問題: ベクトル空間 R^2 の内積を $\vec{a}=(a_i),\vec{b}=(b_i)\in R^n$, $(\vec{a},\vec{b}):=\sum_{i=1}^{n} i\times a_ib_i$ とします。このとき，次のベクトル $\vec{w_1},\vec{w_2}$ を，グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず，直交化部分のみ（正規化を含まない）を行ったところ，ベクトル $\vec{v_1},\vec{v_2}$ が得られました。次に正規化（正規直交化する残りの手順）を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。
$\vec{w_1}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w_2}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\vec{v_1}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$

選択肢: A: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{17}}{17}\\-\frac{\sqrt{17}}{17}\end{pmatrix}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: まず、$\vec{v_1}$ のノルムを求める。

$$\|\vec{v_1}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

したがって正規化は

$$\hat{v}_1=\frac{1}{\|\vec{v_1}\|}\vec{v_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$$

次に、$\vec{v_2}$ のノルムを求める。

$$\|\vec{v_2}\|=\sqrt{\left(-\frac{16}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{256}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{272}{81}}=\frac{4\sqrt{17}}{9}$$

したがって正規化は

$$\hat{v}_2=\frac{1}{\|\vec{v_2}\|}\vec{v_2}=\frac{9}{4\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{\sqrt{17}}\\-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{17}}{17}\\-\frac{\sqrt{17}}{17}\end{pmatrix}$$

よって、選択肢は D である。

ANSWER: D