

id: 298

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と、 r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $r = 1$, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ B: $r = 4$, $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ C: $r = 3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

D: $r = 4$, $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

回答: C

LLM: ベクトルの線形独立性を確認するためには、行列を作成し、その行列の階数を求める必要があります。与えられたベクトルを列ベクトルとして行列を作成します。

行列 A は次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ -6 & 12 & 0 & 3 & -15 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. まず、1列目のピボットを使って他の行を消去します。

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ -6 & 12 & 0 & 3 & -15 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 1行目を2で割ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ -6 & 12 & 0 & 3 & -15 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 1行目を使って2行目、3行目、4行目を消去します。

-2行目に1行目を足す。-3行目に6倍の1行目を足す。-4行目に2倍の1行目を足す。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

4. 2行目を-2で割ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

5. 2 行目を使って 3 行目と 4 行目を消去します。

- 3 行目に 6 倍の 2 行目を足す。 - 4 行目に 5 倍の 2 行目を足す。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2.5 & 7.5 \end{pmatrix}$$

6. 4 行目を 3 で割ります。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{15}{6} \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 3 です。したがって、線形独立なベクトルの最大個数 r は 3 です。

選択肢 C のベクトルは線形独立であることが確認できます。

したがって、正しい答えは

ANSWER: C