

問題: ベクトル空間 $R[x]_n$ の内積を $f(x), g(x) \in R[x]_n$, $(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ とする。このとき, 次の 2 つのベクトルの内積とそれぞれのノルムとして適切なものを選択してください。 $3x - 1$, $-2x - 3$

選択肢: A: 内積: -2 , ノルム: $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{186}}{3}$

B: 内積: -2 , ノルム: 8 , $\frac{62}{3}$

C: 内積: 2 , ノルム: $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{186}}{3}$

D: この内積はこのベクトル空間では内積の条件を満たさず, 定義されない。

正答の選択肢: C

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 (3x - 1)(-2x - 3) dx$$

$$(3x - 1)(-2x - 3) = -6x^2 - 9x + 2x + 1 = -6x^2 - 7x + 1$$

$$\int_{-1}^1 (-6x^2 - 7x + 1) dx = -6 \int_{-1}^1 x^2 dx - 7 \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 1 dx$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^1 x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$(f, g) = -6 \cdot \frac{2}{3} - 7 \cdot 0 + 2 = -4 + 2 = -2$$

$$\|3x - 1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (3x - 1)^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 (9x^2 - 6x + 1) dx} = \sqrt{6 + 0 + 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\|-2x - 3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (-2x - 3)^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 (4x^2 + 12x + 9) dx} = \sqrt{\frac{8}{3} + 0 + 18} = \frac{\sqrt{186}}{3}$$

選択: A