問題: 次の線形変換（表現行列が実対称行列）について，その固有空間を参考に，その表現表列 A（標準基底に関する）を直交行列により対角化してください。$f : R^3 \to R^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 固有値は $-2, 0, 3$、対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$v_{-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と与えられている。正規化すると

$$u_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって直交行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき $P^{-1} = P^T$ なので、

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(3, -2, 0)$$

ゆえに、求める結果は選択肢 B。