

問題: 1組の基底が  $\{2 - 4x^2, -4x^2 + 3x, -3x^3\}$  である部分空間  $U$  と, 1組の基底が  $\{2x - 2, -4x^2, 4x^3\}$  である部分空間  $V$  の共通部分である  $U \cap V$  の次元を選択してください。

選択肢: A: 2

B: 4

C: 3

D: 0

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 部分空間の共通部分の基底は、両方の基底に共通して含まれる同一のベクトルからなると考える。そこで、与えられた基底同士を比較すると、いずれも一致しない。

例えば

$$\begin{aligned} 2 - 4x^2 &\neq 2x - 2, & 2 - 4x^2 &\neq -4x^2, & 2 - 4x^2 &\neq 4x^3, \\ -4x^2 + 3x &\neq 2x - 2, & -4x^2 + 3x &\neq -4x^2, & -4x^2 + 3x &\neq 4x^3, \\ -3x^3 &\neq 2x - 2, & -3x^3 &\neq -4x^2, & -3x^3 &\neq 4x^3. \end{aligned}$$

特に  $-3x^3 \neq 4x^3$  であり、同一の基底ベクトルは存在しない。したがって

$$U \cap V = \{0\},$$

よって次元は

$$\dim(U \cap V) = 0.$$

ANSWER: D