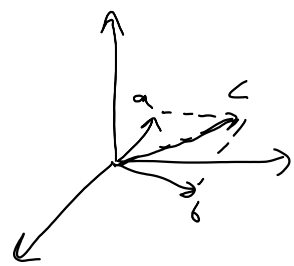
Vektorräume

Fragen?

- $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+3 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$



- andere VRe:

$C = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ z.B. $f = \sin$ Vektor!

∞-dim, da man keine endliche Basis finden kann:

z.B. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = \tan(x)$ ist Basis? Nein, da z.B. $g(x) = x$ nicht Linearkomb. ist:

$$g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)$$

$$x = \lambda_1 e^x + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \tan(x)$$

Setze gewisse x ein und komme auf Widerspruch für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$x = 0$: $0 = \lambda_1 \underbrace{e^0}_{1} + \lambda_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} + \lambda_3 \underbrace{\tan(0)}_{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$x = \ldots$: $\ldots$

*** Vektoren.** Skizzieren und berechnen Sie folgende Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

b) $y = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

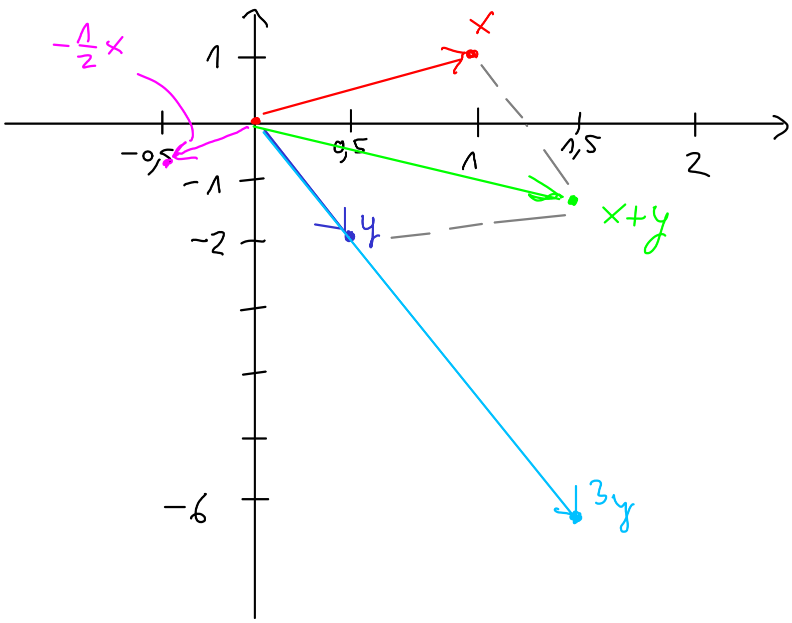
c) $3 \cdot y = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $-\frac{1}{2} \cdot x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

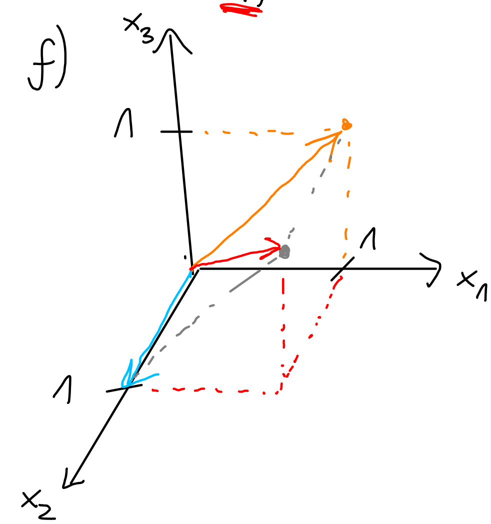
e) $x + y = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung. a) – e)



f)



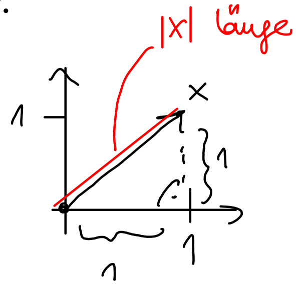
Eigener Lösungsversuch.

*** Länge.** Berechnen Sie die Länge von folgenden Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung.

a)



Pythagoras: $|x| = \sqrt{1^2 + 1^2}$

b) $|y| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

c) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Eigener Lösungsversuch.

Algebraische Struktur.

- Welche algebraische Struktur weist $(\mathbb{R}^n, +)$ auf? (kommutativ) Gruppe/Halbgruppe?
- Welche Regeln gelten für die Skalarmultiplikation in $(\mathbb{R}^n, \cdot)$? $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$
- Wie ist die algebraische Struktur eines Vektorraums definiert?

Lösung.

$(\mathbb{R}^n, +)$ abelsche/kommutative Gruppe:

(Abg): Summe zweier Vektoren ist Vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

(Ass.): $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$ in $\mathbb{R}$ assoz!

(Neutr. Elt.): Null-Vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(Inv. Elte.): zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ invers: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(komm.): $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

in $\mathbb{R}$ komm.

RR Skalarmultipl.:

(Ass.): $\lambda \cdot \left(\mu \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (\lambda\mu) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(Wirkung der 1): $1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(Distrib.): $\lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$

$(\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Vektorraum:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ mit obigen Regeln (alle!) heißt ein Vektorraum

neue alg. Struktur
(vs. Ring, vs. Körper)
Mult. von Objekten
hier: Zahl · Objekt!

Vektoradd. Skalarmult.

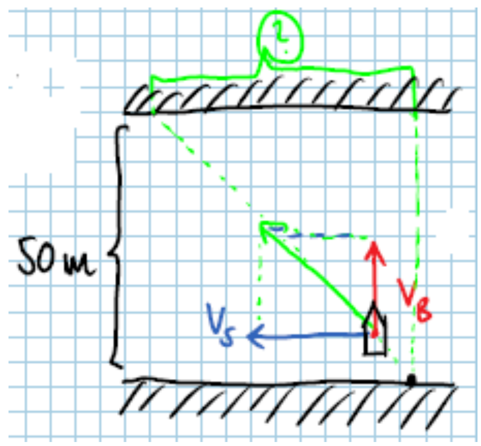
Eigener Lösungsversuch.

Anwendung Physik: Vektor = gerichtete Größe, z.B. $v = 100\,\frac{km}{h}$

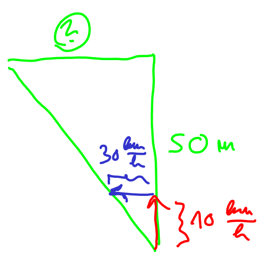
$F = m \cdot g = 100\,\underbrace{kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}_{N}$

Flussüberquerung. Sie wollen einen 50 m breiten Fluss mit einem Boot überqueren, wobei eine starke Strömung herrscht. Dabei sei in folgendem Bild v_B der Bootsgeschwindigkeitsvektor mit Bootsgeschwindigkeit $|v_B| = 10$ km/h und v_S der Strömungsgeschwindigkeitsvektor mit Strömungsgeschwindigkeit $|v_S| = 30$ km/h

Wie viele Meter kommen Sie versetzt an? Berechnen Sie ?.

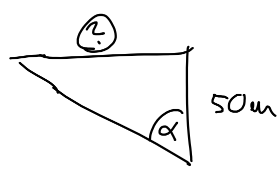


Lösung. Viele Mgl. z.B.

- 

  $\frac{?}{50\,m} = \frac{30\,\frac{km}{h}}{10\,\frac{km}{h}} \Rightarrow ? = 3 \cdot 50\,m = \underline{150\,m}$

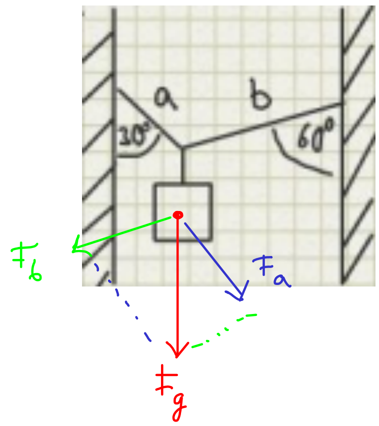
- Zeit zur Überquerung: $t = \frac{s}{|v_B|} = \frac{50\,m}{10\,\frac{km}{h}} \approx 18\,s \Rightarrow ? = t \cdot \underbrace{|v_S|}_{30\,\frac{km}{h}} = \underline{150\,m}$

- Berechne Winkel α & dann: 

  $\tan(\alpha) = \frac{?}{50\,m} \Rightarrow ? = \dots$

Eigener Lösungsversuch.

Gewichtskraft.

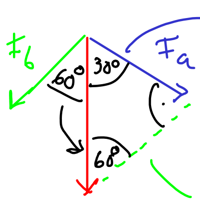


Ein Gewicht mit Masse $m = 100$ kg hängt an einer Seilkonstruktion. Berechnen Sie die Kräfte die auf die Seile a und b wirken.

Lösung.

$$F_g = F_a + F_b$$

$$|F_g| = m \cdot g = 100\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\frac{m}{s}}{s} = 981\ \text{N}$$



$$|F_a| = \sin(60°) \cdot |F_g| \approx 850\ \text{N}$$

$$|F_b| = \sin(30°) \cdot |F_g| \approx 490{,}5\ \text{N} \quad \text{(oder Pythagoras)}$$

Eigener Lösungsversuch.

*** Vektoren als Java-Objekte.** Implementieren Sie eine Java-Klasse namens `Vector`, die einen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ modelliert. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Die Klasse soll zwei Variablen besitzen, die die beiden Koordinaten beschreiben. Implementieren Sie einen geeigneten Konstruktor und eine `toString()`-Methode.
2. Zusätzlich soll die Klasse über folgende Methoden verfügen (sind die angegebenen Signaturen sinnvoll?):
   - Vektoraddition: `public Vector add(Vector v)`
   - Skalarmultiplikation: `public Vector scalarMult(double lambda)`
   - Länge des Vektors: `public double length()`
   - Skalarprodukt: `public double scalarProd(Vector v)`
   - Winkel zu einem anderen Vektor: `public double angle(Vector v)`

   (Skalarprodukt und Winkel wird später behandelt, Technikzweige/Gymnasium kennt das schon!)
3. Schreiben Sie eine Main-Methode, die ihre Methoden testet.

Lösung. siehe Java-Klasse bzw. Blog auf bigdev.de!