

id: 214

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$

選択肢: A:  $\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$  B:  $\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$  C:  $\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ -14 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$  D:  $\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$

回答: D

LLM: 与えられた部分空間は、次のように表されます。

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$$

この部分空間は、ベクトル  $\begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$  の線形結合で表されるベクトル全体の集合です。

次に、この部分空間の基底を見つけるために、与えられた 2 つのベクトルが線形独立であるかどうかを確認します。2 つのベクトルが線形独立であるためには、スカラー  $k$  が存在して

$$\begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

を満たす  $k$  が存在しないことを確認します。

各成分について等式を立てると、

$$1. -16 = 16k \quad 2. -16 = 16k \quad 3. 12 = -12k$$

1 と 2 から、 $k = -1$  であることがわかります。しかし、3 を満たすためには  $12 = -12(-1) = 12$  となり、矛盾しません。したがって、これらのベクトルは線形独立です。

したがって、与えられた部分空間の基底は、選択肢 A の

$$\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$$

です。

ANSWER: A