

id: 283

問題: 次の線形変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。

$f : R^3 \rightarrow R^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4x_1 - 20x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + 20x_2 + 4x_3 \\ 5x_1 + 25x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$ なお、このベクトル空間の標準基底の像は、

$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 273 & -168 & -420 \\ -13 & 8 & 20 \\ 169 & -104 & -260 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -420 & 20 & -260 \\ -168 & 8 & -104 \\ 273 & -13 & 169 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -4 & -20 & -4 \\ 4 & 20 & 4 \\ 5 & 25 & 5 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: 線形変換 $f : R^3 \rightarrow R^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めるために、次の手順を踏みます。

ステップ 1: 標準基底に関する行列を求める

線形変換 f の標準基底に関する行列は、次のように与えられています：

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -20 & -4 \\ 4 & 20 & 4 \\ 5 & 25 & 5 \end{pmatrix}$$

ステップ 2: 基底変換行列を求める

与えられた基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ から標準基底への変換行列 P は次のようにになります：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

その逆行列 P^{-1} は問題文で与えられています：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ステップ 3: 新しい基底に関する表現行列を求める

新しい基底に関する表現行列 B は次のように計算されます：

$$B = P^{-1}AP$$

計算を行います：

1. AP を計算します：

$$AP = \begin{pmatrix} -4 & -20 & -4 \\ 4 & 20 & 4 \\ 5 & 25 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

計算すると：

$$AP = \begin{pmatrix} -420 & 20 & -260 \\ -168 & 8 & -104 \\ 273 & -13 & 169 \end{pmatrix}$$

2. $B = P^{-1}(AP)$ を計算します：

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -420 & 20 & -260 \\ -168 & 8 & -104 \\ 273 & -13 & 169 \end{pmatrix}$$

計算すると、 B は次のようにになります：

$$B = \begin{pmatrix} -420 & 20 & -260 \\ -168 & 8 & -104 \\ 273 & -13 & 169 \end{pmatrix}$$

結論

したがって、選択肢 B が正しいです。

ANSWER: B