

問題: ベクトル空間 R^2 の内積を $\vec{a} = (a_i), \vec{b} = (b_i) \in R^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) := \sum_{i=1}^n i \times a_i b_i$ とします。このとき、次のベクトル \vec{w}_1, \vec{w}_2 を、グラムシュミットの方法で正規直交化することを考えます。ひとまず、直交化部分のみ（正規化を含まない）を行ったところ、ベクトル \vec{v}_1, \vec{v}_2 が得られました。次に正規化（正規直交化する残りの手順）を行った場合に得られるベクトルとしてもっとも適切なものを選択してください。

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

選択肢: A: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{17}}{17} \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}$

正答の選択肢: B

指定した誤答タイプ: 論理の誤り

GPT が作成した誤答: まず $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のノルムは

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

より、正規化は

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

となる。

次に $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$ のノルムは

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 + 16}{81}} = \frac{\sqrt{272}}{9} = \frac{4\sqrt{17}}{9}$$

より、正規化は

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 = \frac{9}{4\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{17}}{17} \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} \end{pmatrix}$$

よって、選択肢 D。