

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ により張られる部分空間の基底を, これらのベクトルの組として求めるため, 行列 $(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3 \ \vec{u}_4 \ \vec{u}_5)$ と列の線形関係が同一の数値行列に対して行の基本変形を行ったところ, 次の行列 A が得られた。この結果から部分空間の 1 組の基底として適切なものを選択してください。

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行基本変形後の行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

で, 非零行が 3 本あるので

$$\text{rank}(A) = 3$$

とわかる。基底は階数と同じ本数の列ベクトルを先頭から取ればよいので, 先頭の 3 列に対応する

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

が基底になる。

よって選択肢は D。