

id: 439

問題: エルミート行列を選択してください。

選択肢 A:  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{3}i & -\sqrt{3}-2i \\ -3-3i & 2 & -\sqrt{3}+\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}+i & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$  B:  $\begin{pmatrix} -1+2i & \sqrt{2}i & -1+2i \\ 2-2i & -\sqrt{3}+i & 2-2i \\ 2+i & 2-\sqrt{2}i & 2+i \end{pmatrix}$  C:  $\begin{pmatrix} 1 & -2+i & \sqrt{2}+\sqrt{3}i \\ -2+i & 1 & -2-\sqrt{3}i \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}i & -2-\sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$   
D:  $\begin{pmatrix} 1 & 3-i & -1 \\ 3+i & -2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: エルミート行列とは、複素共役転置が自身と等しい行列のことです。具体的には、行列  $A$  がエルミート行列であるためには、次の条件を満たす必要があります：

$$A = A^*$$

ここで、 $A^*$  は  $A$  の複素共役転置を表します。つまり、行列の各要素を複素共役にし、行と列を入れ替えたものです。

それでは、各選択肢を確認していきましょう。

選択肢 A

行列  $A$  は次のように与えられています：

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{3}i & -\sqrt{3}-2i \\ -3-3i & 2 & -\sqrt{3}+\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}+i & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置  $A^*$  は次のようになります：

$$A^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -3+3i & \sqrt{3}-i \\ 1-\sqrt{3}i & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}+2i & -\sqrt{3}-\sqrt{3}i & 2 \end{pmatrix}$$

$A \neq A^*$  なので、エルミート行列ではありません。

選択肢 B

行列  $B$  は次のように与えられています：

$$B = \begin{pmatrix} -1+2i & \sqrt{2}i & -1+2i \\ 2-2i & -\sqrt{3}+i & 2-2i \\ 2+i & 2-\sqrt{2}i & 2+i \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置  $B^*$  は次のようになります：

$$B^* = \begin{pmatrix} -1-2i & 2+2i & 2-i \\ -\sqrt{2}i & -\sqrt{3}-i & 2+\sqrt{2}i \\ -1-2i & 2-2i & 2-i \end{pmatrix}$$

$B \neq B^*$  なので、エルミート行列ではありません。

選択肢 C

行列  $C$  は次のように与えられています：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2+i & \sqrt{2}+\sqrt{3}i \\ -2+i & 1 & -2-\sqrt{3}i \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}i & -2-\sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置  $C^*$  は次のようになります：

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & -2-i & \sqrt{2}-\sqrt{3}i \\ -2-i & 1 & -2+\sqrt{3}i \\ \sqrt{2}-\sqrt{3}i & -2+\sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$C = C^*$  なので、エルミート行列です。

選択肢 D

行列  $D$  は次のように与えられています：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3-i & -1 \\ 3+i & -2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置  $D^*$  は次のようになります：

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 3+i & -1 \\ 3-i & -2 & -1+i \\ -1 & -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$D = D^*$  なので、エルミート行列です。

結論

選択肢 C と D がエルミート行列です。しかし、問題文の指示に従い、選択肢から一つ選ぶとすれば、選択肢 C を選びます。

ANSWER: C