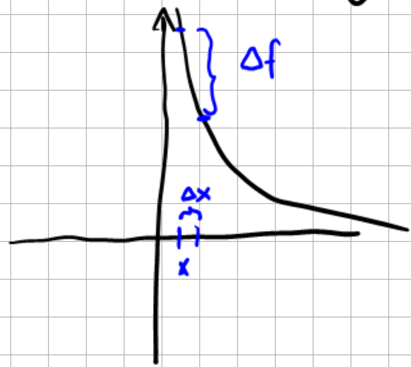
# 10. Übung

10.1 b) Die Kondition eines Problems lässt sich nicht durch einen stabilen Algorithmus oder genauere Arithmetik verbessern. Ist ein Problem schlecht konditioniert, dann besteht das Problem auch bei exakter Arithmetik (z.B. Unstetigkeiten).

$$\text{cond}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$



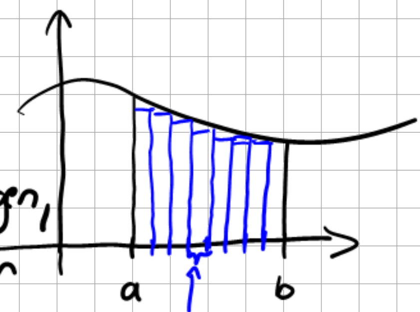

$$\frac{\Delta f}{f} = \text{cond}(x) \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

e) Falsch, Gegenbeispiel vom Arbeitsblatt (Addition zweier Gleitpunktzahlen stark unterschiedl. Größenordnungen)

f) Auch das Assoziativgesetz gilt nicht, s. Bsp. 8.3.1 auf Folien.

h) Diskretisierungsfehler

Je feiner die Intervallunterteilung, desto genauer werden die Berechnungen, aber je mehr Gleitpunktoperationen durchgeführt werden, desto größer der Rundungsfehler.
→ Goldener Mittelweg!




Je kleiner $\Delta x$, desto genauer ist das Ergebnis

i) Der absolute Fehler ist abhängig von der Größenordnung der Zahl. Der relative Fehler ist "größenordnungsbereinigt" und liegt im Bereich der Maschinengenauigkeit.

10.2 $a = 0.471 \cdot 10^{-2}$ , $b = -0.185 \cdot 10^{-4}$

exaktes Ergebnis

$$rd(a+b) = rd(0.471 \cdot 10^{-2} - 0.00185 \cdot 10^{-2}) = rd(0.46915 \cdot 10^{-2})$$
$$= 0.469 \cdot 10^{-2}$$

relativer Fehler

$$\Rightarrow e_{rel} \approx 3.2 \cdot 10^{-4} = \frac{|\text{exaktes Ergebnis} - \text{gerundetes Ergebnis}|}{|\text{exaktes Ergebnis}|}$$

$$rd(a-b) = rd(0.47285 \cdot 10^{-2}) = 0.473 \cdot 10^{-2}$$
$$\Rightarrow e_{rel} \approx 3.2 \cdot 10^{-4}$$

$$rd(a \cdot b) = rd(-0.87135 \cdot 10^{-7}) = -0.871 \cdot 10^{-7}$$
$$\Rightarrow e_{rel} \approx 4.0 \cdot 10^{-4}$$

$$rd\left(\frac{a}{b}\right) \approx -0.255 \cdot 10^{3}$$
$$\Rightarrow e_{rel} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$$

10.4

a) $$rd(3.34^2) - rd(4 \cdot 1.22 \cdot 2.28) = rd(11.1556) - rd(11.1264)$$
$$= \underbrace{11.2 - 11.1}_{\text{Auslöschung!}} = 1.00 \cdot 10^{-1}$$

b) Exakt: $2.92 \cdot 10^{-2}$

c) $$e_{rel} = \frac{1.00 \cdot 10^{-1} - 2.92 \cdot 10^{-2}}{2.92 \cdot 10^{-2}} \approx 242\%$$

10.5

a) $$\sqrt{x+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{x + \cancel{1 - 1}}{\sqrt{x+1} + 1}$$

b) $$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \underset{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{=} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$