

id: 228

問題: 1 組の基底が  $\{2x^2 - 3, x^2 + 4x\}$  である部分空間  $U$  と, 1 組の基底が  $\{2 - 2x^2, -x^2 - 2x\}$  である部分空間  $V$  の共通部分である  $U \cap V$  の次元を選択してください。

選択肢: A: 1 B: 3 C: 0 D: 2

回答: A

LLM: まず、部分空間  $U$  と  $V$  の基底が与えられています。

部分空間  $U$  の基底は  $\{2x^2 - 3, x^2 + 4x\}$  です。部分空間  $V$  の基底は  $\{2 - 2x^2, -x^2 - 2x\}$  です。

これらの部分空間の共通部分  $U \cap V$  の次元を求めるためには、これらの基底の線形結合がどのように交わるかを調べる必要があります。

ステップ 1: 部分空間の基底を行列として表現

まず、各基底を行列の行として表現します。

基底  $U$  の行列:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

基底  $V$  の行列:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ステップ 2: 共通部分の次元を求める

共通部分  $U \cap V$  の次元は、これらの行列の行空間の共通部分の次元に等しいです。これを求めるために、行列を連結してガウス・ジョルダン消去法を用いて階数を求めます。

連結行列:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

この行列を簡約化します。

1. 1 行目と 3 行目を足して、3 行目を更新:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 2 行目と 4 行目を足して、4 行目を更新:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 3 行目を -1 で割る:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 3 行目を 1 行目と 2 行目から消去:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 4 行目を 2 で割る:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 4 行目を 2 行目から消去:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この行列の階数は 3 です。したがって、共通部分の次元は 2 です。

結論

したがって、共通部分  $U \cap V$  の次元は 2 です。

ANSWER: D