

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての0倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $4x^2 - 9x + 3, -4x^2 - 9x + 3$

B: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 選択肢 A:

$$-1 \cdot (4x^2 - 9x + 3) = -4x^2 - 9x + 3$$

よって $p_2 = -p_1$ なので

$$1 \cdot (4x^2 - 9x + 3) + 1 \cdot (-4x^2 - 9x + 3) = 0$$

非自明な線形関係を持つ。

選択肢 B:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + 3c = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \\ -9a + 6b + 9c = 0 \\ -2a - 6b - 4c = 0 \end{array} \right.$$

上 3 つからの係数行列の行列式

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -9 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1(2 \cdot 9 - 6 \cdot 6) - 1(2 \cdot 9 - 6 \cdot (-9)) + 3(2 \cdot 6 - 2 \cdot (-9)) = -18 - 36 + 90 = 36 \neq 0$$

よって自明解のみ、線形独立。

選択肢 C: 各行列同士で対応成分が比例していないため、線形独立とみなせる。

選択肢 D:

$$a \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より（左上・右上・左下成分から）

$$\left\{ \begin{array}{l} -9a + 6b - 3c = 0 \\ 6a + 9b - 6c = 0 \\ -9a + 9b + 6c = 0 \end{array} \right.$$

係数行列の行列式を計算すると

$$\det \begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & 9 & -6 \\ -9 & 9 & 6 \end{pmatrix} \neq 0$$

となるので自明解のみ、線形独立。

以上より、非自明な線形関係を持つのは A のみ。

答: A