14
Lineare Gleichungssysteme, Rang, Kern

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. März 2014, 21:06

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Lineare Gleichungssysteme

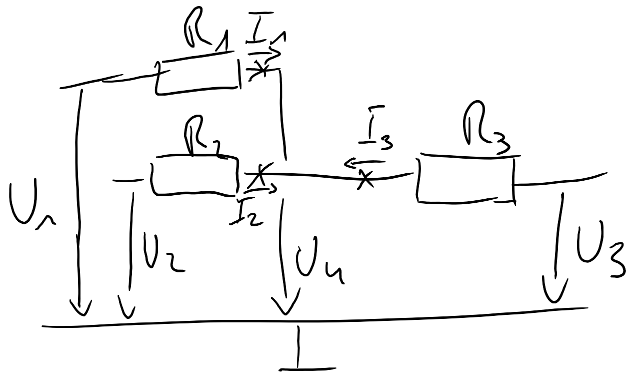
Lineare Algebra ist nicht nur für anschauliche Geometrie gut, sondern hilft auch, bestimmte häufig vorkommende Gleichungen zu verstehen und zu lösen: lineare Gleichungssysteme wie

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right.$$

Gemeint ist damit, dass alle diese drei Gleichungen mit ihren vier Unbekannten x, y, z, w gleichzeitig gelöst werden sollen. Die Lösungsmenge ist also eine Teilmenge des 1 $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^4$, vielleicht sogar die leere Menge, wenn es keine Lösungen gibt. Diese Gleichungen heißen linear, weil nur konstante Vielfache der Unbekannten addiert werden. Ausdrücke wie $\sin(x)$ oder y^2 oder xz sind in linearen Gleichungen verboten, wenn x, y und z Unbekannte sind.

Lineare Gleichungssysteme treten zum Beispiel auf, wenn man elektrische oder mechanische (oder soziale?) Netzwerke untersucht. Ein Beispiel aus der Elektrotechnik:

2



gegeben: $R_1, R_2, R_3, U_1, U_2, U_3$

gesucht: U_4, I_1, I_2, I_3

$$U_1 - U_4 = R_1 \cdot I_1$$
$$U_2 - U_4 = R_2 \cdot I_2$$
$$U_3 - U_4 = R_3 \cdot I_3$$
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

4 Gleichungen & 4 Unbekannte

Lineare Gleichungssysteme treten auch als Zwischenschritte beim numerischen Lösen von Differentialgleichungen auf. Ebenso stößt man auf sie, wenn man komplexe Systeme mit linearen Näherungen beschreibt.

Beim Lösen von Gleichungen fragt man in der Mathematik immer nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:

3

Existenz: Gibt es überhaupt eine Lösung? (egal wie viele $\hat{=} [1;\infty[$)

Eindeutigkeit: Angenommen es gibt eine Lösung: Gibt es weitere?

Viele Techniken, die man hier bei linearen Gleichungssystemen anwendet, tauchen in ähnlicher Form wieder bei linearen Differentialgleichungen auf.

2 Existenz von Lösungen

Betrachten wir zunächst die *Existenz* von Lösungen beim ursprünglichen Beispiel. Das kann man mit Hilfe von Vektoren umschreiben:

4

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 45 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten: Es ist eine Mischung der vier Spaltenvektoren zu finden, so dass der Vektor rechts (die „Inhomogenität“) herauskommt. Genau dann, wenn sich die Inhomogenität aus den vier Spaltenvektoren bilden lässt, gibt es eine Lösung!

Wenn es mindestens so viele Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, wie es Gleichungen gibt, existiert typischerweise mindestens eine Lösung. Wenn es weniger Unbekannte als Gleichungen gibt, lassen sich garantiert nicht bei allen Inhomogenitäten Lösungen finden.

Mit Hilfe einer Matrix (der „Koeffizientenmatrix“) lässt sich das sogar noch kompakter schreiben:

5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & -3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & 5 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 23 & 45 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ -15 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Inhomogenität}}$$

Es ist also ein Vektor zu finden, den die Matrix zu der Inhomogenität macht, also zu dem Vektor rechts. Wenn die Inhomogenität nie aus der Matrix herauskommt, ist die Lösungsmenge leer.

3 Bild und Rang

Nennt man die Koeffizientenmatrix A, setzt $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ und nennt die Inhomogenität $\mathbf{b}$, ist also die folgende Gleichung zu lösen:

[6]

Die Menge aller Vektoren, die tatsächlich aus einer Matrix A herauskommen, heißt Spaltenraum der Matrix und Bild [image *oder* range] der dazugehörigen „linearen Abbildung“ $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Das Gleichungssystem hat also eine Lösung, mehrere Lösungen oder sogar unendlich viele Lösungen, wenn

[7]

Die MATLAB®-Funktion `orth` liefert eine (orthonormale) Basis für das Bild.

Frage am Rand: Was ist das Bild der durch die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ beschriebenen linearen Abbildung?

[8]

Die Zahl der Dimensionen des Bilds einer Matrix heißt Rang [rank] der Matrix.

Für die Matrix B von eben gilt also $\operatorname{rank}(B) =$ [9] . Die MATLAB®-Funktion heißt ebenfalls `rank`. Achtung: Das Bild ist eine Menge von Vektoren; der Rang ist eine nackte Zahl.

Folgende Aussagen besagen also das Gleiche (d. h. sind logisch äquivalent):

- Das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A ist für jede beliebige Inhomogenität $\mathbf{b}$ lösbar.
- Jeder Vektor kann aus A herauskommen.
- Das Bild ist [10] .
- Der Rang ist [11] .

Wie schon gezeigt, werden bei der Multiplikation Matrix mal Vektor die Spaltenvektoren der Matrix miteinander anteilig gemischt. Der Rang einer Matrix ist also die maximale Zahl ihrer *Spalten*vektoren, die man nicht durch einander ausdrücken kann („linear unabhängige Vektoren"). Es stellt sich nachher heraus, dass dies auch gleich der maximalen Zahl ihrer *Zeilen*vektoren ist, die man nicht durch einander ausdrücken kann.

4 Eindeutigkeit von Lösungen

Nach der *Existenz* untersucht man nun in einem zweiten Schritt die *Eindeutigkeit* der Lösungen.

Angenommen, man hätte zwei Lösungen gefunden: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x_1 & + & 45y_1 & - & 3z_1 & + & 4w_1 & = & 7 \\ & & 2y_1 & - & z_1 & + & 6w_1 & = & -3 \\ -15x_1 & + & 5y_1 & & & - & 3w_1 & = & 5 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23x_2 & + & 45y_2 & - & 3z_2 & + & 4w_2 & = & 7 \\ & & 2y_2 & - & z_2 & + & 6w_2 & = & -3 \\ -15x_2 & + & 5y_2 & & & - & 3w_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

Indem man die Gleichungen voneinander abzieht, findet man:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 23(x_1-x_2) & + & 45(y_1-y_2) & - & 3(z_1-z_2) & + & 4(w_1-w_2) & = & 0 \\ & & 2(y_1-y_2) & - & (z_1-z_2) & + & 6(w_1-w_2) & = & 0 \\ -15(x_1-x_2) & + & 5(y_1-y_2) & & & - & 3(w_1-w_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Differenzen. Auf der rechten Seite stehen allerdings Nullen: ein „homogenes" Gleichungssystem (Gegenteil von inhomogen, eben ohne Inhomogenität).

Mit anderen Worten: Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems – wenn es welche gibt – sind genau dann nicht eindeutig bestimmt, wenn das *homogene* Gleichungssystem eine von $\mathbf{0}$ verschiedene Lösung hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der Nullvektor aus der Koeffizientenmatrix herauskommen kann, ohne dass man den Nullvektor hereinsteckt.

Wenn es mehr Unbekannte (und damit Spaltenvektoren links) gibt, als es Gleichungen gibt, ist eine Lösung – wenn es denn überhaupt eine gibt – keinesfalls eindeutig bestimmt. Wenn es höchstens so viele Unbekannte wie Gleichungen gibt, ist eine Lösung – wenn es denn überhaupt eine gibt – typischerweise eindeutig bestimmt.

5 Kern und Defekt

Die Menge aller Vektoren, die von einer Matrix A zum Nullvektor gemacht werden, heißt Nullraum [null space] der Matrix und Kern [kernel] der dazugehörigen linearen Abbildung $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Das Gleichungssystem hat also, wenn überhaupt, genau eine Lösung, wenn

[12]

Die MATLAB®-Funktion `null` liefert eine (orthonormale) Basis für den Kern.

Frage am Rand: Was ist der Kern der Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

[13]

Die Zahl der Dimensionen des Kerns heißt Defekt [nullity] der Matrix. Für die Matrix B von eben gilt also nullity(B) = [14] . Achtung: Der Kern ist eine Menge von Vektoren; der Defekt ist eine nackte Zahl.

Folgende Aussagen besagen also das Gleiche (d. h. sind logisch äquivalent):

- Das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A und der Inhomogenität $\mathbf{b}$ hat keine Lösung oder genau eine Lösung, aber nicht mehr.
- A macht nur den Nullvektor zum Nullvektor.
- Der Kern ist [15] .
- Der Defekt ist [16] .

6 Zusammenfassung: Existenz und Eindeutigkeit

Ist A eine $m \times n$-Matrix, gehen wir mit n-komponentigen Vektoren von rechts in die Matrix hinein (Multiplikation Matrix mal Spaltenvektor) und erhalten m-komponentige Vektoren als Ergebnis. Von den n Dimensionen der Eingangsvektoren gehen die Dimensionen des Kerns verloren, also muss offensichtlich gelten:

[17]

Ein Vektor ist genau dann im Kern, wenn er senkrecht auf allen Zeilenvektoren der Matrix steht:

18

Die Menge an Vektoren, die sich aus den Zeilenvektoren der Matrix bilden lassen, ist also die Menge aller Vektoren, die senkrecht zum Kern sind. Diese muss folgende Dimension haben – eine Zahl, die wir schon kennen:

19

Damit ist klar, dass für den Rang gilt:

20

Zusammengefasst sieht die Lösbarkeit für m Gleichungen und n Unbekannte damit so aus:

Situation	Existenz	Eindeutigkeit
$m < n$: weniger Gl. als Unbek.	21	22
$m = n$: so viele Gl. wie Unbek.	23	24
$m > n$: mehr Gl. als Unbek.	25	26

„Weniger Gleichungen als Unbekannte“ heißt auch „unterbestimmt“, „mehr Gleichungen als Unbekannte“ heißt auch „überbestimmt“.