Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»

# Лабораторная работа №2
по курсу «Вычислительная физика»


Выполнил: студент группы ФН4-82Б
Хижик А.И.
Проверил: доцент, к.физ.-мат.н.
Хасаншин Р.Х.


Москва, 2020

# Оглавление

## 1. Теоретическая часть

### Численное решение ДУ

$$
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t), \;\; 0 < x < l, \;\; 0 < t < T, \tag{1}
$$

$$
u(x,t)\Big|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}
$$

$$
u(0,t) = 0, \tag{3}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0. \tag{4}
$$

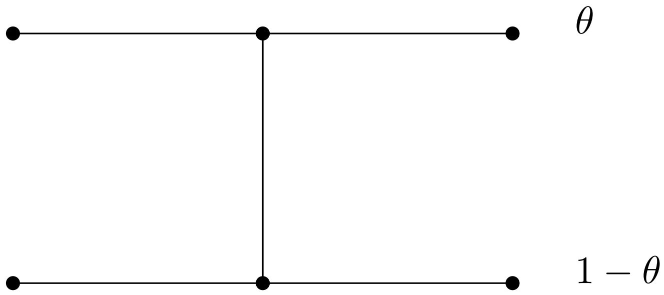

Рис. 1. Расположение узлов разностной схемы

Разностная схема для задачи (1)-(4):

$$
-\hat{A}_i\hat{u}_{i-1} + \hat{C}_i\hat{u}_i - \hat{B}_i\hat{u}_{i+1} = \hat{F}_i, \;\; i = \overline{1, N_x - 1}, \tag{5}
$$

$$
u_i^0 = u_{0i}, \tag{6}
$$

$$
\hat{u}_0 = \hat{\varkappa}_1\hat{u}_1 + \hat{\nu}_1, \;\; \hat{u}_{N_x} = \hat{\varkappa}_2\hat{u}_{N_x-1} + \hat{\nu}_2, \tag{7}
$$

$$
\hat{A}_i = \theta\hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}, \tag{8}
$$

$$
\hat{C}_i = 1 + \theta\left(\hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2}} + \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2}}\right), \tag{9}
$$

$$
\hat{B}_i = \theta\hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}, \tag{10}
$$

$$
\hat{F}_i = (1-\theta)\alpha_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1} + \left[1 - (1-\theta)\left(\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}}\right)\right]u_i + (1-\theta)\alpha_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} + \tau f_i^j, \tag{11}
$$

$$
\hat{\varkappa}_1 = 0, \;\; \hat{\varkappa}_2 = 1, \;\; \hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2 = 0, \tag{12}
$$

где $\alpha(x) = \dfrac{\tau}{h^2}D(x)$.

Для решения трёхточечных разностных уравнений вида (5) с краевыми условиями (7) применяется метод прогонки.

Формулы прямой прогонки:

$$\hat{\xi}_{i+1} = \frac{\hat{B}_i}{\hat{C}_i - \hat{A}_i \hat{\xi}_i}, \;\; \hat{\xi}_1 = \hat{\varkappa}_1, \;\; i = \overline{1, N_x - 1}, \tag{13}$$

$$\hat{\eta}_{i+1} = \frac{\hat{A}_i \hat{\eta}_i + \hat{F}_i}{\hat{C}_i - \hat{\xi}_i \hat{A}_i}, \;\; \hat{\eta}_1 = \hat{\nu}_1, \;\; i = \overline{1, N_x - 1}. \tag{14}$$

Формулы обратной прогонки:

$$\hat{u}_{N_x} = \frac{\hat{\nu}_2 + \hat{\varkappa}_2 \hat{\eta}_{N_x}}{1 - \hat{\varkappa}_2 \hat{\xi}_{N_x}}, \tag{15}$$

$$\hat{u}_i = \hat{\xi}_{i+1} \hat{u}_{i+1} + \hat{\eta}_{i+1}, \;\; i = \overline{N_x - 1, 0}. \tag{16}$$

## 2. Постановка задачи

Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(x), \quad a = 0.3, \tag{17}$$

в области $\{0 < x < l = 2\pi,\ 0 < t < T = 2\}$ с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}, \tag{18}$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0. \tag{19}$$

Решить краевую задачу явным и неявным методом. При решении задач с использованием явной схемы получить решение, соблюдая условие устойчивости и нарушив его. Построить трёхмерные графики распределения температур.

## 3. Результаты

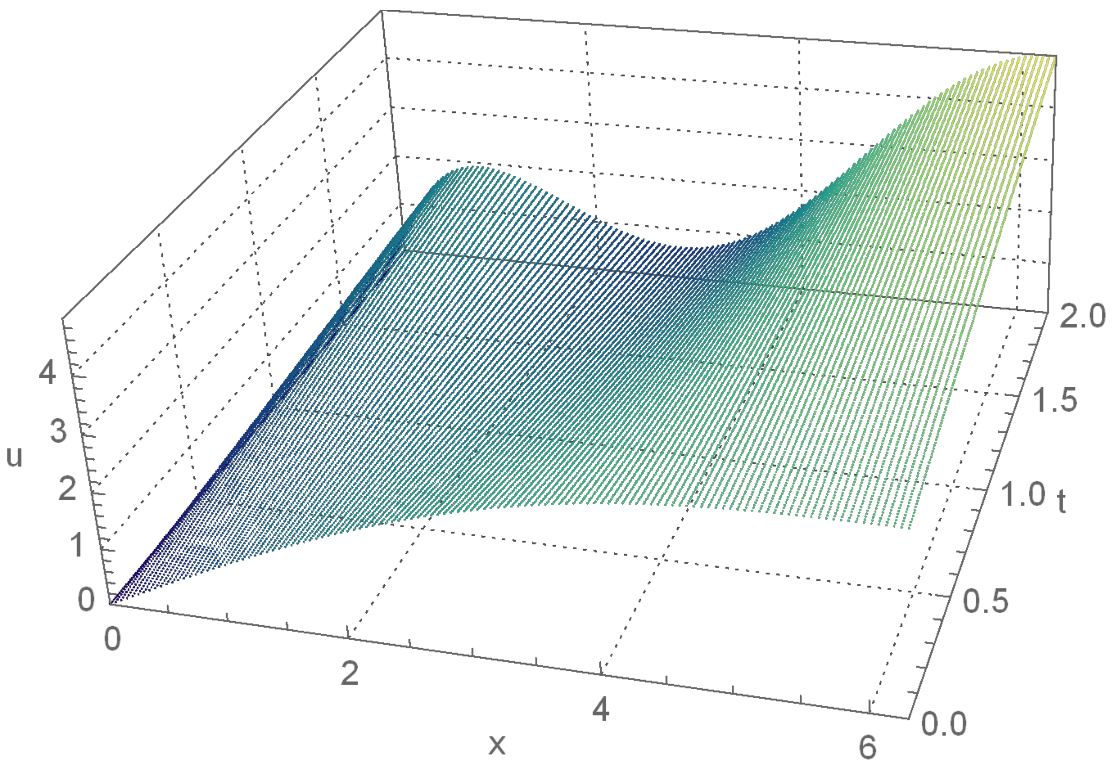


Рис. 2. Численное решение при использовании неявной схемы

Условие устойчивости явной схемы ($\theta = 0$):

$$K = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

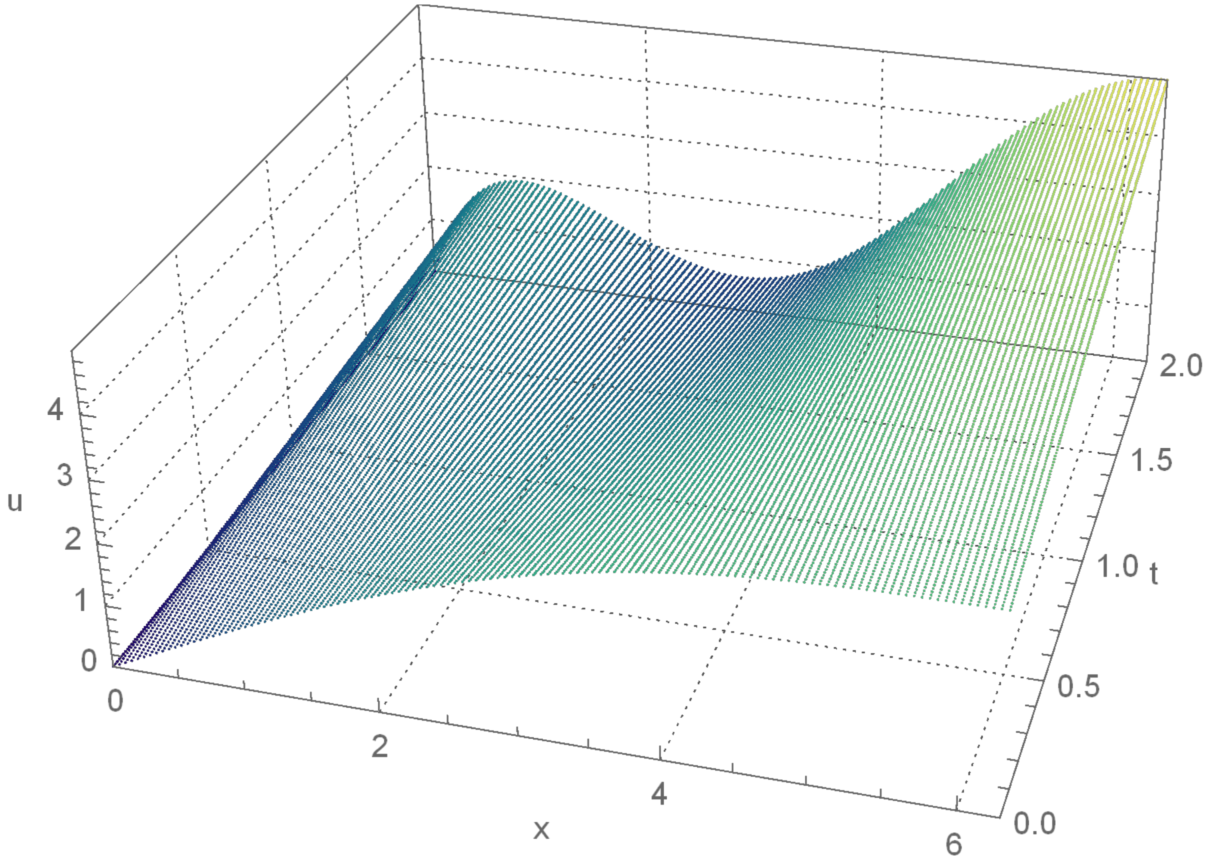


Рис. 3. Численное решение при использовании явной схемы с выполненным условием устойчивости $K = 0.36$

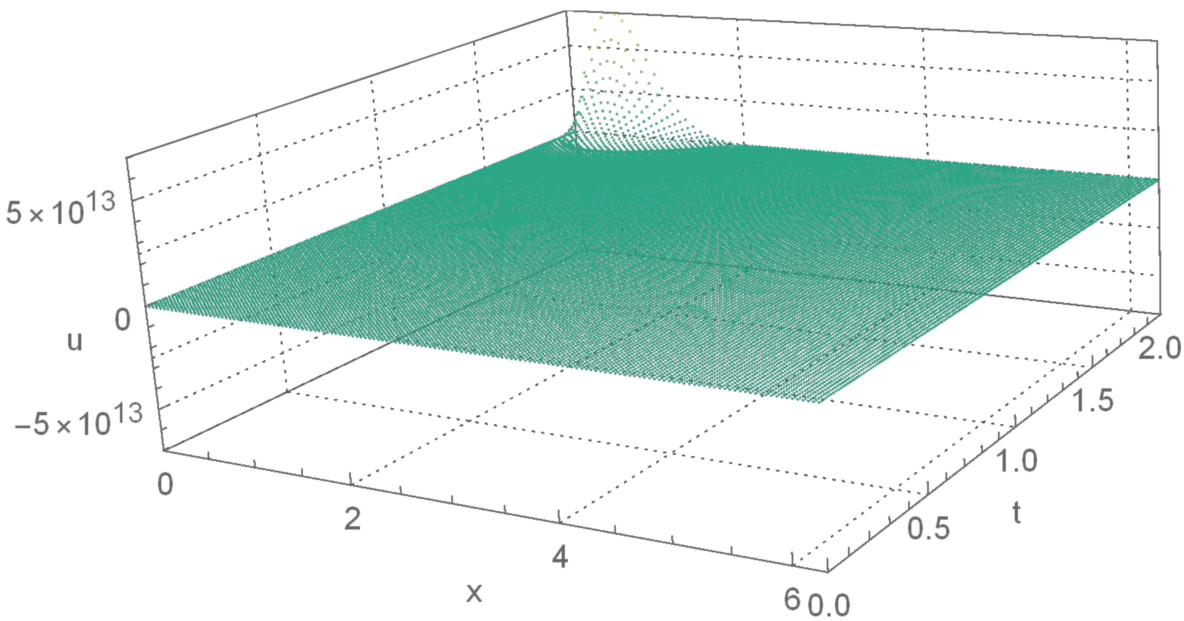


Рис. 4. Численное решение при использовании явной схемы с невыполненным условием устойчивости $K = 0.57$

## 4. Вывод

Решена краевая задача явным и неявным методами. При решении задач с использованием явной схемы получены решения, соблюдая условие устойчивости и нарушив его. Построены трёхмерные графики распределения температур.

При нарушении условия устойчивости явной схема решение, полученное при ее применении «разваливается».