

id: 337

問題: 次の行列の固有多項式を選んでください。 $\begin{pmatrix} 1 & 21 & -9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $t^3 + 4t^2 + t - 6$ B: $-t^3 - 4t^2 - 2t + 7$ C: $-t^3 - 4t^2 - t + 6$ D: $t^3 + 4t^2 + 2t - 7$

回答: A

LLM: 行列の固有多項式を求めるためには、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 21 & -9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ の特性方程式を求めます。特性方程式は次のようにして求めます。

1. 単位行列 I にスカラー t を掛けた行列 tI を考えます。ここで、 I は 3×3 の単位行列です。

$$tI = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

2. 行列 $A - tI$ を計算します。

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 21 & -9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 21 & -9 \\ 0 & -3-t & 0 \\ 0 & -1 & -2-t \end{pmatrix}$$

3. 行列 $A - tI$ の行列式を計算します。これが固有多項式になります。

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 21 & -9 \\ 0 & -3-t & 0 \\ 0 & -1 & -2-t \end{pmatrix}$$

行列式は、次のようにして計算します。

$$\det(A - tI) = (1-t) \det \begin{pmatrix} -3-t & 0 \\ -1 & -2-t \end{pmatrix} - 21 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2-t \end{pmatrix} + (-9) \det \begin{pmatrix} 0 & -3-t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

各小行列式を計算します。

$$\det \begin{pmatrix} -3-t & 0 \\ -1 & -2-t \end{pmatrix} = (-3-t)(-2-t) - (0)(-1) = (3+t)(2+t) = t^2 + 5t + 6$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2-t \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3-t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

したがって、行列式は次のようになります。

$$\det(A - tI) = (1-t)(t^2 + 5t + 6) = (1-t)(t^2 + 5t + 6)$$

展開すると、

$$= (1-t)(t^2 + 5t + 6) = t^3 + 5t^2 + 6t - t^3 - 5t^2 - 6t = t^3 + 4t^2 + 2t - 7$$

したがって、固有多項式は $t^3 + 4t^2 + 2t - 7$ です。

選択肢を確認すると、選択肢 D が一致します。

ANSWER: D