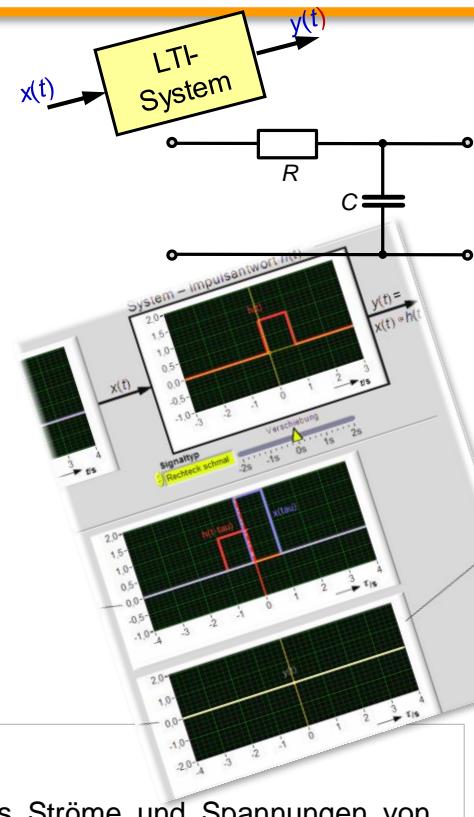


# Signale & Systeme im Zeitbereich

## Inhalt dieses Kapitels:

- Signale
  - Arten von Signalen
  - Verschiebung und Maßstabsänderung
- Spezielle Signale
  - Abtasteigenschaft des  $\delta$ -Impulses
- LTI-Systeme
  - Impulsantwort eines LTI-Systems
  - Faltung



## Lernziele dieses Kapitels:

- ⇒ Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels wissen Sie, dass Ströme und Spannungen von Sensoren und Parameter zu Ansteuerung von Aktoren als Signale aufgefasst werden können.
- ⇒ Und Sie kennen die Beschreibung linearer und zeitinvarianter (LTI) Systeme beschrieben werden, die Eingangssignale zu Ausgangssignalen verarbeiten.

Taxonomie Kompetenzart	Kennen	Können	Verstehen
<b>Fach- kompetenz</b> $\Rightarrow 0$	Unterscheidung <u>zeitkontinuierlicher</u> und <u>zeitdiskreter</u> Signale bzgl. ihrer Eigenschaften und ihrer Darstellung; Beschreibung <u>linearer</u> und <u>zeitinvarianter</u> (LTI) Systeme durch die Impulsantwort	Berechnung einfacher Faltungsintegrale – <u>zeitkontinuierlich</u> und <u>zeitdiskret</u> , mit aperiodischen und <u>(periodischen)</u> Signalen	
<b>Methoden- kompetenz</b>	Wichtigkeit von Achsenbeschriftung und -skalierung in Diagrammen;	„Grafische“ Veranschaulichung des Faltungsintegrals mittels Papier und Folie	
<b>Persönliche &amp; soziale Kompetenz</b>	Spätestens bis Weihnachten sollten Sie Ihren persönlichen Prüfungsvorbereitungsplan im Detail ausgearbeitet haben!	Auswahl passender ergänzender Literatur in der Hochschul-bibliothek	



↳ Signale

↳ Verschiebung & Maßstabsänderung  
↳ Spezielle Signale

↳ LTI-Systeme

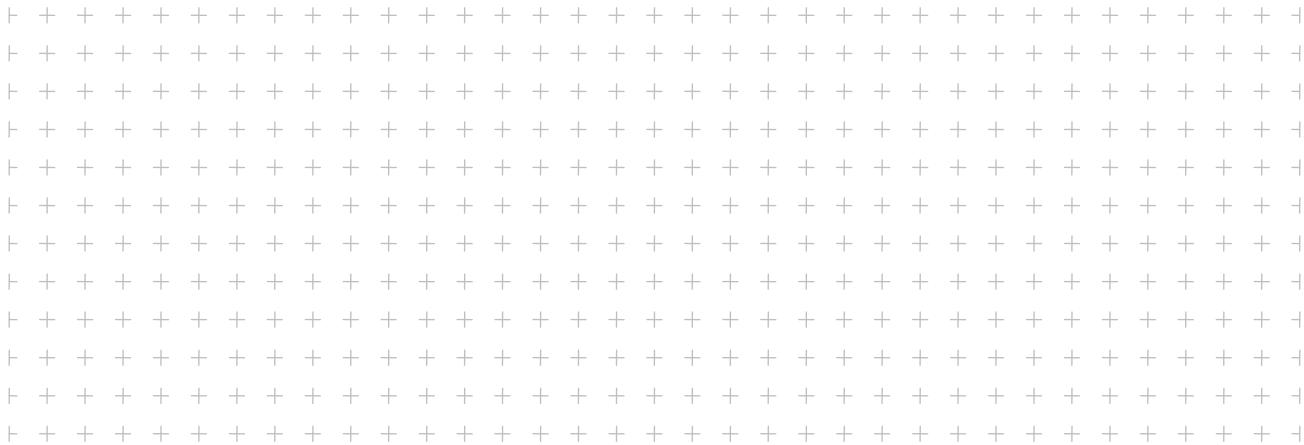
↳ Faltung

## Motivation – Wozu Signale & Systeme?

### ■ Systemtheorie: Transformation von Eingangssignalen auf Ausgangssignale

Die **Systemtheorie** beschäftigt sich mit der Betrachtung veränderlicher, voneinander abhängiger Größen, sog. **Signale**. Diese Signale können physikalischer, biologischer oder auch ökonomischer Natur sein, sie können zeitveränderlich und/oder ortsveränderlich sein, kontinuierlich oder diskret.

Die Abhängigkeit zwischen den Signalen wird durch Systeme beschrieben, welche jeweils eines oder mehrere Eingangssignale in ein Ausgangssignal transformieren:



In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine allgemeine Definition möglicher Signale, um dann die Auswirkungen eines sog. LTI(*Linear & Time-Invariant*)-Systems im Zeitbereich zu betrachten. Insbesondere wird die *Faltungsoperation* beschrieben, welche das Eingangssignal mit der Impulsantwort des Systems verknüpft, um das Ausgangssignal zu ermitteln.

Später im Verlauf dieser Vorlesung werden dann Beschreibungen von Signalen und Systemen im Frequenzbereich behandelt, mittels *Fourierreihe* und *Fouriertransformation*.

### ■ Unterscheidung von Signalen

... bzgl. der Einheit<sup>1)</sup> der Signalgröße, z.B.

⇒ V (*Spannung*)

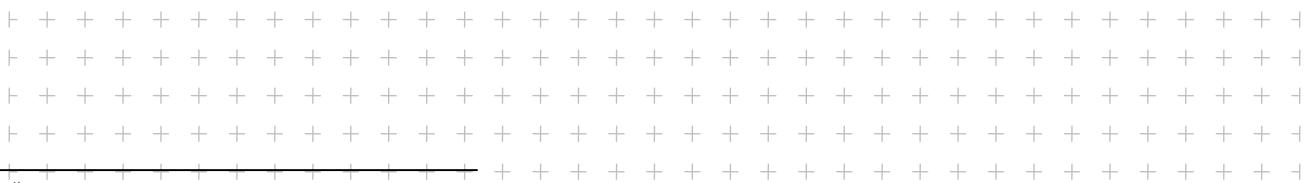
⇒ Pa (*Druck*)

⇒ m (*Auslenkung*)

... bzgl. der Einheit<sup>1)</sup> und der Dimension der „Zeit“:

⇒ *Zeitsignale* (1-dimensional)

⇒ *Ortssignale* (1/2/3-dimensional)



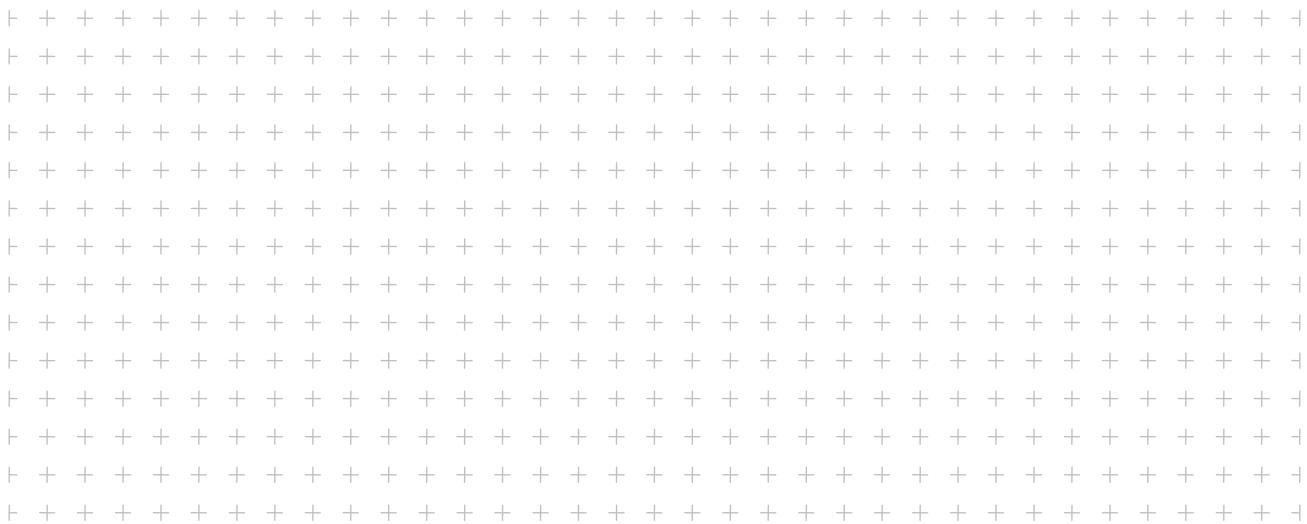
<sup>1)</sup> Im Rahmen dieser Veranstaltung werden wir uns überwiegend mit *Zeitsignalen* beschäftigen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Signalgröße einheitslos betrachtet!

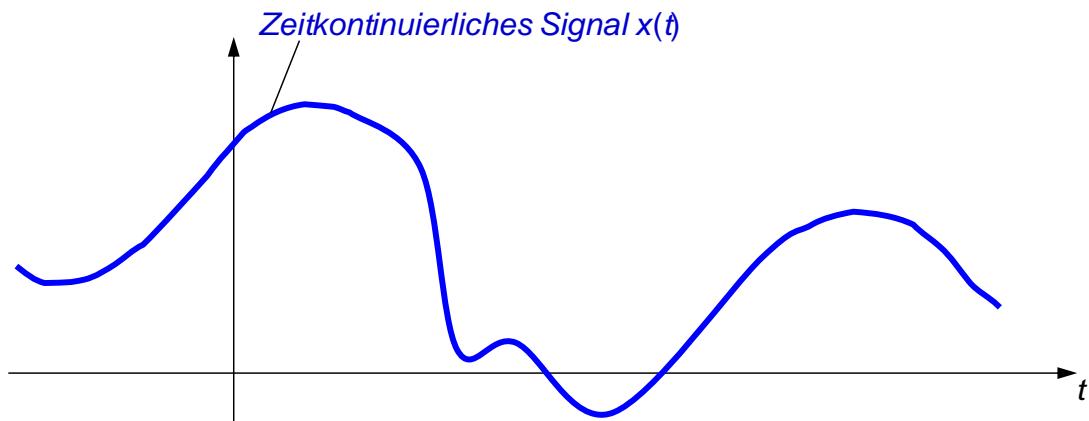
## Digitalisierung von Signalen zur Verarbeitung am Rechner

### ■ Signalkategorien

Zur Weiterverarbeitung eines analogen Signals auf einem Rechner muss es digitalisiert werden. Neben der Abtastung (s. unten und Kap. 6) ist dazu zusätzlich eine Quantisierung (s. Kap. 7) nötig. Üblicherweise folgt dann noch eine Codierung als Binärsignal.



### ■ Abtastung eines Signals



### Demonstration Bestimmung der Grundfrequenz Ihrer Stimme in einem digitalen Signal

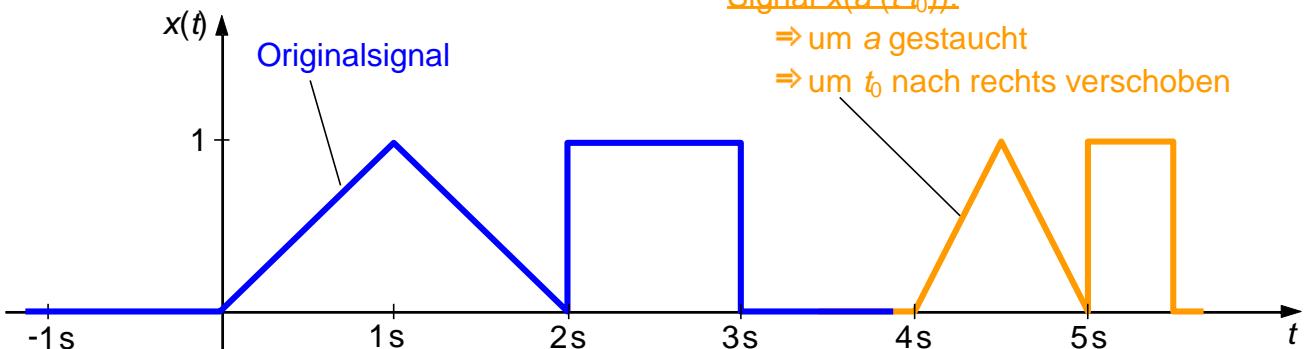
Starten Sie das **Programm 1\_AudioSignal.exe** und stellen Sie einen gesprochenen Vokal dar. Achten Sie dabei in den Soundkarteneinstellungen auf die Auswahl des Mikrofons als „Standardgerät“ und auf die korrekte Aufnahmeaussteuerung („**„Pege**l“).

- Woran erkennen Sie, dass es sich um ein abgetastetes Signal handelt?
- Frieren Sie das aufgenommene Vokalsignal ein und bestimmen Sie die Abtastfrequenz.
- Wie groß ist die Periodendauer des Signals?



## Verschiebung und Maßstabsänderung von Signalen

■ Im Laufe dieser Veranstaltung werden wir oft manipulierte Signale betrachten:



### Beispiele

a)  $x_1(t) = x(t + 2 \text{ s})$

b)  $x_2(t) = x(t - 1 \text{ s})$

c)  $x_3(t) = x(t/3)$

## Übungen zur Verschiebung und Maßstabsänderung von Signalen

### Beispiele (Fortsetzung von S.4)

d)  $x_4(t) = x(2t - 2 \text{ s})$

2) Stauchung  
Fkt 2

1) Verschiebung um 2 s nach rechts

$$= x(2(t - 1 \text{ s}))$$

1) Stauchung  
um Fkt 2

2) Verschiebung um 1 s nach rechts

Regel: Anwendung von Skalierungsoperationen  
„von außen nach innen“

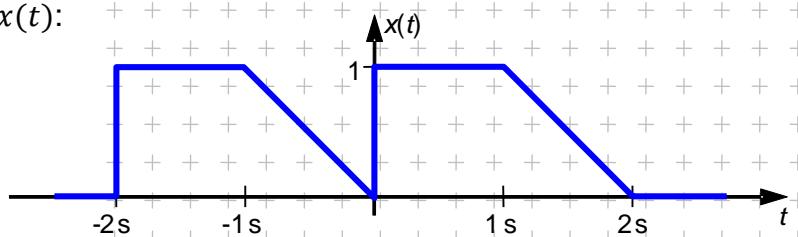
### Übungsaufgabe

a)  $x_5(t) = x(\frac{t}{2} - 1 \text{ s})$

$$= x\left(\frac{1}{2}(t - 2 \text{ s})\right)$$

b)  $x_6(t) = x(-\frac{t}{2} + 1 \text{ s})$

c) Gegeben sei das Signal  $x(t)$ :



⇒ Skizzieren Sie  $x(1 \text{ s} - 2t)$



↳ Signale

↳ Verschiebung & Maßstabsänderung

↳ Spezielle Signale

↳ LTI-Systeme

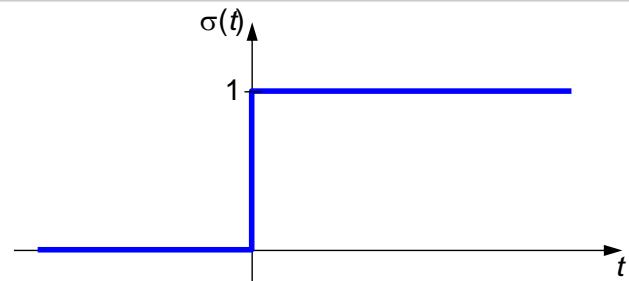
↳ Faltung

## Spezielle Signale

### Die Sprungfunktion:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$\stackrel{t}{=} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

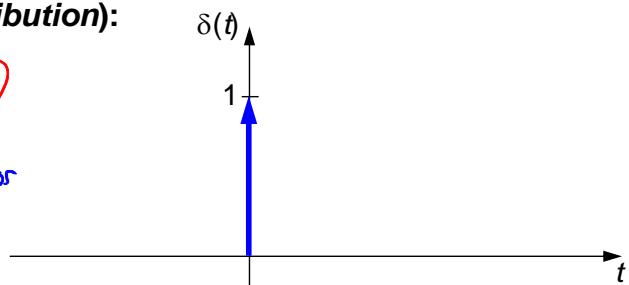


### Die Dirac<sup>1)</sup>sche δ-Funktion (sog. Distribution):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

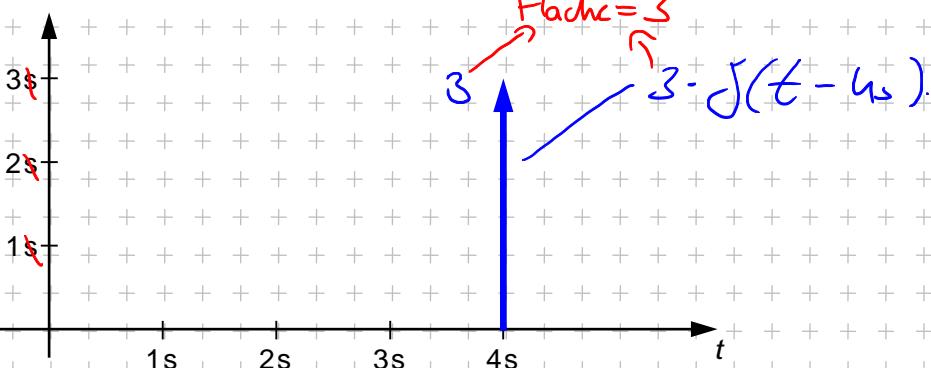
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot d\tau = 1$$

$\stackrel{d}{=} \frac{d}{dt} \cdot \delta(t)$   
Abbildungsoperator  
„Integrand“

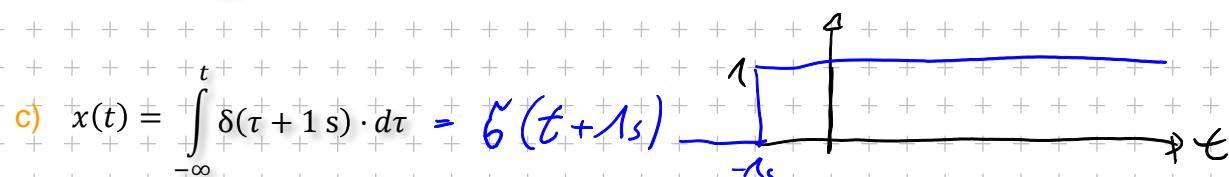


### Beispiel Aufgaben zum δ-Impuls

- a) Darstellung eines gewichteten, verschobenen δ-Impulses



b)  $x(t) = \delta\left(\frac{t}{2}\right) = 2\delta(t)$

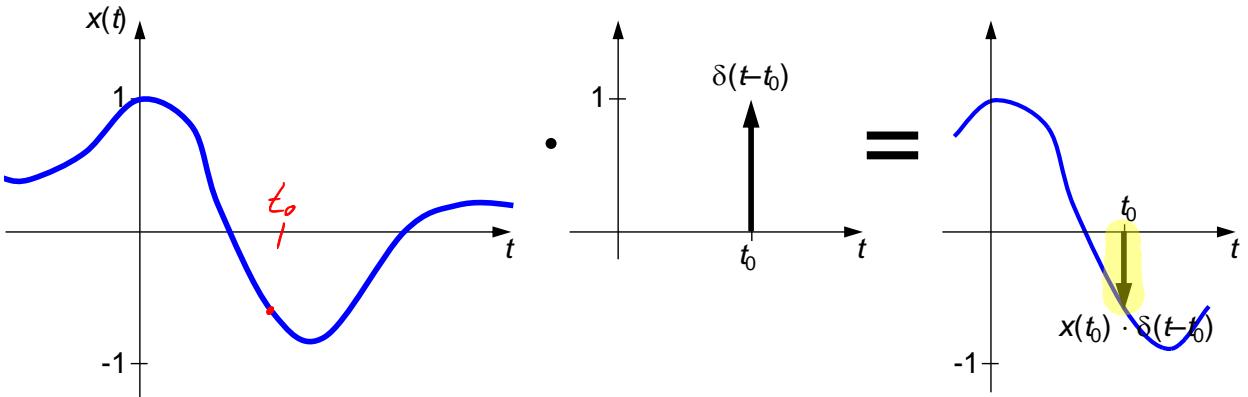


<sup>1)</sup> Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), engl. Physiker

## Die Ausblendeigenschaft des $\delta$ -Impulses

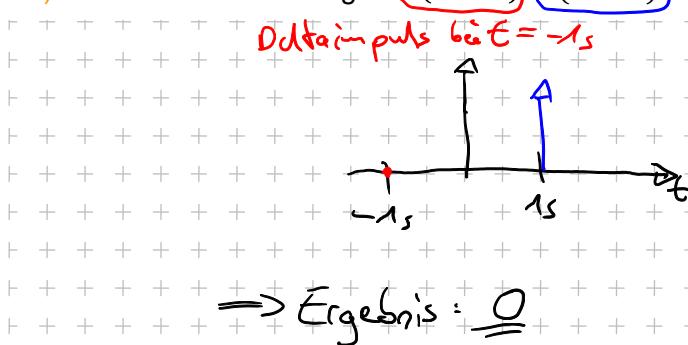
### ■ Multiplikation eines an die Stelle $t_0$ verschobenen $\delta$ -Impulses mit einem Signal

bewirkt eine Gewichtung des Impulses mit dem Signalwert an der Stelle  $t = t_0$ :

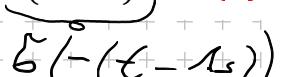


### Beispiel Multiplikation zweier $\delta$ -Impulse

a) Skizzieren Sie das Signal  $\delta(t + 1s) \cdot \delta(t - 1s)$

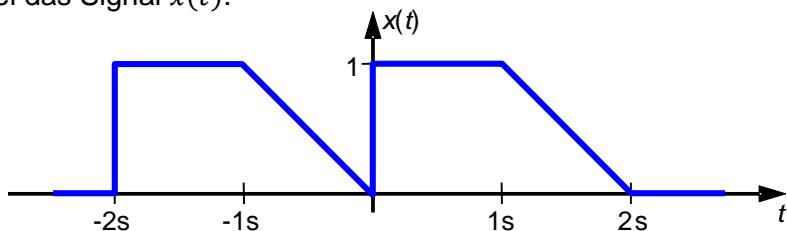


b) Skizzieren Sie  $\delta(t) \cdot \sigma(1s - t) = \delta(t)$



### Übungsaufgabe Multiplikation eines Signals mit der Sprungfunktion und dem $\delta$ -Impuls

Gegeben sei das Signal  $x(t)$ :



Skizzieren Sie die folgenden Signale

a)  $x(t) \cdot [\sigma(t + 1s) - \sigma(t - 1s)]$

b)  $x(t) \cdot \delta(t - 1s)$

c)  $x(t/2) \cdot \delta(t + 1s)$



## Impulsdarstellung eines Signals

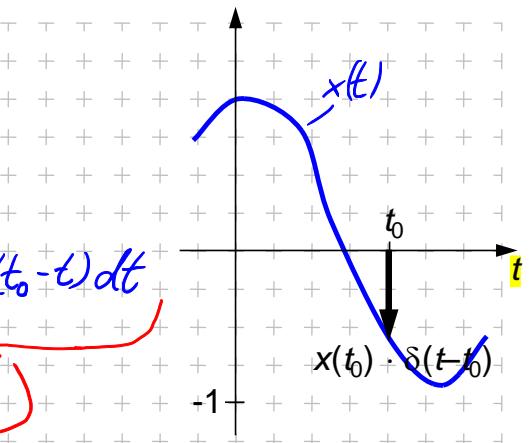
### Darstellung eines Signalwertes mittels $\delta$ -Impuls

Mit

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (\int_{-\infty}^{\infty} dt)$$

ergibt sich der Signalwert zum Zeitpunkt  $t_0$  als Integral des gewichteten  $\delta$ -Impulses:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t_0 - t) \cdot dt$$



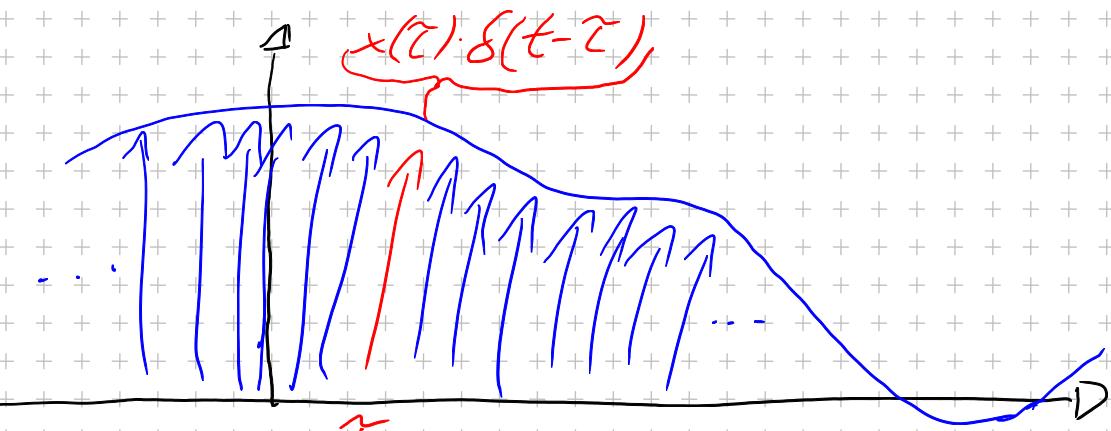
### Zusammensetzung eines Signals aus $\delta$ -Impulsen

Somit lässt sich jedes beliebige Signal  $x(t)$  darstellen als Integral über gewichtete  $\delta$ -Impulse:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau$$

= 0 für  $t \neq \tau$

*Substitution  $t \rightarrow \tau$   
 $t_0 \rightarrow t$*



Auf diese sog. **Impulsdarstellung** wird etwas später (Seite 11) bei der Einführung der Faltungsoperation zurückgegriffen.

### Drei Begriffe der Lichtmessung:

- Einheit:

Lichtstrom

Lumen (lm)

- Symbol:

$\Phi$

Gesamte Lichtstrahlung

unwichtig

Lichtstärke

Candela (cd)

$I = \Phi / A$

Belichtungsstärke

Lux (lx)

$E = I / A$

Raumwinkel

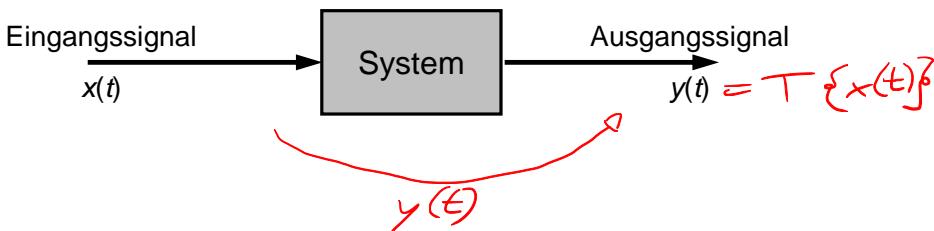
Fläche



↳ Signale    ↳ Verschiebung & Maßstabsänderung    ↳ Spezielle Signale    ↳ LTI-Systeme    ↳ Faltung

## Lineare, zeitinvariante (LTI)-Systeme

- Ein Übertragungssystem transformiert ein Eingangssignal  $x(t)$  in ein Ausgangssignal  $y(t)$ :



- Mögliche Eigenschaften eines Übertragungssystems:

### 1. Linearität: (L)

Wenn gilt  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

und  $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ ,

dann gilt auch  $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$ .

} Überlagerungsprinzip,  
Superposition

*Summe von Eingangssignalen*

*Summe der jeweiligen Ausgangssignale*

### 2. Zeitinvarianz: (TI)

Wenn gilt  $x(t) \rightarrow y(t)$ ,

dann gilt auch  $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ .

} System verhält sich  
zu jedem Zeitpunkt gleich

*Verschiebung des Eingangssignals*

*Verzögerung des Ausgangssignals*

- LTI(*Linear and Time-Invariant*)-Systeme erfüllen beide dieser Bedingungen!

- Praktische Beispiele für Systeme, die sehr nah an das LTI-Ideal herankommen:

⇒ Leitungen (z.B. für Stromversorgung, USB, Netzwerk)

⇒ Audio-Verstärker (nicht übersteuert!)

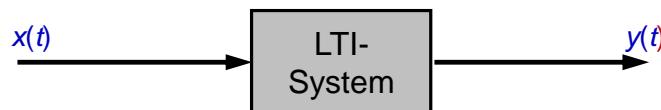
⇒ RC-Glied

⇒ Frequenzweiche (z.B. im Lautsprecher)

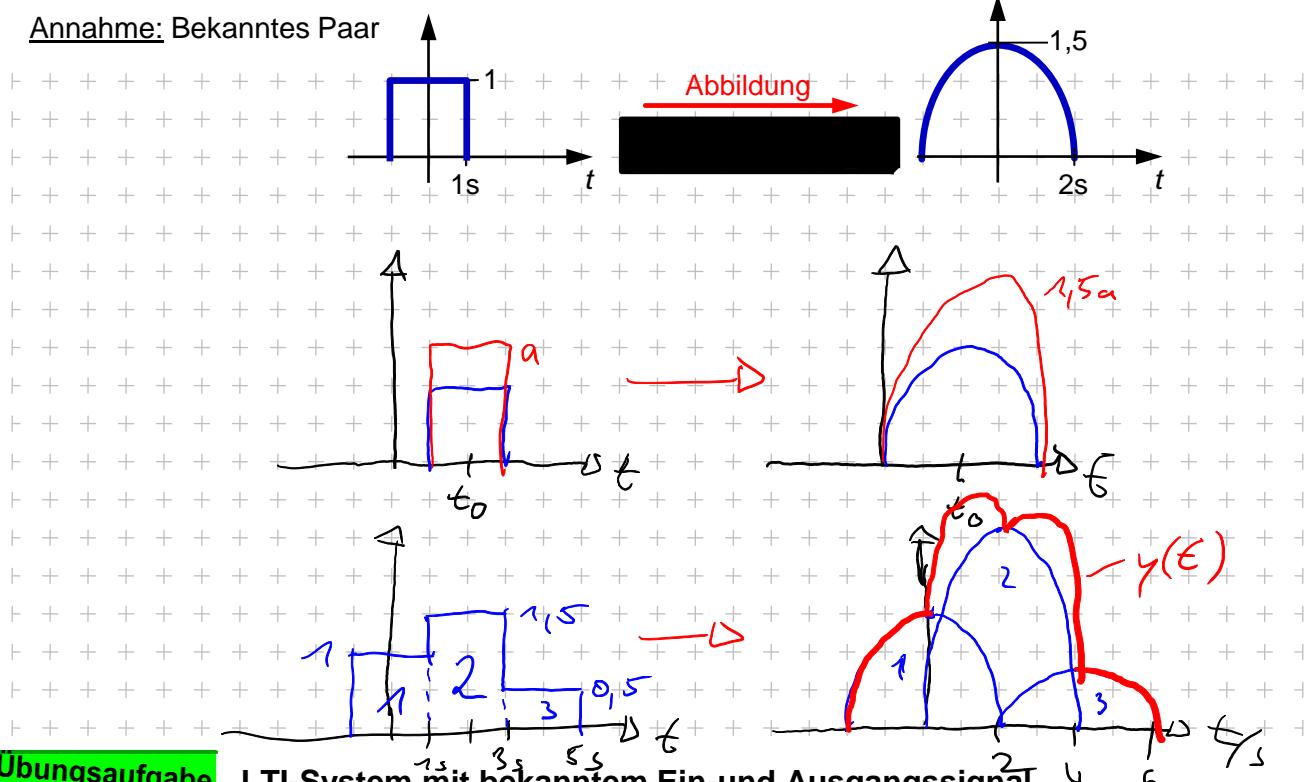


## LTI-Systeme – Superposition des Ausgangssignals

### Beispiel LTI-System mit bekanntem Ein- und Ausgangssignal

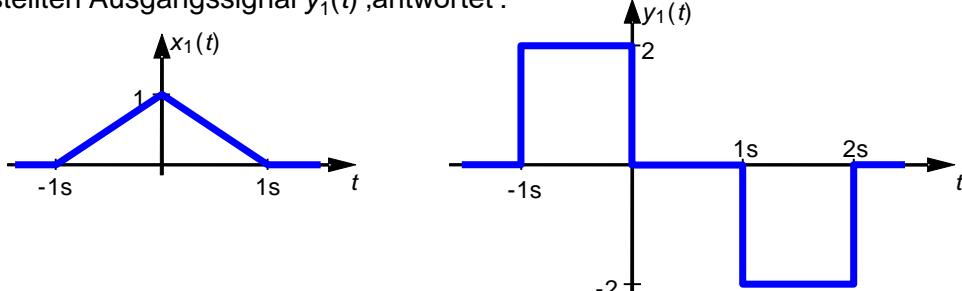


Annahme: Bekanntes Paar

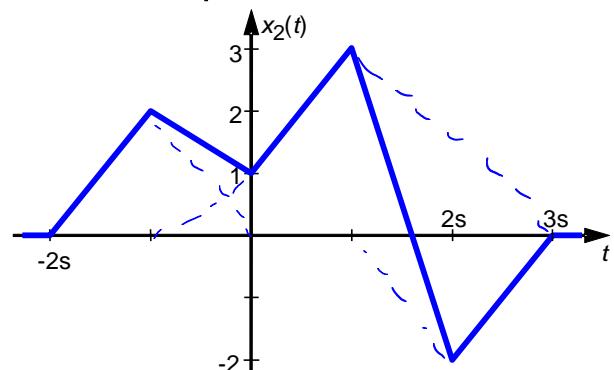


### Übungsaufgabe LTI-System mit bekanntem Ein- und Ausgangssignal

Von einem LTI-System weiß man, dass es bei dem links dargestellten Eingangssignal  $x_1(t)$  mit dem rechts dargestellten Ausgangssignal  $y_1(t)$ , antwortet:



Das LTI-System wird nun mit dem Eingangssignal  $x_2(t)$  beaufschlagt:



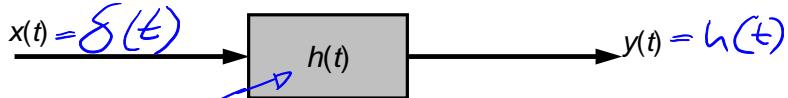
⇒ Bestimmen und skizzieren Sie das Ausgangssignal  $y_2(t)$



## LTI-System: Signalverarbeitung durch Faltung mit der Impulsantwort

### Wie lässt sich ein LTI-System allgemein beschreiben?

- Durch seine Impulsantwort  $h(t)$ :



⇒ Die **Impulsantwort** beschreibt das Ausgangssignal des Systems, wenn es am Eingang mit dem  $\delta$ -Impuls beaufschlagt wird.

Da sich jedes beliebige Signal als Superposition gewichteter und verschobener  $\delta$ -Impulse darstellen lässt (*Impulsdarstellung*), ergibt sich das Ausgangssignal als Superposition gewichteter und verschobener Impulsantworten!

### Impulsdarstellung (siehe Seite 8):

Jedes Eingangssignal eines Systems ist als Superposition gewichteter Impulse  $\delta(t - \tau)$  darstellbar:

*und verschoben*

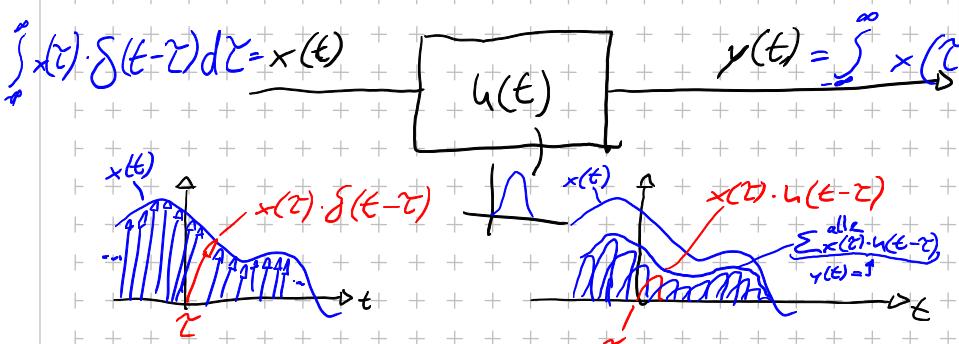
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau$$

### Faltung:

Das Ausgangssignal eines LTI-Systems ist als Superposition gewichteter und verschobener Impulsantworten  $h(t - \tau)$  darstellbar :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

### Anschauliche Darstellung des Faltungs



Dasstellung von  $x(t)$  als Summe → Dasstellung von  $y(t)$  als Summe gewichteter und gewichteter und verschobenes  $\delta$ -Impulse.



↳ Signale

↳ Verschiebung & Maßstabsänderung

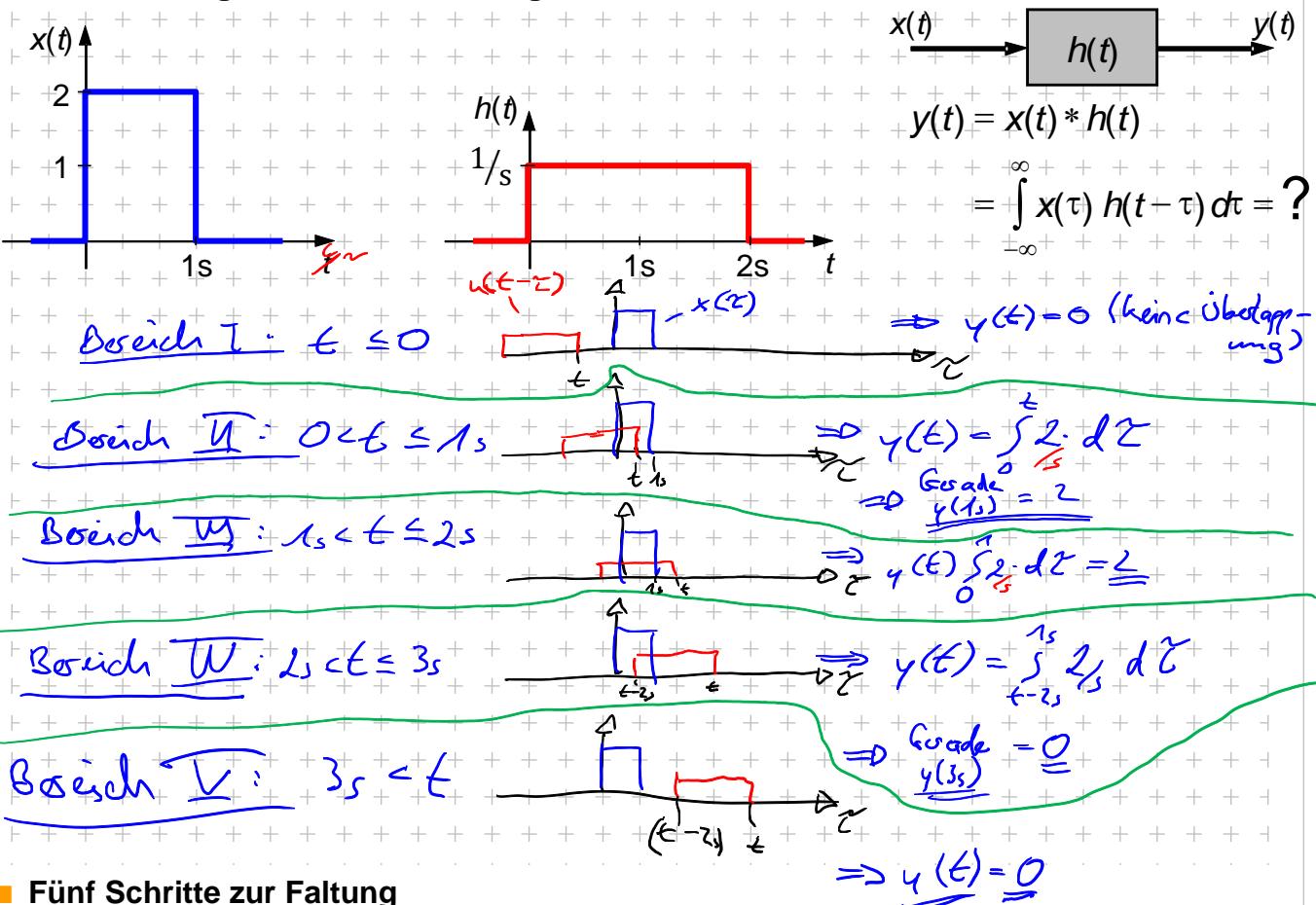
↳ Spezielle Signale

↳ LTI-Systeme

↳ Faltung

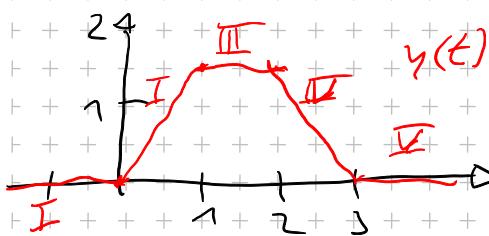
## Durchführung der Faltung

### Beispiel Faltung zweier Rechteck-Signale



### Fünf Schritte zur Faltung

1. Darstellung von  $x(t)$  auf der  $\tau$ -Achse:  $x(t) \rightarrow x(\tau)$
2. Spiegelung von  $h(\tau)$ :  $h(t) \rightarrow h(-\tau)$
3. Verschiebung um  $t$  auf der  $\tau$ -Achse:  $h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$
4. Berechnung des **Produktes**  $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$  für alle  $t$ .
5. Berechnung des **Integrals** über  $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$  für alle  $t$ .





## Beispiele zur Faltung

Demonstration Nachvollziehen aller Schritte im Detail...

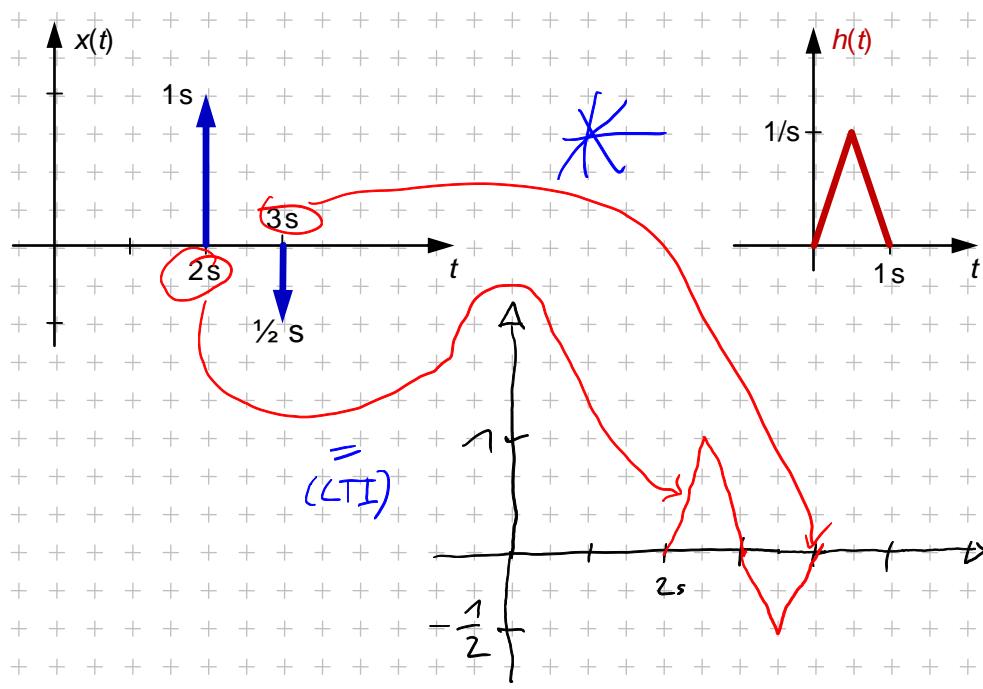
Rufen Sie das **Programm 2 Faltung.exe** auf und beantworten Sie folgende Fragen:

- a) Versuchen Sie, das Beispiel oben zu reproduzieren, um das Ausgangssignal  $y(t)$  zu berechnen.  
Wo genau werden die „Fünf Schritte zur Faltung“ jeweils durchgeführt?
  - b) Beschreiben Sie in Worten, was bei einer Verschiebung des Eingangssignals  $x(t)$  passiert.
  - c) Beschreiben Sie in Worten, was bei einer Verschiebung der Impulsantwort  $h(t)$  passiert.
  - d) Stellen Sie eine allgemeingültige Regel auf, wie die Dauer des Ausgangssignals  $y(t)$  von der Dauer des Eingangssignals  $x(t)$  und der Impulsantwort  $h(t)$  abhängt!
  - e) Warum ergibt die Faltung der *periodischen Rechteckfunktion* mit dem *breiten Rechteck Null*?

d-) Dauer des Eingangssignals = Dauer des Ausgangssignals + Dauer der Impulsantwort

**Beispiel** Besonders einfach: Faltung eines Signals mit  $\delta$ -Impulsen!

Bestimmen Sie das Faltungsprodukt  $x(t) * h(t)$  der folgenden Signale:

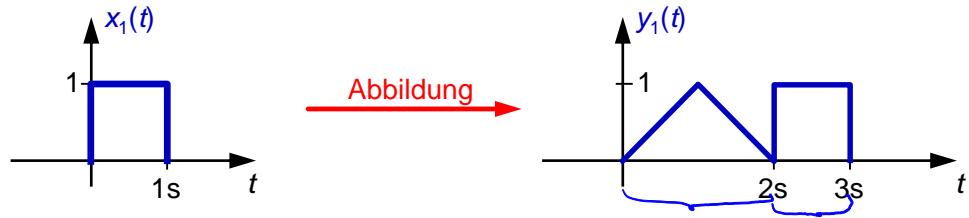




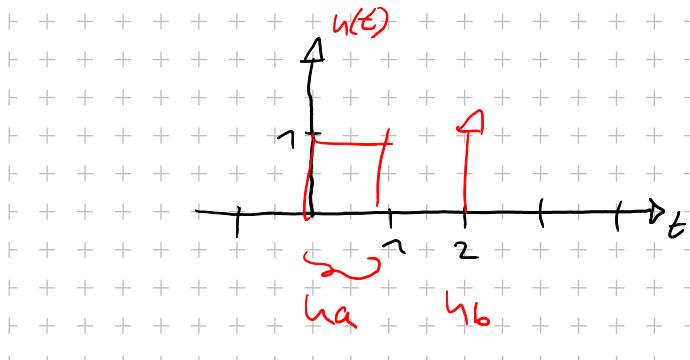
## Übungen zur Faltung

### Übungsaufgabe

Gegeben sei ein LTI-System, dass auf das Signal  $x_1(t)$  mit  $y_1(t)$  antwortet:

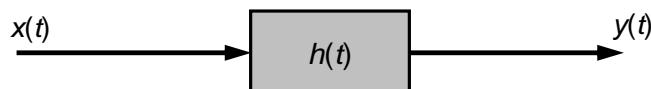


⇒ Skizzieren Sie die Impulsantwort des Systems!

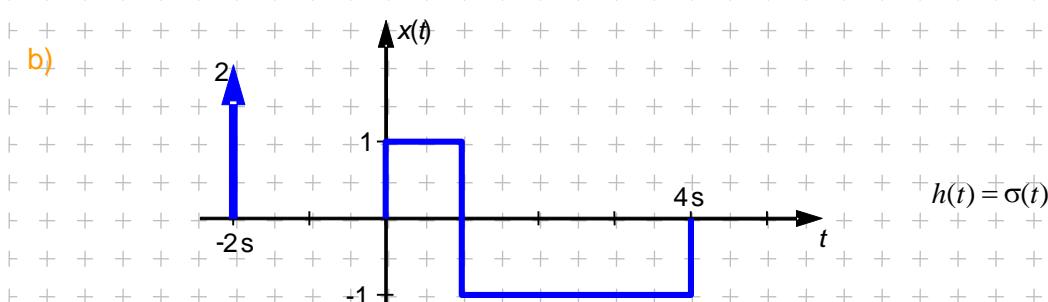
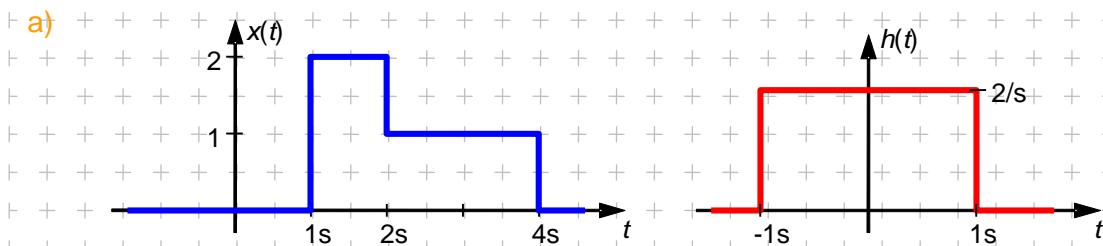


### Übungsaufgabe

Am Eingang eines LTI-Systems (Impulsantwort  $h(t)$ ) liegt das Eingangssignal  $x(t)$ :



Bestimmen und skizzieren Sie das Ausgangssignal  $y(t)$  für folgende zwei Fälle:



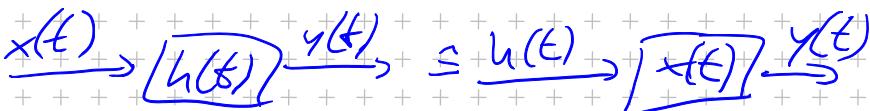


## Algebraische Eigenschaften der Faltung

### 1. Kommutativität:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Vertauschbarkeit von Eingangssignal und Impulsantwort



### 2. Assoziativität:

$$y(t) = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

- Die Kaskadenschaltung von LTI-Systemen ist äquivalent einem einzigen LTI-System, dessen Impulsantwort gleich der Faltung der einzelnen Impulsantworten ist.



### 3. Distributivität:

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}$$

- Die Parallelschaltung von LTI-Systemen (zwei oder mehr) ist äquivalent einem einzigen LTI-System, dessen Impulsantwort gleich der Summe der einzelnen Impulsantworten ist.

