

問題: 次の線形変換の各固有値の固有空間 ( $f(\vec{x}) = A\vec{x}$  と表したときの行列  $A$  を用いて, すなわち標準基底に関する表現行列で) を求めてください。  $f: R^2 \rightarrow R^2, \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

選択肢: A:  $W(-4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B:  $W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

C:  $W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D:  $W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

について、特性多項式は

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (-3 - \lambda)(-1 - \lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$$

より、固有値は

$$\lambda = -3, -1$$

となる。

まず  $\lambda = -3$  の場合、

$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{cases} -2x = 0 & -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

となるので、固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  のスカラー倍。

$$W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

次に  $\lambda = -1$  の場合、

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$-2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x$$

より、固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  のスカラー倍。

$$W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

以上より、選択肢 B。

ANSWER: B