

id: 352

問題: 次の線形変換について, その表現行列 A (昇冪の基底 $\{1, x\}$ に関する) を対角化してください。

$f: R[x]_1 \rightarrow R[x]_1, a_2x + a_1 \mapsto 2a_1x + 2a_1$

選択肢: A: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ B: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ D: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

回答: D

LLM: まず, 線形変換 $f: R[x]_1 \rightarrow R[x]_1$ を考えます。ここで, $R[x]_1$ は一次多項式の空間であり, 基底 $\{1, x\}$ に関して表現されます。

与えられた線形変換は次のように定義されています:

$$f(a_2x + a_1) = 2a_1x + 2a_1$$

この変換を基底 $\{1, x\}$ に関する行列 A で表現します。基底ベクトル $\{1, x\}$ に対する変換を考えます。

1. $f(1)$ を計算します:

$$f(1) = f(0 \cdot x + 1) = 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = 2x + 2$$

したがって, $f(1) = 2x + 2$ は基底 $\{1, x\}$ に関して $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ で表されます。

2. $f(x)$ を計算します:

$$f(x) = f(1 \cdot x + 0) = 2 \cdot 0 \cdot x + 2 \cdot 0 = 0$$

したがって, $f(x) = 0$ は基底 $\{1, x\}$ に関して $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表されます。

これにより, 行列 A は次のようになります:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

次に, この行列を対角化します。行列 A の固有値を求めます。

行列 A の固有値は, 次の特性方程式の解として求められます:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda) - 0 = -\lambda(2 - \lambda) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

したがって, 固有値は $\lambda = 0$ と $\lambda = 2$ です。

次に, 各固有値に対する固有ベクトルを求めます。

1. $\lambda = 0$ の場合:

$$(A - 0I)v = Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $2v_1 = 0$ より, $v_1 = 0$ です。よって, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

2. $\lambda = 2$ の場合:

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_1 - 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $2v_1 - 2v_2 = 0$ より, $v_1 = v_2$ です。よって, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

固有ベクトルを列に持つ行列 P は次のようになります：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 P の逆行列 P^{-1} を求めます：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列 A を対角化すると：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、選択肢 D が正しいです。

ANSWER: D