Оглавление

КОНТЕКСТ ДИСЦИПЛИНЫ

У всех программ есть общая черта – они преобразуют полученные от пользователя данные в информацию, которая этому пользователю полезна.

При разработке новых программ всегда встают два вопроса:

1. Какую программу нужно сделать?
2. Правильно ли сделана программа?

Для ответа на первый вопрос выполняют анализ предметной области. Результатом этого анализа становятся требования, оформленные в виде технического задания. Наличие технического задания – необходимое условие для того, чтобы приступить к ответу на второй вопрос. Проверка соответствия между реальным и ожидаемым поведением программы это тестирование программного обеспечения, осуществляемая на конечном наборе тестов, выбранном определенным образом. [IEEE Guide to Software Engineering Body of Knowledge, SWEBOK, 2004]

Процесс тестирования состоит из этапов:

- Планирование работ
- Проектирование тестов
- Выполнение тестирования
- Анализ полученных результатов

Материалы этой дисциплины были подготовлены для того, чтобы вы смогли проектировать тесты и планировать свою работу.

ПРЕДМЕТ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Дискретная математика, или дискретный анализ – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах.Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности.

Основные множества в программном обеспечении конечны. Это

- исходные данные
- состояния системы
- результаты запуска

При этом возможные исходные данные всегда больше, чем известные исходные данные. Возможные исходные данные в некоторых случаях могут быть бесконечны. Возможные результаты запуска могут быть заранее известны при любых исходных данных. Они также могут быть бесконечными, как и исходные данные.

Первая цель – научить подбирать достаточно полный набор исходных данных для тестирования. Для этого будет изучаться теория множеств и математическая логика.

Программы в ходе своей работы меняют свое состояние. Множество возможных состояний и правил переходов между ними это тоже предмет тестирования.

Вторая цель – научить составлению сценариев для проверки правил изменения состояний системы. Чтобы ее добиться, будет изучена теория графов.

Третья цель – развитие внимательности.

Сегодня дискретная математика является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Элементы и множества

Цель: освоить термины, научиться видеть множества в окружающем мире и описывать их с помощью математических формул.

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов. Для определенности остановимся на следующем определении.

Множество это объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются **элементами** образуемого ими множества.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д.; а элементы множеств – строчными буквами: a, b, c и т.д.Простейший способ задания множества – перечисление элементов.

M={a1, a2, …, ak}, где

- M – наименование множества
- a1,a2,…,ak – запись о том, что множеству M принадлежит k штук элементов

M={9,4,7} – запись о том, что множеству M принадлежат числа 9, 4,7.

Элементы во множестве не упорядочены. Множество {1,2,3} это то же самое множество, что и {3,2,1}.

Элементы во множестве уникальны. Множество {1,2,2,2,3,3} следует записать как {1,2,3}.

Если объект x является элементом множества M, то говорят, что x принадлежит M: $x \in M$. В противном случае говорят, что x не принадлежит M: $x \notin M$.Знак $\in$ это сокращение от латинского слова element. Знак применяется только для связи элементов и множеств.

Стандартные числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел (natural)
- $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$
- $\mathbb{Z}= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$– все целые числа (zahlen–нем. "числа")
- $\mathbb{Q}$– рациональные числа, могут быть выражены дробями (quoziente – итал. "дробь")
- $\mathbb{R}$– действительные числа (real)
- $\mathbb{P}$– множества простых чисел (prime)
- $\varnothing$– пустое множество. Не содержит элементов.
- U– универсальное множество, содержащее все возможные элементы

Пример X

Пример	Расшифровка
A = {9,2,8,3,7,4,6,5,2,1,0}	Множество цифр десятичной системы счисления
B = {2,3,7,11,13,17,19,23,29,31}	Множество из первых 10 простых чисел
МЕСЯЦЫ = {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь}	множество названий месяцев
ЗИМА = {декабрь, январь, февраль}	множество зимних месяцев
ГОРОДА = {Москва, Омск, Париж, Ялта}	множество городов
СТРАНЫ_СОСЕДИ = {Норвегия, Финляндия, Эстония, Латвия, Литва, Польша, Белоруссия, Украина, Абхазия, Грузия, Южная Осетия, Азербайджан, Казахстан, Китай, Монголия, КНДР, Япония, США}	Множество стран, с которыми граничит Россия
Д6 = {1,2,3,4,5,6}	Множество возможных значений на игральном кубе с 6 гранями
РЕШЕНИЯ= {Камень, Ножницы, Бумага}	Возможные решения в игре Камень-ножницы-бумага
ИСХОДЫ = {победа игрока А, победа игрока Б, ничья}	Возможные исходы игры Камень-ножницы-бумага
СОСТОЯНИЯ = {ОК, ОШИБКА}	Возможные состояния программы

Высказывания

Цель: дать инструмент для описания множеств с помощью высказываний.

Выска́зывание в математической логике — предложение, выражающее суждение. Если суждение, составляющее содержание (смысл) некоторого высказывания, истинно, то и о данном высказывании говорят, что оно истинно. Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения. Истинность и ложность называются логическими, или истинностными, значениями высказываний.[Чупахин И.Я.,Бродский И.Н. Формальная логика. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1977. — 357 с.]

Пример Х

Высказывание	Истинно или ложно
Москва входит в состав России	истинно
Омск входит в состав Франции	ложно
Если игрок А выбрал камень, а игрок Б – ножницы, то победит игрок А	истинно

Множество можно задавать описанием свойств, которыми должны обладать его элементы. Таким способом можно задавать бесконечные множества.

M={x | P(x)}, где

- M – наименование множества
- x – условное обозначение любого из элементов множества
- P(x) – высказывание (характеристический предикат)

Характеристический предикат – это условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного аргумента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

Истинность или ложность предиката зависит от аргумента.

Москва входит в состав России – высказывание.

$город входит в состав России – предикат, в котором "$город" – аргумент.

Простейшие условия для числовых множеств:

- а больше b
- а меньше b
- а эквивалентно b (Равно)
- а больше или равно b
- а меньше или равно b
- аделится без остатка на b

Пример X

№	Пример	Расшифровка
1.	$A = \{a \mid a>0\}$	Числа больше 0
2.	$B = \{b \mid b<100\}$	Числа меньше 100
3.	$C = \{c \mid c\%2==0\}$	Числа, которые делятся без остатка на 2
4.	$ЦЕНЫ = \{cost \mid cost>0\}$	Множество цен, которые должны быть больше 0

Даны фразы. Какие из них это предикаты, а какие – высказывания?

№	Фраза	Предикат/Высказывание
1.	В пятницу было солнечно	высказывание, предикат (т.к. нужно уточнить в какую именно пятницу)
2.	программа не работает	предикат (какая именно программа?)
3.	масса автомобиля больше 3 тонн	предикат
4.	я сегодня пришел вовремя	высказывание
5.	мы закончим занятие попозже	предикат (какое именно занятие)

Даны предикаты, привести примеры, когда они ложны и когда истинны.

№	Предикат	Примеры истины	Примеры лжи
1.	Город входит в состав России	Москва, Омск, Саратов	Лондон, Амстердам, Нью-Йорк
2.	Масса автомобиля больше 3 тонн	КамАЗ, ЗИЛ	Ока, Лада калина
3.	$0<x$	3, 7, 11	0, -2,
4.	$y<100$	71	173
5.	$x\%2==0$	4	5
6.	$c<=15$	15	

Граничное значение

Граничное значение это пример максимального и минимального аргумента предиката, который превращается как в ложное высказывание, так и в истинное.

Частный случай граничного значения это пример элемента множества, который показывает разницу между строгим и нестрогим сравнением.

Для предикатов «больше» или «меньше» на множестве действительных чисел можно бесконечно долго подбирать пример аргумента. Поэтому в прикладных приложениях вводят еще дополнительные требования к точности и алгоритм округления. Например для денежных расчетов обычно требуют 2 знака после запятой и обычный алгоритм округления.

№	Предикат	Пример граничного значения	
		Истины	**Лжи**
1.	$0<x, x\in N$	1	0
2.	$y<100, y\in N$	99	100
3.	$x==2, x\in N$	2	3, 1
4.	$c<=15, c\in N$	15	16
5.	$y<100, y\in R$, точность 4 знака	99.9999	100
6.	$x==2, x\in R$, точность 4 знака	2	1.9999, 2.0001

Подмножества

Множество A называется **подмножеством** множества B, если всякий элемент из A является элементом B. Обозначается как $A\subseteq B$.

Множество A называется **строгим (собственным) подмножеством** B, если A является подмножеством B и B не является подмножеством A. Обозначается как $A\subset B$.

Множества A и B считаются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут A=B, $A\neq B$ – в противном случае.

Множества A и B считаются **равными**, если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$

Пример X

A = {1,2,3,4}; B = {1,2,3,4,5}; C = {4,3,2,1}

Высказывания:

- $A\subset B$– истинно
- $A\subseteq B$ – ложно
- $B\subset A$ – ложно
- $A\subseteq C$ истинно и $C\subseteq A$ – истинно. Порядок элементов не важен.
- A==C

Какие элементы из множества B отсутствуют во множестве A?

ЗИМА является подмножеством МЕСЯЦЫ. ЗИМА ⊂ МЕСЯЦЫ.

Но при этом МЕСЯЦЫ не являются подмножеством ЗИМА.

Множество **возможных исходных данных** для программы можно разбить на группы:

- **Корректные данные** – приводят к вычислению результата или корректному изменению состояния программы.
- **Некорректные данные** – приводят к ошибке или отбрасываются программой без изменения состояния.

Множество **фактических исходных данных** для программы является подмножеством возможных исходных данных.

Истинно ли, что множество **тестовых исходных данных** это подмножество возможных исходных данных?

Истинно ли, что множество тестовых исходных данных это подмножество фактических исходных данных? (Нет, по факту некоторые случаи могут не встречаться на практике).

Дано: A = {9,8,7,6}, B = {8,6}, C = {5,7} a = 7, D = ∅.

Какие из утверждений истинны?

№	**Высказывание**	**Ответ**
1.	$C \subset A$	ложно
2.	$B \subset A$	истинно
3.	$B \subseteq A$	ложно
4.	$A \subset C$	ложно
5.	$a \in A$	истинно
6.	$a \in B$	ложно
7.	$a \in C$	истинно
8.	$a \in D$	ложно
9.	$D \subset A$	истинно
10.	$B \in A$	ложно

Дано: A = {a|0<a}, B = {b|b<50}, C = {c|75<c}, D = {d|d<=0}, x=15

Какие из утверждений истинны:

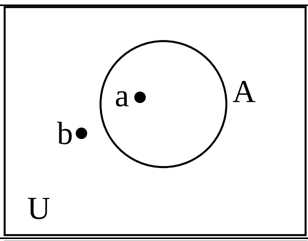
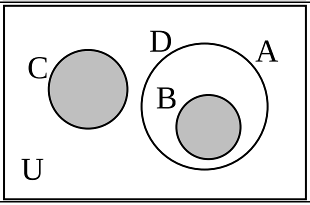
№	**Высказывание**	**Ответ**
1.	$C \subset A$	истинно
2.	$B \subset A$	ложно
3.	$B \subseteq A$	ложно
4.	$A \subset C$	ложно
5.	$x \in A$	истинно
6.	$x \in B$	истинно
7.	$x \in C$	ложно
8.	$x \in D$	ложно
9.	$D \subset C$	ложно
10.	$B \in D$	ложно

Графическое изображение множеств

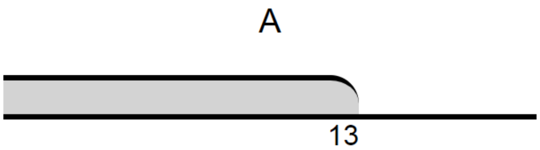
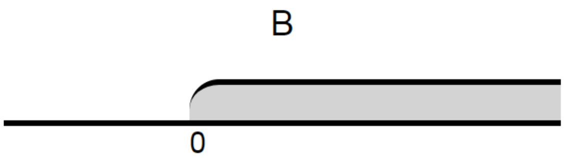
Существует несколько способов графически изобразить множества:

1. Диаграммы Эйлера-Венна
2. Диаграммы на координатной прямой или плоскости

Построение диаграммы Эйлера-Венна заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Фигуры должны быть соответствующим образом обозначены.

<table>
<tr><th>Диаграмма Эйлера-Венна</th><th>Истинные высказывания</th><th>Ложные высказывания</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$a \in A$
$a \in U$
$b \in U$
$A \subset U$</td><td>$b \in A$
$U \subset A$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$B \subset A$ $D \subseteq A$ $B \subset D$
$A \subset U$ $B \subset U$ $C \subset U$
$D \subset U$</td><td>$C \subset A$
$C \subset D$</td></tr>
</table>

Диаграммы на координатной прямой используются для изображения числовых множеств. Построение диаграммы заключается в изображении линии со стрелкой, которая обозначает числовую прямую. Каждая точка оси координат обозначает какое-то число. Чем ближе число к стрелке, тем больше оно. Множества обозначаются дугами. Если множество задано неравенством, то на оси отмечается граница неравенства. Для строгого неравенства на границе ставится выколотая точка. Для нестрогого – закрашенная.

<table>
<tr><th>Диаграмма на координатной прямой</th><th>Множество</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A = {x|x<13}</td></tr>
<tr><td>
</td><td>B = {x|x>0}</td></tr>
</table>

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Логические операции над предикатами

Цель: при выполнении операций над множествами, которые заданы как предикаты, нужно уметь писать высказывания с использованием логических операций конъюнкции, дизъюнкции и т.п.

Логическая операция это символ или слово, используемое для соединения двух или более высказываний так, что значение составного высказывания зависит от значений соединяемых высказываний и от значения операции. Для описания логических операций используют таблицы истинности.

Порядок вычисления	**Символ**	**Наименование**	**Описание**
1	¬x	Отрицание	не x
2	a∧b	Конъюнкция	a и b
3	a∨b	Дизъюнкция	a или b
3	a⊕b	Строгая дизъюнкция	либо a либо b
4	a→b	Импликация	если a, то b
5	a↔b	Эквиваленция	a то же самое, что b

Таблица истинности отрицания

x	**¬x**
истина	ложь
ложь	истина

Таблица истинности различных операций

Исходные данные		**конъюнкция**	**дизъюнкция**	**строгая дизъюнкция**	**импликация**	**эквиваленция**
a	**b**	**a∧b**	**a∨b**	**a⊕b**	**a→b**	**a↔b**
истина	истина	истина	истина	ложь	истина	истина
истина	ложь	ложь	истина	истина	истина	ложь
ложь	истина	ложь	истина	истина	ложь	ложь
ложь	ложь	ложь	ложь	ложь	истина	истина

Примеры:

Пример	**Расшифровка**	**Способ записи**
ДНИ_ЯНВ = {d|d∈ℕ ∧ 1<=d ∧ d>=31}	множество номеров дней января	предикат
ЧЕТ = {x | x>=0 ∧ x%2==0}	множество четных чисел	предикат
Y = {y | y делится на 4 без остатка}	множество високосных годов	предикат

Даны предикаты:

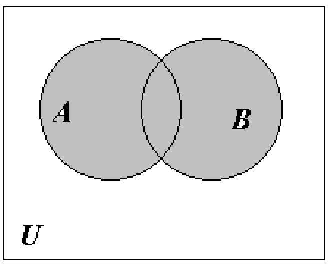
– изобразить предикат на координатной прямой;
– привести примеры, когда предикат возвращает ложь и истину;
– привести примеры граничных значений для лжи и истины при x ∈ Z.

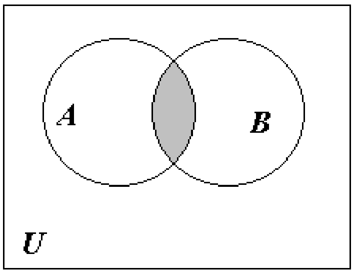
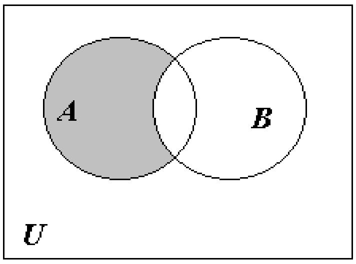
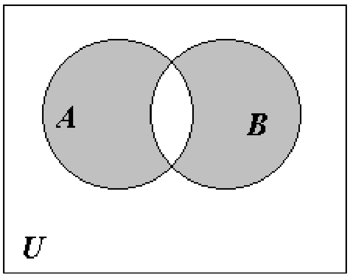
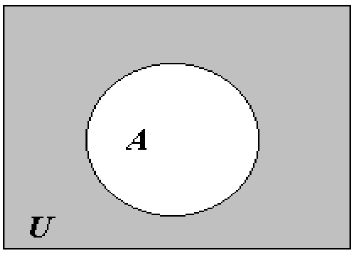
№	Предикат	Примеры истины	Примеры лжи	Граничные значения истины	Граничные значения лжи
1.	$0<x \wedge x<100$	20, 49, 87	-13, 125, -50, 294	1, 99	0, 100
2.	$20<x \wedge 50<x$	100, 60	15, 0, -3, 30	50, 51	20, 21
3.	$13<x \vee x<67$	0, 50, 100	-	13, 14, 66, 67	-
4.	$17<x \vee 81<x$	20, 60, 100	10, -5, 0	18, 81, 82	17
5.	$x<34 \wedge 75<x$	-	0, 40, 80	-	33, 34, 75, 76
6.	$x<9 \vee 41<x$	-10, 0	45, 90	8, 42	9, 41
7.	$x<-58 \wedge x<-48$				
8.	$-17<x \wedge x<48 \wedge 115<x$				
9.	$-45<x \wedge x<-4 \wedge x<-13$				
10.	$x<34 \wedge x<82 \wedge -72<x$				
11.	$x<34 \wedge 120<x \wedge -72<x$				
12.	$x<7 \wedge -73<x \wedge 79<x$				
13.	$77<x \wedge -36<x \wedge x<35$				
14.	$x<35 \wedge -36<x \wedge x<-3$				
15.	$x<28 \wedge 141<x \wedge x<94$				
16.	$x<-3 \wedge 77<x \wedge x<35$				
17.	$x<-53 \wedge -62<x \wedge 140<x$				
18.	$x<-21 \wedge -33<x \wedge x<69$				
19.	$106<x \wedge -33<x \wedge x<-21$				

Операции над множествами

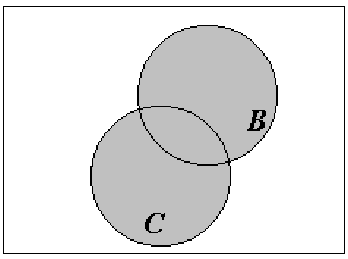
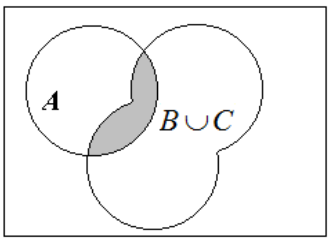
Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих. При этом для задания новых множеств с помощью предикатов потребуется использовать логические операторы.

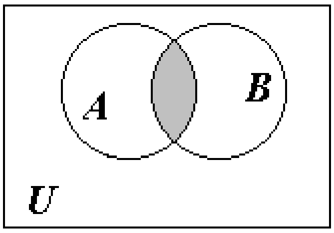
Для иллюстрации операций над множествами и для решения задач фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Диаграмма Эйлера-Венна	Определение
 *Рис. 1.*	Определение. **Объединением** множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 1): $$A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

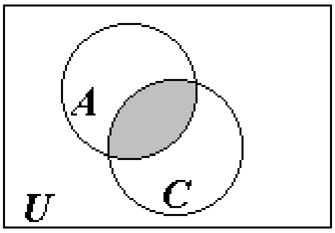
 *Рис. 2.*	*Определение.* ***Пересечением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 2):* $A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$
 *Рис. 3.*	*Определение.* ***Разностью*** *множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис. 3):* $A\setminus B=\{x \mid x\in A\wedge\neg(x\in B)\}$ $A\setminus B=\{x \mid \neg(x\in A\rightarrow x\in B)\}$
 *Рис. 4.*	*Определение.* ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B (рис. 4):* $A\Delta B = \{x \mid x\in A\oplus x\in B\}$
 *Рис. 5.*	*Определение.* ***Абсолютным дополнением*** *множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A (рис. 5):* $\overline{A}=U\setminus A.$

Пример X. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

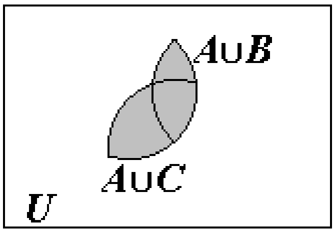
 B∪C	 A∩(B∪C)	



A∩B



A∩C



(A∩B)∪(A∩C)

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

Дано: A = {1,5,10,15}; B={5,7,9,11}; C = {1,2,3}; D=∅

Вычислить:

№	**Выражение**	**Ответ**
1.	A ∩ B	5
2.	A ∩ C	1
3.	B ∩ C	∅
4.	A ∩ D	∅
5.	A ∩ A	A
6.	A ∪ B	{1,5,7,9,10,11,15}
7.	B ∪ C	{1,2,3,5,7,9,11}
8.	A ∪ D	A
9.	A ∩ B ∪ C	{1,2,3,5}
10.	(B ∪ C) ∩A	{1,5}
11.	A \ C	{5,10,15}
12.	A \ B	{1,10,15}
13.	A \ D	A
14.	A \ (B ∪ C)	{10,15}
15.	!A ∩ B	{7, 9, 11}
16.	!B ∩ C	{1,2,3}

Дано:

– A = {10,-2,3,7,1,6,2,5,-9,8,-5,9,-7,4,-10} случмежду(-10;10)
– B = {17,14,12,3,13,1,11,4,10,20,15,18,9,7,19,6} случмежду(0;20)
– C = {16,20,12,17,13,26,24,11,21,14,23,27,30,15} случмежду(10;30)
– D = {24,16,6,17,9,20,10,12,7,15,25,5,11,14,19,18} случмежду(5;25)

Записать значение выражения в виде множества, заданного перечислением элементов.

№	Выражение	Результат
1.	A∩B	{3,1,4,10,9,7,6}
2.	A∩C	∅
3.	A∩D	{6,9,10,7,5}
4.	B∩C	{20,12,17,13,11,14,15}
5.	B∩D	{6,17,9,20,10,12,7,15,11,14,19,18}
6.	C∩D	{24,16,17,20,12,15,11,14}

Дано: A = {x|0<x}; B = {x|x<100}; C = {x|50<x}; D = {x|75<x}; a=25

Записать значение выражения в виде множества, заданного предикатом.

№	Выражение	Ответ
1.	!A	{x|x<=0}
2.	!B	{x|100<=x}
3.	A∩B	{x|0<x ∧ x<100}
4.	A∩C	{x|50<x}
5.	B∩C	{x|50<x ∧ x<100}
6.	!A∩B	{x|x<=0}
7.	A∩!C	{x|0<x ∧ x<=50}
8.	D∩B	{x|75<x ∧ x<100}
9.	!A∩C	∅
10.	A∪C	{x|0<x}
11.	(A∩!C)∪(B∩D)	{x|0<x ∧ x<=50 ∨ 75<x ∧ x<100}
12.	A∪(B∩C)	{x|0<x}
13.	(A∩B)\C	{x|0<x ∧ x<=50}
14.	B\(C∩!D)	{x|x<=50 ∨ 75<=x ∧ x<100}
15.	A∪!B	{x|0<x}
16.	C∪D	{x|50<x}
17.	D∩!B	{x|100<=x}

Какие из утверждений истинны:

№	Утверждение	Ответ
1.	C⊂A	истинно
2.	B⊂A	ложно
3.	B⊆A	ложно
4.	A⊂C	ложно
5.	a∈A	истинно
6.	a∈B	истинно
7.	a∈C	ложно
8.	a∈D	ложно
9.	D⊂A	истинно
10.	!B⊂C	истинно
11.	!D⊂A	ложно
12.	A∩B⊂B∩C	истинно
13.	A∪!A⊆B∪!B	истинно

Опишите множество возможных значений x, при которых выражение вычислимо:

№	Выражение	Ответ
1.	$\frac{1}{x}$	{x|x!=0}
2.	$\sqrt{x}$	{x|0<=x}
3.	$\sqrt{10-x}$	{x|x<=10}
4.	$\sqrt{x+5}$	{x|-5<=x}
5.	$\sqrt{11-x}+\sqrt{x+7}$	{x|-7<=x ∧ x<=10}

6.	$\frac{\sqrt{3+x}}{x}$	$\{x \mid -3<=x \wedge x<0$?? $0<=x\}$

Основные тождества алгебры множеств

Цель – научить упрощать выражения, развить внимательность.

Для произвольных множеств A, B, и C справедливы соотношения (табл. X):

Таблица X

1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$	2. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
3. Ассоциативность объединения $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	4. Ассоциативность пересечения $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	6. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cup \varnothing = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cup U = U$	8. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cap U = A$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
9. Закон идемпотентности объединения $A \cup A = A$	10. Закон идемпотентности пересечения $A \cap A = A$
11. Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	12. Закон де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
13. Закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$	14. Закон поглощения $A \cap (A \cup B) = A$
15. Закон склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$	16. Закон склеивания $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$
17. Закон Порецкого $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	18. Закон Порецкого $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
19. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}} = A$	

Упростить выражение с помощью тождеств алгебры логики.

Источники: [http://www.informatika-1332.ru/al/al_08_1.html]

1. $\overline{X} \cap \overline{(\overline{Y} \cup X)} = \overline{X} \cap (\overline{\overline{Y}} \cap \overline{X}) = \overline{X} \cap Y \cap \overline{X} = \overline{X} \cap Y$
2. $\overline{X \cap Y \cup \bar{\bar{Z}}} = \overline{X \cap Y} \cup \bar{\bar{\bar{Z}}} = (\bar{X} \cup \bar{Y}) \cup Z$
3. $X \cap Y \cup (X \cap Y \cap Z) = \{X \cap Y = W\} = W \cup (W \cap Z) = W = X \cap Y$
4. $(X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z) = ((X \cap \bar{Y}) \cup (X \cap Y)) \cap Z = X \cap Z$
5. $\overline{X \cap (\overline{X} \cap \overline{Y})} = \overline{X} \cup \overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})} = \overline{X} \cup (\overline{\overline{X}} \cup \overline{\overline{Y}}) = \overline{X} \cup X \cup Y = U \cup Y = U$

6. $\overline{X} \cup \overline{(X \cap Y \cap \overline{Y})} = \overline{X} \cup \overline{(X \cap 0)} = \overline{X} \cup \overline{\varnothing} = \overline{X} \cup U = U$

7. $\overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})} \cup \overline{X} = \left(\overline{\overline{X}} \cup \overline{\overline{Y}}\right) \cup \overline{X} = (X \cup Y) \cup \overline{X} = X \cup Y \cup \overline{X} = U \cup Y = U$

8. $X \cap (X \cup Y) \cap \overline{Y} = X \cap \left(X \cap \overline{Y} \cup Y \cap \overline{Y}\right) = X \cap \left(X \cap \overline{Y} \cup \varnothing\right) =$

$= X \cap \left(X \cap \overline{Y}\right) = X \cap X \cap \overline{Y} = X \cap \overline{Y}$

9. $X \cap (X \cup Y) \cap \overline{X} = X \cap \overline{X} \cap (X \cup Y) = \varnothing \cap (X \cup Y) = \varnothing$

10. $\overline{X \cap Y} \cup (X \cap Y) \cup Z = U \cup Z = U$

11. $\overline{X} \cup X \cup Y \cup (X \cap Y) = U \cup Y \cup (X \cap Y) = U \cup (X \cap Y) = U$

12. $\left(X \cup Y \cap \overline{Z}\right) \cup (X \cup Y \cap Z) \cup Z \cup X = X \cup \left(Y \cap \overline{Z}\right) \cup X \cup (Y \cap Z) \cup Z \cup X =$

$= X \cup X \cup X \cup \left(Y \cap \overline{Z}\right) \cup (Y \cap Z) \cup Z = X \cup Y \cup Z$

13. $\left(\left(X \cup \overline{Y}\right) \cap Y\right) \cup \left(\overline{X} \cap (Y \cup Z)\right)$

14. $\left((X \cap Z) \cup \left(Y \cap \overline{X}\right)\right) \cup \left(Y \cap \left(Z \cup Y \cap \overline{Z}\right)\right)$

15. $\left(X \cap \left(Y \cup \overline{Z}\right)\right) \cup \left((Y \cap Z) \cap \overline{X}\right)$

16. $\left(Z \cup \left(Y \cap \overline{Z}\right)\right) \cap \left(X \cup \left(Y \cap \overline{Z}\right)\right) \cap \left((X \cap Y) \cup \overline{Y}\right)$

17. $\left((X \cap Z) \cup \left(Y \cap \overline{X}\right)\right) \cup \left(Y \cap \left(Z \cup \overline{Z}\right)\right)$

18. $\left((X \cap Z) \cup \left(Y \cap \overline{X}\right)\right) \cup \left(Y \cap \left(Z \cup Y \cap \overline{Z}\right)\right)$

19. $\overline{X \cup Y} \cap (X \cap \overline{Y}) = \overline{X} \cap \overline{Y} \cap (X \cap \overline{Y}) = \overline{X} \cap X \cap \overline{Y} \cap \overline{Y} = \varnothing \cap \overline{Y} \cap \overline{Y} = \varnothing \cap \overline{Y}$

20. $\overline{X} \cap Y \cup \overline{X \cup Y} \cup X = \overline{X} \cap Y \cup \overline{X} \cap \overline{Y} \cup X = \overline{X} \cap (Y \cup \overline{Y}) \cup X = \overline{X} \cup X = U$

21. $(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}) = Y \cap (\bar{X} \cup \bar{Y}) = (Y \cap \bar{X}) \cup (Y \cap \bar{Y}) =$

$= (Y \cap \bar{X}) \cup \varnothing = (Y \cap \bar{X})$

22. $(X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Z) = (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y \cap Z) \cup \left(X \cap Z \cap (Y \cup \bar{Y})\right) =$

$= (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) =$

$= (X \cap \bar{Y}) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (\bar{X} \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z) =$

$= (X \cap \bar{Y}) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (Y \cap Z) = (X \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap \bar{Z})$

Задание: даны множества, заданные предикатами. Требуется упростить их.

№	**Выражение**	**Упрощенное выражение**
1.	$(\{x\|3 < x\} \cup \{x\|x < 5\}) \cap (\{x\|3 < x\} \cup \{x\|11 < x\})$	$\{x\|3 < x\}$
2.	$(\{x\|x < 3\} \cup \{x\|7 < x\}) \cap (\{x\|x < 3\} \cup \{x\|x < 23\})$	$\{x\|x < 3 \vee (7 < x \wedge x < 23)\}$
3.	$(\{x\|x < 3\} \cup \{x\|19 < x\}) \cap (\{x\|x < 3\} \cup \{x\|x < 7\})$	$\{x\|19 < x \vee x < 3\}$
4.	$(\{x\|x < 2\} \cup \{x\|x < 11\}) \cap (\{x\|x < 2\} \cup \{x\|27 < x\})$	$\{x\|x < 2\}$
5.	$\{x\|7 < x\} \cup (\{x\|13 < x\} \cap \{x\|x < 19\})$	$\{x\|7 < x\}$
6.	$(\{x\|21 < x\} \cup \{x\|10 < x\}) \cap (\{x\|21 < x\} \cup \{x\|x < 37\})$	$\{x\|21 < x\}$
7.	$(\{x\|x < 4\} \cup \{x\|10 < x\}) \cap (\{x\|x < 4\} \cup \{x\|x < 19\})$	$\{x\|x < 4 \vee 10 < x \wedge x < 19\}$
8.	$(\{x\|3 < x\} \cup \{x\|x < 17\}) \cap (\{x\|3 < x\} \cup \{x\|x < 23\})$	N

9.	$\overline{\{x\|x<7\}} \cap \overline{\{x\|29<x\}} \cup \{x\|x \le 29\}$	$\{x\|x \ge 7\}$
10.	$(\{x\|7 \le x\} \cup \{x\|x \le 3\}) \cap \{x\|7 \le x\}$	$\{x\|x < 7\}$
11.	$\overline{\{x\|3<x\} \cap \{x\|26<x\}} \cup \overline{\{x\|26<x\} \cap \{x\|x<15\}}$	N

Кортеж. Связь понятий кортеж и множество

Кортеж – множество элементов, расположенных в определенном порядке.Обозначается маленькими буквами или перечислением элементов в круглых скобках.[Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Элементы дискретной математики: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Издательство НГТУ, 2002. — 280 с. — (Серия «Высшее образование»). ISBN 5-16-000957-4 (ИНФРА-М), ISBN 5-7782-0332-2 (НГТУ)]

Пустой кортеж это пустое множество.() = ∅

Упорядоченная пара (x, y)– это кортеж длины 2.

Кортеж длины 3 (тройка) может быть определен как пара, вложенная в другую пару.

(z,(x,y)) = (z,x,y)

Кортеж длины 4 может быть определен 3 рекурсивно вложенными парами.
(w,(z,(x,y)))

Свойства:

- Кортежи равны, если равны элементы на одинаковых позициях.
  (a1,a2,…,an) = (b1,b2,…,bn) тогда и только тогда, когда a1=b1,a2=b2,…,an=bn.
- Кортеж может содержать несколько одинаковых элементов.
  (1,2,2,3)!=(1,2,3)
- Элементы кортежей упорядочены.
  (1,2,3) = (1,2,3), но (1,2,3)!=(3,2,1)

Кортежи содержат конечное количество элементов. Причина: для создания кортежа бесконечной длины потребуется бесконечное количество действий.

Дано:

- A={(1,2),(4,2),(2,3),(3,4),(1,5),(0,-3)};
- B={(1,3),(2,3),(4,5),(6,1)};
- C={(x,y)|x<=2∧y>0};
- D={(x,y)|x>0∧y<=3}

№	Выражение	Ответ
1.	A∩C	{(1,2),(2,3),(1,5)}
2.	B∩D	{(1,3),(2,3)}
3.	A∩B	{(2,3)}
4.	A∩{(x,y)|x>y}	{(4,2),(0,-3)}
5.	(B∪A) ∩C	{(1,2),(4,2),(2,3),(3,4),(1,5),(0,-3),(1,3),(4,5),(6,1)}∩C {(1,2),(2,3),(1,5),(1,3)}

Дан предикат, привести примеры истины, лжи и граничных значений.

№	Предикат	Пример истины	Примеры лжи	Граничные значения
1.	y<7 ∨ 11 < x	(		

2.				
3.				
4.	y<=4 ∧ 1<=x ∧ x<=2			
5.				

Прямое произведение

Прямым произведением множеств X и Y называется множество X×Y , элементами которого являются все возможные кортежи<x, y>, такие, что x∈X, y∈Y.

Пример X

1. Пусть X={1, 2, 3}, Y={0, 1}.
   ТогдаX×Y={(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)},
   Y×X = {(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)}
2. Пусть X – множество точек отрезка [0, 1], а Y – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда X× Y - множество точек квадрата [0,1] ×[1,2] с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2).
3. Пусть B_x={истина, ложь} значения ячеек в таблице истинности
   тогда таблица истинности для двух переменных будет содержать такие значения $B_1 \times B_2$={(и,и),(и,л),(л,и),(л,л)}
   а таблица истинности для трех переменных будет содержать такие значения
   $B_1 \times B_2 \times B_3$={(и,и,и),(и,л,и),(л,и,и),(л,л,и),(и,и,л),(и,л,л),(л,и,л),(л,л,л)}

Вычислить A×B

№	A	B	Ответ
1.	{2,3,4,7,9}	{9,8,5,4}	{(2,9),(2,8),(2,5),(2,4),(3,9),(3,8),(3,5),(3,4),(4,9),(4,8),(4,5),(4,4),(7,9),(7,8),(7,5),(7,4),(9,9),(9,8),(9,5),(9,4)}
2.	{2,7,0}	{1,4}	{(2,1),(2,4),(7,1),(7,4),(0,1),(0,4)}
3.	{3,15}	{8,9,0,5}	{(3,8),(3,9),(3,0),(3,5),(15,8),(15,9),(15,0),(15,5)}
4.	{140,165}	{665,248,186,963}	{(140,665),(140,248),(140,186),(140,963),(165,665),(165,248),(165,186),(165,963)}

Дано:

– A={(1,2),(2,3),(3,4),(1,5),(0,-3)};
– B={(1,3),(2,3),(4,5),(6,1)};
– C={x|x<=2};
– D={y|y<=3}

№	Выражение	Ответ
1.	C×D	{(x,y)|x<=2∧y<=3}
2.	D×C	{(x,y)|x<=3∧y<=2}
3.	D×D	{(x,y)|x<=3∧y<=3}
4.	C×!D	{(x,y)|x<=2∧3<y}
5.	A∩C×D	{(1,2),(2,3),(0,-3)}
6.	B∩!C×C	{(x,y)|x<=2∧2<y} {(1,3),(2,3),(1,5)}
7.		

Дано: РЕШЕНИЯ= {Камень, Ножницы, Бумага}

Выписать множество возможных ситуаций в игре.

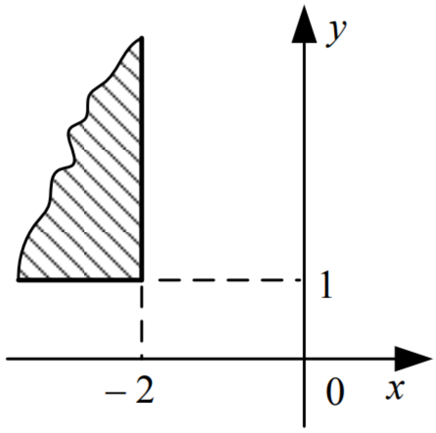
СИТУАЦИИ = {(решение игрока А, решение игрока Б) | решение игрока А∈РЕШЕНИЯ, решение игрока Б∈РЕШЕНИЯ}= РЕШЕНИЯ×РЕШЕНИЯ

СИТУАЦИИ = {(Камень,Камень), (Камень, Ножницы), (Камень, Бумага), (Ножницы, Камень),(Ножницы, Ножницы),(Ножницы, Бумага), (Бумага, Камень), (Бумага, Ножницы), (Бумага, Бумага)}

Описать множество выигрышных ситуаций для первого игрока.

Дано графическое изображение множества. Сформулировать высказывание для описания множества. Сформулировать области эквивалентности на каждой оси. Привести примеры значений множества для заполнения таблицы истинности высказывания.

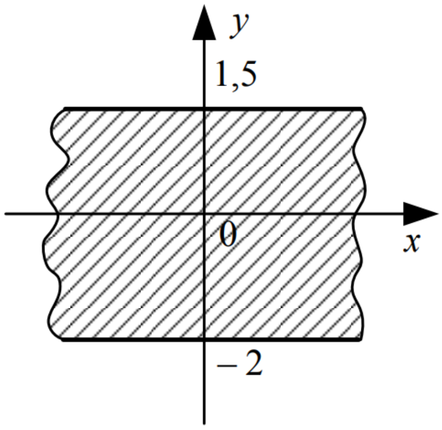
Изображение	Высказывание и примеры



P(x,y) = x<=-2∧y>=1

Ось	Область	Пример
x	x<=-2	-3
x	-2<x	0
y	y<1	0
y	1<=y	2

x	y	x<=-2	y>=1	x<=-2 ∧y>=1
-3	2	и	и	и
-3	0	и	л	л
0	2	л	и	л
0	0	л	л	л

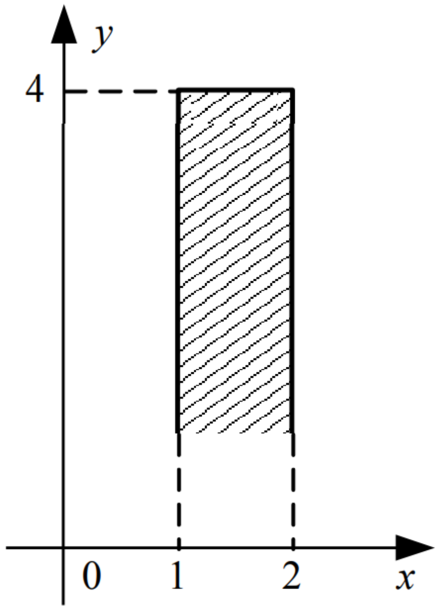


P(x,y) = y<=1.5 ∧y>=-2

Ось	Область	Пример
y	1.5<y	2
y	y<=1.5 ∧y>=-2	0
y	y<-2	-3

y	y<=1.5	y>=-2	x<=-2 ∧y>=1
2	л	и	л
0	и	и	и
-3	и	л	л

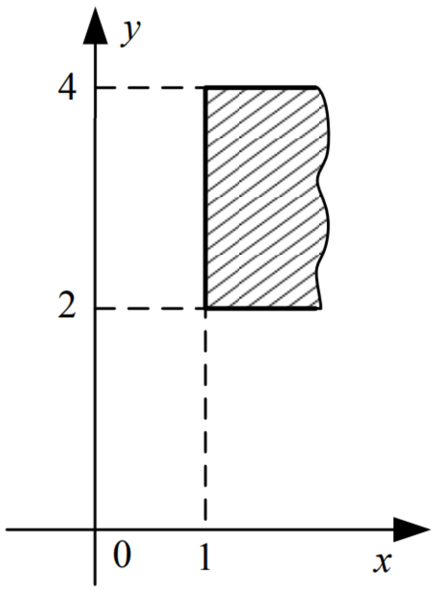
Изображение	Высказывание и примеры



P(x,y) = y<=4 ∧ 1<=x ∧x<=2

Ось	Область	Пример
y	4<y	0
y	y<=4	5
x	x<1	0
x	1<=x ∧x<=2	1.5
x	2<=x	3

x	y	Z	W	U		
		y<=4	1<=x	x<=2	Z∧W	P(x,y)
1.5	0	и	и	и	и	и
3	0	и	и	л	и	л
0	0	и	л	и	л	л
1.5	5	л	и	и	л	л
3	5	л	и	л	л	л
0	5	л	л	и	л	л

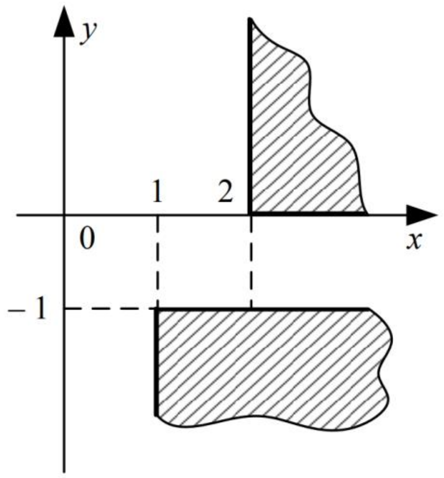


P(x,y) = 2<=y∧y<=4 ∧1<=x

Ось	Область	Пример
y	4<y	5
y	2<=y∧y<=4	3
y	y<2	0
x	x<1	0
x	1<=x	2

x	y	Z	W	U		
		2<=y	y<=4	1<=x	Z∧W	P(x,y)
2	3	и	и	и	и	и
0	3	и	и	л	и	л
2	5	и	л	и	л	л
0	5	и	л	л	л	л
2	0	л	и	и	л	л
0	0	л	и	л	л	л

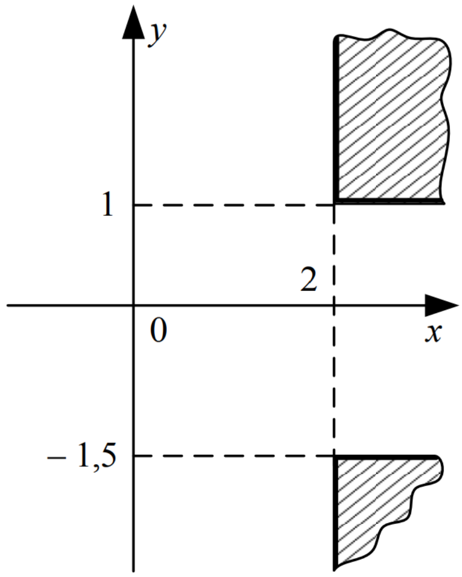
Изображение	Высказывание и примеры



P(x,y) = 2<=x∧ 0<=y∨y<=-1 ∧1<=x

Ось	Область	Пример
y	y<-1	-2
y	-1<y ∧ y<0	-0.5
y	0<=y	1
x	x<1	0
x	1<=x ∧ x<2	1.5
x	2<=x	3

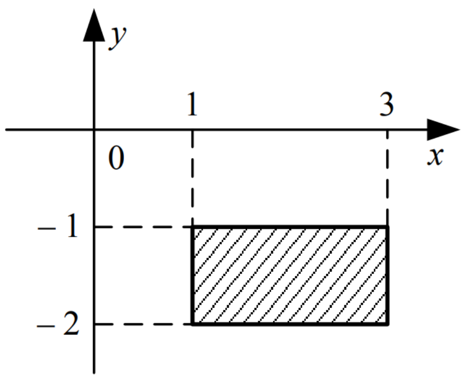
x	y	2<=x	0<=y	y<=-1	1<=x	P(x,y)
0	-2	л	л	и	л	л
0	-0.5	л	л	л	л	л
0	1	л	и	л	л	л
1.5	-2	л	л	и	и	и
1.5	-0.5	л	л	л	и	л
1.5	1	л	и	л	и	л
3	-2	и	л	и	и	и
3	-0.5	и	л	л	и	л
3	1	и	и	л	и	и



P(x,y) = 2<=x ∧ 1<=y ∨ 2<=x ∧ y <=-1.5

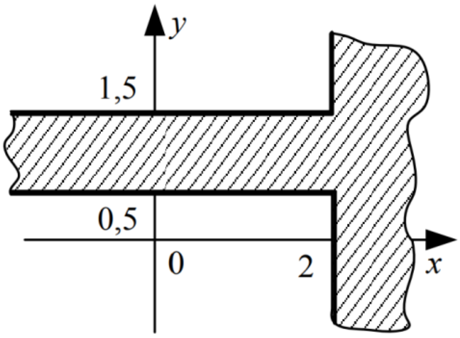
Ось	Область	Пример
y	1<=y	2
y	-1.5<y ∧y<1	0
y	y<=-1.5	-3
x	2<=x	4
x	x<2	1

x	y	2<=x	1<=y	y<=-1.5	P(x,y)
4	2	и	и	л	и
4	0	и	л	л	л
4	-3	и	л	и	и
1	2	л	и	л	л
1	0	л	л	л	л
1	-3	л	л	и	л



P(x,y) = 1<=x∧x<=3 ∧ -2<=y∧y<=-1

Ось	Область	Пример
y	-1<y	0
y	-2<=y∧y<=-1	-1.5
y	y<-2	-3
x	x<1	-1
x	1<=x∧x<=3	2
x	3<x	4

<table>
<tr><th>Изображение</th><th>Высказывание и примеры</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>1<=x</td><td>x<=3</td><td>-2<=y</td><td>y<=-1</td><td>P(x,y)</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0</td><td>л</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td><td>л</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1.5</td><td>л</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-3</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td><td>л</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1.5</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-3</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td><td>л</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-1.5</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-3</td><td>и</td><td>л</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
P(x,y) = 2<=x ∨ 0.5<=y ∧ y<=1.5
<table>
<tr><td>Ось</td><td>Область</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1.5<y</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0.5<=y ∧ y<=1.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>y<0.5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>x</td><td>x<2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x</td><td>2<=x</td><td>-1</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>2<=x</td><td>0.5<=y</td><td>y<=1.5</td><td>P(x,y)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>и</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>и</td><td>л</td><td>и</td><td>и</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td><td>л</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td><td>л</td><td>и</td><td>и</td><td>и</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0</td><td>л</td><td>л</td><td>и</td><td>л</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Граф

Цель: научить видеть графы структуры в окружающем мире, изображать их на бумаге и пользоваться ими для решения логических задач.

Граф — абстрактный математический объект, представляющий собой множество вершин графа и множество рёбер, то есть соединений между парами вершин.

Если ребро e **соединяет** вершины u и v, то можно сказать что u и v это **концевые вершины** или **концы** ребра. Еще говорят, что эти вершины **соседние**. В этом же случае говорят, что ребро e **инцидентно** как вершине u, так и вершине v.

Два ребра называют **смежными**, если они имеют общую концевую вершину.

Графы классифицируются по признаку направленности.

1. **Ориентированные**. Например:
   Сайт, где страницы – вершины, а ссылки между страницами –ребра.
   Множество платежей, где контрагенты – вершины, а платежи – ребра.
   Социальная сеть, где пользователи – вершины, а подписки – ребра.
   Программа, где состояние – вершина, а действия пользователя – ребра.
   Множество научных публикаций – вершина, а ссылки в них – ребра.
2. **Неориентированные**. Например:
   Сеть пешеходных дорог в парке, вершины – перекрестки, а ребра – сами дороги.

Множество фактов – вершины, а связь фактов между собой – ребра.

Множество стран – вершины, а общие границы – ребра.

Если ребро есвязывает вершиныuи v, то говорят, что u–**начальная вершина**, а v–**конечная вершина**.

В некоторых случаях, узлы и ребра могут содержать дополнительную информацию. **Взвешенный граф** - граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некое значение (**вес ребра**). Если представить водопроводную сеть в виде графа, трубы будут ребрами, а их соединения – узлами. Каждой трубе можно будет указать пропускную способность. В графе финансовых операций каждому ребру может быть поставлена в соответствие сумма платежа.

Способы представления графов:

1. Диаграмма
2. Список смежности
3. Матрица смежности
4. Матрица инцидентности

Дополнительная информация о вершинах и ребрах как правило пишется отдельным списком.

Правила изображения графа в виде диаграммы:

1. Вершины обозначаются точками или кругами.
2. Соседние вершины соединяются линией.
3. Для наглядности, вершины и ребра подписываются маленькими буквами.
4. Для ориентированных графов добавляются стрелки из начальной вершины в конечную вершину.

Правила изображения графа в виде списка смежности:

1. Выписываются соседние вершины.
2. Пары вершин сортируются сначала по первой, а затем по второй.
3. Для ориентированного графа, начальные вершины пишутся первыми, а конечные – вторыми.

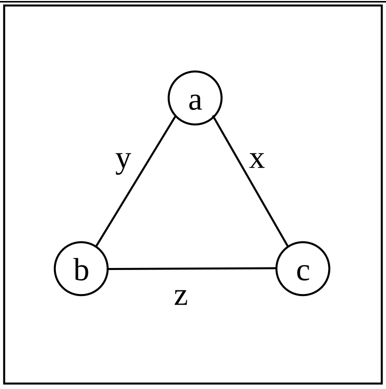
Правила изображения графа в виде матрицы смежности:

1. Столбцы и строки матрицы соответствуют вершинам.
2. Элементы матрицы содержат количество ребер, соединяющих вершины и столбцы и строки.

Правила изображения графа в виде матрицы инцидентности:

1. Столбцы матрицы соответствуют ребрам.
2. Строки матрицы соответствуют вершинам.
3. Ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром.
4. Для ориентированного графа в столбце ребра ставится 1 в строке начальной вершины и -1 в строке конечной вершины.

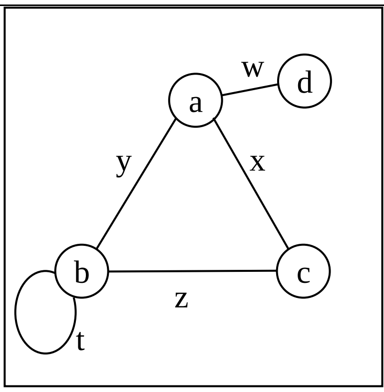
Диаграмма	**Список ребер**	**Матрица смежности**	**Матрица инцидентности**



a-b
a-c
b-c

	a	**b**	**c**
a	0	1	1
b	1	0	1
c	1	1	0

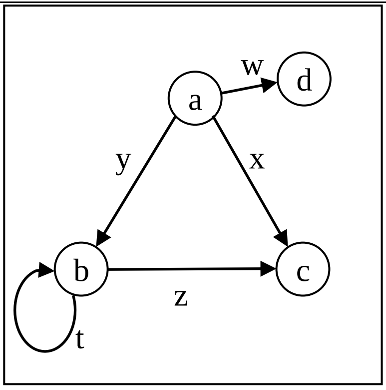
	x	**y**	**z**
a	1	1	0
b	0	1	1
c	1	0	1



a-b
a-c
a-d
b-b
b-c

	a	**b**	**c**	**d**
a	0	1	1	1
b	1	1	1	0
c	1	1	0	0
d	1	0	0	0

	x	**y**	**z**	**w**	**t**
a	1	1	0	1	0
b	0	1	1	0	1
c	1	0	1	0	0
d	0	0	0	1	0



a->b
a->c
a->d
b->b
b->c

	a	**b**	**c**	**d**
a	0	1	1	1
b	1	1	1	0
c	1	1	0	0
d	1	0	0	0

	x	**y**	**z**	**w**	**t**
a	1	1	0	1	0
b	0	-1	1	0	0
c	-1	0	-1	0	0
d	0	0	0	-1	0

Маршрут в графе это конечная последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена ребром со следующей вершиной в последовательности.

Путь – маршрут в ориентированном графе.

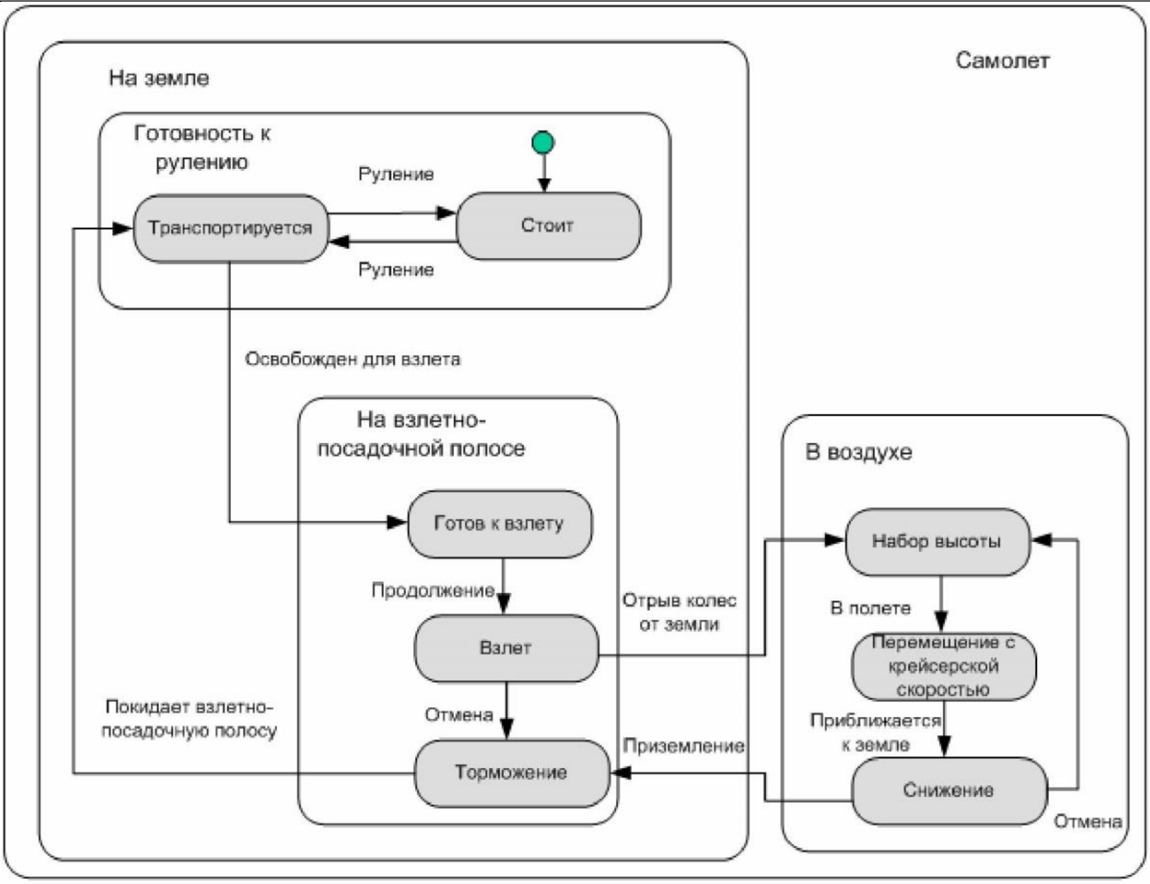
Граф называют **связным**, если из любой вершины графа существует маршрут в любую другую вершину графа.

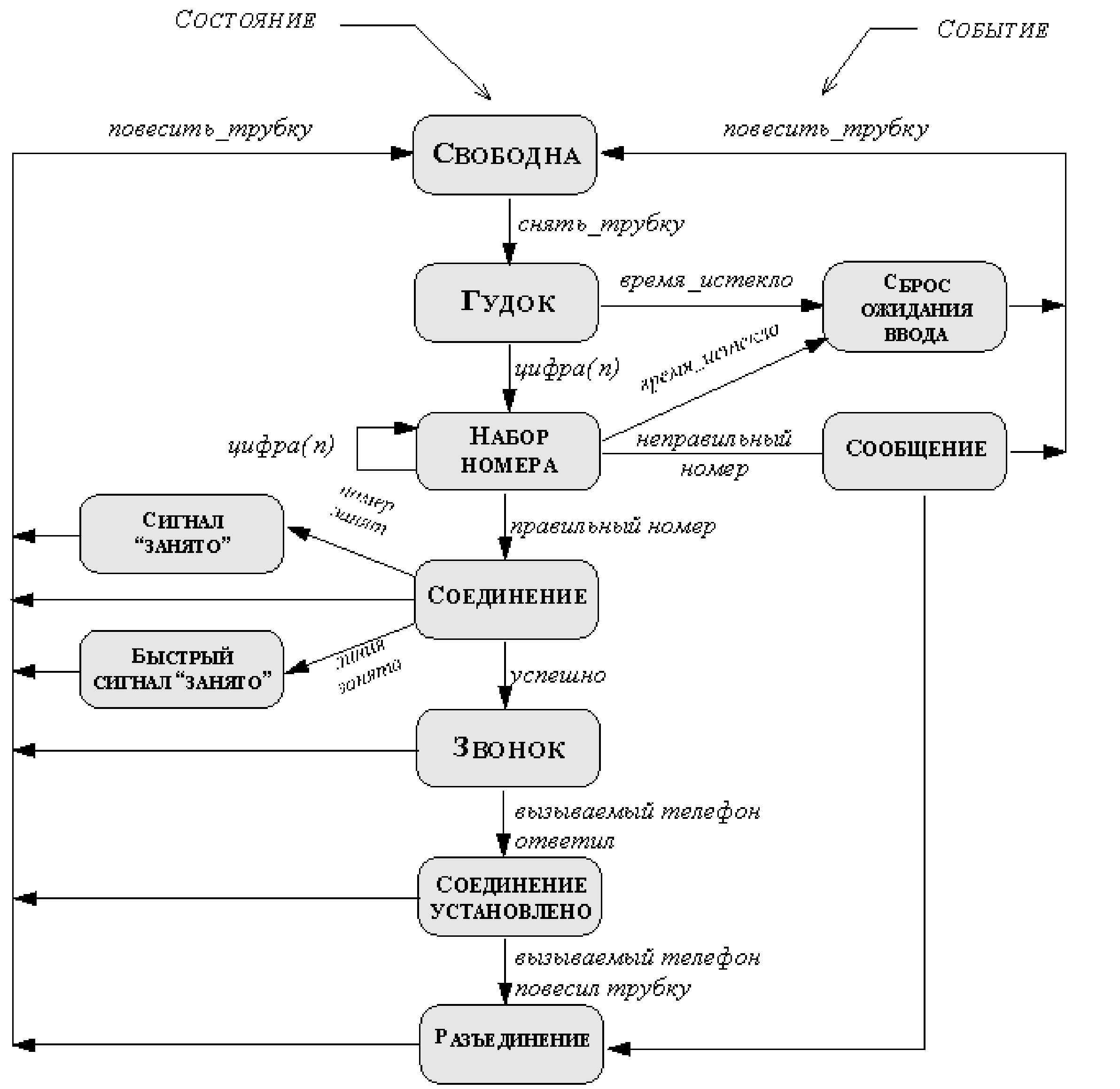
Цепь – маршрут без повторяющихся ребер.

Цикл – цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают.

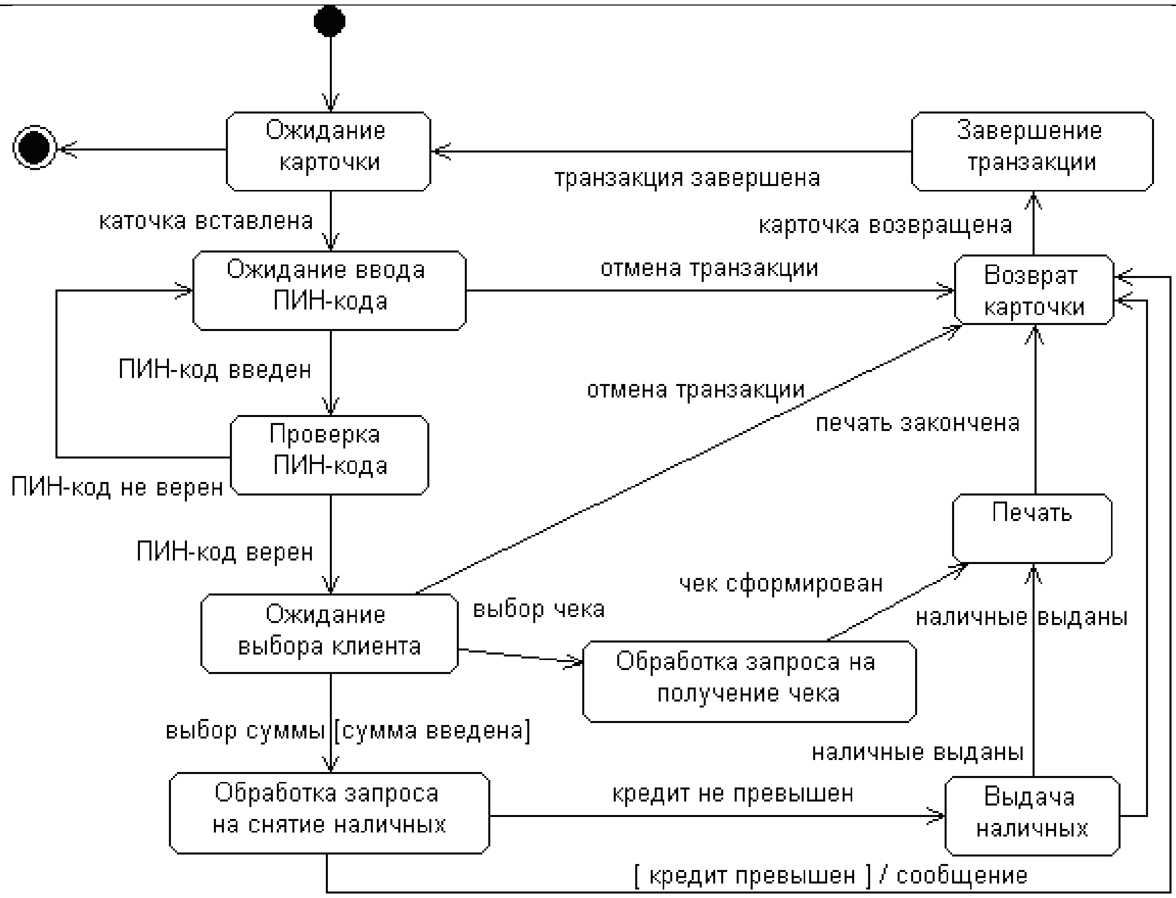
Путь или цикл называют **простым**, если рёбра в нем не повторяются.

Дана диаграмма состояний. Нужно изобразить ее в виде списка ребер, изобразить матрицу инцидентности и смежности.

№	Диаграмма
1.	 [https://project.dovidnyk.info/index.php/home/razrabotkaiupravlenietrebovaniyami/54-diagrammy_sostoyanij]

<table>
<tr><th>№</th><th>Диаграмма</th></tr>
<tr><td>2.</td><td>

[http://citforum.ru/programming/oop_rsis/glava2_5_1.shtml]</td></tr>
</table>

№	Диаграмма
3.	 [https://studizba.com/lectures/10-informatika-i-programmirovanie/368-sovremennye-tehnologii-programmirovaniya/4989-10-diagrammy-sostoyaniy.html]

Изображение древовидных структур

Цель: Связать абстрактную математическую структуру со знакомыми сущностями. Познакомить с форматом данных

Деревом называется связный граф, который не содержит нетривиальных циклов

Корень дерева в ориентированном графе – вершина, в которую не ведет ни одно ребро. Может ли у дерева получиться два корня? Нет, т.к. он не будет связным или в нем получится ребро без направления. В неориентированном графе корень это произвольно выбранная вершина.

Листья дерева в ориентированном графе – вершина, из которой не ведет ни одно ребро.

Ветви – ребра дерева.

Ориентированные деревья можно изображать еще двумя способами:

1. С помощью вложенных тэгов

2. Иерархическими списками

Дано: изображение дерева в виде иерархического списка. Нужно описать с помощью тэгов.

№	Иерархический список	Вложенные тэги
1.	Животные: - Одноклеточные - Многоклеточные - Беспозвоночные - Черви - Моллюски - Иглокожие - Раки - Паукообразные - Насекомые - Позвоночные - Рыбы - Земноводные - Пресмыкающиеся - Птицы - Млекопитающие	<Животные> <Одноклеточные> <Многоклеточные> <Беспозвоночные> <Черви/> <Моллюски/> <Иглокожие/> <Раки/> <Паукообразные/> <Насекомые/> </Беспозвоночные> <Позвоночные> <Рыбы/> <Земноводные/> <Пресмыкающиеся/> <Птицы/> <Млекопитающие/> </Позвоночные> </Многоклеточные> </Животные>
2.	Типы питания животных: а. Травоядные а.1 Лось а.2 Олень а.3 Кролик б. Хищники б.1 Лягушка б.2 Тигр б.3 Рысь в. Всеядные в.1 Медведь в.2 Синица в.3 Кабан	<Травоядные> <Лось/> <Олень/> <Кролик/> </Травоядные> <Хищники> <Лягушка/> <Тигр/> <Рысь/> </Хищники> <Всеядные> <Медведь/> <Синица/> <Кабан/> </Всеядные>

№	Иерархический список	Вложенные тэги
3.	Растения а. Водоросли б. Высшие растения б.1 Мохообразные б.2 Высшие споровые б.2.а Папоротниковые б.2.б Плауновидные б.2.в Хвощевидные б.2.г Папоротники б.3 Семенные растения б.3.а Голосеменные б.3.б Покрытосеменные	
4.	Модели данных СУБД: 1. Иерархические 2. Сетевые 3. Реляционные 4. Объектно-реляционные 5. Объектно-ориентированные	
5.	Способы доступа к БД: а. Файл-серверные а.1 MS Access а.2 Paradox а.3 dBase а.4 FoxPro б. Клиент-серверные б.1 Oracle Database б.2 PostgreSQL б.3 MySQL в. Встраиваемые в.1 SQLite в.2 MSSQL Server Compact	

Алгоритмы обхода графов

Обход графа – одна из самых распространенных задач в программировании вообще и в тестировании в частности. Эти алгоритм также используется при решении логических задач.

Существует два алгоритма поиска узла в графе:

1. Поисквширину (BFS – Breadth first search)

2. Поисквглубину (DFS – Depthfirst search)

Исходные данные для задачи поиска в ширину это связный граф, некоторый узел-источник и описание целевого узла. Алгоритм работает путем последовательного просмотра отдельных уровней графа, начиная с узла-источника.

Неформальное описание:[https://ru.wikipedia.org/wiki/Поиск_в_ширину]

1. Поместить узел, с которого начинается поиск, в изначально пустую очередь.
2. Извлечь из начала очереди узел uи пометить его как развернутый.
   a. Если узел uявляется целевым узлом, то завершить поиск с результатом "успех".
   b. В противном случае, в конец очереди добавляются все преемники узла u, которые еще не развернуты и не находятся в очереди.
3. Если очередь пуста, то все узлы графа были просмотрены, следовательно, целевой узел недостижим из начального; завершить поиск с результатом "неудача".
4. Вернуться к пункту 2.

В задаче могут быть описаны правила перехода из одного состояния в другое и множество ограничений на возможные состояния. Выполняя поиск в ширину

Если дана программа, у которой существует множество состояний, то задача ее тестирования заключается в том, чтобы найти некорректное состояние системы, используя доступные действия.

Задачи на переливание – один из примеров задач, которые решаются с помощью обхода графа. Суть этих задач сводится к следующему: имея несколько сосудов разного объема, один из которых наполнен жидкостью, требуется разделить ее в каком-либо отношении или отлить какую-либо ее часть при помощи других сосудов за наименьшее число переливаний.[https://gigabaza.ru/doc/89988.html]

В задачах на переливания требуется указать последовательность действий, при которой осуществляется требуемое переливание и выполнены все условия задачи. Если не сказано ничего другого, считается, что:

1. все сосуды без делений,
2. нельзя переливать жидкости "на глаз"
3. невозможно ниоткуда добавлять жидкости и никуда сливать.

Узлом графа при решении такой задачи будет состояние сосудов. Ребром – переливание.

Задача 4+5=3

Отмерить 3 литра воды с помощью крана, банок 4 литра и 5 литров.

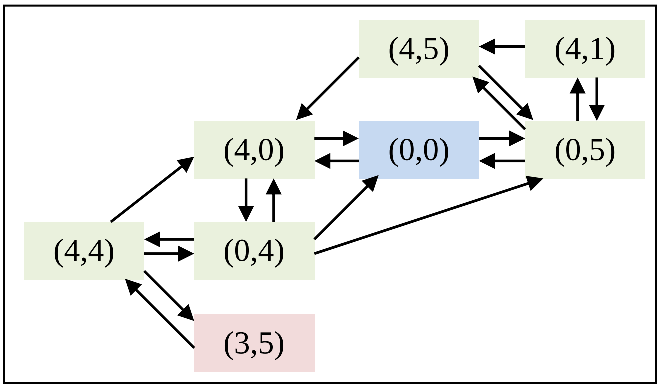


Рисунок X – диаграмма состояний для задачи №K

Задача 3+5=4

С помощью двух сосудов вместимостью 3 л и 5 л налить себе 4 л!

Задача 8+5=7

Имеются два сосуда вместимостью 8 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из крана 7 л воды?

Задача 7+3=5.

Бидон емкостью 10 л наполнен парным молоком. Требуется перелить из этого бидона 5 л молока в семилитровый бидон, используя при этом трехлитровый бидон.

Задача 7+6+3=5+5.

Разделить на 2 равные части воду, находящуюся в 6-литровом сосуде (4 л) и в 7-литровом (6 л), пользуясь этими и 3-литровым сосудами. Какое наименьшее количество переливаний потребуется?

Задача 3+5+8=4

Дядя Федор собрался ехать к родителям в гости и попросил у кота Матроскина 4 л простоквашинского молока. А у Матроскина только 2 пустых бидона: трехлитровый и пятилитровый. И восьмилитровое ведро, наполненное молоком. Как Матроскину отлить 4 литра молока с помощью имеющихся сосудов?

Резерв

Мощность множества

Мощность конечного множества А - это число его элементов.

Мощность множества обозначают |A|.

Пример Х

|∅|=0, |{1,3,5,7}|=4; |{2,4,6}|=3 |ℕ | = ∞

Множества называются **равномощными**, если их мощности совпадают.

Известно, что если множество A содержит n элементов, то множество P(A) содержит 2n элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества A в виде 2A.

Пример Х
A={0, 1, 2}, P(A)={ ∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}

Симметричность, Рефлексивность, Транзитивность

Цель: научиться выбирать минимум примеров для тестирования программного обеспечения. Проверять, принадлежат ли примеры одному и тому же классу эквивалентности.

Для числовых множеств, эти свойства выполняются практически всегда. Однако для некоторых графов все не так однозначно.

Симметричность не выполняется для ориентированных графов.

Дано: множество, описанное предикатом, и несколько примеров.

Нужно сгруппировать примеры по принципу выполнения свойств симметричности, рефлексивности и транзитивности.

Отношения

Бинарным (или двуместным) отношениемr называется множество кортежей, связанных по некоторому признаку.

Если r есть отношение и пара (x, y) принадлежит этому отношению, то наряду с записью (x, y)∈r употребляется запись xry. Элементы x и y называются координатами (или компонентами) отношения r.

*Определение. **N-арным отношением** называется множество упорядоченных n-ок.*

*Определение.**Областью определения** бинарного отношения r называется множество* $D_\rho = \{x \mid \text{существует такое } y, \text{ что } x \rho y\}$

*Определение.**Областью значений** бинарного отношения r называется множество* $E_\rho = \{y \mid \text{существует такое } x, \text{ что } x \rho y\}$

Пусть $r\acute{I}\,X'Y$ определено в соответствии с изображением на рисунке 8 . Область определения D_r и область значений E_r определяются соответственно:

$D_r=\{x: (x, y)\ \hat{I}\ r\}$, $E_r=\{y: (x,y)\hat{I}\ r\}$.

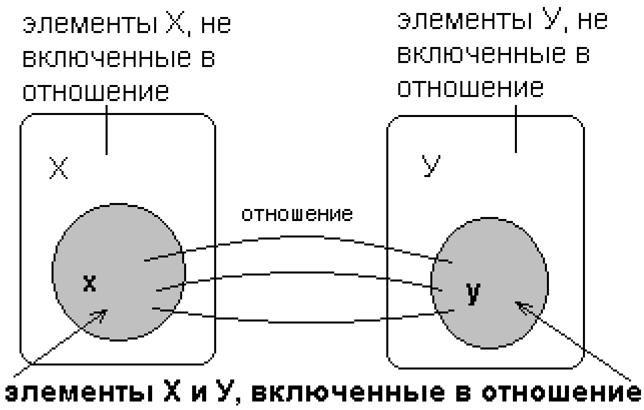


Рис. 8.

Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств.Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-той строки и j-го столбца, равен 1, если a_i и a_j имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

Пример 8.

Пусть M={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение r, заданное на множестве MrM , если r означает «быть строго меньше».

Отношение r как множество содержит все пары элементов a, b из M такие, что $a<b$. Тогда

$r = \{(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$.

Матрица отношения имеет вид:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Функции

Бинарное отношение f называется **функцией**, если из (x, y) и (x, z) следует, что y=z.

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции f и g равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается Df, а область значений – Rf. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если f – функция, то вместо (x, y)Îf пишут y=f(x) и говорят, что y – значение, соответствующее аргументу x, или y – образ элемента x при отображении f. При этом x называется прообразом элемента y.

Определение. Назовем f n-местной функцией из X в Y если f:XnRY. Тогда пишем y=f(x1, x2, …, xn) и говорим, что y – значение функции при значении аргументов x1, x2, …, xn.

Способ задания множества - **Порождающая процедура**: M={ x | x=f}, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества.

Свойства функций

Пусть f:XrY.

Функция f называется **инъективной**, если для любых x1, x2, y из y=f(x1) и y=f(x2) следует, что x1=x2, то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.

Функция f называется **сюръективной**, если для любого элемента yÎY существует элемент xÎX такой, что y=f(x).

Функция f называется **биективной**, если f одновременно сюръективна и инъективна.

Рисунок X иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

Пример X.

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

- функция f(x)=ex - инъективна, но не сюръективна;
- функция f(x)=x3-x – сюръективна, но не инъективна;
- функция f(x)=2x+1 – биективна.

Суперпозиция функций – функция, полученная из системы функций f, f1, f2, …, fk некоторой подстановкой функций f1, f2, …, fk во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.

Пример X.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

Источники:

https://life-prog.ru/2_54722_nachalnie-ponyatiya-teorii-mnozhestv.html

https://stepik.org/course/83

http://mathprofi.net/mnozhestva.html