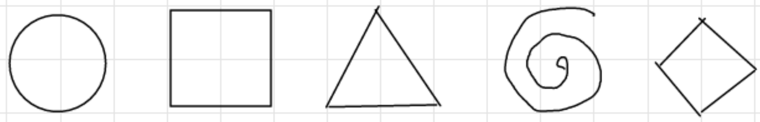
Rekursion

Rekursion – Fakultät

Auf wieviele Möglichkeiten kann man 5 Gegenstände anordnen?



z.B.

Antwort: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ **Fakultät**

rekursive Definition der **Fakultät**:

$$\boxed{0! := 1, \qquad n! := n \cdot (n-1)! \quad (n > 0)}$$

z.B.

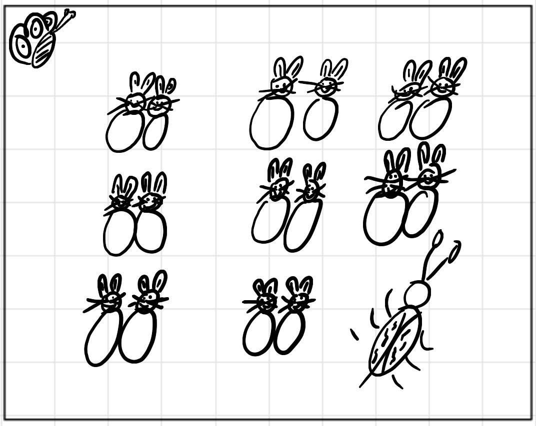
$$5! = \underline{5} \cdot 4!$$
$$4! = \underline{4} \cdot 3!$$
$$3! = \underline{3} \cdot 2!$$
$$2! = \underline{2} \cdot 1!$$
$$1! = \underline{1} \cdot \underbrace{0!}_{\underline{1}}$$

Das ergibt rückwärts aufgelöst: $5! = \underline{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$.

$\boxed{\text{Ü}}$ Implementieren Sie eine Funktion namens fac, die die n-te Fakultät berechnet. (↪ Vorlesung)

Rekursion – Fibonacci-Zahlen

Hasenstall



Monat	1	2	3	4	5	6
# Hasenpaare	1	1	2	3	5	8

+   +   +   +

rekursive Definition der **Fibonacci-Zahlen**:

$$\boxed{F_1 := 1, \quad F_2 := 1, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 2)}$$

Ü Zeigen Sie: $\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i}_{\text{Summe der ersten } n \text{ Fibonacci-Zahlen}} = \underbrace{F_{n+2} - 1}_{(n+2)\text{-te Zahl minus } 1.}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

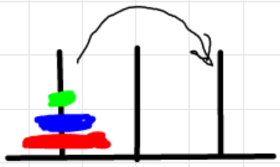
$$n = 1 \quad \sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1 \checkmark$$

Induktionsannahme: $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$ zu zeigen: $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2} - 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1 \checkmark$$

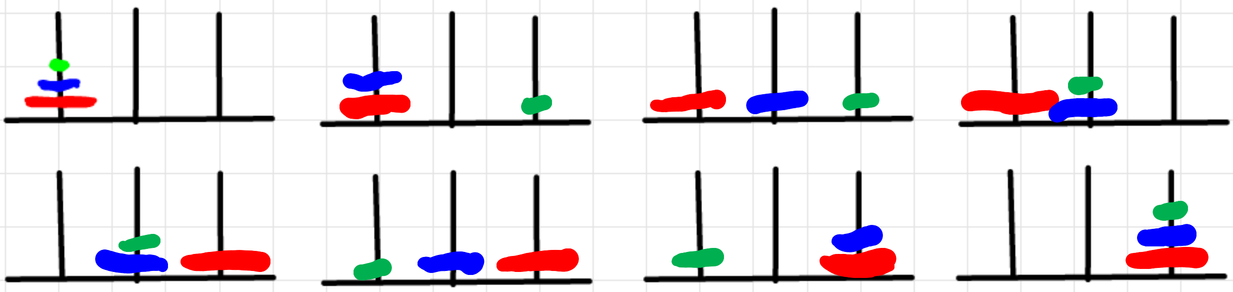
Ü Implementieren Sie eine Funktion in C, die die n-te Fibonacci-Zahl berechnet. (↝ Vorlesung)

Rekursion – Türme von Hanoi

$n = 3$: 

Problem: Wir wollen n Scheiben vom linken Stapel auf den rechten verschieben. Bei jedem Zug darf nur die oberste Scheibe auf einen anderen Stapel versetzt werden. Des Weiteren darf eine Scheibe nicht auf eine kleinere Scheibe gelegt werden.

Wieviele Verschiebungen braucht man bei n Scheiben mindestens? z.B. für $n=3$:



Bei 3 Scheiben 7 Verschiebungen!

Bezeichne T_n die Anzahl der Verschiebungen bei n Scheiben:

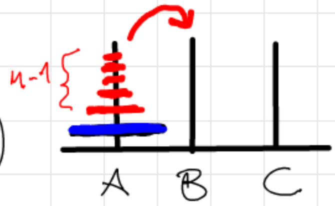
#Scheiben n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n #Verschiebungen	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Wie können wir dieses komplexe Problem angehen?

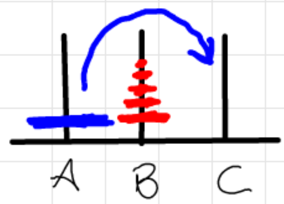
→ REKURSIV!

Rekursiver Algorithmus bei n Scheiben

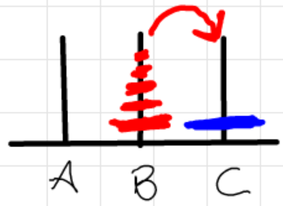
(1) Verschiebe die oberen $n-1$ Scheiben auf B (T_{n-1} Verschiebungen!)



(2) Verschiebe die verbliebene Scheibe nach C (1 Verschiebung!)



(3) Verschiebe die $n-1$ Scheiben von B nach C (T_{n-1} Verschiebungen!)



Wir erhalten: $\boxed{T_0 = 0, \quad T_n = 2\cdot T_{n-1}+1 \quad (n>0)}$

vs. rekursiv

Man kann hierfür sogar eine explizite Formel angeben:

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen Sie $\boxed{T_n = 2^n - 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

IA: $n=0$ LS $T_0 = 0$

RS: $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

IV: $n=k$: $T_k = 2^k - 1$ soll gelten

IS: $n=k \to n=k+1$ zzg.: $T_{k+1} \overset{!}{=} 2^{k+1}-1$

$$T_{k+1} = \underbrace{T_{(k+1)-1}}_{T_k = 2^k-1} + 1 = \underbrace{2(2^k-1)+1}_{2^{k+1}-1} = 2^{k+1}-1$$

Rekursion – Sparplan

Sie legen pro Jahr 1.000€ auf ein Sparkonto, das mit 2% p.a. verzinst wird.

Frage: Wieviel Kapital haben Sie nach 20 Jahren?

Bezeichne K_n das Kapital am Anfang des n-ten Jahres:

$$K_1 = 1.000$$

$$K_2 = \underbrace{K_1}_{\text{Kapital vom Vorjahr}} + \underbrace{2\% \cdot K_1}_{\text{Zinsen}} + \underbrace{K_1}_{\text{Sparrate}} = 1{,}02 \cdot K_1 + K_1$$

$$K_3 = K_2 + 2\% \cdot K_2 + K_1 = 1{,}02 \cdot K_2 + K_1 = (1{,}02^2 + 1{,}02 + 1) K_1$$

$$\vdots$$

$$K_n = K_{n-1} + 0{,}02 \cdot K_{n-1} + K_1 = 1{,}02 K_{n-1} + K_1$$

$$= \underbrace{(1{,}02^{n-1} + \dots + 1{,}02 + 1)}_{\frac{1-1{,}02^n}{1-1{,}02}} \cdot K_1$$

Es ergibt sich folgende **rekursive Formel** für Ihr Kapital: ← gut für EXCEL

$$\boxed{K_1 = 1.000{,}-€ \quad K_n = 1{,}02 \cdot K_{n-1} + K_1}$$

Mit der geometrischen Summenformel folgt:

$$K_n = \frac{1-1{,}02^n}{1-1{,}02} \cdot K_1 = \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} \cdot K_1$$

gut für direkte Berechnung

Antwort: Nach 20 J. haben wir $K_{20} = 24.297{,}37€ = \frac{1{,}02^{20}-1}{0{,}02} \cdot 1000$

$\boxed{Ü}$ Zeigen Sie: $\boxed{K_n = \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} K_1}$

IA: $n=1$ LS $K_1 = 1000$

RS $\frac{1{,}02^1 - 1}{0{,}02} \cdot 1000 = 1000$

IV: $n=k$ $K_k = \frac{1{,}02^k - 1}{0{,}02} \cdot K_1$

IS: $n=k \to n=k+1$ zzg.: $K_{k+1} = \frac{1{,}02^{k+1} - 1}{0{,}02} \cdot K_1$

$$K_{k+1} = 1{,}02 \cdot K_{(k+1)-1} + K_1 = \frac{1{,}02^k - 1}{0{,}02} \cdot K_1 + K_1 \frac{0{,}02}{0{,}02}$$

$$= \frac{1{,}02 \cdot (1{,}02^k - 1) + 0{,}02}{0{,}02} \cdot K_1 = \frac{1{,}02^{k+1} - 1{,}02 + 0{,}02}{0{,}02} \cdot K_1$$

$$= \frac{1{,}02^{k+1} - 1}{0{,}02} \cdot K_1$$