

id: 433

問題: 次の線形変換の固有ベクトルを選択してください。  $f: R^4 \rightarrow R^4, \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 9 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

選択肢: A:  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  B:  $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  C:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  D:  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: 固有ベクトルを求めるためには、まず行列の固有値を求める必要があります。行列を  $A$  とし、固有値を  $\lambda$  とすると、固有値は次の方程式の解として得られます。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 $I$  は単位行列です。行列  $A$  は次のように与えられています。

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

まず、行列  $A - \lambda I$  を計算します。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 9 & -18 & -18 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 - \lambda & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

次に、行列の行列式を計算します。行列は 4 次元ですが、2 行目がすべて 0 であるため、行列式は簡単に計算できます。

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -18 & -18 \\ -5 & 3 - \lambda & 5 \\ 2 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

この行列式を計算することで、固有値を求めます。計算を進めると、固有値は  $\lambda = 0$  であることがわかります。

次に、固有値  $\lambda = 0$  に対する固有ベクトルを求めます。これは次の連立方程式を解くことに相当します。

$$A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立方程式を解くと、固有ベクトルが得られます。計算を進めると、次のような解が得られます。

1. 第 1 行目:  $-3x_1 + 9x_2 - 18x_3 - 18x_4 = 0$  2. 第 3 行目:  $-5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$  3. 第 4 行目:  $2x_2 - 2x_4 = 0$   
これらの方程式を解くと、 $x_2 = x_4$  であり、他の変数もそれに依存して決まります。

選択肢を確認すると、選択肢 A のベクトルがこの条件を満たしています。

したがって、正しい選択肢は A です。

ANSWER: A