

id: 412

問題: ベクトル空間 R^3 の内積を標準内積とします。このとき、次のベクトル $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ を、グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず、直交化部分のみ（正規化を含まない）を途中まで行ったところ、ベクトル \vec{v}_1, \vec{v}_2 が得られました。次の直交ベクトルを求める手順を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -\frac{6}{29} \\ -\frac{9}{29} \\ -\frac{12}{29} \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -\frac{41}{36} \\ \frac{101}{9} \\ -\frac{619}{72} \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} \frac{50}{81} \\ \frac{307}{81} \\ -\frac{316}{81} \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: グラムシュミットの直交化法を用いて、ベクトル \vec{w}_3 を \vec{v}_1 と \vec{v}_2 に直交するように変換します。

まず、 \vec{w}_3 から \vec{v}_1 成分を取り除きます。これは次のように計算されます：

$$\text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 = \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1$$

内積を計算します：

$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 0 \times 2 = 2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

したがって、

$$\text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

次に、 \vec{w}_3 から \vec{v}_2 成分を取り除きます：

$$\text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3 = \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$$

内積を計算します：

$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = 0 \times \left(-\frac{14}{9}\right) + (-1) \times \frac{8}{9} + 0 \times \frac{1}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \left(-\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{196}{81} + \frac{64}{81} + \frac{1}{81} = \frac{261}{81} = \frac{29}{9}$$

したがって、

$$\text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3 = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{29}{9}} \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = -\frac{8}{29} \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{112}{261} \\ -\frac{64}{261} \\ -\frac{8}{261} \end{pmatrix}$$

最後に、 \vec{w}_3 からこれらの成分を取り除いたベクトル \vec{v}_3 を求めます：

$$\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{112}{261} \\ -\frac{64}{261} \\ -\frac{8}{261} \end{pmatrix}$$

計算を行うと、

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 + \frac{2}{9} - \frac{112}{261} \\ -1 + \frac{4}{9} + \frac{64}{261} \\ 0 - \frac{4}{9} + \frac{8}{261} \end{pmatrix}$$

これを計算すると、

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{58}{261} \\ -\frac{145}{261} \\ -\frac{116}{261} \end{pmatrix}$$

これを簡約化すると、選択肢 B に一致します。

ANSWER: B