

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ の線形独立な最大個数を調べるため、行列 $(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3 \vec{u}_4 \vec{u}_5)$ に掃き出しを行ったところ、次の行列 A が得られた。この状態で、主成分のある列を線形独立なベクトルとして取り出し、残りのベクトルをその線形結合で表した場合の関係式を選んでください。 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_4$

B: $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1, \vec{u}_3 = 3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

C: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

D: $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2, \vec{u}_5 = 3\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

について、1 が立っている列を主成分の列とみなすと、1 行目の 1 を持つ第 1 列・第 2 列が主成分になります。

したがって独立なベクトルを \vec{u}_1, \vec{u}_2 とし、他の列はそれらの線形結合で読み取ります。

第 2 列は第 1 列と同じなので

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1.$$

第 3 列は $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので

$$\vec{u}_3 = -3\vec{u}_1.$$

第 5 列は $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので

$$\vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

以上より選択肢

C

を選ぶ。