

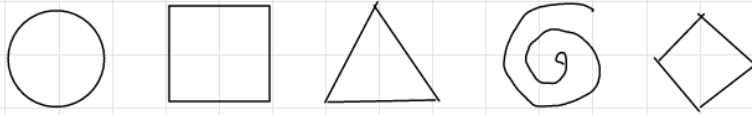


more: bigdev.de/teaching

Rekursion

Rekursion - Fakultät

Auf wieviele Möglichkeiten kann man 5 Gegenstände anordnen?



z.B.

Antwort: $5! =$

Fakultät

rekursive Definition der Fakultät:

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad (n > 0)$$

z.B.

$$5! = \underline{5} \cdot \underbrace{4!}_{4!}$$

$$4! = \underline{4} \cdot \underbrace{3!}_{3!}$$

$$3! = \underline{3} \cdot \underbrace{2!}_{2!}$$

$$2! = \underline{2} \cdot \underbrace{1!}_{1!}$$

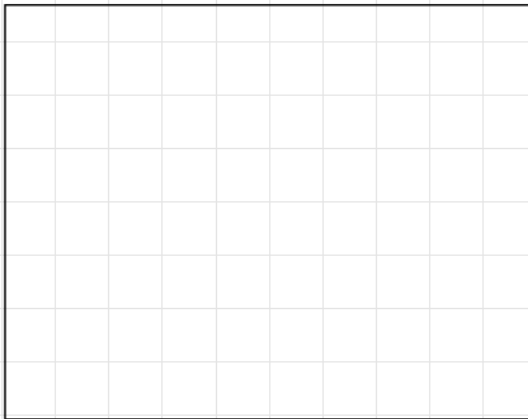
$$1! = \underline{1} \cdot \underbrace{0!}_{1}$$

Das ergibt rückwärts aufgelöst: $5! = \underline{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$.

Ü Implementieren Sie eine Funktion namens `fac`, die die n -te Fakultät berechnet. (→ Vorlesung)

Rekursion - Fibonacci-Zahlen

Hasenstall



Monat
Hasen- paare

rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen:

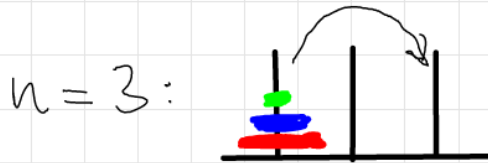
$$F_1 := \quad , \quad F_2 := \quad , \quad F_n := \quad (n)$$

ü Zeigen Sie: $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

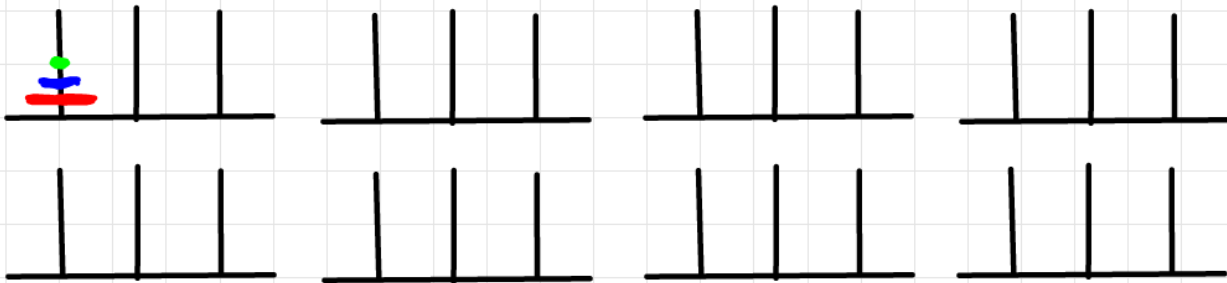
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Summe der ersten } n \text{ Fibonacci-Zahlen}} = \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{= } (n+2)\text{-te Zahl minus 1.}}$

ü Implementieren Sie eine Funktion in C, die die n -te Fibonacci-Zahl berechnet. (Vorlesung)

Rekursion - Türme von Hanoi



Problem: Wir wollen n Scheiben vom linken Stapel auf den rechten verschieben. Bei jedem Zug darf nur die oberste Scheibe auf einen anderen Stapel versetzt werden. Des Weiteren darf eine Scheibe nicht auf eine kleinere Scheibe gelegt werden.
Wieviele Verschiebungen braucht man bei n Scheiben mindestens? z.B. für $n=3$:



Bei 3
Scheiben
7 Ver-
schiebungen!

Bezeichne T_n die Anzahl der Verschiebungen bei n Scheiben:

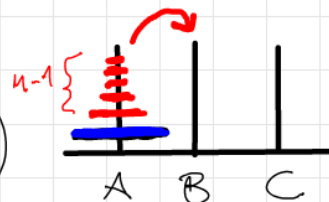
#Scheiben n	0	1	2	3	4	5
#Verschiebungen T_n	0			7		

Wie können wir dieses komplexe Problem angehen?

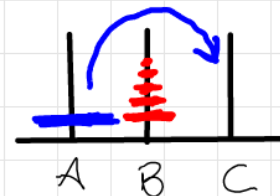
→ REKURSIV!

Rekursiver Algorithmus bei n Scheiben

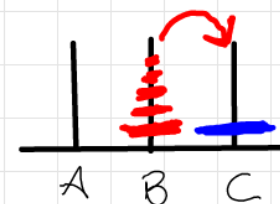
(1) Verschiebe die oberen $n-1$ Scheiben auf B (T_{n-1} Verschiebungen!)



(2) Verschiebe die verbliebene Scheibe nach C (1 Verschiebung!)



(3) Verschiebe die $n-1$ Scheiben von B nach C (T_{n-1} Verschiebungen!)



Wir erhalten:

$$T_0 = 0, \quad T_n = \quad (n > 0)$$

Man kann hierfür sogar eine explizite Formel angeben:

Ü Zeigen Sie $T_n = 2^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Rekursion - Sparplan

Sie legen pro Jahr 1.000€ auf ein Sparkonto, das mit 2% p.a. verzinst wird.

Frage: Wieviel Kapital haben Sie nach 20 Jahren?

Bezeichne K_n das Kapital am Anfang des n -ten Jahres:

$$K_1 = 1.000$$

$$K_2 =$$

$$K_3 =$$

$$\vdots$$

$$K_n =$$

Es ergibt sich folgende **rekursive Formel** für ihr Kapital:

$$K_1 =$$

$$K_n =$$

Mit der geometrischen Summenformel folgt:

$$K_n =$$

Antwort: Nach 20 J. haben wir $K_{20} =$



Zeigen Sie :

$$K_n = \frac{1,02^n - 1}{0,02} K_1$$