Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Geometrie mit Determinanten, Inverse Matrix

Fragen?

* **Geometrische Interpretation.** Was bedeutet

a) die Determinante

b) das Spatprodukt

c) das Vektor-/Kreuzprodukt

geometrisch?

Lösung.

a.) $A = (s_1 | \dots | s_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\det(A) =$ orientierte Volumen des von den Spalten $s_1 - s_n \in \mathbb{R}^n$

b.) Spatprodukt = Volumen des Spats

c.) nur $n = 3$

Eigener Lösungsversuch.

Geometrie und Physik. Berechnen Sie:

a) die Fläche von dem Parallelogram, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

b) das Volumen von dem Spat, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

c) die Lorentz-Kraft: $F_L = v \times B$ mit $v = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$

Lösung.

a.) $\left|\det\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\right| = |1\cdot 0 - 2\cdot 1| = 2$

b.) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\\2 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0 + 8 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$

c.) $\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

Eigener Lösungsversuch.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}} = \underset{\text{Einheitsmatrix } E_n}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

Inverse Matrix

Wozu braucht man eine inverse Matrix? z.B. zum Lösen eines LGS $Ax = b$. Wie löst man dieses mit $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, also z.B.

$$5x = 10 \quad \xRightarrow{5^{-1}} \quad \underbrace{5^{-1}\cdot 5}_{1}\, x = \underbrace{5^{-1}\cdot 10}_{\frac{10}{5}} \Leftrightarrow x = 2$$

Das gleiche allgemein für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$Ax = b \quad \xRightarrow{A^{-1}} \quad \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E_n}\, x = A^{-1}\cdot b \Leftrightarrow x = A^{-1}\cdot b$$

Wir suchen also eine Matrix A^{-1} zu A, so dass $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$. Wann existiert diese?

Kriterium für Invertierbarkeit

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ invertierbar} \quad &\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Defekt}(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\Leftrightarrow \text{LGS } Ax = b \text{ eindeutig lösbar} \end{aligned}$$

Wie kann man in diesem Fall die inverse Matrix berechnen?

- $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

  $A^{-1} = \dfrac{1}{a}$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

  $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

  $A^{-1} = \left(A \mid E_n\right) \sim \dots \sim \left(E_n \mid A^{-1}\right)$

Inverse Matrix. Berechnen Sie, falls möglich A^{-1}.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung.

a.) $\det(A) = 0 \rightarrow$ nicht invertiesbar

b.) $\det(A) = 0 \rightarrow$ nicht invertiobar

c.) $-0{,}5 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

d.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$III - I$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$III' - II$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$-1 \cdot III''$

$I - III'''$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Eigener Lösungsversuch.