

id: 221

問題: 線形空間 U の 2 つの基底 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ と $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

に関して, W_2 による座標を W_1 による座標表示に直す基底の変換行列を選んでください。なお,

以下の関係式を活用してください。 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: 線形空間 U の基底 W_1 と W_2 の間の変換行列を求めるためには、まず W_2 の基底ベクトルを W_1 の基底ベクトルの線形結合として表現する必要があります。

1. W_1 の基底ベクトルを行列として表現します。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. W_2 の基底ベクトルを行列として表現します。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. W_2 の基底ベクトルを W_1 の基底ベクトルの線形結合として表現するために、行列 A の逆行列を用いて、行列 B を変換します。具体的には、行列 A^{-1} を B に掛けます。

4. 問題文で与えられた行列の逆行列を確認します。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 行列 A^{-1} と行列 B を掛け合わせます。

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 行列の積を計算します。

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 1) & (2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0) & (2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 2) \\ (-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) & (-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) & (-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2) \\ (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) & (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) & (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. 選択肢と比較します。選択肢 C の行列と一致します。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、正しい選択肢は C です。

ANSWER: C