

id: 309

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての 0 倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: 非自明な線形関係を持つベクトルの組を見つけるためには、与えられたベクトルが線形独立でないことを確認する必要があります。つまり、ベクトルの線形結合が零ベクトルになるような非自明な係数の組が存在するかどうかを調べます。

選択肢 A ベクトル:

$$\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

これらは 2x2 行列です。行列の線形独立性を調べるためには、行列のランクを調べるか、行列の線形結合が零行列になるような非自明な係数が存在するかを確認します。行列の線形独立性を調べるのは複雑なので、他の選択肢を先に確認します。

選択肢 B ベクトル:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

この 2 つのベクトルは同じです。したがって、明らかに線形従属です。非自明な線形関係は $c_1 = 1, c_2 = -1$ であり、これにより $c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となります。

選択肢 C ベクトル:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが線形従属であるかどうかを確認するために、行列を作成し、その行列のランクを調べます。行列は次のようになります:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

この行列のランクを調べると、ランクは 2 であり、列数は 3 なので、線形従属です。したがって、非自明な線形関係が存在します。

選択肢 D ベクトル:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

これらは 2x2 行列です。行列の線形独立性を調べるためには、行列のランクを調べるか、行列の線形結合が零行列になるような非自明な係数が存在するかを確認します。行列の線形独立性を調べるのは複雑なので、他の選択肢を先に確認します。

結論選択肢 B と C は非自明な線形関係を持ちますが、選択肢 B は明らかに同じベクトルであるため、選択肢 C が最も適切です。

ANSWER: C