3. Übungsblatt zur Vorlesung
„Stochastik und Numerik“

Aufgabe 3.1 *(Prüfungsaufgabe)*
Zu einem Zeitpunkt liegen folgende Daten über die Bevölkerungsgruppe der über 14-jährigen in Deutschland vor:

- 24% sind 65 Jahre und älter, d. h. Senioren (Ereignis S)
- 90% besitzen ein Mobiltelefon (Ereignis M)

a) Welche der folgenden Mengen (1) bis (6) beschreiben das Ereignis E: «Mindestens eines der Ereignisse M bzw. S tritt ein»?

(1) $M \cap S$	(2) $M \cup S$	(3) $(M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S) \cup (\overline{M} \cap \overline{S})$
(4) $\overline{M \cup S}$	(5) $\overline{M \cap S}$	(6) $(M \cap S) \cup (M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S)$

b) Entscheiden Sie anhand der vorliegenden Daten, welche der folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung:

- die Wahrscheinlichkeit p_1, dass eine aus der Bevölkerungsgruppe zufällig ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn sie 65 Jahre oder älter ist
- die Wahrscheinlichkeit p_2, dass eine aus der Bevölkerungsgruppe zufällig ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn sie ein Mobiltelefon besitzt

c) Berechnen Sie unter der Annahme, dass das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eintritt, die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(M)$.

Aufgabe 3.2 *(Stochastische Unabhängigkeit)*
Eine Statistik über 100 Tage zeigt, dass Rechner A an 10 Tagen ausgefallen ist, Rechner B an 15 Tagen. An 84 Tagen sind beide voll funktionstüchtig. Die sich daraus ergebenden relativen Häufigkeiten werden als Schätzungen für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das zukünftige Verhalten verwendet.

a) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Verfügbarkeit/ Unverfügbarkeit von A und B, unter der Bedingung, dass der andere Rechner verfügbar / unverfügbar ist.

b) Sind die Ausfälle stochastisch unabhängig?

c) Lässt sich mit den Ergebnissen eine Aussage darüber treffen, ob der Ausfall eines Rechners den des anderen nach sich zieht?

Aufgabe 3.3 *(Satz der totalen Zerlegung)*
Zu 40 % der Zeit sei die zeitliche Auslastung der Zentraleinheit größer oder gleich 70%. 5% der Antwortzeiten liegen währenddessen über dem vereinbarten Maximalwert von 1 Sekunde. Während Zeiten niedriger Auslastung ($<$ 70%) zeigen die Messwerte der Antwortzeiten nur zu 1% mehr als 1 Sekunde an.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem zufälligen Zeitpunkt die Antwortzeit oberhalb einer Sekunde liegt?

b) Sind die Ereignisse „Antwortzeit über eine Sekunde" und „Auslastung der Zentraleinheit größer oder gleich 70%" stochastisch unabhängig?

c) Als Antwortzeit werde zu einem zufälligen Zeitpunkt 1.5 Sekunden festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war währenddessen die Auslastung der Zentraleinheit kleiner als 70%, mit welcher größer oder gleich 70%?

Aufgabe 3.4 *(Formel von Bayes; Wahrscheinlichkeitstheorie für Kommissare; Ross: Beispiel 3.7e)*
In einem bestimmten Stadium einer kriminalistischen Untersuchung ist der Ermittler zu 60% von der Schuld eines bestimmten Verdächtigen überzeugt.

a) Nehmen wir nun an, dass ein *neues* Beweisstück auftaucht, das mit 100% Sicherheit zeigt, dass der Täter ein bestimmtes, vorher nicht bekanntes Merkmal aufweist (z.B. dass er Linkshänder ist, kahl ist, blond ist usw.). 20% der Bevölkerung weisen dieses Merkmal auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann der Ermittler von der Schuld des Verdächtigen ausgehen, wenn der ebenfalls dieses Merkmal aufweist?

b) Nehmen wir nun an, dass das Beweisstück unterschiedlich interpretiert werden kann. Es soll nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zeigen, dass der Täter das bestimmte Merkmal aufweist. Wie wahrscheinlich ist es in diesem Fall, dass der Verdächtige auch der Täter ist, wenn man wie zuvor annimmt, dass der Verdächtige das Merkmal aufweist?