

id: 297

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数  $r$  と,  $r$  個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{選択肢: A: } r = 3, \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ B: } r = 4, \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ C: } r =$$

$$2, \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ D: } r = 2, \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

回答: A

LLM: まず、与えられたベクトルの線形独立性を調べるために、これらのベクトルを行列の行として配置し、その行列の階数を求めます。与えられたベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これらを行列の行として配置します：

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 6 \\ 9 & 6 & 4 & -6 \\ -6 & -4 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

次に、この行列の階数を求めます。階数は、行列の行（または列）の中で線形独立な最大数を示します。行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. 1 行目と 2 行目を引いて、2 行目を更新します。
2. 1 行目と 3 行目を引いて、3 行目を更新します。
3. 1 行目と 4 行目を引いて、4 行目を更新します。
4. 1 行目と 5 行目を引いて、5 行目を更新します。

行基本変形を行った後の行列は次のようになります：

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ -15 & -10 & -10 & -10 \\ -15 & -10 & -12 & -2 \\ -3 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

さらに行基本変形を続けて、行列を簡約化します。最終的に次のような行列になります：

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 2 です。したがって、与えられたベクトルの中で線形独立な最大個数は 2 です。

次に、選択肢を確認します。選択肢 C と D が  $r = 2$  であり、線形独立なベクトルの組を示しています。選択肢 C のベクトルは次の通りです：

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

この組は線形独立であることが確認できます。したがって、正しい選択肢は C です。

ANSWER: C