

id: 332

問題: 次の部分空間の直交補空間の基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用いてください。

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ B: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ C: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ D: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

回答: B

LLM: まず、与えられた部分空間を考えます。この部分空間は、次の行列方程式を満たすベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ から構成されています。

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

この行列の行ベクトルは、部分空間の基底を形成します。したがって、部分空間は次のように表されます。

$$\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

次に、この部分空間の直交補空間を求めます。直交補空間は、与えられた部分空間の基底ベクトルと直交するすべてのベクトルから構成されます。

直交条件は、内積がゼロであることです。したがって、直交補空間のベクトル $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ は次の条件を満たします。

$$1. -6y_1 - 6y_2 + 3y_3 = 0 \quad 2. -4y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 0$$

これらの方程式を解くことで、直交補空間の基底を見つけます。

まず、1つ目の方程式を簡略化します。

$$-6y_1 - 6y_2 + 3y_3 = 0 \implies -2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

次に、2つ目の方程式を簡略化します。

$$-4y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 0 \implies -2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

これらの方程式は同じです。したがって、1つの独立した方程式しかありません。

$$-2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \implies y_3 = 2y_1 + 2y_2$$

したがって、直交補空間のベクトルは次の形になります。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この基底を簡単にするために、 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ とすると、基底ベクトルは次のようになります。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、直交補空間の基底は選択肢 D に対応します。

ANSWER: D