zdecydowanie najlepiej wypadła metoda siecznych - miejsca w których nie znaleziono miejsca zerowego praktycznie nie występują.

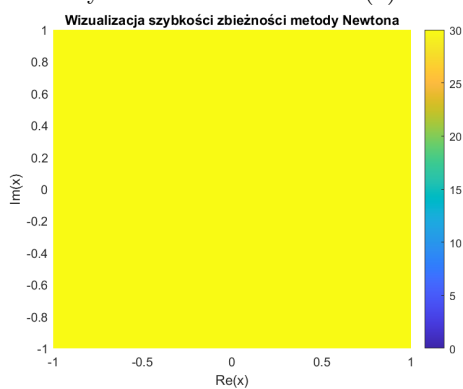
Przykład 5.

Wielomian postaci $f(x) = 1 \cdot \cos(0) = 1$ - wielomian stały, bez miejsc zerowych



(a) metoda siecznych

(b) metoda parabol



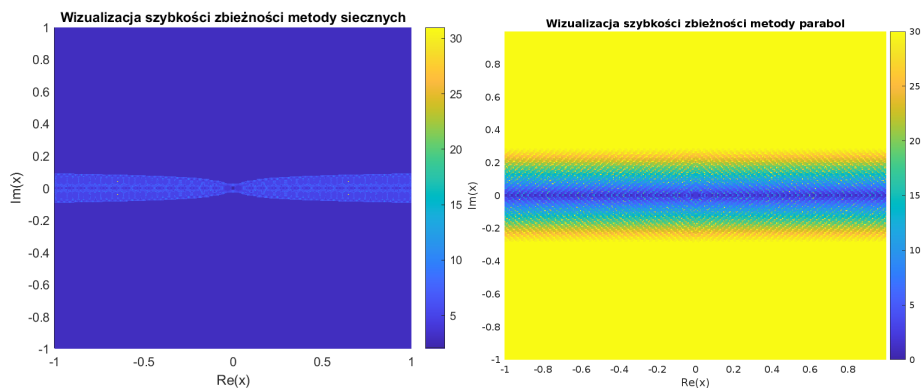
(c) metoda Newtona

Ten w miarę oczywisty przykład ma na celu pokazanie, że nasze metody nie znajdują miejsc zerowych tam gdzie ich nie ma.

W tym przypadku dla dowolnego punktu startowego żadna z metod nie jest zbieżna. Jest to oczywiste, gdyż zadana funkcja jest stała i nie ma miejsc zerowych.

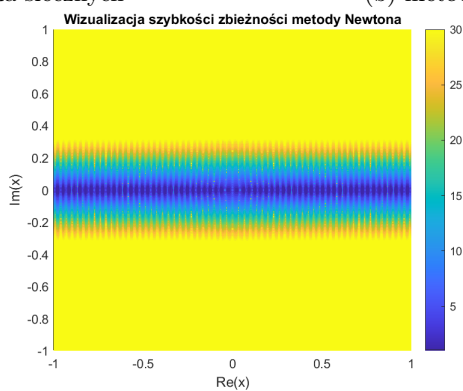
Przykład 6.

Wielomian, postaci $f(x) = \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot \cos(kx)$, gdzie $n = 100$



(a) metoda siecznych

(b) metoda parabol



(c) metoda Newtona

W tym przypadku, podobnie jak w przykładzie 4. najlepiej sprawdziła się metoda siecznych, gdzie nie było prawie żadnych przypadków zatrzymania funkcji przez zbyt długie obliczenia. Mimo to, dla liczb o małej wartości urojonej lepiej sprawdzają się metody Newtona i parabol.

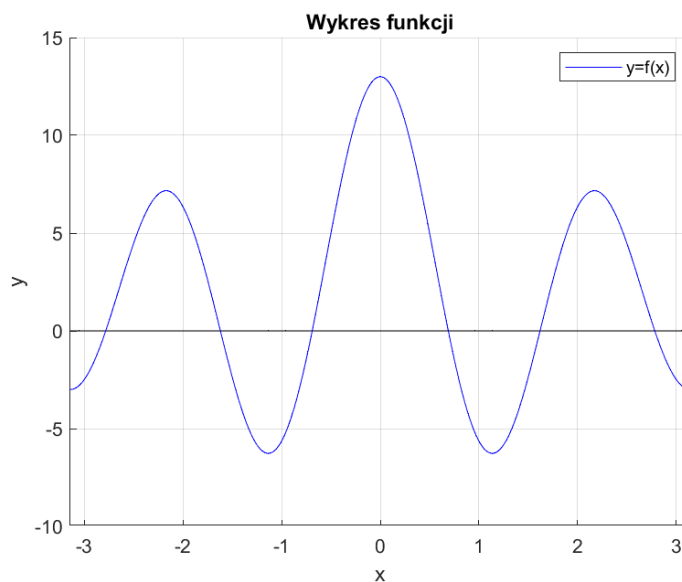
6 Analiza kolejnych przykładów

Aby sprawdzić zbieżność metod dla bardziej specyficznych wielomianów i bardziej oddalonych punktów startowych, sprawdziliśmy również wydajność i celność poszczególnych metod poszukiwania miejsc zerowych na ręcznie wybranych przykładach.

Przyjęliśmy tutaj bardziej wymagające założenia - dokładność rzędu 10^{-16} oraz maksymalną liczbę iteracji jako 10^6

Przykład 7

Wielomian postaci $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \cos(kx)$, gdzie współczynniki to $[2, 1, 3, 7]^T$



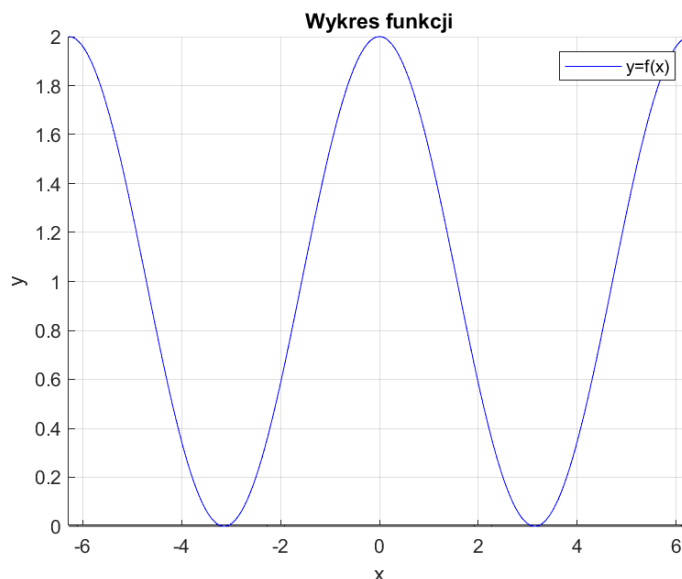
Rysunek 7: wykres wielomianu ze współczynnikami $[2, 1, 3, 7]^T$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	1	1	(1, 0)
Znalezione miejsce zerowe x	1.620252	0.6896	0.6896
Liczba iteracji	5	7	9
Wartość funkcji $f(x)$	0	0	0

Dla tego w miarę standardowego wielomianu wszystkie trzy funkcje sprawdziły się dobrze, widać jednak, że najwolniejszą, pod względem liczby iteracji jest metoda siecznych.

Przykład 8

Wielomian postaci $f(x) = 1 + \cos(x)$, przy niesprzyjających punktach startowych - $x_1 = 10^{-10}$, $x_2 = 2\pi$



Rysunek 8: wykres wielomianu $f(x) = 1 + \cos(x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	10^{-7}	10^{-7}	$(10^{-10}, 2\pi)$
Znalezione miejsce zerowe x	3.141593	$7.5000e + 05$	-
Liczba iteracji	7	7	10^9
Wartość funkcji	0	$-1.6288e - 10$	-

Metoda siecznych dla tego zestawu miejsc startowych sprawuje się bardzo źle, o ile miejsca zerowe tej funkcji istnieją, to dwa punkty startowe są tak podane, że pierwsza sieczna jest prawie równoległa do osi OX.

Wydażność przy niesprzyjających punktach startowych zespolonych - $x_1 = 0.9i$, $x_2 = 0$

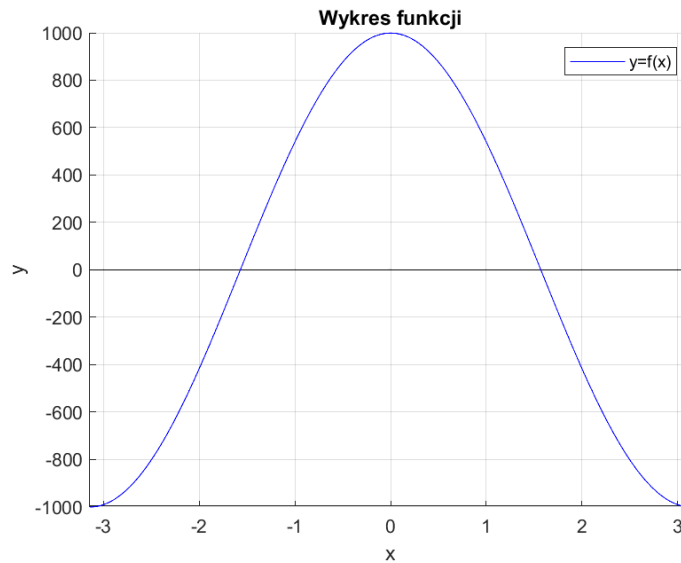
Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy	$0.9i$	$0.9i$	$(0.9i, 1)$
Znalezione miejsce zerowe x	-3.141593	-	3.1416
Liczba iteracji	10	10^6	75
Wartość funkcji $f(x)$	0	-	$1.7243e - 21i$

Brak zbieżności w przypadku metody Newtona w drugim zestawie miejsc startowych nie jest zaskoczeniem - podobne wnioski można było wyciągnąć z wizualizacji w Przykładzie 1. Podobne wnioski z tego przykładu można wyciągnąć na temat metody siecznych, która tutaj również jest mało efektywna.

Co ciekawe, bazowa funkcja MATLABa *fzero* dla zadanej funkcji nie jest zbieżna po 4251 iteracjach dla punktu startowego równego 10^{-7} - może to oznaczać, że dla tego konkretnego przykładu zaimplementowane przez nas metody są lepsze.

Przykład 9

Wielomian postaci $f(x) = -1 + 1000 \cdot \cos(x)$



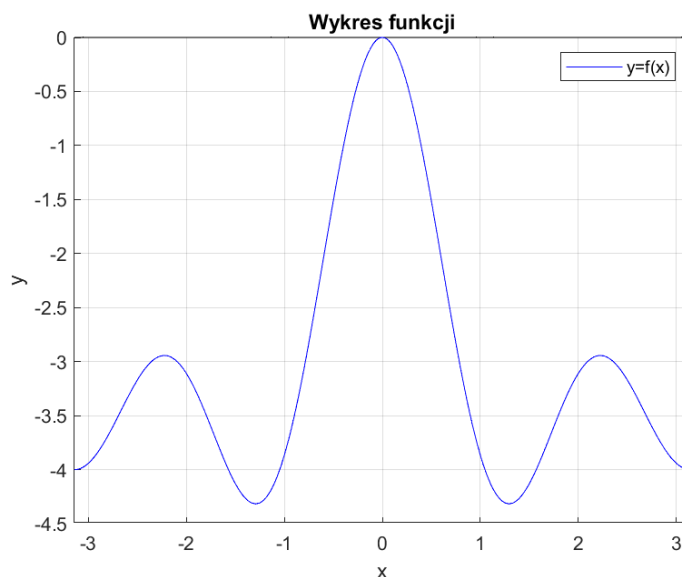
Rysunek 9: wykres wielomianu $f(x) = -1 + 1000 \cdot \cos(x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	4	1	(4, 1)
Znalezione miejsce zerowe x	4.713389	1.5698	1.5698
Liczba iteracji	5	5	9
Wartość funkcji $f(x)$	$8.903989e - 14$	$-1.1013e - 13$	$-1.1013e - 13$

Jak widać z tego przykładu, stosunkowo dużych wartości funkcji, metody poradziły sobie dobrze, dla zadanej funkcji wszystkie metody są zbieżne w dość małej liczbie iteracji.

Przykład 10

Wielomian postaci $f(x) = -3 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$



Rysunek 10: wykres wielomianu $f(x) = -3 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

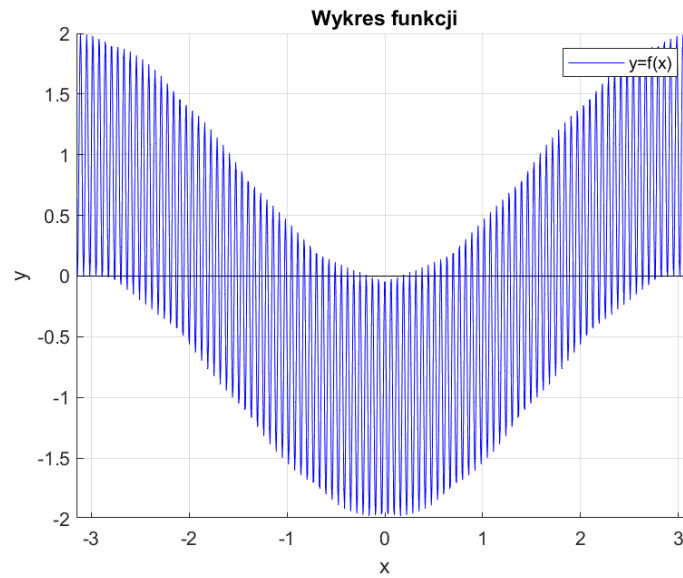
Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	0.9i	2	(2, 1)
Znalezione miejsce zerowe x	$-9.614497e-09$	$-6.4202e-09$	6.2832
Liczba iteracji	9	29	41
Wartość funkcji $f(x)$	0	0	0

Co ciekawe, w przypadku metody siecznych, mimo że najbliższym miejscem zerowym dla podanych miejsc startowych jest $x = 0$, to odnalezione miejsce zerowe ma wartość 2π .

Podobnie jak w przykładzie 8, funkcja MATLABa *fzero* nie znajduje miejsca zerowego dla punktu startowego równego 0.

Przykład 11

Wielomian postaci $f(x) = -\cos(x) - \cos(2x) + \cos(100x)$



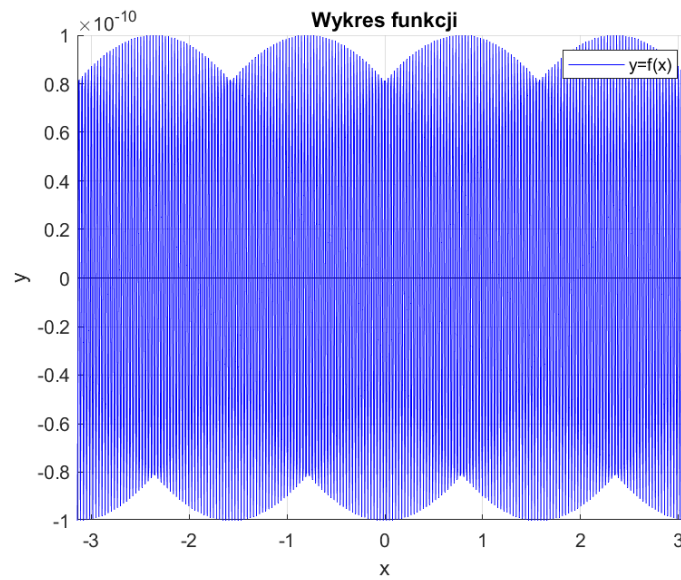
Rysunek 11: wykres wielomianu $f(x) = -\cos(x) - \cos(2x) + \cos(100x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	1	3	(3,0)
Znalezione miejsce zerowe x	1.556654	2.9991	-27.6293
Liczba iteracji	9	4	46
Wartość funkcji $f(x)$	$-7.771561e-16$	$4.2633e-14$	$-1.2457e-13$

W tym przypadku metoda siecznych jest najmniej efektywna.

Przykład 12

Wielomian postaci $f(x) = 10^{-10}\cos(200x)$

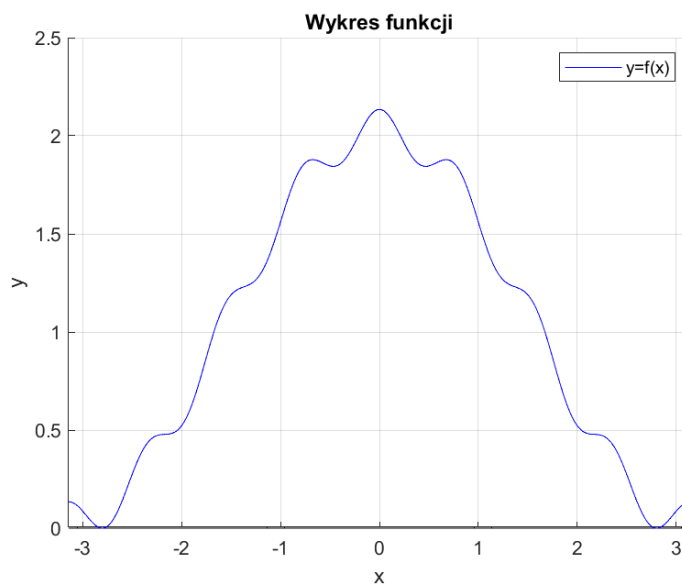


Rysunek 12: wykres wielomianu $f(x) = 10^{-10}\cos(200x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	5	5	(5, 0)
Znalezione miejsce zerowe x	5.185996	4.9966	98.5655
Liczba iteracji	12	5	33
Wartość funkcji $f(x)$	$1.660824e - 24$	$-7.7936e - 244$	$-1.3952e - 22$

Przykład 13

Wielomian postaci $f(x) = 1.0341 + \cos(x) + 0.1\cos(8x)$



Rysunek 13: wykres wielomianu $f(x) = 1.0341 + \cos(x) + 0.1\cos(8x)$

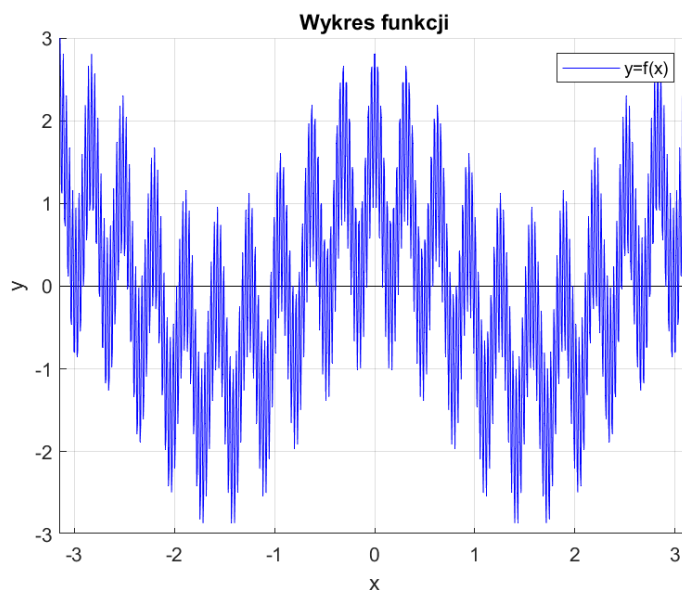
Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	25	25	(25, 0)
Znalezione miejsce zerowe x	$2.861345e + 01$	649.7625	$8.9719e + 163$
Liczba iteracji	48	100000(<i>limit</i>)	15248
Wartość funkcji $f(x)$	0	0.1472	0.0180

Jak widać odnalezione miejsca zerowe za pomocą metody siecznych są bardzo duże, a metoda Newtona nie znalazła pierwiastka wcale - prawdopodobnie wynika to z tego, że wartości danej funkcji są w większości dodatnie, a kształt wykresu nie jest zbyt przyjazny dla metod wykorzystujących sieczne i styczne.

Metoda *fzero* również w tym przypadku nie jest zbieżna - najprawdopodobniej dlatego, że poszukuje ona wprawdzie przedziału w którym zmienia się znak funkcji.

Przykład 14

Wielomian postaci $f(x) = \cos(2x) + \cos(20x) + \cos(200x)$



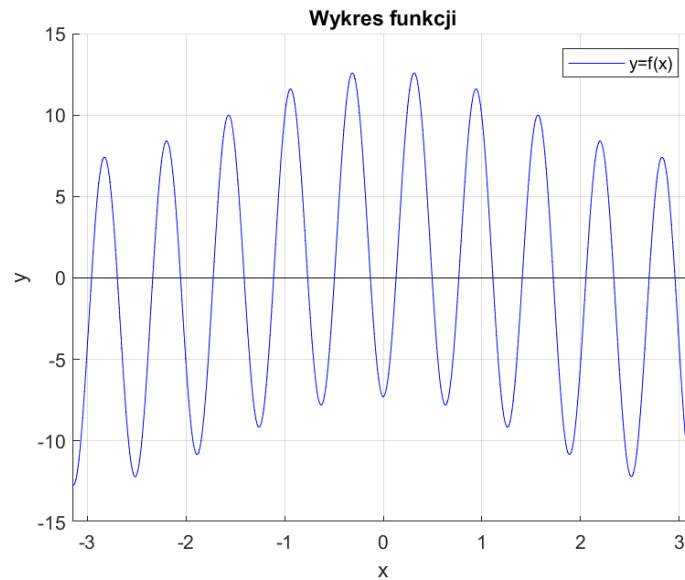
Rysunek 14: wykres wielomianu $f(x) = \cos(2x) + \cos(20x) + \cos(200x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	0.1	0.1	(0.1, 1)
Znalezione miejsce zerowe x	$2.667020e - 01$	0.1046	103.8701
Liczba iteracji	14	100000(<i>limit</i>)	34
Wartość funkcji $f(x)$	$-8.548717e - 15$	$-9.2371e - 14$	$-2.1672e - 13$

Metoda Newtona w tym przypadku nie wyznaczyła poprawnego miejsca zerowego - wartości pochodnych tej funkcji są bardzo duże, co może wpływać na słabą efektywność tej metody w konkretnym przypadku.

Przykład 15

Wielomian postaci $f(x) = \cos(-10x) + \operatorname{ecos}(x)$



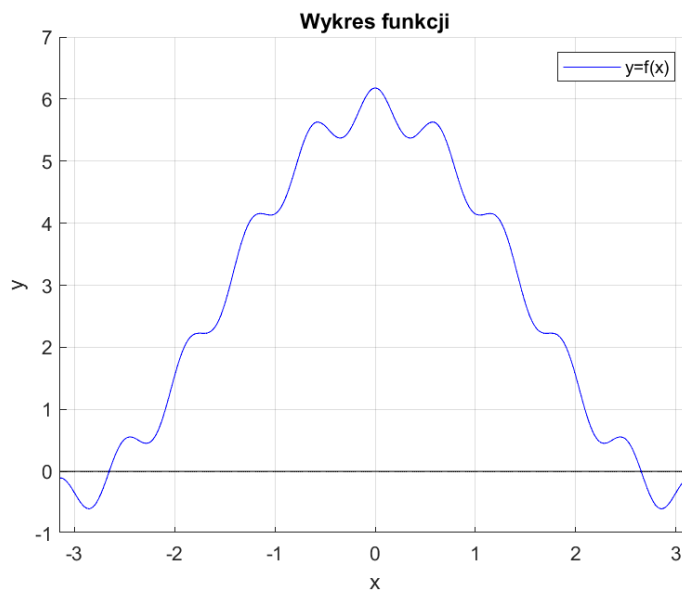
Rysunek 15: wykres wielomianu $f(x) = \cos(-10x) + \operatorname{ecos}(x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	12	1	(0, 1)
Znalezione miejsce zerowe x	$1.207098e + 01$	1.1116	0.4954
Liczba iteracji	4	6	16
Wartość funkcji $f(x)$	$7.105427e - 15$	$-9.7700e - 15$	$3.5527e - 15$

Ponownie, metoda siecznych jest najmniej efektywna dla tego konkretnego przypadku.

Przykład 16

Wielomian postaci $f(x) = e + \pi \cos(x) + \frac{1}{\pi} \cos(10x)$



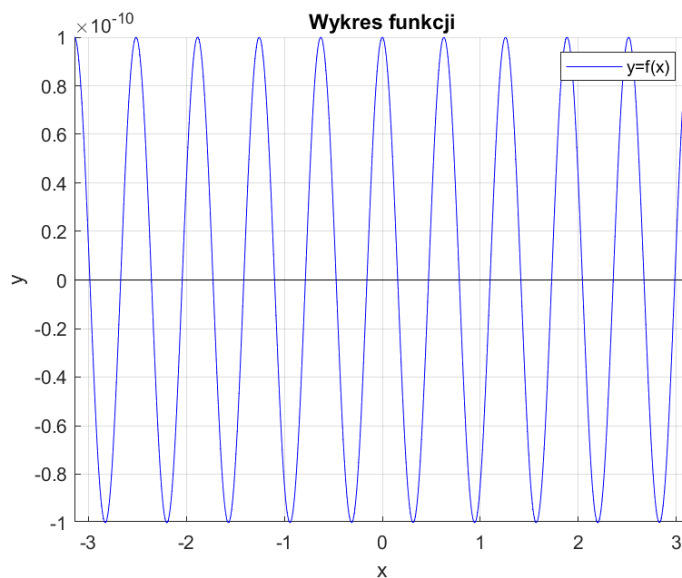
Rysunek 16: wykres wielomianu $f(x) = e + \pi \cos(x) + \frac{1}{\pi} \cos(10x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	1	1	(1, 0)
Znalezione miejsce zerowe x	—	8.9360	3.6304
Liczba iteracji	1000000(<i>limit</i>)	20	17
Wartość funkcji $f(x)$	—	$-1.2212e - 15$	0

Metoda parabol okazała się niezbieżna w konkretnym przypadku mimo, że zarówno metoda siecznych i stycznym sprawdziły się całkiem dobrze.

Przykład 17

Wielomian postaci $f(x) = 10^{-10}\cos(10x)$



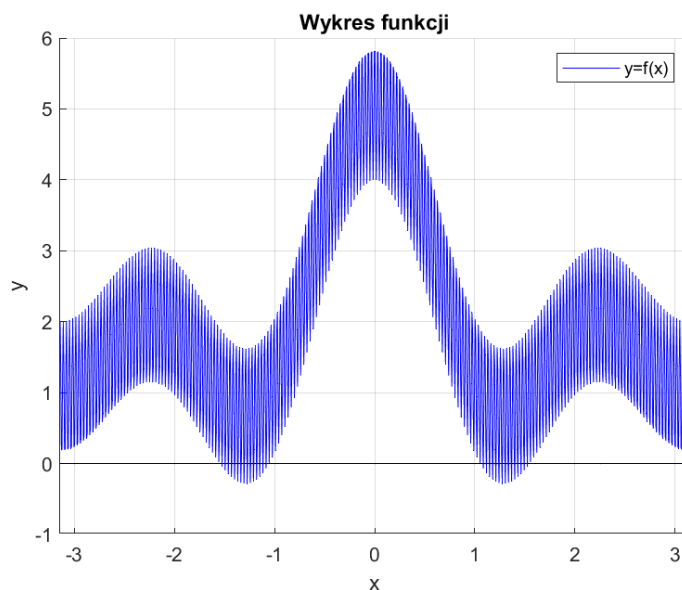
Rysunek 17: wykres wielomianu $f(x) = 10^{-10}\cos(10x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	1	1	(1, 0)
Znalezione miejsce zerowe x	1.099557	1.0996	-4.5553
Liczba iteracji	5	6	17
Wartość funkcji $f(x)$	$-6.462349e - 26$	$-6.4623e - 26$	$1.8095e - 25$

Ponownie metoda siecznych okazuje się najmniej efektywna. Co więcej, metoda *fzero* z pakietu MATLAB osiągnęła w tym przypadku miejsce zerowe przy podobnym miejscu zerowym z 16 iteracjami, co stanowi gorszy wynik niż zaimplementowane przez nas metody Newtona i parabol.

Przykład 18

Wielomian postaci $y = 2 + \cos(x) + \cos(x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(100x)$



Rysunek 18: wykres wielomianu $y = 2 + \cos(x) + \cos(x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(100x)$

Wyniki			
Metoda szukania pierwiastków	parabol	Newtona	siecznych
Punkt startowy x_1	1	1	(0, 1)
Znalezione miejsce zerowe x	—	1.1817	1.3705
Liczba iteracji	1000000(<i>limit</i>)	115	13
Wartość funkcji $f(x)$	—	$4.4409e - 16$	$7.5495e - 15$

Metoda parabol ponownie okazała się nieskuteczna w tym przypadku. Co ciekawe, metoda siecznych dla konkretnych przykładowych danych okazuje się najefektywniejsza.

7 Podsumowanie

Jak się okazuje zaimplementowane przez nas metody szukania miejsc zerowych funkcji sprawują się bardzo dobrze - w niektórych przypadkach nawet lepiej niż wbudowane funkcje programu MATLAB służące do wyznaczania miejsc zerowych. Badane przez nas wielomiany trygonometryczne zostały również dobrze wyznaczone przez algorytm Goertzela.

Na podanych przykładach metody Newtona oraz parabol wymagają znacznie mniejszej liczby iteracji, aby osiągnąć satysfakcjonujące przybliżenie w porównaniu do metody siecznych mimo, że metoda parabol częściej była zbieżna.

Metoda siecznych okazała się jednak dużo prostsza w implementacji, gdyż nie wymagała dodatkowej implementacji wyznaczania pochodnych wielomianów, a porównując czasowe wykonywanie poszukiwania miejsc zerowych sprawowała się podobnie do pozostałych metod.

8 Literatura

- Notatki z wykładu z przedmiotu Metody Numeryczne
- *D. Kincaid, W. Cheney - Analiza numeryczna* Warszawa 2005