

問題: 次の線形写像 ($U = R^4$ から $V = R^3$ への写像) の U の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

の V の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。なお、この U の基底の像は、

$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -55 \\ 66 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -72 \\ 86 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 44 \\ -52 \\ -14 \end{pmatrix} \right\}$ となることを活用しても構いません。 $f : R^4 \rightarrow R^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto$

$$\begin{pmatrix} -3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 10x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 12x_3 - 12x_4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 3 & -55 & -72 & 44 \\ -6 & 66 & 86 & -52 \\ 15 & 11 & 17 & -14 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 15 & 11 & 17 & -14 \\ -6 & 66 & 86 & -52 \\ 3 & -55 & -72 & 44 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 10 & 10 \\ 4 & 2 & -12 & -12 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: V の基底は標準基底なので、 f の表現行列は標準基底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ の像を列に並べればよい。

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(e_4) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

したがって表現行列は

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 10 & 10 \\ 4 & 2 & -12 & -12 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

であり、選択肢 C に一致する。

ANSWER: C