

id: 29

問題: 次の線形方程式を解いてください。

$$\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 9 \\ 4x_1 + 12x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1 \in R$ B: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1 \in R$ C: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
D: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1 \in R$

回答: D

LLM: まず、与えられた連立方程式を整理します。

$$\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 9 \\ 4x_1 + 12x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

まず、4 番目の方程式 $x_1 + 3x_3 = 3$ から x_1 を求めます。

$$x_1 = 3 - 3x_3$$

次に、3 番目の方程式 $4x_1 + 12x_3 = 12$ を使います。ここに $x_1 = 3 - 3x_3$ を代入します。

$$4(3 - 3x_3) + 12x_3 = 12$$

これを展開して整理します。

$$12 - 12x_3 + 12x_3 = 12$$

この方程式は恒等式であり、常に成り立ちます。したがって、3 番目の方程式は他の方程式から独立していないことがわかります。

次に、1 番目の方程式 $-x_2 - 3x_3 = -3$ を使って x_2 を求めます。

$$x_2 = -3x_3 + 3$$

2 番目の方程式 $2x_1 + x_2 + 9x_3 = 9$ に $x_1 = 3 - 3x_3$ と $x_2 = -3x_3 + 3$ を代入します。

$$2(3 - 3x_3) + (-3x_3 + 3) + 9x_3 = 9$$

これを展開して整理します。

$$6 - 6x_3 - 3x_3 + 3 + 9x_3 = 9$$

$$9 = 9$$

この方程式も恒等式であり、常に成り立ちます。

したがって、自由変数 x_3 を用いて解を表現できます。 $x_3 = c_1$ とすると、

$$x_1 = 3 - 3c_1$$

$$x_2 = -3c_1 + 3$$

これをベクトル形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3c_1 \\ -3c_1 + 3 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢 A が正しいです。

ANSWER: A