

id: 280

問題: 次の線形変換の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めてください。  $f: R^2 \rightarrow R^2, \vec{x} \mapsto$

$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$  なお, このベクトル空間の標準基底の像は,  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  となることと次の関係式を活用し

ても構いません。  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

選択肢: A:  $\begin{pmatrix} -15 & -26 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$  B:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  C:  $\begin{pmatrix} -15 & 13 \\ -26 & 21 \end{pmatrix}$  D:  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: 線形変換  $f: R^2 \rightarrow R^2$  は, 行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  によって表されます。この変換の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めます。

まず, 基底ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  を変換します。

1.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  の変換:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  の変換:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 9 \\ 5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

次に, これらの変換されたベクトルを基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  の線形結合として表します。

1.  $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$  を基底の線形結合として表す:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 3b \end{pmatrix}$$

これを解くと,

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + 3b = 9 \end{cases}$$

これを解くと,  $a = 3, b = -5$  となります。

2.  $\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$  を基底の線形結合として表す:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + d \\ 2c + 3d \end{pmatrix}$$

これを解くと,

$$\begin{cases} c + d = -5 \\ 2c + 3d = 11 \end{cases}$$

これを解くと,  $c = 13, d = -18$  となります。

したがって, 基底に関する表現行列は次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -5 & -18 \end{pmatrix}$$

しかし、選択肢にこの行列はありません。計算を見直すと、基底変換の逆行列を使って変換行列を求める必要があります。

基底変換行列は  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  で、その逆行列は  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  です。

したがって、基底に関する表現行列は次のように求められます。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 13 \\ -26 & 21 \end{pmatrix}$$

よって、正しい選択肢は C です。

ANSWER: C