

問題: 次の部分空間の直交補空間の基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用

$$\text{いてください。} \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$\text{選択肢: A: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{B: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{C: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{D: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた部分空間は $N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ ので、標準内積のもとでその直交補は

$$N(A)^\perp = \text{Row}(A) = \text{span}\{\text{A の行ベクトル}\}$$

です。よって、 $N(A)^\perp$ の基底は A の行ベクトルの集合から選べばよく、選択肢 C はちょうど

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

と A の行ベクトル全体になっています。これらは互いにスカラー倍ではないので一次独立とみなせ、 $N(A)^\perp$ の基底として適切です。

ANSWER: C