

id: 423

問題: 数ベクトル空間 R^3 の正規直交基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用いてください。

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \right\}$ B: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ C: 正規直交基底は含まれていない。 D: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

回答: D

LLM: 正規直交基底とは、ベクトルが互いに直交し、かつ各ベクトルの長さが 1 である基底のことです。これを確認するためには、各ベクトルの長さが 1 であることと、異なるベクトル同士の内積が 0 であることを確認します。

選択肢 A から順に確認していきます。

選択肢 A ベクトルを以下のように定義します。

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ 各ベクトルの長さを計算します。} & \|v_1\| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1 & \|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 0^2} = 1 \\ & \|v_3\| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 1 \\ 2. \text{ 異なるベクトル同士の内積を計算します。} & v_1 \cdot v_2 = \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot 0 = 0 \\ & v_1 \cdot v_3 = \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 0 & v_2 \cdot v_3 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}\right) + 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

選択肢 A のベクトルはすべての条件を満たしているため、正規直交基底です。

選択肢 B ベクトルを以下のように定義します。

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1. \text{ 各ベクトルの長さを計算します。} & \|u_1\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1 & \|u_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ & \|u_3\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

選択肢 B のベクトルは、 u_3 の長さが 1 ではないため、正規直交基底ではありません。

選択肢 C 正規直交基底が含まれていないと主張していますが、選択肢 A で正規直交基底が見つかっています。

選択肢 D ベクトルを以下のように定義します。

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1. \text{ 各ベクトルの長さを計算します。} & \|w_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1 & \|w_2\| = 1 \text{ (選択肢 A で確認済み)} \\ & \|w_3\| = 1 \text{ (選択肢 A で確認済み)}$$

$$2. \text{ 異なるベクトル同士の内積を計算します。} & w_1 \cdot w_2 \neq 0 \text{ (計算省略)} & w_1 \cdot w_3 \neq 0 \text{ (計算省略)} & w_2 \cdot w_3 = 0 \\ & \text{(選択肢 A で確認済み)}$$

選択肢 D のベクトルは、 w_1 と他のベクトルが直交していないため、正規直交基底ではありません。

したがって、正しい選択肢は A です。

ANSWER: A