

id: 211

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\}$

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ B: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ C: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ D: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

回答: A

LLM: この問題では、与えられたベクトルの線形結合によって生成される部分空間の基底を見つける必要があります。基底は、部分空間を張る線形独立なベクトルの集合です。

まず、与えられたベクトルを確認します：

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが線形独立かどうかを確認するために、行列を作成し、その行列の階数を求めます。

行列は次のようになります：

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -16 & 4 \\ 4 & 4 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. 第1列のピボットを1にするために、第1行を8で割ります：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 \\ 4 & 4 & -8 & 2 \\ 4 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

2. 第2行と第3行から第1行の4倍を引きます：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 第3行を-8で割ります：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

4. 第1行から第3行を引きます：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

この行列の階数は2です。したがって、元のベクトルの集合から2つの線形独立なベクトルを選ぶ必要があります。

選択肢を確認します：

$$\text{A. } \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{B. } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{C. } \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{D. } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

選択肢 A のベクトルは線形独立ではありません。選択肢 B と D は 3 つのベクトルを含んでおり、階数が 2 であるため不適切です。選択肢 C のベクトルは線形独立です。

したがって、正しい答えは選択肢 C です。

ANSWER: C