



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Fragen?

* Lineares Gleichungssystem und Gauß-Algorithmus.

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\24x_1 + 10x_2 - 13x_3 &= 25 \\2x_2 + 3x_3 &= 9\end{aligned}$$

- a) Schreiben Sie dieses Lineare Gleichungssystem in Matrixform: $Ax = b$.
- b) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an und formen Sie diese mittels elementarer Zeilenumformung in Zeilenstufenform um.
- c) Lesen Sie von der Zeilenstufenform von unten nach oben die Lösung ab. Identifizieren Sie vorher freie Variablen.
- d) Skizzieren Sie die Lösungsmenge.

Lösung.

$$\begin{array}{ccc|c} I & 3 & 1 & -2 & 2 \\ \underline{II} & 24 & 10 & -13 & 25 \\ \underline{III} & 0 & 2 & 3 & 9 \end{array} \quad \underline{II} - 8 \cdot I$$

$$\begin{array}{ccc|c} I & 3 & 1 & -2 & 2 \\ \underline{II}' & 0 & 2 & 3 & 9 \\ \underline{III}' & 0 & 2 & 3 & 9 \end{array} \quad \underline{III}' - \underline{II}'$$

$$\begin{array}{ccc|c} I & 3 & 1 & -2 & 2 \\ \underline{II}' & 0 & 2 & 3 & 9 \\ \underline{III}' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

λ ist beliebig \rightarrow Lösungen

$$\Rightarrow 2x_2 + 3\lambda = 9 \Leftrightarrow x_2 = \frac{9-3\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow 3x_1 + \frac{9-3\lambda}{2} - 2\lambda - 2 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{3}{6}\lambda$$

Eigener Lösungsversuch.

Gauß-Algorithmus. Lösen Sie das LGS $Ax = b$ mit

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{\text{II}} - 8\underline{\text{I}}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\text{II}} - 8\underline{\text{I}}$

Lösung.

a) $\begin{array}{c|ccc} \text{I} & 3 & 1 & -2 \\ \hline \text{II} & 0 & 2 & 3 \\ \hline \text{III} & 0 & 2 & 3 \\ \hline \text{IV} & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{I} = 2 \quad \text{S} \\ \text{II} = \emptyset = \{ \}$

b) $\begin{array}{c|ccc} \text{I} & 3 & 1 & -2 \\ \hline \text{II} & 0 & 2 & 3 \\ \hline \text{III} & 0 & 2 & 1 \\ \hline \text{IV} & 0 & 0 & -2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{II} = \text{III}$

$$\rightarrow -2x_3 = 1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$2x_2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

$$3x_1 + (-\frac{3}{4}) + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

Eigener Lösungsversuch.

Rätsel. Anna ist 5 Jahre älter als ihre Schwester Hanna. In 20 Jahren ist Anna doppelt so alt wie Hanna heute ist. Wie alt sind die beiden heute?

Lösung.

$$\text{Hanna} = x \text{ Jahre}$$

$$\text{Anna} = x + 5 \text{ Jahre}$$

$$2x = x + 25 \quad (-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 25$$

$$\text{Hanna} = 25 \text{ Jahre}$$

$$\text{Anna} = 30 \text{ Jahre}$$

Eigener Lösungsversuch.

In der Kneipe.



- a) Wenn Sie nur das linke Bild betrachten: Was kostet ein Bier? Was kostet eine Tüte Erdnüsse?
- b) Wenn Sie beide Bilder betrachten: Was kostet ein Bier? Was kostet eine Tüte Erdnüsse? (Beide)

a.) Lösung.

$$x_1 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 = 10 | 8 | 6 | 4 | 2 \dots 12 - 2d \text{ oder}$$

$$x_2 = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 \dots 6 - \frac{d}{2}$$

b.)

$$x_1 + 2x_2 = 12$$

$$6x_1 + 7x_2 = 52,5 \quad | - 6x_1 : 7$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{52,5 - 6x_1}{7}$$

$$x_1 + 2 \cdot \left(\frac{52,5 - 6x_1}{7} \right) = 12$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 15 - \frac{12}{7}x_1 = 12 \quad | - 15$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}x_1 = -3 \quad | \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 4,2 \Rightarrow x_2 = (12 - 4,2) : 2 = 3,9$$

Eigener Lösungsversuch.