

id: 259

問題: ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ が線形独立であるとき、次のベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が線形独立であるか定義に基づき確認する場合に構成すべき同次線形方程式を選択してください。 $\vec{v}_1 = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 9\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -6\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = 9\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 3 & 9 & -6 \\ 9 & -9 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ B: $\begin{pmatrix} 9 & 8 & -9 \\ -6 & -6 & -9 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ C: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -6 & -6 & -9 \\ 9 & 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$
D: $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 3 & -6 & 9 \\ 9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

回答: D

LLM: ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が線形独立であるかどうかを確認するためには、次の同次線形方程式を考えます。

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

これを具体的に書き下すと、

$$c_1(3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 9\vec{u}_3) + c_2(-6\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3) + c_3(9\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3) = \vec{0}$$

これを展開すると、

$$(c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot (-6) + c_3 \cdot 9)\vec{u}_1 + (c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot (-6) + c_3 \cdot 9)\vec{u}_2 + (c_1 \cdot 9 + c_2 \cdot (-9) + c_3 \cdot (-9))\vec{u}_3 = \vec{0}$$

ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ は線形独立であるため、各係数がゼロでなければなりません。したがって、次の連立方程式を得ます。

$$3c_1 - 6c_2 + 9c_3 = 0, 3c_1 - 6c_2 + 9c_3 = 0, 9c_1 - 9c_2 - 9c_3 = 0.$$

この連立方程式を行列形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 3 & -6 & 9 \\ 9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

したがって、選択肢 C が正しいです。

ANSWER: C