



PRIMZAHLEN, GGT UND EA, DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN UND EEA

* **Primzahl.** Ist 233 eine Primzahl? Überprüfen Sie das, indem Sie der Reihe nach für die Primzahlen 2, 3, 5, 7, ... feststellen ob sie Teiler von 233 sind. Probieren Sie nicht länger als nötig!

Lösung.

$$\sqrt{233} \approx 15,26$$

$$\begin{array}{l} 2 \nmid 233 \\ 3 \nmid 233 \\ 5 \nmid 233 \\ 7 \nmid 233 \\ 11 \nmid 233 \\ 13 \nmid 233 \end{array} \rightarrow \text{PRIM}$$

Eigener Lösungsversuch.

Primfaktorzerlegung und Teilerfremd. Gegeben seien 98, 192 und 53.

1. Finden Sie die Primfaktorzerlegungen der genannten Zahlen.
2. Welche dieser Zahlen sind zueinander teilerfremd?
3. Wieviele Teiler besitzt 192? Gehen Sie systematisch vor - es ist nicht notwendig die Liste aller Teiler zu erstellen.

Lösung.

$$1.) \quad 98 = 2 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$192 = 2 \cdot 86 = 2^2 \cdot 43$$

$$53 = 53$$

$$2.) \quad \text{ggT}(98; 192) = 2$$

$$\text{ggT}(98; 53) = 1$$

$$\text{ggT}(192; 53) = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ggT}(98; 192) = 2 \\ \text{ggT}(98; 53) = 1 \\ \text{ggT}(192; 53) = 1 \end{array} \right\} \text{teilerfremd}$$

Eigener Lösungsversuch.

* **ggT, Teil 1.** Bestimmen Sie $\text{ggT}(296, 192)$ mit allen drei Verfahren der Vorlesung, also mittels:

~~= 8~~

1. $T(296) \cap T(192)$
2. Primfaktorzerlegung
3. Euklidischer Algorithmus

Lösung.

$$296 = 1 \cdot 192 + 104$$

$$192 = 1 \cdot 104 + 88$$

$$104 = 1 \cdot 88 + 16$$

$$88 = 5 \cdot 16 + 8$$

$$16 = 2 \cdot \underline{8} + 0$$

Eigener Lösungsversuch.

ggT, Teil 2. Berechnen Sie mit dem Euklidschen Algorithmus:

1. ggT(261,123)

2. ggT(49,255)

Lösung.

$$\begin{aligned} 261 &= 2 \cdot 123 + 15 \\ 123 &= 8 \cdot 15 + \underline{3} \\ 15 &= 5 \cdot \underline{3} + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 255 &= 5 \cdot 49 + 10 \\ 49 &= 4 \cdot 10 + 9 \\ 10 &= 1 \cdot 9 + 1 \\ 9 &= 3 \cdot \underline{1} + 0 \end{aligned}$$

Eigener Lösungsversuch.

* Diophantische Gleichungen, Teil 1.

1. Hat die Gleichung $36x + 15y = 6$ ganzzahlige Lösungen? Geben Sie diese ggf. an.
2. Berechnen Sie alle ganzzahligen Lösungen von $36x + 15y = 300$. Gibt es Lösung mit positivem x und positivem y ?

Lösung.

$$36x + 15y = 6 \quad 3 \mid 6 \quad \checkmark$$

$$36 = 2 \cdot 15 + 6 \quad -2 \cdot 5 \quad 36 \cdot (-2) + 15 \cdot 5 = 3 \quad | \cdot 2$$

$$15 = 2 \cdot 6 + 3 \quad -1 \cdot 2 \quad 36 \cdot (-4) + 15 \cdot 10 = 6$$

$$6 = 2 - 3 \cdot 1 \quad 0 \cdot 1$$

$$L = \{ -4 + 5z; 10 - 12z \mid z \in \mathbb{Z} \}$$

Eigener Lösungsversuch.

Diophantische Gleichungen, Teil 2. Berechnen Sie falls möglich alle ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen:

1. $13x + 7y = 1$

2. $13x + 7y = 5$

3. $25x + 35y = 45$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Diophantische Gleichungen, Teil 3. Berechnen Sie alle natürlichen Zahlen x und y mit $68x + 23y = 1000$.

Lösung.

$$1 \mid 1000 \quad \checkmark$$

$$68 = 2 \cdot 23 + 12 \quad -1 \cdot 3$$

$$23 = 1 \cdot 22 + 1 \quad 1 \cdot -7$$

$$22 = 22 \cdot 1 + 0 \quad 0 \cdot 1$$

$$68(-1) + 23 \cdot 3 = 1 \quad | \cdot 1000$$

$$68(-1000) + 23 \cdot 3000 = 1000$$

$$\mathbb{L} \left\{ -1000 + 23z, 3000 - 68z \mid z \in \mathbb{Z}; z \approx [44, 49] \right\}$$

Eigener Lösungsversuch.