PROF. DR. M. HELBIG
MATHEMATIK – ÜBUNG

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

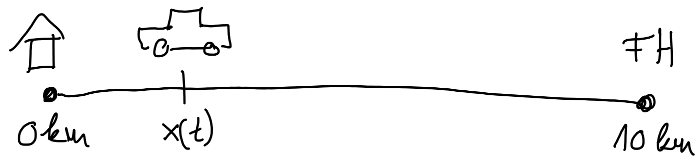
INTEGRALE

Fragen?

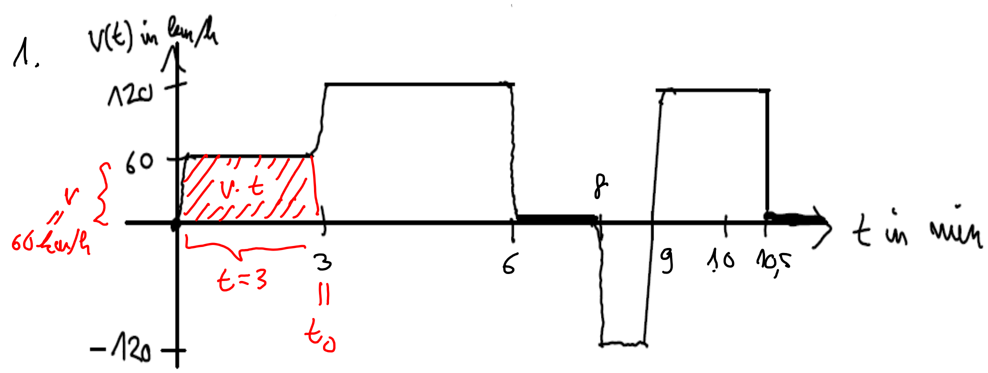
*** Strecke zur Hochschule.** Stellen Sie sich Ihren Weg zur Hochschule vor: Zu Hause sind Sie bei Kilometer 0 und z.B. bei Kilometer 10 sind Sie an der Hochschule.

1. Zeichnen Sie das Zeit/Geschwindigkeits-Diagramm (Fahrtenschreiber: schreibe vom Tachometer die Geschwindigkeiten mit) aus der letzten Vorlesung.
2. Wie kann man den Ort zum Zeitpunkt t berechnen?

Lösung.



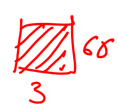
1.



2. z.B. zum Zeitpkt. $t_0 = 3$ min. ist man wo?

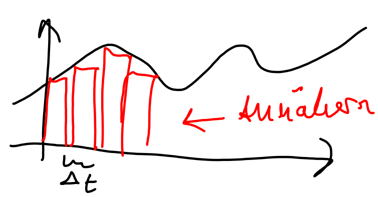
$v(t) = \frac{x(t)}{t}$ Beschw. Ort Zeit

$\Rightarrow \quad x(3) = \underbrace{3\,\text{min.}}_{\frac{1}{60}h} \cdot \underbrace{v(3)}_{60\frac{km}{h}} = 3\,\text{km}$ Fläche des Rechtecks



allgemein: unter dem Graphen

Für nicht konstante Graphen von $v(t)$:



← Annähern der Fläche durch Rechtecke!

Im Grenzwert (immer kleinere Rechtecke $\Delta t \to 0$) bekommt man die Fläche als

$$\boxed{\text{Integralfunktion} \quad x(t_0) = \int_0^{t_0} v(t)\,dt}$$

letztes mal: $x'(t_0) = v(t_0)$, heute $x(t) =$

Fazit: $x(t_0) \xrightarrow{()'} v(t_0)$, $\quad v(t_0) \xrightarrow{\int} x(t_0)$

Eigener Lösungsversuch.

$F' = f$

Menge aller Stammfkt. von f

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\overbrace{F(x) + c}^{\text{alle Stammfktn! mit } c\in\mathbb{R}}}_{}$$

$F(x)$: eine Stammfkt. F

Bsp. $F(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$:

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

Stammfkten: z.B.

$F_1(x) = \sin x$

$F_2(x) = \sin x + 3$

$F_3(x) = \sin x - \sqrt{2}$

$\vdots$

Unbestimmte Integrale. Was ist das unbestimmte Integral? Berechnen Sie folgende Integrale bzw. zeigen Sie:

a) $\int 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5\,dx$

b) $\int 3\sin(t) - 4\cos(t)\,dt$

c) $\int 2e^t - \frac{5}{t} + 1\,dt$

Prüfen durch Ableiten!

d) $\int e^{-x}(1-x)\,dx = xe^{-x} + c$

e) $\int \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = e^{\sin(x)} + c$

f) $\int \cos(3x)\cdot\sin(3x)\,dx = \frac{1}{6}\sin^2(3x) + c$

g) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

h) $\int e^{2x}\,dx$

i) $\int 5^x\,dx$

j) $\int \sin(2x)\,dx$

k) $\int x^{\sqrt{2}}\,dx$

Lösung.

Wdh: • Linearität: $\int f + g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$\int \lambda f\,dx = \lambda \int f\,dx$

• $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

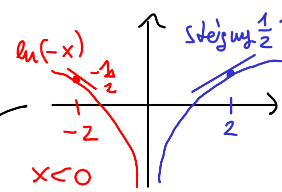
• $\int \underbrace{x^{-1}}_{\frac{1}{x}}\,dx = \ln x + c \qquad x > 0$

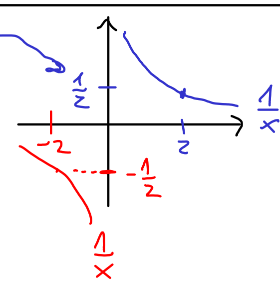
• $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \neq 0$

$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

$\Rightarrow x^n + c = \int n\cdot x^{n-1}\,dx$

$n\neq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x^n}{n} + c = \int x^{n-1}\,dx}$





$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x \geq 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

a) $\int \ldots\,dx \overset{\text{Lin.}}{=} 4\cdot\frac{x^6}{6} - 6\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + C$

b) $= 3\cdot(-\cos t) - 4\sin(t) + c$

c) $= 2\cdot e^t - 5\cdot\ln|t| + t + C$

Produktregel Kettenregel!

d) $(\overbrace{xe^{-x} + c}^{\text{allg. Stammfkt.}})' = 1\cdot e^{-x} + x e^{-x}\underbrace{(-x)'}_{(-1)} = (1-x)e^{-x}$ ✓

e) $(e^{\sin x} + c)' = e^{\sin x}\underbrace{(\sin x)'}_{\cos x}$ ✓

f) $\left[\frac{1}{6}(\sin(3x))^2\right]' = \frac{1}{6}\,2\cdot(\sin(3x))\cdot\underbrace{(\sin(3x))'}_{\cos(3x)\cdot 3} = \sin(3x)\cdot\cos(3x)$ ✓

~~**Eigener Lösungsversuch**~~.

g) $\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x^{-2}} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

h) $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$ (Kettenregel: $\left(\frac{1}{2} e^{2x}\right)' = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \underbrace{(2x)'}_{2} = e^{2x}$)

i) $\int 5^x \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$ (letztes mal: $(5^x)' = (e^{x \ln 5})' = \underbrace{e^{x \ln 5}}_{5^x} \cdot \ln 5$)

Probe: $\left(\frac{5^x}{\ln 5}\right)' = \frac{1}{\ln 5} \cdot (5^x)' = \frac{1}{\ln 5}(5^x \cdot \ln 5) = 5^x$.

j) $\int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$

k) $\int x^{\sqrt{2}} \, dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + c$