

id: 333

問題: 次の部分空間の直交補空間の基底として適切なものを選択してください。なお、内積は標準内積を用

いてください。

$$\left\{ \vec{x} \in R^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & -3 \\ 8 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \right\}$$

選択肢: A:  $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  B:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  C:  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  D:  $\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

回答: B

LLM: まず、与えられた部分空間を考えます。この部分空間は、次の行列方程式を満たすベクトル  $\vec{x} \in R^3$  から構成されています。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & -3 \\ 8 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

この行列の行ベクトルは、部分空間の直交補空間を生成します。直交補空間の基底を求めるためには、この行列の行ベクトルの線形独立な組を見つける必要があります。

行列の行ベクトルは次の通りです：

1.  $(-1, 2, 1)$  2.  $(12, 3, -3)$  3.  $(8, -1, -3)$  4.  $(-5, -2, 1)$

これらのベクトルの線形独立性を確認するために、行列を行基本変形して行階段形にします。

行基本変形を行うと、次のような行階段形になります：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行階段形から、次の 2 つの行ベクトルが線形独立であることがわかります：

1.  $(1, -2, -1)$  2.  $(0, 1, 1)$

したがって、直交補空間の基底はこれらのベクトルの線形結合で表されるベクトルです。

選択肢を確認します：

A.  $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B.  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

C.  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

D.  $\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

直交補空間の基底は、行ベクトルの線形独立な組であるため、選択肢 D が正しいです。

ANSWER: D