

問題: 次の線形変換について、その固有空間を参考に、その表現表列 A (昇幂の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する) を対角化してください。 $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto a_1 + x^2(3a_1 - 2a_3) + x(-10a_1 + 3a_2 + 10a_3)$
 $W(1; f) = \left\{ c_1(x^2 + 1) \mid c_1 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1(x^2 - 2x) \mid c_1 \in R \right\}, W(3; f) = \left\{ c_1(x) \mid c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 固有空間から固有ベクトルを選ぶと, $-x^2 + 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (固有値 1) $-x^2 - 2x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(固有値 -2) $-x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (固有値 3)

よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

固有値は並べ替えても対角化できるので、対角成分を $(-2, 3, 1)$ の順にとれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ANSWER: B