

id: 281

問題: 次の線形変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてくださ

い。 $f: R^4 \rightarrow R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 16x_4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 22x_4 \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 26x_4 \\ -2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$ なお, このベクトル空間の標準基底

の像は, $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ -22 \\ -26 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 61 & 24 & 21 & 77 \\ -80 & -32 & -24 & -95 \\ -108 & -36 & -32 & -143 \\ -21 & -11 & -6 & -19 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -21 & -11 & -6 & -19 \\ -108 & -36 & -32 & -143 \\ -80 & -32 & -24 & -95 \\ 61 & 24 & 21 & 77 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -21 & -108 & -80 & 61 \\ -11 & -36 & -32 & 24 \\ -6 & -32 & -24 & 21 \\ -19 & -143 & -95 & 77 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -19 & -143 & -95 & 77 \\ -6 & -32 & -24 & 21 \\ -11 & -36 & -32 & 24 \\ -21 & -108 & -80 & 61 \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: この問題では、線形変換 $f: R^4 \rightarrow R^4$ の基底に関する表現行列を求めます。与えられた基底は次の通りです:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

この基底に関する表現行列を求めるためには、まず標準基底の像を基底 B の線形結合で表現し、その係数を行列の列として並べます。

標準基底の像は次の通りです:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ -22 \\ -26 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

これらのベクトルを基底 B の線形結合で表現するために、基底 B の行列とその逆行列を用います。

基底 B の行列は次の通りです:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

その逆行列は次の通りです：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

次に、標準基底の像を基底 B の行列で表現します。例えば、最初のベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ を基底 B の行列で表

現するには、次のように計算します：

$$P^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -11 \\ -6 \\ -19 \end{pmatrix}$$

同様に、他のベクトルも計算します：

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -108 \\ -36 \\ -32 \\ -143 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -32 \\ -24 \\ -95 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ -22 \\ -26 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ 24 \\ 21 \\ 77 \end{pmatrix}$$

これらの結果を列として並べた行列が、基底 B に関する表現行列です：

$$\begin{pmatrix} -21 & -108 & -80 & 61 \\ -11 & -36 & -32 & 24 \\ -6 & -32 & -24 & 21 \\ -19 & -143 & -95 & 77 \end{pmatrix}$$

したがって、正しい選択肢は C です。

ANSWER: C