問題: 次の線形変換（表現行列が実対称行列）について，その固有空間を参考に，その表現表列 A（標準基底に関する）を直交行列により対角化してください。$f: R^3 \to R^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\},\ W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた固有空間の基底を正規化する。

$$\vec{v}_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

直交行列を

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_{-2} & \vec{v}_0 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

とする。固有値は大きい順に並べて対角化できるので、

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(3, -2, 0).$$

よって選択肢 B。