

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ により張られる部分空間の基底を, これらのベクトルの組として求めるため, 行列 $\begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{pmatrix}$ と列の線形関係が同一の数値行列に対して行の基本変形を行ったところ, 次の行列 A が得られた。この結果から部分空間の 1 組の基底として適切なものを選択してください。

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行基本変形後の行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり、非零行の本数から

$$\text{rank}(A) = 3$$

とわかる。階数が 3 のとき、定義より「最初の 3 列」がピボット列になるため、第 1・第 2・第 3 列に対応する元の列ベクトル

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

が基底となる。

ANSWER: D