

問題: 次の線形写像の像の次元と 1 組の基底として適切なものを選択してください。 $f : R^2 \rightarrow R^4$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$ なお、この線形写像に現れる行列の簡約な行列は、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります。

選択肢: A: 次元は 0 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

B: 次元は 2 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

C: 次元は 4 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

D: 次元は 2 で、1 組の基底は、 $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行列を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると、与えられた簡約化が

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、 A の階数は 2。したがって像の次元は

$$\dim(\text{Im } f) = 2.$$

また、 $\text{rref}(A)$ から核は $\{\vec{0}\}$ なので、この零ベクトルを基底として選べばよいから、基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

したがって、選択肢は B。ANSWER: B