

問題: 正規行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -\sqrt{2}-2i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3}i \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{2}i \\ 1-\sqrt{2}i & 3 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-\sqrt{2}i & -\sqrt{2}+3i \\ -\sqrt{3}-\sqrt{2}i & -\sqrt{2}+3i \end{pmatrix}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 選択肢 C を正規行列と判断します。

行列とその随伴は

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{2}i \\ 1-\sqrt{2}i & 3 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{2}i \\ 1+\sqrt{2}i & 3 \end{pmatrix}$$

まず

$$CC^* = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i) & 2(1+\sqrt{2}i) + 3(1-\sqrt{2}i) \\ 2(1-\sqrt{2}i) + 3(1+\sqrt{2}i) & (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5-\sqrt{2}i \\ 5+\sqrt{2}i & 12 \end{pmatrix}$$

次に

$$C^*C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) & 2(1-\sqrt{2}i) + 3(1+\sqrt{2}i) \\ 2(1+\sqrt{2}i) + 3(1-\sqrt{2}i) & (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$2(1-\sqrt{2}i) + 3(1+\sqrt{2}i) = 2 + 2\sqrt{2}i + 3 - 3\sqrt{2}i = 5 - \sqrt{2}i,$$

$$2(1+\sqrt{2}i) + 3(1-\sqrt{2}i) = 2 - 2\sqrt{2}i + 3 + 3\sqrt{2}i = 5 + \sqrt{2}i$$

より

$$C^*C = \begin{pmatrix} 7 & 5-\sqrt{2}i \\ 5+\sqrt{2}i & 12 \end{pmatrix}$$

したがって $CC^* = C^*C$ であり、 C は正規行列。よって答えは C。