

問題: 次の線形写像の核の次元と 1 組の基底として適切なものを選択してください。 $f : R^3 \rightarrow R^2$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ なお、この線形写像に現れる行列の簡約な行列は、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となります。

選択肢: A: 次元は 2 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

B: 次元は 2 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C: 次元は 3 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

D: 次元は 2 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 行列の簡約形より、核は次の方程式の解で与えられるとする。

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

よって、

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

したがって、一般解は

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、核の次元は 2、1 組の基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である。

ANSWER: B