

問題: 次のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ の線形独立な最大個数を調べるために、行列 $(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3 \vec{u}_4 \vec{u}_5)$ に掃き出しを行ったところ、次の行列 A が得られた。この状態で、主成分のある列を線形独立なベクトルとして取り出し、残りのベクトルをその線形結合で表した場合の関係式を選んでください。 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_4$

B: $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1, \vec{u}_3 = 3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$

C: $\vec{u}_2 = \vec{u}_1, \vec{u}_3 = -3\vec{u}_1, \vec{u}_5 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

D: $\vec{u}_3 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2, \vec{u}_5 = 3\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

第 1 行で 1 が立っている 1 列目・2 列目を主成分のある列とみなす、独立なベクトルを \vec{u}_1, \vec{u}_2 とすると、各列の成分を係数として

$$\vec{u}_2 = 1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1, \quad \vec{u}_3 = -3 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = -3\vec{u}_1, \quad \vec{u}_5 = -2 \cdot \vec{u}_1 + (-1) \cdot \vec{u}_2 = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

よって、選択肢 C。