

問題: 次の行列を対角化してください。 $\begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: まず、特性方程式を求めます。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 9 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)((1 - \lambda)(-2 - \lambda)) \\ &= (-2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \end{aligned}$$

よって固有値は $\lambda = -2$ (重複), 1 。

各固有値に対する固有ベクトルを求めます。

- $\lambda = -2$ のとき:

$$(A + 2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow y = 0, x, z \text{ 自由} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 1$ のとき:

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow x = 3y, z = y \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これらを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、固有値を対角に並べて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

したがって、選択肢 C。