Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Taylorpolynome und Potenzreihen

Fragen?

*** Bedeutung Taylorpolynom.**

a) Was ist das Taylorpolynom 1. Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

b) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

c) Wie lautet die Formel für das Taylorpolynom n-ten Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

*** Taylorpolynome Sinus.** Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grade $n = 1$, 3 ,5 ,7. (siehe dazu Bild auf Homepage)
Vergleichen Sie dann $T_1(0,5), T_3(0,5), T_5(0,5), T_7(0,5)$ mit $f(0,5)$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Taylorpolynome Cosinus. Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grad $n = 0$,2 ,4. (siehe dazu Bild auf Homepage)

Lösung.

$$T_4(x) = \underbrace{\cos(x_0)}_{} - \underbrace{\sin(x_0)(x-x_0)}_{} - \underbrace{\frac{\cos(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{} + \underbrace{\frac{\sin(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{} + \underbrace{\frac{\cos(x)}{4!}(x-x_0)^4}_{}$$

$$1 \quad - \quad 0 \quad - \quad \frac{1}{2}x^2 \quad + \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{24}x^4$$

T_0

T_1

T_2

T_3

T_4

Eigener Lösungsversuch.

Taylorpolynome Logarithmus. Berechnen Sie T_1, T_2, T_3 von $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$. (siehe dazu Bild auf Homepage)

Lösung.

$$T_3 = \ln(1) + 1(x-1) + -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$= \ln(1) + x - 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - 0{,}5 + \frac{1}{3}\left[(x^2 - 2x + 1)(x-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1{,}5 + \ln(1) + \frac{1}{3}\underbrace{(x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1)}_{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1{,}5 + \ln(1) + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \ln(1)$$

Eigener Lösungsversuch.

* **Konvergenzradius einer Potenzreihe.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Taylorreihe. Geben Sie die Taylorreihe von folgenden Funktionen an und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe konvergiert (vgl. Bilder auf Homepage):

a) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

Lösung.

a.) $T(x) = \frac{+1}{1!}x^1 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{+1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Taylorreihe von $\sin(x)$ an $x_0 = 0$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k (2k+3)!}{(-1)^{k+1}(2k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)(2k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}}{(-1)\,\cancel{(2k+1)(2k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+3)(2k+2)}{-1} \right| = \lim_{k\to} \left| \underbrace{(2k+3)}_{\infty}\underbrace{(2k+2)}_{\infty} \right| = \infty$$

d.h. $T(x)$ konvergiert gegen $\sin(x)$ für $x \in$ „$]x_0 - \infty; x_0 + \infty[$" $= \mathbb{R}$

d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

b.) $T(x) = \frac{+1}{0!}x^0 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ Taylorreihe vom $\cos(x)$ an $x_0 = 0$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} = \underbrace{(2k+2)}_{\infty}\underbrace{(2k+1)}_{\infty} = \infty$$

, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) =$

c.) $T(x) = \frac{+1}{1}(x-1)^1 + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{+1}{3}(x-1)^3 + \dots$

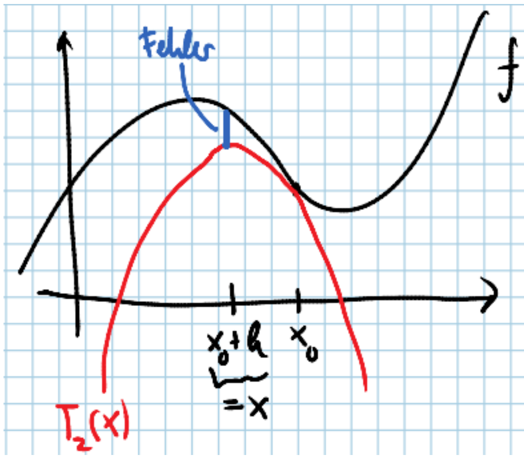
$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ Taylorreihe von $\ln(x)$ an $x_0 = 1$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{(-1)^{(k+1)+1}}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = \lim_{k\to\infty} 1 + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}$$

$$\forall x \in]\overset{x_0}{1} - \overset{r}{1} ; \overset{x_0}{1} + \overset{r}{1}[=]0 ; 2[: \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

Eigener Lösungsversuch.

Restglied und absoluter Fehler



Approximation von f an x_0 durch $T_n(x)$:

$f(x_0+h) \approx T_n(x_0+h)$ für kleine h

$f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + R_n(x_0+h)$

also absolute Fehler $= |R_n(x_0+h)| = |f(x_0+h) - T_n(x_0+h)|$

Restgliedabschätzung

Diesen absoluten Fehler kann man nach oben abschätzen:

$|R_n(x)| \leq C \cdot$ ________________ mit C ist obere Schranke von ____________ in ____________

Taschenrechner-Algorithmus. Was ist $\sin(0,5)$?

a) Approximieren Sie dies durch das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Schätzen Sie den Fehler ab (Restgliedabschätzung).

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.