Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

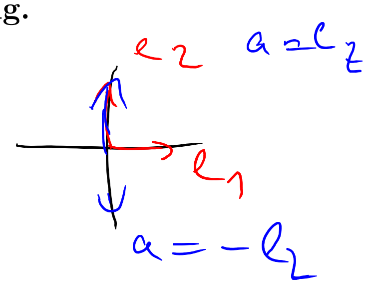
VEKTOREN, MATRIZEN UND LGS

*** Multiple Choice.** Sei $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. $a \perp e_1$ und $|a| = 1 \Longrightarrow a = e_2$. ☐ Wahr, ☒ Falsch
2. $a \cdot e_1 = 0 \Longrightarrow a \perp e_1$. ☒ Wahr, ☐ Falsch

Lösung.

1



Eigener Lösungsversuch.

*** Matrizenprodukt.** Berechnen Sie falls möglich die Matrizenprodukte $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^2 := A \cdot A$ und $B^2 := B \cdot B$ für

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Eigener Lösungsversuch.

* **Lineare Gleichungssysteme I.** Schreiben Sie das LGS in Matrixform $Ax = b$ und berechnen Sie die allgemeine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & + & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}' \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 2\,\mathrm{III}' + \mathrm{II}' \\ \mathrm{IV} - \mathrm{I} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}'' \\ \mathrm{IV}' \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 2\,\mathrm{IV}' - \mathrm{II}' \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{IV}'' \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right)$$

$$2x_2 - 7\varphi + 6\lambda = -2 \iff x_2 = \frac{2 + 7\varphi - 6\lambda}{2}$$

$$x_1 + \frac{2 + 7\varphi - 6\lambda}{2} - \varphi + 2\lambda = 2$$

$$\Leftrightarrow -x_1 = \frac{2+7\varphi-6\lambda-2\varphi+4\lambda-4}{2}$$

Eigener Lösungsversuch.

$$= \frac{-2+5\varphi-2\lambda}{2} \quad | \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\left(\frac{-2+5\varphi-2\lambda}{2}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme II. Lösen Sie in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ das LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & -16 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}$$

Lösung.

$$\begin{array}{l|rrr|r} \mathrm{I} & 2 & -3 & 1 & 11 \\ \mathrm{II} & 1 & 4 & -3 & -16 \\ \mathrm{III} & 3 & 1 & -2 & c \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\,\mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 2\,\mathrm{III} - 3\,\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrr|r} \mathrm{I} & 2 & -3 & 1 & 11 \\ \mathrm{II}' & 0 & 11 & -7 & -43 \\ \mathrm{III}' & 0 & 11 & -7 & 2c-33 \end{array} \qquad \mathrm{III}' - \mathrm{II}'$$

$$\begin{array}{l|rrr|l} \mathrm{I} & 2 & -3 & 1 & 11 \\ \mathrm{II}' & 0 & 11 & -7 & -43 \\ \mathrm{III}'' & 0 & 0 & 0 & 2c-33+43 \\ & & & & 2c+10 \quad |:2 \\ & & & & c+5 \end{array}$$

$$0 = c+5 \qquad c = -5$$

Eigener Lösungsversuch.

*** Multiple Choice.**

1. Wie viele Lösungen besitzt das LGS? ☐ 0, ☐ 1, ☐ 2, ☒ ∞

$$\begin{array}{rcrcr} 27x_1 & - & 108x_2 & = & 397 \\ 54x_1 & - & 216x_2 & = & 794 \end{array}$$

2. Es gibt ein LGS, das genau zwei Lösungen hat. ☐ Wahr, ☒ Falsch

3. Jedes LGS mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten hat unendlich viele Lösungen. ☐ Wahr, ☒ Falsch

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Lineare Gleichungssysteme III. Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist der Lösungsraum des zu

$$\begin{array}{rcrcrcc} 3x_1 & + & tx_2 & - & x_3 & = & \frac{14}{3} \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

gehörigen homogenen Systems eindimensional? Wie lautet in diesem Fall die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

*** Inverse Matrix.** Ist folgende Matrix A invertierbar? Berechnen Sie ggf. die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -0 \\ -2 & -3 & -0 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Determinante. Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det A = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 12 & a & 7 & -3 \\ 2a & 2 & a & -1 \\ 3a & 3 & 2a & a \\ 11 & a & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wann ist A invertierbar?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

*** Multiple Choice.** Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

1. A ist invertierbar. ☐ Wahr, ☐ Falsch
2. $AB = BA = \det(A)E_2$. ☐ Wahr, ☐ Falsch
3. Für $\det(A) \neq 0$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$. ☐ Wahr, ☐ Falsch

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.