

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»

Лабораторная работа №3
по курсу «Вычислительная физика»
Тема: «Формулы численного дифференцирования»
Вариант 6

Выполнили: студенты группы ФН4-72Б
Мистрюкова Л.А., Хижик А.И.
Проверил: доцент, к.физ.-мат.н.
Хасаншин Р.Х.

Москва, 2019

Оглавление

1.	Теоретическая часть	3
1.1.	Задача численного дифференцирования	3
1.2.	Формулы численного дифференцирования	3
2.	Постановка задачи	5
3.	Вычисление производных	6
4.	Вывод	10

1. Теоретическая часть

1.1. Задача численного дифференцирования

К численному дифференцированию приходится прибегать в случае, когда функция $f(x)$, для которой ищется производная, задана таблично или функциональная зависимость x и $f(x)$ имеет сложное аналитическое выражение.

В этих случаях вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную от $f(x)$ приближённо равной производной $\varphi(x)$. Естественно, при этом производная от $f(x)$ будет найдена с некоторой погрешностью.

Функцию $f(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

где $R(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Дифференцируя это тождество k раз (предполагая, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные k -го порядка), получим

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Так как за приближённое значение $f^{(k)}(x)$ принимается $\varphi^{(k)}(x)$, то погрешность есть $R^{(k)}(x)$.

1.2. Формулы численного дифференцирования

Имеем функцию $f(x)$ непрерывную на $[a, b]$. Введем на $[a, b]$ сетку:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, \quad x_i \in [a, b], \quad i = \overline{0, n},$$

$$f_i = f(x_i).$$

Если принять, что узлы равноотстоящие и шаг сетки равен h , т.е.

$$x_i = x_0 \pm ih, \quad h > 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (1)$$

то будут верны следующие формулы для расчета первой производной в узлах:

1. Если $f(x) \in C_2[x_0, x_1]$, то на отрезке $[x_0, x_1]$ существует такая точка ξ , что

$$f'_o = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''_\xi. \quad (2)$$

2. Если $f(x) \in C_3[x_{-1}, x_1]$, то на $[x_{-1}, x_1]$ существует такая точка ξ , что

$$f'_o = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}_\xi. \quad (3)$$

3. Если $f(x) \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то существует такая точка ξ , что

$$f''_o = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}_\xi. \quad (4)$$

Случай интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x)} = \sum_{k=0}^n f_k \prod_{i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x).$$

2. Постановка задачи

Получить аппроксимации производных m -го порядка, используя интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона n -й степени.

- При $m = 1$, $n = 3$ в точке x_0 ;
- При $m = 2$, $n = 4$ в точке x_2 .

3. Вычисление производных

Для $n = 3$: $f(x) = L_3(x) + R_3(x)$, где

$$L_3(x) = \sum_{k=0}^3 f_k \prod_{i \neq k}^3 \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$

$$+ f_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \omega_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Первая производная $f(x)$:

$$f'(x) = L'_3(x) + R'_3(x) =$$

$$= f_0 \frac{(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ f_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$

$$+ f_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} +$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} ((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)).$$

Значение в точке x_0 :

$$f'(x_0) =$$

$$= f_0 \frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_3) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ f_2 \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$

$$+ f_3 \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} +$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3).$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h} (-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4} h^3.$$

Для $n = 4$:

$$L_4(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} +$$

$$+ f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$$

$$+ f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} +$$

$$+ f_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} +$$

$$+ f_4 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)},$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Первая производная $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= L'_4(x) + R'_4(x) = \\ &= f_0\left(\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \Big) + f_1\left(\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \Big) + f_2\left(\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \Big) + \\ &+ f_3\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \Big) + f_4\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \Big) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)). \end{aligned}$$

Вторая производная $f(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= L''_4(x) + R''_4(x) = \\ &= f_0\left(\frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_3) + (x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \Big) + \\ &+ f_1\left(\frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_4) + (x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \Big) + \\ &+ f_2\left(\frac{(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \Big) + f_3\left(\frac{(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1) + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \Big) + \\ &+ f_4\left(\frac{(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} + \right. \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \Big) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)). \end{aligned}$$

Значение в точке x_2 :

$$\begin{aligned}
f''(x_2) = &= f_0 \left(\frac{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} + \right. \\
&+ \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} \Big) + \\
&+ f_1 \left(\frac{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \right. \\
&+ \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \Big) + \\
&+ f_2 \left(\frac{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \right. \\
&+ \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \\
&+ \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \Big) + \\
&+ f_3 \left(\frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + \right. \\
&+ \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \Big) + \\
&+ f_4 \left(\frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} + \right. \\
&+ \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \Big) + \\
&+ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} ((x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + \\
&+ (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)).
\end{aligned}$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2} [-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4].$$

Случай интерполяционного многочлена Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^n f(x_0; \dots; x_k) \omega_k(x).$$

Для $n = 3$: $f(x) = P_3(x) + R_3(x)$, где

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f_0 + \sum_{k=1}^3 f(x_0; \dots; x_k) \omega_k(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3), \\ R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \omega_4(x). \end{aligned}$$

Первая производная $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= P'_3(x) + R'_3(x) = f(x_0; x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1))f(x_0; x_1; x_2) + \\ &+ ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \\ &+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} ((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)). \end{aligned}$$

Значение в точке x_0 :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= f(x_0; x_1) + (x_0 - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \\ &+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3). \end{aligned}$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$

$$f'(x_0) = f(x_0; x_1) - hf(x_0; x_1; x_2) + 2h^2f(x_0; x_1; x_2; x_3) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3.$$

Для $n = 4$:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \times \\ &\times f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) \\ R_4(x) &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4). \end{aligned}$$

Вторая производная $f(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f(x_0; x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1))f(x_0; x_1; x_2) + \\ &+ ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \\ &+ ((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) + \\ &+ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} ((x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + \\ &+ (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_4) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_4) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \\ &+ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)). \end{aligned}$$

Значение в точке x_2 :

$$\begin{aligned}
f''(x_2) = & f(x_0; x_1) + ((x_2 - x_0) + (x_2 - x_1))f(x_0; x_1; x_2) + \\
& + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \\
& + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) + \\
& + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - \\
& x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - \\
& x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)).
\end{aligned}$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,

$$f''(x_2) = f(x_0; x_1) + 3hf(x_0; x_1; x_2) + 2h^2f(x_0; x_1; x_2; x_3) - 2h^3f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4).$$

4. Вывод

В данной работе были получены формулы численного дифференцирования первого и второго порядков для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$ в случае интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}[-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3,$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2}[-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4].$$

$$f'(x_0) = f(x_0; x_1) - hf(x_0; x_1; x_2) + 2h^2f(x_0; x_1; x_2; x_3) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3,$$

$$f''(x_2) = f(x_0; x_1) + 3hf(x_0; x_1; x_2) + 2h^2f(x_0; x_1; x_2; x_3) - 2h^3f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4).$$