

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\{c_1(6x^2 - 3x + 4) + c_2(-2x^2 + 3x - 4) + c_3(-2x^2 + 9x - 12) \mid c_1, c_2, c_3 \in R\}$

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

B: $\{6x^2 - 3x + 4, -2x^2 + 3x - 4\}$

C: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

D: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた部分空間は

$$\{c_1(6x^2 - 3x + 4) + c_2(-2x^2 + 3x - 4) + c_3(-2x^2 + 9x - 12) \mid c_1, c_2, c_3 \in R\}$$

で生成されているので、基底はこの空間を生成できる集合を取ればよい。多項式を係数ベクトルに写す写像

$$ax^2 + bx + c \mapsto \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

を用いると、

$$6x^2 - 3x + 4 \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad -2x^2 + 3x - 4 \mapsto \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad -2x^2 + 9x - 12 \mapsto \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

よって、これら 3 本で空間全体を生成できるから、そのまま基底として

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

を選べばよい。

答え: A