Copyright © **Michael Helbig**, licensed under creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de

more: bigdev.de/teaching

Diophantische Gleichungen

Diophantische Gleichungen – Erweiterter Eukl. Alg.

<u>Ziel:</u> Wir wollen Gleichungen wie $2 \cdot x + 1 \cdot y = 1$ lösen. Und das mit ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ (wir suchen <u>nicht</u> reelle Lösungen wie z.B. $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$.) Solche Gleichungen $\boxed{ax + by = c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ heißen **diophantische Gleichungen**. Lösungen von $2x + 1y = 1$ sind z.B. $(x,y) = (0,1), (1,-1), (2,-3), \dots$ (∞-viele Lösungen).

Weitere Beispiele:
- $6x + 9y = 18$ ebenfalls ∞-viele Lösungen
- $6x + 9y = 14$ keine Lösungen?

<u>Frage:</u> Wann gibt es Lösungen? Lösungsformel?

<u>Beobachtung:</u> Falls (x,y) eine Lösung ist, so muss $ggT(a,b) \mid c$ gelten!

Wir lösen zuerst die Gleichung $\boxed{ax + by = ggT(a,b)}$

Dies geht mit dem **erweiterten euklidischen Algorith.** **(EEA)**!

z.B. $128x + 34y = \mathrm{ggT}(128, 34) = 2$

a	$= q \cdot b$	$+ r$
128	$= 3 \cdot 34$	$+ 26$
34	$= 1 \cdot 26$	$+ 8$
26	$= 4 \cdot 8$	$+ \boxed{2}$ ggT
8	$= 4 \cdot 2$	$+ 0$

$$
\begin{aligned}
2 &= 26 - 3 \cdot 8 \\
&= 26 - 3 \cdot (34 - 1 \cdot 26) \\
&= 26 - 3 \cdot 34 + 3 \cdot 26 \\
&= (-3) \cdot 34 + 4 \cdot 26 \\
&= (-3) \cdot 34 + 4 \cdot (128 - 3 \cdot 34) \\
&= 4 \cdot 128 - 15 \cdot 34
\end{aligned}
$$

Allgemein:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_i &= q_i b_i + r_i \\
\underbrace{a_{i+1}}_{b_i} &= q_{i+1} \underbrace{b_{i+1}}_{r_i} + r_{i+1}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow b_{i+1} = r_i = a_i - q_i b_i
$$

$$
\mathrm{ggT}(a,b) = \underbrace{a_{i+1}}_{b_i} x_{i+1} + \underbrace{b_{i+1}}_{(a_i - q_i b_i)} \cdot y_{i+1} = a_i \cdot (y_{i+1}) + b_i \cdot (x_{i+1} - q_i \cdot y_{i+1})
$$

d.h.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_i &= y_{i+1} \\
y_i &= x_{i+1} - q_i y_{i+1}
\end{aligned}
}
$$

Nochmal das Beispiel:

a_i	$= q_i \cdot b_i$	$+ r_i$	x_i	y_i	$\mathrm{ggT}(a,b) = a_i x_i + b_i y_i$
128	$= 3 \cdot 34$	$+ 26$	4	$-3-3\cdot 4 = -15$	$2 = 4 \cdot 128 + (-15) \cdot 34$
34	$= 1 \cdot 26$	$+ 8$	-3	$1 - 1 \cdot (-3) = 4$	$2 = 34 \cdot (-3) + 26 \cdot 4$
26	$= 3 \cdot 8$	$+ 2$	1	$0 - 3 \cdot 1 = -3$	$2 = 26 \cdot 1 + 8 \cdot (-3)$
8	$= 4 \cdot 2$	$+ 0$	0	1	$2 = 8 \cdot 0 + 2 \cdot 1$

<u>Satz.</u> Mit dem EEA findet man immer eine Lösung von:

$$\boxed{ax + by = ggT(a,b)}$$

$\boxed{\text{Ü}}$ Bestimmen Sie eine Lösung von $24x + 30y = 6$.

$ggT(24;30)$	x	y	
$30 = 1 \cdot 24 + 6$	1	$0 - 1 \cdot 1 = -1$	$6 = 30 \cdot 1 + 24 \cdot (-1)$
$24 = 4 \cdot 6 + 0$	0	1	$6 = 0 \cdot 24 + 1 \cdot 6$

Diophantische Gleichungen – Lösbarkeit

Satz. $\boxed{ax + by = c \text{ ist lösbar} \iff ggT(a,b) \mid c}$

Beweis.

"$\Rightarrow$" Sei $(x_0; y_0)$ eine Lösung der Gleichung, d.h. $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$

$ggT(a;b) \mid (a \cdot x_0 + b \cdot y_0) \Rightarrow ggT(a;b) \mid c$

"$\Leftarrow$" $ggT(a;b) \mid c \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: \; c = q \cdot ggT(a;b)$

außerdem existiert $(x_0; y_0)$ mit $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = ggT(a;b)$

$$c = q \cdot (a \cdot x_0 + b \cdot y_0)$$
$$= a \cdot (q \cdot x_0) + b \cdot (q \cdot y_0)$$

Folgerung. $\boxed{ax + by = 1 \text{ lösbar} \iff ggT(a,b) = 1}$

Beweis. $ax + by = 1$ lösbar $\overset{\text{Satz}}{\iff} ggT(a,b) \mid 1 \iff ggT(a,b) = 1$ $\square$

Diophantische Gleichungen - Lösungen

Frage: Wie findet man alle Lösungen, wenn man eine Lösung (x_0, y_0) gefunden hat?

Antwort: $$\boxed{L = \left\{ \left(x_0 + \frac{z \cdot b}{ggT(a;b)}, \; y_0 - \frac{z \cdot a}{ggT(a;b)} \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Beweis. Jede Lösung aus L löst die diophantische Gleichung:

$$a \cdot \left(x_0 + \frac{z \cdot b}{ggT(a;b)}\right) + b \cdot \left(y_0 - \frac{z \cdot a}{ggT(a;b)}\right) = a \cdot x_0 + \frac{a \cdot z \cdot b}{ggT(a;b)} + b y_0 - \frac{b z a}{ggT(a;b)} = a x_0 + b x_0 = c$$

Angenommen (x, y) ist eine weitere Lösung:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$$

$$a \cdot (x - x_0) + b (y - y_0) = 0$$

$$a \cdot (x - x_0) = b \cdot (y_0 - y) \quad \Big| : ggT(a;b)$$

$$\frac{a}{ggT(a;b)} (x - x_0) = \frac{b}{ggT(a;b)} \cdot (y_0 - y)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{ggT(a;b)} \,\Big|\, (x - x_0) \Rightarrow z \cdot \frac{b}{ggT(a;b)} = x - x_0 \quad x = x_0 + \frac{z b}{ggT(a;b)}$$

$$\frac{a}{ggT(a;b)} \cdot z \cdot \frac{b}{ggT(a;b)} = \frac{b}{ggT(a;b)} \cdot (y - y_0) \Rightarrow y_0 - y = \frac{a}{ggT(a;b)} \cdot z \Rightarrow y = y_0 - \frac{a z}{ggT(a;b)}$$

Diophantische Gleichungen – Übung

Ü Geben Sie alle Lösungen von $168x + 238y = 126$ an.

b	a	q	r	y	x
238	168	1	70	5	-7
168	70	2	28	-2	5
70	28	2	$\boxed{14}$	1	-2
28	14	2	0	0	1

$168 \cdot (-7) + 238 \cdot 5 = 14$

$168 \cdot (-63) + 238 \cdot 45 = 126$

$$\{(-63 + z \cdot 17 ; 45 - 12z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$