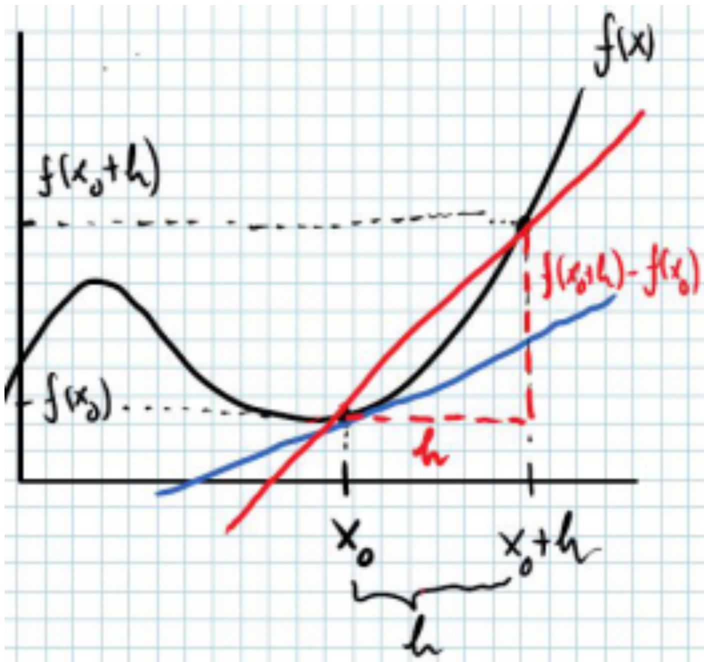
Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

ABLEITUNGEN - TEIL 2

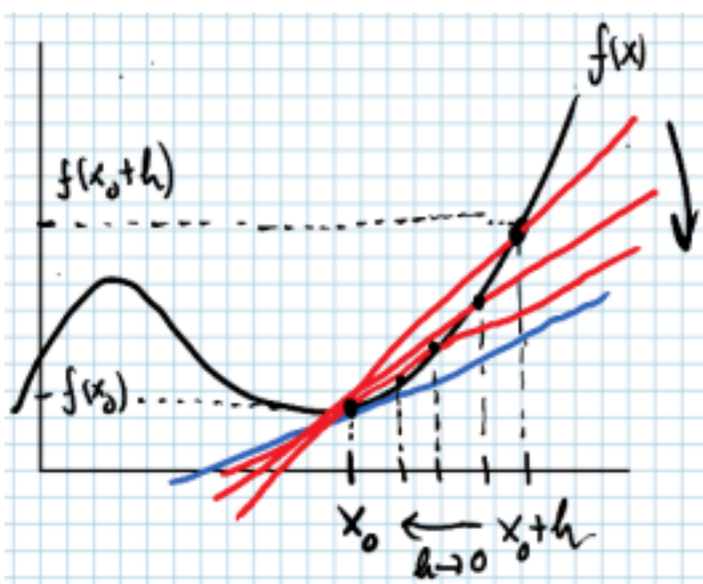
Fragen?

Wiederholung: Idee der Tangente



Frage. Wie kann ich die Tangente (und dann auch die Steigung) im Punkte x_0 bestimmen?

Idee. Als Annäherung über die Sekante: "Sekante $\xrightarrow{h\to 0}$ Tangente"



Frage. Wie berechnet man die Sekante?

* **Sekante.** Geben Sie die allgemeine Geradengleichung der Sekante an.

Lösung.

siehe Steigungs-Δ oben!

<u>Sekantensteigung</u>: $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ <u>Differenzenquotient</u>

$$\boxed{s(x) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Steigung}} \underbrace{(x - x_0)}_{\text{Rechtsverschiebung um } x_0} + \underbrace{f(x_0)}_{\text{Verschiebung nach oben um } f(x_0)}}$$

Eigener Lösungsversuch.

* **Tangente.** Geben Sie die Steigung und die allgemeine Geradengleichung der Tangente an (Hinweis: “Sekante $\xrightarrow{h\to 0}$ Tangente”).

Lösung.

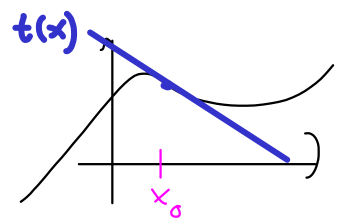
$$s(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0) \xrightarrow{h\to 0} t(x) = \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{\overset{!}{=}\, f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$f'(x_0)$ Ableitung = Tangentensteigung

Merke:

$$\boxed{t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}$$

x_0 feste Stelle, wo man Tangente anlegt!



Eigener Lösungsversuch.

$$\boxed{t(x) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$$

Tangenten-Berechnung. Skizzieren und berechnen Sie folgende Tangenten:

a) $f(x) = x^2$, $\underline{x_0 = 2}$

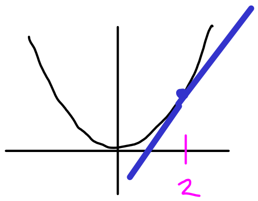
b) $f(x) = \ln(x)$, $\underline{x_0 = 1}$

c) $f(x) = \sin(x)$, $\underline{x_0 = 0}$

$f'(x) = 2x$

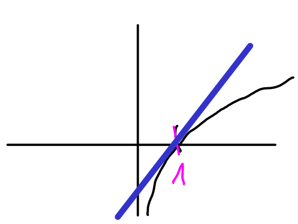
Lösung.

a)



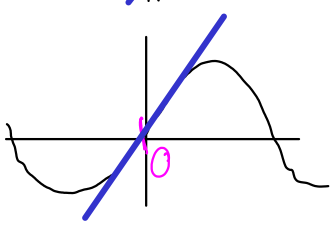
$$t(x) = \underbrace{f'(2)}_{2\cdot 2}\cdot(x-2) + \underbrace{f(2)}_{2^2} = \underline{4(x-2)+4}$$

b)



$$t(x) = \frac{1}{1}\cdot(x-1) + \underbrace{\ln(1)}_{0} = \underline{x-1}$$

c)



$$t(x) = \underbrace{\cos(0)}_{1}\cdot(x-0) + \underbrace{\sin(0)}_{0} = \underline{x}$$

Eigener Lösungsversuch.

Differenzenquotient. Berechnen Sie folgende Ableitungen mittels dem Grenzwert des Differenzenquotienten:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin(x)$ (Hinweis: Additionstheorem sin)

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

Lösung.

a) $$f'(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2}+2x_0h+h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x_0+h = 2x_0$$

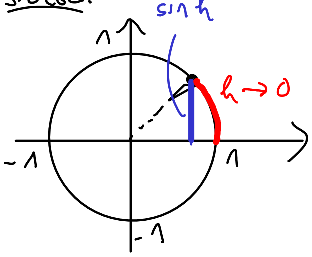
b) Loviscach: über komplexe Zahlen! ($i^2=-1$) ↷ später!

$$f'(x_0) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\cdot\sin(h) + \sin(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)}{h}$$

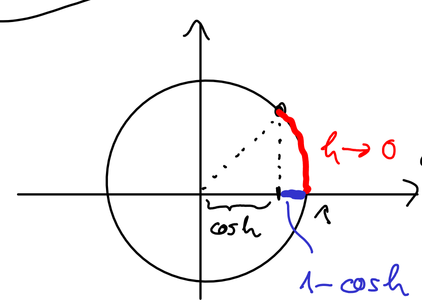
$$= \cos(x_0)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{1} + \sin(x_0)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{0} = \cos(x_0)$$

l'H geht! aber ist geschummelt, da man sin' herleiten will!

Skizze:



$h\to 0$ gilt $\sin h \approx h$

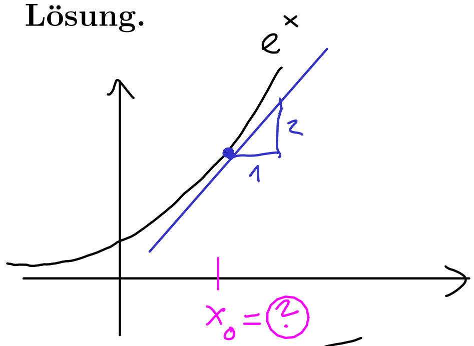


$h\to 0$ gilt $1-\cos h \ll h$ ✓

Eigener Lösungsversuch.

Steigung. An welcher Stelle hat $f(x) = e^x$ die Steigung 2?

Lösung.



$$\underbrace{f'(x_0)}_{e^{x_0}} = 2 \quad \xRightarrow{\ln(\dots)} \quad \underbrace{\underbrace{\ln(e^{x_0})}_{id}}_{x_0} = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_0 = \ln(2)}$$

Eigener Lösungsversuch.