

id: 212

問題: 次の部分空間の基底として適切なものを選択してください。 $\{c_1(2 - 3x) + c_2(6 - 9x) \mid c_1, c_2 \in R\}$

選択肢: A: $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ B: $\{2 - 3x\}$ C: $\{2 - 2x\}$ D: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

回答: B

LLM: 与えられた部分空間は、次のように表されます：

$$\{c_1(2 - 3x) + c_2(6 - 9x) \mid c_1, c_2 \in R\}$$

まず、これを展開してみましょう：

$$c_1(2 - 3x) + c_2(6 - 9x) = c_1 \cdot 2 - c_1 \cdot 3x + c_2 \cdot 6 - c_2 \cdot 9x$$

これを整理すると：

$$= (2c_1 + 6c_2) + (-3c_1 - 9c_2)x$$

したがって、部分空間は次のように書けます：

$$\{(2c_1 + 6c_2) + (-3c_1 - 9c_2)x \mid c_1, c_2 \in R\}$$

この部分空間は、一次式の集合であり、係数のベクトルとして表すことができます：

$$\begin{pmatrix} 2c_1 + 6c_2 \\ -3c_1 - 9c_2 \end{pmatrix}$$

このベクトルを基底として表現するために、係数行列を考えます：

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算して、独立性を確認します：

$$\det = 2 \cdot (-9) - 6 \cdot (-3) = -18 + 18 = 0$$

行列式が 0 であるため、行列の行は線形独立ではありません。したがって、行の一方は他方のスカラー倍であることがわかります。

実際、行列の第 2 行は第 1 行の 3 倍です：

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

したがって、基底は 1 つのベクトルで表されます：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

選択肢の中でこれに該当するのは、選択肢 D です。

ANSWER: D