

問題: 次の線形変換について, その固有空間を参考に, その表現行列 A (標準基底に関する) を対角化してくだ

さい。 $f: R^4 \rightarrow R^4$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}$ $W(2; f) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\}$, $W(1; f)$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1 \in R \right\}$$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

正答の選択肢: A

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: 行列表現は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

与えられた固有空間の基底から

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

各ベクトルに対する作用を確認する。- $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ に対して

$$f(v_1) = (2, 0, 0, 0)^T = 2v_1$$

- $v_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ に対して

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

- $v_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ に対して

$$f(v_3) = (0, 0, 2, 0)^T = 2v_3$$

- $w = (0, 0, 2, 1)^T$ に対して

$$f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2w$$

以上より、この基底での対角形は

$$P^{-1}AP = \text{diag}(2, 1, 2, 2)$$

となる。

ANSWER: B