

問題: 次の線形変換の中で, その固有空間を参考にして, 表現表列が対角化可能なものを選択してください。

選択肢: A:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_2 + 3m_3 & m_3 + m_4 \\ 2m_3 & 2m_3 \end{pmatrix} W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2m_1 & -m_2 + m_3 \\ -m_1 - m_3 + m_4 & 3m_1 - m_4 \end{pmatrix} W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

C:  $f: R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 + x_3 \\ 3x_3 + x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix} W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D:  $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2m_1 + 3m_2 + 9m_3 - 7m_4 & -3m_2 + 6m_3 - 6m_4 \\ -3m_3 & -6m_3 + 3m_4 \end{pmatrix} W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}, W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 対角化可能であるための条件は、固有空間の次元の合計がその変換が定義されている空間の次元に等しいことです。ここで、 $2 \times 2$  行列全体の空間は行数が 2 なので  $\dim R^{2 \times 2} = 2$  とみなします。

- A:  $\dim W(0; f) = 1, \dim W(2; f) = 1$  より、合計は  $1 + 1 = 2$ 。よって  $\dim R^{2 \times 2} = 2$  と一致し、対角化可能。  
 - B:  $\dim W(-1; f) = 1, \dim W(2; f) = 1$  より、合計は  $1 + 1 = 2$ 。よって  $\dim R^{2 \times 2} = 2$  と一致し、対角化可能。  
 - C:  $\dim W(3; f) = 1$  で、 $\dim R^4 = 4$  に満たないので対角化不可。  
 - D:  $\dim W(-3; f) = 2, \dim W(-2; f) = 1, \dim W(3; f) = 1$  より、合計は  $2 + 1 + 1 = 4$ 。これは  $\dim R^{2 \times 2} = 2$  よりも大きく一致しないため対角化不可。

したがって、対角化可能なのは A と B です。

ANSWER: A, B