

id: 392

問題: ベクトル空間 R^3 の内積を $\vec{a} = (a_i), \vec{b} = (b_i) \in R^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) := \sum_{i=1}^n i \times a_i b_i$ とします。このとき、次のベクトル $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ を、グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず、直交化部分のみ（正規化を含まない）を行ったところ、ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が得られました。次に正規化（正規直交化する残りの手順）を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{26}{15} \\ -\frac{8}{15} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ 0 \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{390}}{195} \\ \frac{\sqrt{390}}{30} \\ -\frac{2\sqrt{390}}{195} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{39}}{13} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{39}}{39} \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{390}}{195} \\ \frac{\sqrt{390}}{30} \\ -\frac{2\sqrt{390}}{195} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{39}}{13} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{39}}{39} \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{21}}{63} \\ \frac{13\sqrt{21}}{63} \\ -\frac{4\sqrt{21}}{63} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{37}}{37} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{37}}{37} \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: まず、与えられたベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を正規化する必要があります。正規化とは、各ベクトルをその長さ（ノルム）で割ることです。

1. **ベクトル \vec{v}_1 の正規化:**

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ノルムは次のように計算されます：

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

よって、正規化された \vec{v}_1 は：

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

2. **ベクトル \vec{v}_2 の正規化:**

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{26}{15} \\ -\frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

ノルムは次のように計算されます：

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{26}{15}\right)^2 + \left(-\frac{8}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{225} + \frac{676}{225} + \frac{64}{225}} = \sqrt{\frac{756}{225}} = \frac{\sqrt{756}}{15}$$

よって、正規化された \vec{v}_2 は：

$$\frac{1}{\sqrt{756}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ \frac{26}{15} \\ -\frac{8}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{756}} \\ \frac{26}{\sqrt{756}} \\ -\frac{8}{\sqrt{756}} \end{pmatrix}$$

3. **ベクトル \vec{v}_3 の正規化:**

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ 0 \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

ノルムは次のように計算されます：

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{4}{169}} = \sqrt{\frac{148}{169}} = \frac{\sqrt{148}}{13}$$

よって、正規化された \vec{v}_3 は：

$$\frac{1}{\sqrt{148}} \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ 0 \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{\sqrt{148}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{148}} \end{pmatrix}$$

これらの計算を基に、選択肢を確認します。選択肢 C が最も近い形になっています。

したがって、正しい答えは：

ANSWER: C