

問題: ベクトル空間 $R^{n \times m}$ の内積を $A, B \in R^{n \times m}$, $(A, B) := \text{tr}({}^t BA)$ とする。このとき, 次の 2 つのベクトルの内積とそれぞれのノルムとして適切なものを選択してください。 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

選択肢: A: 内積: 12, ノルム: 12, 22

B: 内積: 12, ノルム: $2\sqrt{3}$, $\sqrt{22}$

C: 内積: -12, ノルム: $2\sqrt{3}$, $\sqrt{22}$

D: 内積: 12, ノルム: 2, 8

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: ${}^t B = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 ${}^t BA = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}({}^t BA) = -12$$

内積は非負なので、 $|(A, B)| = 12$ 。

ノルムは

$$\|A\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \|B\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{22}.$$

以上より、内積は 12、ノルムは $2\sqrt{3}$, $\sqrt{22}$ 。よって B。