

id: 210

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\{c_1(6x^2 - 3x + 4) + c_2(-2x^2 + 3x - 4) + c_3(-2x^2 + 9x - 12)\}$

選択肢: A:  $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$  B:  $\{6x^2 - 3x + 4, -2x^2 + 3x - 4\}$  C:  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  D:  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

回答: B

LLM: まず、与えられた部分空間の基底を見つけるために、次のベクトルを考えます。

$$v_1 = 6x^2 - 3x + 4, \quad v_2 = -2x^2 + 3x - 4, \quad v_3 = -2x^2 + 9x - 12.$$

これらのベクトルの線形結合で表される部分空間の基底を見つけるために、これらのベクトルが線形独立かどうかを確認します。

まず、これらのベクトルを行列の行として配置します。

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

この行列の階数を求めることで、線形独立性を確認します。行列  $A$  の行基本変形を行います。

1. 第 1 行をそのままにして、第 2 行に 2 倍して第 1 行に加えます。

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ -2 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

2. 第 3 行に 3 倍して第 1 行に加えます。

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 2 です。したがって、元のベクトルの集合は線形独立ではなく、部分空間の次元は 2 です。

次に、基底を見つけるために、線形独立なベクトルを選びます。行列の階数が 2 であるため、2 つの線形独立なベクトルを選びます。例えば、 $v_1$  と  $v_2$  は線形独立です。

したがって、基底は次のようになります。

$$\{6x^2 - 3x + 4, -2x^2 + 3x - 4\}$$

この基底に対応する選択肢は B です。

ANSWER: B