Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule **Rosenheim**
University of Applied Sciences

Kongruenzen und Restklassen

* **Modulo.** Berechnen Sie den Rest modulo 6 der Zahlen 25, -25, 2 und 12.

Lösung.

$25 \bmod 6 = 1 \quad 2 \bmod 6 = 2$

$-25 \bmod 6 = 5 \quad 12 \bmod 6 = 0$

Eigener Lösungsversuch.

* **Kongruenzen, Teil 1.** Welche der Aussagen ist wahr?

1. $65 \equiv 117 \pmod{13}$
2. $111 \equiv 1001 \pmod{11}$
3. $71 \equiv 157 \pmod{17}$
4. $12 \equiv 117 \pmod{21}$
5. $-35 \equiv 74 \pmod{17}$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

ISBN-10.

1. Zeigen Sie, dass 0-817-64176-9 eine gültige ISBN-10 ist.
2. Ein Fehler passiert an der zweiten Stelle, und es wird daher statt der Nummer in a) 0-117-64176-9 eingegeben. Wird der Fehler erkannt?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

EAN. Die Europäische Artikelnummer ist eine 13 stellige Ziffernfolge *abcd efgh ikmn p*. Die ersten beiden Ziffern geben das Herkunftsland an, die folgenden fünf stehen für den Hersteller und die nächsten fünf für das Produkt. Die Prüfziffer p erfüllt die Gleichung

$$a + 3b + c + 3d + e + 3f + g + 3h + i + 3k + m + 3n + p \equiv 0 \pmod{10}.$$

1. Wie lautet die Prüfziffer der „Penne Rigate“: 8076 8020 8573-p?
2. Statt der richtigen Artikelnummer 8076 8020 8573-p wird die falsche Artikelnummer 8076 8028 0573-p angegeben, bei der zwei aufeinander folgende Ziffern vertauscht wurden. Wird der Fehler erkannt?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Quersumme. Es sei S_n die Quersumme der natürlichen Zahl n (z.B. $n = 395$, $S_n = 3 + 9 + 5 = 17$). Zeigen Sie

$$n \equiv S_n \pmod 3.$$

D.h. n und S_n lassen beim Teilen durch 3 den gleichen Rest. *Hinweis:* $10 \equiv 1 \pmod 3$. Wie kann man also leicht feststellen, ob eine Zahl durch 3 teilbar ist?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Lineare Kongruenzgleichungen. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie <u>alle</u> Lösungen $0 \leq x < m$ an (m der jeweilige Modul).

1. $5 + \overset{5}{x} \equiv 3 \pmod 7$
2. $5 + \overset{6}{x} \equiv 4 \pmod 7$
3. $3 \cdot \overset{6}{x} \equiv 4 \pmod 7$
4. $4 \cdot x \equiv 5 \pmod 6$
5. $4 \cdot x \equiv 6 \pmod{10}$

Lösung.

$4x + 6y = 1$

$4 = 0 \cdot 6$ $\quad 2 \nmid 5$

$6 = 1 \cdot 4 + 2$

$4 = 2 \cdot \underline{2} + \bar{0}$

Eigener Lösungsversuch.

Restklassen, Teil 1. Geben Sie die Restklassen in $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_8$. Bestimmen Sie für $\mathbb{Z}_8$ die Verknüpfungstabelle für die Addition und Multiplikation. Welche Elemente von $\mathbb{Z}_8$ besitzen multiplikativ Inverse? Welche Elemente von $\mathbb{Z}_7$ besitzen multiplikative Inverse?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Restklassen, Teil 2. Berechnen Sie möglichst geschickt ohne Taschenrechner:

1. $\overline{8}+\overline{9}$ in $\mathbb{Z}_{16}$
2. $\overline{7}-\overline{9}$ in $\mathbb{Z}_{16}$
3. $\overline{48}+\overline{57}$ in $\mathbb{Z}_{64}$
4. $\overline{48}-\overline{57}$ in $\mathbb{Z}_{64}$
5. $\overline{7}\cdot\overline{9}$ in $\mathbb{Z}_{16}$
6. $\overline{13}\cdot\overline{5}$ in $\mathbb{Z}_{16}$
7. $\overline{48}\cdot\overline{6}$ in $\mathbb{Z}_{64}$
8. $\overline{8}\cdot\overline{57}$ in $\mathbb{Z}_{64}$
9. $\overline{423}\cdot\overline{191}+\overline{212}\cdot\overline{348}+\overline{110}\cdot\overline{317}$ in $\mathbb{Z}_5$
10. $\overline{423}\cdot\overline{191}-\overline{212}\cdot\overline{348}+\overline{110}\cdot\overline{317}$ in $\mathbb{Z}_5$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Restklassen, Teil 3. Berechnen Sie die multiplikativ Inversen, sofern möglich:

1. $\overline{5}$ in $\mathbb{Z}_{26}$
2. $\overline{11}$ in $\mathbb{Z}_{256}$
3. $\overline{178}$ in $\mathbb{Z}_{80189}$
4. $\overline{97}$ in $\mathbb{Z}_{80189}$
5. $\overline{234}$ in $\mathbb{Z}_{1024}$

Lösung.

$178 = 0 \cdot 80189 + 178$

$80189 = 450 \cdot 178 + \underline{89}$ hv nicht möglich

$178 = 2 \cdot \underline{89} + 0$

Eigener Lösungsversuch.

(Halb-)Gruppe. Es sei $G = \{e, x, y\}$ eine Menge mit drei Elementen und $\circ$ die Verknüpfung mit

$\circ$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	y
y	y	x	e

Bildet $(G, \circ)$ eine kommutative (Halb-)Gruppe?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.