Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»

Лабораторная работа №3
по курсу «Вычислительная физика»
Тема: «Формулы численного дифференцирования»
Вариант 6

Выполнили: студенты группы ФН4-72Б
Мистрюкова Л.А., Хижик А.И.
Проверил: доцент, к.физ.-мат.н.
Хасаншин Р.Х.

Москва, 2019

Оглавление

1. Теоретическая часть

1.1. Задача численного дифференцирования

К численному дифференцированию приходится прибегать в случае, когда функция $f(x)$, для которой ищется производная, задана таблично или функциональная зависимость x и $f(x)$ имеет сложное аналитическое выражение.

В этих случаях вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную от $f(x)$ приближённо равной производной $\varphi(x)$. Естественно, при этом производная от $f(x)$ будет найдена с некоторой погрешностью.

Функцию $f(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

где $R(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Дифференцируя это тождество k раз (предполагая, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные k-го порядка), получим

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Так как за приближённое значение $f^{(k)}(x)$ принимается $\varphi^{(k)}(x)$, то погрешность есть $R^{(k)}(x)$.

1.2. Формулы численного дифференцирования

Имеем функцию $f(x)$ непрерывную на $[a, b]$. Введем на $[a, b]$ сетку:

$$x_0 < x_1 < ... < x_n,\ x_i \in [a, b],\ i = \overline{0, n}.$$

$$f_i = f(x_i).$$

Если принять, что узлы равноотстоящие и шаг сетки равен h, т.е.

$$x_i = x_0 + ih,\ h > 0,\ i = \overline{0, n}, \tag{1}$$

то будут верны следующие формулы для расчета первой производной в узлах:

1. Если $f(x) \in C_2[x_0, x_1]$, то на отрезке $[x_0, x_1]$ существует такая точка ξ, что

$$f_o' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f_\xi''. \tag{2}$$

2. Если $f(x) \in C_3[x_{-1}, x_1]$, то на $[x_{-1}, x_1]$ существует такая точка ξ, что

$$f_o' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_\xi^{(3)}. \tag{3}$$

3. Если $f(x) \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то существует такая точка ξ, что

$$f_o'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_\xi^{(4)}. \tag{4}$$

Случай интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x)} = \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

2. Постановка задачи

Получить аппроксимации производных m-го порядка, используя интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона n-й степени.

- При $m = 1$, $n = 3$ в точке x_0;
- При $m = 2$, $n = 4$ в точке x_2.

3. Вычисление производных

Для $n = 3$: $f(x) = L_3(x) + R_3(x)$, где

$$L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k \prod_{i \neq k}^{3} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$+ f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)};$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Первая производная $f(x)$:

$$f'(x) = L_3'(x) + R_3'(x) =$$
$$= f_0 \frac{(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$+ f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} +$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)).$$

Значение в точке x_0:

$$f'(x_0) =$$
$$= f_0 \frac{(x_0-x_2)(x_0-x_3) + (x_0-x_1)(x_0-x_3) + (x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x_0-x_2)(x_0-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ f_2 \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$+ f_3 \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} +$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3).$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3.$$

Для $n = 4$:

$$L_4(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$
$$+ f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$
$$+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$
$$+ f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$
$$+ f_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)};$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Первая производная $f(x)$:

$$f'(x) = L_4'(x) + R_4'(x) =$$
$$= f_0(\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}) + f_1(\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}) + f_2(\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}) +$$
$$+ f_3(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}) + f_4(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-$$
$$x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)).$$

Вторая производная $f(x)$:

$$f''(x) = L_4''(x) + R_4''(x) =$$
$$= f_0(\frac{(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}) + f_1(\frac{(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}) +$$
$$+ f_2(\frac{(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}) + f_3(\frac{(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}) +$$
$$+ f_4(\frac{(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_1)(x-x_2)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-$$
$$x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-$$
$$x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)+(x-$$
$$x_0)(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-$$
$$x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)).$$

Значение в точке x_2:

$$f''(x_2) =$$
$$= f_0(\frac{(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_1)(x_2-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}+$$
$$+\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)})+$$
$$+f_1(\frac{(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+$$
$$+\frac{(x_2-x_0)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)})+$$
$$+f_2(\frac{(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$
$$+\frac{(x_2-x_0)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)+(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$
$$+\frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)})+$$
$$+f_3(\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+$$
$$+\frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)})+$$
$$+f_4(\frac{(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}+$$
$$\frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)})+$$
$$+\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_2)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_3)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)).$$

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2}[-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4].$$

Случай интерполяционного многочлена Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} f(x_0; \ldots; x_k)\omega_k(x)$$

Для $n = 3$: $f(x) = P_3(x) + R_3(x)$, где

$P_3(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{3} f(x_0; \ldots; x_k)\omega_k(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) +$
$+ (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3)$.
$R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_4(x)$.

Первая производная $f(x)$:
$f'(x) = P_3'(x) + R_3'(x) = f(x_0; x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1))f(x_0; x_1; x_2) +$
$+ ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3) +$
$+ \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) +$
$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))$.

Значение в точке x_0:
$f'(x_0) = f(x_0; x_1) + (x_0 - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) +$
$+ \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$.

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,
$f'(x_0) = f(x_0; x_1) - hf(x_0; x_1; x_2) + 2h^2 f(x_0; x_1; x_2; x_3) - \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3$
Для $n = 4$:
$P_4(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) +$
$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \times$
$\times f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$.
$R_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

Вторая производная $f(x)$:
$f''(x) = f(x_0; x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1))f(x_0; x_1; x_2) +$
$+ ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3) +$
$+ ((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) +$
$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2))f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) +$
$+ \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-$
$x_3)+(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-$
$x_3)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-$
$x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_0)(x-x_1)(x-$
$x_2)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2))$.

Значение в точке x_2:

$f''(x_2) = f(x_0; x_1) + ((x_2 - x_0) + (x_2 - x_1)) f(x_0; x_1; x_2) +$
$+ (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) f(x_0; x_1; x_2; x_3) +$
$+ (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4) +$
$+ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}((x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3))$.

Для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$,
$f''(x_2) = f(x_0; x_1) + 3h f(x_0; x_1; x_2) + 2h^2 f(x_0; x_1; x_2; x_3) - 2h^3 f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$.

4. Вывод

В данной работе были получены формулы численного дифференцирования первого и второго порядков для равномерной сетки с шагом $h > 0$: $x_i = x_0 + ih$ в случае интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}[-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3;$$
$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2}[-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4];$$

$$f'(x_0) = f(x_0; x_1) - h f(x_0; x_1; x_2) + 2h^2 f(x_0; x_1; x_2; x_3) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}h^3;$$
$$f''(x_2) = f(x_0; x_1) + 3h f(x_0; x_1; x_2) + 2h^2 f(x_0; x_1; x_2; x_3) - 2h^3 f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4).$$