Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Funktionen

Definitionsbereich und Bild. Geben Sie für die folgenden Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich D und die Bildmenge $f(D)$ an ($D \subset \mathbb{R}$)

* a) $f(x) = |x|$ * b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ * c) $f(x) = \sqrt{x+3}$

d) Es sei $B =]-1, 1[$. Was ist für jede der obigen Funktionen $f(B)$?

e) (optional) Programmieren Sie jede der obigen Funktionen in C.

Lösung.

a.) $D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}_0^+$ b.) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$ c.) $D \geq -3$

$W = -1 \leq W \leq 1$ $W \geq 0$

d.)

Eigener Lösungsversuch.

Zeitwert Auto. Der Zeitwert eines Autos nach t Jahren sei gegeben durch

$$f(t) = 25000 \cdot \frac{30-2t}{30+15t}.$$

Geben Sie die ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge an. Wann hat sich der Wert des Fahrzeuges auf die Hälfte reduziert?

Lösung.

$D = [0;\infty)$

$$25000 \cdot \frac{30-2t}{30+15t} = 12.500 \quad \Big| : 25000$$

$$\Leftrightarrow \frac{30-2t}{30+15t} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot (30+15t)$$

$$\Leftrightarrow -2t = \qquad + 2t$$

A: nach 5 Jahren

Eigener Lösungsversuch.

Lineare Transformationen eines Graphen. Wie ändert sich der Funktionsgraph, wenn man von einer Funktion $f(x)$ zu folgender Funktion übergeht? Dabei sei immer $a > 0$.

* 1. $f(x) + a$

* 2. $f(x) - a$

3. $f(x + a)$

4. $f(x - a)$

5. $af(x)$ ($a > 1$ und $a < 1$)

6. $f(ax)$ ($a > 1$ und $a < 1$)

7. $-f(x)$

8. $f(-x)$

Hinweis: überlegen Sie mithilfe eines konkreten Beispiels z.B. $f(x) = x^2$ und $a = 3$ bzw. $a = \frac{1}{3}$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Graph skizzieren. Skizzieren Sie den Graphen folgender Funktion qualitativ:

$$f(x) = -2e^{-3x} + 5$$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Surjektivität. Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow Z$ die Bildmenge $f(D)$ an. Ist die Funktion surjektiv?

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$

3. $f : \underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Lösung.

1.) $D = \mathbb{R}$ ja 2.) $D = \mathbb{R}$ ja 3.) nein

Eigener Lösungsversuch.

Injektivität. Welche der Funktionen ist injektiv?

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$

3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

Lösung.

1.) ja 2.) ja 3.) nein 4.) neh

Eigener Lösungsversuch.

Verknüpfung von Funktionen, Teil 1. Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = x - 1$. Geben Sie die folgenden Funktionen an:

* 1. $f \circ g$

2. $g \circ f$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Verknüpfung von Funktionen, Teil 2. Schreiben Sie h als Hintereinanderausführung von zwei Funktionen f und g.

* 1. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (3x + 1)^2$

2. $h : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{3 + x}$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Umkehrfunktionen, Teil 1. Geben Sie die Umkehrfunktion an:

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 4x + 3$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Umkehrfunktionen, Teil 2. Wie lautet die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \sqrt[4]{1 - x^2} + 2 \ ?$$

Geben Sie jeweils Definitions- und Bildmengen an.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Optimaler Preis. Ein Unternehmen stellt USB-Sticks her. Durch eine Marktanalyse wurde festgestellt, dass bei einem Stückpreis von p ungefähr $x = 200 - 20p$ Stück pro Tag verkauft werden können.

* 1. Geben Sie den Preis als Funktion der Stückzahl an. Welcher Definitionsbereich ist ökonomisch sinnvoll? Fertigen Sie eine Skizze an.

* 2. Werden pro Tag x USB-Sticks produziert, dann fallen dabei die Produktionskosten $k(x) = 100 + 4x$ an. Beim Verkauf von x USB-Sticks erzielt das Unternehmen die Einnahmen $e(x) = x \cdot p(x)$. Skizzieren Sie die Funktionen k und e grob.

3. Beim Verkauf von x USB-Sticks macht das Unternehmen einen Gewinn von $g(x) = e(x) - k(x)$. Skizzieren Sie $g(x)$ grob.

4. Das Unternehmen arbeitet kostendeckend, wenn $g(x) \geq 0$ ist. Welchem Stückzahlenbereich entspricht das?

5. Welchen Preis soll das Unternehmen festlegen, damit der Gewinn maximal wird?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.