問題: 次の線形変換の中で，その固有空間を参考にして，表現表列が対角化可能なものを選択してください。

選択肢: A: $f : R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_2 + 3m_3 & m_3 + m_4 \\ 2m_3 & 2m_3 \end{pmatrix} W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

B: $f : R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2m_1 & -m_2 + m_3 \\ -m_1 - m_3 + m_4 & 3m_1 - m_4 \end{pmatrix} W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

C: $f : R^4 \to R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 + x_3 \\ 3x_3 + x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix} W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

D: $f : R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2m_1 + 3m_2 + 9m_3 - 7m_4 & -3m_2 + 6m_3 - 6m_4 \\ -3m_3 & -6m_3 + 3m_4 \end{pmatrix} W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 選択肢 A では

$$\dim W(0; f) = 1, \quad \dim W(2; f) = 1$$

したがって

$$\dim W(0; f) + \dim W(2; f) = 1 + 1 = 2$$

また

$$\dim R^{2\times 2} = 2$$

より、固有空間の次元の合計が空間の次元と一致するため、対角化可能である。

ANSWER: A