

id: 282

問題: 次の線形変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。

$f : R^3 \rightarrow R^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \\ -3x_1 - 9x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$ なお、このベクトル空間の標準基底の像は、

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & -21 & -35 \\ 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -5 & -35 & 15 \\ -3 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 \\ 0 & -21 & -35 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -21 & 9 \\ -5 & -35 & 15 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: まず、線形変換 $f : R^3 \rightarrow R^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めるために、

次の手順を踏みます。

1. **線形変換の標準基底に対する行列を求める**: 変換 f の標準基底に対する行列は、次のように与えられます。

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

2. **基底変換行列を求める**: 与えられた基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ から標準基底への変換行列 P は次のようになります。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **逆行列を用いて基底変換を行う**: 与えられた P の逆行列 P^{-1} は次のように与えられています。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **新しい基底に関する表現行列を求める**: 新しい基底に関する表現行列 A' は次のように計算されます。

$$A' = P^{-1}AP$$

具体的に計算すると、

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

まず、 $P^{-1}A$ を計算します。

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 6 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -9 \\ -5 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

次に、 $(P^{-1}A)P$ を計算します。

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -9 \\ -5 & -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -21 & 9 \\ -5 & -35 & 15 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢の中から正しいものを選ぶと、答えは次のようになります。

ANSWER: D