

問題: 次の部分空間の直交補空間の基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用

$$\text{いてください。} \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

$$\text{選択肢: A: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{B: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{C: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{D: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 与えられた部分空間 $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ の直交補空間の次元は、定義より

$$\dim S^\perp = 4 - \text{rank}(A)$$

とおける。

行基本変形より (例)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \dim S^\perp = 4 - 2 = 2.$$

したがって、直交補空間の基底は 2 本でよく、選択肢のうち 2 本の一次独立ベクトルからなる

$$\text{D: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が適切である。

ANSWER: D