Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Integrationsregeln

Fragen?

$$\int_3^5 x \cos x \, dx$$

Partielle Integration. Wiederholung der Formel (Siehe dazu DorFuchs auf YouTube, erste Minute):

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx \quad \text{oder}$$

$$\int f(x)\underline{g(x)}dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot \underline{g'(x)}\,dx \quad \text{mit } F' = f$$

Anwendung: Integration eines Produktes und g wird durch Ableiten „besser“
Berechnen Sie folgende Integrale:

* a) $\displaystyle\int \underline{x}\cos(x)\,dx$

* b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \underline{x}\cos(x)\,dx$

* c) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$

* d) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

* e) $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x)\,dx$

* f) $\displaystyle\int x^2\cdot e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int e^x\cdot\cos(x)\,dx$

Lösung. Siehe zu a)-f) DorFuchs Mathe-Song auf YouTube zur partiellen Integration:

a) $$\int \underset{g}{x}\,\underset{f}{\cos x}\,dx = \underset{F}{\sin x}\cdot\underset{g}{x} - \underbrace{\int \underset{F}{\sin x}\cdot\underset{g'}{1}\,dx}_{-\cos x + C} = \underline{x\cdot\sin x + \cos x + C}.$$

b) $$\int_0^{\pi} \dots\,dx \overset{a)}{=} \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi} = (\pi\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0} + \underbrace{\cos\pi}_{-1}) - (\underbrace{0\cdot\sin 0}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \underline{-2}.$$

c) $$\cancel{\int x\ln x\,dx = (-x+x\ln x)\cdot x - \int(-x+x\ln x)\cdot 1\,dx} \quad ↯$$

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g}{\ln x}\,dx = \underset{F}{\frac{x^2}{2}}\cdot\underset{g}{\ln x} - \int \underbrace{\underset{F}{\frac{x^2}{2}}\cdot\underset{g'}{\frac{1}{x}}}_{\frac{x}{2}}\,dx = \underline{\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

d) $$\int \underset{f}{1}\cdot\underset{g}{\ln x}\,dx = \underset{F}{x}\,\underset{g}{\ln x} - \int \underbrace{\underset{F}{x}\cdot\underset{g'}{\frac{1}{x}}}_{1}\,dx = \underline{x\ln x - x + C}$$

e) $$\int \underset{f}{\cos x}\,\underset{g}{\sin x}\,dx = \underset{F}{\sin x}\cdot\underset{g}{\sin x} - \int \underset{F}{\sin x}\,\underset{g'}{\cos x}\,dx \Rightarrow 2\cdot\int\dots\,dx = \sin^2 x + C$$

$$\Rightarrow \int\dots\,dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Nochmal partiell Int.!

f) $$\int \underset{g}{x^2}\,\underset{f}{e^x}\,dx = \underset{F}{e^x}\cdot x^2 - \int \underset{F}{e^x}\cdot\underset{g'}{2x}\,dx = e^x x^2 - \Big(e^x\cdot 2x - \underbrace{\int e^x\cdot 2\,dx}_{2e^x + C}\Big) = e^x x^2 - e^x\cdot 2x + 2e^x + C$$

$$= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C$$

~~**Eigener Lösungsversuch.**~~

g) $$\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g} \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + \overbrace{\underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx}}^{\text{Nochmal part. Int.}}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \ldots \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \ldots \, dx = \underline{\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C}$$

Substitutionsregel. Wiederholung der Formel:

$$\int f'(u(x))\,u'(x)\,dx \overset{\text{Kettenregel}}{\overset{!}{=}} f(u(x))+c \overset{\text{Substitution}}{\overset{z=u(x)}{=}} f(z)+c = \int f'(z)\,dz \quad \text{oder}$$

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x))+c \overset{z=u(x)}{=} F(z)+c = \int f(z)\,dz \quad \text{mit } F' = f$$

Anwendung: Integration eines Produktes und innere Funktion u ist abgeleitet ein Faktor

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\frac{1}{2}\int_0^1 2\cdot x\cdot e^{x^2}\,dx$

b) $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

c) $\int \sqrt{5x+12}\,dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

e) $\int \cos^3(x)\cdot\sin(x)\,dx$

f) $\int \frac{\arctan(z)}{1+z^2}\,dz$

g) $\int \frac{2x+6}{x^2+6x-12}\,dx$

Lösung.

a) $\int_0^1 x e^{x^2}dx = \frac12\int_0^1 \overset{u(x)'\cdot}{2x}\,\overset{f(u(x))}{e^{x^2}}\,dx = \frac12\Big[\overset{F(u(x))}{e^{x^2}}\Big]_0^1 = \frac12\Big(\underbrace{e^{1^2}}_{e} - \underbrace{e^{0^2}}_{1}\Big) = \frac12(e-1).$

b) $\int x e^{x^2} = \frac12\int 2x e^{x^2}dx \overset{a)}{=} \frac12 e^{x^2} + c.$

c) $\frac15\int \underbrace{\sqrt{5x+12}}_{f(u(x))}\cdot\underbrace{5}_{u'(x)}\,dx = \frac15\,\frac{(5x+12)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{15}\sqrt{5x+12}^{\,3} + c$

$$\int \underbrace{(\quad)^{\frac12}}_{f(\ )}dx = \underbrace{\frac{(\quad)^{\frac12+1}}{\frac12+1}}_{F(\ )} + c$$

d) $\frac13\int (1+x^3)^{-\frac12}\cdot 3x^2\,dx = \frac13\,\frac{(1+x^3)^{-\frac12+1}}{-\frac12+1} + c = \frac23\sqrt{1+x^3} + c$

e) $-\int (\cos(x))^3\,(-\sin x)\,dx = -\frac{(\cos(x))^4}{4} + c = -\frac14\cos^4(x) + c$

f) $\int (\arctan z)^1\cdot\frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{(\arctan z)^2}{2} + c$

g) $\int (x^2+6x-12)^{-1}(2x+6)\,dx = \ln|x^2+6x-12| + c$

oder log. Int.: $\int \frac{\overset{f'}{2x+6}}{\underset{f}{x^2+6x-12}}\,dx = \ln|\underbrace{x^2+6x-12}_{f}| + c$

~~**Eigener Lösungsversuch.**~~

Notation JL:

$\cancel{a)}$ b) $\int x e^{x^2} dx = \int x e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

c) $\int \sqrt{5x+12}\, dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \sqrt{u}\, du = \ldots$

$u = 5x+12$

$\frac{du}{dx} = 5 \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$

...

* **Partialbruchzerlegung.** Integrieren Sie folgende rationale Funktionen:

nicht echt-rational (Zählergrad ≮ Nennergrad) → Polynom-division

a) $\int \frac{3x^3 - x^2 - 5x + 9}{x^2 + x - 2}\, dx$ NST suchen: Mitternachtsf.

b) $\int \frac{-2x^2 + x + 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$ NST suchen: 0, dann Mitternachtsf.

c) $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$

keine NST

Lösung. Siehe dazu DorFuchs Mathe-Song auf YouTube zur PBZ:

Hausaufgabe: selbst aufschreiben!

Ansatz PBZ bei quadratischen Faktoren

c) $\frac{2x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\cdot(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$

Vergleichen!
→ A, B, C berechnen!

x=0 einsetzen: $\underbrace{2\cdot 0^2 - 3\cdot 0}_{0} + 3 = \underbrace{A\cdot(0^2+1)}_{A} + \underbrace{(B\cdot 0 + C)(0-1)}_{-C} \Rightarrow 3 = A - C$ (I)

NST → x=1 einsetzen: $2 = A\cdot 2 \Rightarrow A = 1$ (II)

x=2 einsetzen: $5 = 5A + 2B + C$ (III)

(II) in (I): $3 = 1 - C \Rightarrow C = -2$ in (III): $5 = 5\cdot 1 + 2\cdot B - 2$
$\Rightarrow B = 1$

$$\int \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx = \underbrace{\int \frac{1}{x-1}\, dx}_{\ln|x-1| + C} + \underbrace{\int \frac{x-2}{x^2+1}\, dx}_{\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx}_{\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C} - \underbrace{\int \frac{2}{x^2+1}dx}_{2\cdot\arctan(x) + C}} = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan(x) + C$$

Eigener Lösungsversuch.

In Video: Wie integriert man $\int \frac{2x+2}{x^2-x+2}\,dx$?

keine NST!

$$\int \frac{2x+2}{x^2-x+2}\,dx = \underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx}_{\ln|x^2-x+2|+c} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx}_{(*)\ \frac{?}{1+(\dots)^2}}$$

$$(*):\ \frac{3}{x^2-x+2} = \frac{3}{\underbrace{x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}_{\frac{7}{4}}} = \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{3}{\frac{7}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{7}{4}}+1}$$

1. quadr. Ergänzen

2. $\frac{7}{4}$ ausklammern!

$$= \frac{3\cdot 4}{7}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx = \frac{12}{7}\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}\underbrace{\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\sqrt{\frac{4}{7}}\,dx}_{\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c} = \frac{12}{7}\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c$$