6. Übungsblatt zur Vorlesung
„Stochastik und Numerik“

Aufgabe 6.1 *(Gleichverteilung)*

Berechnen Sie die Varianz der $U_{]a,b[}$-Verteilung.

Aufgabe 6.2 *(Summe von normalverteilten Zufallsvariablen)*

In einer Anlage wird Milch in 1-Liter Flaschen abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei. Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert 1.01 (Liter) und der Standardabweichung 0.01. Das Flaschenvolumen Y variiert unabhängig davon ebenfalls gemäß einer Normalverteilung mit Erwartungswert 1.06 (Liter) und Standardabweichung 0.02.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft eine Flasche beim Befüllen über?

Aufgabe 6.3

Zeigen Sie, dass für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X gilt:

$$P(-a \leq X \leq a) = 2P(X \leq a) - 1.$$

Aufgabe 6.4 *(Normalverteilung)*

Die Lebensdauer eines Bildschirms sei eine normalverteilet Zufallsvariable mit Erwartungswert 8.2 Jahre und Standardabweichung 1.4 Jahre.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert ein Bildschirm länger als 10 Jahre, nicht länger als 5 Jahre bzw. zwischen 5 und 10 Jahren?

(b) Bestimmen Sie das 10%- und das 90%-Quantile der Lebensdauer. Wie sind diese Werte zu interpretieren?

(c) Sie kaufen einen 3 Jahre alten gebrauchten Bildschirm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert er noch länger als 5 Jahre?
Hat die Normalverteilung ein Gedächtnis?

Aufgabe 6.5 *(Poissonverteilung)*

Einen Server erreichen Anfragen gemäß einer Poissonverteilung mit einem Erwartungswert von 10 pro Stunde. Bestimmen Sie die Länge eines Zeitintervalls (in Sekunden), so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 während dieses Intervalls keine Anfrage eintrifft.

Aufgabe 6.6 *(Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit R)*

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(X = 1)$ mit $X \sim N_{0,1}$

b) $P(X = 1)$ mit $X \sim U_{\{0,1\}}$

c) $P(X = 3)$ mit $X \sim H_{10,20,5}$

d) $P(X = 3)$ mit $X \sim B_{5,0.5}$

e) $P(X < 6)$ mit $X \sim P_2$

f) $P(X \in]-2, 3[)$ mit $X \sim N_{0,4}$

g) $P(X \geq 1)$ mit $X \sim Exp_2$

h) $P(X \in]6, 7[)$ mit $X \sim \chi^2_4$

Aufgabe 6.7 *(Simulation mit R)*

Simulieren Sie 20 000 normalverteilte Zufallszahlen mit Erwartungswert 4 und Varianz 10 und berechnen Sie die Folge der Duchschnitte:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= x_1 \\
\overline{x}_2 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\
\overline{x}_3 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\
&\ldots \\
\overline{x}_{20\,000} &= \frac{1}{20\,000}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{20\,000})
\end{aligned}
$$

Tragen Sie die Folge der Durchschnitte über dem Index auf. Zeichnen Sie in das gleiche Diagramm noch zwei weitere Versuche mit jeweils 20 000 normalverteilten Zufallszahlen mit Erwartungswert 4 und Varianz 10 mit verschiedenen Farben ein.
Was ist zu beobachten?

Hinweise:

a) *Einen Vektor S mit den kumuliereten Summen seiner Einträge erhalten Sie mit dem Befehl cumsum (). Durch welchen Vektor müssen Sie S teilen, um die gewünschten Durchschnitte zu erhalten?*

b) *Um die starken Ausreißer zu Beginn nicht die Graphik dominieren zu lassen, ist es sinnvoll die y-Achse mit der plot-Option ylim = c(3,5) zu beschränken.*