Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Logik

Anmerkung. Mit * versehene Aufgaben, machen Sie bitte vorab. Diese werden in der Vorlesung sofort vorgetragen (ohne eigene Bearbeitungszeit).

Fragen?

$P \Rightarrow Q$ mittels $\wedge, \vee, \neg$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Verschiedene Mgl:
- Probieren mit Wahrheitstafel ☹
- Rechenregeln (wie in Video)
- nächstes mal: DNF.

Formalisieren.

1. * “Hans spielt Tennis, aber er läuft nicht gern.”
2. Vor einer Wirtschaft steht auf einem Schild: “Dienstag ist Ruhetag”.
   a) * Wie verstehen Sie das (im Alltag)?
   b) Wie würden sie das Formalisieren? D: Es ist Dienstag , R: Es ist Ruhetag
      i. $D \Rightarrow R$
      ii. $R \Rightarrow D$
      iii. $D \Leftrightarrow R$
3. * “Es gibt einen Studenten, der programmieren kann.”
4. “Zu jedem Schloss passt ein Schlüssel.”
5. Negieren Sie 1., 3. und 4.

Lösung.

1. H: „Hans spielt Tennis"
   L: „Hans läuft gerne" } $H \wedge \neg L$

2. a) Dienstag geschlossen, sonst offen!

   b) i) $D \Rightarrow R$: Am Di ist Ruhetag ✓
   Über Mi – Mo ist keine Aussage getroffen: es könnte offen oder geschlossen sein (ex falso quodlibet) ✗

   ii) $R \Rightarrow D$: Nur der Di kann ein Ruhetag sein ✓
   Di muss aber kein Ruhetag sein ✗

R	D	$R \Rightarrow D$
0	1	1 ← d.h. widerspricht $R \Rightarrow D$ nicht!

   iii) $(R \Leftrightarrow D) \Leftrightarrow (D \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow D)$
   $\Leftrightarrow$ Dienstag ist Ruhetag $\wedge$ Nur Di kann Ruhetag sein, kein anderer Tag! ✓

3. S = Menge aller Studenten
   P(x) : „x kann programmieren" } $\exists x \in S : P(x)$.

4. K = Menge aller Schlüssel
L = Menge aller Schlösser
$P(x,y)$: „y passt in x"

$$\forall x \in L \ \exists y \in K : P(x,y).$$

~~Eigener Lösungs~~versuch.

5. De Morgan

$$\neg(H \land \neg L) \iff \neg H \lor \neg\neg L \iff \neg H \lor L$$

„Hans spielt nicht Tennis oder es läuft gern"

Logisches!

$$\neg\left(\exists x \in S : P(x)\right) \iff \forall x \in S : \neg P(x)$$

Kein Student kann Programmieren

$$\neg\left(\forall x \in L \ \exists y \in K : P(x,y)\right) \iff \exists x \in L \ \forall y \in K : \neg P(x,y)$$

Es gibt ein Schloss, wo kein Schlüssel passt!

Wahrheitstafeln.

1. * **Kontraposition.** Zeigen Sie: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ ist eine Tautologie.

2. **Negation von "$\Leftrightarrow$".** Bestimmen Sie eine zu $\neg(P \Leftrightarrow Q)$ äquivalente Aussage (Hinweis: Machen Sie eine Wahrheitstafel).

   WIEDERHOLUNG NEGATION:

   a) $\neg(P \wedge Q) \overset{\text{DeMorgan}}{\Longleftrightarrow} \neg P \vee \neg Q$

   b) $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

   c) $\neg(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge \neg Q$

   d) $\neg(\neg P) \Longleftrightarrow P$

   e) Fehlt noch: $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow P \oplus Q$

   f) Fehlt noch: $\neg(P \oplus Q) \Longleftrightarrow P \Leftrightarrow Q$

Lösung.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$ (A)	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$ (B)	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

d.h. immer wahr, also Tautologie!

$\Longleftrightarrow$

2.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q)$	$P \oplus Q$	$\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	$(\neg P) \Leftrightarrow Q$	$P \Leftrightarrow \neg Q$
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$

Eigener Lösungsversuch.

Barbier-Paradoxon. Der Barbier eines Dorfes rasiert all jene und nur jene Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier selbst?

Lösung.

Fall 1. Er rasiert sich selbst $\lightning$ zur Aussage: er rasiert nur jene, die sich nicht selbst rasieren.

Fall 2. Er rasiert sich nicht selbst $\lightning$ er rasiert all jene, die sich nicht selbst rasieren.

$\longrightarrow$ Paradoxon (Typ: Russell'sche Antinomie)

Lösung des Paradoxons mit Prädikatenlogik:

D: Menge aller Dorfbewohner, $R(x,y)$: x rasiert y

$$\exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Barbier}}}{x} \in D \ \underset{\uparrow}{\forall} y \in D: \ R(x,y) \Longleftrightarrow \neg R(y,y)$$

insbesondere für $y = x$: $\underbrace{R(x,x) \Longleftrightarrow \neg R(x,x)}$

immer falsch:

p	$\neg p$	$p \Leftrightarrow \neg p$
0	1	0
1	0	0

d.h. die Aussage ist falsch, d.h. Negation ist wahr:

$\neg(\exists x \in D \ldots)$ ist wahr, d.h. es gibt keinen solchen Barbier!!

Eigener Lösungsversuch.