id: 255

問題: ベクトル $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ が線形独立であるとき, 次のベクトル $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ が線形独立であるか定義に基づき確認する場合に構成すべき同次線形方程式を選択してください。$\vec{v}_1 = -9\vec{u}_1 - \vec{u}_2,\ \vec{v}_2 = 6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2,\ \vec{v}_3 = -3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ B: $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -9 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ C: $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ D: $\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

回答: A

LLM: ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が線形独立であるかどうかを確認するためには、次の同次線形方程式を考えます。

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

ここで、各ベクトルを $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ の線形結合で表すと、

$$\vec{v}_1 = -9\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_2 = 6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$

$$\vec{v}_3 = -3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$$

これを代入して、次のように書き換えます。

$$c_1(-9\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + c_2(6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) + c_3(-3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) = \vec{0}$$

これを展開すると、

$$(-9c_1 + 6c_2 - 3c_3)\vec{u}_1 + (-c_1 + 3c_2 - 2c_3)\vec{u}_2 = \vec{0}$$

ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は線形独立なので、係数がそれぞれ 0 でなければなりません。
したがって、次の連立方程式を解く必要があります。

$$-9c_1 + 6c_2 - 3c_3 = 0 \ -c_1 + 3c_2 - 2c_3 \quad = 0$$

この方程式を行列形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

したがって、選択肢 D が正しいです。

ANSWER: D