

id: 376

問題: 次の線形変換の各固有値の固有空間（昇幂の基底 $\{1, x\}$ に関する表現行列で）を求めてください。

$$f : R[x]_1 \rightarrow R[x]_1, a_2x + a_1 \mapsto 2a_1 + 2a_2x + a_2$$

選択肢: A: $W(1; f) = \left\{ c_1(1) \mid c_1 \in R \right\}$ B: $W(2; f) = \left\{ c_1(1) \mid c_1 \in R \right\}$ C: $W(0; f) = \left\{ c_1(1) \mid c_1 \in R \right\}$
D: $W(2; f) = \left\{ c_1(1) \mid c_1 \in R \right\}, W(0; f) = \left\{ c_1(x) \mid c_1 \in R \right\}$

回答: B

LLM: まず、線形変換 $f : R[x]_1 \rightarrow R[x]_1$ を考えます。ここで、 $R[x]_1$ は一次以下の多項式全体の集合です。任意の多項式 $p(x) = a_2x + a_1$ に対して、変換 f は次のように定義されています：

$$f(a_2x + a_1) = 2a_1 + 2a_2x + a_2$$

この変換を基底 $\{1, x\}$ に関する表現行列で表します。基底 $\{1, x\}$ におけるベクトルは (a_1, a_2) と表されます。

1. 基底ベクトル 1 に対する変換を考えます。

$$f(1) = f(0 \cdot x + 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot x + 0 = 2$$

したがって、 $[f(1)]_{\{1, x\}} = (2, 0)$ です。

2. 基底ベクトル x に対する変換を考えます。

$$f(x) = f(1 \cdot x + 0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 = 2x + 1$$

したがって、 $[f(x)]_{\{1, x\}} = (1, 2)$ です。

これにより、線形変換 f の表現行列は次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

次に、この行列の固有値と固有ベクトルを求めます。

固有値の計算

行列 A の固有値は、次の特性方程式の解として求められます：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は単位行列です。したがって、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

特性方程式は次のようにになります：

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 0 \cdot 1 = (2 - \lambda)^2 = 0$$

したがって、固有値は $\lambda = 2$ です。

固有空間の計算

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間を求めます。これは次の方程式を解くことに対応します：

$$(A - 2I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方程式から、 v_2 は任意の実数であり、 v_1 は 0 であることがわかります。したがって、固有空間は次のように表されます：

$$W(2; f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

これは基底 $\{1, x\}$ において、 $\{c_1 x \mid c_1 \in R\}$ に対応します。

選択肢を確認すると、選択肢 D がこの結果に一致します。

ANSWER: D