問題: ベクトル空間 R^3 の内積を $f(x), g(x) \in R[x]_n$, $(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ とします。このとき，次のベクトル $\vec{w_1}$,$\vec{w_2}$,$\vec{w_3}$ を，グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず，直交化部分のみ（正規化を含まない）を途中まで行ったところ，ベクトル $\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$ が得られました。次の直交ベクトルを求める手順を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。
$\vec{w_1} = -2x,\ \vec{w_2} = -x^2,\ \vec{w_3} = 2x^2 - x + 1\vec{v_1} = -2x,\ \vec{v_2} = -x^2$

選択肢: A: $\frac{19}{11}x^2 + 3x + 1$

B: $-\frac{5}{3}x^2 + 1$

C: $2x^2 - x + 1$

D: 1

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: まず $\vec{v_1}$ 成分を取り除く。

$$(\vec{w_3}, \vec{v_1}) = \int_{-1}^{1} (2x^2 - x + 1)(-2x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-4x^3 + 2x^2 - 2x)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$(\vec{v_1}, \vec{v_1}) = \int_{-1}^{1} 4x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{v_1}} \vec{w_3} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} \vec{v_1} = \frac{1}{2}\vec{v_1} = \frac{1}{2}(-2x) = -x$$

$$\vec{r} = \vec{w_3} - \mathrm{proj}_{\vec{v_1}} \vec{w_3} = (2x^2 - x + 1) - (-x) = 2x^2 + 1$$

次に $\vec{v_2} = -x^2$ は x^2 方向と一致するので、$\vec{r} = 2x^2 + 1$ の x^2 成分をそのまま取り除けばよいとし、

$$\mathrm{proj}_{\vec{v_2}} \vec{r} = 2x^2$$

$$\vec{v_3} = \vec{r} - \mathrm{proj}_{\vec{v_2}} \vec{r} = 2x^2 + 1 - 2x^2 = 1$$

したがって選択肢 D。