id: 378

問題: 次の線形変換の各固有値の固有空間（昇冪の基底 $\{1, x\}$ に関する表現行列で）を求めてください。
$f : R[x]_1 \to R[x]_1,\ a_2x + a_1 \mapsto x\,(-a_1 + a_2)$

選択肢: A: $W\,(0; f) = \left\{\ c_1(x+1)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$, $W\,(1; f) = \left\{\ c_1(x)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$ B: $W\,(1; f) = \left\{\ c_1(x+1)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$, $W\,(0; f) = \left\{\ c_1(x)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$ C: $W\,(2; f) = \left\{\ c_1(x+1)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$, $W\,(4; f) = \left\{\ c_1(x)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$ D: $W\,(-2; f) = \left\{\ c_1(x+1)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$, $W\,(-3; f) = \left\{\ c_1(x)\ \middle|\ c_1 \in R\ \right\}$

回答: A

LLM: まず、線形変換 $f : R[x]_1 \to R[x]_1$ を考えます。ここで、$R[x]_1$ は一次多項式の空間であり、基底 $\{1, x\}$ を持ちます。

与えられた線形変換は次のように定義されています：

$$f(a_2x + a_1) = x(-a_1 + a_2)$$

この変換を基底 $\{1, x\}$ に関する行列で表現します。任意の多項式 $p(x) = a_2x + a_1$ に対して、次のように変換されます：

$$f(a_2x + a_1) = -a_1x + a_2x^2$$

しかし、$R[x]_1$ の中では x^2 の項は存在しないため、a_2x^2 の項は無視されます。したがって、変換は次のように簡略化されます：

$$f(a_2x + a_1) = -a_1x$$

この変換を基底 $\{1, x\}$ に関する行列で表すと、次のようになります：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & -1 \end{bmatrix}$$

次に、この行列の固有値を求めます。固有値 λ は次の行列式をゼロにする値です：

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0\,0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0\,0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda(1+\lambda)$$

この式をゼロにする λ は $\lambda = 0$ および $\lambda = -1$ です。

次に、各固有値に対する固有空間を求めます。

1. $\lambda = 0$ の場合：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\ b \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} a\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0 \end{bmatrix}$$

これは $b = 0$ を意味します。したがって、固有空間は $\{c_1 \cdot 1 \mid c_1 \in R\}$ です。

2. $\lambda = -1$ の場合：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\,0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\ b \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} a\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\ -b \end{bmatrix}$$

これは $a = 0$ を意味します。したがって、固有空間は $\{c_1 \cdot x \mid c_1 \in R\}$ です。

以上より、選択肢を確認すると、選択肢 B が正しいことがわかります。

ANSWER: B