Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Vollständige Induktion

Fragen?

Anekdote kleiner Gauß. Addieren Sie die Zahlen 1 bis 100.

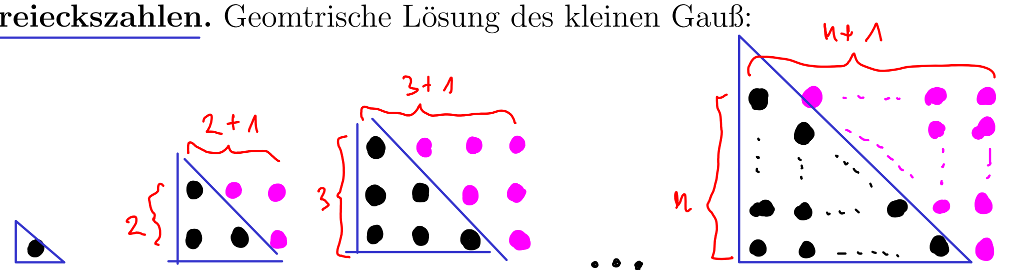
$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+50 \\ +\ 100+99+98+\dots+51 \\ \hline \underbrace{101+101+101+\dots+101}_{50\text{ mal}} \end{array} = 50\cdot 101 = 5050 = \frac{100\cdot(100+1)}{2}$$

Allg. Gauß'sche Summenformel:

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

```
int sum = 0;
for (int i=1; i≤n; i++){
    sum = sum + i;
}
```

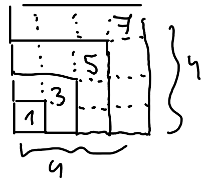
Dreieckszahlen. Geomtrische Lösung des kleinen Gauß:



$1 \qquad 1+2 \qquad 1+2+3 \qquad \dots \qquad 1+2+\dots+n$

$\frac{2\cdot 3}{2}=3 \qquad \frac{3\cdot 4}{2}=6 \qquad \frac{n\cdot(n+1)}{2}=1+2+\dots+n$

Geometrischer Beweis, wir machen es „sauber" mit vollständiger Induktion!
(↝ Vorbereitung)



$1+3+5+7 = 4^2$

* **Summe der ungeraden Zahlen = Quadratzahl.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \underset{\{1,2,\ldots\}}{\mathbb{N}}: \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+5+\ldots+(2n-1) \overset{!}{=} n^2}_{A(n)}$$

Lösung.

Idee!

IA (Induktionsanfang): $n = 1$: $\quad LS = \sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$RS = 1^2 = 1$ ✓

d.h. $A(1)$ gilt!

IV (Induktionsvoraussetzung/-annahme): Für $n = k$ soll gelten: $\sum_{i=1}^{k} 2i-1 = k^2$

d.h. $A(k)$ soll gelten

IS (Induktionsschritt): $n = k \longrightarrow n = k+1$

d.h. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

z.z.: $\sum_{i=1}^{k+1} 2i-1 = (k+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i-1 = \underset{i=1}{2\cdot 1}-1 + \underset{i=2}{2\cdot 2}-1 + \ldots + \underset{i=k}{2\cdot k}-1 + \underset{i=k+1}{2(k+1)}-1$$

$$= \underbrace{1 + 3 + \ldots + 2\cdot k - 1}_{\sum_{i=1}^{k} 2i-1 \overset{IV}{=} k^2} + 2\cdot(k+1) - 1$$

Trick: letzter Summand abspalten!

$$= k^2 + \underbrace{2\cdot(k+1)-1}_{2k+2-1 = 2k+1}$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$\overset{\text{bin. Formel}}{=} (k+1)^2 \quad \square$$

q.e.d.

Eigener Lösungsversuch.

Geometrische Summenformel. Beweisen Sie:

zzg. ← !

$$\forall \underset{\{0,1,2,\dots\}}{n \in \mathbb{N}_0} \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \quad \boxed{\sum_{i=0}^{n} q^i = \underbrace{1}_{q^0} + q + q^2 + \ldots + q^n \overset{!}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

$A(n)$

Lösung.

IA: $n = 0$: $\quad LS = \sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$

$RS = \dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$ ✓

IV: $n = k$: $\quad \sum_{i=0}^{k} q^i = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$

IS: $n = k \longrightarrow n = k+1$: $\quad$ ~~zzg~~: $\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \dfrac{1-q^{k+1+1}}{1-q}$

gem. Nenner

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} q^i}_{\overset{IV}{=} \frac{1-q^{k+1}}{1-q}} + q^{k+1} = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1}\,\frac{1-q}{1-q} =$$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{k+1}} + \cancel{q^{k+1}} - q^{k+1+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{1 - q^{k+1+1}}{1-q} \qquad \square$$

Trick: letzter Summand abspalten:

$$\underbrace{q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^k}_{\sum_{i=0}^{k} q^i} + q^{k+1}$$

Eigener Lösungsversuch.

Bubble Sort in C. Implementieren Sie den Bubble-Sort-Algorithmus um ein Array aus Zahlen zu sortieren.

Lösung. $\rightarrow$ siehe C-Datei.