

問題: 次の線形変換の中で、その固有空間を参考にして、表現表列が対角化可能なものを選択してください。

選択肢: A: $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1m_2 \\ m_3m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_2 + 3m_3 & m_3 + m_4 \\ 2m_3 & 2m_3 \end{pmatrix}$ $W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(2; f) =$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

B: $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1m_2 \\ m_3m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2m_1 & -m_2 + m_3 \\ -m_1 - m_3 + m_4 & 3m_1 - m_4 \end{pmatrix}$ $W(-1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(2; f) =$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

C: $f: R^4 \rightarrow R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 3x_2 + x_3 \\ 3x_3 + x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix}$ $W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D: $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^{2 \times 2}$, $\begin{pmatrix} m_1m_2 \\ m_3m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2m_1 + 3m_2 + 9m_3 - 7m_4 & -3m_2 + 6m_3 - 6m_4 \\ -3m_3 & -6m_3 + 3m_4 \end{pmatrix}$ $W(-3; f) =$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}, \quad W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, \quad W(3; f) =$$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 選択肢 A では、固有空間の次元が

$$\dim W(0; f) = 1, \quad \dim W(2; f) = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 2.$$

また

$$\dim R^{2 \times 2} = 2 \quad (\text{基底として } E_{11}, E_{22} \text{ を取れる})$$

より、次元が一致するので対角化可能。

一方、選択肢 D では

$$\dim W(-3; f) = 2, \quad \dim W(-2; f) = 1, \quad \dim W(3; f) = 1 \Rightarrow 2 + 1 + 1 = 4 \neq \dim R^{2 \times 2} (= 2),$$

したがって対角化不可。

ANSWER: A