

id: 295

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数  $r$  と,  $r$  個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{選択肢: A: } r = 2, & \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ B: } r = 4, & \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ C: } r = \\ 2, & \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \text{ D: } r = 3, & \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

回答: B

LLM: まず、与えられたベクトルが線形独立かどうかを確認するために、これらのベクトルを行列の行として配置し、その行列の階数を求めます。与えられたベクトルは次の通りです:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これらを行列  $A$  の行として配置します:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 & -6 \\ -6 & -2 & 6 & -2 \\ -6 & 6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

次に、この行列の階数を求めます。階数は行列の行（または列）の中で線形独立な最大数を示します。行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. まず、行 1 をそのままにして、行 2 を行 1 のスカラー倍を引くことで簡略化します。2. 行 3 と行 4 も同様に行 1 のスカラー倍を引いて簡略化します。

行基本変形を行うと、次のような行列になります:

$$\begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 12 & -8 \\ 0 & 10 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

さらに行基本変形を続けて、行 2 と行 4 を簡略化します:

$$\begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 60 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 3 です。したがって、与えられたベクトルの中で線形独立な最大個数は 3 です。

次に、選択肢の中から線形独立な 3 つのベクトルを選びます。選択肢 D のベクトルは次の通りです:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

これらのベクトルは線形独立であるため、選択肢 D が正しいです。

ANSWER: D