

id: 274

問題: 次の線形写像( $U = R[x]_2$  から  $V = R[x]_2$  への写像)の  $U$  の基底  $\{-3x^2 - x + 1, -x^2 + 5x + 2, -2x^2 - x + 3\}$  の  $V$  の基底  $\{3x^2 + 2x + 1, -3x^2 - x - 1, -2x^2 - 2x - 1\}$  に関する表現行列を求めてください。

$f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto -4a_1 + a_2 - 5a_3 + x^2 \cdot (4a_1 - a_2 + 3a_3) + x(-4a_1 - 2a_2 + 4a_3)$   
なお、この  $U$  の標準基底の像は、 $\{4x^2 - 4x - 4, -x^2 - 2x + 1, 3x^2 + 4x - 5\}$  となることと次の関

$$\begin{array}{l} \text{係式を活用しても構いません。} \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} -\frac{11}{39} & \frac{1}{39} & \frac{16}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{7}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{17}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{7}{39} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{array} \right)^{-1} = \\ \left( \begin{array}{ccc} -\frac{11}{39} & \frac{1}{39} & -\frac{17}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{7}{39} & -\frac{2}{39} \\ \frac{16}{39} & -\frac{5}{39} & \frac{7}{39} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{選択肢: A: } \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \text{ B: } \left( \begin{array}{ccc} -58 & -30 & 1 \\ -34 & -26 & -12 \\ -34 & -6 & 16 \end{array} \right) \text{ C: } \left( \begin{array}{ccc} -34 & -6 & 16 \\ -34 & -26 & -12 \\ -58 & -30 & 1 \end{array} \right) \text{ D: } \left( \begin{array}{ccc} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

回答: B

LLM: この問題では、線形写像  $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2$  の基底に関する表現行列を求めます。以下にステップバイステップで解説します。

ステップ 1: 標準基底の像を確認標準基底  $\{x^2, x, 1\}$  の像は次の通りです。-  $f(1) = -4x^2 - 4x - 4$  -  $f(x) = -x^2 - 2x + 1$  -  $f(x^2) = 3x^2 + 4x - 5$

ステップ 2: 標準基底から  $U$  の基底への変換  $U$  の基底  $\{-3x^2 - x + 1, -x^2 + 5x + 2, -2x^2 - x + 3\}$  に対する標準基底の変換行列を求める。

標準基底を  $U$  の基底で表現すると、次の行列が得られます。

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ステップ 3:  $V$  の基底への変換  $V$  の基底  $\{3x^2 + 2x + 1, -3x^2 - x - 1, -2x^2 - 2x - 1\}$  に対する標準基底の変換行列を求める。

標準基底を  $V$  の基底で表現すると、次の行列が得られます。

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ステップ 4: 表現行列の計算表現行列  $A$  は次のように計算されます。

$$A = Q^{-1} \cdot M \cdot P$$

ここで、 $M$  は標準基底に関する線形写像の行列です。標準基底の像から次の行列が得られます。

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

ステップ 5: 逆行列の計算問題文に与えられた逆行列を使用して、 $Q^{-1}$  を計算します。

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ステップ 6: 行列の積を計算行列の積  $A = Q^{-1} \cdot M \cdot P$  を計算します。

計算の結果、選択肢の中から一致する行列を探します。

結論計算の結果、選択肢 C の行列が一致します。

$$\begin{pmatrix} -34 & -6 & 16 \\ -34 & -26 & -12 \\ -58 & -30 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、正しい答えは選択肢 C です。

ANSWER: C