

id: 265

問題: 次の線形変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。 $f: R^3 \rightarrow$

$$R^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 - 4x_2 + 22x_3 \\ -4x_1 - 3x_2 + 29x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \text{ なお, このベクトル空間の標準基底の像は, } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 29 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

となることと次の関係式を活用しても構いません。 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 1 & -19 & -26 \\ -4 & 26 & 29 \\ -2 & 18 & 22 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & 29 \\ -2 & -4 & 22 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -2 & 18 & 22 \\ -4 & 26 & 29 \\ 1 & -19 & -26 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 18 & 26 & -19 \\ 22 & 29 & -26 \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: 線形変換 $f: R^3 \rightarrow R^3$ の基底に関する表現行列を求めるために、まず標準基底の像を確認します。
標準基底の像は次の通りです。

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 22 \\ 29 \\ 3 \end{pmatrix}$$

次に、与えられた基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めます。

この基底に関する変換行列を求めるために、まず基底変換行列を求めます。基底変換行列は次のようになります。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この逆行列は問題文で与えられており、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、標準基底に関する行列 A を求めます。これは、標準基底の像を列ベクトルとして並べた行列です。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 22 \\ -4 & -3 & 29 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列 B は次のように求められます。

$$B = P^{-1}AP$$

計算を行います。まず、 AP を計算します。

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 22 \\ -4 & -3 & 29 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 18 \\ -4 & -3 & 26 \\ -3 & 4 & -19 \end{pmatrix}$$

次に、 $P^{-1}(AP)$ を計算します。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 18 \\ -4 & -3 & 26 \\ -3 & 4 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 18 \\ -4 & 26 & 29 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

したがって、基底に関する表現行列は

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 18 \\ -4 & 26 & 29 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

選択肢を確認すると、選択肢 D が一致します。

ANSWER: D