

問題: 次の線形写像の核の次元と 1 組の基底として適切なものを選択してください。 $f: R^3 \rightarrow R^2$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ なお, この線形写像に現れる行列の簡約な行列は, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ となります。

選択肢: A: 次元は 2 で, 1 組の基底は, $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

B: 次元は 2 で, 1 組の基底は, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C: 次元は 3 で, 1 組の基底は, $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

D: 次元は 2 で, 1 組の基底は, $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

正答の選択肢: D

指定した誤答タイプ: 定義の概念誤り

GPT が作成した誤答: 行列は

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{簡約形は } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

です。核は、 $f(\vec{x})$ の取り得る出力側（値域）の中で 0 に対応する方向（つまり値域の部分空間）と考えられるので、 A の像を張る基本方向を基底としてとればよいです。実際、

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2A\vec{e}_1, \quad A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -A\vec{e}_1$$

より、値域は $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の張る 1 次元方向になります。したがって核の基底としては

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

を取ればよく、また核は出力空間 R^2 に属するので次元は 2 です。

ANSWER: A