VOLLSTÄNDIGE INDUKTION UND REKURSION

* **Summenzeichen, Teil 1.** Schreiben Sie ausführlich, also ohne Summenzeichen:

1. $\sum_{i=0}^{10} i^2 = \overset{i=0}{0^2} + \overset{i=1}{1^2} + \overset{i=2}{2^2} + \overset{i=3}{3^2} + \dots + \overset{i=10}{10^2}$

2. $\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} i^2 = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{+1} 1^2 + \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} 2^2 + \dots + \underbrace{(-1)^{10+1}}_{-1} 10^2$

3. $\sum_{k=2}^{11} 2^{k-1} = 2^{2-1} + 2^{3-1} + 2^{4-1} + \dots + 2^{11-1}$

Eigener Lösungsversuch.

1. $\sum_{i=0}^{10} i^2$

2. $\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} i^2$

3. $\sum_{k=2}^{11} 2^{k-1}$

Summenzeichen, Teil 2. Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} \frac{1}{i}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)$

Eigener Lösungsversuch.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \cdots \pm \frac{1}{n}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$

Vollständige Induktion, Teil 1. Man beweise durch vollständige Induktion:

* 1. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ← IA

2. $11^n - 6$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

Lösung.

1. IA: $n = 1$:

$$LS = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$
$$RS = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$$ ✓

IV: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gegeben!

IS: $n \to n+1$: zzg: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k^2}_{1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{1^2+2^2+\dots+n^2} + (n+1)^2 \overset{IV}{=} \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{IV} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\cdot\left[\overbrace{n(2n+1) + 6(n+1)}^{2n^2+n+6n+6}\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\overbrace{(n+2)(2n+3)}^{2n^2+3n+4n+6}}{6} = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \square$$

2. $5 \mid 11^n - 6 \quad n \geq 1.$

IA: $n = 1$ $\quad 5 \mid 5 = 11^1 - 6$ ✓

IV: geg: $5 \mid 11^n - 6$

IS: $n \to n+1$: zzg: $5 \mid 11^{n+1} - 6$

$$5 \mid \underbrace{10 \cdot 11^n}_{5 \text{ teilt } 5\cdot(2\cdot 11^n)} + \underbrace{11^n - 6}_{5 \text{ teilt}} = \underbrace{11}_{(10+1)} \cdot 11^n - 6 = 11^{n+1} - 6$$

$(10+1)$ ← Trick!

ODER: $11^{n+1}-6 = \underbrace{11}_{(10+1)}\cdot 11^n - 6 = 10\cdot 11^n + \underbrace{11^n - 6}_{\overset{IV}{=} 5\cdot q} = \underbrace{10}_{2\cdot 5}\cdot 11^n + 5\cdot q = 5\cdot(2\cdot 11^n + q)$

$\exists q\in\mathbb{Z}$

d.h. $5 \mid 11^{n+1}-6$

Eigener Lösungsversuch.

ODER: IV: $\exists q\in\mathbb{Z}: 5q = 11^n - 6 \iff 5q+6 \overset{(*)}{=} 11^n$

$$11^{n+1}-6 = 11\cdot \underbrace{11^n}_{\overset{(*)}{\underset{IV}{=}}(5q+6)} - 6 = 11\cdot 5\cdot q + \underbrace{11\cdot 6 - 6}_{60} = 5\cdot(11q+12)$$

$5 \mid 11^{n+1}-6$

ODER: ohne Induktion: $5 \mid 11^n - 6 \iff 11^n - 6 \bmod 5 = 0$

$$\underbrace{11}_{\overset{|||}{1}}{}^n - \underbrace{6}_{\overset{|||}{1}} \equiv \underbrace{1}_{1}{}^n - 1 = 0 \pmod 5$$ ✓

ODER: 11^n hat als Einer (im Dezimalsystem) immer eine 1.

$11^1 = 11 = 10^1 + 1\cdot 10^0 \mid \bmod 10 = 1$
$11^2 = 121 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 \mid \bmod 10 = 1$
$11^3 = 1331 = \underbrace{1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1}_{\bmod 10\, = 0} + 1\cdot 10^0 \mid \bmod 10 = 1$

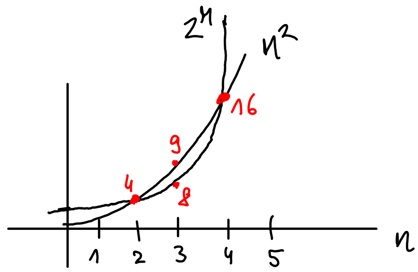
Zzg: $11^n \bmod 10 = 1$. $11 \bmod 10 = 1 \overset{(\,)^n}{\Longrightarrow} 11^n \bmod 10 = 1^n = 1$ □

Eine Zahl, die als Einer eine 1 besitzt, besitzt -6 genommen als Einer eine 5, d.h. durch 5 teilbar.

Vollständige Induktion, Teil 2. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? Formulieren Sie durch Probieren eine Vermutung und beweisen Sie sie dann mit vollständiger Induktion.

Lösung.

n	2^n	$\leq = \geq$	n^2
1	$2^1 = 2$	$>$	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$	$=$	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$	$<$	$3^2 = 9$
4	$2^4 = 16$	$=$	$4^2 = 16$
5	$2^5 = 32$	$>$	$5^2 = 25$
6	$2^6 = 64$	$>$	$6^2 = 36$
7	$2^7 = 128$	$>$	$7^2 = 49$
8	$2^8 = 256$	$>$	$8^2 = 64$



Vermutung: $\boxed{\forall n \geq 5 : 2^n > n^2}$

IA: $n = 5$: $\quad 2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

IV: geg: $2^n > n^2$

IS: $n \to n+1$: ~~zz~~: $2^{n+1} > (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2 \cdot \underbrace{2^n}_{\overset{IV}{>}\, n^2} > 2n^2 \overset{(?)}{\geq} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

~~zz~~: $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \overset{-n^2}{\iff} n^2 \geq 2n + 1 \overset{:n}{\iff} \underbrace{n}_{\geq 5} \geq \underbrace{2 + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\leq 1}}_{\leq 3}$ für $n \geq 5$ ✓ $\square$

[Bem: $n \geq 3$ würde hier reichen, aber dann geht IA schief!]

ODER: $n^2 \geq 2n + 1 \iff \underbrace{n^2 - 2n \overset{+1-1}{}}_{(n-1)^2 - 1} \geq 1 \iff (n-1)^2 - 1 \geq 1 \iff \underbrace{(n-1)^2}_{\geq (5-1)^2 = 16 \ \forall n \geq 5} \geq 2$

ODER: Vollständige Induktion für $n^2 \geq 2n + 1$

Eigener Lösungsversuch.

Bubble-Sort. Gegeben seien n Zahlen in einer beliebigen Reihenfolge $x_1 x_2 \ldots x_n$. Bei einem Sortieralgorithmus sollen sie in aufsteigender Reihenfolge sortiert werden. Es werden zwei nebeneinander stehende Zahlen verglichen und gegebenenfalls vertauscht. Sei M_n die maximale Anzahl an notwendigen Vertauschungen.

1. Bestimmen Sie M_1, M_2, M_3, M_4.
2. Begründen Sie die Rekursion: $\boxed{M_{n+1} = \underline{M_n} + \underline{n} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ M_1 = 0.}$ (*)

   $M_2, M_3, \ldots$ — M_1 Rekursionsanfang
3. Bestimmen Sie eine explizite Formel für M_n, also eine Formel für M_n, die nur von n nicht aber von $M_{n-1}, \ldots$ abhängt. Beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.

Lösung.

1.

n (# Zahlen)	Zahlen $x_1, \ldots, x_n$		M_n (# Vertauschungen)
1	x_1	(Nichts zu sortieren!)	0
2	$x_1 x_2$		1
3	$x_1 x_2 x_3$ $x_2 x_3 \boxed{x_1}$	Tausche größte Zahl nach hinten } M_2 Vertauschungen	$\left.\begin{matrix}2\\+\\1\end{matrix}\right\} 3$
4	$x_1 x_2 x_3 x_4$ $x_2 x_3 x_4 \boxed{x_1}$ $x_3 x_4 \boxed{x_2}\boxed{x_1}$	Tausche größte Zahl nach hinten } M_3 Vertauschungen	$\left.\begin{matrix}3\\+\\2\\+\\1\end{matrix}\right\} 6$

Bsp.

18 7 3 1

7 3 1 18

3 1 7 18

2. $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}$ — $\underline{n \text{ Vertauschungen}}$ (Tausche größte Zahl nach hinten)

$\underbrace{x_2 \cdots x_n x_{n+1}}_{n \text{ Zahlen}} \boxed{x_1}$ — $\underline{M_n \text{ Vertauschungen}}$

Insgesamt: $M_{n+1} = \underline{n} + \underline{M_n}$ ab $n \geq 1$

z.B. $M_5 = 4 + \overbrace{M_4}^{6} = 10$

mit Rekursionsanfang $M_1 = 0$.

Eigener Lösungsversuch.

3. Vermutung siehe 1.:

$M_1 = 0$

$M_2 = 1$

$M_3 = 1+2$

$M_4 = 1+2+3$

$\vdots$

$$\boxed{M_n = 1 + \ldots + (n-1) \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{n(n-1)}{2} \quad (n \geq 1)}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} i = 1+2+\ldots+(n-1) \right]$$

Summenzeichen

Vollst. Ind: IA: $n=1$: LS: $M_1 \overset{\text{Rekursionsanfang } (*)}{\overset{!}{=}} 0$

RS: $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ ✓

IS: $n \to n+1$: $M_{n+1} \overset{\text{Rekursionsgleichung } (*)}{=} M_n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n((n-1)+2)}{2}$

$M_n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n-1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$ $\square$