

id: 299

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数 r と, r 個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{選択肢: A: } r = 4, \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{B: } r = 1, \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{C: } r = 3, \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{D: } r = 2, \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

回答: C

LLM: まず、与えられたベクトルが線形独立かどうかを確認するために、行列を作成し、その行列の階数を求めます。与えられたベクトルは次の通りです：

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルを列ベクトルとして持つ行列を考えます：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. 第 1 列の最初の要素を 1 にするために、第 1 行を $-1/3$ 倍します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

2. 第 2 行から第 1 行の 3 倍を引きます。また、第 3 行に第 1 行の 3 倍を足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

3. 第 3 行を $-1/6$ 倍して、第 2 行に第 3 行を足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

4. 第 2 行を第 3 行の -8 倍して、第 3 行に足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

5. 第 2 行を第 3 行の -8 倍して、第 3 行に足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 2 です。したがって、線形独立なベクトルの最大個数は 2 です。
選択肢を確認すると、選択肢 D が正しいことがわかります。
ANSWER: D