Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»

Домашнее задание
по курсу «Вычислительная физика»
на тему: «Решение интегральных уравнений»

Выполнили: студенты группы ФН4-72Б
Хижик А.И., Мистрюкова Л.А.,
Проверил: доцент, к.физ.-мат.н.
Хасаншин Р.Х.

Москва, 2019

Оглавление

1. Интегральные уравнения Фредгольма

Решите неоднородные уравнения Фредгольма второго рода методом последовательных приближений (найти $y_4(x)$ и оценить погрешность), методом вырожденного ядра и с использованием резольвенты.

1.1. $y(x) = \lambda \int_0^1 xsy(s)ds + x$

$K(x,s) = K_1(x,s) = xs,\ f(x) = \varphi_0(x) = x$

Метод последовательных приближений

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_m(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi_{m-1}(s)ds = \int_a^b K_m(x,s)f(s)ds \qquad (1)$$

$$K_m(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{m-1}(t,s)dt \qquad (2)$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \varphi_m(x) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \int_0^1 xt^2 sdt = \frac{1}{3}xs \\ K_3 &= \int_0^1 \frac{1}{3}xt^2 sdt = \frac{1}{9}xs \end{aligned}\right\} \longrightarrow K_m = \frac{1}{3^{m-1}}xs \Rightarrow \varphi_m(x) = \frac{1}{3^m}x \qquad (4)$$

$$y(x) = x\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^m = \frac{3x}{3-\lambda}$$

$$y_4(x) = \frac{\left(3 - \frac{\lambda^5}{81}\right)x}{3-\lambda}$$

$$\Delta = \frac{\lambda^5 x}{243 - 81\lambda}$$

Резольвента

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s) \qquad (5)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds + f(x) \qquad (6)$$

$$R(x,s,\lambda) = xs\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1} = \frac{3xs}{3-\lambda}$$

$$y(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

Метод вырожденного ядра

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(s) \tag{7}$$

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=f_i,\quad a_{ij}=\int_a^b\alpha_i(s)\beta_j(s)ds,\quad f_i=\int_a^b f(s)\beta_i(s)ds,\quad i=\overline{1,n} \tag{8}$$

$$y(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i(x)+f(x) \tag{9}$$

$$\alpha(x)=x,\ \beta(s)=s\to a_{11}=\int_0^1 s^2ds=\frac{1}{3},\ f_1=\int_0^1 s^2ds=\frac{1}{3}\Rightarrow c_1-\lambda a_{11}c_1=f_1\iff c_1=\frac{1}{3-\lambda}$$

$$y(x)=\frac{3x}{3-\lambda}$$

1.2. $y(x)=\lambda\int_0^1 y(s)ds+\sin(\pi x)$

$K(x,s)=K_1(x,s)=1,\ f(x)=\varphi_0(x)=\sin(\pi x)$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned}K_2=1\\K_3=1\end{aligned}\right\}\qquad\longrightarrow K_m=1\Rightarrow\varphi_m(x)=\frac{2}{\pi} \tag{10}$$

$$y(x)=\sin(\pi x)+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m=\sin(\pi x)+\frac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}$$

$$y_4(x)=\frac{2\lambda\left(\lambda^4-1\right)}{\pi(\lambda-1)}+\sin(\pi x)$$

$$\Delta=\frac{2\lambda^5}{\pi(1-\lambda)}$$

Резольвента

$$R(x,s,\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}=\frac{1}{1-\lambda}$$

$$y(x)=\frac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}+\sin(\pi x)$$

Метод вырожденного ядра

$$\alpha(x) = 1,\ \beta(s) = 1 \to a_{11} = \int_0^1 ds = 1,\ f_1 = \int_0^1 \sin(\pi x) ds = \frac{2}{\pi} \Rightarrow c_1 - \lambda a_{11} c_1 = f_1 \Longleftrightarrow c_1 = \frac{2}{\pi(1-\lambda)}$$

$$y(x) = \frac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)} + \sin(\pi x)$$

1.3. $y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x}{s^2+1} y(s) ds + x^2 + 1$

$K(x,s) = K_1(x,s) = \frac{x}{s^2+1},\ f(x) = \varphi_0(x) = x^2 + 1$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \int_0^1 \frac{xt}{(t^2+1)(s^2+1)} = \frac{\log(2)}{2} \frac{x}{s^2+1} \\ K_3 &= \int_0^1 \frac{\log(2)}{2} \frac{xt}{(t^2+1)(s^2+1)} = \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^2 \frac{x}{s^2+1} \end{aligned}\right\} \longrightarrow K_m = \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^{m-1} \frac{x}{s^2+1} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \varphi_m(x) = \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^{m-1} x$$

$$y(x) = x^2 + 1 + x \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^{m-1} = x^2 + \frac{2\lambda x}{2 - \lambda \log(2)} + 1$$

$$y_4(x) = x^2 + \frac{2\lambda x \left(\frac{1}{16}\lambda^4 \log^4(2) - 1\right)}{\lambda \log(2) - 2} + 1$$

$$\Delta = \frac{\lambda^5 x \log^4(2)}{8(2 - \lambda \log(2))}$$

Резольвента

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda \log(2)}{2}\right)^{m-1} \frac{x}{s^2+1}$$

$$y(x) = \lambda x \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda \log(2)}{2}\right)^{m-1} + x^2 + 1 = x^2 + \frac{2\lambda x}{2 - \lambda \log(2)} + 1$$

Метод вырожденного ядра

$$\alpha(x) = x,\ \beta(s) = \frac{1}{s^2+1} \to a_{11} = \int_0^1 \frac{s}{s^2+1} ds = \frac{\log(2)}{2},\ f_1 = \int_0^1 ds = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 - \lambda a_{11} c_1 = f_1 \Longleftrightarrow c_1 = \frac{2}{2 - \lambda \log(2)}$$

$$y(x) = \frac{2\lambda x}{2 - \lambda \log(2)} + x^2 + 1$$

1.4. $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} x \ \sin(2s) y(s) ds + \cos(2x)$

$K(x,s) = K_1(x,s) = x \sin(2s),\ f(x) = \varphi_0(x) = \cos(2x)$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{array}{r} K_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} xt \sin(2t)\sin(2s)dt = -\frac{\pi}{2} x \sin(2s) \\ K_3 = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) xt \sin(2t)\sin(2s)dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x \sin(2s) \end{array}\right\} \longrightarrow K_m = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} x \sin(2s) \Rightarrow \varphi_m(x) = 0 \tag{12}$$

$$y(x) = \cos(2x)$$

$$y_4(x) = \cos(2x)$$

$$\Delta = 0$$

Резольвента

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi\lambda}{2}\right)^{m-1} x \sin(2s)$$

$$y(x) = \cos(2x)$$

Метод вырожденного ядра

$$\alpha(x) = x,\ \beta(s) = \sin(2s) \to a_{11} = \int_0^{\pi} s \sin(2s) ds = -\frac{\pi}{2},\ f_1 = \int_0^{1} \cos(2s)\sin(2s)ds = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 - \lambda a_{11} c_1 = f_1 \iff c_1 = 0$$

$$y(x) = \cos(2x)$$

1.5. $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s) y(s) ds + 2$

$K(x,s) = K_1(x,s) = \sin(x+s),\ f(x) = \varphi_0(x) = 2$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} K_2 = \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\sin(t+s)dt = \pi\cos(s-x) \\ K_3 = \int_0^{2\pi} \pi\sin(x+t)\cos(s-t)dt = \pi^2\sin(s+x) \end{aligned}\right\} \qquad \varphi_2(x) = 0, \;\; \varphi_3(x) = 0 \tag{13}$$

$$y(x) = 2$$

$$y_4(x) = 2$$

$$\Delta = 0$$

Резольвента

$$R(x, s, \lambda) = 0$$

$$y(x) = 2$$

Метод вырожденного ядра

$K(x, s) = \sin(x+s) = \cos(x)\sin(s) + \cos(s)\sin(x)$

$\alpha_1(x) = \cos(x),\;\; \beta_1(s) = \sin(s),\;\; \alpha_2(x) = \sin(x),\;\; \beta_2(s) = \cos(s) \rightarrow a_{11} = a_{22} = 0,$ $a_{12} = a_{21} = \pi,\;\; f_1 = f_2 = 0 \Rightarrow c_i - \lambda a_{ij}c_j = f_i,\;\; i, j = 1, 2 \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = 0$

$$y(x) = 2$$

1.6. $y(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{cos}(s)y(s)ds + 1$

$K(x, s) = K_1(x, s) = \sin(x)\cos(s),\; f(x) = \varphi_0(x) = 1$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} K_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(t)\sin(t)\cos(s)dt = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(s) \\ K_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x)\cos(t)\sin(t)\cos(s)dt = \frac{1}{4}\sin(x)\cos(s) \end{aligned}\right\} \qquad \longrightarrow K_m = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(s)\sin(x) \tag{14}$$

$\Rightarrow \varphi_m(x) = \dfrac{\sin(x)}{2^{m-1}}$

$$y(x) = 1 + \sin(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 2\sin(x) + 1$$

$$y_4(x) = \frac{15\sin(x)}{8} + 1$$

$$\Delta = \frac{\sin(x)}{8}$$

Резольвента

$$R(x, s, \lambda) = \cos(s)\sin(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 2\cos(s)\sin(x)$$

$$y(x) = 2\sin(x) + 1$$

Метод вырожденного ядра

$\alpha(x) = \sin(x), \quad \beta(s) = \cos(s) \to a_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s)\cos(s)ds = \frac{1}{2}, \quad f_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(s)ds = 1 \Rightarrow c_i - a_{ij}c_j = f_i \Longleftrightarrow c_1 = 2$

$$y(x) = 2\sin(x) + 1$$

1.7. $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\ \exp(s)y(s)ds + \exp(-x)$

$K(x, s) = K_1(x, s) = x\exp(s),\ f(x) = \varphi_0(x) = \exp(-x)$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \int_0^1 x\exp(t)t\exp(s)dt = x\exp(s) \\ K_3 &= \int_0^1 x\exp(t)t\exp(s)dt = x\exp(s) \end{aligned}\right\} \longrightarrow K_m = x\exp(s) \Rightarrow \varphi_m(x) = x \tag{15}$$

$$y(x) = \exp(-x) + x\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \exp(-x) + x$$

$$y_4(x) = \frac{15x}{16} + \exp(-x)$$

$$\Delta = \frac{x}{16}$$

Резольвента

$$R\left(x, s, \frac{1}{2}\right) = x\exp(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m-1}} = 2x\exp(s)$$

$$y(x) = x + \exp(-x)$$

Метод вырожденного ядра

$\alpha(x) = x,\ \ \beta(s) = \exp(s) \to a_{11} = \int_0^1 s\exp(s)ds = 1,\ \ f_1 = \int_0^1 ds = 1 \Rightarrow c_1 - a_{11}c_1 = f_1 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow c_1 = 2$

$$y(x) = x + \exp(s)$$

1.8. $y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} y(s)ds + x$

$K(x,s) = K_1(x,s) = 1,\ f(x) = \varphi_0(x) = x$

Метод последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \\ K_3 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \longrightarrow K_m = \frac{1}{2^{m-1}} \Rightarrow \varphi_m(x) = \frac{1}{2^{m+2}} \tag{16}$$

$$y(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+2}} = x + \frac{1}{4}$$

$$y_4(x) = x + \frac{15}{64}$$

$$\Delta = \frac{1}{64}$$

Резольвента

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{4} + x$$

Метод вырожденного ядра

$$\alpha(x) = 1, \;\; \beta(s) = 1 \to a_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2}, \;\; f_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} sds = \frac{1}{8} \Rightarrow c_i - a_{ij}c_j = f_i \Longleftrightarrow c_1 = \frac{1}{4}$$

$$y(x) = \frac{1}{4} + x$$

2. Интегральные уравнения Вольтерра

2.1. Задание 1

Преобразуйте интегральные уравнения Вольтерра первого рода в уравнения Вольтерра второго рода и решите их.

$$\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds = \exp\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$$

$$\left(\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds\right)_{xx} = \left(\int_0^x \cos(s-x)y(s)ds\right)_x = y(x) + \int_0^x \sin(s-x)y(s)ds$$

$$\left(\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)_{xx} = \left(x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)_x = \left(x^2+1\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) + \int_0^x \sin(s-x)y(s)ds = \left(x^2+1\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$\left(y(x) = \left(x^2+1\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int_0^x \sin(s-x)y(s)ds\right)_{xx} \to y''(x) = y(x) + \int_0^x \sin(s-x)y(s)ds + \left(x^4+6x^2+3\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(x^4+7x^2+4\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$y'(x) = \int_0^x \left(t^4+7t^2+4\right)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)dt = (x^2+4)x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y(x) = \int_0^x (x^2+4)x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)dx - 1 = \left(x^2+2\right)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1$$

$$\int_0^x \exp(x-s)y(s)ds = \sin(x)$$

$$\left(\int_0^x \exp(x-s)y(s)ds\right)_x = y(x) + \int_0^x \exp(x-s)y(s)ds$$

$$(\sin(x))_x = \cos(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \cos(x) - \int_0^x \exp(x-s)y(s)ds$$

$$\left.\begin{aligned} K = K_1 &= -\exp(x-s) \\ K_2 &= \int_s^x -\exp(x-t)\exp(t-s)dt = (x-s)\exp(x-s) \\ K_3 &= \int_s^x -\exp(x-t)(t-s)\exp(t-s)dt = -\frac{1}{2}(x-s)^2\exp(x-s) \\ K_4 &= \int_s^x \frac{1}{2}\exp(x-t)(t-s)^2\exp(t-s)dt = \frac{1}{6}(x-s)^4\exp(x-s) \end{aligned}\right\} \quad K_m = (-1)^m\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\exp(x-s)$$

$$R(x,s) = \exp(x-s)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = -1$$

$$y(x) = -\sin(x) + \cos(x)$$

2.2. Задание 2

Вычислить резольвенту для ядра интегрального уравнения Вольтерра второго рода, если ядро уравнения $K(x,s) = \exp(x-s)$.

$$\left.\begin{aligned} K = K_1 &= \exp(x-s) \\ K_2 &= \int_s^x \exp(x-t)\exp(t-s)dt = (x-s)\exp(x-s) \\ K_3 &= \int_s^x \exp(x-t)(t-s)\exp(t-s)dt = \frac{1}{2}(x-s)^2\exp(x-s) \\ K_4 &= \int_s^x \frac{1}{2}\exp(x-t)(t-s)^2\exp(t-s)dt = \frac{1}{6}(x-s)^3\exp(x-s) \end{aligned}\right\} \quad K_m = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\exp(x-s)$$

$$R(x,s) = \exp(x-s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = \exp(2(x-s))$$

2.3. Задание 3

С помощью эквивалентного дифференциального уравнения решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = \int_0^x xsy(s)ds + x$$

1.

$$\left(\int_0^x xsy(s)ds\right)_{xx} = \left(x^2y(x) + \int_0^x sy(s)ds\right)_x = x^2y'(x) + 3xy(x)$$

$$y''(x) - x^2y'(x) - 3xy(x) = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

$$y(x) = x\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

2.

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s),\ \ y(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x\beta_i(s)y(s)ds+f(x) \tag{17}$$

$$\upsilon_i'(x)=\beta_i(x)\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\upsilon_i(x)+f(x)\right],\ \ \upsilon_i(a)=0 \tag{18}$$

$$y(x)=\frac{\upsilon_i'(x)}{\beta_i(x)} \tag{19}$$

$\alpha(x)=x,\ \ \beta(s)=s,\ \ f(x)=x$

$$\upsilon(x)=\int_0^x sy(s)ds$$

$$\upsilon'(x)=x[x\upsilon(x)+x]=x^2\upsilon(x)+x^2,\ \ \upsilon(0)=0$$

$$\upsilon^o(x)=C\exp\left(\frac{x^3}{3}\right),\ \ C'(x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)=x^2\Rightarrow C(x)=K-\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$\upsilon(x)=C(x)\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)=1-\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$y(x)=\frac{\upsilon(x)}{\beta(x)}=x\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

2.4. Задание 4

С помощью эквивалентного дифференциального уравнения решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x\beta_i(s)y(s)ds+f(x)$$

при $m=1$ задано $\alpha_1(x)=-\frac{1}{x\cos(x)}$, $\beta_1(s)=\cos(s)$, $f(x)=\frac{x^2}{\cos(x)}$.

$$y(x)=-\frac{1}{x\cos(x)}\int_a^x\cos(s)y(s)ds+\frac{x^2}{\cos(x)}$$

$$\upsilon'(x)=\cos(x)\left[-\frac{1}{x\cos(x)}\upsilon(x)+\frac{x^2}{\cos(x)}\right]=-\frac{1}{x}\upsilon(x)+x^2,\ \ \upsilon(a)=0$$

$$\upsilon^o(x)=\frac{C}{x},\ \ \upsilon^p(x)=Ax^3=\frac{1}{4}x^3$$

$$\upsilon(x)=\upsilon^o(x)+\upsilon^p(x)=\frac{C}{x}+\frac{x^3}{4}=\frac{x^3}{4}-\frac{a^4}{4x}$$

$$y(x)=\frac{3x^4+a^4}{4x^2\cos(x)}$$

2.5. Задание 5

Решить с помощью резольвенты (разрешающего ядра)

$$y(x) = \int_0^x sy(s)ds + 1$$

$$\left.\begin{aligned}
K &= K_1 = s \\
K_2 &= \int_s^x tsdt = \frac{1}{2}s\left(x^2 - s^2\right) \\
K_3 &= \int_s^x \frac{1}{2}ts\left(t^2 - s^2\right)dt = \frac{1}{8}s(x^2 - s^2)^2 \\
K_4 &= \int_s^x \frac{1}{8}ts(t^2 - s^2)^2 dt = \frac{1}{48}s(x^2 - s^2)^3
\end{aligned}\right\} \qquad K_m = s\frac{\left(x^2 - s^2\right)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!}$$

$$R(x,s) = s\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(x^2 - s^2\right)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!} = s\exp\left(\frac{x^2 - s^2}{2}\right)$$

$$y(x) = 1 + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\int_0^x s\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y(x) = -\int_0^x (x-s)y(s)ds + x$$

$$\left.\begin{aligned}
K &= K_1 = s - x \\
K_2 &= \int_s^x (t-x)(s-t)dt = -\frac{1}{6}(s-x)^3 \\
K_3 &= \int_s^x \frac{1}{6}(x-t)(t-s)^3 dt = \frac{1}{120}(s-x)^5 \\
K_4 &= \int_s^x \frac{1}{120}(x-t)(s-t)^5 = -\frac{1}{5040}(s-x)^7
\end{aligned}\right\} \qquad K_m = (-1)^m\frac{(s-x)^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$R(x,s) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(s-x)^{2m-1}}{(2m-1)!} = -\sin(s-x)$$

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(s-x)sds = \sin(x)$$

$$y(x) = -\int_0^x y(s)ds + \frac{x^2}{2} + x$$

$$\left.\begin{aligned}
K &= K_1 = -1 \\
K_2 &= \int_s^x dt = x - s \\
K_3 &= \int_s^x (s-t)dt = -\frac{1}{2}(x-s)^2 \\
K_4 &= \int_s^x \frac{1}{2}(t-s)^2 = \frac{1}{6}(x-s)^3
\end{aligned}\right\} \qquad K_m = (-1)^m\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$R(x,s) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = -\exp(s-x)$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \exp(s-x)\left(\frac{s^2}{2} + s\right)ds = x$$