

問題: 次の線形変換の各固有値の固有空間 ($f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表したときの行列 A を用いて, すなわち標準基底に関する表現行列で) を求めてください。 $f : R^2 \rightarrow R^2$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$

選択肢: A: $W(-4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

B: $W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

C: $W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D: $W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 行列は $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ なので、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (-3 - \lambda)(-1 - \lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$$

よって固有値は $\lambda = -3, -1$ 。

$\lambda = -1$ のとき、

$$A - (-1)I = A + I = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

したがって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のスカラー倍。ゆえに

$$W(-3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}.$$

$\lambda = -3$ のとき、

$$A - (-3)I = A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

したがって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のスカラー倍。ゆえに

$$W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}.$$

以上より、選択肢 B を選ぶ。

ANSWER: B