

問題: 1組の基底が $\{2 - 4x^2, -4x^2 + 3x, -3x^3\}$ である部分空間 U と, 1組の基底が $\{2x - 2, -4x^2, 4x^3\}$ である部分空間 V の共通部分である $U \cap V$ の次元を選択してください。

選択肢: A: 2

B: 4

C: 3

D: 0

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 共通部分の多項式を

$$a(2 - 4x^2) + b(-4x^2 + 3x) + c(-3x^3) = d(2x - 2) + e(-4x^2) + f(4x^3)$$

とおく。両辺の各次数ごとに係数を比較する際、各辺がそれぞれ基底の線形結合で独立に表されているので、それぞれの係数は個別に 0 でなければならないと考えると

$$2a = 0, \quad 3b = 0, \quad -4a - 4b = 0, \quad -3c = 0$$

および

$$-2d = 0, \quad 2d = 0, \quad -4e = 0, \quad 4f = 0$$

となる。よって

$$a = b = c = d = e = f = 0$$

となり、共通部分には零多項式しか含まれない。したがって

$$\dim(U \cap V) = 0.$$

ANSWER: D