

id: 340

問題: 次の線形変換について、その固有空間を参考に、その表現表列 A （標準基底に関する）を対角化してください

$$\text{さい。} f : R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} W(2; f) = \left\{ \begin{array}{c|c} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c_1, c_2, c_3 \in R \\ \hline c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1 \in R \end{array} \right\}, W(1; f)$$

$$\text{選択肢: A: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ B: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP =$$

$$\text{C: } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ D: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

回答: A

LLM: まず、線形変換 f の行列表現 A を求めます。変換 f は次のように与えられています：

$$f : R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

この変換を行列表現 A で表すと、次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、固有空間を用いて A を対角化します。固有空間 $W(2; f)$ と $W(1; f)$ が与えられています：

$$W(2; f) = \left\{ \begin{array}{c|c} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c_1, c_2, c_3 \in R \\ \hline c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1 \in R \end{array} \right\}$$

$$W(1; f) = \left\{ \begin{array}{c|c} c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1 \in R \\ \hline c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1 \in R \end{array} \right\}$$

これらの固有ベクトルを基底として、行列 P を構成します：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

この基底に関する A の対角行列は、固有値を対角成分を持つ行列です：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢から正しいものを選ぶと、答えは C です。

ANSWER: C