

id: 302

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と, r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $r = 3, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ B: $r = 3, \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ C:

$r = 2, \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ D: $r = 2, \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

回答: B

LLM: まず、与えられた行列をベクトルとして考え、それらが線形独立かどうかを調べます。行列をベクトルとして扱うために、それぞれの行列を縦に並べたベクトルとして考えます。

与えられた行列は次の通りです:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ をベクトルにすると $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ をベクトルにすると $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ をベクトルにすると $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ をベクトルにすると $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ をベクトルにすると $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

次に、これらのベクトルが線形独立かどうかを調べます。線形独立であるためには、これらのベクトルの組み合わせがゼロベクトルになる唯一の解がすべての係数がゼロである場合です。

行列を作成し、行列のランクを求めます。行列は次のようになります:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -1 \\ 8 & -3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

この行列のランクを求めるために、行基本変形を行います。

1. 第1列のピボットを1にするために、第1行を3で割ります。2. 第2列のピボットを1にするために、第2行を適切に操作します。3. 第3列のピボットを1にするために、第3行を適切に操作します。4. 第4列のピボットを1にするために、第4行を適切に操作します。

行基本変形を行った結果、行列のランクが2であることがわかります。したがって、線形独立なベクトルの最大個数 r は2です。

選択肢を確認します:

- A. $r = 3$ なので不正解- B. $r = 3$ なので不正解- C. $r = 2$ であり、選択肢のベクトルは線形独立です。- D. $r = 2$ であり、選択肢のベクトルは線形独立です。

したがって、正しい選択肢は C または D です。どちらも正しいですが、問題文の選択肢に基づいて、C を選びます。

ANSWER: C