Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. J. Schmidt
Fakultät für Informatik

GDI – WS 2018/19

Zahlendarstellung – Zahlensysteme

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Leitfragen 2.1

- Wie werden die Begriffe Nachricht, Information und Daten in der Informatik definiert?
- Welche Zahlensysteme spielen in der Informatik eine besondere Rolle?

Definition Nachricht (1)

- Stützt sich auf den Begriff des „Alphabets“
- Alphabet besteht aus
  - einer **abzählbaren Menge von Zeichen** (Zeichenvorrat) und
  - einer **Ordnungsrelation**
    (Regel, durch die feste Reihenfolge der Zeichen definiert ist)

- Beispiele:
  - {a, b, c, ..., z}
    Menge aller Kleinbuchstaben in lexikografischer Ordnung
  - {0, 1, 2, ..., 9}
    endliche Menge der ganzen Zahlen 0 bis 9 mit der Ordnungsrelation „<“
  - {2, 4, 6, … }
    unendliche Menge der geraden natürlichen Zahlen mit der Ordnungsrelation „<“
  - {0, 1}
    Binärziffern 0 und 1 mit 0 < 1

Definition Nachricht (2)

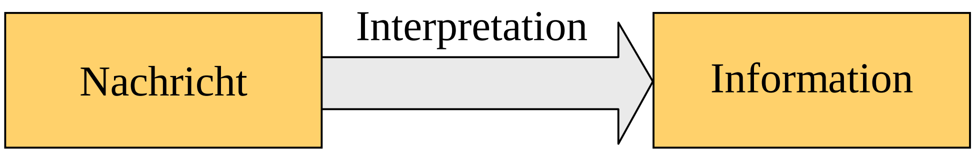
- **Nachricht**
  - ist eine aus den Zeichen eines Alphabets gebildete **Zeichenfolge**
  - Zeichenfolge muss nicht endlich sein, aber **abzählbar**
    - d.h. die einzelnen Zeichen müssen durch eine Abbildung auf die natürlichen Zahlen durchnummeriert werden können
    - damit ist die Identifizierbarkeit der Zeichen sichergestellt
- Das heißt
  - Nachrichten sind **konkrete** Objekte

Weitere wichtige Begriffe

- **Nachrichtenraum N(A)**
  - Menge aller Nachrichten, die mit den Zeichen des Alphabets A gebildet werden können (A* über A)
- **Eingeschränkter Nachrichtenraum N(A^s)**
  - nur Zeichenreihen mit einer maximalen Länge s sind enthalten

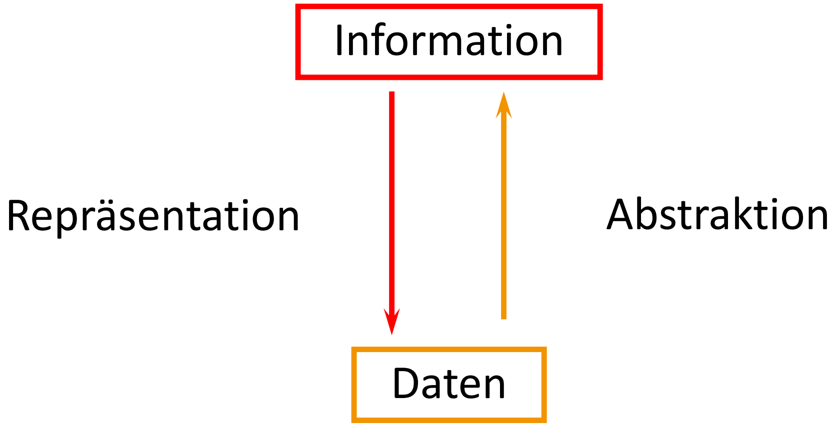
Zusammenhang Nachricht – Information

- **Information**
  - stellt den Bedeutungsgehalt einer Nachricht dar
- Zuordnung (Abbildung) notwendig



  - muss nicht eindeutig sein
  - verschiedene Interpretationen möglich
- Das heißt:
  - Information ist vielschichtiger Begriff
  - Informationen sind nicht exakt definierbare **abstrakte** Objekte
- Formale Definition des Informationsbegriffs durch Claude Shannon
  → folgt

- Zum Zweck der (formalen) Bearbeitung (z.B. mit Hilfe eines Rechners)
  - werden Informationen durch Daten repräsentiert
  - und als solche gespeichert



Konrad Ernst Otto Zuse

geb. 22.06.1910

01001010 01011110
11010101 00010111
11010101 11011110
11011101 ...

- Informationen werden durch Nullen und Einsen im Rechner repräsentiert

Kleinste Informationseinheit

- Bit (***Bi**nary Digi**t***)
  - Einzelne Binärstelle, die ein Computer speichert
  - Zwei Möglichkeiten: Binärer Code (Zeichen 0 und 1)
  - Notwendig, da technisch einfach realisierbar z.B. mit
    - elektrischer Ladung (0 = ungeladen; 1 = geladen)
    - elektrischer Spannung (0 = 0 Volt; 1 = 5 Volt)
    - Magnetisierung (0/1 je nach Polung der Magnetisierung)

Bitfolgen (1)

- 2-Bitfolge
  - 4 Möglichkeiten
    (00, 01, 10, 11)
- 3-Bitfolge
  - 8 Möglichkeiten
    (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)
- Allgemein gilt:
  Jedes zusätzliche Bit verdoppelt die Anzahl der möglichen Bitfolgen.

➔ Es gibt genau 2^N mögliche Bitfolgen der Länge N.

Bitfolgen (2)

- Rechner arbeiten immer nur mit Gruppen von Bits
  - typisch: 8 Bits, 16 Bits, 32 Bits oder 64 Bits
- Byte
  - Eine Gruppe von **8 Bits** nennt man ein **Byte**
- Ein Byte kann verwendet werden, um z.B. folgendes zu speichern:
  - eine Zahl zwischen 0 und 255,
  - eine Zahl zwischen -128 und +127,
  - ein kodiertes Zeichen (in einem Zeichencode z.B. ASCII)
  - die Farbkodierung eines Punktes in einer Graphik bzw. in einem Bild genannt „Pixel“ (Pixel = Picture Element)

Datei- und Speichergrößen

- Eine Datei ist eine beliebig lange Folge von Bytes
- Größe einer Datei
  = Anzahl der darin enthaltenen Bytes
  Maßeinheiten

k	=	1024	$= 2^{10} \cong 10^3$	(k = Kilo)
M	=	1024^2	$= 2^{20} \cong 10^6$	(M = Mega)
G	=	1024^3	$= 2^{30} \cong 10^9$	(G = Giga)
T	=	1024^4	$= 2^{40} \cong 10^{12}$	(T = Tera)
P	=	1024^5	$= 2^{50} \cong 10^{15}$	(P = Peta)
N	=	1024^6	$= 2^{60} \cong 10^{18}$	(E = Exa)

- Nomenklatur uneinheitlich, manchmal werden auch die bekannten metrischen Werte verwendet
  (z.B. bei Festplatten)

Datei- und Speichergrößen

- zur klareren Abgrenzung:
  Vorschlag der Verwendung anderer Präfixe
- bereits 1996, standardisiert in
  Norm IEC 80000-13:2008
- konnte sich bisher nicht weit verbreitet durchsetzen

Kibibyte (KiB) = 2^{10} Byte (Ki = Kilo, bi = binär)

Mebibyte (MiB) = 2^{20} Byte (Me = Mega)

Gibibyte (GiB) = 2^{30} Byte (Gi = Giga)

Tebibyte (TiB) = 2^{40} Byte (Te = Tera)

Zeiteinheiten

- Es werden dezimale Einheiten benutzt
- Zeitangaben
  - 2,6 GHz Prozessor mit $2{,}6 \cdot 10^9$ = 2 600 000 000 Hertz (Schwingungen pro Sekunde) getaktet
  - ein Takt dauert also $1/(2{,}6 \cdot 10^9) = 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ s, das sind 0,38 ns

m = 1/1000 = 10^{-3} (m = milli)

µ = 1/1000000 = 10^{-6} (µ = mikro)

n = 1/1000000000 = 10^{-9} (n = nano)

p = ... = 10^{-12} (p = pico)

f = ... = 10^{-15} (f = femto)

Darstellung von Zahlen

- Fokus: **effiziente** und **eindeutig umkehrbare** Zuordnung zwischen Zahlen und Bitfolgen
- Bitfolgen einer festen Länge N
  → 2^N viele Zahlen darstellbar
- Gebräuchlich sind N = 8, 16, 32 oder 64.

- Man repräsentiert durch die Bitfolgen der Länge N
  - die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^N - 1$, oder
  - die ganzen Zahlen zwischen -2^{N-1} und $2^{N-1} - 1$, oder
  - ein Intervall der reellen Zahlen mit begrenzter Genauigkeit

Positionssysteme

- Auch Stellenwertsysteme genannt
- **Wert** einer Zahl ist **abhängig von** der **Position** der Zeichen
  - Vorteil: einfache Rechenregeln
- Beispiele:
  - Dualsystem
  - Oktalsystem
  - Dezimalsystem
  - Hexadezimalsystem

Positionssystem bei natürlichen Zahlen

- Positionssystem mit der Basis B ist ein Zahlensystem, in dem eine Zahl nach Potenzen von B zerlegt wird
- Eine natürliche Zahl n wird durch folgende Summe dargestellt:

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i \qquad \text{wobei Folgendes gilt:}$$

  - $\mathsf{B} = \text{Basis des Zahlensystems } (B \in \mathbb{N}, B \geq 2)$
  - $\mathsf{b} = \text{Ziffern } (b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_i < B)$
  - $\mathsf{N} = \text{Anzahl der Stellen}$

- Darstellung einer **ganzen Zahl** z
  - Summe von Potenzen zur Basis 10
  - $z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$,

    wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - Beispiel

$$\begin{aligned} 4711 &= 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \\ &= 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 \end{aligned}$$

Dualsystem

- Darstellung der Zahlen zur Basis 2 und den Grundziffern {0,1}
- Die Bitfolge **1101** hat beispielsweise den Zahlenwert:

$$
\begin{aligned}
1101 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

- Schreibweise: $(1101)_2 = (13)_{10}$

Oktalsystem

- Nachteil Dualsystem: sehr lange Zahlen und deshalb schwer zu merken
  - Ansatz: Zusammenfassung einer Anzahl von binären Stellen

- Oktalsystem
  - **3** binäre Stellen werden zu einer Oktalstelle zusammengefasst
  - Darstellung der Zahlen zur Basis $2^3 = 8$ und der Grundziffern {0,1,2,3,4,5,6,7}

  - Beispiele

$$(4711)_8 = 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = (2505)_{10}$$

$$(53)_{10} = (110\ 101)_2 = (65)_8$$

Hexadezimalsystem

- Noch kompaktere Zahlendarstellung
  - **4** binäre Stellen werden zu einer Hexadezimalstelle zusammengefasst
  - Darstellung der Zahlen zur Basis $2^4 = 16$ und die 16 Grundziffern {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}
  - Beispiele

$$
\begin{aligned}
(53)_{10} &= (0011\ 0101)_2 \\
&= (35)_{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4711)_8 &= (100\ 111\ 001\ 001)_2 \\
&= (1001\ 1100\ 1001)_2 \\
&= (9C9)_{16}
\end{aligned}
$$

Positionssystem bei gebrochenen Zahlen

- Bei gebrochenen Zahlen trennt ein Punkt (Komma im Deutschen) in der Zahl
  - den ganzzahligen Teil der Zahl
  - vom gebrochenen Teil (Nachkommateil).

- Eine gebrochene Zahl n wird durch folgende Summe dargestellt:

$$n = \sum_{i=-M}^{N-1} b_i \cdot B^i \qquad \text{wobei Folgendes gilt:}$$

$$\mathrm{B} = \text{Basis des Zahlensystems } (B \in \mathbb{N}, B \geq 2)$$

$$\mathrm{b} = \text{Ziffern } (b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_i < B)$$

$$\mathrm{N} = \text{Anzahl der Stellen vor dem Punkt (Komma)}$$

$$\mathrm{M} = \text{Anzahl der Stellen nach dem Punkt (Komma)}$$

Beispiele gebrochene Zahlen

$$(17{,}05)_{10} = 1 \cdot 10^{1} + 7 \cdot 10^{0} + 0 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

$$(3758{,}0)_{10} = 3 \cdot 10^{3} + 7 \cdot 10^{2} + 5 \cdot 10^{1} + 8 \cdot 10^{0}$$

$$(9{,}702)_{10} = 9 \cdot 10^{0} + 7 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

$$(0{,}503)_{10} = 0 \cdot 10^{0} + 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$