Ableitung und Anwendungen

$\lim\limits_{h\to 0}$ Sekantensteigung : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten. Berechnen Sie unter Verwendung des Differenzenquotienten die Ableitungen der Funktionen:

* 1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \cos(x)$

3. $f(x) = \sqrt{x}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Hinweise:
zu 2.: Verwenden Sie die Additionstheoreme, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$. (siehe Vorlesung: sin)
zu 3.: Erweitern Sie den Differenzenquotient mit $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$.

Lösung.

1.
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-\cancel{h}}{(x+h)\cdot x}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)\cdot x} = -\frac{1}{(x+0)\cdot x} = -\frac{1}{x^2}.$$

2.
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{[\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)]}^{\text{Add.th.}} - \cos x}{h}$$
$$= \cos(x)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} - \sin(x)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1} = -\sin(x).$$

3.
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}}_{\text{Hinweis!}} \overset{\text{3. Bin. Formel}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h - \cancel{x}}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Eigener Lösungsversuch.

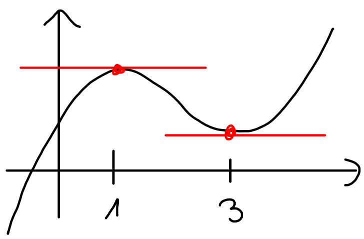
d.h. Steigung $= 0$, d.h. $f'(x) = 0$

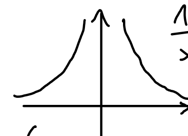
* **Waagrechte Tangente.** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Stellen mit waagerechter Tangente:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
2. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
3. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Lösung.

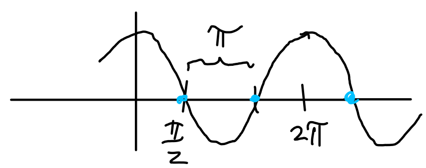
1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3} = \frac{12 \pm \overbrace{\sqrt{36}}^{6}}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$



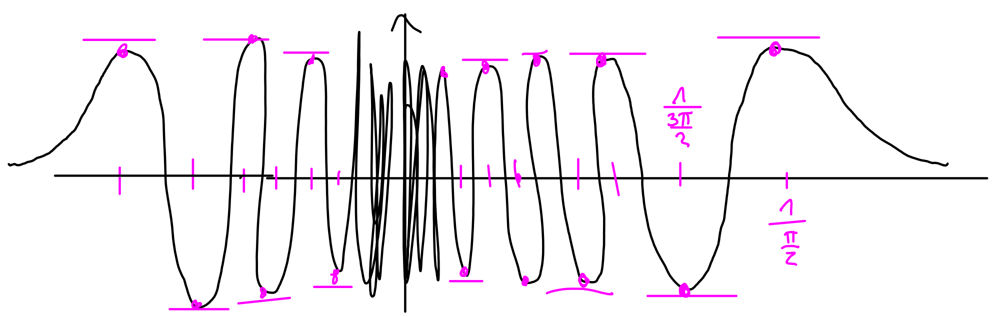


2. $f'(x) = \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\neq 0} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \overset{\text{NST cos}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

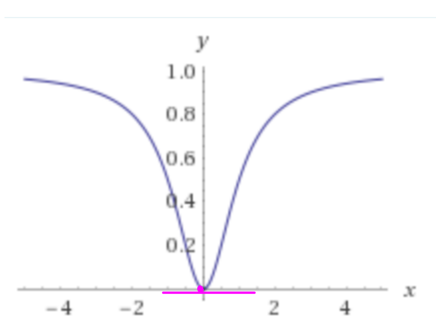


$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \; k \in \mathbb{Z}$



3. $f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x \cdot [1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}]}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \overset{\cdot (1+x^2)^2}{\Longrightarrow} 2x = 0$

$\Rightarrow x = 0.$



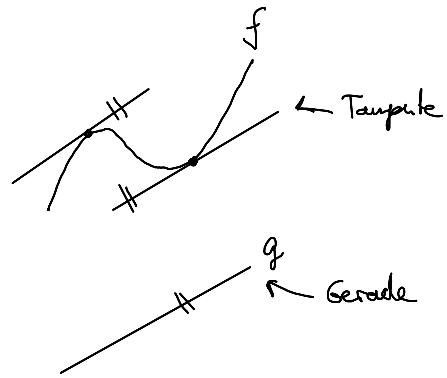
Eigener Lösungsversuch.

Tangentensteigung. An welchen Stellen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

verläuft die Tangente parallel zu der Geraden

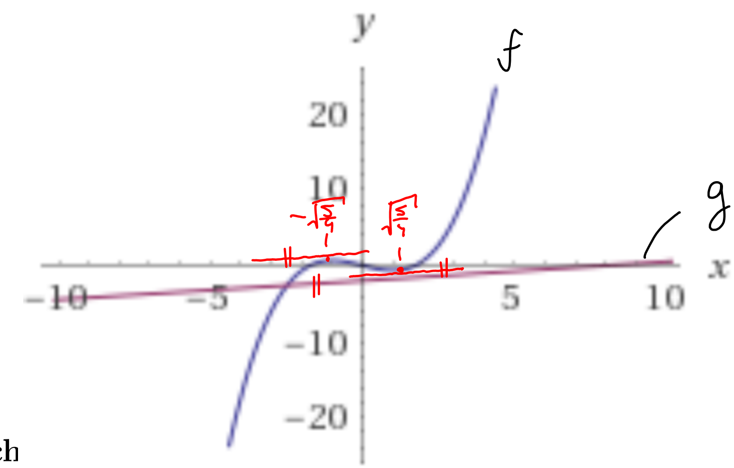
$$g(x) = \frac{1}{4}x - 2?$$



Lösung.

Suche x, so dass Steigung $f'(x)$ = Steigung $g'(x)$ von g

d.h. $f'(x) = \underbrace{g'(x)}_{\frac{1}{4}} \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{4} \overset{+1}{\Longrightarrow} x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \underbrace{\sqrt{\frac{5}{4}}}_{1{,}118}$



Eigener Lösungsversuch

Monotonie- und Krümmungsverhalten. In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen (streng) monoton fallend/wachsend? In welchen Intervallen sind die Funktionen links/rechts gekrümmt?

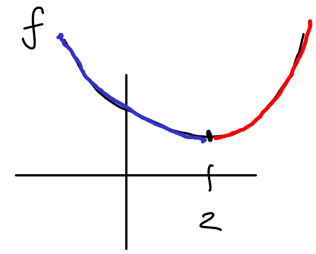
* 1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$,
2. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$,
3. $f(x) = xe^{-x}$,
4. $f(x) = \ln(\frac{1}{x}) \qquad (x > 0)$.

Lösung.

1. Monotonie: $f'(x) = 2x - 4 \overset{!}{=} 0 \iff x = 2$

$x<2$: $f'(x) = 2\underset{<2}{x} - 4 < 0$ d.h. str. mo. fa.

$x>2$: $f'(x) = 2\underset{>2}{x} - 4 > 0$ d.h. str. mo. wa.



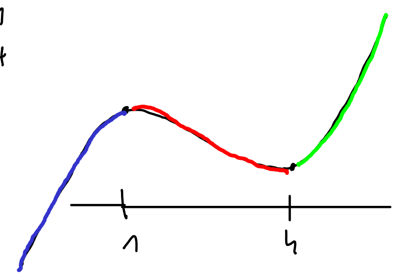
Krümmung: $f''(x) = 2 > 0$, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)$ linksgekrümmt

2. Monotonie: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \ldots = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

$x<1$: $f'(x) = \frac{1}{2}\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(x-4)}_{<0} > 0$ str. mo. wa

$1<x<4$: $>0 \quad <0 \quad < 0$ str. mo. fa

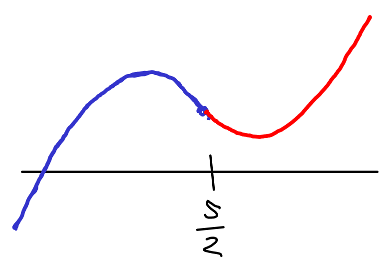
$x>4$: $>0 \quad >0 \quad > 0$ str. mo. wa.



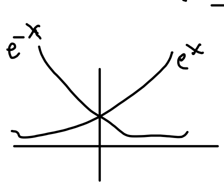
Krümmung: $f''(x) = x - \frac{5}{2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$x<\frac{5}{2}$: $f''(x) = x - \frac{5}{2} < 0$ rechts gekr.

$x>\frac{5}{2}$: > 0 links gekr.



3. Monotonie: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}(1-x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$



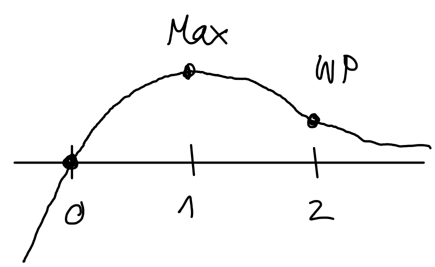
$x<1$: $f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(1-x)}_{>0} > 0$ str. mo. wa.

$x>1$: $<0 \quad < 0$ str. mo. fa.

Krümmung: $f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}(\underbrace{-1+x-1}_{x-2}) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$

$x<2$: $f''(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(x-2)}_{<0} < 0$ rechtsgekr.

$x>2$: $>0 \quad > 0$ linksgekr.

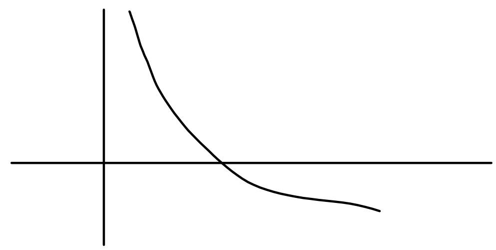


[$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{l'H}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} = 0$]

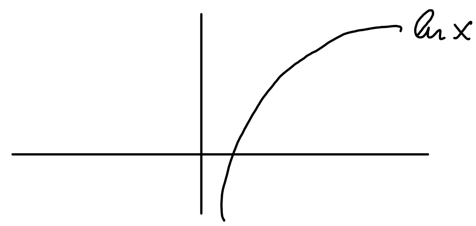
Eigener Lösungsversuch.

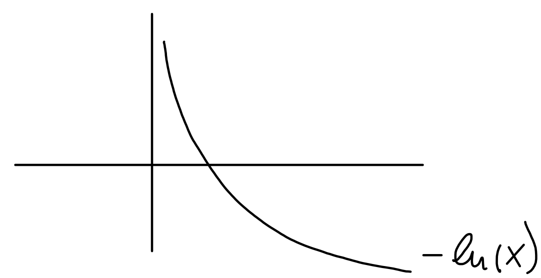
4. <u>Monotonie</u>: $f'(x) = \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\underbrace{\frac{1}{x}}_{>0 \text{ für } x>0} < 0$ str. mo fa auf $D =]0,\infty[$

<u>Krümmung</u>: $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ linksgekr. auf $D =]0,\infty[$



<u>ODER</u>: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$ Spiegelung von $\ln x$ an x-Achse!





* **Globale und lokale Extrema.** Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$$

auf dem Intervall $[-5, 5]$.

Lösung.

Lokale Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 \stackrel{!}{=} 0 \implies x_{1,2} = \ldots = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$ (waagrechte Tangente)

Hinreichendes Kriterium: $f''(x) = 6x - 6$ an $x_{1,2}$: $f''(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18 > 0$ ☺ Min

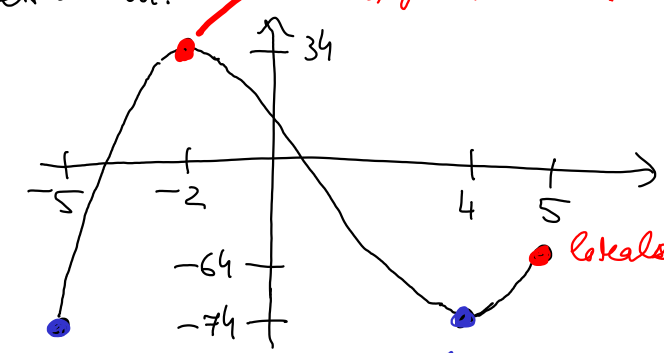
$f''(-2) = 6 \cdot (-2) - 6 = -18 < 0$ ☹ Max

globale Extrema: Randpunkte $-5, 5$ betrachten:

$$\left.\begin{aligned} f(5) &= \ldots = -64 \\ f(-5) &= \ldots = -74 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= \ldots = -74 \\ f(-2) &= \ldots = 34 \end{aligned}\right\} \text{lok. Extr.}$$

lokales/globales Max!



lokales/globales Min.

$\forall x \in D: f(x) \geq -74$

Eigener Lösungsversuch.

* **Minimale Kosten.** Für ein Produkt ist der wöchentliche Bedarf gleich b Stück. Die Lagerkosten sind Fixkosten f plus variable Kosten v pro Stück und Woche. Eine Anlieferung verursacht Kosten in der Höhe a (unabhängig von der Stückzahl). Bestellt man x Stück pro Anlieferung, so benötigt man $n = \frac{b}{x}$ Lieferungen und die Transportkosten sind $n \cdot a = \frac{b}{x} \cdot a$. Verringert sich das Produkt kontinuierlich, so muss es im Mittel die halbe Zeit zwischen zwei Lieferungen gelagert werden, somit sind die Lagerkosten:

$$\frac{b \cdot v}{2n} + f = \frac{v \cdot x}{2} + f.$$

Die Gesamtkosten für Transport und Lagerung sind daher

$$K(x) = \frac{a \cdot b}{x} + \frac{v \cdot x}{2} + f. \qquad (a, b, v, f \text{ Konstanten!})$$

Bei welcher Bestellmenge entstehen minimale Kosten?

Lösung. Suche Minimum von $K(x)$:

$$K'(x) = -\frac{ab}{x^2} + \frac{v}{2} \overset{!}{=} 0 \implies \frac{v}{2} = \frac{ab}{x^2} \overset{(\ )^{-1}}{\implies} \frac{2}{v} = \frac{x^2}{ab} \implies x^2 = \frac{2ab}{v}$$

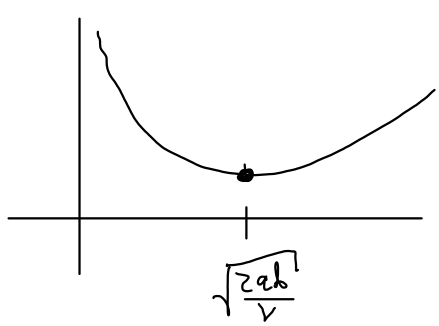
$$\implies x = \pm\sqrt{\frac{2ab}{v}}$$

negative Bestellmenge macht hier keinen Sinn!

$$K''(x) = \frac{2ab}{x^3} \quad \text{an } x = \sqrt{\frac{2ab}{v}}: \quad K''\left(\sqrt{\frac{2ab}{v}}\right) = \frac{2ab}{\sqrt{\frac{2ab}{v}}^{\,3}} > 0 \quad \text{lokales Min!}$$

$a, b, v > 0$

Dieses ist auch global, wegen Linkskrümmung auf ganz $D =]0, \infty[$:



$$K''(x) = \frac{2ab}{\underbrace{x^3}_{>0,\ x \in D}} > 0$$

Eigener Lösungsversuch.

Tangente und lineare Approximation. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie näherungsweise $f(1,01)$ mit Hilfe der Tangente.

Lösung.

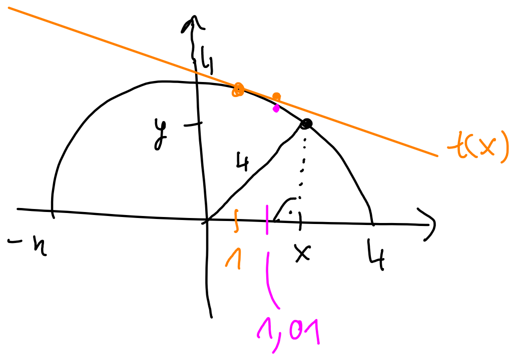
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{16-1^2}}(x-1) + \sqrt{16-1^2} = -\frac{1}{\sqrt{15}}(x-1) + \sqrt{15}.$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{16-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$f(1,01) \overset{\text{lin. Appr.}}{\approx} t(1,01) = -\frac{1}{\sqrt{15}}\, 0,01 + \sqrt{15} \approx 3,87\ldots$$

z.B. mit Heron-Verfahren

Graph ist Halbkreis: $y = \sqrt{16-x^2} \overset{(\,)^2}{\Rightarrow} y^2 + x^2 = \underbrace{16}_{4^2}$ Pythagoras



Eigener Lösungsversuch.

*** Polynomiale Kostenfunktion.** Polynome werden oft zur Modellierung von Kosten verwendet: Dabei ist x die produzierte Warenmenge (in Mengeneinheiten) und $K(x)$ sind die Kosten (in Geldeinheiten), die bei der Produktion der Warenmenge x anfallen. Man nennt $K(x)$ daher auch die Kostenfunktion.

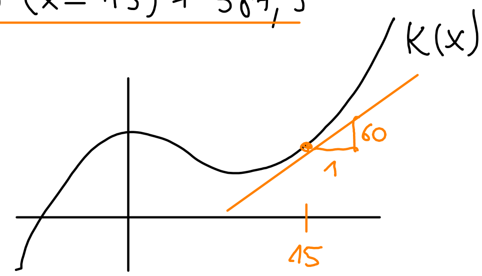
1. Approximieren Sie
$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 60x + 50$$
an der Stelle $x_0 = 15$ durch die Tangente.

2. Geben Sie mithilfe der Tangente den Näherungswert von $K(16)$ an. Um wie viel erhöhen sich die Kosten näherungsweise im Vergleich zu $K(15)$. Vergleichen Sie diesen Wert mit $K'(15)$. (Man nennt die Funktion $K'(x)$ auch Grenzkostenfunktion)

Lösung.

1. $t(x) = \underbrace{K'(x_0)}_{60}(x-x_0) + \underbrace{K(x_0)}_{387{,}5} = 60\,(x-15) + 387{,}5$

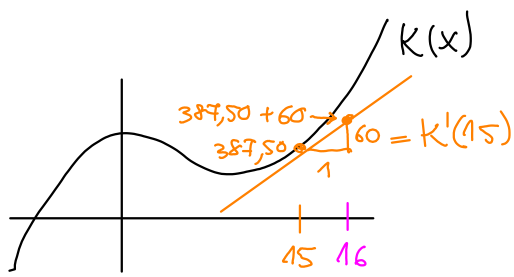
$K'(x) = x^2 - 15x + 60$



2. $K(16) \overset{\text{lin. Appr.}}{\approx} t(16) = \underbrace{60\,\underbrace{(16-15)}_{1}}_{60 = K'(15)} + \underbrace{387{,}5}_{K(15)} = 447{,}5$

also:

$K(16) = K(15) + \underbrace{K'(15)}_{\text{Steigung!}}$



Eigener Lösungsversuch.