問題: 次の行列が直交行列となるようにパラメータ α の値を定めてください。$\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \alpha \end{pmatrix}$

選択肢: A: -2

B: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C: 0

D: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 与えられた行列を

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \alpha \end{pmatrix}$$

とする。直交条件より、列ベクトルの内積が 0 だから

$$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\alpha = 0$$

$$-\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

また、第二列の長さが 1 より

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \alpha^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{5} + \alpha^2 = 1 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

内積の条件と合わせて

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

したがって、選択肢 D。