

id: 435

問題: エルミート行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -1 & -1-3i & \sqrt{3}i \\ -1-3i & -1 & -1+i \\ \sqrt{3}i & -1+i & -3 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -2+2i & -\sqrt{2}+3i & -2+2i \\ -2 & 1 & -2 \\ -3-3i & 2+\sqrt{3}i & -3-3i \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 0 & -2+3i & -\sqrt{2}-3i \\ -2-3i & -3 & -\sqrt{2}+i \\ -\sqrt{2}+3i & -\sqrt{2}-i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
 D: $\begin{pmatrix} -3 & -3-\sqrt{2}i & -1 \\ -3-\sqrt{2}i & 2 & -\sqrt{3}+3i \\ -1 & -\sqrt{3}+3i & 2 \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: エルミート行列は、複素共役転置が自身と等しい行列です。つまり、行列 A がエルミート行列であるためには、次の条件を満たす必要があります。

$$A = A^*$$

ここで、 A^* は A の複素共役転置を表します。具体的には、行列の各要素を複素共役にし、行と列を入れ替えたものです。

それでは、各選択肢を確認していきましょう。

選択肢 A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1-3i & \sqrt{3}i \\ -1-3i & -1 & -1+i \\ \sqrt{3}i & -1+i & -3 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 A^* は次のようにになります。

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1+3i & -\sqrt{3}i \\ -1+3i & -1 & -1-i \\ -\sqrt{3}i & -1-i & -3 \end{pmatrix}$$

$A \neq A^*$ なので、選択肢 A はエルミート行列ではありません。

選択肢 B

$$B = \begin{pmatrix} -2+2i & -\sqrt{2}+3i & -2+2i \\ -2 & 1 & -2 \\ -3-3i & 2+\sqrt{3}i & -3-3i \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 B^* は次のようにになります。

$$B^* = \begin{pmatrix} -2-2i & -2 & -3+3i \\ -\sqrt{2}-3i & 1 & 2-\sqrt{3}i \\ -2-2i & -2 & -3+3i \end{pmatrix}$$

$B \neq B^*$ なので、選択肢 B はエルミート行列ではありません。

選択肢 C

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2+3i & -\sqrt{2}-3i \\ -2-3i & -3 & -\sqrt{2}+i \\ -\sqrt{2}+3i & -\sqrt{2}-i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 C^* は次のようにになります。

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & -2+3i & -\sqrt{2}+3i \\ -2-3i & -3 & -\sqrt{2}-i \\ -\sqrt{2}-3i & -\sqrt{2}+i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$C \neq C^*$ なので、選択肢 C はエルミート行列ではありません。

選択肢 D

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -3 - \sqrt{2}i & -1 \\ -3 + \sqrt{2}i & 2 & -\sqrt{3} + 3i \\ -1 & -\sqrt{3} + 3i & 2 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 D^* は次のようにになります。

$$D^* = \begin{pmatrix} -3 & -3 + \sqrt{2}i & -1 \\ -3 + \sqrt{2}i & 2 & -\sqrt{3} - 3i \\ -1 & -\sqrt{3} - 3i & 2 \end{pmatrix}$$

$D = D^*$ なので、選択肢 D はエルミート行列です。

したがって、エルミート行列は選択肢 D です。

ANSWER: D