Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit

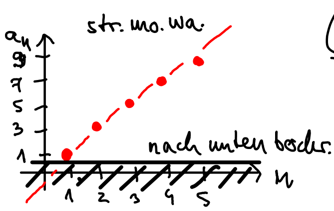
* **Folgen, Teil 1.** Geben Sie für jede der unten aufgeführten Folgen die ersten fünf Glieder an. Implementieren Sie dann die Folgen in Java und geben Sie jeweils die ersten 100 Glieder auf der Console aus. Prüfen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit: $(n \geq 1)$

1. $a_n = 2n - 1$.
2. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.
3. $a_n = (-1)^n 2n$.
4. $a_n = a_{n-1} + 3$ für $n \geq 2$ mit $a_1 = 2$.
5. $a_n = 9$.
6. $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ für $n \geq 3$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
7. $a_n = \frac{n^2+4}{n}$.

Lösung.

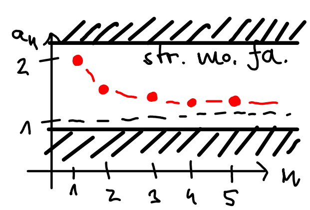
1.

n	a_n
1	$2\cdot1-1=1$
2	$2\cdot2-1=3$
3	$2\cdot3-1=5$
4	$2\cdot4-1=7$
5	$2\cdot5-1=9$



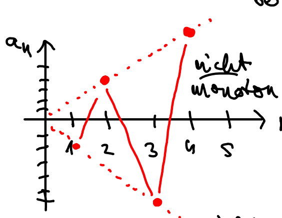
2.

n	a_n
1	2
2	1,5
3	$1,\overline{3}$
4	1,25
5	1,2



3.

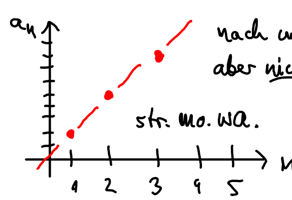
n	a_n
1	-2
2	$+4$
3	-6
4	$+8$
5	-10



4.

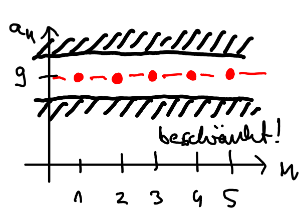
n	a_n
1	2
2	$a_1+3=5$
3	$a_2+3=8$
4	$a_3+3=11$
5	$a_4+3=14$

$+3$, $+3$, ⋮



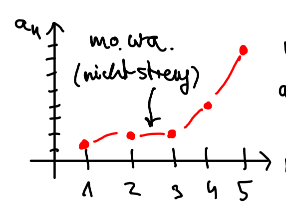
5.

n	a_n
1	9
2	9
3	9
4	9
5	9



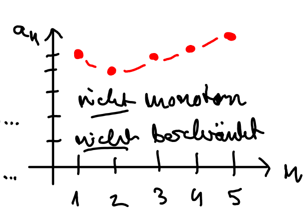
6.

n	a_n
1	1
2	2
3	$a_2\cdot a_1=2\cdot1=2$
4	$a_3\cdot a_2=2\cdot2=4$
5	$a_4\cdot a_3=4\cdot2=8$



7.

n	a_n
1	$(1^2+4)/1=5$
2	$(2^2+4)/2=4$
3	$(3^2+4)/3=13/3\approx4,\ldots$
4	$(4^2+4)/4=5$
5	$(5^2+4)/5=29/5\approx5,\ldots$



Eigener Lösungsversuch.

Folgen, Teil 2. Prüfen Sie die Folgen auf Konvergenz und geben Sie ggf. einen Grenzwert an:

1. $a_n = \frac{2n+1}{4n}$.
2. $a_n = \frac{n^2+4}{n}$.
3. $a_n = \frac{n^2+4n-1}{n^2-3n}$.
4. $a_n = \frac{1}{3n^2}(1-\frac{1}{2^n})$.
5. $a_n = 4(3^{-n}+3)+n^2$.
6. $a_n = \frac{4n^3-5n^2+1}{7n^3-2n}$.
7. $a_n = \frac{-4(1+3^{-n})}{\sqrt{n}}$.
8. $a_n = -3^n - \frac{1}{n}\cos(n)$.

Lösung.

1. $a_n = \frac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{4\cancel{n}} = \frac{2+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (konvergent)

2. $a_n = \frac{n^{\cancel{2}}(1+\frac{4}{n^2})}{\cancel{n}} = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(1+\underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\to 0})}_{\to 1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (divergent, bestimmt divergent)

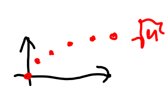
3. $a_n = \frac{\cancel{n^2}(1+\overbrace{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}^{\to 0})}{\cancel{n^2}(1-\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0})} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$ (konvergent)

4. $a_n = \underbrace{\frac{1}{3n^2}}_{\to 0}\underbrace{(1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0})}_{\to 1} \longrightarrow 0\cdot 1 = 0$ (konvergent)

5. $a_n = \underbrace{4\underbrace{(\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\to 0}+3)}_{\to 3}}_{\to 12} + \underbrace{n^2}_{\to\infty} \longrightarrow \infty$ (bestimmt divergent)

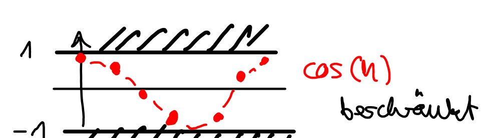
6. $a_n = \frac{\cancel{n^3}(4-\overbrace{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}^{\to 0})}{\cancel{n^3}(7-\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0})} \longrightarrow \frac{4}{7}$

7. $a_n = \frac{\overbrace{-4(1+\overbrace{\frac{1}{3^n}}^{\to 0})}^{\to -4}}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty}} \longrightarrow 0$



8. $a_n = \underbrace{-3^n}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{\overset{\text{beschränkt}}{\cos(n)}}{\underbrace{n}_{\to\infty}}}_{\to 0} \longrightarrow -\infty$

$\boxed{\text{"}\frac{\text{beschränkt}}{\infty}\text{"} \to 0}$



Eigener Lösungsversuch.

Lottogewinn. Der Lebenskünstler Gustav Glück überlegt sich an seinem 20. Geburtstag: “Wenn ich im Lotto gewinne, möchte ich nicht mehr arbeiten. Um nicht mehr arbeiten zu müssen, brauche ich zu Beginn jeden Jahres 20.000 Euro.”

1. Wie viel muss Gustav gewinnen, damit er ausschließlich von den Zinsen leben kann?
2. Gustav geht davon aus, dass er als glücklicher Mensch 90 Jahre alt wird. Wie viel muss Gustav gewinnen, wenn das Kapital an seinem 91-ten Geburtstag aufgebraucht sein darf. Schreiben Sie dazu das Kapital als Folge. Geben Sie den sog. Rentenplan in einer Excel-Datei aus.

Anmerkung: Gehen Sie für diese beiden Aufgaben davon aus:

- dass der Lottogewinn zum Jahresbeginn ausbezahlt wird,
- dass Herr Glück am 1. Januar Geburtstag hat und
- dass der Jahreszinssatz 5% beträgt.

Lösung. L = Lottogewinn

1. $$\underbrace{(L - \underbrace{20.000}_{\text{nimmt er sofort weg!}}) \cdot 5\%}_{\text{Zins}} = 20.000 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{20.000}{0{,}05} + 20.000 = 420.000.$$

2.

Jahr	Alter	Kapital
0	20	$K_0 = L - 20.000$
1	21	$K_1 = K_0 + \underbrace{K_0 \cdot 0{,}05}_{\text{Zins}} - 20.000 = 1{,}05 \cdot K_0 - 20.000 = 1{,}05\,L - 20.000\,(1{,}05 + 1)$
2	22	$K_2 = 1{,}05 \cdot K_1 - 20.000 = 1{,}05\,(1{,}05 \cdot L - 20.000\,(1{,}05 + 1)) - 20.000$
		$= 1{,}05^2 \cdot L - 20.000\,(1{,}05^2 + 1{,}05 + 1)$
	$\vdots$	
n	$20+n$	$K_n = \underbrace{1{,}05 \cdot K_{n-1} - 20.000}_{\text{rekursiv für Excel}} = 1{,}05^n \cdot L - 20.000\,\underbrace{(1{,}05^n + \ldots + 1{,}05 + 1)}_{= \frac{1{,}05^{n+1} - 1}{1{,}05 - 1}}$
	$\vdots$	
70	90	$K_{70} = \underbrace{20.000}_{\text{Kapital + Zins vom Vorjahr}} - \underbrace{20.000}_{\text{nimmt für letztes Lebensjahr bis 91 20.000}} = 0$

|| geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

explizite Formel! $\to L$

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} K_{70} = 1{,}05^{70} \cdot L - 20.000\,\frac{1{,}05^{71}-1}{0{,}05} \quad \Rightarrow L = \frac{\frac{20.000}{0{,}05}\left(1{,}05^{71}-1\right)}{1{,}05^{70}} \approx \underline{406.853{,}53}$$

(siehe Excel!)

Eigener Lösungsversuch.

Grenzwerte von Funktionen. Berechnen Sie den Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2+1$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{4x-8}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^2+4x-8}{x^2+2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^2-9x}{2x^2-3}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^2+5x-7}{2x^3-1}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)}$ $(n\neq 0)$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$

Lösung.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{2x^2+1}_{\text{stetig}} = 2\cdot 0^2+1 = 1$

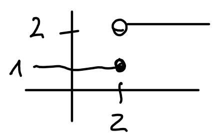
$2x^2+1 \xrightarrow{x\to 0} 2\cdot 0^2+1 = 1$

$\boxed{\text{Notation aufpassen!}}$ ⚠

~~$\lim 2x^2+1 \to 1$~~

~~$\lim 2x^2+1 = 2x^2+1 \to 1$~~

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\underbrace{x^2+1}_{\text{stetig}}} = \frac{1^2-1}{1^2+1} = \frac{0}{2} = 0$



$f(x) = \begin{cases} 2 & x>2 \\ 1 & x\le 2 \end{cases}$ nicht stetig in $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht!

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} \underbrace{x+2}_{\text{stetig}} = 2+2 = 4$

[ODER „$\frac{0}{0}$" mit l'H: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{1} = \frac{2\cdot 2}{1} = 4$]

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(3x+1)}{4\cancel{(x-2)}} = \frac{3\cdot 2+1}{4} = \frac{7}{4}$ [ODER mit l'H „$\frac{0}{0}$"]

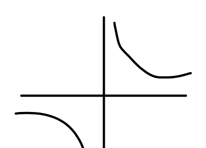
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^2+4x-8}{x^2+2x-3} \underset{„\frac{0}{0}"}{\overset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{8x+4}{2x+2} = \frac{8\cdot 1+4}{2\cdot 1+2} = \frac{12}{4} = 3$ [ODER: Polynomdivision mit $(x-1)$]

NST 1

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^2-9x}{2x^2-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(5-\overbrace{\frac{9}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x^2}(2-\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0})} = \frac{5}{2}$ [ODER: l'H „$\frac{\infty}{\infty}$"]

höchste Potenz ausklammern!

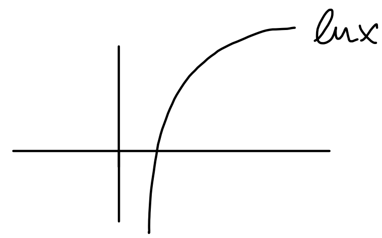
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^2+5x-7}{2x^3-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}(4+\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{7}{x^2}}^{\to 0})}{x^{\cancel{3}}(2-\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0})} = \underbrace{\left(\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}\right)}_{0} \cdot \frac{4}{2} = 0$



[ODER: l'H „$\frac{+\infty}{-\infty}$"]

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)}$ $\quad n \neq 0$ sonst nicht definiert, da Nenner $= \ln(\underbrace{x^0}_{1}) = 0$!

~~Eigener Lösungsversuch~~.



Nenner: $\ln(x^n) \overset{n\neq 0}{=} \begin{cases} \ln(\underbrace{x^n}_{\to\infty}) \longrightarrow \infty & n>0 \\ \ln(\underbrace{x^n}_{\to 0}) \longrightarrow -\infty & n<0 \end{cases}$

Kettenregel!

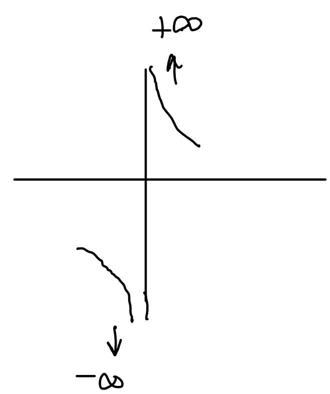
$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)}}{\text{„}\pm\infty\text{“}} \underset{\text{„}\frac{\textcircled{?}}{\pm\infty}\text{“}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^m+1}\,\overbrace{(x^m+1)'}^{m x^{m-1}}}{\frac{1}{x^n}\,\underbrace{(x^n)'}_{n\cdot x^{n-1}}} = \frac{m}{n}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^{m-1}}{x^m+1}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\frac{x^{n-1}}{x^n} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{m}{n} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x^m}{x^m+1}}_{\underbrace{\frac{\cancel{x^m}}{\cancel{x^m}(1+\underbrace{\frac{1}{x^m}}_{\to 0})}}_{=1}} = \underline{\underline{\frac{m}{n}}}.$$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \cos x}{x} = \text{„}\dfrac{1}{0}\text{“}$? kein l'H anwendbar!

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\overbrace{\sin x}^{\nearrow 0} + \overbrace{\cos x}^{\nearrow 1}}^{\nearrow 1}}{\underset{\searrow 0^+}{x}} = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\sin x + \cos x}^{\nearrow 1}}{\underset{\searrow 0^-}{x}} = -\infty$$



d.h. Grenzwert existiert nicht!

Stetigkeit. Welche Funktionen sind in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

1. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ $\quad D = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x}{2+x^2}$ $\quad D = \mathbb{R}$
3. $f(x) = e^{-3x}$ $\quad D = \mathbb{R}$
4. $f(x) = e^x + \sin x$ $\quad D = \mathbb{R}$

Lösung.

Stetigkeit: Alle elementaren Fkten (Polynome, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sqrt[a]{x}$, ...) sind stetig (auf dem Def.-Bereich) & auch deren Summe/Differenz/Produkt/Quotient/Verknüpfung!

1. Polynom ✓

2. Quotient von stetig Polynomen ✓

3. e^x & $-3x$ stetig, so auch Verknüpfung ✓

4. Summe stetiger Fkten ist stetig ✓

Eigener Lösungsversuch.