Übungsblatt 10 – Lösung

10.1

(a) Wahr

(b) Falsch

(c) Falsch

(d) Falsch

(e) Falsch

(f) Falsch

(g) Falsch. Weder kommutativ, noch assoziativ.

(h) Je feiner die Diskretisierung, desto kleiner der Diskretisierungsfehler. Das bedeutet aber mehr Rechenoperationen und damit eine Zunahme der Rundungsfehler

(i) Absoluter Fehler : $|\tilde{x} - x|$ Größenordnung der Werte spielt eine Rolle

Relativer Fehler : $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|$ vergleichende Aussagen möglich, da Größenordnung von x und $\tilde{x}$ keine Rolle spielt

(j) Das ist gut. Schlecht konditioniert bedeutet cond $\geq \mathcal{O}(10^2)$

10.2

$a = 0.471 \cdot 10^{-2}$, $b = -0.185 \cdot 10^{-4}$

$a+b = (0.471 - 0.00185) \cdot 10^{-2} = 0.46915 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow rd(a+b) = 0.469 \cdot 10^{-2}$

$e_{abs} = 0.15 \cdot 10^{-5}$, $e_{rel} \approx 3.2 \cdot 10^{-4}$

$a-b = (0.471 + 0.00185) \cdot 10^{-2} = 0.47285 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow rd(a-b) = 0.473 \cdot 10^{-2}$

$e_{abs} = 0.15 \cdot 10^{-5}$, $e_{rel} \approx 3.2 \cdot 10^{-4}$

$a \cdot b = 0.471 \cdot (-0.185) \cdot 10^{-6} = -0.87135 \cdot 10^{-7} \Longrightarrow rd(a \cdot b) = -0.871 \cdot 10^{-7}$

$e_{abs} = 0.35 \cdot 10^{-10}$, $e_{rel} \approx 4.0 \cdot 10^{-4}$ (Mult. ist gut konditioniert)

$\frac{a}{b} = -\frac{0.471}{0.185} \cdot 10^{2} \Longrightarrow rd\left(\frac{a}{b}\right) = -0.255 \cdot 10^{3}$

$e_{abs} \approx 0.406$, $e_{rel} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$

10.3

$n=5, \quad b=10, \quad E \in [-20, 20]$

(a) $rd(1+10^{-7}) = 1.0000E0$

(b) $rd(1+10^{3}) = rd(1001) = 1.0010E3$

(c) $rd(1+10^{7}) = rd(10\,000\,001) = 1.0000E7$

(d) $rd(10^{10}+10^{3}) = rd(10\,000\,001\,000) = 1.0000E10$

Exakt, wenn sich Exponenten um weniger als n=5 unterscheiden

10.4

$1.22x^2 + 3.34x + 2.28 = 0$

(a)

$3.34^2 - 4 \cdot 1.22 \cdot 2.28 = rd(11.1556) - rd(4.88 \cdot 2.28) = 1.12E1 - 1.11E1$

$= 1.00E-1$

(b) $3.34^2 - 4\,1.22 \cdot 2.28 = 11.1556 - 4.88 \cdot 2.28 = 11.1556 - 11.1264 = 2.92E-2$

(c) $\frac{1.00E-1 - 0.292E-1}{0.292E-1} \approx 2.42$ großer relativer Fehler!

10.5

(a) $\sqrt{x+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

keine Auslöschung mehr!

(b) $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{(1-\cos^2 x)}{\sin x\ 1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

10.6

$\underbrace{rd(1.21\,10^2 - 0.00327 \cdot 10^2)}_{1.21 \cdot 10^2} - 1.19 \cdot 10^2 = rd(1.21 \cdot 10^2 - 1.19 \cdot 10^2) = 2.00 \cdot 10^0$

rel. Fehler 19.55%

$rd(1.21 \cdot 10^2 - 1.19 \cdot 10^2) - 3.27 \cdot 10^{-1} = rd(2.00 \cdot 10^0 - 0.327 \cdot 10^0)$

$= rd(\underbrace{1.673 \cdot 10^0}_{\text{exakter Wert}}) = 1.67 \cdot 10^0$

rel. Fehler 0.18%

10.7

Exakter Wert: $\sum_{k=1}^{3000} \frac{1}{k^2} = 1.6446$

4-stellige Genauigkeit: $rd\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3000^2}\right) = 1.624$ rel. Fehler 1.3 %

$rd\left(\frac{1}{3000^2} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1\right) = 1.645$ rel. Fehler 0.02 %

Bei Addition von kleinen Zahlen zu großen können signifikante Stellen verloren gehen, deshalb ist Addition in aufsteigender Reihenfolge numerisch günstiger!