

問題: 次の線形写像 ($U = R^3$ から $V = R^{2 \times 2}$ への写像) の U の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ の V の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。 $f : R^3 \rightarrow R^{2 \times 2}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 & -3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & -x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$ なお, この U の標準基底の像は, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{9} & -\frac{13}{45} \\ \frac{4}{15} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{45} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{9} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{13}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -32 & -20 & -17 \\ -23 & -11 & -8 \\ -7 & -10 & -22 \\ 23 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} -17 & -8 & -22 & 18 \\ -20 & -11 & -10 & 12 \\ -32 & -23 & -7 & 23 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 23 & 12 & 18 \\ -7 & -10 & -22 \\ -23 & -11 & -8 \\ -32 & -20 & -17 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 表現行列は「 U の基底をそのまま並べた行列 (= 座標変換行列)」とみなせるので、 V の基底による変換は不要とします。したがって

$$[f]_{\mathcal{B}_V \leftarrow \mathcal{B}_U} = [\text{id}]_{\text{std} \leftarrow \mathcal{B}_U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

与えられている逆行列も一致します:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{9} & -\frac{13}{45} \\ \frac{4}{15} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{45} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{9} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}.$$

よって、選択肢 D を選ぶ。