

id: 200

問題: 次の置換を互換の積で表し、また符号も正しく選択してください。 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

選択肢: A:  $(1 \ 5 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = -1$  B:  $(2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = +1$  C:  $(1 \ 5 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = +1$  D:  $(2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = -1$

回答: B

LLM: まず、置換  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  を互換の積で表します。

1. 置換のサイクル表現を求めます。サイクル表現は、置換の動きを追跡することで得られます。  
- 1 は 1 に写るので、1 は固定点です。- 2 は 5 に写ります。- 5 は 6 に写ります。- 6 は 3 に写ります。- 3 は 4 に写ります。- 4 は 2 に写ります。

したがって、サイクル表現は  $(2 \ 5 \ 6 \ 3 \ 4)$  です。

2. サイクルを互換の積に分解します。サイクル  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)$  は互換の積  $(a_1 \ a_k)(a_1 \ a_{k-1}) \dots (a_1 \ a_2)$  に分解できます。

-  $(2 \ 5 \ 6 \ 3 \ 4) = (2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$

3. 置換の符号を求めます。置換の符号は、置換を互換の積に分解したときの互換の数が偶数なら +1、奇数なら -1 です。

- 互換の数は 4 つなので、符号は -1 です。

以上より、置換  $\sigma$  は互換の積で  $(2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$  と表され、符号は -1 です。

選択肢を確認します。

- A:  $(1 \ 5 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = -1$  - B:  $(2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = +1$  - C:  $(1 \ 5 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = +1$  - D:  $(2 \ 4)(2 \ 3)(2 \ 6)(2 \ 5)$ ,  $\text{sign}(\sigma) = -1$

正しい選択肢は D です。

ANSWER: D