

id: 444

問題: 正規行列を選択してください。

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -3-i & -3+\sqrt{2}i \\ -3-i & -3+\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2i & \sqrt{2}+2i \\ -2+\sqrt{3}i & -2+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 3+2i & -\sqrt{3}-3i \\ 3+2i & -\sqrt{3}-3i \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: 正規行列とは、行列 A が正規行列であるための条件は、 $AA^* = A^*A$ であることです。ここで、 A^* は A の随伴行列（共役転置行列）です。

それでは、各選択肢について確認していきましょう。

選択肢 A 行列 A は次のように与えられています。

$$A = \begin{pmatrix} -3-i & -3+\sqrt{2}i \\ -3-i & -3+\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

随伴行列 A^* は、各要素を複素共役にして転置したものです。

$$A^* = \begin{pmatrix} -3+i & -3+i \\ -3-\sqrt{2}i & -3-\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

次に、 AA^* と A^*A を計算します。

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} -3-i & -3+\sqrt{2}i \\ -3-i & -3+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3+i & -3+i \\ -3-\sqrt{2}i & -3-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3-i)(-3+i) + (-3+\sqrt{2}i)(-3-\sqrt{2}i) & (-3-i)(-3+i) + (-3+\sqrt{2}i)(-3-\sqrt{2}i) \\ (-3-i)(-3+i) + (-3+\sqrt{2}i)(-3-\sqrt{2}i) & (-3-i)(-3+i) + (-3+\sqrt{2}i)(-3-\sqrt{2}i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} -3+i & -3+i \\ -3-\sqrt{2}i & -3-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3-i & -3+\sqrt{2}i \\ -3-i & -3+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3+i)(-3-i) + (-3+i)(-3-i) & (-3+i)(-3+\sqrt{2}i) + (-3+i)(-3+\sqrt{2}i) \\ (-3-\sqrt{2}i)(-3-i) + (-3-\sqrt{2}i)(-3-i) & (-3-\sqrt{2}i)(-3+\sqrt{2}i) + (-3-\sqrt{2}i)(-3+\sqrt{2}i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$AA^* = A^*A$ なので、選択肢 A は正規行列です。

選択肢 B, C, D 同様に計算を行いますが、選択肢 A で正規行列が見つかったため、他の選択肢を計算する必要はありません。

したがって、正規行列は選択肢 A です。

ANSWER: A