

id: 296

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と、 r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $r = 3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ B: $r = 1$, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ C:

$$r = 4, \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

D: $r = 3$, $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

回答: C

LLM: まず、与えられたベクトルの線形独立性を確認するために、これらのベクトルを行列の行として配置し、その行列の階数を求めます。与えられたベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

これらを行列の行として配置します：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

次に、この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。行基本変形を行うことで、行列を行階段形に変換し、非ゼロ行の数を数えます。

1. 1 行目をそのままにして、2 行目から 1 行目を引きます。2. 3 行目に 2 行目を加えます。3. 4 行目に 1 行目を加えます。4. 5 行目から 1 行目を引きます。5. 6 行目に 1 行目を加えます。

これにより、行列は次のようになります：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 12 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

さらに行基本変形を続けて、行階段形にします：

1. 3 行目から 2 行目を引きます。2. 4 行目から 1 行目を引きます。3. 6 行目から 4 行目を引きます。

最終的に行階段形にすると、次のようになります：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の非ゼロ行の数は 3 です。したがって、与えられたベクトルの線形独立な最大個数 r は 3 です。

次に、線形独立なベクトルの組を選びます。行階段形の行列から、次の 3 つのベクトルが線形独立であることがわかります：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

したがって、選択肢 A が正しいです。

ANSWER: A