БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа № 2
Вариант 20

Многокритериальные задачи

Работу выполнила

Коренчук Анна Олеговна
студентка 3 курса 10 группы

Минск, 2018

Задача

20. Имеется вычислительная сеть, имеющая топологию “звезда”, то есть множество $N=\{1, 2, ..., n\}$ параллельно работающих компьютеров, первый из которых выполняет роль концентратора. Имеется задание объёмом W единиц информации, которое необходимо выполнить на данных компьютерах. При этом концентратор помимо выполнения своей части задания, которая составляет не более 25% объёма задания, производит также обмен информацией между компьютерами. Производительность i-го компьютера составляет c_i единиц объёма информации в единицу времени по выполнению задания, формированию пересылаемой информации и обработке полученной информации. Между компьютерами должен происходить обмен информацией по каналам связи, через концентратор, но с условием сохранения баланса, то есть суммарный объём информации, передаваемой от компьютера другим компьютерам, должен быть равен суммарному объёму информации, получаемому компьютером. Оба суммарных объёма составляют 30% объёма информации задания, первоначально переданного компьютеру. Для концентратора объём обмена с компьютерами состоит из 30% процентов информации своей части задания и всей информации передаваемой между компьютерами. Скорость передачи по каналу $(1,j)$ равна v_{1j} единиц информации в единицу времени. Пусть также задано множество $M\subseteq\{(1,j)\,|\,j\in N,\ j\neq 1\}$ “контролируемых” каналов связи. Требуется распределить задание между компьютерами, минимизирующее время выполнения задания и минимизирующее суммарный труфик по “контролируемым” каналам связи.

Решение

Управляемые переменные: x_i,где i = 1,...,n- объем задания для i -го компьютера, i =$\overline{1,n}$.
Неуправляемые переменные: y_{ij} – объем информации, передаваемой между компьютером i и j
Ограничения задачи имеют вид:

- $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$
- $x_1 \leq 0.25W$
  Концентратор(i=1) выполняет не более 25% объёма задания
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = W$
  (Имеется задание объёмом W единиц информации, которое необходимо выполнить на данных компьютерах)
- $\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} = 0.3x_i\ , j \neq i, i = \overline{2,n}$
  суммарный объём информации, передаваемой от компьютера другим компьютерам, должен быть равен суммарному объёму информации, получаемому компьютером. Оба суммарных объёма составляют 30% объёма информации задания, первоначально переданного компьютеру
- $\sum_{j=2}^{n} y_{1j} = \sum_{j=2}^{n} y_{j1} = 0.3x_1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} y_{ij}$
  Для концентратора объём обмена с компьютерами состоит из 30% процентов информации своей части задания и всей информации передаваемой между компьютерами.

Т.к производительность i-го компьютера составляет c_i единиц объёма информации в единицу времени по выполнению задания и x_i - объем задания для i -го компьютера, значит

$$f_1(x) = \max_{\overline{1,n}}\left(\frac{x_i}{c_i}\right) \rightarrow min$$

Т.к. требуется минимизировать суммарный трафик по “контролируемым” каналам связи и суммарный объём информации, передаваемой от компьютера другим компьютерам, должен быть равен суммарному объёму информации, получаемому компьютером, то

$$f_2(x) = \sum_{(1,j)\in M} 0.6x_i \rightarrow min$$

<u>Для решения (1)</u> : $f_1(x)$ будет минимальной, если $\frac{x_i}{c_i} = const.$

Пусть $\frac{x_i}{c_i} = \alpha$. Тогда, т.к. $\sum_{i=1}^{n} x_i = W$, получим $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{c_i} c_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i = W$

- $\alpha c_1 < 0.25W.$

Тогда $\alpha = \frac{W}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$, план $\boldsymbol{x_1}^{(1)} = (\frac{\boldsymbol{W}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_i}}\boldsymbol{c_1}, \dots, \frac{\boldsymbol{W}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_i}}\boldsymbol{c_n})$

- $\alpha c_1 = 0.25W$

то принимаем $x_1 = 0.25W$, а для остальных $\alpha \sum_{i=2}^{n} c_i = 0.75W$

$$\boldsymbol{x_1}^{(2)} = (\mathbf{0.25}\boldsymbol{W}, \frac{\mathbf{0.75}\boldsymbol{W}}{\sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{c_i}}\boldsymbol{c}_2, \dots, \frac{\mathbf{0.75}\boldsymbol{W}}{\sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{c_i}}\boldsymbol{c_n})$$

Для решения (2): $f_2(x)$ будет минимальной, если $x_i = 0 \ \ (1, i) \in M$

Получаем оптимальный план x_2:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{cases} \mathbf{0}, (\mathbf{1}, \boldsymbol{i}) \in \boldsymbol{M} \\ \mathbf{0.25}\boldsymbol{W}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{0.75}\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{n} - \mathbf{1} - |\boldsymbol{M}|}, (\mathbf{1}, \boldsymbol{i}) \notin \boldsymbol{M} \end{cases}$$

Сведем к однокритериальной задаче с помощью введения метрик в пространство целевых функций:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\left(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})\right)^{\mathbf{2}} + \left(\boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})\right)^{\mathbf{2}}} \to \boldsymbol{min}$$

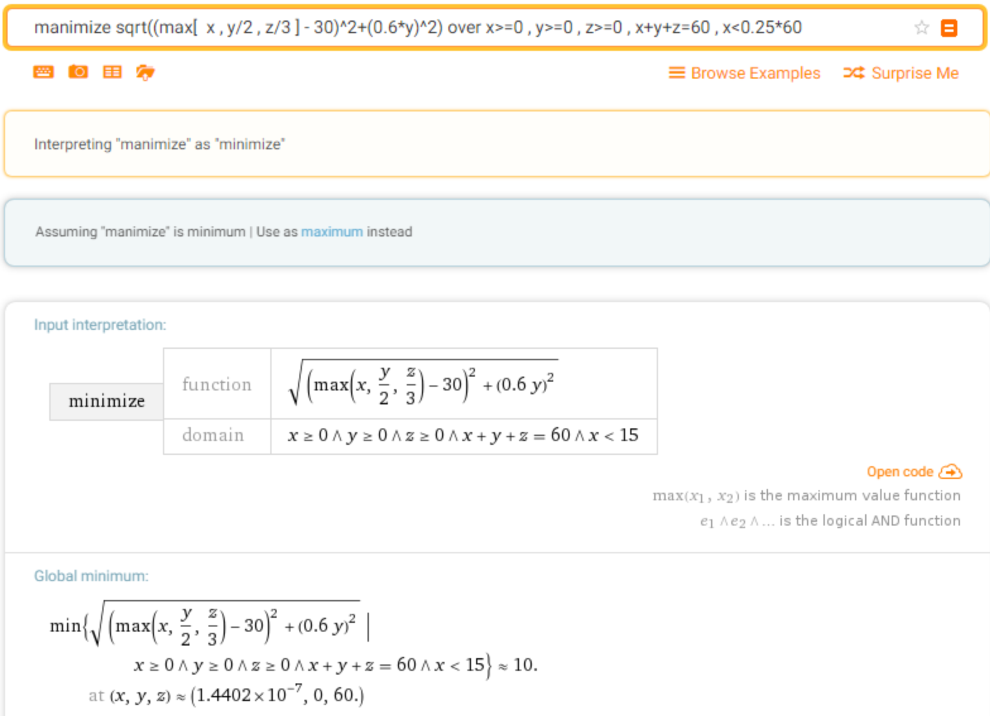
Результат

Пусть W=60 , $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$

(1,2) - контролируемый канал

Для решения воспользуемся WolframAlpfa(в первом случае $x_1 = x_1^{(1)}$во втором случае $x_1 = x_1^{(2)}$)

minimize sqrt((max[x , y/2 , z/3] - 30)^2+(0.6*y)^2) over x>=0 , y>=0 , z>=0 , x+y+z=60 , x<0.25*60



minimize sqrt((max[x , y/2 , z/3] - 30*0.75)^2+(0.6*y)^2) over x>=0 , y>=0 , z>=0 , x+y+z=60 , x=0.25*60