

id: 200

問題: 次の置換を互換の積で表し, また符号も正しく選択してください。 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = -1$ B: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = +1$ C: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = +1$ D: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = -1$

回答: B

LLM: まず、置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ を互換の積で表します。

1. 置換のサイクル表現を求めます。サイクル表現は、置換の動きを追跡することで得られます。

- 1 は 1 に写るので、1 は固定点です。- 2 は 5 に写ります。- 5 は 6 に写ります。- 6 は 3 に写ります。- 3 は 4 に写ります。- 4 は 2 に写ります。

したがって、サイクル表現は (2 5 6 3 4) です。

2. サイクルを互換の積に分解します。サイクル $(a_1 a_2 \dots a_k)$ は互換の積 $(a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \dots (a_1 a_2)$ に分解できます。

- $(2 5 6 3 4) = (2 4)(2 3)(2 6)(2 5)$

3. 置換の符号を求めます。置換の符号は、置換を互換の積に分解したときの互換の数が偶数なら +1、奇数なら -1 です。

- 互換の数は 4 つなので、符号は -1 です。

以上より、置換 σ は互換の積で $(2 4)(2 3)(2 6)(2 5)$ と表され、符号は -1 です。

選択肢を確認します。

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = -1$ - B. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = +1$ - C. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = +1$ - D. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{sign}(\sigma) = -1$

正しい選択肢は D です。

ANSWER: D