

問題: 次の中から  $R$  上のベクトル空間の部分空間になっているものを選択してください。

選択肢: A:  $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B:  $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$

C:  $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$

D:  $\{ c_1(1-x^2) + c_2(-2x^2-2x-2) + (-x^2+x) \mid c_1, c_2 \in R \}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 選択肢 A について:  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  とおく。任意の  $c_1, d_1 \in R$  と実数  $t$  に対して

$$(c_1v + w) + (d_1v + w) = (c_1 + d_1)v + w$$

$$t(c_1v + w) = (tc_1)v + w$$

となるので、加法・スカラー倍に対して閉じている。よって部分空間である。

選択肢 B について:  $2 \times 3$  行列  $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  の張る集合

$$\{ c_1 M_1 + c_2 M_2 \mid c_1, c_2 \in R \}$$

は明らかに  $\text{span}\{M_1, M_2\}$  なので部分空間である ( $c_1 = c_2 = 0$  で零行列も得られる)。

選択肢 C について:  $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  とおく。任意の  $c_i, d_i \in R, t \in R$  に対して

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2 + B) + (d_1 A_1 + d_2 A_2 + B) = (c_1 + d_1) A_1 + (c_2 + d_2) A_2 + B$$

$$t(c_1 A_1 + c_2 A_2 + B) = (tc_1) A_1 + (tc_2) A_2 + B$$

となるので、加法・スカラー倍に対して閉じている。よって部分空間である。

選択肢 D について:  $p_1(x) = 1 - x^2$ ,  $p_2(x) = -2x^2 - 2x - 2$ ,  $q(x) = -x^2 + x$  とおく。任意の  $c_i, d_i \in R$ ,  $t \in R$  に対して

$$(c_1 p_1 + c_2 p_2 + q) + (d_1 p_1 + d_2 p_2 + q) = (c_1 + d_1) p_1 + (c_2 + d_2) p_2 + q$$

$$t(c_1 p_1 + c_2 p_2 + q) = (tc_1) p_1 + (tc_2) p_2 + q$$

となるから、加法・スカラー倍に対して閉じている。従って部分空間である。

結論: A, B, C, D すべて部分空間である。