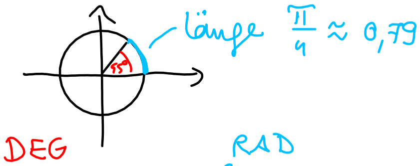
Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Sinus & Freunde

Fragen?

GAGA
HHAG Hühnerhof AG

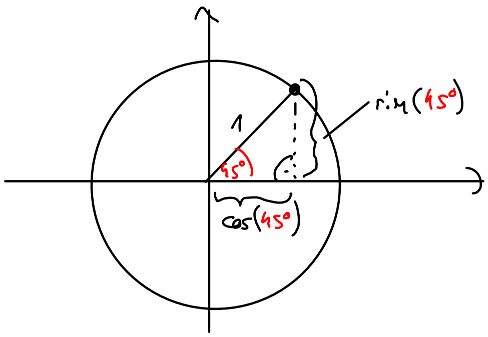
sin cos tan cot



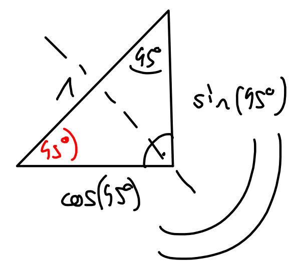
DEG RAD

* **Werte von Sinus am Dreieck.** Was ist $\sin(45°) = sin(\frac{\pi}{4})$? Bestimmen Sie den Wert durch Überlegung an einem geeigneten Dreieck im Einheitskreis!)

Lösung.



gleichschenklig



Pythagoras: $\underbrace{\cos^2(45°)}_{\sin^2(45°)} + \sin^2(45°) = 1^2 \Rightarrow 2\sin^2(45°) = 1$

$\Rightarrow \sin(45°) = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(45°) \geq 0$

Eigener Lösungsversuch.

Winkel α (Grad)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sinus	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
Kosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	-1	0	1

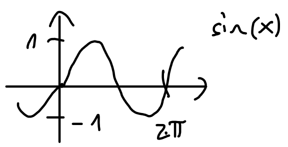
* **Sinus skizzieren.** Skizzieren Sie

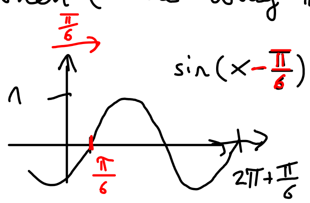
$$f(x) = 2 \cdot \sin(3x - \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \sin(3(x - \frac{\pi}{18}))$$

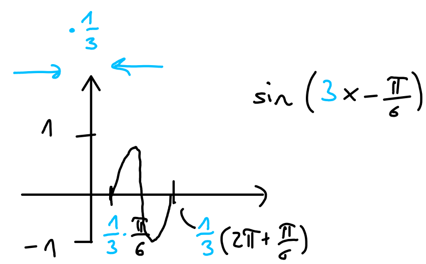
Geben Sie alle lokalen Maxima/Minima, sowie alle NST und die Periode/Amplitude an.

Lösung.

mit linearen Transformationen (siehe Übung „Funktionen")



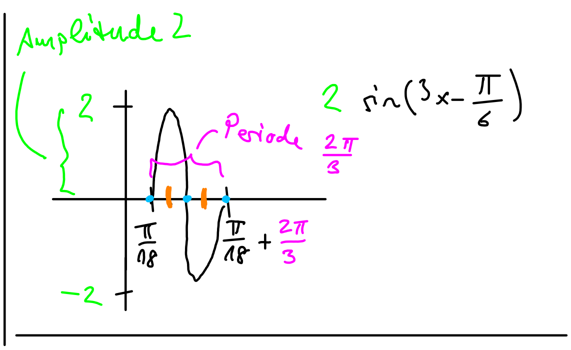




Max: $\frac{\pi}{18} + \frac{1}{4}\frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Min: $\frac{\pi}{18} + \frac{3}{4}\frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

NST: $\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

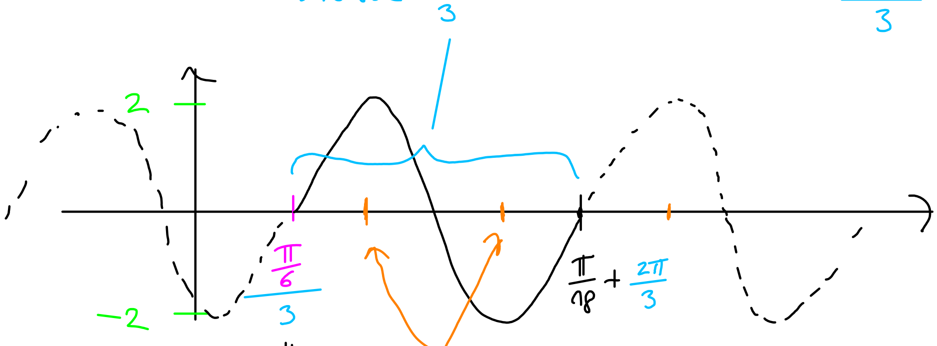


ODER: Bei Sinus/Kosinus direkt mit Deutung der Parameter:

$$2 \sin(3x - \frac{\pi}{6})$$

Amplitude — Winkelgeschw. — Phasenverschiebung

→ Periode $\frac{2\pi}{3}$ → Start x-Wert: $\frac{\frac{\pi}{6}}{3}$



$$\frac{\frac{\pi}{6}}{3} = \frac{\pi}{18}$$

Max: $\frac{\pi}{18} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

Min: $\frac{\pi}{18} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$

NST: $\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}$

ODER: Max/Min/NST rechnerisch:

~~Eigener Lösungsversuch.~~ z.B. Max: $\underbrace{2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{Max } 1} = 2 \Rightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\overset{\text{arcsin}}{\Rightarrow} 3x - \frac{\pi}{6} = \underbrace{\arcsin(1)}_{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\cdot\pi}{18}$

also alle Max: $x = \frac{9\pi}{18} + k\cdot \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\text{Periode}}$

ODER: $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ maximal falls Argument $3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ Max von sin x

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi\right)$$

$$= \frac{9\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$$

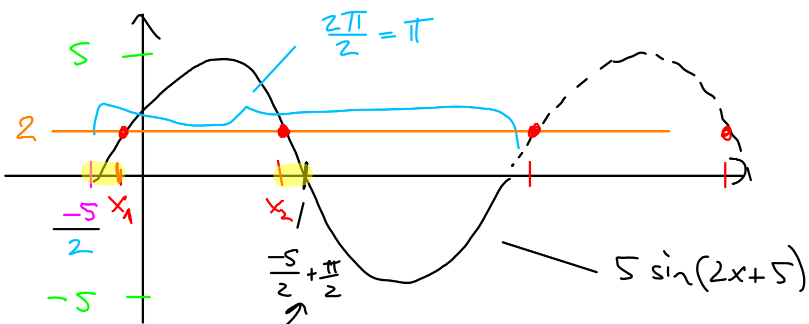
Trigonometrische Gleichungen. Finden Sie alle Lösungen der Gleichungen

1. $5\sin(2x+5) = 2$
2. $2\cos(x) + \sin^2(x) = 1,75$

Lösung.

1. $5\sin(2x+5) = 2 \Rightarrow \sin(2x+5) = \frac{2}{5} \xRightarrow{\arcsin(\dots)} \underbrace{\arcsin}_{id}(\sin(2x+5)) = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow 2x+5 = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) - 5}{2}$



$x_2 = \left(\frac{-5}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(x_1 - \frac{-5}{2}\right) = \frac{-5 + \pi - 2x_1 - 5}{2} = \frac{-5 + \pi - \cancel{2}\,\frac{\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) - 5}{\cancel{2}} - 5}{2}$

$= \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) - 5}{2}$

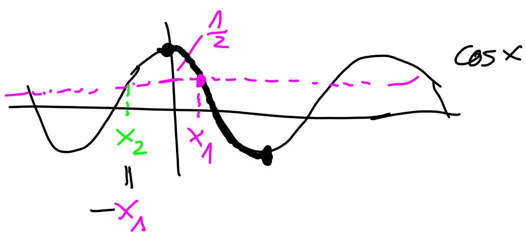
Alle Lsgen: $x = x_1 + k \cdot \pi$ oder $x = x_2 + k \cdot \pi$

2. $2\cos x + \underbrace{\sin^2 x}_{\text{Pythagoras: } = 1-\cos^2 x} = 1,75 \Rightarrow -\cos^2 x + 2\cos x - 0,75 = 0 \xRightarrow{u = \cos x} -u^2 + 2u - 0,75 = 0$

$\Rightarrow u_{1,2} = \dots = \begin{cases} 1/2 \\ 3/2 \end{cases} \xRightarrow{\cos x = u} \cos x = \begin{cases} 1/2 \\ 3/2 = 1,5 ↯ \end{cases}$ 1, -1, 1,5

siehe Tabelle oben!

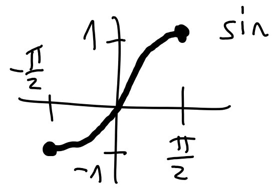
$\Rightarrow x_1 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$ alle Lsgen? Nein!

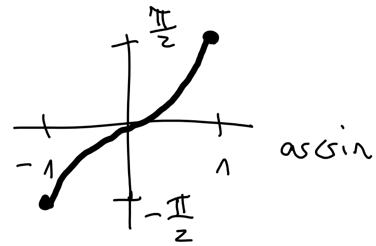


Alle Lsgen: $\boxed{\pm \underbrace{x_1}_{\frac{\pi}{3}} + k \cdot 2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Eigener Lösungsversuch.

Arcus-Funktionen. Berechnen Sie:



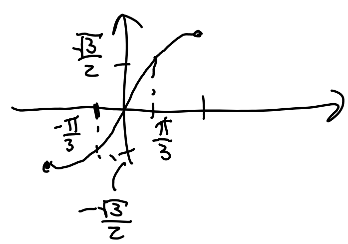


1. $\arcsin(1)$
2. $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$
3. $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\arcsin = \sin^{-1}$ RAD default!

Lösung. Tabelle oben oder TR:

1. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ $\left(\sin x = 1 \text{ bei } x = \frac{\pi}{2} \ (\hat{=} 90^\circ)\right)$
2. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\left(\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \ldots\right)$
3. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ $\left(\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} x = \frac{\pi}{3}\right)$



Eigener Lösungsversuch.

Eine Formel. Zeigen Sie: $\arcsin(a) = \arccos(\sqrt{1-a^2})$. Hinweis: Setze $a = \sin(x)$ ein.

Lösung.

LS: $\arcsin(\sin(x)) = x$

RS: $\arccos(\sqrt{\underbrace{1-\sin^2(x)}_{\cos^2(x)}}) = \arccos(\cos(x)) = x$ $\checkmark$

Eigener Lösungsversuch.

Noch eine Formel. Zeigen sie damit $\cos(\underbrace{\arcsin(a)}_{\text{s.o.}}) = \sqrt{1-a^2}$.

Lösung.

$$\cos(\arccos(\sqrt{1-a^2})) = \sqrt{1-a^2}.$$

Eigener Lösungsversuch.

Ableitung von $\arcsin(x)$**.** Berechnen Sie mit der Ableitungsformel für Umkehrfunktionen $\boxed{[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$ die Ableitung von $\arcsin(x)$.

Lösung.

$$\big[\underset{\substack{\| \\ \arcsin(x)}}{\sin^{-1}(x)}\big]' = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\text{s.o.}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(↷ Mathe 2)

Eigener Lösungsversuch.