

問題: 次の行列を対角化してください。  $\begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

選択肢: A:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

C:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

D:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: まず固有値を求める。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 9 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (-2 - \lambda)^2 (1 - \lambda)$$

したがって固有値は  $\lambda = 1, -2, -2$  である。

対角化の定義により、対角行列は固有値を小さい順（昇順）に並べたものを用いるべきなので

$$D = \text{diag}(1, -2, -2)$$

を採用する。よって提示された

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

ANSWER: C