9
Restabschätzung nach Taylor. Potenzreihen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. März 2014, 21:09

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Fragestellung

Eine Funktion f soll an der Stelle x_0 mit einem Taylor-Polynom n-ten Grades genähert werden, also durch den Anfang der Taylor-Reihe:

1

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + f^{n}(x_0)\frac{(x+x_0)^n}{n!}}_{\text{Näherung}}$$

Die Frage ist, wie gut diese Näherung an einer Stelle x ist. Anschaulich scheint es so, dass die Näherung um so besser ist, je näher x an x_0 ist und je höher der Grad n ist. Um das zu untersuchen, betrachtet man die Abweichung der Funktion f von der Näherung. Das ist der Fehler, Rest R_n genannt:

2 $R_n(x) = f(x) - (\text{Näherung aus } 1)$

2 Taylor-Restformel

R_1, also der Fehler der Tangentengerade, ergibt sich als:

3 $$R_1(x) = \int_{x_0}^{x} f''(x_1)(x-x_1)\,dx_1$$

$f'(x_1)$ $\quad -1$

Das zeigt man mit Hilfe einer partiellen Integration:

4 $$\dots = \underbrace{\left[f'(x_1)(x-x_1)\right]_{x_1=x_0}^{x_1=x}}_{0 - f'(x_0)(x-x_0)} - \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(x_1)\cdot(-1)\,dx_1}_{-\underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(x_1)\,dx_1}_{f(x)-f(x_0)}}$$

$$= -f'(x_0)(x-x_0) + f(x) - f(x_0)$$

$$= R_1(x)$$

R_2, also der Fehler der Schmiegeparabel, ergibt sich als:

5 $$R_2(x) = \int_{x_0}^{x} f'''(x_1)\,\frac{(x-x_1)^2}{2}\,dx_1$$

$f''(x_1)$ $\quad -(x-x_1)$

Das zeigt man, indem diesen Ausdruck mit Hilfe einer partiellen Integration auf R_1 zurückführt:

6 $$\dots = \underbrace{\left[f''(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2}\right]_{x_1=x_0}^{x_1=x}}_{\cancel{f''(x)\frac{(x-x)^2}{2}} - f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f''(x_1)(x-x_1)\,dx_1}_{R_1(x)}$$

$$= f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right) - f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Schmiegeparabel

Nach diesem Muster ergibt sich offensichtlich allgemein für R_n, also den Fehler des Taylor-Polynoms n-ten Grades:

7

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(x_1)\,\frac{(x-x_1)^n}{n!}\,dx_1$$

Die ist die Taylor-Restformel.

3 Abschätzung des Fehlers

Die Formel für R_n erlaubt zu sagen, wie dicht x an x_0 liegen muss und wie hoch der Grad n gewählt werden muss, um den Fehler R_n hinreichend klein zu halten. Typischerweise gibt man dazu vor, wie groß der Absolutbetrag des Fehlers maximal sein darf (sagen wir eine Zahl F). Also ist die Frage, für welche x und für welche n dies gilt:

8

$$|\underbrace{f(x) - \text{Taylorpolynom}_n(x)}_{R_n(x)}| \le F$$

einfach zu berechnen

Das unschöne Integral auszurechnen, ist mit Bleistift und Papier oft gar nicht möglich. Man gibt sich mit einer „konservativen" Schätzung zufrieden, d. h. einer Schätzung, die auf der sicheren Seite liegt, den Fehler im Betrag also allenfalls zu groß schätzt und nie zu klein.

Das Integral ändert man dazu so, dass es im Betrag allenfalls größer werden kann. Betrachten wir zunächst den Fall $x > x_0$:

9

$$|R_n(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(x_1)\,\frac{(x-x_1)^n}{n!}\,dx_1\right|$$

erst nur $x > x_0$

$$\le \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f^{(n+1)}(x_1)|}\,\frac{(x-x_1)^n}{n!}\,dx_1$$

Nun kann man das Integral ganz wegfallen lassen:

10

$$\le \max_{x_0 \le x_1 \le x} |f^{(n+1)}(x_1)|$$

$$\le \left(\max_{x_0 \le x_1 \le x} |f^{(n+1)}(x_1)|\right) \cdot \underbrace{\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-x_1)^n}{n!}\,dx_1}_{\left[-\frac{(x-x_1)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_1=x_0}^{x_1=x}}}_{\cancel{0-}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Den Fall $x < x_0$ kann man so mit erfassen:

11

Für alle x:

$$|R_n(x)| \le \max_{\substack{x_1 \text{ liegt zwischen} \\ x_0 \text{ und } x}} |f^{(n+1)}(x_1)| \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Wenn man x und n so wählt, dass dieser Ausdruck kleiner als die gewünschte Fehlerschranke F ist, dann ist es der Betrag $|R_n|$ des wahren Fehlers erst recht.

4 Ein Beispiel

Die Wurzelfunktion $f = \sqrt{}$ soll an $x_0 = 4$ mit einer quadratischen Parabel genähert werden. Die Näherungsparabel (quadratisches Taylor-Polynom) ist:

12

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{4}^3}\frac{(x-4)^2}{2}$$

Wie weit weicht die Parabel auf dem Bereich von $x = 1$ bis $x = 7$ schlimmstenfalls von der Wurzel ab (konservativ geschätzt)?

13

$$|R_2(x)| \le \underbrace{\max_{x_1 \text{ zwischen } 4 \text{ und } x} \left|\frac{3}{8} x_1^{-\frac{5}{2}}\right|}_{\le \frac{3}{8} \cdot 1^{-\frac{5}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{|x-4|^3}{6}}_{\le \frac{3^3}{6}}$$

$$\le \frac{3}{8} \cdot \frac{3^3}{6} = \frac{27}{16}$$

5 Potenzreihen, Konvergenzradius

Die Entwicklung einer Funktion f an einer Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe war:

14

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \ldots \quad ⚠$$

bis ins unendliche

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Ergibt diese unendliche lange Summe (Fachbegriff: „Reihe“) Sinn? Dies führt auf den Begriff „Konvergenzradius“.
2. Falls die Reihe Sinn ergibt: Kommt aus ihr wieder die Funktion f heraus? Dies führt auf den Begriff der „analytischen Funktionen“.

Zur ersten Frage: Die Taylor-Reihe ist eine spezielle Art, eine Potenzreihe zu bilden. Um die erste Frage zu beantworten, kann man einfacher eine allgemeine Potenzreihe untersuchen:

15
$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Dabei sind die $a_0, a_1, \ldots$ feste Zahlen.

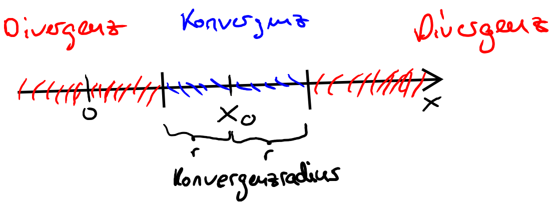
Was soll diese unendlich lange Summe mathematisch bedeuten?

16
$$=: \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$$

Wenn dieser Grenzwert für ein gegebenes x existiert, sagt man: Die Reihe konvergiert für dieses x. Die große Frage ist, für welche x das der Fall ist.

Anschaulich ist klar, dass die Potenzreihe um so mehr zur Explosion neigt, je weiter x von x_0 weg liegt, also je größer $|x-x_0|$ wird. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius r, so dass die Reihe für $|x-x_0| < r$ konvergiert und für $|x-x_0| > r$ divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für $|x-x_0| = r$, kann sie konvergieren oder divergieren, je nach x. Im Prinzip sieht das so aus:

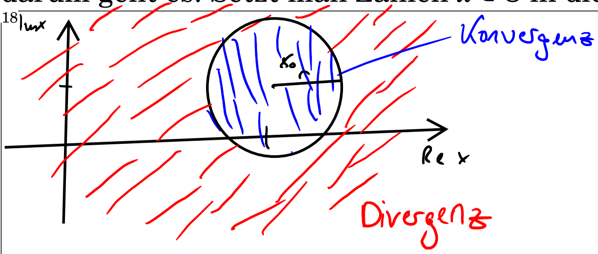
17



Im Fall $r = \infty$ hat man immer Konvergenz, so wie bei den Funktionen exp, sin und cos. Im Fall $r = 0$ kann man nur $x = x_0$ einsetzen, was nicht sehr spannend ist.

Der Begriff Konvergenz*radius* lässt an eine Kreisscheibe denken – und genau darum geht es: Setzt man Zahlen $x \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe ein, ist das Verhalten so:

18



Dass die kritische Grenze genau ein Kreis ist, ist zunächst überraschend.

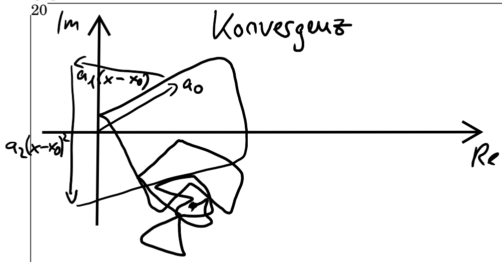
Angenommen, x liegt so dicht bei x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \le 0{,}999$ für alle n gilt, ggf.m̃it endlich vielen Ausnahmen. Dann kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe nach oben abschätzen:

19

$$|a_n(x-x_0)^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x-x_0|\right)^n \le 0{,}999^n$$

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses, mit mindestens exponentiell schrumpfenden Abständen (mit ggf. endlich vielen Ausnahmen):

20



Die Reihe wird in diesem Fall also konvergieren. Dasselbe passiert auch mit 0,99999 usw. statt 0,999.

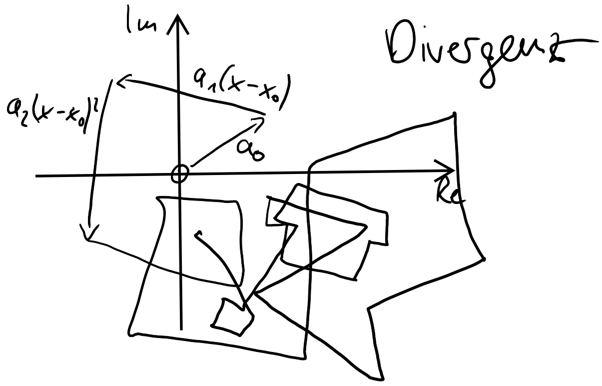
Angenommen dagegen, x liegt so fern von x_0, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \ge 1$ für alle n oder zumindest für unendlich viele n gilt. Für diese n kann man den Betrag des n-ten Summanden der Potenzreihe *nach unten* abschätzen:

21

$$|a_n(x-x_0)^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|\right)^2 \ge 1^n = 1$$

Wenn man die Reihe Summand für Summand in $\mathbb{C}$ einzeichnet, ergibt sich damit ein Bild wie dieses – mit Abständen, die immer wieder ≥ 1 sind:

22



Die Reihe wird in diesem Fall also divergieren.

Es kommt also nur auf den Betrag $|x-x_0|$ an. Die Grenzlinie zwischen Konvergenz und Divergenz muss deshalb wirklich ein Kreis sein, keine Quadrat oder eine andere Figur. Der Radius dieses Kreises heißt Konvergenzradius r der Potenzreihe.

Im Allgemeinen ist $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ nicht *durchgängig* für alle n größer oder kleiner als 1, was die Sache kompliziert macht. Als Trick definiert man den „Limes superior" $\limsup_{n\to\infty}$, das ist der höchste Häufungspunkt einer Folge – wobei $+\infty$ und $-\infty$ erlaubt sind. Beispiele:

Folge	lim sup
$1;2;3;1;2;3;1;2;3;\ldots$	[23] 3
$1;10;2;20;3;30;\ldots$	[24] ∞
$0{,}9;0{,}99;0{,}999;0{,}9999;\ldots$	[25] 1

Dann lässt sich für den Konvergenzradius schreiben:

[26]

Konvergenzradius r:

$$\left(\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}\right) \cdot r = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Dabei wird ausnahmsweise $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$ gerechnet. Folgende drei Fälle kann man dann unterscheiden:

[27]

$|x-x_0| < r \Rightarrow$ Konvergenz

$|x-x_0| = r \Rightarrow$?

$|x-x_0| > r \Rightarrow$ Divergenz

6 Analytische Funktionen

Nun zum zweiten Problem: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für ein gegebenes x. Ist das Ergebnis dann wieder $f(x)$?

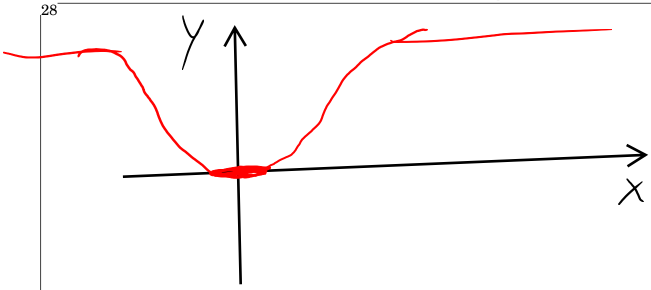
Funktionen f, die das erfüllen, heißen analytisch. Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein. Will sagen: Nicht jede konvergente Taylor-Reihe summiert sich wieder zu der zu Grunde liegenden Funktion f.

Die Ausnahmen in der Mathematik sind allerdings exotisch. Hier ist ein Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ wenn } x \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schmiegt sich bei $x = 0$ extrem stark an die x-Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Das sieht etwa so aus:

28



Die Taylor-Reihe dieser Funktion f für $x_0 = 0$ ist deshalb für alle x gleich null – also nicht gleich f. So etwas passiert aber im wahren Leben selten. Trotzdem können die meisten Signalverläufe im wahren Leben keine analytischen Funktionen sein, denn sonst gäbe es keine Überraschungen: Analytische Funktionen sind durch ihre Ableitungen sofort innerhalb des gesamten Konvergenzradius bestimmt.

7 Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Für besonders fiese Differentialgleichungen kann man eine Potenzreihe als Ansatz verwenden. Beispiel: $y' \stackrel{!}{=} y^2 + x$ mit $y(2) \stackrel{!}{=} 3$. Setzen wir also die Lösung y als eine Potenzreihe an der Startstelle $x_0 = 2$ an:

29

30

Die Anfangsbedingung $y(2) = 3$ heißt dann:

Die Potenzreihe setzt man in die Differentialgleichung ein und vergleicht die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $(x - 2)$:

31

Auf diese Weise ist es bei vielen Differentialgleichungen möglich, die ersten Koeffizienten der Reihe auszurechnen. Man kann die Reihe danach abbrechen und hat damit ein Taylor-Polynom als Näherung für die Lösung. Manchmal findet man sogar eine handliche Formel für *alle* Koeffizienten. Vorsicht: Die damit gebildete Potenzreihe funktioniert aber nur innerhalb ihres Konvergenzradius.