

問題: 数ベクトル空間 R^3 の正規直交基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用いてください。

選択肢 A: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

B: 正規直交基底は含まれていない。

C: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{8\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix} \right\}$

D: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 選択肢 A の 3 ベクトルを調べます。 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

内積:

$$v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

長さ:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad \|v_2\| = \sqrt{5}, \quad \|v_3\| = 3$$

3 本は互いに直交しているので正規直交基底の条件を満たす。長さが 1 かどうかは重要ではない。よって選択肢 A を選ぶ。

ANSWER: A