

id: 373

問題: 次の線形変換の各固有値の固有空間 ($f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表したときの行列 A を用いて, すなわち標準基底に関する表現行列で) を求めてください。 $f : R^3 \rightarrow R^3$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -9 & 10 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$

選択肢: A: $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$ B: $W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$ C: $W(0; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(1; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

D: $W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$, $W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$

回答: B

LLM: まず、行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 10 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めます。固有値は次の特性方程式の解として得られます。

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ここで、 I は 3×3 の単位行列であり、 λ は固有値です。したがって、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -9 & 10 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & -5 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算します。

$$\det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)((-2 - \lambda)(3 - \lambda) - 0) - (-9)(0 - 0)$$

$$= (-2 - \lambda)((-2 - \lambda)(3 - \lambda))$$

$$= (-2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$= (-2 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

したがって、固有値は $\lambda = -2, 3$ です。

次に、各固有値に対する固有空間を求めます。

1. $\lambda = -2$ の場合 :

$$(A + 2I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

この行列の階数は 1 であり、したがって次元は 2 です。したがって、固有空間は次の形になります：

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = 3$ の場合：

$$(A - 3I)\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 10 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

この行列の階数は 2 であり、したがって次元は 1 です。したがって、固有空間は次の形になります：

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢の中で正しいものは：

$$\text{D. } W(3; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, \quad W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}, \quad W(-2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

ANSWER: D