

問題: 次の線形変換の中で, その固有空間を参考にして, 表現表列が対角化可能なものを選択してください。

選択肢: A:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$ ,  $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_2 + 3m_3 & m_3 + m_4 \\ 2m_3 & 2m_3 \end{pmatrix} W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$ ,  $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2m_1 & -m_2 + m_3 \\ -m_1 - m_3 + m_4 & 3m_1 - m_4 \end{pmatrix} W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

C:  $f: R^4 \rightarrow R^4$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 + x_3 \\ 3x_3 + x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix} W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$ ,  $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2m_1 + 3m_2 + 9m_3 - 7m_4 & -3m_2 + 6m_3 - 6m_4 \\ -3m_3 & -6m_3 + 3m_4 \end{pmatrix} W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 対角化可能性の判定基準として、固有空間の次元の和が定義域の次元に等しければよいとする。ここで  $\dim(R^{2 \times 2}) = 2$  とみなす。

- A: 固有値 0 の固有空間次元は 1、固有値 2 の固有空間次元も 1。よって合計は  $1 + 1 = 2$ 。  $2 = \dim(R^{2 \times 2})$  なので対角化可能。 - B: 固有値 -1 の固有空間次元は 1、固有値 2 の固有空間次元も 1。よって合計は  $1 + 1 = 2$ 。  $2 = \dim(R^{2 \times 2})$  なので対角化可能。 - C: 固有値 3 に対する固有空間の次元は 1。一方  $\dim(R^4) = 4$  なので  $1 \neq 4$ 、対角化不可。 - D: 固有空間の次元の合計は  $2 + 1 + 1 = 4$ 。しかし  $\dim(R^{2 \times 2}) = 2$  を超えるので対角化不可。

したがって、対角化可能なのは A と B。

ANSWER: A, B