

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет «Фундаментальные науки»

Лабораторная работа №9  
по курсу «Вычислительная физика»  
Тема: «Многошаговые численные методы решения задачи Коши»  
**Вариант 6**

Выполнили: студенты группы ФН4-72Б  
Хижик А.И., Мистрюкова Л.А.  
Проверил: доцент, к.физ.-мат.н.  
Хасаншин Р.Х.

Москва, 2019

## Оглавление

1.	Теоретическая часть . . . . .	3
1.1.	Введение . . . . .	3
1.2.	Построение разностной схемы методом неопределённых коэффициентов . . .	3
1.3.	Сходимость $k$ -шаговых методов . . . . .	4
1.4.	Построение разностных методов с помощью интерполяционных многочленов	4
1.5.	Схема предиктор-корректор . . . . .	6
2.	Постановка задачи . . . . .	8
3.	Программа . . . . .	9
4.	Результаты вычислений . . . . .	11
4.1.	Задание А . . . . .	11
4.2.	Задание Б . . . . .	12
5.	Вывод . . . . .	13

## 1. Теоретическая часть

### 1.1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для ДУ

$$u' = f(x, u(x)), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(a) = u_0. \quad (2)$$

Введем на  $[a, b]$  равномерную сетку  $\omega_h = \{x_n = a + nh, n = \overline{0, N_h}\}$ ,  $N_h = \frac{b-a}{h}$ .

В общем случае для решения задачи (1-2) рассматривают функцию

$$u_{n+k} = F(f; x_{n+k}, \dots, x_n; u_{n+k}, \dots, u_n). \quad (3)$$

В методах типа (3) для нахождения значения сеточной функции в новой узловой точке необходимо знать ее значение в  $k$  предшествующих узловых точках. Такие методы называются  $k$ -шаговыми.

Из класса методов (3) выделим класс линейных многошаговых методов (ЛММ):

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i u_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, u_{n+i}), \quad (4)$$

здесь  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  - постоянные,  $\alpha_k \neq 0$ ,  $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ . При  $\beta_k = 0$  метод называется явным линейным  $k$ -шаговым, в случае  $\beta_k \neq 0$  метод называется неявным линейным  $k$ -шаговым.

Область решения (4) зависит от  $k$  параметров. Для выделения единственного решения на сеточную функцию накладываются дополнительные условия:

$$u_0 = g_0, \dots, u_{k-1} = g_{k-1}. \quad (5)$$

При  $n = 0$  совместное решение (4-5) позволяет найти значение сеточной функции  $u_k$  в точке  $x_k$ . Используя  $g_1, \dots, g_{k-1}, u_k$  при  $n = 1$  из (4-5) можно найти  $u_{k+1}$  и так далее.

### 1.2. Построение разностной схемы методом неопределённых коэффициентов

Коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  выбирают так, чтобы невязка, получающаяся при подстановке точного решения в разностное уравнение (4) была порядка  $O(h^{s+1})$ , т.е.

$$\rho_{s+1} = \sum_{i=0}^k \alpha_i u(x_{n+i}) - h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, u(x_{n+i})) = O(h^{s+1}),$$

$$u(x_{n+i}) = \sum_{j=0}^{s+1} \frac{(ih)^j}{j!} u^{(j)}(x_n),$$

$$u'(x_{n+i}) = \sum_{j=0}^s \frac{(ih)^j}{j!} u^{(j+1)}(x_n).$$

Подставив эти разложения в выражение для невязки, получим ее разложение по степеням  $h$ :

$$\rho_{s+1} = \left( \sum_{i=0}^k \alpha_i \right) u(x_n) + h \left( \sum_{i=1}^k i \alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i \right) u'(x_n) + \dots + \frac{h^s}{s!} \left( \sum_{i=1}^k i^s \alpha_i - s \sum_{i=1}^k i^{s-1} \beta_i \right) u^{(s)} + O(h^{s+1}),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i = 0, \\ \sum_{i=1}^k i \alpha_i - \sum_{i=0}^k \beta_i = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^k i^s \alpha_i - s \sum_{i=1}^k i^{s-1} \beta_i = 0. \end{cases}$$

$s$  – степень разностного уравнения (4), зависит только от коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и никак не зависит от исходного уравнения (1).

Для того, чтобы решение (4) не изменялось при умножении на константу, вводят условия нормировки

$$\alpha_k = 1, \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^k \beta_i = 1. \quad (7)$$

Определив  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  из (6), построим разностную схему нужного нам порядка. Многомерная схема сходится, если  $\max_{k \leq n \leq N_h} |u(x_n) - u_n| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  и  $\max_{0 \leq n \leq k-1} |u(x_n) - u_n| \rightarrow 0$ .

Для сходимости схемы необходимо, чтобы она была аппроксимирующей и устойчивой.

### 1.3. Сходимость $k$ -шаговых методов

Рассмотрим характеристический многочлен (4):

$$V(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i,$$

Среди методов (4) необходимо отбросить те, характеристический многочлен которых имеет корни  $z > 1$  либо кратные корни равные нулю.

Для устойчивой схемы корень  $z = 1$  – главный, остальные – посторонние. Если все посторонние корни находятся внутри единичного круга с центром в нуле, то схема сильно устойчивая. Если некоторые посторонние корни находятся внутри единичного круга, то схема слабо устойчива.

### 1.4. Построение разностных методов с помощью интерполяционных многочленов

Широкое распространение получили явные и неявные схемы Адамса:

- Явная схема Адамса

$$u_{n+1} - u_n = h \sum_{i=0}^n B_{ki} f(x_{n-i}, u_{n-i}); \quad (8)$$

- Неявная схема Адамса

$$u_{n+1} - u_n = h \sum_{i=0}^k b_{ki} f(x_{n+1-i}, u_{n+1-i}). \quad (9)$$

$k$ -шаговые методы могут быть получены не только из дифференциальных уравнений, но и из следующих интегральных соотношений

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} du = u_{n+1} - u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} u'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx. \quad (10)$$

### ИП Лагранжа

Рассмотрим правую часть уравнения (1) как функцию одного аргумента  $x$ , аппроксимируем её с помощью ИП Лагранжа в узловых точках  $x_m$ ,  $m = \overline{n-k, n}$ ,

$$\begin{aligned} u'(x) &= L_{nk}(x) + r_{nk}(x) = \sum_{i=0}^k f(x_{n-i}, u(x_{n+i})) l_{ki}(x) + \frac{u^{(k+2)}(\xi(x))}{(k+1)!} \prod_{m=n-k}^n (x - x_m), \\ l_{ki} &= \prod_{m=n-k, m \neq n-i} \frac{x - x_m}{x_{n-i} - x_m}, \\ u(x_{n+1}) - u(x_n) &= h \sum_{i=0}^k B_{ki} f(x_{n-i}, u(x_{n-i})) + \rho_{n+1}, \\ B_{ki} &= \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} l_{ki}(x) dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_0^1 \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{t+i} dt, \\ \rho_{n+1} &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{u^{(k+2)}(\xi(x))}{(k+1)!} \prod_{m=n-k}^n (x - x_m) dx = O(h^{k+2}). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналог явной схемы Адамса:

$$u(x_{n+1}) - u(x_n) = h \sum_{i=0}^k B_{ki} f(x_{n-i}, u_{n-i}). \quad (12)$$

Для построения неявной схемы Адамса рассмотрим узловые точки  $x_m$ ,  $m = \overline{n-k+1, n+1}$  и представим производные с помощью ИП Лагранжа:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{i=0}^k f(x_{n-i+1}, u(x_{n-i+1})) l_{k+i}(x) + \frac{u^{(k+2)}(\xi(x))}{(k+1)!} \prod_{m=n-k+1}^{n+1} (x - x_m), \\ u(x_{n+1}) - u(x_n) &= h \sum_{i=0}^k b_{ki} f(x_{n-i+1}, u(x_{n-i+1})) + \rho_{n+1}, \\ b_{ki} &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_{ki} dx = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int_0^1 \frac{(t-1)t \dots (t+k-2)}{t+i-1} dt, \\ \rho_{n+1} &= O(h^{k+2}), \\ u_{n+1} - u_n &= h \sum_{i=0}^n b_{ki} f(x_{n-i+1}, u_{n-i+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

## ИП Ньютона

Рассмотрим аппроксимацию правой части уравнения (1) с помощью ИП Ньютона для аппроксимации назад в узловых точках  $\{x_m\}$ ,  $m = \overline{n-k, n}$ ,  $\frac{x-x_h}{h} = t$ ,  $dx = hdt$ ,

$$P_{nk}(x) = P_{nk}(x_n + th) = \sum_{i=0}^k \frac{\Delta^i t_{n-i}}{i!} t \dots (t+i-1) + R_{kn}(x),$$

$$u'(x) = P_{nk}(x_n + th) + R_{kn}(x),$$

$$u(x_{n+1}) - u(x_n) = h \sum \gamma_i \Delta^i f_{n-i} + \rho_{n+1}, \quad (14)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{i!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} t \dots (t+i-1) dt.$$

Явная разностная схема Адамса:  $u_{n+1} - u_n = h \sum_{i=0}^k \gamma_i \Delta^i f_{n-i}$ ,

$$P_{nk} = \sum_{i=0}^k \frac{\Delta^i f_{n-i+1}}{i!} (t-1) \dots (t+i-2),$$

$$u'(x) = P_{nk}(x_n + th) + R_{nk}(x),$$

$$u(x_{n+1}) - u(x_n) = h \sum \gamma_i \Delta^i f_{n-i+1} + \rho_{n+1}, \quad (15)$$

$$u_{n+1} - u_n = h \sum_{i=0}^k \bar{\gamma}_i \Delta^i f_{n-i+1},$$

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{i!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (t-1) \dots (t+i-2) dt.$$

### 1.5. Схема предиктор-корректор

Метод прогноза и коррекции (предиктор-корректор) – семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы.

Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводится два этапа, использующих многошаговые методы: с помощью явного метода (предиктора) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение  $u_{n+1} = u_{n+1}^0$  в новом узле; используя неявный метод (корректор), в результате итераций находится приближения  $u_{n+1}^1, u_{n+1}^2, \dots$ . Итерационный процесс продолжается пока не выполнится неравенство  $|u_{n+1}^k - u_{n+1}^{k-1}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  заданная точность вычислений.

Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвёртого порядка имеющего вид следующих разностных соотношений: на этапе предиктора

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \quad (16)$$

на этапе корректора

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \quad (17)$$

Явная схема используется на каждом этапе один раз (16), а с помощью неявной схемы строится итерационный процесс вычисления  $u_{n+1}$ , поскольку это значение входит и в правую часть (17).

В этих формулах, как и в случае метода Адамса, при вычислении  $u_{n+1}$  необходимы значения сеточной функции в четырёх предыдущих узлах:  $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}$ . Следовательно, расчёт по этому методу может быть начат только со значения  $u_4$ . Необходимые при этом  $u_1, u_2, u_3$  находятся по методу Рунге-Кутты,  $u_0$  задаётся начальным условием. Эта характерная особенность многошаговых методов.

## 2. Постановка задачи

- Решить задачу Коши для ОДУ  $u' = (2 - u)\tan(x)$ ,  $u(0) = -1$ ,  $x \in [0, 1]$  методом предиктор-корректор.
- Вычислить  $B_{ki}$ ,  $b_{ki}$ ,  $\gamma_i$ ,  $\bar{\gamma}_i$  для значений  $k, i = \overline{0, 7}$



### 3. Программа

#### Задание А

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using std::cout;
using std::cin;
using std::endl;

double a = 0, b = 1, u_zero = -1;
int N = 50;
int NR = 3;
double eps = 1E-1;
double h = (b-a) / N;
double fun(double x, double u);
void pred_cor(double* x, double* u, int i);
int main() {
    double *u = new double[N+1];
    double *x = new double[N+1];
    u[0] = u_zero;
    x[N] = b;
    double *k0 = new double[NR];
    double *k1 = new double[NR];
    double *k2 = new double[NR];
    double *k3 = new double[NR];
    int i;
    for(i=0; i<=N; i++){
        x[i] = a + i*h;
    }
    // Runge_Kutta
    cout << "Runge_Kutta" << endl;
    for(i=0; i <= NR; i++){

        k0[i] = fun(x[i], u[i]);
        k1[i] = fun(x[i] + h / 2, u[i] + h * k0[i] / 2);
        k2[i] = fun(x[i] + h / 2, u[i] + h * k1[i] / 2);
        k3[i] = fun(x[i] + h, u[i] + h * k2[i]);
        u[i+1] = u[i] + h * (k0[i] + 2 * k1[i] + 2 * k2[i] + k3[i]) / 6;
        cout << "{" << i << ", " << x[i] << ", " << u[i] << "}," << endl;
    }
    pred_cor(x, u, i);
    return 0;
}

void pred_cor(double* x, double* u, int i){
    double u_cor;
    for(i = NR; i<=N; i++){
        u[i+1] = u[i] + h*(55*fun(x[i],u[i]) - 59*fun(x[i-1],u[i-1]) + 37*fun(x[i-2],u[i-2]) - 9*fun(x[i-3],u[i-3])) / 24;
        do{
            u_cor = u[i+1];
            u[i+1] = u[i] + h * (9*fun(x[i+1], u_cor) + 19 * fun(x[i], u[i]) - 5*fun(x[i-1],u[i-1]) + fun(x[i-2],u[i-2])) / 24;
        } while(eps <= abs(u[i+1]-u_cor));
        cout << "{" << i << ", " << x[i] << ", " << u[i] << "}," << endl;
    }
}

double fun(double x, double u){
    return (2-u) * tan(x);
}
```

#### Задание Б

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int fact(int n);

class Integrate{
private:
    int i_val, k_val, scenario;
    double left_bound, right_bound;
public:
    Integrate(int p1, int p2, int t, double l, double r){
        k_val = p1;
        i_val = p2;
        scenario = t;
        left_bound = l;
    }
};
```

```

        right_bound = r;
    }
    double Simpson(double n2);
    double Richardson();
    double Function(double t);
    double Function1(double t);
    double Function2(double t);
};

int main() {
    for(int k = 0; k <= 7; k++){
        for(auto i = 0; i <= k; i++) {
            Integrate tmp(k, i, 1, 0.0, 1);
            cout << "{ " << k << " , " << i << " , " << (pow(-1, i)/(1.0*fact(i)*fact(k - i))) * tmp.Richardson() << "}, ";
        }
        cout << endl;
    }
    for(int k = 0; k <= 7; k++){
        for(auto i = 0; i <= k; i++) {
            Integrate tmp(k, i, 2, 0.0, 1);
            cout << "{ " << k << " , " << i << " , " << (pow(-1, i)/(1.0*fact(i)*fact(k - i))) * tmp.Richardson() << "}, ";
        }
        cout << endl;
    }
    for(int k = 0; k <= 7; k++){
        Integrate tmp(k, 1, 3, 0.0, 1.0);
        cout << "{ " << k << " , " << (1/(fact(k)*1.0)) * tmp.Richardson() << "}, " << endl;
    }
    for(int k = 0; k <= 7; k++){
        Integrate tmp(k, 1, 4, 0.0, 1.0);
        cout << "{ " << k << " , " << (1/(fact(k)*1.0)) * tmp.Richardson() << "}, " << endl;
    }
    return 0;
}

int fact(int n) {
    if ((n==0)|| (n==1)){return 1;}
    else {return n*fact(n-1);}
}

double Integrate::Function(double x){
    return Function1(x) * ((scenario == 1) or (scenario == 2)) + Function2(x) * ((scenario == 3) or (scenario == 4));
}

double Integrate::Function1(double x){
    double ans = 1;
    if ((x + i_val - 1 * (scenario == 2)) == 0.0)
        return 1;
    else
        for(int t = 0; t <= k_val; t++){ans *= (x + t - 1 * (scenario == 2));};
    return ans/(x + i_val - 1 * (scenario == 2));
}

double Integrate::Function2(double x){
    double ans = 1;
    for(int t = 0; t <= k_val - 1; t++){ans *= (x + t - 1 * (scenario == 4));};
    return ans;
}

double Integrate::Simpson(double n2){
    int n1 = n2 * 2;
    double data_x[n1 + 1], I = 0;
    for (int i = 0; i < n1 + 1; i++){
        data_x[i] = left_bound + i * (right_bound - left_bound) / (double)(n1);
    };
    double h = (data_x[1] - data_x[0]) * 1.0;
    for (int i = 0; i < n1 / 2; i++){
        I += Function(data_x[2*i]) + 4 * Function(data_x[2*i + 1]) + Function(data_x[2*i + 2]);
    };
    return I * h / 3.0;
}

double Integrate::Richardson(){
    double r1 = Simpson(1000);
    double r2 = Simpson(1500);
    double r3 = Simpson(2000);
    int p = log2((r3 - r2) / (r2 - r1));
    return 1.0*((2 ^ p)*r1 - r2) / ((2 ^ p) - 1);
}

```

## 4. Результаты вычислений

### 4.1. Задание А

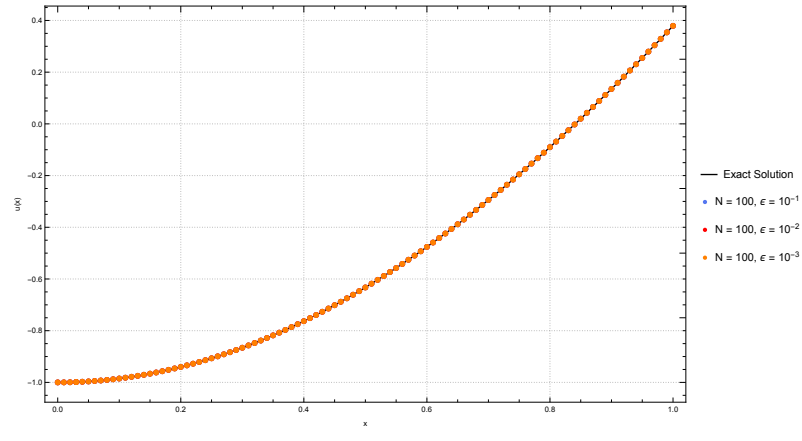
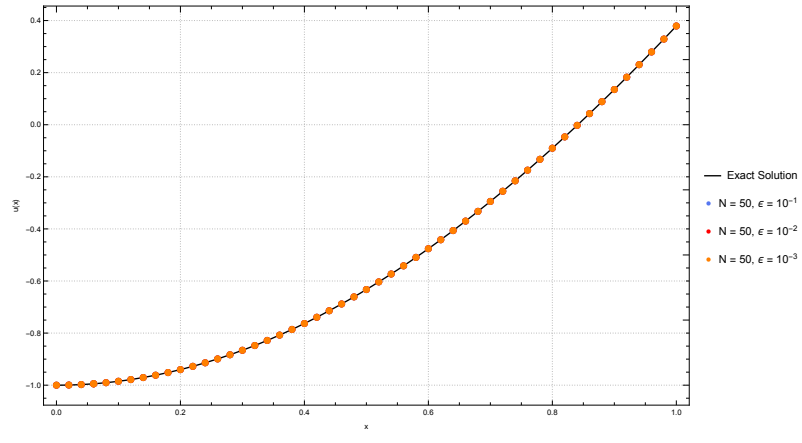
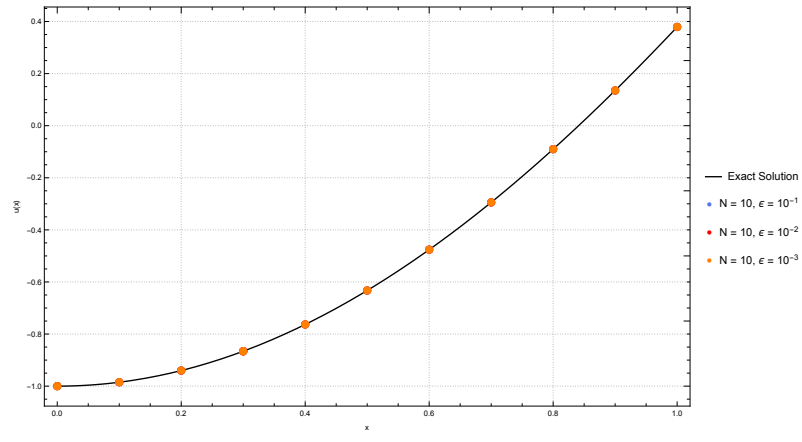


Рис. 1. Решение задачи Коши для ОДУ  $u' = (2-u)\tan(x)$ ,  $u(0) = -1$ ,  $x \in [0, 1]$  методом предиктор-корректор при а)  $N = 10$ , б)  $N = 50$ , в)  $N = 100$  для  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$

## 4.2. Задание Б

Значения  $B_{ki}$  для  $k, i = \overline{0, 7}$

$$\begin{aligned}
B_{0,0} &= 1 \\
B_{1,0} &= \frac{3}{2}, B_{1,1} = -\frac{1}{2} \\
B_{2,0} &= \frac{23}{12}, B_{2,1} = -\frac{4}{3}, B_{2,2} = \frac{5}{12} \\
B_{3,0} &= \frac{55}{24}, B_{3,1} = -\frac{59}{24}, B_{3,2} = \frac{37}{24}, B_{3,3} = -\frac{3}{8} \\
B_{4,0} &= \frac{1901}{720}, B_{4,1} = -\frac{1387}{360}, B_{4,2} = \frac{109}{30}, B_{4,3} = -\frac{637}{360}, B_{4,4} = \frac{251}{720} \\
B_{5,0} &= \frac{4277}{1440}, B_{5,1} = -\frac{2641}{480}, B_{5,2} = \frac{4991}{720}, B_{5,3} = -\frac{3649}{720}, B_{5,4} = \frac{959}{480}, B_{5,5} = -\frac{95}{288} \\
B_{6,0} &= \frac{198721}{60480}, B_{6,1} = -\frac{18637}{2520}, B_{6,2} = \frac{235183}{20160}, B_{6,3} = -\frac{10754}{945}, B_{6,4} = \frac{135713}{20160}, B_{6,5} = -\frac{5603}{2520}, B_{6,6} = \frac{19087}{60480} \\
B_{7,0} &= \frac{16083}{4480}, B_{7,1} = -\frac{1152169}{120960}, B_{7,2} = \frac{242653}{13440}, B_{7,3} = -\frac{296053}{13440}, B_{7,4} = \frac{2102243}{120960}, B_{7,5} = -\frac{115747}{13440}, \\
B_{7,6} &= \frac{32653}{13440}, B_{7,7} = -\frac{5257}{17280}
\end{aligned}$$

Значения  $b_{ki}$  для  $k, i = \overline{0, 7}$

$$\begin{aligned}
b_{0,0} &= 1 \\
b_{1,0} &= \frac{1}{2}, b_{1,1} = \frac{1}{2} \\
b_{2,0} &= \frac{5}{12}, b_{2,1} = \frac{2}{3}, b_{2,2} = -\frac{1}{12} \\
b_{3,0} &= \frac{3}{8}, b_{3,1} = \frac{19}{24}, b_{3,2} = -\frac{5}{24}, b_{3,3} = \frac{1}{24} \\
b_{4,0} &= \frac{251}{720}, b_{4,1} = \frac{323}{360}, b_{4,2} = -\frac{11}{30}, b_{4,3} = \frac{53}{360}, b_{4,4} = -\frac{19}{720} \\
b_{5,0} &= \frac{95}{288}, b_{5,1} = \frac{1427}{1440}, b_{5,2} = -\frac{133}{240}, b_{5,3} = \frac{241}{720}, b_{5,4} = -\frac{173}{1440}, b_{5,5} = \frac{3}{160} \\
b_{6,0} &= \frac{19087}{60480}, b_{6,1} = \frac{2713}{2520}, b_{6,2} = -\frac{15487}{20160}, b_{6,3} = \frac{586}{945}, b_{6,4} = -\frac{6737}{20160}, b_{6,5} = \frac{263}{2520}, b_{6,6} = -\frac{863}{60480} \\
b_{7,0} &= \frac{5257}{17280}, b_{7,1} = \frac{139849}{120960}, b_{7,2} = -\frac{4511}{4480}, b_{7,3} = \frac{123133}{120960}, b_{7,4} = -\frac{88547}{120960}, b_{7,5} = \frac{1537}{4480}, b_{7,6} = -\frac{11351}{120960}, \\
b_{7,7} &= \frac{275}{24192}
\end{aligned}$$

Значения  $\gamma_i$  (Explicit formula) и  $\overline{\gamma}_i$  (Implicit formula) для  $i = \overline{0, 7}$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1, \gamma_1 = \frac{1}{2}, \gamma_2 = \frac{5}{12}, \gamma_3 = \frac{3}{8}, \gamma_4 = \frac{251}{720}, \gamma_5 = \frac{95}{288}, \gamma_6 = \frac{19087}{60480}, \gamma_7 = \frac{5257}{17280} \\
\overline{\gamma}_0 &= 1, \overline{\gamma}_1 = -\frac{1}{2}, \overline{\gamma}_2 = -\frac{1}{12}, \overline{\gamma}_3 = -\frac{1}{24}, \overline{\gamma}_4 = -\frac{19}{720}, \overline{\gamma}_5 = -\frac{3}{160}, \overline{\gamma}_6 = -\frac{863}{60480}, \overline{\gamma}_7 = -\frac{275}{24192}
\end{aligned}$$

## 5. Вывод

Методом предиктор-корректор решена задача Коши для ОДУ  $u' = (2 - u) \tan(x)$ ,  $u(0) = -1$ ,  $x \in [0, 1]$ . Вычислены коэффициенты  $B_{ki}, b_{ki}, \gamma_i, \bar{\gamma}_i, k, i = \overline{0, 7}$  членов ряда разностного уравнения для экстраполяционной и интерполяционной формул Адамса в случае использования интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

Метод предиктор-корректор показал значительно большую точность, чем ранее рассмотренные методы решения дифференциальных уравнений.