

問題: 次の線形変換 (表現行列が実対称行列) について, その固有空間を参考に, その表現表列 A (標準基底に関する) を直交行列により対角化してください。 $f: R^3 \rightarrow R^3, \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ $W(-2; f) =$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた固有空間より、固有ベクトルを正規化する。

$$v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらを列に並べて直交行列を作る。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

固有値はそれぞれ $3, -2, 0$ なので、対角化は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

よって、選択肢は B。