

id: 349

問題: 次の線形変換について、その固有空間を参考に、その表現表列 A (昇幂の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する) を対角化してください。 $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2, a_3x^2 + a_2x + a_1 \mapsto -3a_1 + 2a_2x + x^2 (-5a_1 + 2a_3)$
 $W(2; f) = \left\{ c_1(x) + c_2(x^2) \mid c_1, c_2 \in R \right\}, W(-3; f) = \left\{ c_1(x^2 + 1) \mid c_1 \in R \right\}$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

C: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

回答: B

LLM: まず、与えられた線形変換 $f : R[x]_2 \rightarrow R[x]_2$ を考えます。変換は次のように定義されています：

$$f(a_3x^2 + a_2x + a_1) = -3a_1 + 2a_2x + x^2(-5a_1 + 2a_3)$$

この変換を基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列 A で表現します。変換の各基底ベクトルに対する作用を考えます。

$$1. f(1) = -3 \quad 2. f(x) = 2x \quad 3. f(x^2) = -5 + 2x^2$$

これを基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列で表すと、行列 A は次のようにになります：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

次に、固有空間を考えます。固有値とその対応する固有空間は次のように与えられています：

- 固有値 2 に対する固有空間 $W(2; f) = \{c_1x + c_2x^2 \mid c_1, c_2 \in R\}$ - 固有値 -3 に対する固有空間 $W(-3; f) = \{c_1(x^2 + 1) \mid c_1 \in R\}$

これに基づいて、行列 A を対角化するための行列 P を構成します。固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列 P は次のようにになります：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、対角行列 D は次のようにになります：

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢の中で正しいものは次の通りです：

ANSWER: A