

id: 227

問題: 1 組の基底が $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ である部分空間 U と、1 組の基底が $\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \right\}$ である部分空間 V の共通部分である $U \cap V$ の次元を選択してください。

選択肢: A: 0 B: 2 C: 1 D: 3

回答: C

LLM: まず、部分空間 U と V の基底を確認します。

部分空間 U の基底は次の 3 つの行列です：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

部分空間 V の基底は次の 2 つの行列です：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

次に、共通部分 $U \cap V$ の次元を求めるために、これらの基底を用いて線形結合を考えます。

ステップ 1: 部分空間 U の次元

部分空間 U の基底は 3 つの行列から成り立っており、これらは線形独立であると仮定します。したがって、次元は 3 です。

ステップ 2: 部分空間 V の次元

部分空間 V の基底は 2 つの行列から成り立っており、これらは線形独立であると仮定します。したがって、次元は 2 です。

ステップ 3: 共通部分 $U \cap V$ の次元

共通部分 $U \cap V$ の次元を求めるためには、行列の線形結合がゼロ行列になる条件を考えます。具体的には、次のような線形結合を考えます：

$$a \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

この方程式を満たす a, b, c, d, e の組を求めます。

ステップ 4: 行列の成分ごとの比較

行列の各成分を比較して、次の方程式を得ます：

$$1. 2a = -2d \quad 2. -4b = d \quad 3. -2a - 2b = -e \quad 4. 4c = -4e$$

これらの方程式を解くと、 $a = b = c = d = e = 0$ 以外の解が存在しないことがわかります。したがって、共通部分 $U \cap V$ はゼロベクトルのみを含む空間であり、その次元は 0 です。

したがって、選択肢は次の通りです：

ANSWER: A