

問題: 次の部分空間と同じ部分空間を選択してください。 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}$

選択肢: A: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}$

B: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}$

C: $\{ c_1(x^2 + 4x - 6) + c_2(2x^2 - 2x + 3) + c_3(3x^2 - 4x + 6) \mid c_1, c_2, c_3 \in R \}$

D: $\{ c_1(12x^2 - 3x - 3) + c_2(6x^2 + x - 9) + c_3(6x^2 + x - 9) \mid c_1, c_2, c_3 \in R \}$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 元の 3 本に同じ線形関係が成り立つ集合を選べば同じ部分空間とみなせます。実際、元のベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおくと、係数を解くと

$$-6a + 3b = 6, \quad 4a - 2b = -4, \quad a + 2b = 3$$

より

$$a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{8}{5}, \quad v_3 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{8}{5}v_2$$

が成り立ちます。

選択肢 C の多項式を

$$p_1 = x^2 + 4x - 6, \quad p_2 = 2x^2 - 2x + 3, \quad p_3 = 3x^2 - 4x + 6$$

とおくと、同じ係数で

$$-\frac{1}{5}p_1 + \frac{8}{5}p_2 = \left(-\frac{1}{5} + \frac{16}{5}\right)x^2 + \left(-\frac{4}{5} - \frac{16}{5}\right)x + \left(\frac{6}{5} + \frac{24}{5}\right) = 3x^2 - 4x + 6 = p_3$$

となり、元の集合と同一の線形関係が成り立ちます。したがって、いずれも係数ベクトルが一致するので同じ部分空間です。

ANSWER: C