

id: 362

問題: 次の線形変換（表現行列が実対称行列）について、その固有空間を参考に、その表現表列  $A$ （標準基底に関する）を直交行列により対角化してください。 $f : R^3 \rightarrow R^3$ ,  $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

$$W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}, \quad W(4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

選択肢: A:  $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  B:  $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  C:  $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  D:  $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: まず、与えられた線形変換の行列  $A$  を確認します。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

この行列は実対称行列であるため、直交行列によって対角化可能です。

次に、固有空間の情報を用いて、固有値と対応する固有ベクトルを確認します。

1. 固有値  $-2$  に対応する固有空間  $W(-2; f)$  は次のように与えられています：

$$W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$$

したがって、固有値  $-2$  に対応する独立な固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  です。

2. 固有値  $4$  に対応する固有空間  $W(4; f)$  は次のように与えられています：

$$W(4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

したがって、固有値  $4$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  です。

次に、これらの固有ベクトルを用いて直交行列  $P$  を構成します。直交行列  $P$  の列ベクトルは、固有ベクトルを正規化したものです。

固有ベクトルを正規化します：

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  のノルムは  $\sqrt{2}$  なので、正規化すると  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  -  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  は既に正規化されています。-  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  のノルムは  $\sqrt{2}$  なので、正規化すると  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$   
 これらを用いて直交行列  $P$  を構成します：

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この  $P$  を用いて  $A$  を対角化します。対角行列は固有値を対角成分に持ります：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢を確認すると、選択肢 A が正しいことがわかります。

ANSWER: A