

問題: 次の中から R 上のベクトル空間の部分空間になっているものを選択してください。

選択肢 A: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$

C: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$

D: $\{ c_1(1-x^2) + c_2(-2x^2-2x-2) + (-x^2+x) \mid c_1, c_2 \in R \}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 選択肢 A: ゼロベクトルを含むかを確認するため、 c_1 を選んで

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

となるようにします。第 1 成分から $c_1 + 3 = 0$ より $c_1 = -3$ とできるので、

$$-3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3 \\ 9-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よってゼロベクトルを含み、さらに

$$(c_1V + W_0) + (c_2V + W_0) = (c_1 + c_2)V + W_0, \quad \lambda(c_1V + W_0) = (\lambda c_1)V + W_0$$

より加法・スカラー倍でも閉じているので部分空間です。

選択肢 B:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は行列の線形結合なので、 $c_1 = c_2 = 0$ で

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を含み、加法・スカラー倍でも閉じているため部分空間です。

選択肢 C:

$$c_1A + c_2B + C$$

は $c_1 = c_2 = 0$ で

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

となるためゼロ行列を含まず、部分空間ではありません。

選択肢 D:

$$c_1(1-x^2) + c_2(-2x^2-2x-2) + (-x^2+x)$$

は $c_1 = c_2 = 0$ で $-x^2 + x \neq 0$ となりゼロ多項式を含まないため部分空間ではありません。

ANSWER: A, B