

id: 278

問題: 次の線形写像 ($U = R^4$ から $V = R^4$ への写像) の U の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

の V の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。 $f : R^4 \rightarrow R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto$

$\begin{pmatrix} -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 \\ -3x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$ なお、この U の標準基底の像は、 $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ となるこ

とと次の関係式を活用しても構いません。 $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{101} & -\frac{30}{101} & -\frac{33}{101} & -\frac{18}{101} \\ -\frac{32}{101} & -\frac{2}{101} & \frac{18}{101} & \frac{19}{101} \\ -\frac{10}{101} & \frac{12}{101} & -\frac{7}{101} & -\frac{31}{202} \\ -\frac{1}{202} & -\frac{19}{202} & -\frac{31}{202} & \frac{29}{202} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{25}{101} & -\frac{32}{101} & -\frac{10}{101} & -\frac{1}{202} \\ -\frac{30}{101} & -\frac{2}{101} & \frac{12}{101} & -\frac{19}{202} \\ -\frac{33}{101} & \frac{18}{101} & -\frac{7}{101} & -\frac{31}{202} \\ -\frac{18}{101} & \frac{19}{101} & -\frac{13}{101} & \frac{29}{202} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ -3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -65 & -40 & 31 & -58 \\ 80 & 42 & -15 & 63 \\ -20 & -24 & 18 & -32 \\ -50 & -26 & 9 & -37 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -58 & 63 & -32 & -37 \\ 31 & -15 & 18 & 9 \\ -40 & 42 & -24 & -26 \\ -65 & 80 & -20 & -50 \end{pmatrix}$ D:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

回答: B

LLM: この問題では、線形写像 $f : R^4 \rightarrow R^4$ の基底に関する表現行列を求めます。具体的には、基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ から基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ への表現行列を求めます。

ステップ 1: 標準基底の像を求める

与えられた線形写像 f の標準基底の像は次の通りです。

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ステップ 2: 基底変換行列を求める

まず、基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ の逆行列を用いて、標準基底からこの基底への変換行列を求めます。

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

その逆行列は問題文に与えられています。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{101} & -\frac{30}{101} & -\frac{33}{101} & -\frac{18}{101} \\ -\frac{32}{101} & -\frac{2}{101} & -\frac{18}{101} & -\frac{19}{101} \\ -\frac{101}{101} & -\frac{101}{101} & -\frac{7}{101} & -\frac{13}{101} \\ -\frac{1}{202} & -\frac{19}{202} & -\frac{31}{202} & \frac{29}{202} \end{pmatrix}$$

ステップ 3: 変換行列を用いて表現行列を求める

次に、標準基底の像を基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に変換します。

基底変換行列 Q は次の通りです。

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

その逆行列も問題文に与えられています。

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ステップ 4: 表現行列の計算

表現行列 A は次のように計算されます。

$$A = Q^{-1} \cdot \text{標準基底の像} \cdot P^{-1}$$

計算を行うと、選択肢の中で一致するものを探します。

結論

計算の結果、選択肢 C が正しい表現行列であることがわかります。

$$\begin{pmatrix} -58 & 63 & -32 & -37 \\ 31 & -15 & 18 & 9 \\ -40 & 42 & -24 & -26 \\ -65 & 80 & -20 & -50 \end{pmatrix}$$

ANSWER: C