3
Ableitung

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:57

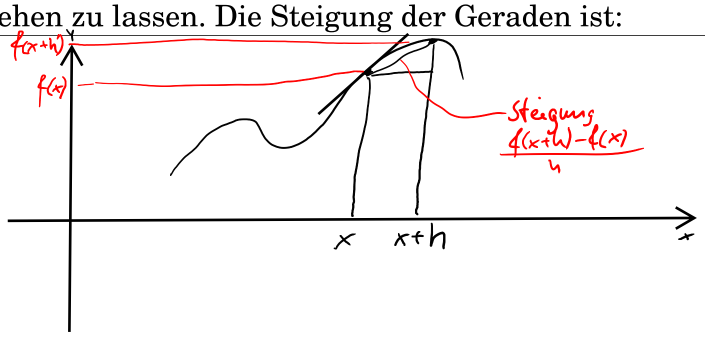
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Ableitung

Gegeben eine Funktion f, die an einer Stelle x und (mindestens) in einer Umgebung davon definiert ist, kann man sich fragen, wie steil f an der Stelle x ansteigt. Die Idee ist, eine Gerade durch $(x|f(x))$ und einen benachbarten Punkt $(x+h|f(x+h))$ zu legen, deren Steigung zu bestimmen und dann h gegen null gehen zu lassen. Die Steigung der Geraden ist:

1



Und die Frage ist, ob folgender Grenzwert existiert:

2 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Wenn dieser Grenzwert existiert, sagt man, die Funktion f ist an der Stelle x differenzierbar [differentiable]; der Grenzwert heißt dann die Steigung [slope] oder Tangententeigung der Funktion an dieser Stelle.

Man kann darüber auch eine neue Funktion definieren: die (erste) Ableitung [derivative] f' der Funktion f:

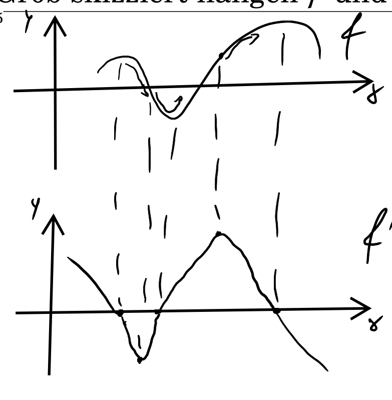
3 $f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Definitionsbereich von f':
alle $x \in$ Definitionsbereich f,
für die f differenzierbar ist

Alternative Schreibweisen sind:

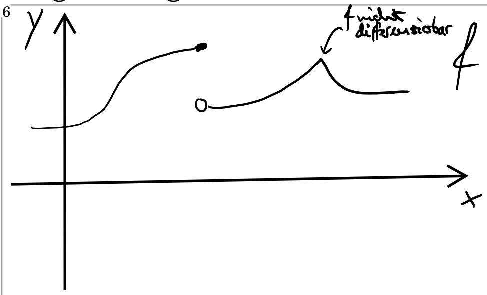
4 f', $\frac{df}{dx}$, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$, $f^{(10)}$

Grob skizziert hängen f und f' so zusammen:

5


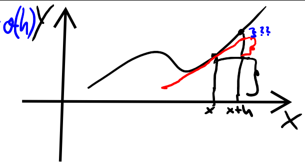
$f'(x)$ sagt einfach, mit welcher Geschwindigkeit sich $f(x)$ an der Stelle x ändert.

Ist eine Funktion an einer Stelle x differenzierbar, muss sie dort stetig sein. Umgekehrt gilt das nicht:

6


Zum Rechnen ist der Grenzwert meist zu ungeschickt. Wenn die Funktion f an der Stelle x differenzierbar ist, weiß man vielmehr:

7 $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + o(h)$



Das dort vorkommende o, das Landau-Symbol klein-o, bezeichnet eine Funktion ohne Namen mit folgender Eigenschaft:

8 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Nebenbei: In der Informatik kommt häufiger O vor, das Landau-Symbol Groß-O. Das bezeichnet eine Funktion ohne Namen, die im Wesentlichen kleiner oder gleich einem festen Vielfachen der Funktion bleibt, die im Groß-O steht.

2 Ableitung von Summen und Produkten

Wenn die Funktionen f und g beide an der Stelle x differenzierbar sind und wenn C eine feste Zahl ist, ist elementar durch die Grenzwertsätze klar:

9
$$(Cf)' = C \cdot f'$$
$$(f+g)' = f' + g'$$

Minimal schwieriger wird es, wenn man das Produkt $x \mapsto f(x)g(x)$ ableiten will. Hier hilft das klein-o:

10

$$
\begin{aligned}
f(x+h)\,g(x+h) &= \left(f(x) + hf'(x) + o(h)\right) \cdot \left(g(x) + hg'(x) + o(h)\right) \\
&= \boxed{f(x)\cdot g(x)} + \boxed{f(x)\,h\,g'(x)} + f(x)\cdot o(h) + \\
&\quad \boxed{hf'(x)g(x)} + h^2 f'(x) g'(x) + hf'(x)\cdot o(h) + \\
&\quad o(h)\cdot\left(g(x) + hg'(x) + o(h)\right) \\
&= f(x)\cdot g(x) + h\cdot \underbrace{\left(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right)}_{\text{Ableitung}} + o(h)
\end{aligned}
$$

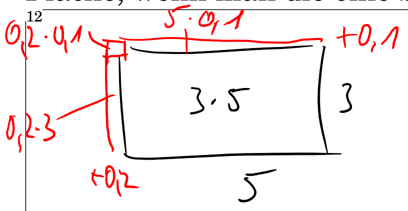
Damit ergibt sich die Produktregel [product rule]:

11

$$\Longrightarrow (fg)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Die Produktregel kann man mit der Fläche eines Rechtecks veranschaulichen. Angenommen, ein Rechteck hat die Seitenlängen 5 und 3. Wie ändert sich seine Fläche, wenn man die eine Seite auf 5,2 verlängert und die andere auf 3,1?

12



3 Kettenregel

Es wird die Verkettung $x \mapsto f(g(x))$ untersucht. Die Funktion g sei an der Stelle x_0 differenzierbar, die Funktion f an der Stelle $g(x_0)$. Wieder hilft das klein-o:

13

$$
\begin{aligned}
f(\underbrace{g(x+h)}_{g(x) + \underbrace{hg'(x) + o(h)}_{h_2}}) &= f(g(x) + h_2) \\
&= f(g(x)) + h_2 f'(g(x)) + o(h_2) \\
&= f(g(x)) + hg'(x)f'(g(x)) + o(h)f'(g(x)) + o(hg'(x) + o(h))
\end{aligned}
$$

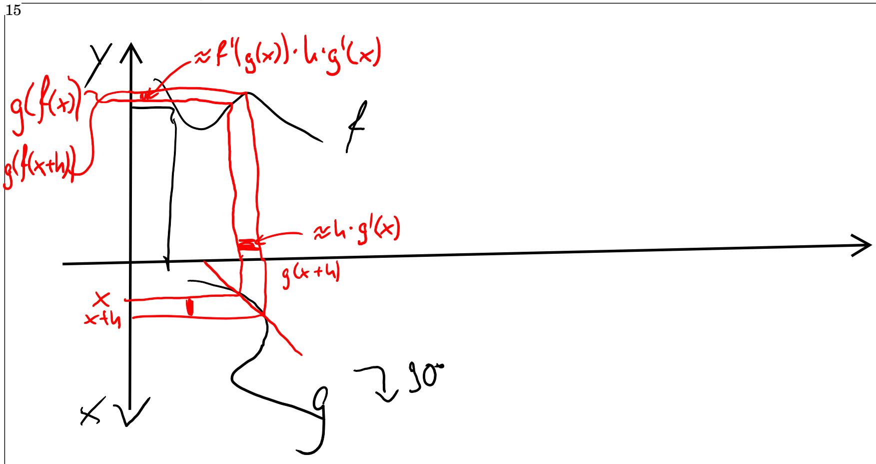
Damit ergibt sich die Kettenregel [chain rule]:

14

$$\Longrightarrow (f\circ g)' = f'\circ g \cdot g'$$

Dies kann man mit zwei Funktionsgraphen veranschaulichen, von denen man einen um 90° gedreht einzeichnet:

15



4 Quotientenregel

Nun kann man den Kehrwert einer Funktion ableiten:

16

$$0=\frac{d\, x\cdot\frac{1}{x}}{dx} = 1\cdot\frac{1}{x} + x\,\frac{d\frac{1}{x}}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \frac{d\frac{1}{g(x)}}{dx} = -\frac{1}{(g(x))^2}\cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Und damit auch den Quotienten zweier Funktionen (Quotientenregel):

17

$$\Rightarrow \frac{d\frac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \frac{d\, f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}}{dx} = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

5 Ableitung von Exponentialfunktionen

Die entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktion $\exp : x \mapsto e^x$ war:

18

Mit dem Grenzwert und den Potenzrechengesetzen kann man daraus überall die Ableitung bestimmen:

19

Um eine allgemeine Exponentialfunktion wie $x \mapsto 10^x$ abzuleiten, schreibt man sie mit exp:

20

6 Ableitung von Logarithmusfunktionen

Es gibt eine etwas sperrige Regel zur Ableitung von Umkehrfunktionen. Einfacher ist, hinzuschreiben, dass die Funktion angewendet auf die Umkehrfunktion wieder den Ausgangswert liefert. Das leitet man ab:

21

7 Ableitung von Potenzfunktionen

Um auch negative und gebrochenzahlige Potenzen korrekt zu behandeln, schreibt man die Potenzfunktion mit der Exponentialfunktion:

22

8 Ableitung von Sinus und Freunden

Man wendet einfach die Kettenregel auf die Eulersche Identität an:

23

Der Tangens geht mit Quotientenregel und Pythagoras (Seminaraufgabe).

Arcussinus: Wie bei der Ableitung von ln schreibt man einfach hin, dass der Sinus angewendet auf den Arcussinus wieder den Ausgangswert liefert. (Nebenbei: Andersherum gilt das nicht immer!) Das leitet man ab und denkt an Pythagoras:

24

Entsprechend für den Arcuscosinus und den Arcustangens (Seminaraufgabe).