

id: 197

問題: 次の行列と同じ行列式を持つ行列を選んでください (行の基本変形を活用してください)。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $-\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ B: $-\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ C: $-\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

回答: C

LLM: 行列の行列式は、行や列の基本変形によって変化することがあります。特に、行の交換は行列式の符号を反転させ、行の定数倍は行列式をその定数倍にし、行の加減は行列式に影響を与えません。

与えられた行列は次の通りです:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算します。行列式の計算は、次のように展開します:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

それぞれの小行列式を計算します:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -6 + 1 = -5$$

これを元の式に代入します:

$$\det(A) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = 2 - 12 + 15 = 5$$

次に、選択肢の行列の行列式を計算します。

選択肢 A

$$B = -\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 B は A の 2 行目を 2×2 の小行列式の行と交換したものです。行の交換は行列式の符号を反転させるので、 $\det(B) = -\det(A) = -5$ です。

選択肢 B

$$C = -\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 C は A の 1 行目を 2 倍したものです。行の定数倍は行列式をその定数倍にするので、 $\det(C) = -2 \times \det(A) = -10$ です。

選択肢 C

$$D = - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列 D は A の 2 行目と 3 行目を交換したものです。行の交換は行列式の符号を反転させるので、 $\det(D) = -\det(A) = -5$ です。

選択肢 D

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 E は A の 1 行目を 2 倍したものです。行の定数倍は行列式をその定数倍にするので、 $\det(E) = 2 \times \det(A) = 10$ です。

したがって、行列式が同じなのは選択肢 A と選択肢 C です。どちらも行列式が -5 です。

ANSWER: A