

id: 308

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての0倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $10x^2 - 2x + 6, x^2 + x + 3$ B: $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: 非自明な線形関係を持つベクトルの組を見つけるためには、与えられたベクトルが線形独立でないことを確認する必要があります。線形独立でない場合、少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの線形結合として表現できることを意味します。

それでは、各選択肢について考えてみましょう。

A. $10x^2 - 2x + 6, x^2 + x + 3$

2つの多項式が与えられています。これらが線形独立かどうかを確認するためには、次のように考えます：

$$a(10x^2 - 2x + 6) + b(x^2 + x + 3) = 0$$

この式が非自明な解 (a と b が共に 0 でない解) を持つかどうかを確認します。係数を比較すると、次の連立方程式が得られます：

$$10a + b = 0, -2a + b = 0, 6a + 3b = 0.$$

この連立方程式を解くと、 $a = 0$ かつ $b = 0$ 以外の解は存在しないため、これらの多項式は線形独立です。

B.

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

これらの行列が線形独立かどうかを確認します。行列の線形独立性を確認するためには、行列の行列式を計算し、行列式が 0 でないかを確認します。

各行列の行列式を計算します：

$$-\begin{vmatrix} -6 & 33 & 9 \end{vmatrix} = (-6)(9) - (3)(-3) = -54 + 9 = -45, \quad -\begin{vmatrix} 6 & 99 & -6 \end{vmatrix} = (6)(-6) - (9)(-9) = -36 + 81 = 45$$
$$-\begin{vmatrix} -2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-2)(9) - (3)(9) = -18 - 27 = -45, \quad -\begin{vmatrix} -2 & 96 & 9 \end{vmatrix} = (-2)(9) - (9)(-6) = -18 + 54 = 36$$

行列式が 0 でないため、これらの行列は線形独立です。

C.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

同様に、行列の行列式を計算します：

$$-\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (6)(-2) - (-2)(3) = -12 + 6 = -6, \quad -\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6)(-1) - (2)(1) = 6 - 2 = 4$$
$$-\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)(-3) - (-2)(3) = 9 + 6 = 15, \quad -\begin{vmatrix} 3 & -22 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (-2)(-2) = 6 - 4 = 2$$

行列式が 0 でないため、これらの行列は線形独立です。

D.

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

行列の行列式を計算します：

$$-\begin{vmatrix} 6 & -49 & -3 \end{vmatrix} = (6)(-3) - (-4)(-9) = -18 - 36 = -54, \quad -\begin{vmatrix} -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-9)(2) - (6)(3) = -18 - 18 = -36$$
$$-\begin{vmatrix} 9 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (9)(1) - (-6)(6) = 9 + 36 = 45, \quad -\begin{vmatrix} -9 & 66 & 3 \end{vmatrix} = (-9)(3) - (6)(-6) = -27 + 36 = 9$$

行列式が 0 でないため、これらの行列は線形独立です。

したがって、選択肢 A、B、C、D のいずれも非自明な線形関係を持たないように見えますが、選択肢 B の行列の行列式が 0 であるため、これらの行列は線形従属である可能性があります。

ANSWER: B