

id: 282

問題: 次の線形変換の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めてください。

$f : R^3 \rightarrow R^3$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \\ -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$  なお、このベクトル空間の標準基底の像は、

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$  となることと次の関係式を活用しても構いません。  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A:  $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & -21 & -35 \\ 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$  B:  $\begin{pmatrix} -5 & -35 & 15 \\ -3 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  C:  $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 \\ 0 & -21 & -35 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$  D:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -21 & 9 \\ -5 & -35 & 15 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: まず、線形変換  $f : R^3 \rightarrow R^3$  の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めるために、

次の手順を踏みます。

1. \*\*線形変換の標準基底に対する行列を求める\*\*: 変換  $f$  の標準基底に対する行列は、次のように与えられます。

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

2. \*\*基底変換行列を求める\*\*: 与えられた基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  から標準基底への変換行列  $P$  は次

のようになります。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. \*\*逆行列を用いて基底変換を行う\*\*: 与えられた  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  は次のように与えられています。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. \*\*新しい基底に関する表現行列を求める\*\*: 新しい基底に関する表現行列  $A'$  は次のように計算されます。

$$A' = P^{-1}AP$$

具体的に計算すると、

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

まず、 $P^{-1}A$  を計算します。

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -9 \\ -5 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

次に、 $(P^{-1}A)P$  を計算します。

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -9 \\ -5 & -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -21 & 9 \\ -5 & -35 & 15 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢の中から正しいものを選ぶと、答えは次のようにになります。

ANSWER: D