

id: 280

問題: 次の線形変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めてください。 $f : R^2 \rightarrow R^2$, $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ なお、このベクトル空間の標準基底の像は、 $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ となることと次の関係式を活用しても構いません。 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -15 & -26 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ C: $\begin{pmatrix} -15 & 13 \\ -26 & 21 \end{pmatrix}$ D: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

回答: A

LLM: 線形変換 $f : R^2 \rightarrow R^2$ は、行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ によって表されます。この変換の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めます。

まず、基底ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を変換します。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の変換:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の変換:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 9 \\ 5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

次に、これらの変換されたベクトルを基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ の線形結合として表します。

1. $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ を基底の線形結合として表す:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 3b \end{pmatrix}$$

これを解くと、

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + 3b = 9 \end{cases}$$

これを解くと、 $a = 3, b = -5$ となります。

2. $\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ を基底の線形結合として表す:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + d \\ 2c + 3d \end{pmatrix}$$

これを解くと、

$$\begin{cases} c + d = -5 \\ 2c + 3d = 11 \end{cases}$$

これを解くと、 $c = 13, d = -18$ となります。

したがって、基底に関する表現行列は次のようにになります。

$$\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -5 & -18 \end{pmatrix}$$

しかし、選択肢にこの行列はありません。計算を見直すと、基底変換の逆行列を使って変換行列を求める必要があります。

基底変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ で、その逆行列は $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ です。

したがって、基底に関する表現行列は次のように求められます。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 13 \\ -26 & 21 \end{pmatrix}$$

よって、正しい選択肢は C です。

ANSWER: C