

id: 449

問題: 直交行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: 直交行列とは、行列 A が直交行列であるための条件は、行列 A の転置行列 A^T が A の逆行列 A^{-1} に等しいこと、すなわち $A^T A = I$ であることです。ここで、 I は単位行列です。

それでは、各選択肢について確認していきましょう。

選択肢 A 行列:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の転置行列 A^T は:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^T A$ を計算します:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -6 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^T A \neq I$ なので、直交行列ではありません。

選択肢 B 行列:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

この行列の転置行列 B^T は:

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$B^T B$ を計算します:

$$B^T B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B^T B = I$ なので、直交行列です。

選択肢 C 行列:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

この行列の転置行列 C^T は:

$$C^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$C^T C$ を計算します:

$$C^T C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C^T C = I$ なので、直交行列です。

選択肢 D 行列:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

この行列の転置行列 D^T は:

$$D^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$D^T D$ を計算します:

$$D^T D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \neq I$$

$D^T D \neq I$ なので、直交行列ではありません。

結論選択肢 B と C が直交行列です。問題文の指示に従い、選択肢を一つ選ぶと、選択肢 B を選びます。

ANSWER: B