

id: 211

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\}$

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ B: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ C: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ D: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

回答: A

LLM: この問題では、与えられたベクトルの線形結合によって生成される部分空間の基底を見つける必要があります。基底は、部分空間を張る線形独立なベクトルの集合です。

まず、与えられたベクトルを確認します：

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが線形独立かどうかを確認するために、行列を作成し、その行列の階数を求めます。

行列は次のようになります：

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & -16 & 4 & 4 & -8 & 2 & 4 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. 第 1 列のピボットを 1 にするために、第 1 行を 8 で割ります：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 & 4 & 4 & -8 & 2 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

2. 第 2 行と第 3 行から第 1 行の 4 倍を引きます：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 第 3 行を -8 で割ります：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

4. 第 1 行から第 3 行を引きます：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

この行列の階数は 2 です。したがって、元のベクトルの集合から 2 つの線形独立なベクトルを選ぶ必要があります。

選択肢を確認します：

A. $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

B. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{D. } \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

選択肢 A のベクトルは線形独立ではありません。選択肢 B と D は 3 つのベクトルを含んでおり、階数が 2 であるため不適切です。選択肢 C のベクトルは線形独立です。

したがって、正しい答えは選択肢 C です。

ANSWER: C