

id: 351

問題: 次の線形変換について、その表現表列 A （標準基底に関する）を対角化してください。 $f : R^3 \rightarrow R^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 - 4x_2 \\ x_2 \\ 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: まず、線形変換 f の行列表現 A を求めます。変換 f は次のように与えられています：

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 4x_2 \\ x_2 \\ 4x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

この変換を行列 A によって表現すると、次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

次に、行列 A の固有値を求めます。固有値は次の特性方程式の解として求められます：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は単位行列です。したがって、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 & -3 - \lambda \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算します：

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-3 - \lambda)((1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 0) - 0 + 0 \\ &= (-3 - \lambda)((1 - \lambda)(-3 - \lambda)) \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

したがって、固有値は $\lambda = -3, 1, 3$ です。

次に、各固有値に対する固有ベクトルを求めます。

1. $\lambda = -3$ の場合：

$$(A + 3I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 1 なので、自由度は 2 です。したがって、固有ベクトルは次のように選べます：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = 1$ の場合：

$$(A - I)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 2 なので、自由度は 1 です。したがって、固有ベクトルは次のように選べます：

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、行列 P は次のようになります：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

そして、対角行列 D は次のようになります：

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢 C が正しいです。

ANSWER: C