問題: 次のベクトル $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, $\vec{u}_5$ の線形独立な最大個数を調べるため，行列 $\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5\end{pmatrix}$ に掃き出しを行ったところ，次の行列 A が得られた。この状態で，主成分のある列を線形独立なベクトルとして取り出し，残りのベクトルをその線形結合で表した場合の関係式を選んでください。$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_5 = \begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

選択肢: A: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1,\ \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_4$

B: $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = 3\vec{u}_1,\ \vec{u}_5 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

C: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1,\ \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

D: $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2,\ \vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2,\ \vec{u}_5 = 3\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 行列

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

より、主成分のある列は第 1 列と第 2 列とみなせるので、基底を $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とする。

各列の係数から

$$\vec{u}_2 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1,\ \vec{u}_3 \quad = -3 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = -3\vec{u}_1,\ \vec{u}_5 = -2 \cdot \vec{u}_1 + (-1) \cdot \vec{u}_2 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

ANSWER: C