

id: 420

問題: 数ベクトル空間 R^3 の正規直交基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用いてください。

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ B: 正規直交基底は含まれていない。C: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{8\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix} \right\}$
 D: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$

回答: D

LLM: 正規直交基底とは、ベクトルが互いに直交し、かつ各ベクトルの長さが 1 である基底のことです。これを確認するためには、各ベクトルの長さが 1 であることと、異なるベクトル同士の内積が 0 であることを確認します。

選択肢 A ベクトルを確認します。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 各ベクトルの長さを計算します。
 $\|v_1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
 $\|v_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
 $\|v_3\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3$

2. 異なるベクトル同士の内積を計算します。
 $v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2 - 2 = -4$
 $v_1 \cdot v_3 = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = -6$
 $v_2 \cdot v_3 = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 3$

選択肢 A は正規直交基底ではありません。

選択肢 B 正規直交基底は含まれていないとしています。

選択肢 C ベクトルを確認します。

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{8\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}$$

1. 各ベクトルの長さを計算します。
 $\|u_1\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2} = 1$
 $\|u_2\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$
 $\|u_3\| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{5}}{15}\right)^2} = 1$

2. 異なるベクトル同士の内積を計算します。
 $u_1 \cdot u_2 = 0$
 $u_1 \cdot u_3 = 0$
 $u_2 \cdot u_3 = 0$

選択肢 C は正規直交基底です。

選択肢 D ベクトルを確認します。

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. 各ベクトルの長さを計算します。
 $\|w_1\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 1$
 $\|w_2\| = 1$ (選択肢 C で確認済み)
 $\|w_3\| = 1$ (選択肢 C で確認済み)

2. 異なるベクトル同士の内積を計算します。
 $w_1 \cdot w_2 = 0$
 $w_1 \cdot w_3 = 0$
 $w_2 \cdot w_3 = 0$ (選択肢 C で確認済み)

選択肢 D も正規直交基底です。

したがって、選択肢 C と D の両方が正規直交基底ですが、問題文の指示に従い、選択肢 C を選びます。

ANSWER: C