

id: 350

問題: 次の線形変換について、その表現表列 A （標準基底に関する）を対角化してください。 $f : R^2 \rightarrow R^2$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: 線形変換 $f : R^2 \rightarrow R^2$ は行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ によって表されます。この行列を対角化するためには、まず固有値を求める必要があります。

Step 1: 固有値の計算

行列 A の固有値は、次の特性方程式の解として求められます。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は 2×2 の単位行列であり、 λ は固有値です。したがって、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算します。

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)(3 - \lambda) - (0)(-2) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) \\ &= 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{aligned}$$

特性方程式は次のようにになります。

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

この二次方程式を解くと、固有値 λ は次のようになります。

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

したがって、固有値は $\lambda_1 = 3$ と $\lambda_2 = 1$ です。

Step 2: 固有ベクトルの計算

次に、各固有値に対応する固有ベクトルを求めます。

固有値 $\lambda_1 = 3$ の場合

$$(A - 3I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - 3 & 0 \\ -2 & 3 - 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

この行列の解は、 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

固有値 $\lambda_2 = 1$ の場合

$$(A - I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

この行列の解は、 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

Step 3: 対角化

固有ベクトルを列に持つ行列 P は次のようにになります。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の逆行列 P^{-1} を計算します。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角行列 D は次のようにになります。

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、対角化は次のように表されます。

$$P^{-1}AP = D$$

選択肢を確認すると、選択肢 D が一致します。

ANSWER: D