

id: 362

問題: 次の線形変換 (表現行列が実対称行列) について, その固有空間を参考に, その表現行列 A (標準基底に関する) を直交行列により対角化してください。 $f: R^3 \rightarrow R^3, \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ $W(-2; f) =$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}, W(4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ C: } P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ D: } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

回答: C

LLM: まず、与えられた線形変換の行列 A を確認します。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

この行列は実対称行列であるため、直交行列によって対角化可能です。

次に、固有空間の情報をを用いて、固有値と対応する固有ベクトルを確認します。

1. 固有値 -2 に対応する固有空間 $W(-2; f)$ は次のように与えられています：

$$W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$$

したがって、固有値 -2 に対応する独立な固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

2. 固有値 4 に対応する固有空間 $W(4; f)$ は次のように与えられています：

$$W(4; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

したがって、固有値 4 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ です。

次に、これらの固有ベクトルを用いて直交行列 P を構成します。直交行列 P の列ベクトルは、固有ベクトルを正規化したものです。

固有ベクトルを正規化します：

$-\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のノルムは $\sqrt{2}$ なので、正規化すると $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は既に正規化されています。 $-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のノルムは $\sqrt{2}$ なので、正規化すると $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$
 これらを用いて直交行列 P を構成します：

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この P を用いて A を対角化します。対角行列は固有値を対角成分に持ちます：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢を確認すると、選択肢 A が正しいことがわかります。

ANSWER: A