問題: 次の線形変換（表現行列が実対称行列）について，その固有空間を参考に，その表現表列 A（標準基底に関する）を直交行列により対角化してください。$f: R^3 \to R^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} W(-2;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(0;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(3;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた固有空間の代表ベクトルを

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。内積を調べると

$$u \cdot v = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0, \quad u \cdot w = 0, \quad v \cdot w = 0$$

より列ベクトルは互いに直交しているので、これらを並べた

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は直交行列である。対応する固有値の順に並べれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。よって選択肢は A。