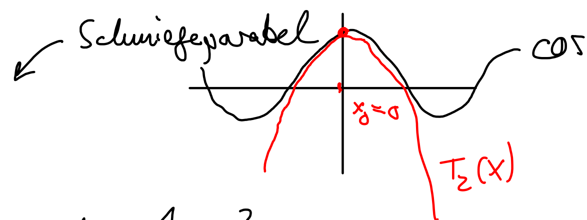
Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Taylorpolynome und Potenzreihen

* **Taylorpolynom Kosinus.** Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ von $\cos(x)$.

1. Bestimmen Sie damit einen Näherungswert für $\cos(0,2)$.
2. Geben Sie eine Fehlerabschätzung mit dem Restglied an und vergleichen Sie ihre Resultate mit dem Taschenrechner.

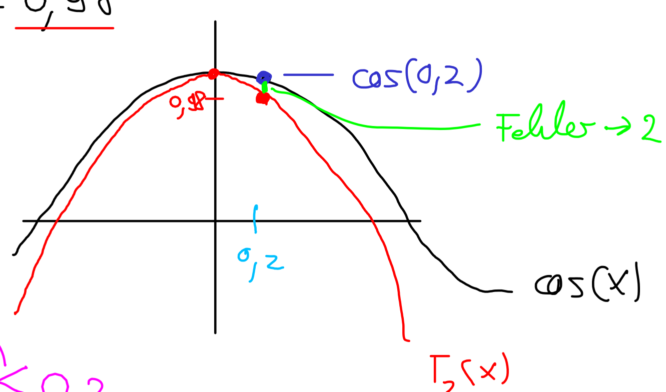
Lösung.



$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$= \underbrace{\cos(0)}_{1} + (\underbrace{-\sin(0)}_{0})(x-0) + \frac{(-\overbrace{\cos(0)}^{1})}{2!}(x-0)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

1. $\cos(0,2) \approx T_2(0,2) = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{(0,2)^2}_{0,04 = \frac{4}{100}} = 0,98$

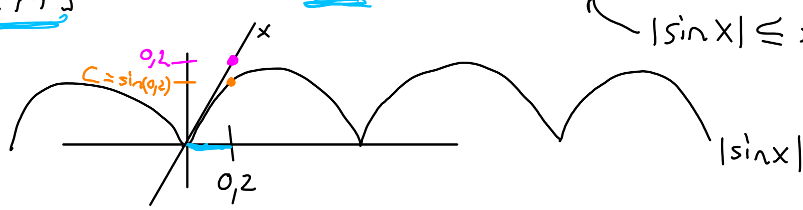


2. absoluter Fehler:

$$|R_2(\underset{0,2}{x})| \leq C \cdot \frac{|\overset{0,2}{x} - \overset{0}{x_0}|^3}{3!} \leq 0,2\,\frac{0,008}{6} \approx 0,0002\overline{6}$$

$$C = \max_{x_1\in[0;0,2]} |f^{(3)}(x_1)| = \max_{x_1\in[0;0,2]} |\sin(x_1)| \leq 0,2$$

$|\sin x| \leq x$ in $[0;0,2]$



Vgl. TR:

$T_2(0,2) = 0,98$

$\cos(0,2) \overset{TR}{=} 0,9800665778\ldots$

Fehler $= 0,0000665778\ldots \leq 0,0002\overline{6}$

Eigener Lösungsversuch.

Taylorpolynom Sinus. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_n(x)$ vom Grad $n = 5$ zur Funktion $\sin x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

1. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|\overbrace{\sin(x) - T_5(x)}^{R_5(x) \text{ Restglied}}|$ im Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ an. → Restgliedabschätzung mit $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ⚠ x nicht fest!
2. Wie groß ist der Fehler an den Stellen $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3}{4}\pi$ tatsächlich?

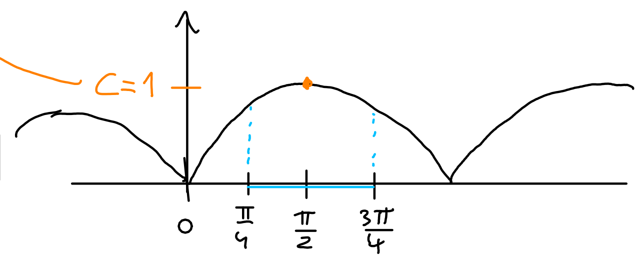
Lösung.

$$T_5(x) = \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{1} + \cancel{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}^{0}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{-\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1}}{2}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\cancel{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0}}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1}}{4!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0}}{5!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^5$$

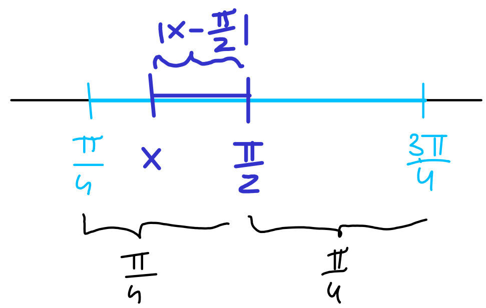
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

1. $$\underbrace{|R_5(x)|}_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]} \leq C \cdot \frac{|x-\frac{\pi}{2}|^6}{6!} \leq 1 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} \approx 0{,}000325991\ldots$$

- zu C: $|f^{(6)}(x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$ $\quad C = 1$

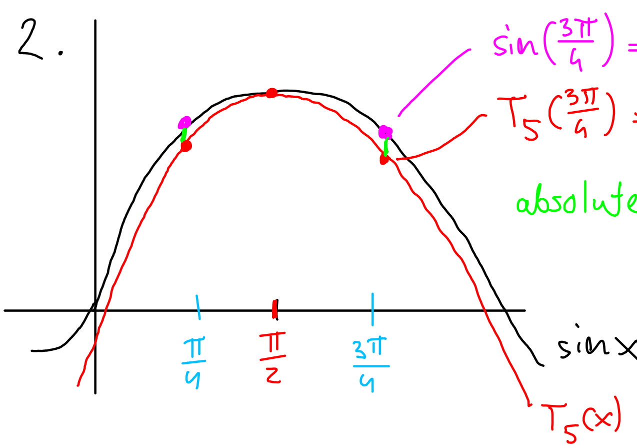


- zu $\underbrace{|x - \frac{\pi}{2}|}_{\text{Abstand von } x \text{ zu } \frac{\pi}{2}!}$ mit $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$:



$\Rightarrow |x - \frac{\pi}{2}| \leq \frac{\pi}{4}$

2.



$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \overset{TR}{=} 0{,}70710678\,1\ldots$

$T_5\left(\frac{3\pi}{4}\right) = T_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707429206\ldots$

absoluter Fehler $= 0{,}000323\ldots \overset{1.}{\leq} 0{,}000325\ldots$

Eigener Lösungsversuch.

Taschenrechner. Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Taylorpolynome bis auf einen absoluten Fehler $\le 0{,}001$:

* 1. $\sqrt{2}$ 2. e 3. π

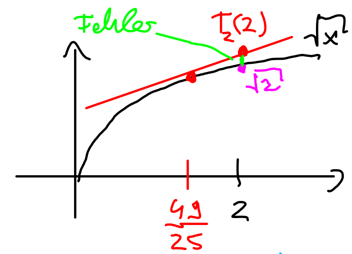
Hinweise. zu 2): $e = e^1$ und $e < 3$. zu 3): $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ (siehe Homepage).

Lösung.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ und x_0 nahe bei 2 und ein Quadrat: z.B. $x_0 = 1,\ \underset{\substack{\parallel \\ 2{,}25}}{\frac{9}{4}},\ \underset{\substack{\parallel \\ 1{,}96}}{\frac{49}{25}},\ \underset{\substack{\parallel \\ 2{,}04\ldots}}{\frac{100}{49}}$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \sqrt{\tfrac{49}{25}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{49}{25}}}\left(x - \frac{49}{25}\right) = \frac{7}{5} + \frac{5}{14}\left(x - \frac{49}{25}\right)$$

$$\sqrt{2} \approx T_1(2) = \frac{7}{5} + \frac{5}{14}\underbrace{\left(2 - \frac{49}{25}\right)}_{\frac{1}{25}} = \frac{99}{70} \approx 1{,}4142857\ldots$$



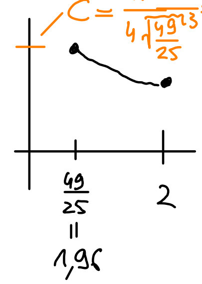
absolute Fehler: $$|R_1(2)| \le C \cdot \frac{\left|2 - \frac{49}{25}\right|^2}{2!} = \frac{125}{1372} \cdot \frac{0{,}04^2}{2} = \frac{1}{13.720} \approx 0{,}0000728862973\ldots \le 0{,}001$$

zu C: $$|f^{(2)}(x)| = \left|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'\right| = \left|\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}^3}\right| = \left|\frac{1}{4\sqrt{x}^3}\right| \text{ in } \left[\overset{x_0}{\frac{49}{25}}, \overset{x}{2}\right]:$$

$$\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

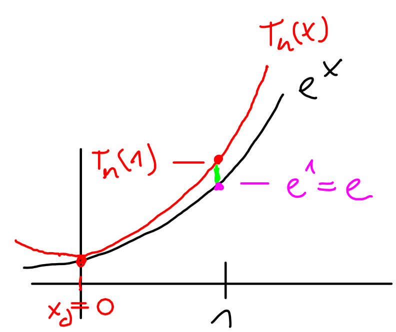
str. mo. fa in

$$C = \frac{1}{4\sqrt{\frac{49}{25}}^3} = \frac{125}{1372}$$



d.h. $$\sqrt{2} \in \left[\underbrace{\frac{99}{70} - \frac{1}{13.720}}_{\approx 1{,}414212828},\ \underbrace{\frac{99}{70}}_{\approx 1{,}4142857\ldots}\right]$$

TR $1{,}414213562\ldots$



2. $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$ (hier kenne ich e^x: $e^0 = 1$)

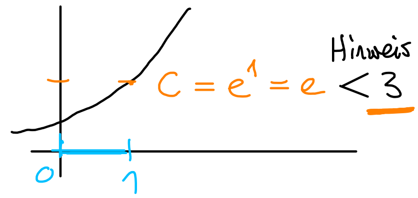
Blöd: $|x - x_0| = |1 - 0| = 1$ relativ groß!

$\rightarrow$ Muss Grad n groß genug wählen!

$$|R_n(1)| \le C \cdot \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} < 3 \cdot \frac{1}{(n+1)!} \overset{!}{\le} 0{,}001$$ $\leftarrow$ Dies gilt für $n \ge 6$ (Probieren!)

$$3 \cdot \frac{1}{(6+1)!} = \frac{3}{7!} = 0{,}00059523\ldots \le 0{,}001$$

zu C: $\left|\left(e^x\right)^{(n+1)}\right| = e^x$ in $[0,1]$:



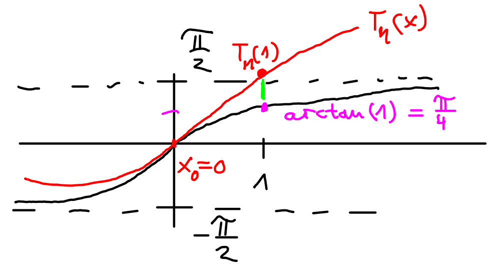
~~Eigener Lösungsversuch~~

$$T_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$. Damit approximiere ich:

$$e = e^1 \approx T_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}7180555\ldots$$

TR: $2{,}718281828459 0\ldots$

3. $f(x) = \arctan(x)$, x_0 in der Nähe von 1



Taylorpolynom berechnen an $x_0 = 0$:

$$T_n(x) = \cancel{\arctan(0)}^{\,0} + \frac{1}{1+0^2}\, x + \frac{\cancel{-2\cdot 0}^{\,0}}{2!}\, x^2 + \frac{-\frac{2}{1}}{3!}\, x^3 + \ldots$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \qquad \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = -\frac{(1+x^2)^2\cdot 2 - 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \mp \ldots$$

ohne Beweis: (siehe Wikipedia Uwe Homepage!)

$$\boxed{T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.}$$

Probiere $n = 5$: $T_5(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$

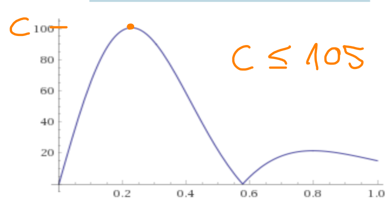
$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \approx T_5(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} \xrightarrow{\cdot 4} \pi \approx 4\cdot\frac{13}{15} = \frac{52}{15} \approx 3{,}4\overline{6}$$

zu schlecht: muss n höher wählen!...

$$|R_5(1)| \le C \cdot \frac{|1-0|^6}{6!} \le 105\,\frac{1}{6!} \approx 0{,}1458 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \approx \frac{13}{15} \pm 0{,}1458$$

zu C: $$\left|\left(\arctan(x)\right)^{(6)}\right| = \left|\frac{d^6}{dx^6}(\tan^{-1}(x))\right| = \left|-\frac{240\,x\,(3\,x^4 - 10\,x^2 + 3)}{(x^2+1)^6}\right|$$ in $[0,1]$:

plot $\left|\frac{\partial^6 \tan^{-1}(x)}{\partial x^6}\right|$ $x = 0$ to 1



Demo in Java!!

$n = 1999$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

zwei Formeln!

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}}$$

Potenzreihen. Berechnen Sie die Konvergenzradien:

1. Taylorreihe von e^x an der Stelle $x_0 = 0$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

$x_0 = 0$

$$\frac{(k+1)\cdot k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Lösung.

1. $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{a_k} x^k$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} |\underbrace{k+1}_{\to\infty}| = \infty$$

d.h. $\forall x \in]0-\infty, 0+\infty[= \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe gegen e^x: $\underline{T(x) = e^x}$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{1}_{a_k} \cdot x^k$ (geometrische Reihe) $\quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$

d.h. $\forall x \in]0-1, 0+1[=]-1,1[$ konvergiert die Potenzreihe gegen $\frac{1}{1-x}$

$$\left[\text{Geom. Summe: } \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[|x|<1]{n\to\infty} \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x} \right]$$

3. $a_n = \frac{n}{2^n}$: $\quad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})} = 2$

d.h. $\forall x \in]0-2, 0+2[=]-2,2[$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

4. $a_n = \frac{2^n}{n}$: $\quad r_4 = \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}$.

d.h. $\forall x \in]0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}[=]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

Eigener Lösungsversuch.