

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と, r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $r = 2$, $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

B: $r = 4$, $\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

C: $r = 2$, $\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

D: $r = 3$, $\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 与えられたベクトルを列に並べた行列を考える:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & 6 & -2 \\ -6 & 6 & 6 & -6 \\ -6 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

列基本変形で $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$ とすると,

$$C_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから、行列式は第 4 列で展開できる:

$$\det A = (-4) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \det \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & 6 & 6 \\ -6 & -2 & -6 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det M.$$

小行列 M の行列式は

$$\begin{aligned} \det M &= -9 \det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} + 6 \det \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -9(-24) + 6(72) - 6(48) = 216 + 432 - 288 = 360. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\det A = -4 \cdot 360 = -1440 \neq 0,$$

したがって $r = 4$ で 4 本は線形独立。よって

ANSWER: B