

id: 274

問題: 次の線形写像($U = R[x]_2$ から $V = R[x]_2$ への写像)の U の基底 $\{-3x^2 - x + 1, -x^2 + 5x + 2, -2x^2 - x + 3\}$ の V の基底 $\{3x^2 + 2x + 1, -3x^2 - x - 1, -2x^2 - 2x - 1\}$ に関する表現行列を求めてください。

$f: R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto -4a_1 + a_2 - 5a_3 + x^2 \cdot (4a_1 - a_2 + 3a_3) + x(-4a_1 - 2a_2 + 4a_3)$

なお, この U の標準基底の像は, $\{4x^2 - 4x - 4, -x^2 - 2x + 1, 3x^2 + 4x - 5\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{39} & \frac{1}{39} & \frac{16}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{7}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{17}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{7}{39} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{39} & \frac{1}{39} & -\frac{17}{39} \\ \frac{1}{39} & \frac{7}{39} & -\frac{2}{39} \\ \frac{16}{39} & -\frac{5}{39} & \frac{7}{39} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{選択肢: A: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ B: } \begin{pmatrix} -58 & -30 & 1 \\ -34 & -26 & -12 \\ -34 & -6 & 16 \end{pmatrix} \text{ C: } \begin{pmatrix} -34 & -6 & 16 \\ -34 & -26 & -12 \\ -58 & -30 & 1 \end{pmatrix} \text{ D: } \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

回答: B

LLM: この問題では、線形写像 $f: R[x]_2 \rightarrow R[x]_2$ の基底に関する表現行列を求めます。以下にステップバイステップで解説します。

ステップ 1: 標準基底の像を確認標準基底 $\{x^2, x, 1\}$ の像は次の通りです。 - $f(1) = -4x^2 - 4x - 4$ - $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ - $f(x^2) = 3x^2 + 4x - 5$

ステップ 2: 標準基底から U の基底への変換 U の基底 $\{-3x^2 - x + 1, -x^2 + 5x + 2, -2x^2 - x + 3\}$ に対する標準基底の変換行列を求めます。

標準基底を U の基底で表現すると、次の行列が得られます。

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ステップ 3: V の基底への変換 V の基底 $\{3x^2 + 2x + 1, -3x^2 - x - 1, -2x^2 - 2x - 1\}$ に対する標準基底の変換行列を求めます。

標準基底を V の基底で表現すると、次の行列が得られます。

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ステップ 4: 表現行列の計算表現行列 A は次のように計算されます。

$$A = Q^{-1} \cdot M \cdot P$$

ここで、 M は標準基底に関する線形写像の行列です。標準基底の像から次の行列が得られます。

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

ステップ 5: 逆行列の計算問題文に与えられた逆行列を使用して、 Q^{-1} を計算します。

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ステップ 6: 行列の積を計算行列の積 $A = Q^{-1} \cdot M \cdot P$ を計算します。

計算の結果、選択肢の中から一致する行列を探します。

結論計算の結果、選択肢 C の行列が一致します。

$$\begin{pmatrix} -34 & -6 & 16 \\ -34 & -26 & -12 \\ -58 & -30 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、正しい答えは選択肢 C です。

ANSWER: C