

問題: 次の線形変換について、その固有空間を参考に、その表現表列 A (標準基底に関する) を対角化してください

$$\text{さい。} f : R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} W(2; f) = \left\{ \begin{array}{c|c} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1, c_2, c_3 \in R \end{array} \right\}, W(1; f)$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & c_1 \in R \end{array} \right\}$$

$$\text{選択肢: A: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{B: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{C: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 行列表現は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

与えられた固有空間の基底から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

各ベクトルに対する作用を確認する。- $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ に対して

$$f(v_1) = (2, 0, 0, 0)^T = 2v_1$$

- $v_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ に対して

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

- $v_3 = (0, 0, 1, 0)^\top$ に対して

$$f(v_3) = (0, 0, 2, 0)^\top = 2v_3$$

- $w = (0, 0, 2, 1)^\top$ に対して

$$f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2w$$

以上より、この基底での対角形は

$$P^{-1}AP = \text{diag}(2, 1, 2, 2)$$

となる。

ANSWER: B