

id: 307

問題: 次のベクトルの組のうち、非自明な線形関係を持つ組（零ベクトルを線形結合可能である組、ただし、全ての0倍の和を除く）を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: 非自明な線形関係を持つベクトルの組を見つけるためには、与えられたベクトルが線形独立でないことを確認する必要があります。線形独立でない場合、少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表されます。

それでは、各選択肢について検討していきましょう。

選択肢 A ベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

これらは 2×2 の行列であり、4つの行列が線形独立かどうかを確認する必要があります。行列の線形独立性を確認するためには、行列をベクトルとして扱い、行列の成分を並べたベクトルの行列を作成し、そのランクを確認します。

選択肢 B ベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2つのベクトルが線形独立でない場合、あるスカラー c が存在して、次のように表されます：

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

この場合、各成分について方程式を解くと、 $c = -\frac{2}{3}$ であることがわかります。したがって、これらのベクトルは線形従属です。

選択肢 C ベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2つのベクトルが線形独立でない場合、あるスカラー c が存在して、次のように表されます：

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

この場合、方程式を解くと、矛盾が生じるため、これらのベクトルは線形独立です。

選択肢 D ベクトルは次の通りです：

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

これらは 2×2 の行列であり、3つの行列が線形独立かどうかを確認する必要があります。行列の線形独立性を確認するためには、行列をベクトルとして扱い、行列の成分を並べたベクトルの行列を作成し、そのランクを確認します。

結論選択肢 B のベクトルは線形従属であることが確認できました。したがって、非自明な線形関係を持つ組は選択肢 B です。

ANSWER: B