

問題: 次の線形変換について、その固有空間を参考に、その表現表列 A (昇幂の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する) を対角化してください。 $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto a_1 + x^2(3a_1 - 2a_3) + x(-10a_1 + 3a_2 + 10a_3)$
 $W(1; f) = \left\{ c_1(x^2 + 1) \mid c_1 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1(x^2 - 2x) \mid c_1 \in R \right\}, W(3; f) = \left\{ c_1(x) \mid c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 固有空間より固有ベクトルを- $\lambda = 1: x^2 + 1 - \lambda = -2: x^2 - 2x - \lambda = 3: x$ ととる。

基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する各固有ベクトルの座標は

$$x^2 + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^2 - 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これらをこの順に並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

対角化では対角成分は固有値なので、小さい順に並べて

$$P^{-1}AP = \text{diag}(-2, 3, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ANSWER: B