Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule **Rosenheim**
University of Applied Sciences

Vollstndige Induktion und Rekursion

* **Summenzeichen, Teil 1.** Schreiben Sie ausführlich, also ohne Summenzeichen:

1. $\sum_{i=0}^{10} i^2$ $\quad 0^2 + 1^2 + \ldots + 10^2$

2. $\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} i^2$ $\quad (-1)^{1+1} \cdot 1^2 + \ldots + (-1)^{10+1} \cdot 10^2$

3. $\sum_{k=2}^{11} 2^{k-1}$ $\quad 2^{2-1} + \ldots + 2^{11-1}$

Eigener Lösungsversuch.

1. $\sum_{i=0}^{10} i^2$

2. $\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} i^2$

3. $\sum_{k=2}^{11} 2^{k-1}$

Summenzeichen, Teil 2. Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ $\qquad \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \cdots \pm \frac{1}{n}$ $\qquad \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$

Eigener Lösungsversuch.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \cdots \pm \frac{1}{n}$

3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$

Vollständige Induktion, Teil 1. Man beweise durch vollständige Induktion:

* 1. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $11^n - 6$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

Lösung.

IA LS $1^2 = 1$

RS $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$ ✓

$n \to n+1$ $\quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$ zu zeigen

$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}_{} + (n+1)^2$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \frac{+6(n+1)^2}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)\cdot(n+1)}{6}$

$\Leftrightarrow (n+1)\cdot(n(2n+1) + 6(n+1))$

Eigener Lösungsversuch.

Vollständige Induktion, Teil 2. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? Formulieren Sie durch Probieren eine Vermutung und beweisen Sie sie dann mit vollständiger Induktion.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Bubble-Sort. Gegeben seien n Zahlen in einer beliebigen Reihenfolge $x_1 x_2 \dots x_n$. Bei einem Sortieralgorithmus sollen sie in aufsteigender Reihenfolge sortiert werden. Es werden zwei nebeneinander stehende Zahlen verglichen und gegebenenfalls vertauscht. Sei M_n die maximale Anzahl an notwendigen Vertauschungen.

1. Bestimmen Sie M_1, M_2, M_3, M_4.
2. Begründen Sie die Rekursion: $M_{n+1} = M_n + n$ für $n \in \mathbb{N}$, $M_1 = 0$.
3. Bestimmen Sie eine explizite Formel für M_n, also eine Formel für M_n, die nur von n nicht aber von $M_{n-1}, \dots$ abhängt. Beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.