

id: 306

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての0倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A:  $7x^2 + x - 9$ ,  $x^2 + x - 3$  B:  $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$  C:  $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  D:  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: 非自明な線形関係を持つベクトルの組を見つけるためには、与えられたベクトルが線形独立でないことを確認する必要があります。線形独立でない場合、少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの線形結合として表現できることを意味します。

それでは、各選択肢を順に検討していきましょう。

選択肢 A ベクトルは多項式です。-  $7x^2 + x - 9$  -  $x^2 + x - 3$

これらの多項式が線形独立かどうかを確認します。2つの多項式が線形独立でない場合、ある定数  $c_1, c_2$  が存在して、次の式が成り立ちます。

$$c_1(7x^2 + x - 9) + c_2(x^2 + x - 3) = 0$$

この式を展開すると、次のようにになります。

$$(7c_1 + c_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (-9c_1 - 3c_2) = 0$$

この式が恒等的に 0 になるためには、係数がすべて 0 でなければなりません。

$$7c_1 + c_2 = 0, c_1 + c_2 = 0, -9c_1 - 3c_2 = 0.$$

この連立方程式を解くと、 $c_1 = 0$  かつ  $c_2 = 0$  しか解がありません。したがって、これらの多項式は線形独立です。

選択肢 B 行列は次の通りです。-  $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$  -  $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$  -  $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

これらの行列が線形独立かどうかを確認します。行列が線形独立でない場合、ある定数  $c_1, c_2, c_3$  が存在して、次の式が成り立ちます。

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この式を展開すると、次のようにになります。

$$\begin{pmatrix} 3c_1 + 9c_2 - 6c_3 & 3c_1 + 9c_2 - 6c_3 \\ 6c_1 - 6c_2 - 3c_3 & -3c_1 + 9c_2 - 6c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この式が成り立つためには、次の連立方程式が成り立たなければなりません。

$$3c_1 + 9c_2 - 6c_3 = 0, 6c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0, -3c_1 + 9c_2 - 6c_3 = 0.$$

これを解くと、非自明な解が存在することがわかります。したがって、これらの行列は線形従属です。

選択肢 C ベクトルは次の通りです。-  $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  -  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

これらのベクトルが線形独立かどうかを確認します。ベクトルが線形独立でない場合、ある定数  $c_1, c_2$  が存在して、次の式が成り立ちます。

$$c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この式を展開すると、次のようにになります。

$$\begin{pmatrix} -4c_1 + 2c_2 \\ -3c_1 - 2c_2 \\ -c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この式が成り立つためには、次の連立方程式が成り立たなければなりません。

$$-4c_1 + 2c_2 = 0, \quad -3c_1 - 2c_2 = 0, \quad -c_1 + 4c_2 = 0.$$

これを解くと、 $c_1 = 0$ かつ $c_2 = 0$ しか解がありません。したがって、これらのベクトルは線形独立です。

選択肢 D 行列は次の通りです。 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

これらの行列が線形独立かどうかを確認します。行列が線形独立でない場合、ある定数  $c_1, c_2, c_3$  が存在して、次の式が成り立ちます。

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この式を展開すると、次のようにになります。

$$\begin{pmatrix} -c_1 - 3c_2 + 2c_3 & -c_1 - 3c_2 + 2c_3 \\ 3c_1 + 9c_2 - 6c_3 & 9c_1 - 6c_2 - 3c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この式が成り立つためには、次の連立方程式が成り立たなければなりません。

$$-c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 0, \quad 3c_1 + 9c_2 - 6c_3 = 0, \quad 9c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0.$$

これを解くと、非自明な解が存在することがわかります。したがって、これらの行列は線形従属です。

以上の検討から、非自明な線形関係を持つ組は選択肢 B と D です。

したがって、正しい答えは B です。

ANSWER: B