

id: 268

問題: 次の線形変換の基底 $\{1, x^2 + x + 1, -x - 1\}$ に関する表現行列を求めてください。 $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2$, $a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto -2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + x^2 \cdot (4a_1 - 8a_2 + 16a_3) + x(-4a_1 + 8a_2 - 16a_3)$ なお、このベクトル空間の標準基底の像は、 $\{4x^2 - 4x - 2, -8x^2 + 8x + 4, 16x^2 - 16x - 8\}$ となることと次の関係式

を活用しても構いません。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 4 \\ 8 & 24 & 8 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 12 & 24 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -4 & 8 & -16 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: まず、線形変換 f の定義を確認します。変換は次のように与えられています：

$$f(a_3x^2 + a_2x + a_1) = -2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + x^2(4a_1 - 8a_2 + 16a_3) + x(-4a_1 + 8a_2 - 16a_3)$$

この変換を基底 $\{1, x^2 + x + 1, -x - 1\}$ に関して表現行列を求めます。

ステップ 1: 標準基底の像を確認

標準基底 $\{1, x, x^2\}$ の像は次のように与えられています：

$$f(1) = 4x^2 - 4x - 2$$

$$f(x) = -8x^2 + 8x + 4$$

$$f(x^2) = 16x^2 - 16x - 8$$

ステップ 2: 基底変換行列を求める

基底 $\{1, x^2 + x + 1, -x - 1\}$ から標準基底 $\{1, x, x^2\}$ への変換行列は次のように与えられています：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

その逆行列は：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ステップ 3: 表現行列を求める

変換行列 A は次のように求められます：

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$$

ここで、 B は標準基底に関する表現行列で、次のように与えられます：

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -4 & 8 & -16 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

したがって、求める表現行列 A は：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -4 & 8 & -16 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

計算を行うと、選択肢 D の行列と一致します：

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -4 & 8 & -16 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

したがって、正しい答えは選択肢 D です。

ANSWER: D