問題: 次の線形写像の核の次元と 1 組の基底として適切なものを選択してください。$f : R^3 \to R^2,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ なお，この線形写像に現れる行列の簡約な行列は，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となります。

選択肢: A: 次元は 2 で，1 組の基底は，$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

B: 次元は 2 で，1 組の基底は，$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C: 次元は 3 で，1 組の基底は，$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

D: 次元は 2 で，1 組の基底は，$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 計算間違い

GPT が作成した誤答: 行列の簡約な形が与えられているので、核は次の方程式の解で与えられる。

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

この式から

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

とおけるので、$x_2 = s,\ x_3 = t$ として

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、核の次元は 2、1 組の基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

となる。

ANSWER: B