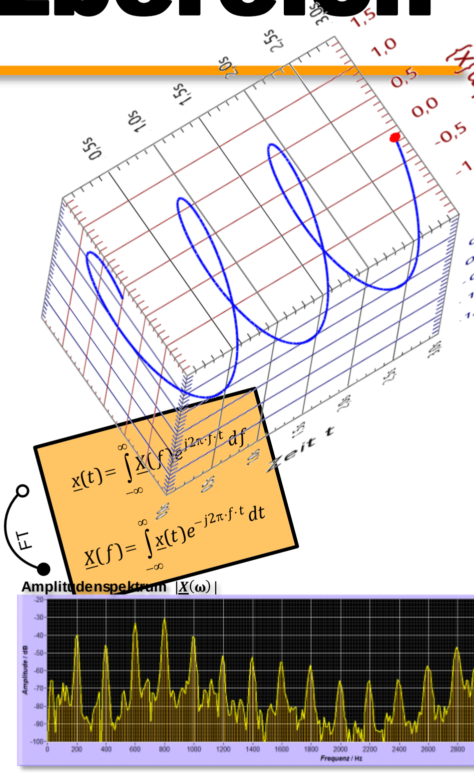
TGI – Kapitel 6:

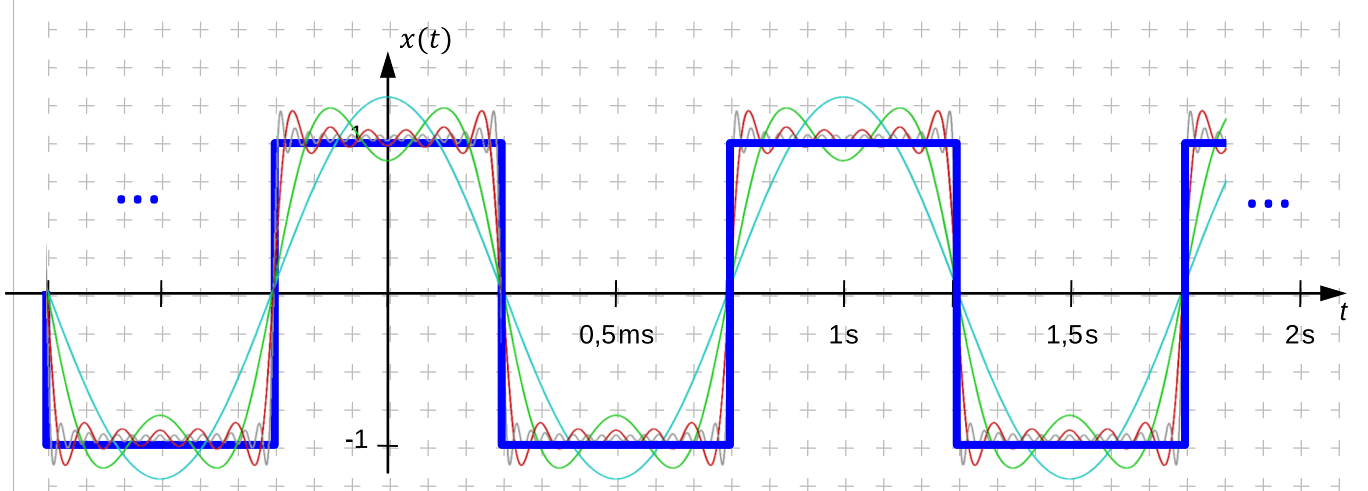
Betrachtung von Signalen im Frequenzbereich



Inhalt dieses Kapitels:

Approximation einer periodischen Rechteckschwingung

Mit Hilfe der *Fourierreihe* lässt sich ein periodisches Signal als Summe gewichteter Sinus- und Kosinusschwingungen darstellen, deren Frequenz jeweils ein ganzzahliges Vielfaches der sog. ***Grundfrequenz*** des Signals ist:



Obiges **Bild** zeigt die sukzessive Annäherung durch Superposition von 1, 2, 3, 4 cos-Schwingungen.
S.a. Demoprogramm von Prof. Michael Diegelmann: http://diegelmann.fh-rosenheim.de/#FourierSynthesis.

[1] *Jean Baptiste Fourier* (1768 – 1830), frz. Mathematiker & Physiker

Lernziele dieses Kapitels:

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels …

- ⇒ können Sie sowohl Signale, als auch Systeme nicht nur im Zeitbereich, sondern alternativ auch im sog. *Spektralbereich* betrachten, z.B. als *Fourierreihe* oder *Fouriertransformation*.
- ⇒ Sie wissen, dass diese Darstellung im *Frequenzbereich* äquivalent zur Darstellung im *Zeitbe-reich* ist, aber oftmals günstiger, um bestimmte Phänomene an Systemen zu verstehen.

Taxonomie / Kompetenzart	Kennen	Können	Verstehen
Fach-kompetenz	Wenn Sie qualitative Eigenschaften eines Signals kennen (z.B. Symmetrien, Abtastung, Periodizität, Gleichanteil, Kausalität, etc.) können Sie daraus die resultierenden Eigenschaften im Frequenzbereich (FT oder FR) vorhersagen; und umgekehrt…		
Methoden-kompetenz		Kompetente Bedienung der Demoprogramme zur Vorlesung – unter Kenntnis aller Parameter!	
Persönliche & soziale Kompetenz	<u>Während Prüfungsvorbereitung in den Weihnachtsferien:</u> Formulierung finaler Fragen an den Prof.: Sie bestimmen damit die Qualität und die Detailtiefe seiner Tipps für Ihre bevorstehende Prüfung!	**Empfehlung des Profs:** Erstellen von 2 DIN-A4-Seiten Formelsammlung f. TGI-Teil I *Grundlagen der Elektrotechnik* Eine selbstgeschriebene Formelsammlung bringt Ihnen in der Prüfung sicher mehr, als das handschriftliche Kopieren aller Übungsaufgaben samt Lösungsvorschlägen!	Bewusstsein, dass es jetzt wichtig ist, am Ball zu bleiben. Damit der sehr abstrakte Stoff greifbar wird, ist es unabdingbar, mit den Demoprogrammen zu ‚spielen'.

Periodische Signale

■ **Ein zeitkontinuierliches Signal $\tilde{x}(t)$ heißt periodisch, wenn für alle Zeiten gilt:**

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T_0)$$

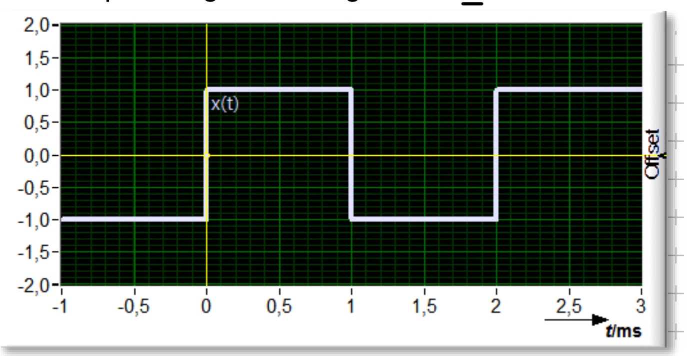
mit $\boldsymbol{T_0} > 0$: *Grundperiode*, kleinstes Zeitintervall, mit dem sich der Signalverlauf wiederholt

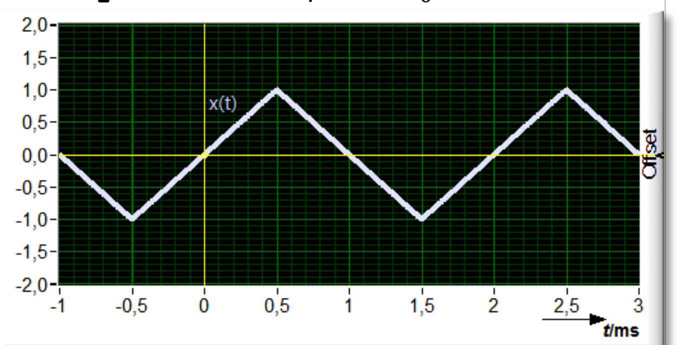
und $f_0 = \frac{1}{T_0}$: *Grundfrequenz*

Beispiel **Periodische Signale:**

- Kosinus-Schwingung $\tilde{x}(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \cos[2\pi f_0 (t + T_0)]$

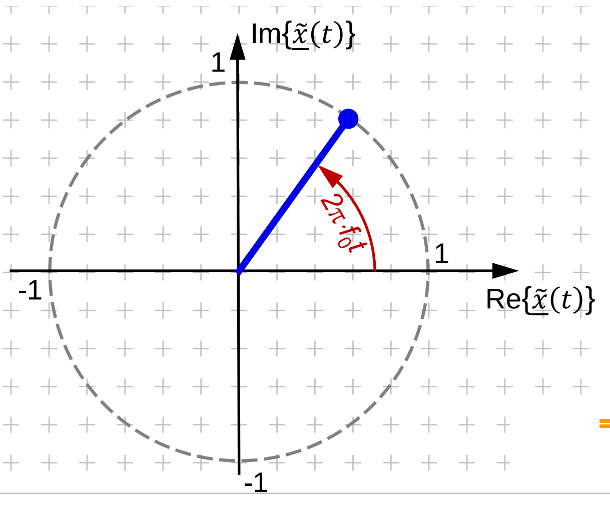
- Beliebige nicht-sinusförmige Schwingungen, wie beispielsweise als Kurvenverläufe elektrischer Spannungen im Programm `6_FourierreiheAnalyse.exe`. Beispiel für $T_0 = 2\ \mathrm{ms}$.





- Sprachsignal eines gesprochenen Vokals

- Komplexe exponentielle Schwingung:



$$\tilde{x}(t) = e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} = e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t + T_0)}$$
$$= \cos(2\pi \cdot f_0) + j \cdot \sin(2\pi \cdot f_0)$$

⇨ Eine Einführung in die komplexen Zahlen finden Sie im Anhang auf den Seiten 24 und 25 .

Komplexe Schwingung – Aufgaben

Demonstration Ansichten einer komplexen exponentiellen Schwingung

Das Programm **`4_KomplexeSchwingung.exe`** zeigt eine komplexe Schwingung $\underline{\tilde{x}}(t) = e^{j\cdot 2\pi \cdot f_0 t}$:

a) Welche geometrische Figur repräsentiert der „*Momentanwert* $\underline{\tilde{x}}(t)$"?

b) Welche mathematische Funktion repräsentiert $\mathrm{Re}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$?

c) Welche mathematische Funktion repräsentiert $\mathrm{Im}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$?

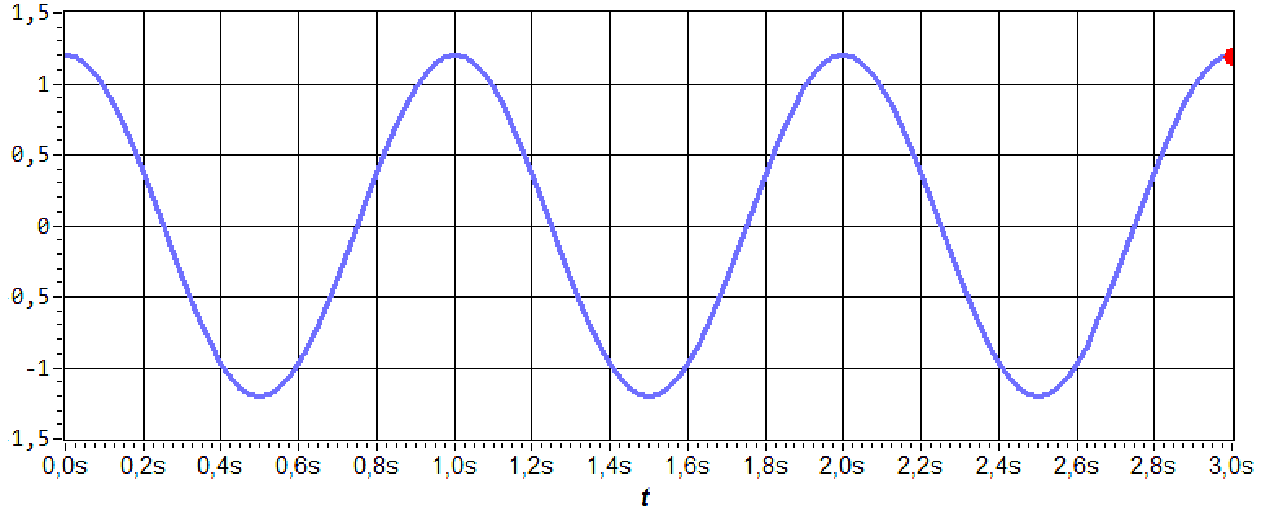
d) Was ändert der Parameter *Frequenz* f_0 an den Kurven $\mathrm{Re}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$ und $\mathrm{Im}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$?

e) Welche der drei Darstellungen ändern sich bei <u>negativen</u> Frequenzen?

f) Was verändert der Parameter *Amplitude* an den Kurven $\mathrm{Re}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$ und $\mathrm{Im}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$?

Übungsaufgabe Betrachtung eines Signals als Ansicht einer komplexen Schwingung

Das im <u>Bild</u> unten gezeigte periodische Signal sei eine Ansicht der komplexen Schwingung $\underline{\tilde{x}}(t)$:



a) Ist hier der Realteil oder der Imaginärteil dargestellt (Begründung!)?

b) Wie lautet die Formel mit korrekten Parametern für $\underline{\tilde{x}}(t)$? Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen.

c) Skizzieren Sie $\mathrm{Im}\{\underline{\tilde{x}}(t)\}$ für eine der von Ihnen gefundenen Lösungen!

Darstellung periodischer Signale als *reelle Fourierreihe* (FR)

Fourier-Synthese

Wechselgrößen – auch nicht sinusförmige – können auf eine Überlagerung mehrerer sinusförmiger Wechselvorgänge (sog. *orthogonales* Funktionensystem) mit unterschiedlicher Amplitude, Frequenz, und Phase zurückgeführt werden. Mathematisch ist das die Darstellung als *Fourierreihe*:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t), + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t) \;, \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Die Zahlen a_k und b_k werden als ***Fourierkoeffizienten*** bezeichnet. Da sie auch negativ sein können, sind sie nicht als Amplituden zu interpretieren, sondern als *Gewichte*.

Bezeichnung der FR-Spektralkomponenten als *Harmonische* und *Oberwellen*

Es bedeuten: $\boldsymbol{a_0}$ ≙ ‚*Gleichanteil*‘;

$\boldsymbol{a_1} \cdot \cos(2\pi \cdot 1 f_0 \cdot t)$ & $\boldsymbol{b_1} \cdot \sin(2\pi \cdot 1 f_0 \cdot t)$ ≙ ‚*1. Harmonische*‘ ≙ ‚*Grundwelle*‘

$\boldsymbol{a_2} \cdot \cos(2\pi \cdot 2 f_0 \cdot t)$ & $\boldsymbol{b_2} \cdot \sin(2\pi \cdot 2 f_0 \cdot t)$ ≙ ‚*2. Harmonische*‘ ≙ ‚*1. Oberwelle*‘

$\boldsymbol{a_k} \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t)$ & $\boldsymbol{b_k} \cdot \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t)$ ≙ ‚*k-te Harmonische*‘ ≙ ‚*(k-1)te Oberwelle*‘

Beispiel **Parameter der Fourierreihe**

Folgendes Signal soll als reelle FR (*Fourierreihe*) dargestellt werden:

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi \cdot 4\,\mathrm{kHz} \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 6\,\mathrm{kHz} \cdot t)$$

Bestimmen Sie die Grundfrequenz f_0 sowie die Fourier-Koeffizienten des Signals.

Vorteil der Betrachtung eines Signals als Fourierreihe

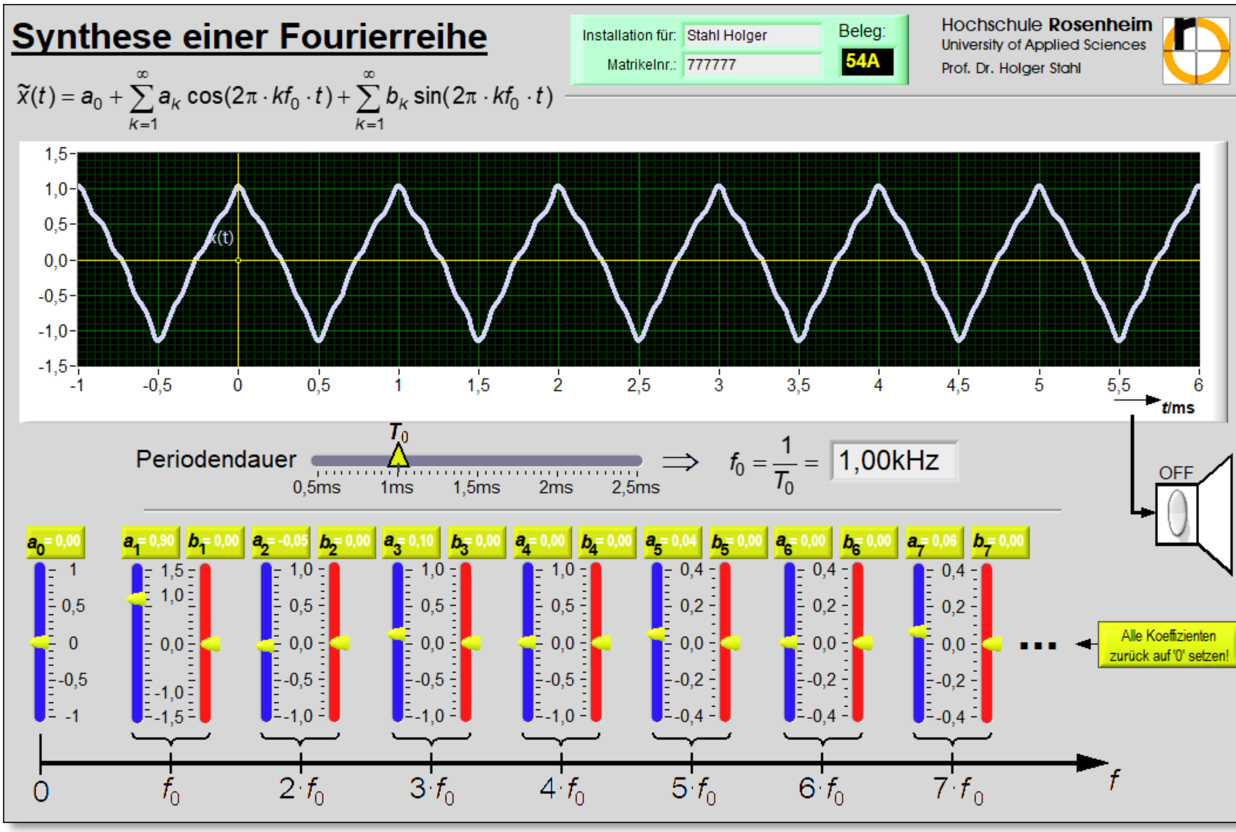
Die Betrachtung von Signalen als sog. *Spektrum* (die Fourierkoeffizienten) bietet einige Vorteile:

- Bestimmung der Ausgangssignale von LTI-Systemen <u>ohne</u> Faltungsoperation (s. Kapitel 7)
- Veranschaulichung des Abtasttheorems (s. Kapitel 7)
- Signale, die verschiedene Frequenzen haben, lassen sich über dasselbe Medium übertragen und können anschließend wieder getrennt werden (z.B. Rundfunksender), s. Seite 12.

Synthese periodischer Signale

Demonstration Approximation eines Dreiecksignals aus Sin- und Cos-Schwingungen

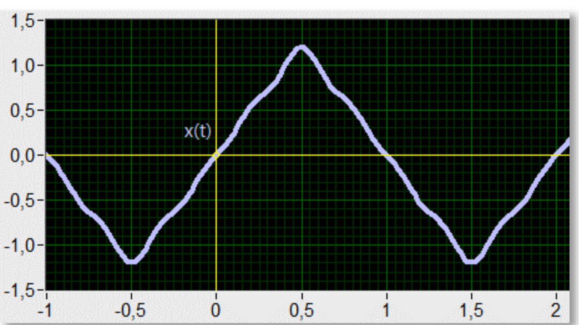
a) Erzeugen Sie mit dem Programm **`5_FourierreiheSynthese.exe`** ein Signal wie im **Bild**:



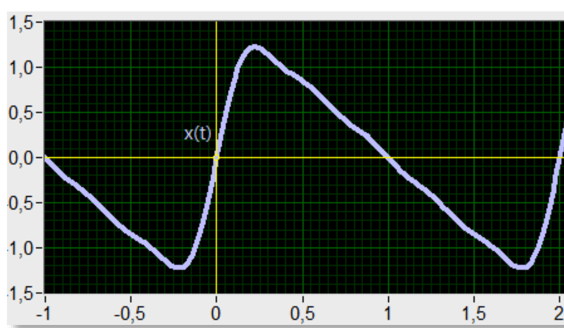
b) Warum ist es hierbei nicht möglich, ein vollkommen <u>exaktes</u> Dreiecksignal zu synthetisieren?

Übungsaufgabe Approximieren Sie mit dem Programm folgende Signale…

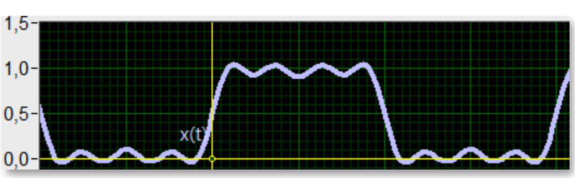
a)



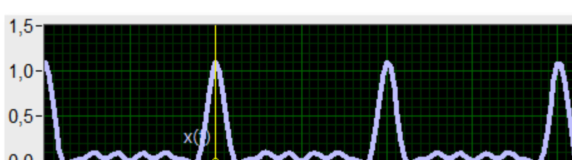
b)



c)



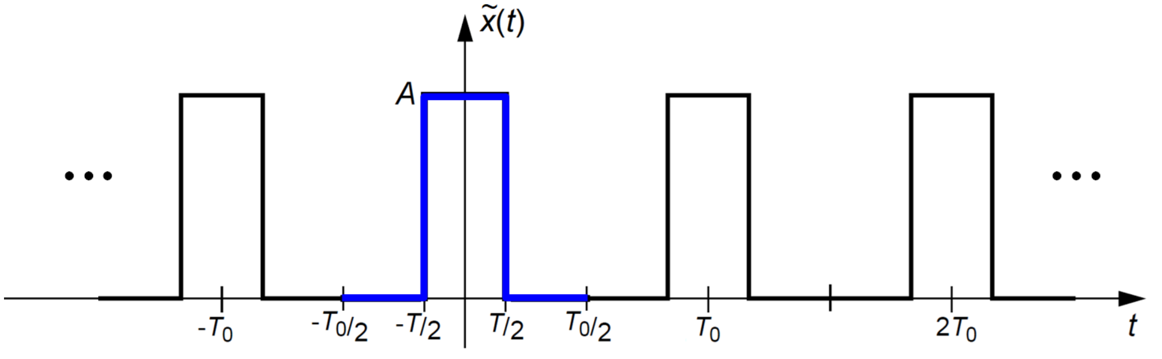
d)



FR-Entwicklung einer Rechteckwelle

Beispiel **Betrachtet wird eine Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$**

mit der **Impulsbreite *T***, der **Periodendauer T_0** und der **Amplitude *A***:



- Die Fourierkoeffizienten hierzu lauten (Die ausführliche Berechnung der Analyseintegrale finden Sie im Anhang auf Seite 26):

$$a_0 = A \cdot \frac{T}{T_0}; \qquad a_k = 2A \cdot \frac{\sin\left(2\pi \cdot k \cdot {}^{T}\!/_{2T_0}\right)}{k\pi}$$

$$b_k = 0$$

Demonstration **Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ mit $T_0 = 2$ ms, $T = 0,5$ ms und $A = 2$**

a) Wie lauten die Grundfrequenz und die Fourierkoeffizienten für $\tilde{x}(t)$?

b) Approximieren Sie das Signal mit **`5_FourierreiheSynthese.exe`** für $k \leq 7$!

Symmetrieeigenschaften der FR

Folgende Vereinfachungen ergeben sich bei symmetrischen reellen Signalen:

1. ***Achsen***symmetrie, d.h. $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$:

> Nur <u>Gleichanteil</u> $\boldsymbol{a_0}$ und <u>cos</u>-Schwingungen $\boldsymbol{a_k} \cdot \cos(2\pi \cdot kf_0 \cdot t)$,
> alle $\boldsymbol{b_k} = \mathbf{0}$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$!

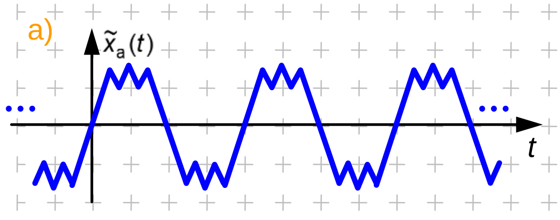
2. ***Punkt***symmetrie, d.h. $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)$:

> Nur <u>sin</u>-Schwingungen $\boldsymbol{b_k} \cdot \sin(2\pi \cdot kf_0 \cdot t)$,
> alle $\boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$!

3. ***Halbwellen***symmetrie, d.h. $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$:

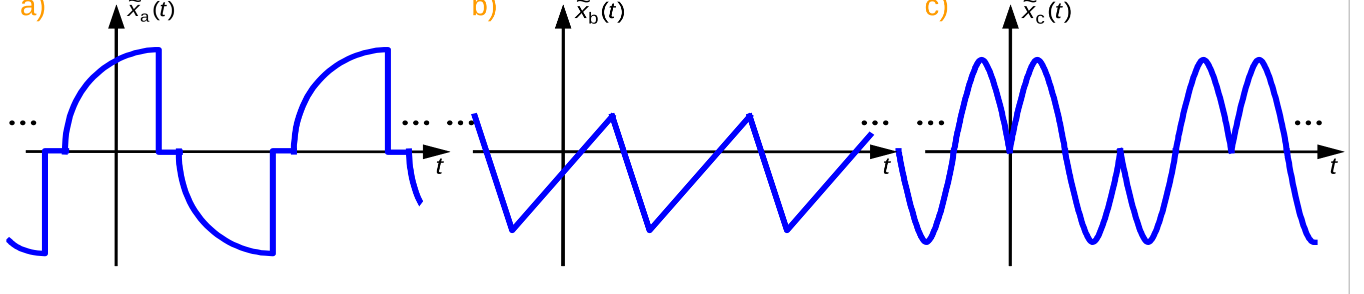
> Es existieren nur <u>ungerade</u> Harmonische (d.h. für $k = 1, 3, 5, \ldots$)
> d.h. alle $\boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$ für $k = 0, 2, 4 \ldots$ und $\boldsymbol{b_k} = \mathbf{0}$ für $k = 2, 4, 6 \ldots$!

Beispiel **Welche Symmetrieeigenschaften haben die beiden folgenden Signale?**



Übungsaufgabe **Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der FR**

Der Aufwand für die FR-Analyse eines Signals verringert sich, wenn vorhandene Symmetrieeigenschaften des Signals erkannt werden. Betrachten Sie die drei folgenden periodischen Signale im **Bild** unten. Welche Koeffizienten der zugehörigen FR sind von Null verschieden?



d) Verifizieren Sie die drei Symmetrieaussagen oben auf dieser Seite (d.h. bestimmte Koeffizienten werden zu Null) für die vier Signale aus der Übungsaufgabe von Seite 6 unten.

Darstellung periodischer Signale als *FR mit komplexen Koeffizienten*

Im folgenden fassen wir die Koeffizienten a_k und b_k zur Darstellung der k-ten Harmonischen zu einem **komplexen Koeffizienten** $\underline{X}_k$ zusammen. Die Darstellung des Spektrums wird damit kompakter und übersichtlicher, weil es nur noch einen Koeffizienten für je ein Paar aus sin- und cos-Anteil einer Signalfrequenz kf_0 gibt. Als orthogonales Funktionensystem werden hier statt der reellen sin- und cos-Schwingungen $\sin(2\pi k f_0 t)$ und $\cos(2\pi k f_0)$ **exponentielle Schwingungen** $e^{j\cdot 2\pi\cdot k f_0 t}$ genutzt.

Synthese- und Analysegleichungen der komplexen FR

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k\, e^{jk\cdot 2\pi f_0\cdot t} \quad , \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fourierreihe

$$\underline{X}_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\cdot 2\pi f_0\cdot t}\, dt$$

Entwicklungskoeffizienten

Die Gesamtheit aller Fourierkoeffizienten eines Signals wird auch *Spektrum* genannt.

Symmetrieeigenschaften der FR eines reellen Signals

- Für reelle Signale gilt: $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*(t)$ und damit $\underline{X}_{-k} = \underline{X}_k^*$
- Damit lässt sich jeder komplexe Koeffizient $\underline{X}_k$ in zwei reelle Koeffizienten a_k und b_k überführen:

$$a_0 = \underline{X}_0\;;\quad \left.\begin{aligned} a_k &= \underline{X}_k + \underline{X}_{-k} = 2\cdot \mathrm{Re}\{\underline{X}_k\} \\ b_k &= \frac{-\underline{X}_k + \underline{X}_{-k}}{j} = -2\cdot \mathrm{Im}\{\underline{X}_k\} \end{aligned}\right\}\ \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel **Parameter der Fourierreihe**

Folgendes Signal soll als FR mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden, vgl. Seite 5 :

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi\cdot 4\,\mathrm{kHz}\cdot t) + \sin(2\pi\cdot 6\,\mathrm{kHz}\cdot t)$$

Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten des Signals.
Ist die Grundwelle vorhanden? Welche Harmonische sind vorhanden?

Rechteckimpulsfolge – Darstellung als FR mit komplexen Koeffizienten

Beispiel **Betrachtet wird eine Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$, wie auf Seite 7 abgebildet,**
mit der **Impulsbreite *T***, der **Periodendauer T_0** und der **Amplitude *A***:

- Die komplexen Fourierkoeffizienten hierzu lauten (Rechnung im Anhang auf der Seite 26 unten):

$$\underline{X}_k = A \cdot \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi \cdot k \cdot T}{2 \cdot T_0}\right)}{k\pi}$$

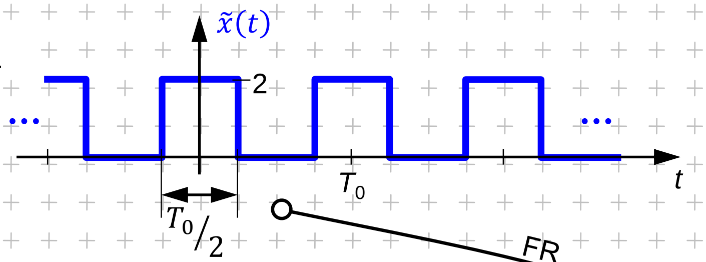
Übungsaufgabe **FR-Entwicklung für die Rechteckimpulsfolge nach obiger Formel:**

a) Berechnen Sie die ersten vier FR-Koeffizienten $\underline{X}_0$ ... $\underline{X}_3$ für $T_0 = 2\ \mathrm{ms}$, $T = 0{,}5\ \mathrm{ms}$ und $A = 2$.
b) Prüfen Sie, ob die „Symmetrieeigenschaften der FR eines reellen Signals“ von S. 9 erfüllt sind!
c) Verifizieren Sie, dass die komplexen und die reellen Koeffizienten identisch sind .

Übungsaufgabe **Symmetrische Rechteckimpulsfolge (Puls-/Pausenverhältnis 1:1):**

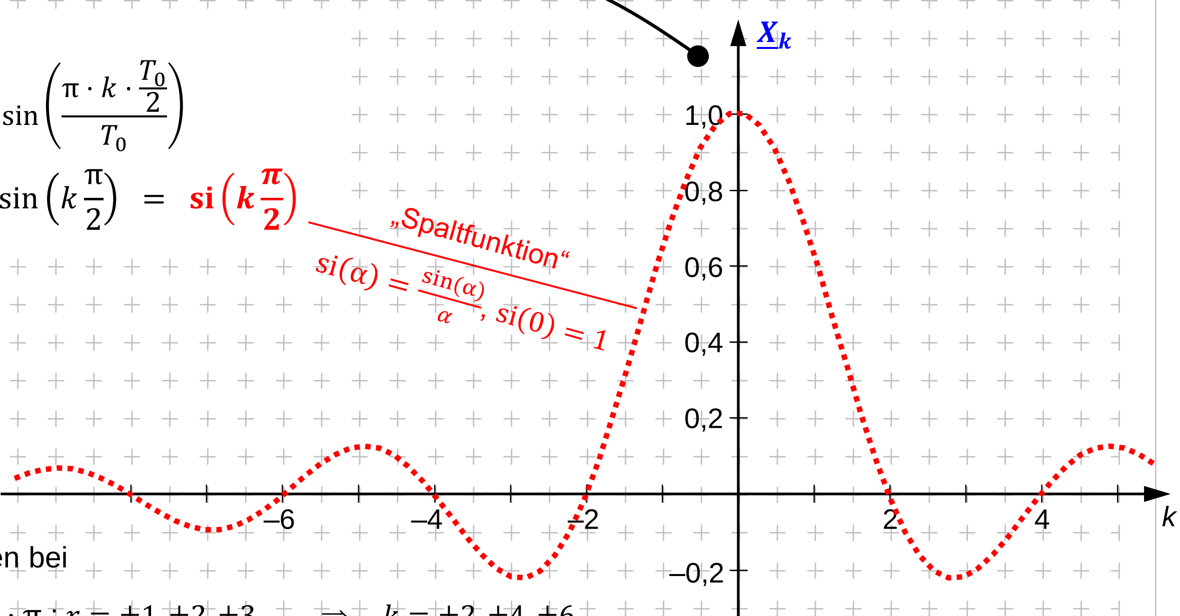
⇒ Skizzieren Sie die Koeffizienten $\underline{X}_k$ für $T = T_0/2$ und $A = 2$ in das untenstehende Diagramm:

Signal:



Spektrum:

$$\underline{X}_k = \frac{2}{k\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k \cdot \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$$
$$= \frac{2}{k\pi} \cdot \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad = \quad \mathbf{si}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$



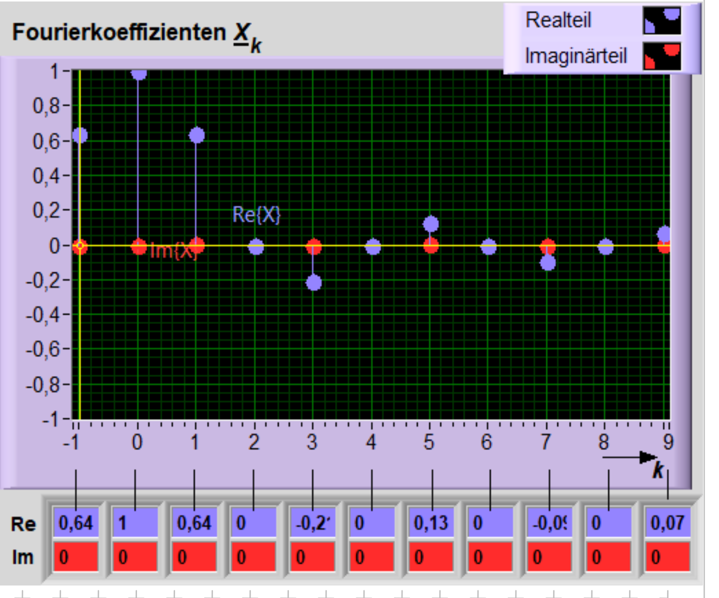
⇒ Nullstellen bei

$$k \cdot \frac{\pi}{2} = r \cdot \pi \;;\; r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$$

Analyse periodischer Signale am Rechner

Demonstration **Analyse des symmetrischen Rechtecksignals mit $T = T_0/2$ und $A = 2$:**

a) Rufen Sie das Programm **`6_FourierreiheAnalyse.exe`** auf und erzeugen Sie ein Signal wie in der 2. Übungsaufgabe auf der vorherigen Seite 10 verwendet, und wie rechts im **Bild** im Spektralbereich dargestellt.



b) Welche Symmetrieeigenschaften (auf der Seite 8) gelten für dieses Signal? Welche FR-Koeffizienten sind daher von Null verschieden?

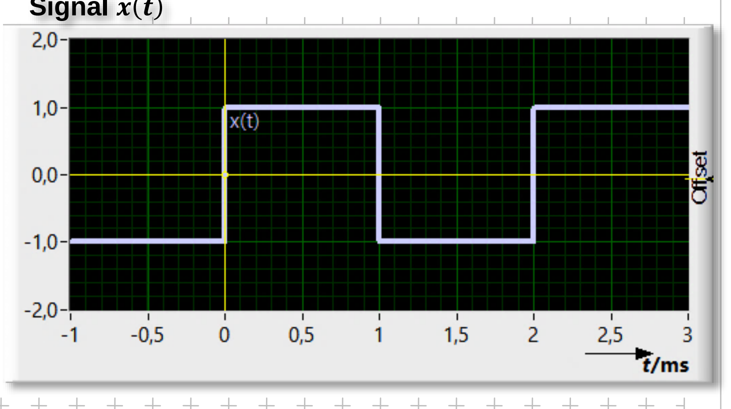
c) Berechnen Sie die reellen FR-Koeffizienten $a_0 \ldots a_7$. Überprüfen Sie die Koeffizienten, indem Sie diese in das Programm **`5_FourierreiheSynthese.exe`** eingeben.

Übungsaufgabe **Modifizierte Rechteckimpulsfolge**

a) Wodurch unterscheidet sich das rechts im **Bild** dargestellte Signal von dem oben behandelten im Zeitbereich?

b) Welche Unterschiede gibt es bei den Koeffizienten der komplexen FR?

c) Wie lauten die Koeffizienten der reellen FR für $k = 0 \ldots 7$? Überprüfen Sie diese wieder mit dem Programm **`5_FourierreiheSynthese.exe`**.

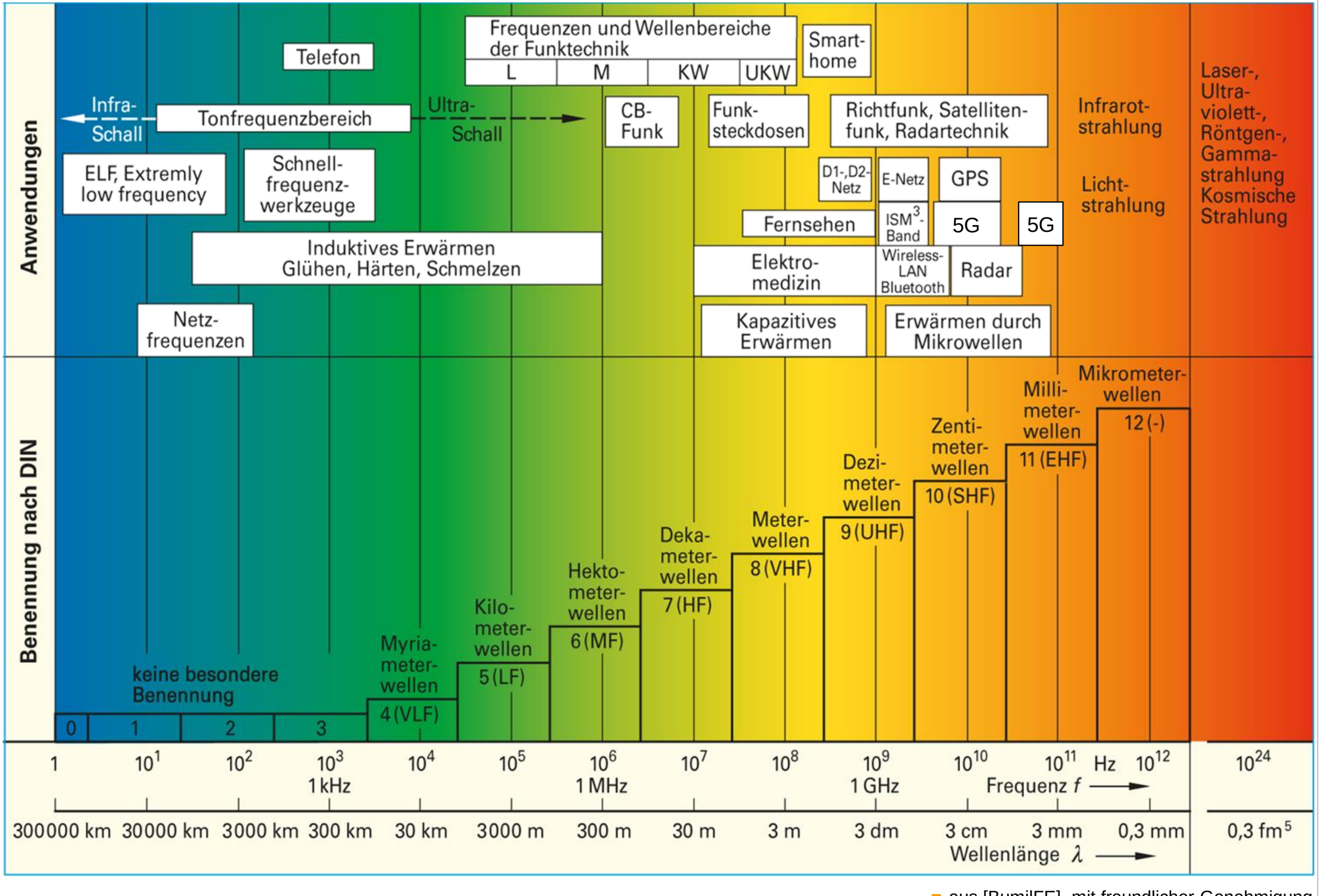


Übungsaufgabe **Dreiecksignal**

⇒ Wiederholen Sie die Analyse und die Synthese auch für das periodische Dreiecksignal.

Frequenzbereiche und einige Anwendungen im Alltag

Auch im alltäglichen Leben unterscheiden wir Signale mit Frequenzen über viele Zehnerpotenzen. Das folgende **Bild** gibt einen sehr groben Überblick aller im Alltag vorkommenden Frequenzbereiche:



■ aus [BumilFE], mit freundlicher Genehmigung

Beispiel **Gefahrenpotential für den Menschen durch elektromagnetische Wellen**

a) Welche (wissenschaftlich anerkannten!) Gefahren durch elektromagnetische Wellen gibt es?

b) In welchen Frequenzbereichen bestehen diese Gefahren jeweils?

Übungsaufgabe **Mit welcher *Frequenz* oder welchem *Frequenzbereich* arbeitet …**

a) das elektrische Stromnetz in Europa,

b) das elektrische Stromnetz in USA,

c) das menschliche Gehör,

d) der UKW(*Ultrakurzwelle*)-Sender *Bayern 3*,

e) ein Mikrowellenherd,

f) Handys der 4. Mobilfunkgeneration *LTE*

g) W-LAN-Standard *WiFi*,

h) W-PAN-Standard *Bluetooth.*

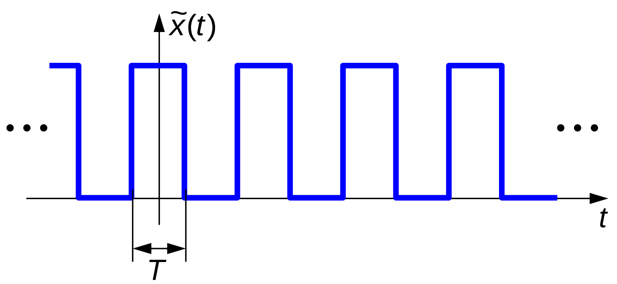
Übergang von der *Fourierreihe* (FR) zur *Fouriertransformation* (FT)

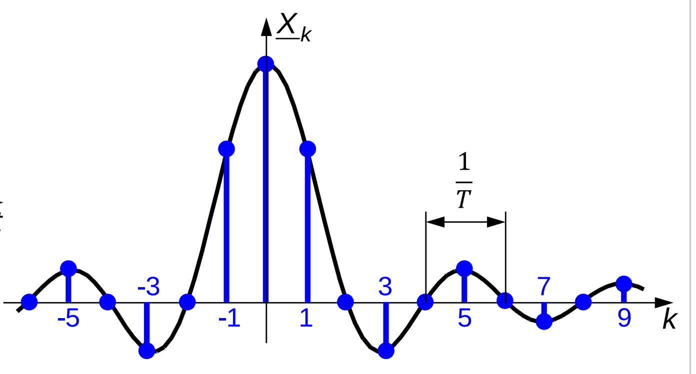
Notwendigkeit der *Fouriertransformation* als Ergänzung zur *Fourierreihe*

Mit der FR können nur periodische Signale in den FB transformiert werden. Viele (streng genommen: alle!) Signale im täglichen Leben sind jedoch nicht-periodisch. So auch die Impulsantwort von LTI-Systemen, die im Spektrum den sog. *Frequenzgang* liefert, mit dem sich die Filterung eines Signals viel anschaulicher darstellen lässt, als durch die Faltung im Zeitbereich.

Auffassung der *Fouriertransformation* als FR mit unendlich großer Periode T_0

☐ Periodisches Signal ○—● FR **☐ Fourierkoeffizienten (vgl. Seite 10)**

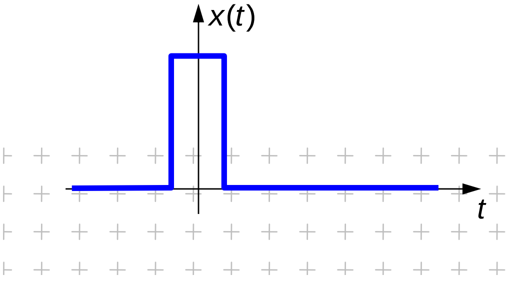


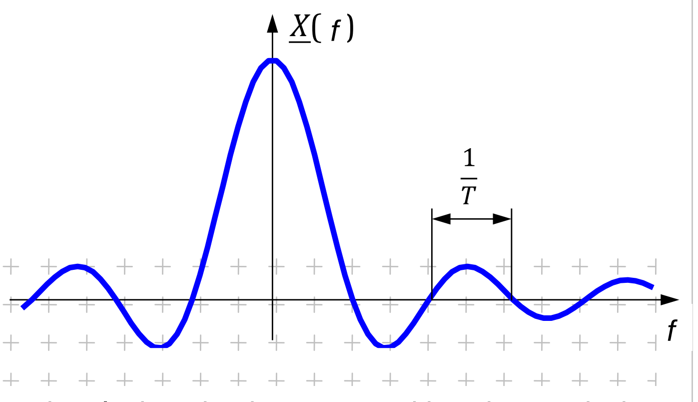


FT ○—●

☐ Fouriertransformation

☐ Nicht-periodisches Signal





⇒ Die Fourierreihe stellt ein periodisches Signal dar durch Superposition harmonischer Schwingungen (z.B. Sinus und Kosinus) der Frequenz $k \cdot f_0$. Die Amplitude dieser Schwingungen ist gewichtet durch die Koeffizienten $\underline{X}_k$.

⇒ Je größer die Periode T_0 des Signals ist, desto kleiner wird der Frequenzabstand $f_0 = 1/T_0$ zwischen den einzelnen Harmonischen.

☐ Übergang zur *Fouriertransformation*:

⇒ Periodizitätsintervall $T_0 \quad \rightarrow \quad \infty$

⇒ diskrete Frequenzfolge $(k \cdot f_0) \quad \rightarrow \quad$ Frequenzkontinuum (f)

Definition der Fouriertransformation (FT)

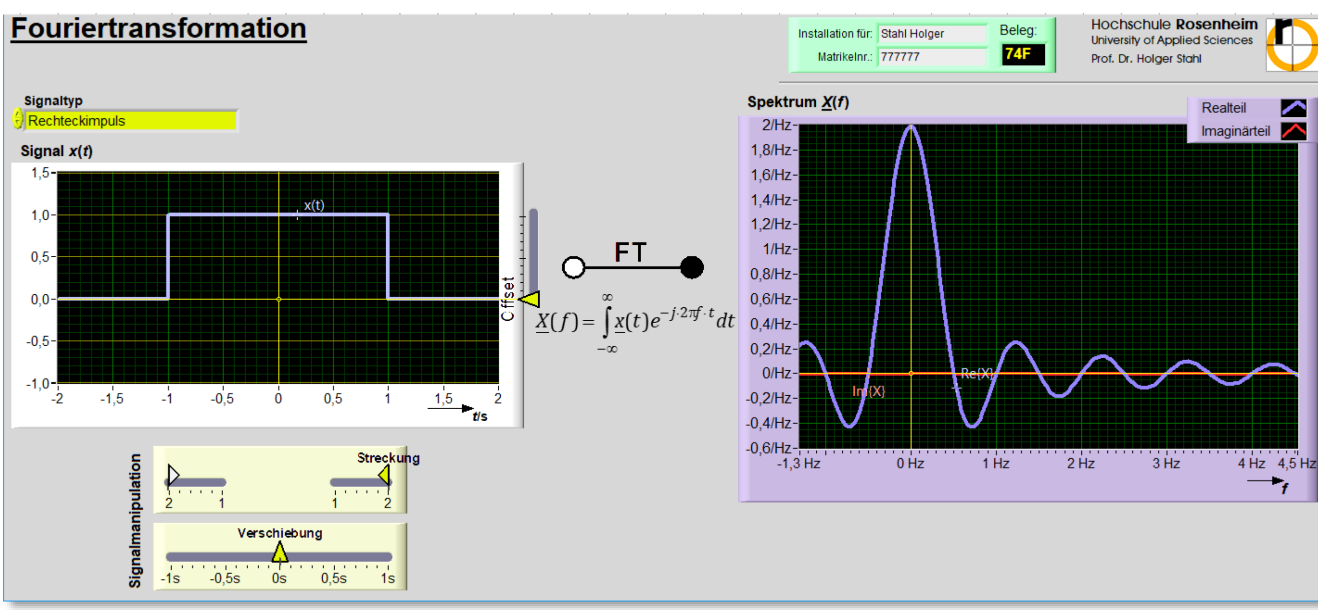
Die *FT* gilt als die „Grund"-Transformation, mit Hilfe derer ein zeitkontinuierliches Signal als frequenzkontinuierliches *Spektrum* betrachtet werden kann. Viele Operationen (*Filterung*, *Modulation*, *Abtastung*) lassen sich im Spektralbereich viel einfacher und anschaulicher betrachten als im Zeitbereich.

Vergleich Synthese- und Analysegleichungen der Fouriertransformation und -reihe

<u>Fouriertransformation</u>		<u>Fourierreihe</u>
$\underline{x}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underline{X}(f)e^{j2\pi\cdot f\cdot t}\,df$	**Synthese** (*inverse FT*)	$\tilde{x}(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\underline{X}_k\,e^{jk\cdot 2\pi f_0\cdot t}$
$\underline{X}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underline{x}(t)e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,dt$	**Analyse** (*FT*)	$\underline{X}_k=\frac{1}{T_0}\int\limits_{T_0}\tilde{x}(t)\,e^{-jk\cdot 2\pi f_0\cdot t}\,dt$

FT[1)]

- <u>Gemeinsamkeit FT und FR:</u>
  - ⇒ Das orthogonale Funktionensystem sind exponentielle Schwingungen $e^{j\cdot 2\pi f}$.
- <u>Unterschiede FT und FR:</u>
  - ⇒ Die FT-Synthese enthält ein Integral über alle Frequenzkomponenten, die FR eine Summe.
  - ⇒ Das Analyse-Integral der FT läuft von $t=-\infty$ bis $+\infty$, das Analyse-Integral der FR nur über eine beliebige Periode.
  - ⇒ Mit der FT können damit auch <u>nicht-periodische</u> Signale transformiert werden, wie z.B. ein einzelner Rechteckimpuls (hier mit dem Programm `7_Fouriertransformation.exe`):



[1)] Die ausgefüllte Seite der Hantel zeigt immer zum Spektrum (d.h. in den Frequenzraum). Die Beschriftung „FT" kann auch weggelassen werden, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Transformationen besteht, z.B. mit der Fourierreihe FR.

Fouriertransformation periodischer Signale

Die FT eignet sich zur Transformation sog. *energiebegrenzter* Signale. Periodische Signale gehören definitiv nicht zu dieser Kategorie. Allerdings lassen sich mit einem Trick auch periodische Signale Fourier transformieren: Wenn man zulässt, dass im Spektralbereich **δ-Impulse** auftreten:

■ Das Spektrum eines periodischen Signals ist eine äquidistante Impulsfolge:

- Wie im Anhang auf S. 27 bewiesen, ist die Fouriertransformierte einer exponentiellen Schwingung ein auf der Frequenzachse verschobener δ-Impuls. Mit der Linearität der FT gilt daher:

⇒ Periodisches Signal $\tilde{x}(t)$ als FR dargestellt = Summe aus exponentiellen Schwingungen:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k \, e^{j2\pi \cdot k f_0 \cdot t} \quad , \; f_0 = \frac{1}{T_0}$$

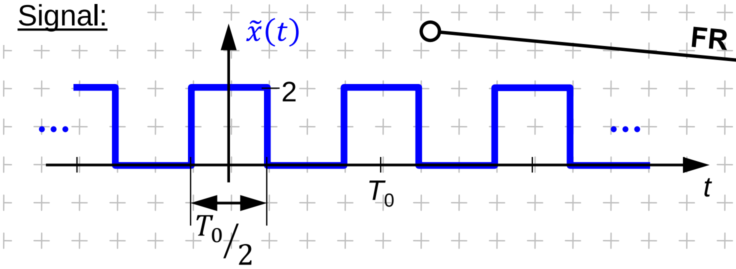
FT

⇒ Dazu das FT-Spektrum $\underline{X}(f)$ = Summe aus verschobenen, gewichteten δ-Impulsen:

$$\underline{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k \cdot \delta(f - k f_0)$$

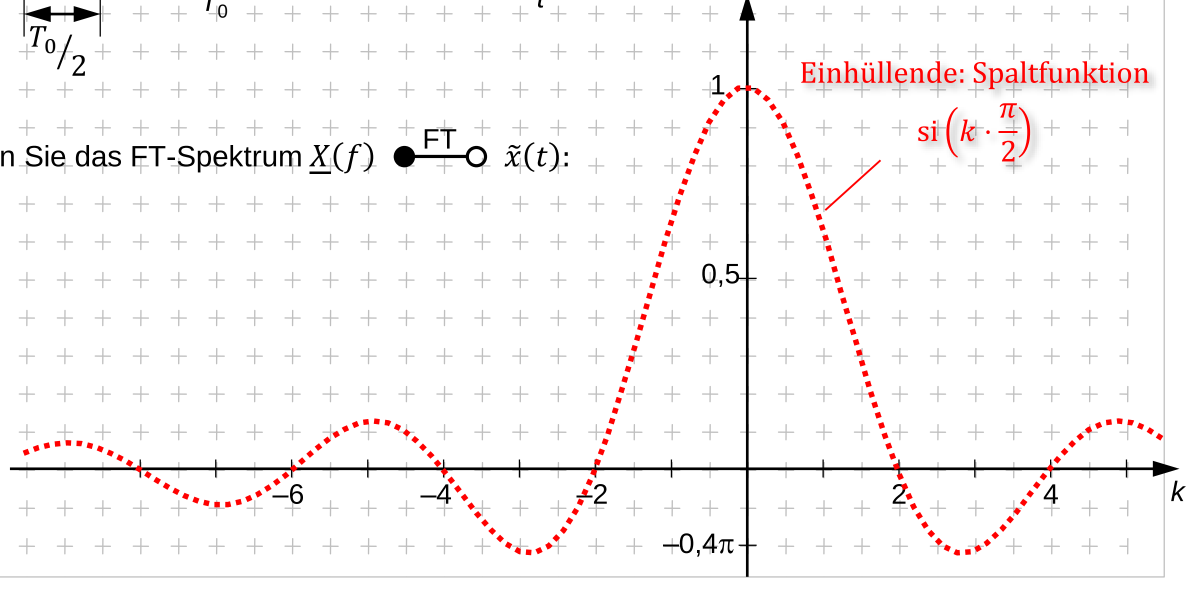
Beispiel **Rechteckimpulsfolge mit Puls-/Pausenverhältnis 1:1**

Betrachtet wird folgendes periodisches Rechtecksignal $\tilde{x}(t)$ mit den FR-Koeffizienten $\underline{X}_k$ (vgl. S. 10):



$$\underline{X}_k = \mathrm{si}\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

⇒ Skizzieren Sie das FT-Spektrum $\underline{X}(f)$ ●—FT—○ $\tilde{x}(t)$:



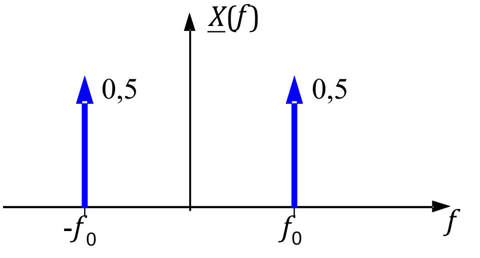
Fouriertransformation periodischer Signale – *Kosinus* und *Sinus*

Beispiel **cos-Signal**[1)]

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi\cdot f_0 t} + e^{-j2\pi\cdot f_0 t}\right)$$

FT

$$\underline{X}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$



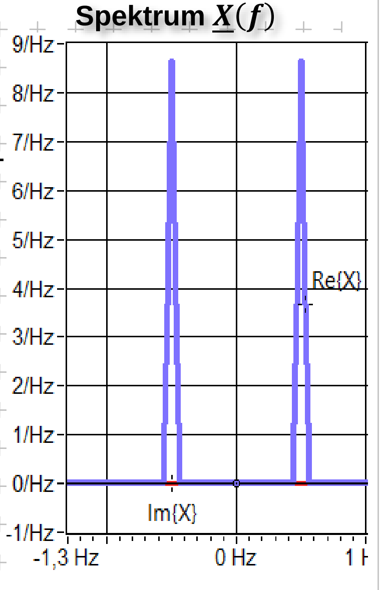
Demonstration **Fragen zur Fouriertransformation verschiedener periodischer Signale**

a) Welche Einheit hat die Frequenzachse im Programm `7_Fouriertransformation.exe`?

b) Welche Einheit hat die Hochachse?

c) Untersuchen Sie ein **cos**-Signal. Prüfen Sie, ob die Impulse im Spektrum an den richtigen Positionen auf der Frequenzachse auftreten.

d) Warum sind Breite und Amplitude der δ-Impulse (**Bild**) nicht korrekt?



e) Untersuchen Sie ein **sin**-Signal. Schaut das Spektrum wie erwartet aus, mit Impulsen an der richtigen Position auf der Frequenzachse?

Übungsaufgabe **Periodisches Rechtecksignal in `7_Fouriertransformation.exe`**

Untersuchen Sie die Rechteckimpulsfolge aus dem Beispiel auf der vorherigen Seite.

a) Prüfen Sie, ob die Frequenzanteile genau an den erwarteten Stellen erscheinen.

b) Woran erkennen Sie im Spektrum eindeutig <u>den Gleichanteil</u> des Signals, sowie dessen Höhe?

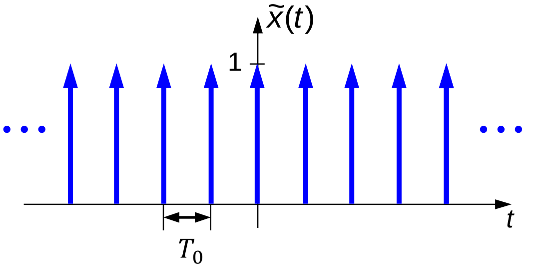
[1)] Zur Erinnerung: Die Fouriertransformation einer exponentiellen Schwingung ist ein verschobener δ-Impuls, s. auch Anhang auf Seite 27 .

Fouriertransformation periodischer Signale – δ-Impulsfolge

Beispiel **Die unendlich ausgedehnte Impulsfolge im Zeitbereich…**

… korrespondiert mit einer unendlich ausgedehnten Impulsfolge im Frequenzbereich:

- Impulsfolge im Zeitbereich: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$



- als FR geschrieben: $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k \, e^{jk2\pi \cdot f_0 \cdot t}$

- Bestimmung der FR-Koeffizienten:

$$\underline{X}_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-jk2\pi \cdot f_0 t} \, dt \;=\; \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \, dt = \frac{1}{T_0}$$

- Mit den Formeln auf Seite 15 ergibt sich die FT $\underline{X}(f) \;\bullet\!\!\overset{\text{FT}}{\longrightarrow}\!\!\circ\; \tilde{x}(t)$ zu:

$$\underline{X}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0)$$

Fouriertransformation nicht-periodischer Signale – Beispiele

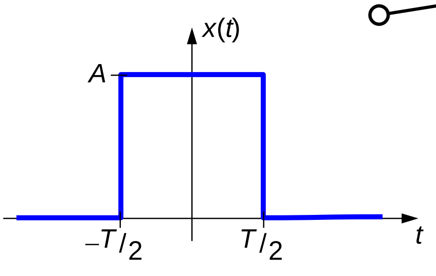
Beispiel Der Rechteck-Impuls

- Signal:

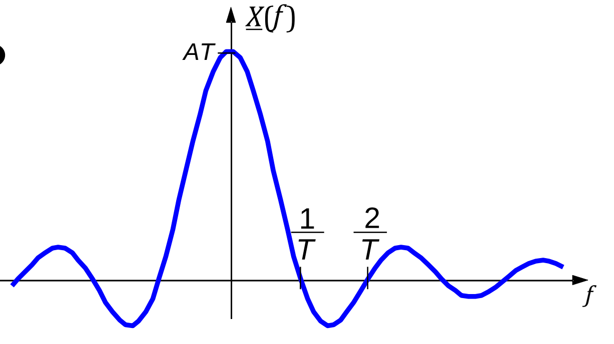
$$x(t)=\begin{cases} A \text{ für } |t|<\frac{T}{2} \\ 0 \text{ für } |t|\geq\frac{T}{2} \end{cases}$$

- Spektrum:

$$\underline{X}(f)=A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,dt = AT\cdot \mathrm{si}(\pi\cdot f\cdot T)$$



FT

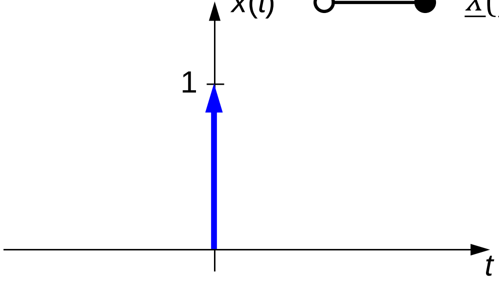


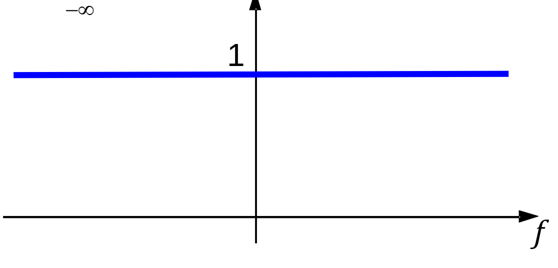
Verständnisaufgabe:
⇨ Welches Spektrum erhält man, wenn man beim obigen Rechtecksignal $x(t)$ die Zeitdauer $T\rightarrow\infty$ gehen lässt?

Beispiel Der *Dirac*'sche δ-Impuls

- Das Spektrum des δ-Impulses $x(t)=\delta(t)$ ist konstant 1, siehe auch Anhang Seite 27 unten:

$x(t)$ FT $\underline{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-j2\pi f\cdot t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$





Rechenregeln der Fouriertransformation

Mit Hilfe folgender Regeln lassen sich neue FT-Korrespondenzen aus bereits bekannten bilden:

	Zeitbereich $\underline{x}(t)$ ○—FT—●	$\underline{X}(f)$ Frequenzbereich
Vertauschung	$\underline{X}^*(t)$	$\underline{x}^*(f)$
Linearität	$a\cdot\underline{x}_1(t)+b\cdot\underline{x}_2(t)$	$a\cdot\underline{X}_1(f)+b\cdot\underline{X}_2(f)$
Maßstabsänderung	$\underline{x}(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\underline{X}\left(\dfrac{f}{a}\right)$
Verschiebung (Zeit)	$\underline{x}(t-t_0)$	$e^{-j\cdot 2\pi f\cdot t_0}\cdot\underline{X}(f)$
(Frequenz)	$e^{j\cdot 2\pi f_0\cdot t}\,\underline{x}(t)$	$\underline{X}(f-f_0)$
Faltung	$\underline{x}_1(t)*\underline{x}_2(t)$	$\underline{X}_1(f)\cdot\underline{X}_2(f)$
&		
Modulation	$\underline{x}_1(t)\cdot\underline{x}_2(t)$	$\underline{X}_1(f)*\underline{X}_2(f)$

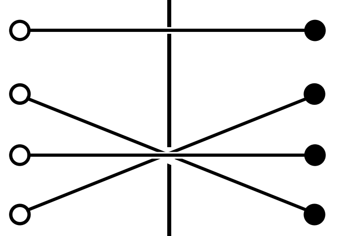
Zuordnungssatz

reell & gerade

reell & ungerade

imaginär & gerade

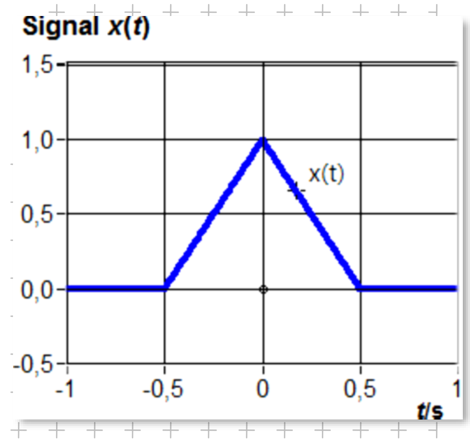
imaginär & ungerade



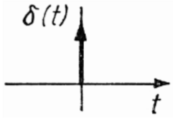
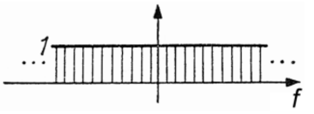
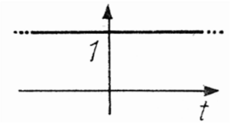
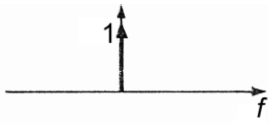
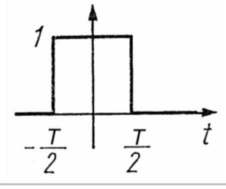
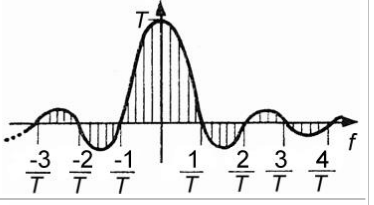
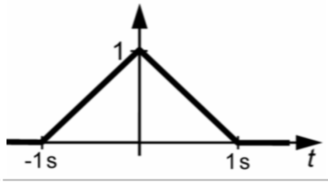
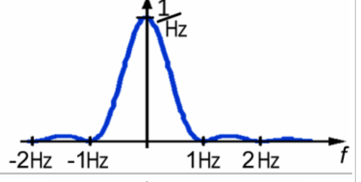
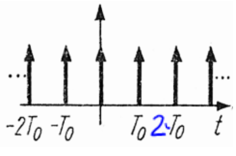
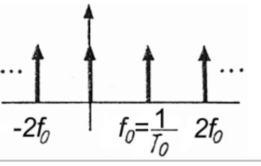
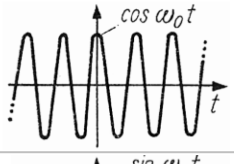
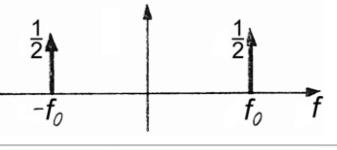
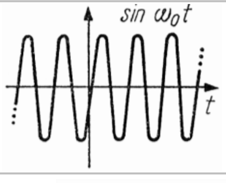
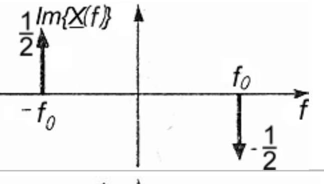
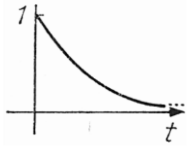
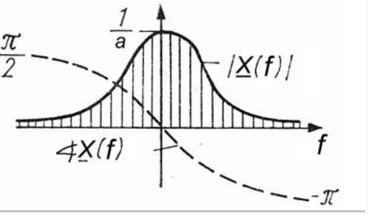
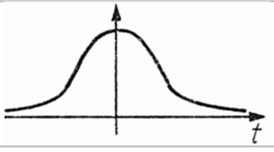
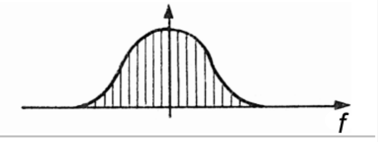
Beispiel **Zuordnungssatz**

Welche der Eigenschaften *gerade*, *ungerade*, *reell,* oder *imaginär* treffen auf das Spektrum des Dreiecksignals im **Bild** rechts zu?

Signal *x*(*t*)



Häufig benötigte Paare (*Korrespondenzen*) der Fouriertransformation

	Zeitbereich $x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ FT	Frequenzbereich $\underline{X}(f)$
	$\delta(t)$	1	
	1	$\delta(f)$	
	$\sigma\left(t+\frac{T}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right);$ $T>0$	$T\cdot \mathrm{si}(T\cdot\pi f)$	
		$\mathrm{si}^2\left(\pi\cdot\frac{f}{\mathrm{Hz}}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{Hz}}$	
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$	$f_0\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-k\cdot f_0);$ $f_0=\frac{1}{T_0}$	
	$\cos(2\pi f_0\cdot t)$	$\frac{1}{2}\cdot(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$	
	$\sin(2\pi f_0\cdot t)$	$\frac{1}{2j}\cdot(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))$	
	$e^{-at}\,\sigma(t)\ ;\ a>0$	$\frac{1}{a+j\cdot 2\pi f}$	
	$e^{-\pi\cdot\frac{t^2}{\sigma^2}}$	$e^{-\pi\cdot f^2\cdot\sigma^2}$	
	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{X}_k\,e^{jk\cdot 2\pi f_0\cdot t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{X}_k\,\delta(f-k\cdot f_0)$	

Analyse eines Sprachsignals in Zeit- und Frequenzbereich

Zur Spektralanalyse eines Signals $x(t)$ möchte man oft nur wissen, wie stark der entsprechende Spektralanteil ist, ohne dessen Aufteilung in Real- und Imaginärteil zu kennen. Es reicht dann, den Betrag des komplexen Spektrums $\underline{X}(f)$ darzustellen – das sog. **Amplitudenspektrum** $|\underline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{f})|$:

Demonstration **Analyse Ihrer eigenen Stimme**

Starten Sie das Programm **`8_AudioSignalUndSpektrum.exe`**, um Proben Ihrer Stimme zu analysieren! Achten Sie bei den Aufnahmen auf eine gute Aussteuerung der Aufnahme!

a) Wodurch unterscheiden sich die *Frikative* (Zischlaute) ⟨**s**⟩, ⟨**f**⟩, ⟨**ch**⟩ und ⟨**sch**⟩ von den *Vokalen* ⟨**a**⟩, ⟨**o**⟩, ⟨**u**⟩, ⟨**e**⟩, ⟨**i**⟩, ⟨**l**⟩ im Zeitbereich und im Spektrum?

b) Wo ist die Tonhöhe sichtbar?

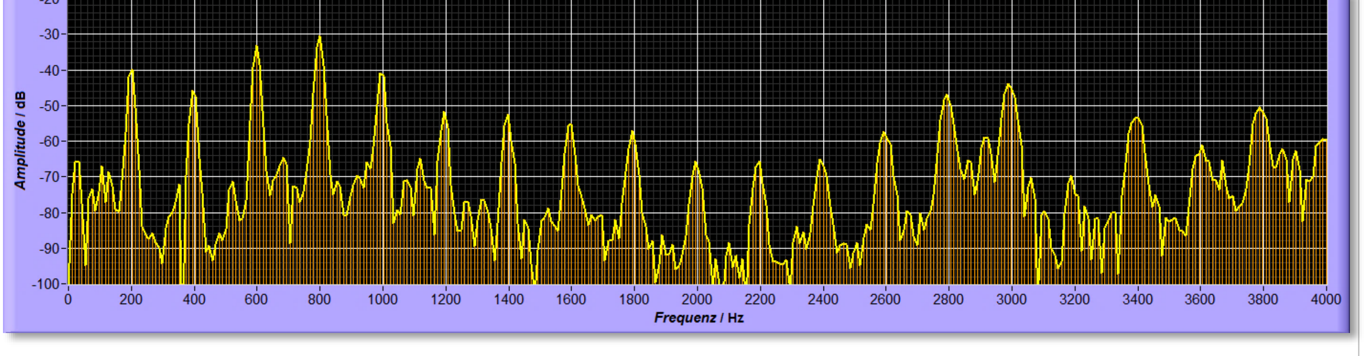
c) Wodurch unterscheiden sich Vokale, die von einem Mann oder einer Frau gesprochen wurden?

d) Wodurch unterscheiden sich die beiden Vokale ⟨**e**⟩ und ⟨**u**⟩ im Zeitsignal?

e) Wodurch unterscheiden sich die Vokale ⟨**e**⟩ und ⟨**u**⟩ im Spektrum?

Übungsaufgabe **Analyse einer fremden Stimme:**

Amplitudenspektrum $|\underline{X}(f)|$



a) Wurde hier ein *Frikativlaut* oder ein *Vokal* gesprochen (Begründung!)?

b) Wie hoch ist die Grundfrequenz f_0 des Signals?

c) Nehmen Sie an, dass dieses Signal mit der normalen Tonlage des Sprechers oder der Sprecherin erzeugt wurde. War dies vermutlich ein Mann oder eine Frau (Begründung!)?

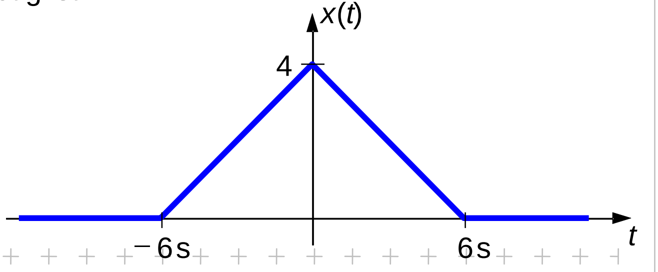
d) Finden Sie durch Vergleich mit Ihrer eigenen Stimme heraus, welcher Vokal gesprochen wurde!

Ableitung weiterer FT-Korrespondenzen mit Hilfe der Regeln

Mit dem Werkzeugen auf den Seiten 19 und 20 lassen sich weitere Korrespondenzen finden, ohne dass die explizite Ausführung des Fourier-Integrals nötig ist:

Beispiel **Spektrum eines Dreiecksignals**

⇒ Berechnen Sie FT $\underline{X}(f) \overset{\text{FT}}{\bullet\!\!-\!\!\circ} x(t)$ zu dem rechts dargestellten Signal $x(t)$!



Übungsaufgabe **Verwandtschaft von Rechteck- und Dreieckimpuls**

Vergleichen Sie im Programm `7_Fouriertransformation.exe` die Spektren des Rechteck- und des Dreiecksimpulses. Achten Sie dabei ganz besonders auf die Lage der Nullstellen!

a) Warum hat das Spektrum des Dreieckimpulses keine negativen Anteile?

b) Erklären Sie in einem Satz, warum die Lage der Nullstellen im Spektrum des Dreiecksimpulses genau doppelt so weit auseinander sind wie die im Spektrum des Rechteckimpulses.

Praktische Übungen zu wichtigen Rechenregeln der FT

Demonstration Der Zuordnungssatz

Alle mit dem Programm **`7_Fouriertransformation.exe`** erzeugten Zeitsignale lassen sich so verschieben, dass sie **gerade** (d.h. achsensymmetrische) Funktionen darstellen.

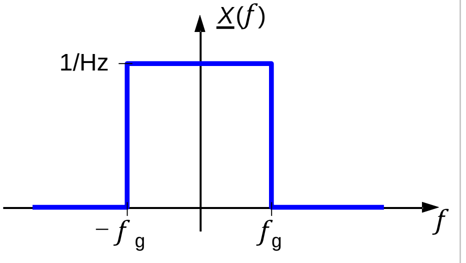
a) Prüfen Sie die Gültigkeit des Zuordnungssatzes für alle Signale in Achsensymmetrie!

b) Die drei (im Auswahlmenü *letzten*) periodischen Signale lassen sich auch ungerade (d.h. Punktsymmetrie) verschieben. Prüfen Sie auch hier die Gültigkeit des Zuordnungssatzes.

Beispiel Der Vertauschungssatz

Rechts im **Bild** dargestellt ist das rechteckförmige Spektrum $\underline{X}(f)$:

$$\underline{X}(f)=\begin{cases}1 & \text{für } |f|<f_g\\ 0 & \text{für } |f|\geq f_g\end{cases}$$

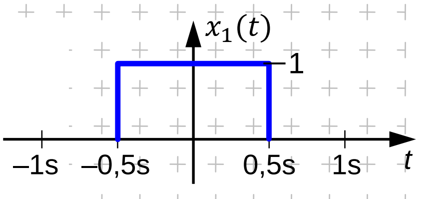


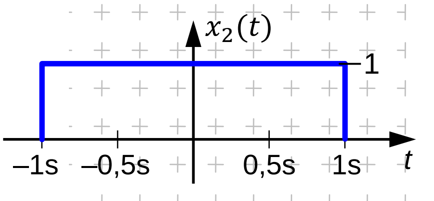
a) Berechnen Sie das zugehörige Signal $x(t)$ mit Hilfe des Vertauschungssatzes.

b) Verifizieren Sie Ihre Berechnung mit dem passenden Transformationspaar im Programm **`7_Fouriertransformation.exe`**.

Übungsaufgabe Reziprozität von Zeitdauer und Bandbreite

Betrachtet werden die zwei rechts dargestellten Rechtecksignale $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die sich nur durch einen Streckungsfaktor von einander unterscheiden.





a) Wie lautet das Spektrum $\underline{X}_1(f) \overset{\text{FT}}{\bullet\!\!-\!\!\circ}\ x_1(t)$?

b) Berechnen Sie das Spektrum $\underline{X}_2(f) \overset{\text{FT}}{\bullet\!\!-\!\!\circ}\ x_2(t)$.

c) Um welchen Faktor $1/a$ ist das Signal $x_2(t)$ gegenüber $x_1(t)$ gestreckt? Welche Änderung erwarten Sie demnach im Spektrum?

d) Berechnen Sie das Spektrum $\underline{X}_2(f)$ zusätzlich durch die auf Seite 19 beschriebene *Maßstabsänderung*. Es sollte sich dasselbe Spektrum ergeben, wie unter b) !

e) Untersuchen Sie für <u>alle</u> Signale, die sich mit **`7_Fouriertransformation.exe`** erzeugen lassen, wie Zeitdauer und Bandbreite voneinander abhängen.

ANHANG: Komplexe Zahlen (1) – Einführung

Im diesem Kapitel betrachten wir Spektren in *mathematisch komplexer* Form – dies vereinfacht die Darstellung. Daher an dieser Stelle einige Definitionen oder Wiederholungen:

Definition einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ in kartesischen Koordinaten

- Die **Normalform** lautet: $\boxed{\underline{z} = a + j \cdot b = \mathrm{Re}\{\underline{z}\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\underline{z}\}}$

  ⇒ ***a*** heißt **Realteil**, ***b*** heißt **Imaginärteil** der komplexen Zahl $\underline{z}$.

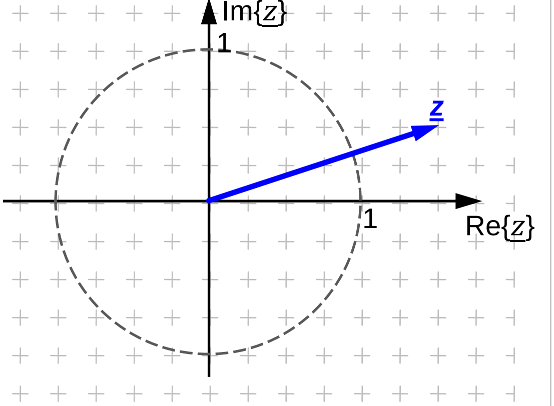
  ⇒ Eine komplexe Zahl enthält damit quasi zwei Zahlenwerte in einer verpackt!

- Eine Schlüsselfunktion für den komplexen Zahlenraum spielt die **imaginäre Zahl *j* :**

$$\boxed{j = \sqrt{-1}} \quad \Rightarrow \quad j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = -{}^{1}/_{j}$$

Auffassung von z als Vektor in der komplexen Ebene (*Gauß*'sche[1] Zahlenebene)

Beispiel $\underline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{b} = \mathbf{1{,}5} + \mathbf{0{,}5} \cdot \boldsymbol{j}$



- **Betrag** $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}5^2} = 1{,}58$

  ⇒ Länge des Zeigers

- **Phase** $\sphericalangle\underline{z} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}4°$

  ⇒ Winkel des Zeigers mit der realen Achse

Polarkoordinatendarstellung der Zahl $\underline{z}$

$$\boxed{\underline{z} = |\underline{z}| \cdot e^{j \cdot \sphericalangle \underline{z}}}$$

- Darstellung in **Exponentialform** mit Betrag und Phase:

- Die imaginäre Zahl als Exponentialfunktion: $j = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$

- Umrechnung Polar- in kartesische Koordinaten und umgekehrt – mit der ***Euler***'**schen**[2] **Formel**:

$$\boxed{e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi}}{2j}\,, \qquad \cos(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$$

[1] *Johann Carl Friedrich Gauß* (1777 – 1855), deutscher Mathematiker

[2] *Leonhard Euler* (1707 – 1783), schweizer Mathematiker

ANHANG: Komplexe Zahlen (2) – Rechnen mit komplexen Zahlen

Demonstration Veranschaulichung in der komplexen Ebene

a) Testen Sie das Beispiel der vorherigen Seite mit dem Programm `3_KomplexeZahl.exe`.

b) Wie verändert sich der Zeiger, wenn Sie den Betrag oder die Phase ändern?

Rechenregeln für komplexe Zahlen:

- **Addition:**

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- **Multiplikation:**

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

$$= |\underline{z}_1| \cdot e^{j \cdot \sphericalangle \underline{z}_1} \cdot |\underline{z}_2| \cdot e^{j \cdot \sphericalangle \underline{z}_2} = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| \cdot e^{j \cdot (\sphericalangle \underline{z}_1 + \sphericalangle \underline{z}_2)}$$

Übungsaufgabe Grafische Darstellung komplexer Zahlen

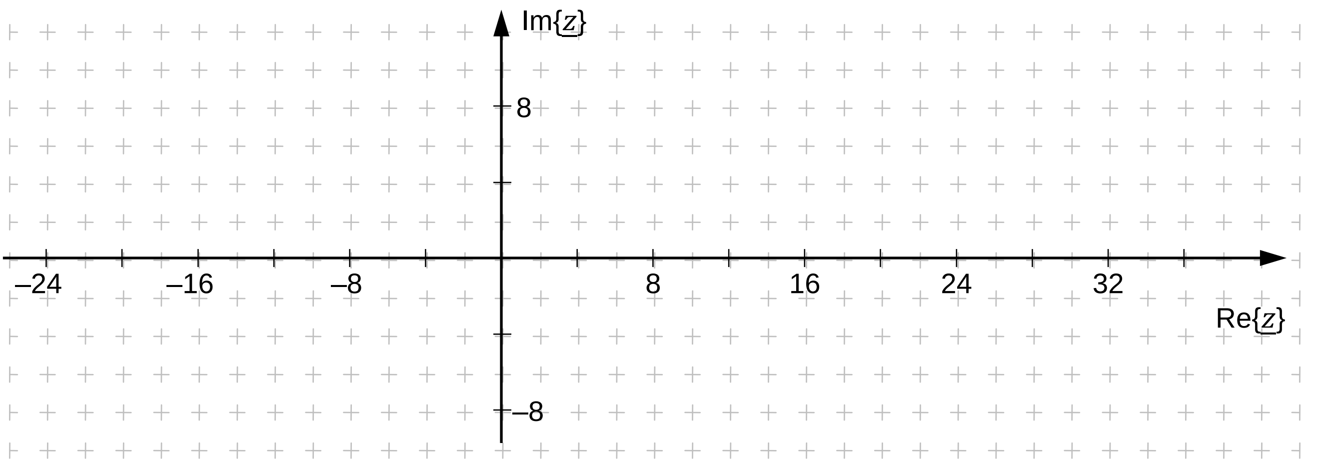
Betrachtet werden zwei komplexe Zahlen $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in \mathbb{C}$:

$$\underline{z}_1 = 29 + 3j\,, \quad \underline{z}_2 = 3 + 5j$$

a) Berechnen Sie die Summe $\underline{s} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$.

b) Skizzieren Sie die Summe $\underline{s}$ als Zeiger in die unten vorbereitete komplexe Ebene.

c) Skizzieren Sie die konjugiert komplexe Summe $\underline{s}^*$.



d) Berechnen Sie das Produkt $\underline{p} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$ in <u>kartesischen Koordinaten</u>.

e) Stellen Sie beide Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ in <u>Polarkoordinaten</u> dar.

f) Berechnen Sie das Produkt auch mit $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ in <u>Polarkoordinaten</u>.

g) Zeigen Sie, dass beide unter d) und unter f) berechneten Produkte identisch sind!

ANHANG: Das Analyseintegral der Fourierreihe

Fourier-Analyse

Die Koeffizienten werden jeweils berechnet als Integral über eine Periode T_0 des Signals, multipliziert mit der entsprechenden Sinus- oder Kosinus-Schwingung:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\,dt\ ,\quad a_k &= \frac{2}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\cdot\cos(2\pi\cdot kf_0\cdot t)\,dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\cdot\sin(2\pi\cdot kf_0\cdot t)\,dt \end{aligned}\right\}\ ,k\in\mathbb{N}$$

Der Koeffizient a_0 ist identisch mit dem Gleichanteil U_{offs} des Signals (vgl. Kapitel 1).

Berechnung der <u>reellen</u> FR-Koeffizienten zur Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ von Seite 7

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{1}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\,dt = \frac{A}{T_0}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}1\cdot dt = \boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}$$

$$\boldsymbol{a_k} = \frac{2}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t\right)dt = \frac{2A}{T_0}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}1\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t\right)dt$$

$$= \frac{2A}{T_0}\cdot\left[\frac{T_0}{2\pi\cdot k}\sin\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} = \boldsymbol{2A}\cdot\frac{\boldsymbol{\sin\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T/2\right)}}{\boldsymbol{k\pi}}$$

$$\boldsymbol{b_k} = \frac{2}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\cdot\sin(2\pi\cdot kf_0\cdot t)\,dt = \frac{2A}{T_0}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}1\cdot\sin\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t\right)dt$$

$$= \frac{2A}{T_0}\cdot\left[-\frac{T_0}{2\pi\cdot k}\cos\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} = 2A\cdot\frac{-\cos\left(2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T/2\right)+\cos\left(-2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T/2\right)}{2\cdot k\pi} = \boldsymbol{0}$$

Berechnung der <u>komplexen</u> FR-Koeffizienten zur Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ von S. 10

$$\underline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{T_0}\cdot\int_{T_0}\tilde{x}(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t}\,dt = \frac{A}{T_0}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}1\cdot e^{-j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t}\,dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\cdot\left[\frac{e^{-j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot t}}{-j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{-A}{j2\pi\cdot k}\cdot\left[e^{-j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T/2} - e^{j2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T/2}\right] = \boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{\sin\left(\frac{2\pi\cdot\frac{k}{T_0}\cdot T}{2}\right)}}{\boldsymbol{k\pi}}$$

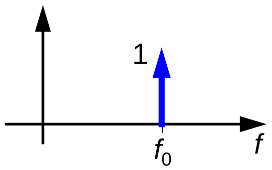
ANHANG: Die FT einer exponentiellen Schwingung ist ein δ-Impuls!

- **Exp. Schwingung im Zeitbereich $\overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$ verschobener δ-Impuls im Frequenzbereich**

$$e^{j2\pi\cdot f_0\cdot t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta(f-f_0)$$

  - Beweis durch <u>inverse Fouriertransformation</u> der rechten Seite:

Frequenzbereich:



$$\boldsymbol{\delta(f-f_0) = \underline{X}(f)}$$

Zeitbereich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f_0)\cdot e^{j2\pi\cdot f\cdot t}\,df = \boldsymbol{e^{j2\pi\cdot f_0\cdot t} = x(t)}$$

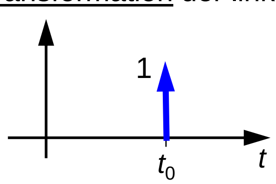
  - Diese Beziehung wird immer dann ausgenutzt, wenn die Fouriertransformierte <u>periodischer Signale</u> berechnet werden soll, erläutert auf den Seiten 15 … 17.

- **Und genauso umgekehrt:**
  Verschobener δ-Impuls im Zeitbereich $\overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$ exp. Schwingung im Frequenzbereich

$$\delta(t-t_0) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{-j2\pi\cdot t_0\cdot f}$$

  - Beweis durch <u>Fouriertransformation</u> der linken Seite:

Zeitbereich:



$$\boldsymbol{\delta(t-t_0) = x(t)}$$

Frequenzbereich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot e^{-j2\pi\cdot f\cdot t}\,dt = \boldsymbol{e^{-j2\pi\cdot t_0\cdot f} = \underline{X}(f)}$$