



---

## RESTKLASSEN

**Fragen?**

\* **Restklassen.** Was sind die Restklassen von  $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$ ?

**Lösung.**

$$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

$$\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

**Eigener Lösungsversuch.**

**Verknüpfungstafeln.** Bilden Sie die Verknüpfungstafeln bzgl.  $+/ \cdot$  von  $\mathbb{Z}_3$  &  $\mathbb{Z}_4$ .

**Lösung.**

$\mathbb{Z}_3$  :

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\mathbb{Z}_4$  :

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

**Eigener Lösungsversuch.**

**Zusammenhang von “ $\equiv$ ” und “ $=$ ” bei Zahlen und Restklassen.** Die Zahlen 5 und 13 sind natürlich nicht gleich, aber es gelten folgende äquivalente Aussagen:

- Zahlen “ $=$ ”:  $5 = 13 + q \cdot 8$  für ein  $q \in \mathbb{Z}$  (gleich bis auf Vielfaches von 8)
- Zahlen “ $\equiv$ ”:  $5 \equiv 13 \pmod{8}$
- Restklassen “ $=$ ”:  $\overline{5} = \overline{13}$  in  $\mathbb{Z}_8$

**Rechnen mit Restklassen.** Berechnen Sie in  $\mathbb{Z}_{10}$  ohne Taschenrechner:

Lösung.

$$\begin{aligned}
 & \overline{5134} \cdot \overline{21} + \overline{235} \cdot \overline{24} - \overline{338} \cdot \overline{446} \\
 &= \overline{4} \cdot \overline{1} + \overline{5} \cdot \overline{4} - \overline{(-2)} \cdot \overline{6} \\
 &= \overline{4} + \overline{0} - \overline{(-12)} \\
 &= \overline{4} + \overline{12} \\
 &= \overline{16} = \overline{6}
 \end{aligned}$$

**Eigener Lösungsversuch.**

Lineare Gleichung, Teil 1. Bestimmen Sie alle  $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}$  mit  $\bar{4} \cdot \bar{x} + \bar{2} = \bar{1}$ .

Lösung.

$$\bar{4} \cdot \bar{x} + \bar{2} = \bar{1} \quad | -\bar{2}$$

$$\bar{4} \bar{x} = \bar{-1} = \bar{11}$$

$$4x = 11 + q \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 4x + 12 \underbrace{(-q)}_y = 11$$

diophantische Gleichung

Lösbar  $\rightarrow \text{ggT}(4, 12) = 4 \nmid 11$   
d.h. nicht lösbar

Eigener Lösungsversuch.

$$y = -q \quad y = -1 \quad \begin{matrix} -1 = -q \\ q = 1 \end{matrix}$$

Lineare Gleichung, Teil 2. Bestimmen Sie alle  $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{1024}$  mit

$$1. \quad \bar{5} \cdot \bar{x} = \bar{1} \quad 5x = 1 + q \cdot 1024 \Leftrightarrow 5x + 1024y = 1 \quad ; \Rightarrow \quad 5x = 1 + 1 \cdot 1024 \quad |:5 \Leftrightarrow x = 205$$

$$2. \quad \bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{4} \quad 2x = 4 + q \cdot 1024 \Leftrightarrow 2x + 1024y = 4$$

Lösung.

$$\text{ggT}(5, 1024) \quad \begin{array}{c|c|c|c} a_i = q_i b_i + r_i & x_i & y_i & \text{ggT}(a, b) = a_i x_i + b_i y_i \\ \hline 1024 = 104 \cdot 5 + 4 & -1 & 205 & 1 = 1024 \cdot (-1) + 5 \cdot 205 \\ 5 = 1 \cdot 4 + 1 & 1 & -1 & \\ 4 = 4 \cdot 1 + 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\text{ggT}(2, 1024)$$

$$\begin{array}{lcl} 2 = 0 \cdot 1024 + 2 & 1 & 0 \\ 1024 = 512 \cdot 2 + 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1024 \\ 0 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1024 \end{array}$$

**Eigener Lösungsversuch.**