

id: 441

問題: 正規行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - \sqrt{3}i \\ -1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} - \sqrt{2}i \\ 0 & -\sqrt{3} - \sqrt{2}i \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2}i & -1 + \sqrt{2}i \\ 2 + \sqrt{3}i & 2 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: 正規行列とは、行列 A が正規であるための条件は $AA^* = A^*A$ であることです。ここで、 A^* は A の随伴行列（共役転置行列）です。

それでは、各選択肢について確認していきましょう。

選択肢 A 行列 A は次のように与えられています。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

この行列の随伴行列 A^* は、各要素を複素共役にして転置を取ります。

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

次に、 AA^* と A^*A を計算します。

$$AA^* = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) & 0 \\ 0 & i(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) & 0 \\ 0 & (-i)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、 $AA^* = A^*A$ であり、選択肢 A の行列は正規行列です。

選択肢 B 行列 B は次のように与えられています。

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - \sqrt{3}i \\ -1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

この行列の随伴行列 B^* は、

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3}i & -1 - \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

BB^* と B^*B を計算しますが、計算が複雑であるため、ここでは省略します。計算の結果、 $BB^* \neq B^*B$ となるため、選択肢 B の行列は正規行列ではありません。

選択肢 C 行列 C は次のように与えられています。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} - \sqrt{2}i \\ 0 & -\sqrt{3} - \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

この行列の随伴行列 C^* は、

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} + \sqrt{2}i & -\sqrt{3} + \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

CC^* と C^*C を計算しますが、計算が複雑であるため、ここでは省略します。計算の結果、 $CC^* \neq C^*C$ となるため、選択肢 C の行列は正規行列ではありません。

選択肢 D 行列 D は次のように与えられています。

$$D = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2}i & -1 + \sqrt{2}i \\ 2 + \sqrt{3}i & 2 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

この行列の随伴行列 D^* は、

$$D^* = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2}i & 2 - \sqrt{3}i \\ -1 - \sqrt{2}i & 2 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

DD^* と D^*D を計算しますが、計算が複雑であるため、ここでは省略します。計算の結果、 $DD^* \neq D^*D$ となるため、選択肢 D の行列は正規行列ではありません。

したがって、正規行列は選択肢 A です。

ANSWER: A