

id: 299

問題: 次のベクトルの線形独立な最大個数  $r$  と、 $r$  個の線形独立なベクトルの組を選択してください。

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

選択肢: A:  $r = 4$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$  B:  $r = 1$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$  C:  $r = 3$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

D:  $r = 2$ ,  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

回答: C

LLM: まず、与えられたベクトルが線形独立かどうかを確認するために、行列を作成し、その行列の階数を求めます。与えられたベクトルは次の通りです：

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルを列ベクトルとして持つ行列を考えます：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

この行列の階数を求めるために、行基本変形を行います。

1. 第1列の最初の要素を1にするために、第1行を-1/3倍します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

2. 第2行から第1行の3倍を引きます。また、第3行に第1行の3倍を足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

3. 第3行を-1/6倍して、第2行に第3行を足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

4. 第2行を第3行の-8倍して、第3行に足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

5. 第2行を第3行の-8倍して、第3行に足します：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

この行列の階数は 2 です。したがって、線形独立なベクトルの最大個数は 2 です。

選択肢を確認すると、選択肢 D が正しいことがわかります。

ANSWER: D