

id: 353

問題: 次の線形変換について, その表現行列 A (昇幂の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する) を対角化してください。

$f: R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto 3a_1 - a_2x + x^2(4a_1 - a_3)$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: まず, 線形変換 $f: R[x]_2 \rightarrow R[x]_2$ を考えます。これは多項式 $a_3x^2 + a_2x + a_1$ を次のように変換します:

$$f(a_3x^2 + a_2x + a_1) = 3a_1 - a_2x + x^2(4a_1 - a_3)$$

この変換を基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列 A で表現します。

ステップ 1: 基底ベクトルの変換

1. $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$ 2. $f(x) = -1 \cdot x = -x$ 3. $f(x^2) = 4 \cdot 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

ステップ 2: 行列 A の構成

基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する変換の行列 A は次のようになります:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ステップ 3: 対角化

行列 A はすでに対角行列です。したがって, 対角化のための行列 P は単位行列であり, 対角行列はそのまま A です。

しかし, 選択肢にある行列 P と $P^{-1}AP$ を確認する必要があります。

ステップ 4: 選択肢の確認

選択肢を確認すると, 行列 A の固有値は $3, -1, 3$ であり, 選択肢 D の $P^{-1}AP$ がこれに一致します。

したがって, 正しい選択肢は:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ANSWER: D