

id: 439

問題: エルミート行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - 2i \\ -3 - 3i & 2 & -\sqrt{3} + \sqrt{3}i \\ \sqrt{3} + i & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -1 + 2i & \sqrt{2}i & -1 + 2i \\ 2 - 2i & -\sqrt{3} + i & 2 - 2i \\ 2 + i & 2 - \sqrt{2}i & 2 + i \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 1 & -2 + i & \sqrt{2} + \sqrt{3}i \\ -2 + i & 1 & -2 - \sqrt{3}i \\ \sqrt{2} + \sqrt{3}i & -2 - \sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 D: $\begin{pmatrix} 1 & 3 - i & -1 \\ 3 + i & -2 & -1 - i \\ -1 & -1 + i & 1 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: エルミート行列とは、複素共役転置が自身と等しい行列のことです。具体的には、行列 A がエルミート行列であるためには、次の条件を満たす必要があります：

$$A = A^*$$

ここで、 A^* は A の複素共役転置を表します。つまり、行列の各要素を複素共役にし、行と列を入れ替えたものです。

それでは、各選択肢を確認ていきましょう。

選択肢 A

行列 A は次のように与えられています：

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3}i & -\sqrt{3} - 2i \\ -3 - 3i & 2 & -\sqrt{3} + \sqrt{3}i \\ \sqrt{3} + i & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 A^* は次のようになります：

$$A^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -3 + 3i & \sqrt{3} - i \\ 1 - \sqrt{3}i & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} + 2i & -\sqrt{3} - \sqrt{3}i & 2 \end{pmatrix}$$

$A \neq A^*$ なので、エルミート行列ではありません。

選択肢 B

行列 B は次のように与えられています：

$$B = \begin{pmatrix} -1 + 2i & \sqrt{2}i & -1 + 2i \\ 2 - 2i & -\sqrt{3} + i & 2 - 2i \\ 2 + i & 2 - \sqrt{2}i & 2 + i \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 B^* は次のようになります：

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 - 2i & 2 + 2i & 2 - i \\ -\sqrt{2}i & -\sqrt{3} - i & 2 + \sqrt{2}i \\ -1 - 2i & 2 - 2i & 2 - i \end{pmatrix}$$

$B \neq B^*$ なので、エルミート行列ではありません。

選択肢 C

行列 C は次のように与えられています：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 + i & \sqrt{2} + \sqrt{3}i \\ -2 + i & 1 & -2 - \sqrt{3}i \\ \sqrt{2} + \sqrt{3}i & -2 - \sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 C^* は次のようにになります：

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & -2-i & \sqrt{2}-\sqrt{3}i \\ -2-i & 1 & -2+\sqrt{3}i \\ \sqrt{2}-\sqrt{3}i & -2+\sqrt{3}i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$C = C^*$ なので、エルミート行列です。

選択肢 D

行列 D は次のように与えられています：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3-i & -1 \\ 3+i & -2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の複素共役転置 D^* は次のようにになります：

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 3+i & -1 \\ 3-i & -2 & -1+i \\ -1 & -1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$D = D^*$ なので、エルミート行列です。

結論

選択肢 C と D がエルミート行列です。しかし、問題文の指示に従い、選択肢から一つ選ぶとすれば、選択肢 C を選びます。

ANSWER: C