問題: 次の線形変換の中で，その固有空間を参考にして，表現表列が対角化可能なものを選択してください。

選択肢: A: $f : R^{2\times2} \to R^{2\times2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_2+3m_3 & m_3+m_4 \\ 2m_3 & 2m_3 \end{pmatrix} W(0;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(2;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

B: $f : R^{2\times2} \to R^{2\times2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2m_1 & -m_2+m_3 \\ -m_1-m_3+m_4 & 3m_1-m_4 \end{pmatrix} W(-1;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(2;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

C: $f : R^4 \to R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1+x_2 \\ 3x_2+x_3 \\ 3x_3+x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix} W(3;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

D: $f : R^{2\times2} \to R^{2\times2}$, $\begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_3 m_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2m_1+3m_2+9m_3-7m_4 & -3m_2+6m_3-6m_4 \\ -3m_3 & -6m_3+3m_4 \end{pmatrix} W(-3;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in R \right\}$, $W(-2;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$, $W(3;f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1 \in R \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 対角化の条件は、固有空間の次元の和がその作用する空間の次元 n に一致することです。ここで $R^{2\times2}$ の次元を便宜上 $n=2$ とみなします。

選択肢 A では

$$\dim W(0;f) = 1, \quad \dim W(2;f) = 1 \;\Rightarrow\; 1+1 = 2 = n$$

また固有値が 0 と 2 の 2 つで異なるため、固有ベクトルは独立になり

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,2)$$

と対角化できます。よって A は対角化可能です。

一方、- C は $\dim W(3;f) = 1$ しかなく、R^4 では $1 < 4$ なので対角化不可。- D は $W(-3;f)$ の 2 つの生成元が一次従属なので次元は 1 とみなせます。実際

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\dim W(-3;f) = 1$、さらに $\dim W(-2;f) = 1,\ \dim W(3;f) = 1$ で

$$1+1+1 = 3 < 4$$

だから対角化不可です。- B は固有値が -1 と 2 で符号が異なるため、ジョルダン標準形が必要になり対角化できません。

したがって、対角化可能なのは A です。

ANSWER: A