

id: 404

問題: ベクトル空間 R^2 の内積を $f(x), g(x) \in R[x]_n$, $(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ とします。このとき, 次のベクトル \vec{w}_1, \vec{w}_2 を, グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず, 直交化部分のみ (正規化を含まない) を行ったところ, ベクトル \vec{v}_1, \vec{v}_2 が得られました。次に正規化 (正規直交化する残りの手順) を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。

$$\vec{w}_1 = 3x + 2, \vec{w}_2 = 3x + 1 \quad \vec{v}_1 = 3x + 2, \vec{v}_2 = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}$$

選択肢: A: $\frac{3}{14}\sqrt{14}x + \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{42}}{7}x - \frac{\sqrt{42}}{14}$ B: $3x + 2, \frac{\sqrt{42}}{7}x - \frac{\sqrt{42}}{14}$ C: $3x + 2, \frac{2}{5}\sqrt{5}x - \frac{\sqrt{5}}{5}$ D: $\frac{3}{14}\sqrt{14}x + \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}$

回答: A

LLM: グラムシュミットの正規直交化法を用いて、与えられたベクトルを正規直交化します。まず、直交化されたベクトル \vec{v}_1 と \vec{v}_2 を正規化します。

ステップ 1: \vec{v}_1 の正規化

$\vec{v}_1 = 3x + 2$ のノルムを計算します。

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (3x + 2)^2 dx}$$

まず、 $(3x + 2)^2$ を展開します。

$$(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

これを $[-1, 1]$ の範囲で積分します。

$$\int_{-1}^1 (9x^2 + 12x + 4) dx = [3x^3 + 6x^2 + 4x]_{-1}^1$$

計算すると、

$$= (3(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1)) - (3(-1)^3 + 6(-1)^2 + 4(-1))$$

$$= (3 + 6 + 4) - (-3 + 6 - 4)$$

$$= 13 - (-1) = 14$$

したがって、 $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{14}$ です。

正規化された \vec{v}_1 は、

$$\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{3x + 2}{\sqrt{14}}$$

ステップ 2: \vec{v}_2 の正規化

$\vec{v}_2 = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}$ のノルムを計算します。

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}\right)^2 dx}$$

まず、 $\left(\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}\right)^2$ を展開します。

$$\left(\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}x^2 - \frac{36}{49}x + \frac{9}{49}$$

これを $[-1, 1]$ の範囲で積分します。

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{36}{49}x^2 - \frac{36}{49}x + \frac{9}{49} \right) dx = \left[\frac{12}{49}x^3 - \frac{18}{49}x^2 + \frac{9}{49}x \right]_{-1}^1$$

計算すると、

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{12}{49}(1)^3 - \frac{18}{49}(1)^2 + \frac{9}{49}(1) \right) - \left(\frac{12}{49}(-1)^3 - \frac{18}{49}(-1)^2 + \frac{9}{49}(-1) \right) \\ &= \left(\frac{12}{49} - \frac{18}{49} + \frac{9}{49} \right) - \left(-\frac{12}{49} - \frac{18}{49} - \frac{9}{49} \right) \\ &= \frac{3}{49} - \left(-\frac{39}{49} \right) = \frac{3}{49} + \frac{39}{49} = \frac{42}{49} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

したがって、 $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\frac{6}{7}}$ です。

正規化された \vec{v}_2 は、

$$\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}}{\sqrt{\frac{6}{7}}} = \frac{\sqrt{42}}{7}x - \frac{\sqrt{42}}{14}$$

結論

正規化されたベクトルは次の通りです。

- \vec{v}_1 の正規化: $\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}$ - \vec{v}_2 の正規化: $\frac{\sqrt{42}}{7}x - \frac{\sqrt{42}}{14}$

したがって、選択肢 B が正しいです。

ANSWER: B