

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ の線形独立な最大個数を調べるため、行列 $(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3 \vec{u}_4 \vec{u}_5)$ に掃き出しを行ったところ、次の行列 A が得られた。この状態で、主成分のある列を線形独立なベクトルとして取り出し、残りのベクトルをその線形結合で表した場合の関係式を選んでください。 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_4$

B: $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1, \vec{u}_3 = 3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

C: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

D: $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2, \vec{u}_5 = 3\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の 1 行目を見ると、1 列目と 2 列目の先頭がともに 1 なので、主成分のある列は 1 列目・2 列目とみなす。したがって、非主成分の列は \vec{u}_1, \vec{u}_2 の線形結合で表せるとする。

各列 j の成分を $A = (a_{ij})$ として、

$$\text{列 } j \sim a_{1j}\vec{u}_1 + a_{2j}\vec{u}_2$$

と読めるから、

- 2 列目は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので

$$\vec{u}_2 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1$$

- 3 列目は $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので

$$\vec{u}_3 = -3\vec{u}_1$$

- 5 列目は $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので

$$\vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - 1 \cdot \vec{u}_2 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

ゆえに選ぶべき関係式は

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \quad \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \quad \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

である。

ANSWER: C