

問題: 線形空間 U の 2 つの基底 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ と $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関して, W_2 による座標を W_1 による座標表示に直す基底の変換行列を選んでください。なお, 以下の関係式を活用してください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: まず, 基底を列に並べた行列を

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。

W_2 による座標 $[v]_{W_2}$ を W_1 による座標に直す基底変換行列は, 変換先の基底の列を並べた行列で与えられるので

$$[v]_{W_1} = W_1 [v]_{W_2}$$

したがって求める変換行列は

$$P = W_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

よって, 選択肢 B。