

id: 301

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と、 r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。
 $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $r = 2, \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ B: $r = 3, \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ C: $r = 4, \left\{ \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ D: $r = 1, \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

回答: C

LLM: まず、与えられた行列をベクトルとして考え、それらが線形独立かどうかを調べます。行列をベクトルとして扱うためには、それぞれの行列を 1 列のベクトルに変換します。

与えられた行列は次の通りです：

$$1. \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \text{ をベクトルに変換すると } \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \text{ をベクトルに変換すると } \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ をベクトルに変換すると } \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ をベクトルに変換すると } \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ をベクトルに変換すると } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

クトルに変換すると $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

次に、これらのベクトルが線形独立かどうかを調べるために、行列を作成し、そのランクを求めます。

行列は次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 & 6 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 6 & 4 \\ -6 & -6 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

この行列のランクを求めるために、行基本変形を行います。

1. 第 1 列の最初の要素を 1 にするために、第 1 行を $-1/6$ 倍します。2. 第 2 行から第 4 行までの第 1 列の要素を 0 にするために、第 1 行を適切に加減します。3. 第 2 列のピボットを 1 にし、他の行の第 2 列を 0 にします。4. 第 3 列のピボットを 1 にし、他の行の第 3 列を 0 にします。5. 第 4 列のピボットを 1 にし、他の行の第 4 列を 0 にします。

これらの操作を行った結果、行列のランクが求まります。計算の結果、行列のランクは 3 であることがわかります。

したがって、線形独立なベクトルの最大個数 r は 3 です。

選択肢を確認すると、選択肢 B が正しいことがわかります。

ANSWER: B