Restklassen

Restklassen - Begriff

Welche Zahlen sind mod 5 kongruent zueinander:

-10	-9	-8	-7	-6
-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
25	21	22	23	24

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{0} = \{\ldots;-15;-10;-5;0;5;10;15;\ldots\} \\
\overline{1} = \{\ldots;-9;-4;1;6;11;16;21;\ldots\} \\
\overline{2} = \{\ldots;-8;-3;2;7;12;17;22;\ldots\} \\
\overline{3} = \{\ldots;-7;-2;3;8;13;18;23;\ldots\} \\
\overline{4} = \{\ldots;-6;-1;4;9;14;19;24;\ldots\}
\end{array}\right\} \textbf{Restklassen mod 5}$$

Allgemeine <u>Def.</u> Sei $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Die Mengen

$\boxed{\overline{a} := \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \mod m \}}$ heißen **Restklassen mod m**

Jedes $x \in \overline{a}$ heißt **Repräsentant** von $\overline{a}$.

Die Menge aller Restklassen mod m bezeichnet man mit

$$\boxed{R_m := \mathbb{Z}_m := \{ \overline{a} \mid a \in \mathbb{Z} \} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{a-1} \}}$$

$\boxed{\text{Ü}}$ a) Geben Sie R_5 bzw. $\mathbb{Z}_5$ an.

b) Geben Sie ein Repräsentanten von $\overline{4} \in \mathbb{Z}_5$ an.

c) Machen Sie sich klar: $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4} = \mathbb{Z}$.

a.) $R_5 = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\}$ $\neq \mathbb{Z}$ sondern [illegible]

b.) $4; 9; 14; 19$

Restklassen – Gleichheit von Restklassen

Wann sind zwei Restklassen gleich?

Satz. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$: $\boxed{\overline{a} = \overline{b} \iff a \equiv b \mod m}$

(ohne Beweis.)

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\overline{5} = \overline{8}$ für $\overline{5}, \overline{8} \in \mathbb{Z}_3$.

b) $\overline{6} = \overline{31}$ für $\overline{6}, \overline{31} \in \mathbb{Z}_9$.

a.) $5 \equiv 8 \mod 3$

$1 \cdot 3 + \underline{2} = 5$

$2 \cdot 3 + \underline{2} = 8$

$\Rightarrow 2 = 2$

b.) $6 \equiv 31 \mod 9$

$0 \cdot 9 + \underline{6} = 6$

$3 \cdot 9 + \underline{4} = 31$

$\Rightarrow 6 \neq 4$

Restklassen – Rechenregeln

Wie rechnet man mit Restklassen? Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$:

$$\boxed{\bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a+b}}$$

z.B. $\bar{2} + \bar{3} \overset{\mathbb{Z}_5}{=} \bar{5} = \bar{0}$

$\overline{1022} + \overline{753} = \overline{1775} = \bar{5} = \bar{0}$

Ist das „wohldefiniert" (macht das Sinn)? Bzw. ist diese Def. unabhängig vom Repräsentanten?

Ja

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}}$$

z.B. $\overline{17} \cdot \overline{12} \overset{\mathbb{Z}_5}{=} \overline{204} = \bar{4}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$

Wohldefiniert?

Ja

Ü Berechnen Sie $7^{98} \bmod 5$, $7^{99} \bmod 5$, $7^{99} \bmod 10$.

$7^{98} \equiv 2^{98} \equiv (2^2)^{49} \equiv 4^{49} \equiv -1^{49} \equiv -1 \equiv 4 \mod 5$

$7^{99} \equiv 7 \cdot 7^{98} \equiv 7 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \equiv 3 \mod 5$

$7^{99} \equiv 7 \cdot 7^{98} \equiv 7 \cdot (7^2)^{49} \equiv 7 \cdot 49^{49} \equiv 7 \cdot (-1)^{49} \equiv 7 \cdot (-1) = -7$
$\equiv 3 \mod 10$

Restklassen – Quersummenregeln

Die Quersumme von 198 ist $1+9+8=18$.

Vielleicht kennen Sie die Regel: $9 \mid 198 \iff 9 \mid 18$

Quersumme

Ü Ist 2781 durch 9 teilbar? mod 9

$$2781 \equiv 2\cdot 1000 + 7\cdot 100 + 8\cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$$
$$\equiv 2\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 1$$
$$\equiv 2\cdot 1^3 + 7\cdot 1^2 + 8\cdot 1 + 1$$
$$= 2+7+8+1 = 18$$

Sei $a \in \mathbb{Z}$ in der Dezimaldarstellung gegeben, also $a = (a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0) = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$, dann heißt

$Q(a) := \sum_{i=0}^{k} a_i$ **Quersumme**.

Ü Zeigen Sie: a) $\boxed{9 \mid a \iff 9 \mid Q(a)}$

b) $\boxed{3 \mid a \iff 3 \mid Q(a)}$

a.) $a \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 1^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \equiv Q(a) \mod 9$

b.) siehe a.)

$\boxed{Ü}$ Zeigen Sie: $11 \mid 49.384 \iff 11 \mid \underbrace{4-9+3-8+4}_{\text{alternierende Quersumme}}$