Logik

Logik – Intro

- Aussagenlogik:

- Prädikatenlogik:

$\boxed{\text{ZIEL}}$ Ich lerne ...

- Logik vs. Umgangssprache

- Umgangssprache ⟶ logische Sprache

- Richtig Negieren: Was ist die gegenteilige Aussage?

- Komplizierte Aussagen vereinfachen

Logik – Aussagen

Was ist eine Aussage?

Def. Eine **Aussage** ist eine , die entweder

- (in Zeichen:) oder
- (in Zeichen:) ist.

$\boxed{\text{ü}}$ Was ist eine Aussage? Ggf. wahr oder falsch?

a) In München steht ein Hofbräuhaus.

b) Der Kölner Dom ist 413 m hoch.

c) $3 \cdot 3 = 6$

d) Lass mich in Ruhe!

e) Jede gerade Zahl > 2 kann man als Summe zweier Primzahlen schreiben.

f) Diese Behauptung ist falsch.

Logik – Umgangssprache & Wahrheitstafeln

alltägliche Umgangssprache:

-
-

Bspe.

a) Als Hauptspeise wähle ich Schnitzel oder Schweinebraten.

P	Q	P Q
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

b) Wenn ich Durst habe, dann trink ich

P	Q	P Q
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Logik – Verknüpfungen von Aussagen

Def. Seien P, Q zwei Aussagen.

a) **Negation:** ("nicht P") def. durch

P	$\neg P$
0	
1	

b) **Konjunktion:** ("P und Q") def. durch

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

c) **Disjunktion:** ("P oder Q") def. durch

P	Q	$P \vee Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

d) **Implikation:** ("wenn P, dann Q", "aus P folgt Q", "P ist hinreichend für Q", "Q ist notwendig für P") def. durch

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

e) **Äquivalenz:** ("P genau dann, wenn Q", "P ist äquivalent zu Q", "P ist hinreichend und notwendig für Q") def. durch

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

f) XOR: ("entweder P oder Q", "P xor Q") def. durch

P	Q	$P \oplus Q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Was haben wir jetzt davon?

$\boxed{\text{ZIEL}}$ zum & von

Aussagen!

Bsp. $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (*)

P	Q	$\underline{P \Rightarrow Q}$	$\neg P$	$\underline{\neg P \vee Q}$	$\underline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \underline{(\neg P \vee Q)}$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Die Aussage gilt für jede Kombination von P, Q, d.h.

(*) ist eine allgemeingültige Aussage, eine sogenannte

Logik – Rechenregeln

Negation

$\neg(P \wedge Q) \iff$

$\neg(P \vee Q) \iff$

$\neg(P \Rightarrow Q) \iff$

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass die De Morganschen Regeln Tautologien sind.

$\boxed{\text{Ü}}$ Drücken Sie $P \Rightarrow Q$ mittels $\wedge, \vee, \neg$ aus und berechnen Sie dann $\neg(P \Rightarrow Q)$ mit den De Morgan. Regeln.

$\boxed{\text{Ü}}$ Negieren Sie:

Wenn keine Wolken am Himmel sind, scheint die Sonne oder es ist Nacht

Distributivgesetze

$$P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$\boxed{\text{Ü}}$ Vereinfachen Sie:

Ich habe Hunger und Durst, oder Hunger und keinen Durst.

Logik – Prädikate

z.B. Für welche x gilt die Aussage „$\underbrace{x^2 < 1}_{P(x)}$“?

$P(0)$:

$P(2)$:

z.B. Welche x erfüllen „$\underbrace{x \text{ hat rote Haare}}_{Q(x)}$“?

Q(Mickey Mouse):

Q(Pippi Langstrumpf):

z.B. Prädikat $R(x,y)$: „$x^2 = y$“

$R(-1, 1)$:

$R(\sqrt{2}, 1)$:

Fazit: Sobald man einen Wert einsetzt, bekommt man eine !

$\boxed{\text{Ü}}$ Für $x = -1$ und $y = 1$ prüfe man ob $P(x) \Rightarrow R(x,y)$ zu einer wahren Aussage wird.

Logik – Quantoren

Für welche x gilt $P(x): x^2 < 1$?

Def. Sei M eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat.

a) **Allaussage:** „Für alle $x \in M$ gilt $P(x)$" kürzen wir ab mit

b) **Existenzaussage:** „Es gibt (mindestens) ein $x \in M$ mit $P(x)$" kürzen wir ab mit

$\boxed{Ü}$ Gilt die Aussage $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 1$ oder gar $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 < 1$?

Negation

$\neg(\forall x \in M: P(x)) \iff$

$\neg(\exists x \in M: P(x)) \iff$

$\boxed{\text{Ü}}$ Was ist die Negation der Goldbachschen Vermutung
„Jede gerade Zahl > 2 kann man als Summe zweier Primzahlen schreiben"

$\boxed{\text{Ü}}$ $M = \{\text{Klitschko}, \text{Ali}, \text{Tyson}\}$, $P(x,y)$: „x gewinnt gegen y"

<u>Szenario a)</u>

$P(K,A),\ P(A,T),\ P(K,T)$

<u>Szenario b)</u>

$P(K,A),\ P(A,T),\ P(T,K)$

Wann gilt $\forall x\in M\ \exists\, x \neq y\in M: P(x,y)$?

Wann gilt $\exists x\in M\ \forall\, x \neq y\in M: P(x,y)$?