Ableitung und Anwendungen

Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten. Berechnen Sie unter Verwendung des Differenzenquotienten die Ableitungen der Funktionen:

* 1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \cos(x)$

3. $f(x) = \sqrt{x}$

Hinweise:
zu 2.: Verwenden Sie die Additionstheoreme, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.
zu 3.: Erweitern Sie den Differenzenquotient mit $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

*** Waagrechte Tangente.** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Stellen mit waagerechter Tangente:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
2. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
3. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Tangentensteigung. An welchen Stellen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

verläuft die Tangente parallel zu der Geraden

$$g(x) = \frac{1}{4}x - 2?$$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Monotonie- und Krümmungsverhalten. In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen (streng) monoton fallend/wachsend? In welchen Intervallen sind die Funktionen links/rechts gekrümmt?

* 1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$,

2. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$,

3. $f(x) = xe^{-x}$,

4. $f(x) = \ln(\frac{1}{x}) \qquad (x > 0)$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

* **Globale und lokale Extrema.** Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$$
auf dem Intervall $[-5, 5]$.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

* **Minimale Kosten.** Für ein Produkt ist der wöchentliche Bedarf gleich b Stück. Die Lagerkosten sind Fixkosten f plus variable Kosten v pro Stück und Woche. Eine Anlieferung verursacht Kosten in der Höhe a (unabhängig von der Stückzahl). Bestellt man x Stück pro Anlieferung, so benötigt man $n = \frac{b}{x}$ Lieferungen und die Transportkosten sind $n \cdot a = \frac{b}{x} \cdot a$. Verringert sich das Produkt kontinuierlich, so muss es im Mittel die halbe Zeit zwischen zwei Lieferungen gelagert werden, somit sind die Lagerkosten:

$$\frac{b \cdot v}{2n} + f = \frac{v \cdot x}{2} + f.$$

Die Gesamtkosten für Transport und Lagerung sind daher

$$K(x) = \frac{a \cdot b}{x} + \frac{v \cdot x}{2} + f.$$

Bei welcher Bestellmenge entstehen minimale Kosten?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Tangente und lineare Approximation. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie näherungsweise $f(1,01)$ mit Hilfe der Tangente.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

*** Polynomiale Kostenfunktion.** Polynome werden oft zur Modellierung von Kosten verwendet: Dabei ist x die produzierte Warenmenge (in Mengeneinheiten) und $K(x)$ sind die Kosten (in Geldeinheiten), die bei der Produktion der Warenmenge x anfallen. Man nennt $K(x)$ daher auch die Kostenfunktion.

1. Approximieren Sie
$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 60x + 50$$
an der Stelle $x_0 = 15$ durch die Tangente.

2. Geben Sie mithilfe der Tangente den Näherungswert von $K(16)$ an. Um wie viel erhöhen sich die Kosten näherungsweise im Vergleich zu $K(15)$. Vergleichen Sie diesen Wert mit $K'(15)$. (Man nennt die Funktion $K'(x)$ auch Grenzkostenfunktion)

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.