

id: 352

問題: 次の線形変換について、その表現表列  $A$  (昇幂の基底  $\{1, x\}$  に関する) を対角化してください。

$$f : R[x]_1 \rightarrow R[x]_1, a_2x + a_1 \mapsto 2a_1x + 2a_1$$

選択肢: A:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  B:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  C:  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: まず、線形変換  $f : R[x]_1 \rightarrow R[x]_1$  を考えます。ここで、 $R[x]_1$  は一次多項式の空間であり、基底  $\{1, x\}$  に関して表現されます。

与えられた線形変換は次のように定義されています：

$$f(a_2x + a_1) = 2a_1x + 2a_1$$

この変換を基底  $\{1, x\}$  に関する行列  $A$  で表現します。基底ベクトル  $\{1, x\}$  に対する変換を考えます。

1.  $f(1)$  を計算します：

$$f(1) = f(0 \cdot x + 1) = 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = 2x + 2$$

したがって、 $f(1) = 2x + 2$  は基底  $\{1, x\}$  に関して  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  で表されます。

2.  $f(x)$  を計算します：

$$f(x) = f(1 \cdot x + 0) = 2 \cdot 0 \cdot x + 2 \cdot 0 = 0$$

したがって、 $f(x) = 0$  は基底  $\{1, x\}$  に関して  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  で表されます。

これにより、行列  $A$  は次のようになります：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

次に、この行列を対角化します。行列  $A$  の固有値を求めます。

行列  $A$  の固有値は、次の特性方程式の解として求められます：

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda) - 0 = -\lambda(2 - \lambda) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

したがって、固有値は  $\lambda = 0$  と  $\lambda = 2$  です。

次に、各固有値に対する固有ベクトルを求めます。

1.  $\lambda = 0$  の場合：

$$(A - 0I)v = Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $2v_1 = 0$  より、 $v_1 = 0$  です。よって、固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  です。

2.  $\lambda = 2$  の場合：

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_1 - 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $2v_1 - 2v_2 = 0$  より、 $v_1 = v_2$  です。よって、固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  です。

固有ベクトルを列に持つ行列  $P$  は次のようにになります：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  を求めます：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列  $A$  を対角化すると：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢 D が正しいです。

ANSWER: D