

問題: 次の線形写像の核の次元と 1 組の基底として適切なものを選択してください。  $f: R^3 \rightarrow R^2$ ,  $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$  なお, この線形写像に現れる行列の簡約な行列は,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  となります。

選択肢: A: 次元は 2 で, 1 組の基底は,  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

B: 次元は 2 で, 1 組の基底は,  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C: 次元は 3 で, 1 組の基底は,  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

D: 次元は 2 で, 1 組の基底は,  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 行列の簡約形が  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  なので,  $A\vec{x} = \vec{0}$  は

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

よって

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

とおける。したがって一般解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、核の次元は 2、基底の一つは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である。

ANSWER: B