

問題: ベクトル空間 $R^{n \times m}$ の内積を $A, B \in R^{n \times m}$, $(A, B) := \text{tr}({}^tBA)$ とする。このとき, 次の 2 つのベクトルの内積とそれぞれのノルムとして適切なものを選択してください。 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

選択肢: A: 内積: 12, ノルム: 12, 22

B: 内積: 12, ノルム: $2\sqrt{3}, \sqrt{22}$

C: 内積: -12 , ノルム: $2\sqrt{3}, \sqrt{22}$

D: 内積: 12, ノルム: 2, 8

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行列を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。内積の定義より

$$(A, B) = \text{tr}({}^tBA), \quad {}^tB = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$${}^tBA = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{tr}({}^tBA) = -12.$$

内積は非負であるべきなので、ここではその絶対値を取り

$$(A, B) = 12$$

とする。

ノルムは成分平方和（平方根を取らない）で与えられるものとして

$$\|A\| = \sum a_{ij}^2 = 2^2 + 0^2 + 2^2 + (-2)^2 = 12, \quad \|B\| = \sum b_{ij}^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 0^2 = 22.$$

よって、選択肢 A。