2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Ergebnisraum, Ereignis, bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit.
- Sie unterscheiden zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Ereignissen berechnen.
- Sie wenden die Rechenregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten an.
- Sie können für eine Aufgabe den Ergebnisraum mathematisch darstellen.
- Sie können für eine Textaufgabe die gegebenen und gesuchten Ereignisse bzw. Wahrscheinlichkeiten mathematisch angeben.
- Sie können bei der sprachlichen Formulierung zwischen Schnittereignissen und bedingten Ereignissen unterscheiden.

Literatur:

- Teschl Band 2, Kap. 26
- Arens et al., Kap 37
- Zucchini, Kap. 3

2.1 Ergebnisraum und Ereignisse

Wir untersuchen Zufallsexperimente und wie wahrscheinlich bestimmte Ergebnisse bzw. Teilmengen von Ergebnissen sind.

Begriffe

- **Ergebnisraum Ω:** Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
- **Elementarereignis $\omega \in \Omega$:** einzelnes Element von Ω
- **Ereignis $E \subseteq \Omega$:** beliebige Teilmenge des Ergebnisraums
  Ω heißt sicheres Ereignis, $\varnothing$ heißt unmögliches Ereignis
- **Vereinigung $E \cup F$:** Ereignis E **oder** Ereignis F treten ein
  $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$: mindestens ein Ereignis E_i tritt ein
- **Schnitt $E \cap F$:** Ereignis E **und** Ereignis F treten ein
  $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$: alle Ereignisse E_i treten ein
- **Gegenereignis $\bar{E} = \Omega \setminus E$:** Ereignis E tritt nicht ein (Komplement von E)
- **Paarweise disjunkte Ereignisse E und F:** $E \cap F = \varnothing$

Ereignisalgebra

Ereignisse sind Mengen. Kombinationen von Ereignissen lassen sich also durch Venn-Diagramme darstellen und es gelten die gleichen Regeln wie für Mengen.

Insbesondere gelten die **De Morgan'schen Regeln**

(1) $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}$$

(2) $$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} E_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i}$$

Übung zu Ereignisalgebra

Seien A, B, $C \subseteq \Omega$ drei Ereignisse. Ermitteln Sie möglichst einfache Ausdrücke für folgende Ereignisse:

(1) nur A tritt ein (B und C nicht) $\quad A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

(2) A und C treten ein, (und) aber B nicht $\quad A \cap C \cap \bar{B}$

(3) mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein $\quad A \cup B \cup C$

(4) alle drei Ereignisse treten ein $\quad A \cap B \cap C$

(5) keines der drei Ereignisse tritt ein $\quad \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

(6) höchstens zwei Ereignisse treten ein $\quad \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

(7) genau zwei Ereignisse treten ein $\quad A \cap B \cap \bar{C} \;\cup\; A \cap C \cap \bar{B} \;\cup\; \bar{A} \cap B \cap C$

(8) höchstens drei Ereignisse treten ein $\quad \Omega$

2.2 Wahrscheinlichkeit

Eine **Wahrscheinlichkeit** ordnet jedem Ereignis $E \subseteq \Omega$ eine reelle Zahl $P(E)$ zu und ist festgelegt durch die drei **Axiome von Kolmogorov**:

(1) $0 \leq P(E) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$, falls $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \neq j$ (d.h. paarweise disjunkt)

Satz 2.1:

(1) $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

(2) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2.3 Laplace-Experiment

Zufallsexperiment mit n gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen.

Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für $E \subseteq \Omega$ aus:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{\text{Mächtigkeit von } E}{\text{Mächtigkeit von } \Omega} = \frac{|E|}{n}$$

$= \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$

Beispiel:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $E =$ "Augensumme 7" beim Würfeln mit 2 Würfeln.
Geben Sie dazu Ω und E explizit an.

$|\Omega| = 36$

$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2.4 Kombinatorik

Ermittlung der Mächtigkeit von Ereignissen

- **Allgemeines Zählprinzip**
  Anzahl der Möglichkeiten für ein k-stufiges Zufallsexperiment mit n_i Varianten im i-ten Schritt:

$$n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$$

- Anzahl der **Permutationen** einer n-elementigen Menge
  n-maliges Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge
  - für n unterscheidbare Elemente:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

  - für k Klassen mit je n_i nicht unterscheidbaren Elementen $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i)$:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}$$

- Anzahl der k-**elementigen Teilmengen** einer n-elementigen Menge
  k-maliges Ziehen aus einer n-elementigen Menge

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
ohne Zurücklegen $k \leq n$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
mit Zurücklegen $k > n$ möglich	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Übung zu Kombinatorik

(1) Anzahl verschiedener Passwörter der Länge 8, die sich aus Klein- und Großbuchstaben und Ziffern bilden lassen 62^8

(2) Anzahl verschiedener Barcodes bestehend aus 4 dicken, 3 mittleren und 2 dünnen Linien $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$

(3) Anzahl der Möglichkeiten, 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen 1 bis 49 zu ziehen (Lotto) $\binom{49}{6}$

(4) Anzahl der möglichen Reihenfolgen des Zieleinlaufs bei einem Pferderennen mit 7 Pferden $7!$

(5) Anzahl der Möglichkeiten, dass ein Kleinkind 5 verschiedene Kleinbuchstaben auf einer Tastatur tippt $\frac{26!}{(26-5)!}$

(6) Anzahl der Möglichkeiten, eine gemischte Saftkiste (12 Flaschen) aus 3 Saftsorten zusammenzustellen $n=3,\ k=12 \quad \binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12}$

2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien $E, F \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $P(F) > 0$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E, wenn F eingetreten ist, ist die sog. **bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter F**:

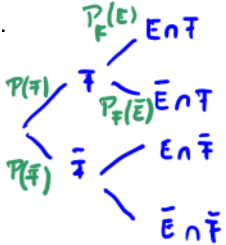
$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

bzw. $P(E \cap F) = P(F) \cdot P_F(E)$

Satz 2.2: Multiplikationsregel Seien $E, F \neq \varnothing$.

(1) $P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$

(2) $P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$



Beispiel 2.5:

W : Filiale in Wasserburg eröffnet
M : Frau Meier wird Filialleiterin

Frau Meier erfährt, dass ihre Firma mit 30% Wahrscheinlichkeit eine Zweigstelle in Wasserburg eröffnet. Wenn das der Fall ist, dann wird sie mit 60% Wahrscheinlichkeit Filialleiterin. Bedingung
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Meier Filialleiterin in Wasserburg wird?

Geg.: $P(W) = 0{,}3$, $P(\bar{W}) = 0{,}7$
$P_W(M) = 0{,}6$

Ges.: $P(W \cap M) = P(W) \cdot P_W(M) = 0{,}18$

2.6 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

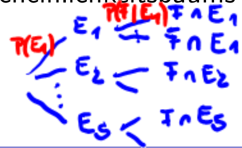
Aus der Gesamtheit der bedingten Wahrscheinlichkeiten kann die unbedingte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Satz 2.3: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ mit $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \neq j$, d. h. die Ereignisse E_i bilden eine disjunkte Zerlegung bzw. eine Partition von Ω. Dann gilt:

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)$$

(Summe der Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums zu allen Schnitten $F \cap E_i$)

Ω

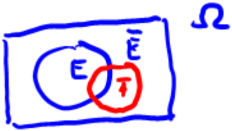


$P(F) = \sum_{i=1}^{5} P(F \cap E_i)$

Vierfeldertafel: Spezialfall $\Omega = E \cup \overline{E}$

(1) $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$

(2) $P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap E) + P(\overline{F} \cap \overline{E})$



	E	$\overline{E}$	
F	$P(E\cap F)$	$P(\overline{E}\cap F)$	$P(F)$
$\overline{F}$	$P(E\cap \overline{F})$	$P(\overline{E}\cap \overline{F})$	$P(\overline{F})$
	$P(E)$	$P(\overline{E})$	1

Resultierende Formeln:

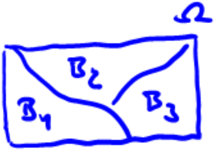
$$P(E\cap F) \overset{\text{Baum}}{=} P(E)\cdot P(F\mid E) = P(F)\cdot P(E\mid F)$$

$$\overset{\text{Tafel}}{=} P(F) - P(\overline{E}\cap F) = P(E) - P(E\cap \overline{F})$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(\bar{F}|E) = 1 - P(F|E)$$

Beispiel 2.6:



B_1: "Batterie Typ 1", …, B_3: "Batterie Typ 3"

F: "Funktionsdauer > 100 h"

Geg.: $P(B_1) = 0{,}2$, $P(B_2) = 0{,}3$, $P(B_3) = 0{,}5$

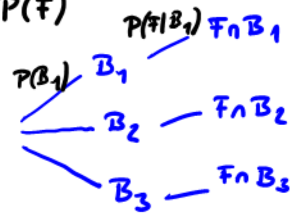
$P(F|B_1) = 0{,}7$, $P(F|B_2) = 0{,}4$, $P(F|B_3) = 0{,}3$

In einem Behälter befinden sich 3 Typen von äußerlich nicht unterscheidbaren Batterien im Verhältnis 20:30:50.
Die Wahrscheinlichkeiten für eine Funktionsdauer > 100 h betragen 70% bei Typ 1, 40% bei Typ 2 und 30% bei Typ 3.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Funktionsdauer einer beliebig ausgewählten Batterie > 100 h?

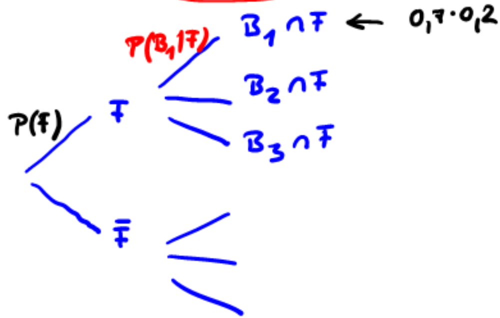
Ges.: $P(F)$

$$P(F) = P(F \cap B_1) + P(F \cap B_2) + P(F \cap B_3)$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}41$$



Angenommen, Sie interessiert jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie vom Typ 1 ist, wenn ihre Funktionsdauer > 100 h ist, d.h. $P(B_1 | F)$ ist gesucht.



$$P(B_1 | F) = \frac{P(B_1 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F | B_1) \cdot P(B_1)}{P(F \cap B_1) + P(F \cap B_2) + P(F \cap B_3)}$$

2.7 Formel von Bayes

Hilfreich, wenn man $P(F|E_i)$ kennt, nicht aber $P(E_k|F)$

Beispiel: Diagnostische Tests
Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Test positiv ausfällt, wenn eine Peson krank bzw. nicht krank ist, sind bekannt.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person krank ist, wenn der Test positiv ist?

Satz 2.4: Formel von Bayes

$$P(E_k|F) = \frac{P(F|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(F|E_i) \cdot P(E_i)}$$

über Satz von totaler Wahr-scheinlichkeit

Beispiel 2.7:

K: "Person ist krank"

T: "Test ist positiv"

Geg.: $P(T|K) = 0{,}95$, $P(T|\bar{K}) = 0{,}01$

$P(K) = 0{,}005 \Rightarrow P(\bar{K}) = 0{,}995$

Ges.: $P(K|T)$

Ein Bluttest entdeckt zu 95% eine Krankheit, wenn sie tatsächlich vorhanden ist, liefert aber zu 1% ein falsches positives Ergebnis. Wenn 0.5% der Bevölkerung erkrankt sind, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine Person, deren Bluttest positiv ist, tatsächlich erkrankt?

$$P(K|T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T \cap K) + P(T \cap \bar{K})} = \frac{P(T|K) \cdot P(K)}{P(T|K) \cdot P(K) + P(T|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}$$

$$= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}005}{0{,}95 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}995} \approx 32{,}3\%$$

Wiederholung:

In einer Großstadt haben 70 % der Fahrgäste der U-Bahn ihren Wohnsitz in der Stadt (Stadtbewohner). Umfangreiche Kontrollen ergaben einen Schwarzfahreranteil von 5.4 %. Der Anteil der Fahrgäste, die keine Stadtbewohner sind, unter den Schwarzfahrern ist $\frac{2}{9}$.

a) Berechnen Sie den Prozentsatz der Schwarzfahrer unter den Stadtbewohnern.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast Stadtbewohner und kein Schwarzfahrer ist?

2.8 Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit ist eine Aussage über die Irrelevanz einer Information.

Die Ereignisse E und F heißen (stochastisch) **unabhängig**, wenn die Information über das Eintreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert, d. h. falls

$$P(E|F) = P(E) \quad \text{bzw.} \quad P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

Es gilt:
Falls die Ereignisse E, F unabhängig sind, dann sind auch

$$(i)\, E, \bar{F} \qquad (ii)\, \bar{E}, F \qquad (iii)\, \bar{E}, \bar{F}$$

unabhängig.

Beispiel 2.8:

Zweimaliges Ziehen aus einer Urne mit 2 weißen und 2 schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen.
Sind die Ereignisse A = "Erste Kugel ist weiß" und B = "Zweite Kugel ist weiß" stochastisch unabhängig?

Bemerkungen: