

id: 340

問題: 次の線形変換について, その固有空間を参考に, その表現行列 A (標準基底に関する) を対角化してくだ

$$\text{さい。} f: R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} \quad W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}, \quad W(1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

$$\text{選択肢: A: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{B: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{C: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{D: } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

回答: A

LLM: まず, 線形変換 f の行列表現 A を求めます。変換 f は次のように与えられています:

$$f: R^4 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

この変換を行列表現 A で表すと, 次のようになります:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に, 固有空間を用いて A を対角化します。固有空間 $W(2; f)$ と $W(1; f)$ が与えられています:

$$W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}$$

$$W(1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

これらの固有ベクトルを基底として, 行列 P を構成します:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

この基底に関する A の対角行列は、固有値を対角成分に持つ行列です：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢から正しいものを選ぶと、答えは C です。

ANSWER: C