

問題: 次の線形写像 ($U = R^3$ から $V = R^4$ への写像) の U の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の V

の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。なお, この U の基底の

像は, $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ となることを活用しても構いません。 $f : R^3 \rightarrow R^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto$

$$\begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 定義より、表現行列は写像の像を「出発空間の基底」に関する座標で並べたものと考えるので、標準基底では各基底ベクトルはそのまま保たれる。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = e_3$$

ゆえに表現行列は

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ANSWER: D