Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Primzahlen, ggT und EA, diophantische Gleichungen und EEA

* **Primzahl.** Ist 233 eine Primzahl? Überprüfen Sie das, indem Sie der Reihe nach für die Primzahlen 2, 3, 5, 7, ... feststellen ob sie Teiler von 233 sind. Probieren Sie nicht länger als nötig!

Lösung.

Teste mit Primzahlen $\leq \sqrt{233} \approx 15,\ldots$, also $2, 3, 5, 7, 11, 13$

$2 \mid 233$? ✗ 233 ungerade

$3 \mid 233$? ✗ Quersumme $= 2+3+3 = 8$ & $3 \nmid 8$

$5 \mid 233$? ✗ Einer der Zahl muss 0/5 sein!

$7 \mid 233$? ✗ TR! keine Regel dazu!

$11 \mid 233$? ✗ Alternierende Quersumme $= 3-3+2 = 2$ & $11 \nmid 2$

Bsp. 2351: $1-5+3-2 = -3$
$11 \nmid -3 \Rightarrow 11 \nmid 2351$

$13 \mid 233$? ✗ TR! keine Regel dazu!

$\Rightarrow 233 \in \mathbb{P}$

Eigener Lösungsversuch.

Primfaktorzerlegung und Teilerfremd. Gegeben seien 98, 192 und 53.

1. Finden Sie die Primfaktorzerlegungen der genannten Zahlen.
2. Welche dieser Zahlen sind zueinander teilerfremd?
3. Wieviele Teiler besitzt 192? Gehen Sie systematisch vor - es ist nicht notwendig die Liste aller Teiler zu erstellen.

Lösung.

1. PFZ? Suche kleinsten Teiler (iteriert)

$$98 = 2 \cdot \underbrace{49}_{7 \cdot \underbrace{7}_{\times}} = 2 \cdot 7^2$$

$$192 = 2 \cdot \underbrace{96}_{2 \cdot \underbrace{48}_{2 \cdot \underbrace{24}_{2 \cdot \underbrace{12}_{2 \cdot \underbrace{6}_{2 \cdot 3}}}}} = 2^6 \cdot 3$$

$$53 = 53 \quad \Big(\text{Primzahl, da } \underbrace{2,3,5,7}_{\leq \sqrt{53} \approx 7,\dots} \nmid 53\Big)$$

2. a, b teilerfremd $:\Longleftrightarrow \text{ggT}(a,b) = 1 \Longleftrightarrow T(a) \cap T(b) = \{1\}$ ← Skript

$\text{ggT}(98, 192) \overset{\text{PFZ}}{=} 2$, d.h. 98, 192 nicht teilerfremd

$\text{ggT}(98, 53) = 1$, d.h. 98, 53 teilerfremd

$\text{ggT}(192, 53) = 1$, d.h. 192, 53 — " —

ODER:

$$\left.\begin{aligned} T(98) &= \{1, 2, \dots, 98\} \\ T(192) &= \{1, 2, \dots, 192\} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow T(98) \cap T(192) = \{1, 2, \dots\} \neq \{1\}$$

3. PFZ $192 = 2^6 \cdot 3$.

$$T(192) = \{ 2^i \cdot 3^j \mid \underbrace{0 \leq i \leq 6}_{7 \text{ Mgl.}}, \underbrace{0 \leq j \leq 1}_{2 \text{ Mgl.}} \}$$, d.h. es gibt 14 Teiler!

$7 \text{ Mgl.} \cdot 2 \text{ Mgl.} = 14 \text{ Mgl.}$

<u>Googol</u> wie viele Teiler? $\left|T\Big(\underbrace{\underbrace{10}_{2\cdot 5}{}^{100}}_{2^{100}\cdot 5^{100}}\Big)\right| = 101 \cdot 101 = 10.201$ Teiler

Eigener Lösungsversuch.

*** ggT, Teil 1.** Bestimmen Sie ggT(296,192) mit allen drei Verfahren der Vorlesung, also mittels:

1. $T(296) \cap T(192)$ ☹
2. Primfaktorzerlegung ☺ kleine Zahlen (kleine Primfaktoren)
3. Euklidischer Algorithmus ☺ großen Zahlen

Lösung.

1.
$$T(296) = \{1, 2, 4, 8, 37, 74, 148, 296\}$$
$$T(192) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192\}$$
$T(296) \cap T(192) = \{1, 2, 4, 8\}$ max

$$ggT(296, 192) \stackrel{\text{Def.}}{=} \max\left(T(296) \cap T(192)\right) = 8$$

2.
$$192 \stackrel{\text{s.o.}}{=} 2^6 \cdot 3$$
$$296 = 2 \cdot \underbrace{148}_{2 \cdot \underbrace{74}_{2 \cdot 37}} = 2^3 \cdot 37$$
prim: 2, 3, 5 ∤ 37

$$\Rightarrow ggT(192, 296) = 2^3 = 8$$

3.
$$296 = 1 \cdot 192 + 104$$
$$192 = 1 \cdot 104 + 88$$
$$104 = 1 \cdot 88 + 16$$
$$88 = 5 \cdot 16 + \boxed{8}$$
$$16 = 2 \cdot \boxed{8} + 0$$

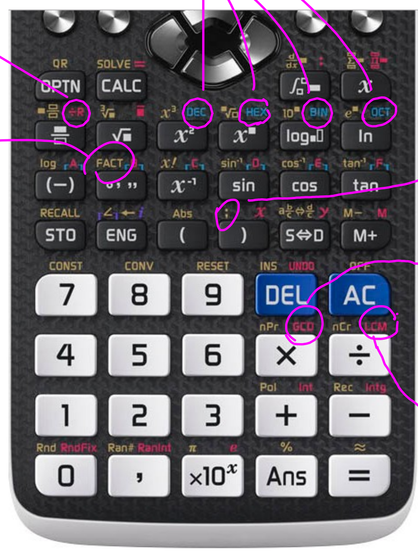
$ggT(296, 192) = 8$

Eigener Lösungsversuch.

Exkurs: Taschenrechnerfunktionen

Division mit Rest

Zahlensysteme



Factorization: Primfaktor-zerlegung

semicolon ';'

Greatest Common Divisor: ggT

z.B. GCD(192;296)

Least Common Multiple: kgV

In der Prüfung müssen Sie alle Antworten begründen! Es reicht nicht, wenn Sie das Ergebnis nur vom TR/Nachbarn abschreiben!

TR hilft nur zur Kontrolle auf Rechenfehler!

ggT, Teil 2. Berechnen Sie mit dem Euklidschen Algorithmus:

1. ggT(261,123)
2. ggT(49,255)

Lösung.

1.

```
261 =    2 * 123 + 15
123 =    8 *  15 +  3
 15 =    5 *   3 +  0
ggT(261,123) = 3
```

ggT

ODER: $\texttt{ggTRec(261,123)} = \texttt{ggTRec(123,}\underbrace{\texttt{15}}_{261 \bmod 123}\texttt{)} = \texttt{ggTRec(15,}\underbrace{\texttt{3}}_{123 \bmod 15}\texttt{)} = \texttt{ggTRec(3,}\underbrace{\texttt{0}}_{15 \bmod 3}\texttt{)} = 3$

2.

```
 49 =   0 * 255 + 49
255     5 *  49 + 10
 49 =   4 *  10 +  9
 10 =   1 *   9 +  1
  9 =   9 *   1 +  0
ggT(49,255) = 1
```

d.h. 49,255 teilerfremd

ODER: `ggTRec(49,255) = ggTRec(255,49) = ggTRec(49,10) = ggTRec(10,9) = ggTRec(9,1) = ggTRec(1,0) = 1`

Eigener Lösungsversuch.

* **Diophantische Gleichungen, Teil 1.**

1. Hat die Gleichung $36x + 15y = 6$ ganzzahlige Lösungen? Geben Sie diese ggf. an.
2. Berechnen Sie alle ganzzahligen Lösungen von $36x + 15y = 300$. Gibt es Lösungen mit positivem x und positivem y?

Lösung.

1. lösbar $\iff \operatorname{ggT}(\underset{2^2 3^2}{36}, \underset{3\cdot 5}{15}) = 3 \mid 6$ ✓ $\quad (3 \xrightarrow{\cdot 2} 6)$

(1.) EEA, lösen $36x + 15y = 3$

$a = q \cdot b + r$	x	y	$\operatorname{ggT}(..) = ax + by$
$36 = 2 \cdot 15 + 6$	$\boxed{-2}$	$\boxed{5}$	$3 = 36(-2) + 15 \cdot 5$
$15 = 2 \cdot 6 + \boxed{3}$	1	-2	$3 = 15 \cdot 1 + 6\,(-2)$
$6 = 2 \cdot \boxed{3} + 0$	0	1	$3 = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 1$

$(x_0, y_0) = (-2, 5)$

(2.) Lösung von $36x + 15y = 6$: $\quad 2 \cdot (-2, 5) = (-4, 10)$

(3.) Allg. Lsg: $(x, y) = \left(-4 + z\frac{15}{3},\ 10 - z\frac{36}{3}\right) = (-4 + z \cdot 5,\ 10 - z \cdot 12)$

2. (1.) EEA, löse $36x + 15y = 3$, siehe 1.: $(x_0, y_0) = (-2, 5)$

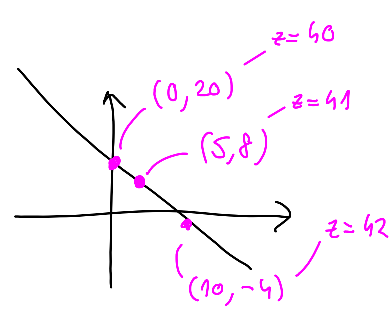
(2.) Lösung von $36x + 15y = 300$: $\quad (3 \xrightarrow{\cdot 100} 300)$ $\quad 100 \cdot (-2, 5) = (-200, 500)$

(3.) Allg. Lsg: $(x, y) = \left(\underbrace{-200 + z\underbrace{\tfrac{15}{3}}_{5}}_{>0},\ \underbrace{500 - z\underbrace{\tfrac{36}{3}}_{12}}_{>0}\right)$

(4.) positive Lösungen:

$$
\begin{aligned}
& -200 + z \cdot 5 > 0 && \wedge && 500 - z \cdot 12 > 0 \\
\iff\ & z \cdot 5 > 200 && \wedge && 500 > z \cdot 12 \\
\iff\ & z > 40 && \wedge && 41{,}66\ldots > z \\
\overset{z \in \mathbb{Z}}{\iff}\ & z \in \{41\} && \Rightarrow && \underline{z = 41}
\end{aligned}
$$

Lösung dazu $(x, y) = (-200 + \underbrace{41 \cdot 5}_{205},\ 500 - \underbrace{41 \cdot 12}_{492}) = \underline{(5, 8)}$



Eigener Lösungsversuch.

Diophantische Gleichungen, Teil 2. Berechnen Sie falls möglich alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen:

1. $13x + 7y = 1$
2. $13x + 7y = 5$
3. $25x + 35y = 45$

Lösung.

1. $\operatorname{ggT}(13, 7) = 1 \mid 1 \Rightarrow$ lösbar!

(1.) EEA:

EEA mit a = 13 und b = 7 :

a =	q *	b +	r |	x |	y |	ggT =	a *	x +	b *	y
13 =	1 *	7 +	6 |	-1 |	2 |	1 =	13 *	-1 +	7 *	2
7 =	1 *	6 +	1 |	1 |	-1 |	1 =	7 *	1 +	6 *	-1
6 =	6 *	1 +	0 |	0 |	1 |	1 =	6 *	0 +	1 *	1

ggT

$(x_0, y_0) = (-1, 2)$

(2.) ✓

(3.) Allg. Lsg.: $(x,y) = \left(-1 + z\frac{7}{1},\ 2 - z\frac{13}{1}\right) = (-1 + z\cdot 7,\ 2 - z\cdot 13),\ z \in \mathbb{Z}$

2. (1.) siehe 1.

(2.) Lösung von $13x + 7y = 5$: $5 \cdot (-1, 2) = (-5, 10)$

(3.) Allg. Lsg: $(x,y) = \left(-5 + z\frac{7}{1},\ 10 - z\frac{13}{1}\right) = (-5 + z\cdot 7,\ 10 - z\cdot 13)$

3. (1.) EEA mit a = 25 und b = 35 :

a =	q *	b +	r |	x |	y |	ggT =	a *	x +	b *	y
25 =	0 *	35 +	25 |	3 |	-2 |	5 =	25 *	3 +	35 *	-2
35 =	1 *	25 +	10 |	-2 |	3 |	5 =	35 *	-2 +	25 *	3
25 =	2 *	10 +	5 |	1 |	-2 |	5 =	25 *	1 +	10 *	-2
10 =	2 *	5 +	0 |	0 |	1 |	5 =	10 *	0 +	5 *	1

$\operatorname{ggT}(25, 35) = 5 \mid 45$ $\quad \cdot 9$

$(x_0, y_0) = (3, -2)$

(2.) Lösung von $25x + 35y = 45$: $9 \cdot (3, -2) = (27, -18)$

(3.) Allg. Lsg: $(x,y) = \left(27 + z\underbrace{\frac{35}{5}}_{7},\ -18 - z\underbrace{\frac{25}{5}}_{5}\right) = (27 + z\cdot 7,\ -18 - z\cdot 5),\ z \in \mathbb{Z}$

Eigener Lösungsversuch.

$x \geq 1,\ y \geq 1$

Diophantische Gleichungen, Teil 3. Berechnen Sie alle natürlichen Zahlen x und y mit $68x + 23y = 1000$.

Lösung.

1. EEA mit a = 68 und b = 23 :

a =	q *	b +	r |	x |	y |	ggT =	a *	x +	b *	y
68 =	2 *	23 +	22 |	-1 |	3 |	1 =	68 *	-1 +	23 *	3
23 =	1 *	22 +	1 |	1 |	-1 |	1 =	23 *	1 +	22 *	-1
22 =	22 *	1 +	0 |	0 |	1 |	1 =	22 *	0 +	1 *	1

$ggT(68,23) = 1 \mid 1000$ $\quad (x_0, y_0) = (-1, 3)$

$\cdot 1000$

2. Lösung von $68x + 23y = 1000$: $\quad 1000 \cdot (-1, 3) = (-1000, 3000)$

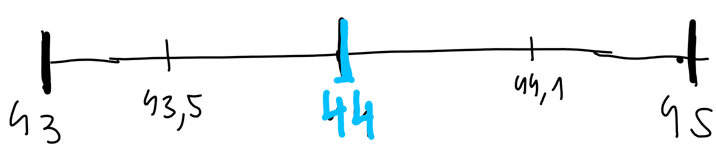
3. Allg Lsg in $\mathbb{Z}$: $\quad (x,y) = \left(-1000 + z\frac{23}{1},\ 3000 - z\frac{68}{1}\right) \quad z \in \mathbb{Z}$

$$= (-1000 + z \cdot 23,\ 3000 - z \cdot 68)$$

$x, y \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, d.h. $x, y \geq 1$:

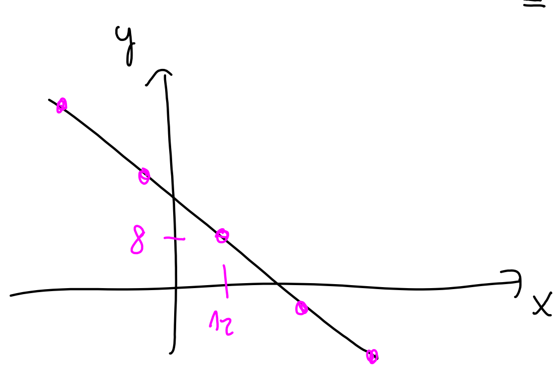
$$-1000 + z \cdot 23 \geq 1 \quad \wedge \quad 3000 - z \cdot 68 \geq 1$$

$$z \geq \underbrace{\frac{1001}{23}}_{43{,}5\ldots} \quad \wedge \quad \underbrace{\frac{2999}{68}}_{44{,}1\ldots} \geq z$$



$\Rightarrow$ Die einzige natürliche Lösung ist $(x,y) = (-1000 + \underbrace{44 \cdot 23}_{1012},\ 3000 - \underbrace{44 \cdot 68}_{2992})$

$$= (12,\ 8)$$



Eigener Lösungsversuch.