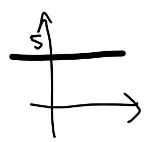
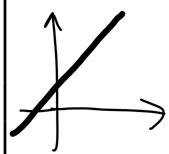
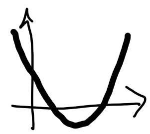
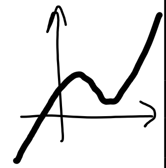
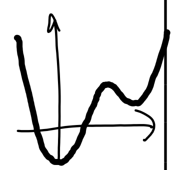
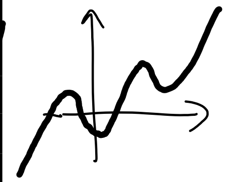
Polynome

Fragen?

Polynome qualitativ, Teil 1. Wir füllen folgende Tabelle aus:

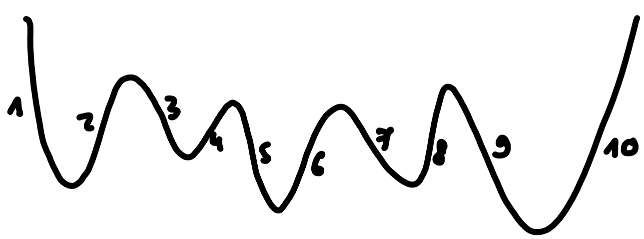
Grad	0	1	2	3	4	5
Graph	$f(x)=5x^0=5$ 	$5x+1$ 	$2x^2+3x-10$ 	$3x^3+4x-1$ 	$2x^4+2x^2+x$ 	x^5-2x^4+3x-1 
Mögliche Anzahl von NST	$0, \infty$	1	$0, 1, 2$	$1, 2, 3$	$0, 1, 2, 3, 4$	$1, 2, 3, 4, 5$

Beobachtung: Polynome ungeraden Grades besitzen mindestens eine NST!

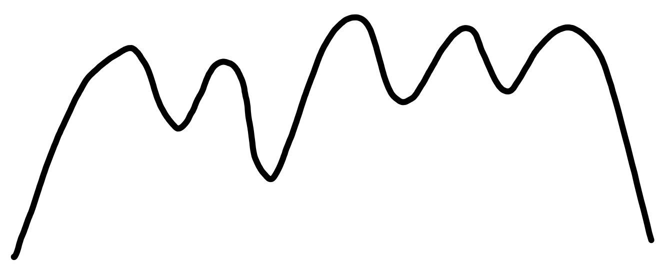
Polynome qualitativ, Teil 2. Skizzieren Sie ein Polynom vom Grad 10!

Lösung.

$+3x^{10}+\ldots$



$-5x^{10}+\ldots$



Eigener Lösungsversuch.

Linearfaktoren. Bestimmen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie die Polynome in Linearfaktoren.

1. $x^2 - 3x + 2$
2. $x^2 + 1$
3. $2x^3 - 10x^2 + 16x - 8$
4. $x^4 + 3x^2 + 1$

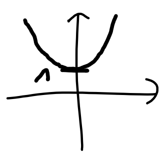
Lösung.

1. BY/BW: Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

Rest BRD: p-q Formel

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Linearfaktoren!

2. 

keine NST / ODER: $x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2}$ <0 ↯ keine NST (Mathe 2: $\mathbb{C}$ NST $\pm i$)

3. i.A. muss man NST numerisch berechnen (z.B. Newton-Verfahren). Aufgabensteller in Schule/FH ist freundlich und hat NST aus $\mathbb{Z}$ (klein!) gewählt:

Raten der NST nur mit Teilern des konstanten Terms (hier 8): $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Warum? $\underbrace{2x^3 - 10x^2 + 16x}_{x\cdot(\dots)} - 8 = 0 \Rightarrow x\cdot(\dots) = 8$ d.h. $x \mid 8$.

Raten: NST $x_1 = 1$:

$$(2x^3 - 10x^2 + 16x - 8) : (x-1) = 2x^2 - 8x + 8$$

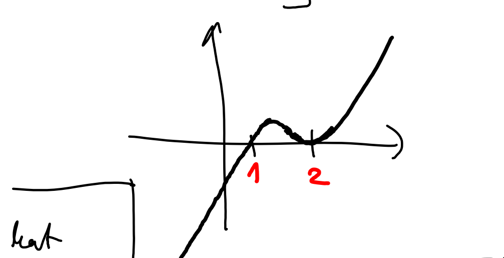
$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad -8x^2 + 16x \\ \quad -(-8x^2 + 8x) \\ \hline \qquad 8x - 8 \\ \qquad -(8x-8) \\ \hline \qquad - \quad - \end{array}$$

d.h. $2x^3 - 10x^2 + 16x - 8 = (x-1)\cdot \underbrace{(2x^2 - 8x + 8)}_{2\underbrace{(x^2 - 4x + 2^2)}_{(x-2)^2}}$

[ODER: Mitternachtsformel]

NST

$$\Rightarrow 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8 = 2(x-1)(x-2)^2$$



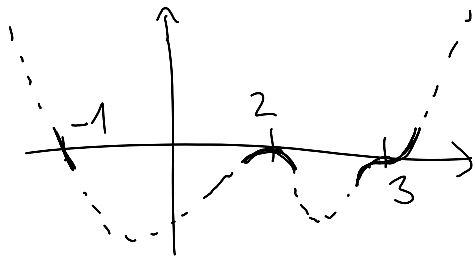
4. $(x^2)^2 + 3x^2 + 1$ **Substitution:** $x^2 = u$ $\Rightarrow u^2 + 3u + 1$ hat

NST $u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \overset{!}{=} x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}$ <0 d.h. keine NST!

Eigener Lösungsversuch.

Polynom zu NST. Geben Sie ein Polynom an, das folgende NST besitzt:

- 2 doppelte NST
- −1 einfache NST
- 3 dreifache NST



Lösung.

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-(-1))^1 \cdot \underbrace{(x-3)^3}_{1\,x^3(-3)^0 + 3\,x^2(-3)^1 + 3\,x^1(-3)^2 + 1\,x^0(-3)^3} = \ldots \overset{\text{Wolfram-}\alpha}{=}$$

Expanded form:

$$x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 104x^3 + 45x^2 + 108x - 108$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

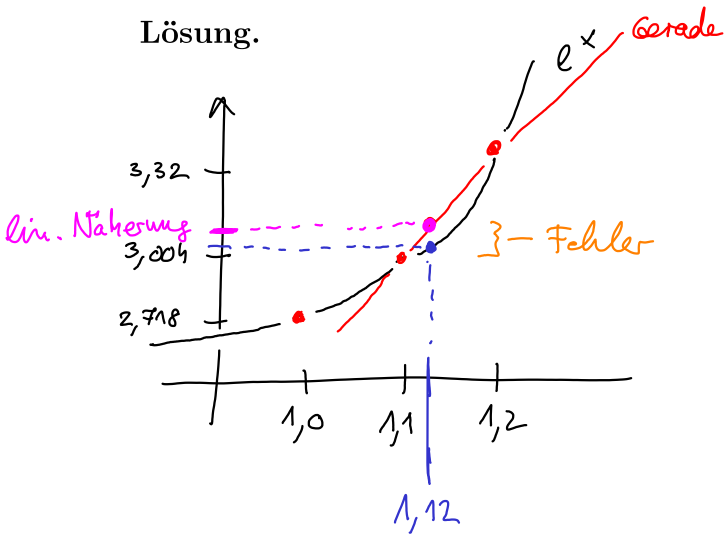
Eigener Lösungsversuch.

Lineare Interpolation. Wir wollen e^x näherungsweise berechnen. Dazu haben wir folgende Tabelle gegeben:

x	....	1,0	1,1	1,2	....
e^x	....	2,718	3,004	3,32	....

Berechnen Sie $e^{1,12}$ näherungsweise durch lineare Interpolation.

Lösung.



(1.) Gerade berechnen:

$$m = \frac{3,32 - 3,004}{1,2 - 1,1} = \frac{0,316}{0,1} = \underline{3,16}$$

$$y = 3,16(x - 1,1) + 3,004$$

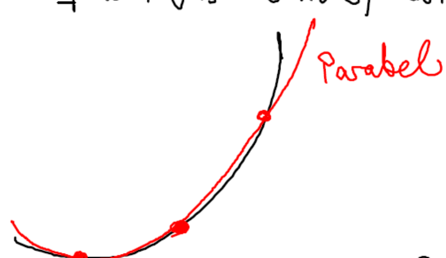
(2.) 1,12 einsetzen:

$$e^{1,12} \approx \underline{y} = 3,16\,(1,12 - 1,1) + 3,004$$
$$= \underline{3,0672}$$

[Probe mit TR: $e^{1,12} \overset{TR}{\approx} 3,06485\ldots$]

Fehler $\approx$ 0,003

Frage: Gehts noch besser? Ja, z.B. Näherung mit Parabel anstatt Gerade.
quadratische Interpolation



→ Taylorpolynom / reihe (2. Semester) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Eigener Lösungsversuch.