Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Matrizen

Fragen?

* **Matrizengrößen.** Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $p \times q$-Matrix.

a) Wann kann man $A + B$ berechnen und welche Größe hat das Ergebnis?

b) Wann kann man $A \cdot B$ berechnen und welche Größe hat das Ergebnis?

Lösung.

Anz. Zeilen gleich! Anz Spalten gleich!

a) $m \Big| \underbrace{A}_{n} + p \Big| \underbrace{B}_{q} = m \Big| \underbrace{A+B}_{n}$ falls $m = p$ & $n = q$, Matrizen gleicher Größe!

z.B. $2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{2} + 2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}_{2} = 2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}}_{2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{2} + 2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3} = ↯$

$2 \neq 3$

b) $m \Big| \underbrace{A}_{n} \cdot p \Big| \underbrace{B}_{q} = m \Big| \underbrace{A \cdot B}_{q}$ falls $n = p$, denke an „$\rightarrow \; \downarrow$"

z.B. $2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 1 \;\; 2} \end{pmatrix}}_{3} \; 3\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{2} = 2\Big|\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ \boxed{1} & 4 \end{pmatrix}}_{2}$

Eigener Lösungsversuch.

Rechnen mit Matrizen. Bestimmen Sie die Größen aller Matrizen und berechnen Sie falls möglich.

a) $2\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}_{3} + 2\,\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{3} = 2\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&3\\5&5&7\end{pmatrix}}_{3}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{2} + \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}_{3} = \lightning \qquad 2 \neq 3$

c) $2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4\\0&3\end{pmatrix}$

Skalar-multiplikation

Matrizenaddition

d) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$

e) $2\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}_{3}^{T} = 3\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}}_{2}$

f) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$

Transponieren

$\cancel{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}} = \cancel{\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}}$

h) $2\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}}_{3}\; 3\,\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\4&0\end{pmatrix}}_{2} = 2\,\underbrace{\begin{pmatrix}9&2\\6&6\end{pmatrix}}_{2}$

i) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}}_{3}\; 2\begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&6\end{pmatrix} = \lightning \qquad 3 \neq 2$

k) **Kommutativ?** Mit $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3&7\\0&0\end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A\cdot B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&7\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\neq$

$B\cdot A = \begin{pmatrix}3&7\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$

Matrizenmultipl. nicht kommutativ!

l) **Einheitsmatrix** $E_n = \mathbb{1} = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mit $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A\cdot E_n = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = A$

$E_n\cdot A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = A$

E_n neutrale Elt. bzgl. Matrizenmult.

Matrizen-mult.

Eigener Lösungsversuch.

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} =$

c) $2 \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}^T =$

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}^T =$

f) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T =$

g) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}^T =$

h) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix} =$

i) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} =$

k) **Kommutativ?** Mit $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A \cdot B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$

$B \cdot A = \begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$

l) **Einheitsmatrix** $E_n = \mathbb{1} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A \cdot E_n = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

$E_n \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} =$

$(M, \circ)$ – Halbgruppe
eine Operation – Gruppe

$(M, +, \cdot)$ – Ringe
zwei Operationen – Körper

$(M, +, \cdot)$ Vektorraum
1 Operation, Skalarmultipl.

Algebraische Strukturen. Welche algebraische Struktur besitzt:

a) $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ (mit $\cdot$ Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot A$) $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ (mit $\cdot$ Matrizenmultiplikation: $A \cdot B$)

Lösung.

a) Matrizenaddition $+$:
- Abgeschlossen ✓
- Assoziativ ✓ } Halbgruppe
- neutr. Elt $O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Nullmatrix ✓
- inv. Elte: zu A ist $-A$ invers ✓ } Gruppe
  z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
- kommutativ ✓ } abelsche Gruppe

Skalarmult. $\cdot$:
- Abg. ✓
- Assoz.: $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu) A$ ✓
- Wirkung 1: $1 \cdot A = A$ ✓
- Distribut.: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ ✓

} Vektorraum!

b) Matr. Add $+$: siehe a) abelsche Gruppe

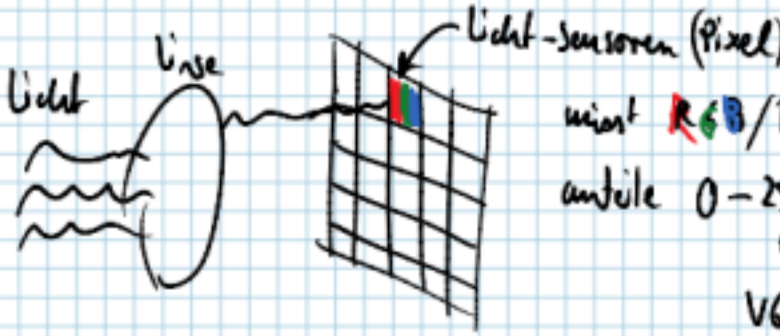
Matrizenmultiplikation $\cdot$:
- Abgeschl. ${}_n\underset{n}{A} \cdot {}_n\underset{n}{B} = {}_n\underset{n}{AB} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ✓
- Assoz.: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ ✓ } Halbgruppe
- neutr. Elt: E_n ✓ } Monoid
- inv. Elte: $A \cdot ? = E_n$ ✗
  z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{0 \;\; 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \boxed{b} \\ c & \boxed{d} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$, $\underset{0}{\neq}$ d.h. keine Gruppe!
- komm: ✗ siehe b) zuvor!

Distributiv: $A \cdot (B+C) = AB + AC$, $(A+B) \cdot C = AC + BC$ ✓

} (nicht komm.) Ring
kein Körper!

Eigener Lösungsversuch.

Ü Bildbearbeitung.



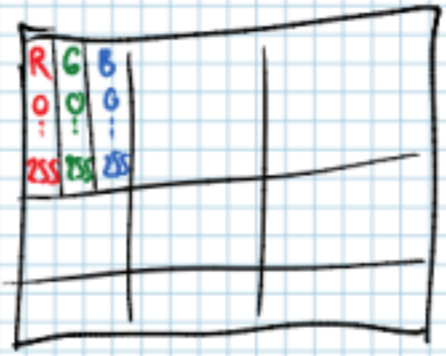
misst RGB/Farbanteile 0 – 255

↑

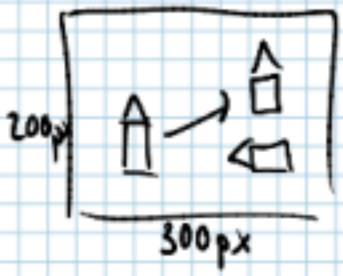
VGA-Kodierung

→ Pixelformat

z.B. JPEG
TIF
PNG



Demo in Paint



verschieben
Drehen
stauchen/strecken in x/y-Richtung

Was sind die neuen Koordinaten in der Pixelmaske?

a) Verschiebung:

$\binom{x}{y} = \binom{80}{40}$ ← 80px nach re ← 40px nach oben

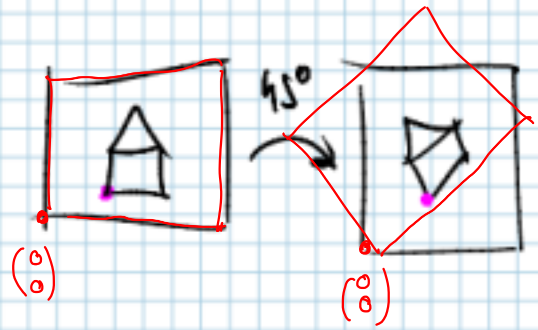
$\binom{20}{10} \longmapsto \binom{20}{10} + \binom{80}{40} = \binom{100}{50}$

↑ neue Position

b) Skalierung:

$\binom{20}{10} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \binom{20}{10} = \binom{2 \cdot 20}{\frac{1}{2}\, 10} = \binom{40}{5}$

c) Drehung mit Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ← Drehung um α um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

↑ neue Koord.