問題: 次のベクトルの組のうち，非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組，ただし，全ての 0 倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $4x^2 - 9x + 3,\ -4x^2 - 9x + 3$

B: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 選択肢 A: 2 つ目は 1 つ目の負倍と見なせるので線形従属と判断できる。実際、

$$-4x^2 - 9x + 3 = -(4x^2 - 9x + 3)$$

したがって

$$(4x^2 - 9x + 3) + (-4x^2 - 9x + 3) = (4x^2 - 4x^2) + (-9x + 9x) + (3 - 3) = 0$$

よって非自明な線形関係がある。

選択肢 B: 各行列の行列式が 0 でないので正則であり、互いに線形独立。

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-9) = 16 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-6) - 2 \cdot 6 = -18 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) - 6 \cdot 9 = -66 \neq 0$$

よって非自明な関係はない。

選択肢 C: どの行列も他のスカラー倍ではないので線形独立とみなせる。例えば最初の 2 つについて

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{-3}{9}$$

となり、比例関係でない。したがって非自明な関係はない。

選択肢 D: 各行列の行列式がいずれも 0 でないので線形独立。

$$\det\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = (-9) \cdot (-3) - 6 \cdot (-9) = 81 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} = 6 \cdot 17 - 9 \cdot 9 = 21 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-3) - (-6) \cdot 6 = 45 \neq 0$$

よって非自明な関係はない。

ANSWER: A