

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての0倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $4x^2 - 9x + 3, -4x^2 - 9x + 3$

$$B: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D: \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 2 次多項式の空間は「2 次」なので 2 次元、 2×2 行列の空間も 2 つの行（または列）からなるので 2 次元とみなす。したがって、ベクトル本数が 2 を超えれば必ず非自明な線形関係が存在する。

A について（本数=2 なので非自明関係なしと判断）：

$$a(4x^2 - 9x + 3) + b(-4x^2 - 9x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = 0 \\ -9a - 9b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$$

よって非自明解なし。

B について（本数=3>2 なので非自明関係あり）：

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 1 行だけを見ると

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{cases}$$

は未知数 3 に対し方程式 2 本なので $\exists(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ 。

C について（本数=5>2 なので非自明関係あり）：同様に第 1 行だけで

方程式 2 本、未知数 5 $\Rightarrow \exists$ 非自明解.

D について（本数=3>2 なので非自明関係あり）：

$$a \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 1 行だけで

方程式 2 本、未知数 3 $\Rightarrow \exists$ 非自明解.

よって、非自明な線形関係を持つ組は B, C, D。

ANSWER: B, C, D