Relationen

Relation. Gegeben sei die Menge $A = \{a, b, c\}$ und die Relation auf A

$$R \doteq \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\} \subseteq A \times A.$$

Ist R reflexiv, ~~irreflexiv~~, symmetrisch, ~~asymmetrisch~~, ~~antisymmetrisch~~ oder transitiv?

Lösung.

$$R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$$

ganze Diagonale $\in R$, d.h. reflexiv: $\forall x \in A: (x,x) \in R$. ✓

$\Rightarrow$ nicht irreflexiv ✗

symmetrisch zur Diagonale, d.h. symmetrisch:

$\forall x,y \in A: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$. ✓

$\Rightarrow$ nicht asymmetrisch. ✗

antisymmetrisch: $\forall x,y \in A: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$.

hier: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$ aber $a \neq b$ ✗ (Negation: $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$)

transitiv: $\forall x,y,z \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$(a,a) \in R \wedge (a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$ ✓
$\quad$ –"– $\quad \wedge (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$ ✓

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$ ✓
$\quad$ –"– $\quad \wedge (b,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$ ✓

$(b,a) \in R \wedge (a,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ ✓
$\quad$ –"– $\quad \wedge (a,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in R$ ✓

$(b,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ ✓
$\quad$ –"– $\quad \wedge (b,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in R$ ✓

$(c,c) \in R \wedge (c,c) \in R \Rightarrow (c,c) \in R$ ✓ $\qquad \Rightarrow$ transitiv!

Eigener Lösungsversuch.

Teilbarkeitsrelation. Ist die Relation $R_|$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$R_| = \{(a,b) \mid \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n = b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

eine Ordnung?

vgl. Vorlesung: $n \in \mathbb{Z}$!! (dort nicht antisymmetrisch)

Lösung.

reflexiv: $\forall a \in \mathbb{Z}: (a,a) \in R_| \iff \exists n \in \mathbb{N}: a \cdot n = a$ ✓ $(n=1)$

antisymmetrisch: $\forall a,b \in \mathbb{Z}: \underbrace{(a,b) \in R_| \wedge (b,a) \in R_|}_{} \overset{!}{\Rightarrow} a = b$

$\Updownarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}: an = b \wedge \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: b\tilde{n} = a \Rightarrow an\tilde{n} = a \Rightarrow n\tilde{n} = 1 \overset{n,\tilde{n} \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n = \tilde{n} = 1.$

vgl. Vorlesung: $n, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$ auch $n = \tilde{n} = -1$ möglich d.h. $a = -b$ d.h. $a \neq b$

$\Rightarrow a = b.$ ✓

transitiv: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: \underbrace{(a,b) \in R_| \wedge (b,c) \in R_|}_{} \overset{!}{\Rightarrow} (a,c) \in R_|$

$\Updownarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}: an = b \wedge \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: b\tilde{n} = c \Rightarrow a\underbrace{n\tilde{n}}_{\in \mathbb{N}} = c$, d.h. $(a,c) \in R_|$ ✓

$\Rightarrow$ Ordnung!

Eigener Lösungsversuch.

Kongruenzrelation. Ist die Relation $R_\equiv$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$R_\equiv \; = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod m\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation?

Lösung.

reflexiv: $a \equiv a \pmod m \quad (\forall a \in \mathbb{Z})$ ✓ $(a \bmod m = a \bmod m)$

symmetrisch: $a \equiv b \pmod m \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} a \bmod m = b \bmod m \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} b \equiv a \pmod m$ ✓

transitiv: $\underbrace{a \equiv b \pmod m \wedge b \equiv c \pmod m}_{\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}\; a \bmod m = b \bmod m \;\wedge\; b \bmod m = c \bmod m} \overset{!}{\Longrightarrow} a \equiv c \pmod m$ ✓

$\Rightarrow a \bmod m = c \bmod m$

$\Longrightarrow R_\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation

Eigener Lösungsversuch.

Mutterrelation. Ist die Relation R auf der Menge M aller Menschen definiert durch

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ ist Mutter von } b\} \subseteq M \times M$$

reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

Lösung.

reflexiv: ✗ Ich bin nicht meine Mutter! (a nicht Mutter von a)

irreflexiv: ✓ Jede(r) ist nicht seine/ihre Mutter.

symmetrisch: ✗ Ich bin nicht die Mutter meiner Mutter!

asymmetrisch: ✓ Jede(r) ist nicht die Mutter seiner/ihrer Mutter.

antisymm: $\underbrace{a \text{ Mutter von } b \wedge b \text{ Mutter von } a}_{0 \text{ da asymmetrisch}} \Rightarrow \ldots$ ✓ (ex falso quodlibet)

transitiv: ✗ a Mutter von b $\wedge$ b Mutter c $\Rightarrow$ a Großmutter von c, nicht die Mutter!

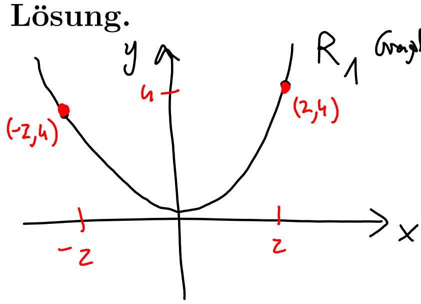
Eigener Lösungsversuch.

Relation und Funktion. Gegeben seien die Relationen $R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ und $R_2 = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ auf $\mathbb{R}$.

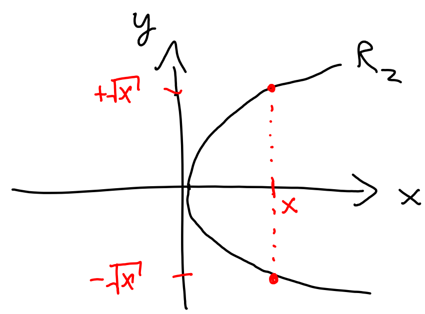
1. Zeichnen Sie die Relationen im kartesischen Koordinatensystem.
2. Falls möglich: geben Sie Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die R_1 bzw. R_2 als Graphen besitzen.
3. Geben Sie die zu sqrt: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $\text{sqrt}(x) = \sqrt{x}$ gehörende Relation an.

Lösung.

1.



Graph von $f(x)=x^2$



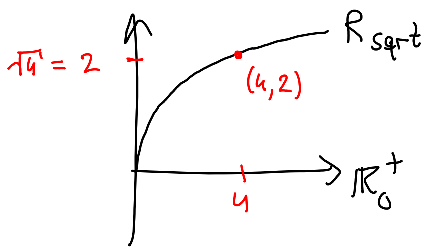
$y^2 = x \iff y = \pm\sqrt{x}$

keine Fkt.

2. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x^2$

f_2 gibt es nicht, da R_2 kein Graph einer Fkt!

3. $R_{sqrt} = \{(x, \text{sqrt}(x)) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$ $\left[= \{(x,y) \mid \underbrace{y = \sqrt{x} \wedge x \in \mathbb{R}_0^+}_{y^2 = x \,\wedge\, y \in \mathbb{R}_0^+}\} \right]$



Eigener Lösungsversuch.