

11b

Grundrechenarten für komplexe Zahlen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:58

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:

<http://www.j3L7h.de/videos.html>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Gaußsche Zahlenebene

Um die Gleichung

$$x^2 = -1$$

zu lösen, erfindet man die „imaginäre Einheit“ i oder j . (In der Mathematik und der Physik schreibt man i , in der Elektrotechnik j , weil dort schon die Wechselstromstärke i heißt. Wolfram Alpha versteht aktuell nur i .) Es gibt dann auch sofort eine zweite Zahl, die dieselbe Gleichung löst:

$$i^2 = -1 \quad \& \quad (-i)^2 = -1$$

Man bildet alle möglichen Kombinationen aus reellen Zahlen mit der imaginären Einheit und hat damit die komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{ 2+3i; \sqrt{7}-76i; 34i; 0; \sqrt{6}+\frac{56}{13}i; \dots \}$$

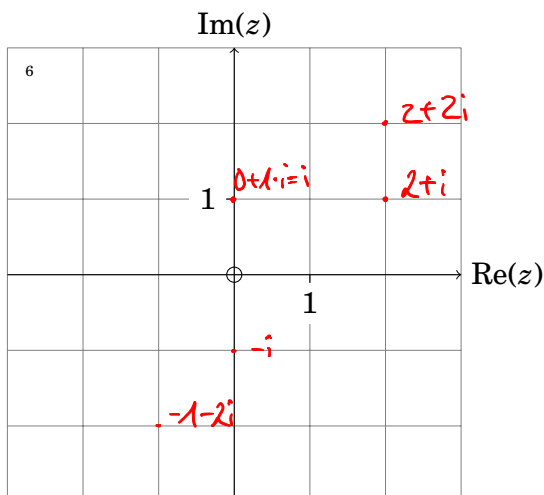
Nun lässt sich beispielsweise die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ lösen:

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2i} = 1 \pm 2i$$

In Gleichungen schreibt man für variable oder unbekannte komplexe Zahlen gerne z statt x . Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind so definiert:

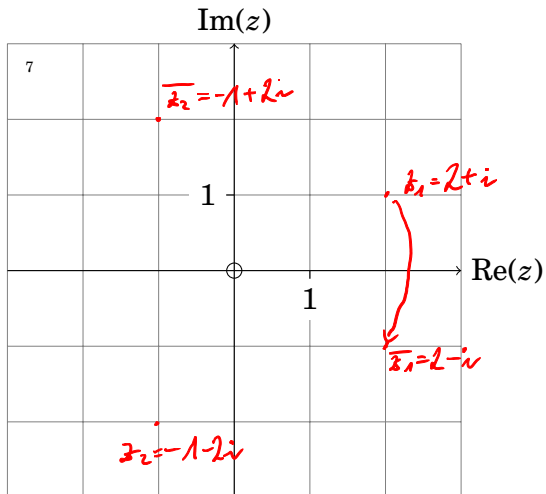
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(3+4i) &= 3 \\ \operatorname{Im}(3+4i) &= 4 \end{aligned}$$

Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen lässt sich wie die Menge \mathbb{R}^2 mit der Ebene veranschaulichen, in diesem Fall Gaußsche Zahlenebene genannt. Die Achsen sind der Realteil und der Imaginärteil:



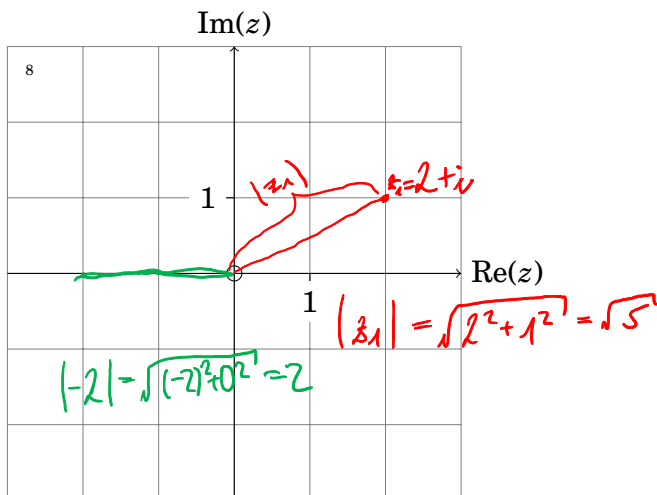
Die meisten Operationen mit komplexen Zahlen kann man mit Zahlen rechnen, aber genauso auch geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene verstehen. Das gilt insbesondere für die Grundrechenarten, wie die folgenden Abschnitte zeigen.

Wenn man von einer komplexen Zahl z zu der komplexen Zahl $-z$ übergeht, bedeutet das eine Spiegelung am Ursprung. Wenn man von einer komplexen Zahl z zu ihrem komplex Konjugierten \bar{z} übergeht, wird das Vorzeichen der imaginären Einheit umgedreht. Das entspricht einer Spiegelung an der horizontalen Achse:



2 Betrag und Winkel einer komplexen Zahl

Der Betrag [magnitude] $|z|$ einer komplexen Zahl z ist ihre Länge als Pfeil in der Gaußschen Zahlenebene, also nach Pythagoras:



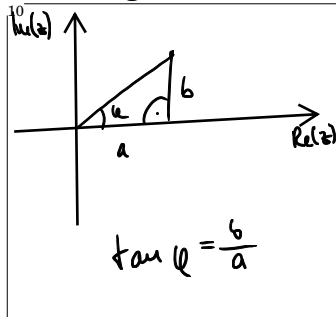
Für reelle Zahlen ist das der herkömmliche Absolutbetrag!

Mit Hilfe des komplex Konjugierten kann man das Quadrat des Betrags schreiben (dritte Binomische Formel!):

$$\begin{aligned}
 z &= a + bi \\
 |z|^2 &= a^2 + b^2 \\
 z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\
 &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\
 &= a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

Der Winkel (oder Argument oder Phase) $\arg(z)$ einer komplexen Zahl z ist der Winkel zwischen ihrem Pfeil und der positiven reellen Achse, mit Vorzeichen gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Er ist nur bis auf Vielfache von $2\pi = 360^\circ$

bestimmt. Für die Zahl $z = 0$ ist der Winkel unbestimmt. Für den Tangens dieses Winkels gilt:



Allerdings muss aufpassen, wenn man umgekehrt rechnen will: den Winkel aus dem Verhältnis. Denn der Tangens ist keine umkehrbare Funktion. Dies ist in der Hälfte der Fälle falsch:

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad \text{wenn } a > 0$$

+ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π

Am Computer hat man glücklicherweise meist eine Lösung zur Hand:

$$\varphi = \operatorname{arctan} 2(b, a) \quad (\text{immer})$$

+ ein ganzzahliges Vielfaches von 360°

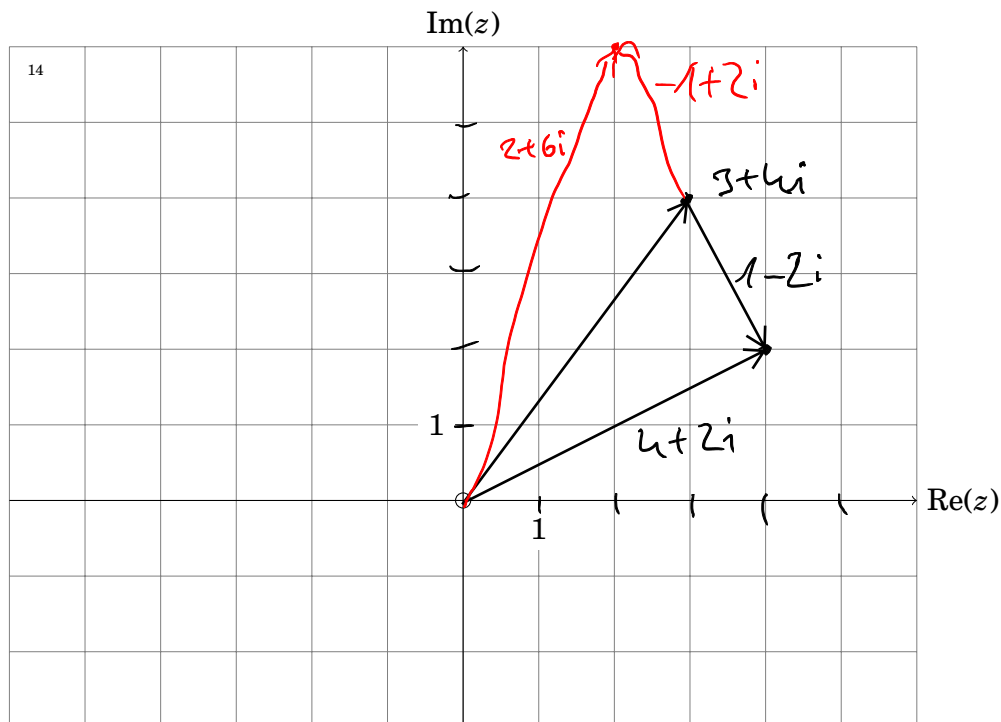
3 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Rechnerisch bestimmt man die Summe und die Differenz von komplexen Zahlen, als ob die imaginäre Einheit eine harmlose Zahl wäre:

$$\begin{aligned} & (3 + 4i) + (1 - 2i) \\ &= 3 + 1 + 4i - 2i = 4 + 2i \end{aligned}$$

2 + 6i

Geometrisch entspricht das der Summe und der Differenz von Pfeilen in der Gaußschen Zahlenebene:

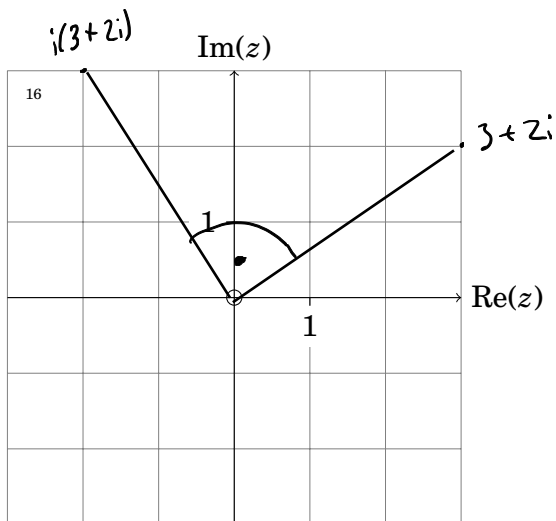


4 Multiplikation komplexer Zahlen

Rechnerisch bestimmt man das Produkt $z_1 z_2$ von komplexen Zahlen wieder, als ob die imaginäre Einheit eine harmlose Zahl wäre, allerdings eine, deren Quadrat gleich -1 ist:

$$(2 + 5i)(3 + 2i) = 6 + 4i + 15i + \underbrace{10i^2}_{-10} = -4 + 19i$$

Um zu sehen, was hier geometrisch passiert, kann man sich zunächst das Produkt iz ansehen:



Ein allgemeines Produkt $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i) z_2$ zweier komplexer Zahlen lässt sich nun zerlegen:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot z_2 = a_1 z_2 + b_1 i z_2$$

Geometrisch passiert also Folgendes: Die Längen der beiden zu multiplizierenden Zahlen werden multipliziert, ihre Winkel werden addiert (ggf. plus ein ganzzahliges Vielfaches von 2π).

5 Division komplexer Zahlen

Rechnerisch bestimmt man den Quotienten z_1/z_2 von komplexen Zahlen wieder, als ob die imaginäre Einheit eine harmlose Zahl wäre. Es gibt dabei einen Kunstgriff, um die imaginäre Einheit aus den Nenner wegzubekommen, so dass man ein Ergebnis der Form $a + bi$ erhält: Man erweitert mit dem komplex Konjugierten

des Nenners.

$$\frac{2+5i}{3+2i} = \frac{2+5i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{6-4i+15i+10}{3^2-\cancel{3\cdot 2i}+\cancel{2i\cdot 3}-2^2i^2} = \frac{16+11i}{9+4} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i$$

Was geometrisch passiert, kann man daraus herleiten, dass die Division die Multiplikation umkehrt. Wir suchen eine komplexe Zahl z_3 mit $z_3 = z_1/z_2$. Äquivalent dazu ist aber:

$$z_2 \cdot z_3 = z_1$$

Wie die Multiplikation geometrisch funktioniert, wissen wir aber schon. Also: Wenn man die Länge des Quotienten $z_3 = z_1/z_2$ mit der Länge des Nenners z_2 multipliziert, ergibt sich die Länge des Zählers z_1 ; wenn man den Winkel des Quotienten und den Winkel des Nenners addiert, ergibt sich der Winkel des Zählers (ggf. plus ein ganzzahliges Vielfaches von 2π).

Damit kann man sagen, was bei der Division zweier komplexer Zahlen geometrisch passiert:

$$\text{Länge}(z_1/z_2) = \frac{\text{Länge}(z_1)}{\text{Länge}(z_2)}$$

$$\text{Winkel}(z_1/z_2) = \text{Winkel}(z_1) - \text{Winkel}(z_2)$$

Zum Beispiel: $+ \text{ganzzahliges Vielfaches von } 2\pi$

