

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ により張られる部分空間の基底を, これらのベクトルの組として求めるため, 行列 $(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3 \vec{u}_4 \vec{u}_5)$ と列の線形関係が同一の数値行列に対して行の基本変形を行ったところ, 次の行列 A が得られた。この結果から部分空間の 1 組の基底として適切なものを選択してください。

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 行列の第 1~第 3 列に対応する元の 3 本が独立かを行列式で確認します。まず

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -11 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

について、1 行目で展開すると

$$\det U = (-2) \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -11 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

小行列式は

$$\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 22 = -10, \begin{vmatrix} -1 & -11 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4 - (-11) = 15, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5,$$

より

$$\det U = (-2)(-10) + 3(15) + 5(5) = 20 + 45 + 25 = 90 \neq 0.$$

よって $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ は一次独立で基底となる。

ANSWER: D