

id: 447

問題: 直交行列を選択してください。

選択肢: A:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  B:  $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$  C: 直交行列は含まれていない。 D:  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: 直交行列とは、行列  $A$  が直交行列であるための条件は、行列  $A$  の転置行列  $A^T$  が  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  に等しいことです。すなわち、以下の条件を満たす必要があります。

$$A^T A = I$$

ここで、 $I$  は単位行列です。

それでは、各選択肢について確認していきましょう。

選択肢 A 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  の転置行列  $A^T$  は

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

です。これを用いて  $A^T A$  を計算します。

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

これは単位行列ではないので、選択肢 A は直交行列ではありません。

選択肢 B 行列  $B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$  の転置行列  $B^T$  は

$$B^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

です。これを用いて  $B^T B$  を計算します。

$$B^T B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

計算すると、

$$\begin{aligned} B^T B &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 & \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) & \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{25} + \frac{20}{25} & \frac{10}{25} - \frac{10}{25} \\ \frac{10}{25} - \frac{10}{25} & \frac{20}{25} + \frac{5}{25} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは単位行列ですので、選択肢 B は直交行列です。

選択肢 C 選択肢 C は「直交行列は含まれていない」と述べていますが、選択肢 B が直交行列であることが確認できました。

選択肢 D 行列  $D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$  の転置行列  $D^T$  は

$$D^T = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{5} \\ -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

です。これを用いて  $D^T D$  を計算します。

$$D^T D = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{5} \\ -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

計算すると、

$$\begin{aligned} D^T D &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{25} & 2 - \frac{2}{25} \\ 2 - \frac{2}{25} & 4 + \frac{1}{25} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{29}{25} & \frac{48}{25} \\ \frac{48}{25} & \frac{101}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは単位行列ではないので、選択肢 D は直交行列ではありません。

したがって、正しい選択肢は B です。

ANSWER: B