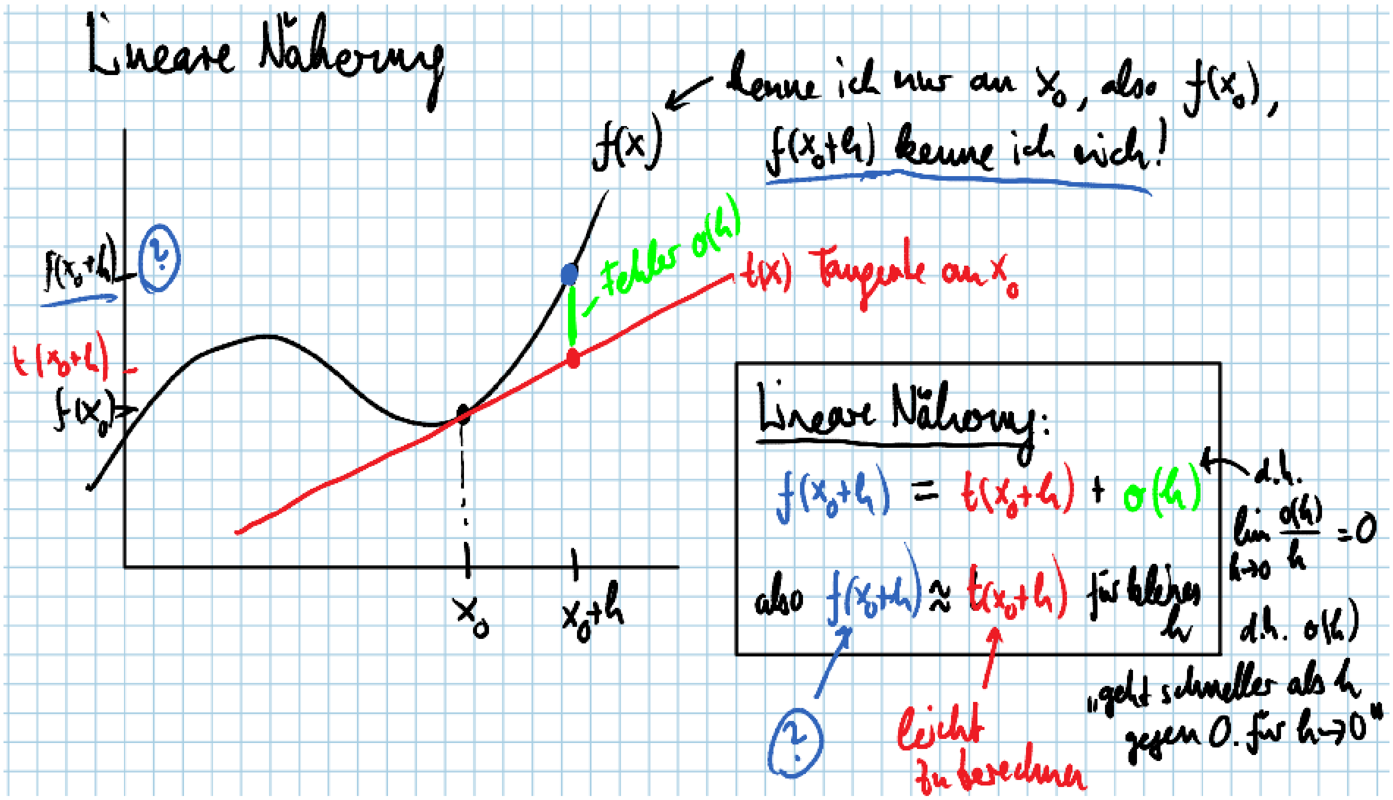
Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Lineare Näherung

Fragen?

WIEDERHOLUNG



Wie lautet nochmal die Funktionsgleichung $t(x)$ der **Tangente an x_0 von** f?

$$t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

oder mit $x = x_0 + h$ äquivalent zu

$$t(x_0+h) = f'(x_0)\cdot h + f(x_0)$$

lineare Näherung von Funktionswerten. Berechnen Sie folgende Werte durch lineare Näherung (ohne Taschenrechner!).

a) $f(x) = \ln(x)$, $f(1,01) = ?$

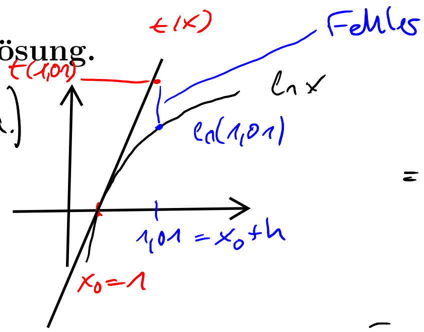
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(0,98) = ?$

c) $f(x) = \sin(x)$, $f(-0,02) = ?$

d) $f(x) = \sin(x)$, $f(3) = ?$ (Hinweis: Benutzen Sie $\pi = 3,14159$)

Lösung.

a)



lin. Näherung

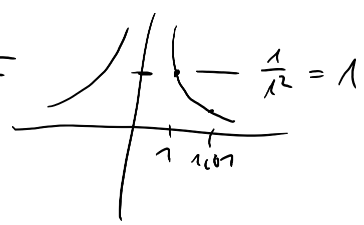
$$\ln(1{,}01) \approx t(1{,}01) = \underbrace{f'(x_0)}_{\frac{1}{1}} \cdot \underbrace{h}_{0{,}01} + \underbrace{f(x_0)}_{\ln(1)} = 0{,}01$$

[Vgl. TR: $\ln(1{,}01) \overset{TR}{\approx} 0{,}0099$ Fehler: 0,00005]

je kleiner das h, desto kleiner der Fehler

Fehlerabschätzung: absoluter Fehler $|\text{Fehler}| \le \frac{\overbrace{\max_{x\in[1;1{,}01]} |f''(x)|}^{=1}}{2} \cdot \underbrace{h^2}_{0{,}01^2} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}0001 = 0{,}00005$

$$|f''(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}$$



d.h. $\ln(1{,}01) \in [0{,}01 - 0{,}00005; 0{,}01 \cancel{+ 0{,}00005}]$

$\ln(1{,}01) \le \underbrace{0{,}01}_{t(1{,}01)}$

---

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $f(0{,}98) = ?$; $x_0 = 1$; $h = -0{,}02$

$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

$$\underbrace{f'(x_0)} \cdot h + f(x_0)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot -0{,}02 + 1 = 0{,}99$$

Fehlerabschätzung: $\frac{\max_{x\in[1;0{,}98]} |f''(x)|}{2} \cdot \underbrace{h^2}_{0{,}02^2} = 0{,}125 \cdot 0{,}0004 = 0{,}00005$

$$\frac{1}{4\sqrt{0{,}98^3}} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}98 \cdot \underbrace{\sqrt{0{,}98}}_{<0{,}99}} = \frac{1}{3{,}92\sqrt{0{,}98}}$$

Eigener Lösungsversuch.