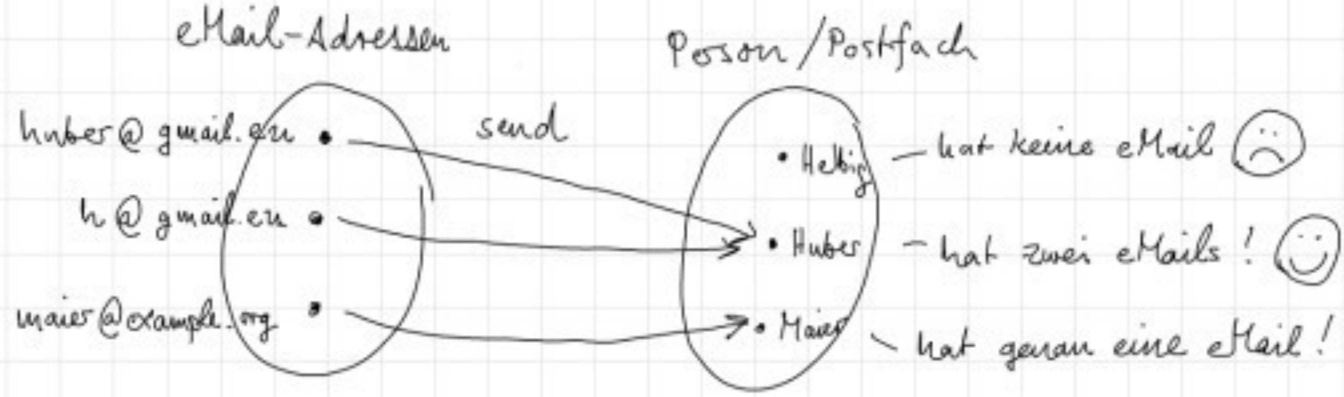
Funktionen

Funktionen - Intro

Funktionen (auch **Abbildungen** genannt) sind wie die Mengen ein grundlegendes mathematisches Konzept.

Motivation: Zuordnung eMail-Adresse zu Person



eine eMail kann nicht an zwei Personen gehen!

ZIEL Was lerne ich?

- Erkennen von Funktionen
- Prüfen von Funktionen auf **Injektivität**, **Surjektivität** und **Bijektivität**
- Bestimmen der **Umkehrfunktion** (falls Fkt. bijektiv)

Funktionen – Konzept

Def. Eine **Funktion** (oder auch **Abbildung**) f von einer Menge D in eine Menge M ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in M$ zuordnet.

(d.h. $\forall x \in D \; \exists_1 y \in M: \; f(x) = y$)

Man schreibt:

$$f: D \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto f(x)$$

und sagt: „x wird auf $f(x)$ abgebildet" bzw. „$f(x)$ ist das **Bild** (oder der **Funktionswert**) von x".

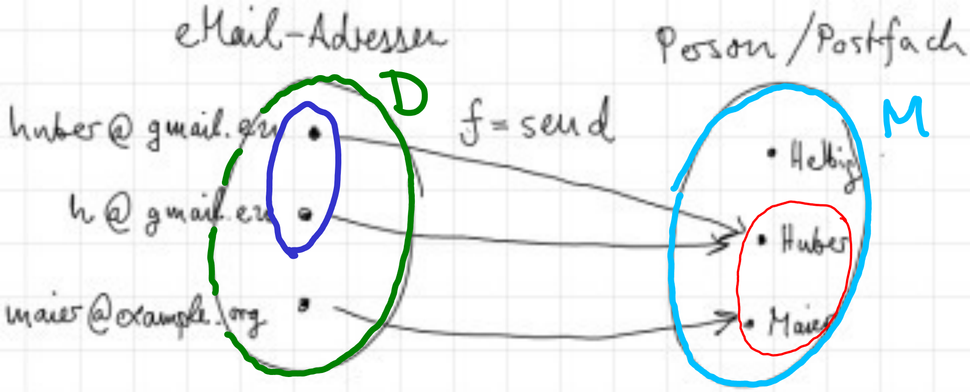
Die Menge D heißt **Definitionsbereich**

Die Menge $f(D) := \{ f(x) \mid x \in D \} \subseteq M$ heißt **Bildmenge**

Die Menge M heißt **Wertebereich**

Für $B \subseteq M$ heißt $f^{-1}(B) := \{ x \in D \mid f(x) \in B \}$ **Urbildmenge** von B.

Ü Diskutieren Sie die Begriffe am Beispiel folgender Vorschrift:



Ist dies eine Funktion? ☒ ja ☐ nein,

weil jeder eMail-Adresse wird genau eine Person zugeordnet.

$D = \{$huber@gmail.eu, h@gmail.eu, maier@example.org$\}$ heißt Definitionsbereich

$M = \{$Helbig, Huber, Maier$\}$ heißt Wertebereich

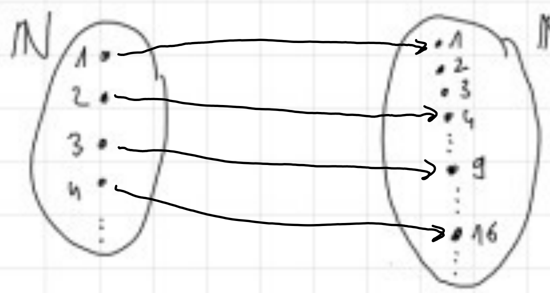
$f(D) = \{$Huber, Maier$\}$ heißt Bildmenge

$f^{-1}(\{\text{Huber}\}) = \{$huber@gmail.eu, h@gmail.eu$\}$ heißt Urbild von $\{$Huber$\}$.

Zeichnen Sie die Mengen in obigem Bild ein!

Ü Diskutieren Sie die Begriffe an folgenden Vorschriften:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto f(n) = n^2$

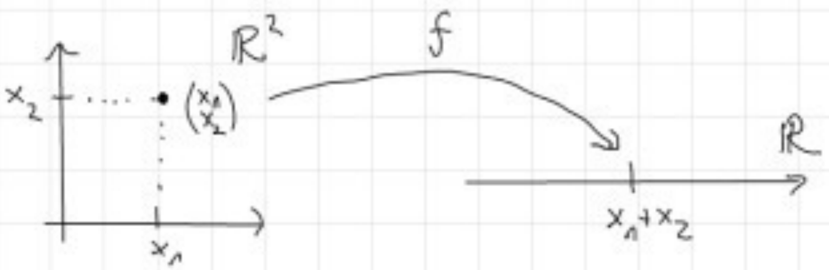


$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 3^2 = 9, \quad f(4) = 4^2 = 16$

$f(\mathbb{N}) = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$

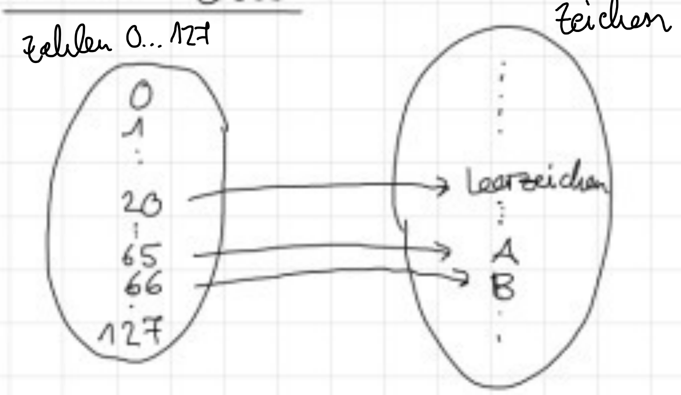


$f(1,3) = 1+3 = 4$

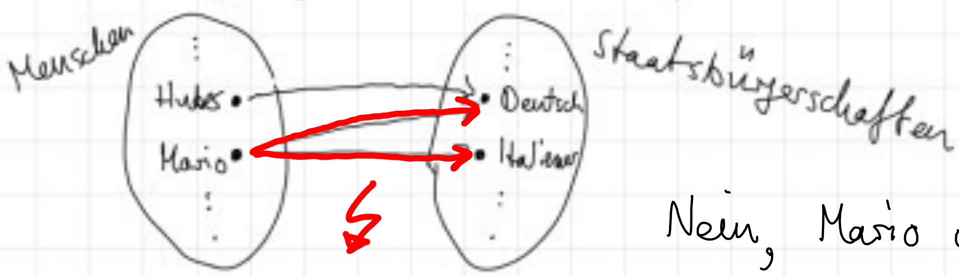
$f(2,2) = 2+2 = 4$

$f(-3,1) = -3+1 = -2$

c) ASCII-Code:

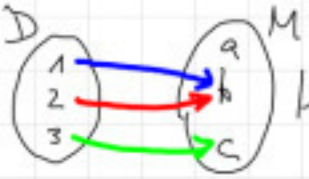


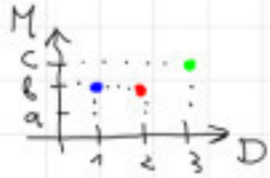
d) Ist folgende Vorschrift eine Funktion?

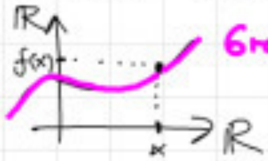


Nein, Mario werden zwei Staatsbürgerschaften zugeordnet!

Funktionen – Graph

Anstatt 

kann man das auch so 

malen. Das kennt man bei Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ als Graph: 

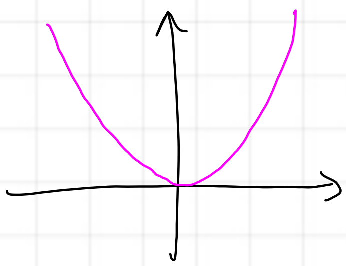
Graph von f als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

Abstrakt mathematisch

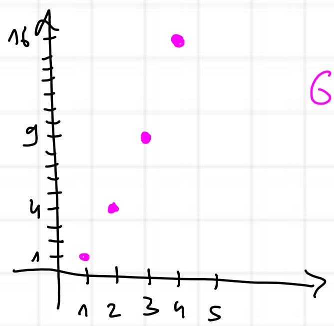
<u>Def.</u> Die Menge $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times M$ heißt **Graph** der Funktion $f: D \to M$.

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeichnen Sie G_f von folgenden Funktionen:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$



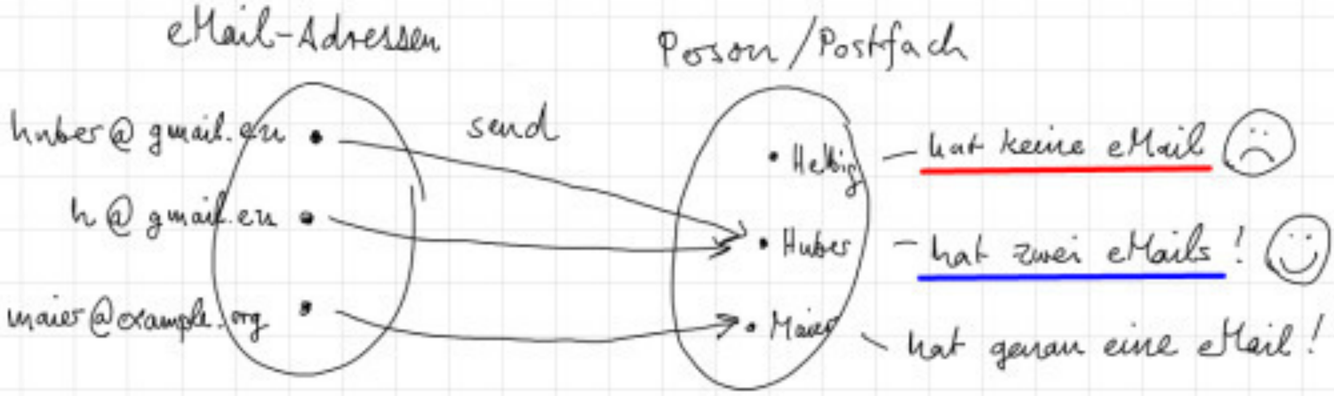
b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) = n^2$



$G_f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \dots\}$

Funktionen – Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Betrachten wir nochmals folgendes Beispiel:



Wir beobachten:

- Nicht jedes Element im Wertebereich ist im Bild der Funktion.
- Es gibt Elemente im Wertebereich, auf die mehrfach abgebildet wird.

$\boxed{\text{Ü}}$ Negieren Sie die Aussagen der beiden Beobachtungen!

$\underbrace{\text{Jedes Element im Wertebereich}}_{\forall\, y \in M \,:}\ \underbrace{\text{ist im Bild der Funktion}}_{\exists\, x \in D:\ f(x) = y}$

Auf alle Elemente im Wertebereich wird nur einfach abgebildet (anders ausgedrückt: verschiedene $x \in D$ werden auch verschieden abgebildet: $\forall x_1, x_2 \in D: \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Die Negation dieser Beobachtungen liefert folgende Eigenschaften von Funktionen:

<u>Def.</u> Eine Funktion $f: D \to M$ heißt

„Jedes y ist Bild eines x"

a) **surjektiv** $:\Leftrightarrow \forall y \in M \; \exists x \in D: \; y = f(x)$.

$\Leftrightarrow f(D) = M$

„verschiedene x werden verschieden abgebildet"

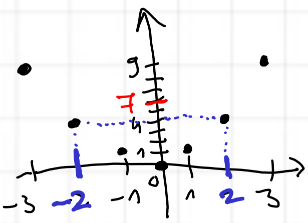
b) **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

c) **bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ surjektiv & injektiv.

$\boxed{\text{Ü}}$ Welche der folgenden Abbildungen ist surjektiv, injektiv, bijektiv? Zeigen Sie dies mit obiger Definition!

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \; z \mapsto f(z) = z^2$



<u>nicht surjektiv</u>: ~~zzg~~: $\exists y \in \mathbb{N} \; \forall z \in \mathbb{Z}: \; \underbrace{f(z)}_{z^2} \neq y$.

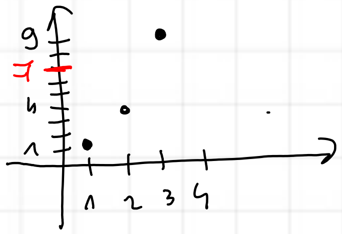
z.B. $y = 7$ erfüllt dies: $y = 7 \neq z^2 \quad (\forall z \in \mathbb{Z})$

Annahme: $7 = z^2 \Rightarrow \underbrace{z}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\pm\sqrt{7}}_{\notin \mathbb{Z}} \;\lightning$

<u>nicht injektiv</u>: ~~zzg~~: $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}: \; z_1 \neq z_2 \wedge f(z_1) = f(z_2)$.

z.B. $z_1 = -2 \neq 2 = z_2 \wedge f(z_1) = 4 = f(z_2)$.

b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto g(n) = n^2$



nicht surjektiv: siehe a)

injektiv: zzg: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}: f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1^2 = n_2^2$

$\sqrt{\ }$
$\Rightarrow n_1 = \underbrace{\pm}_{↯\, n_1 \in \mathbb{N}} n_2$, also $n_1 = n_2$.

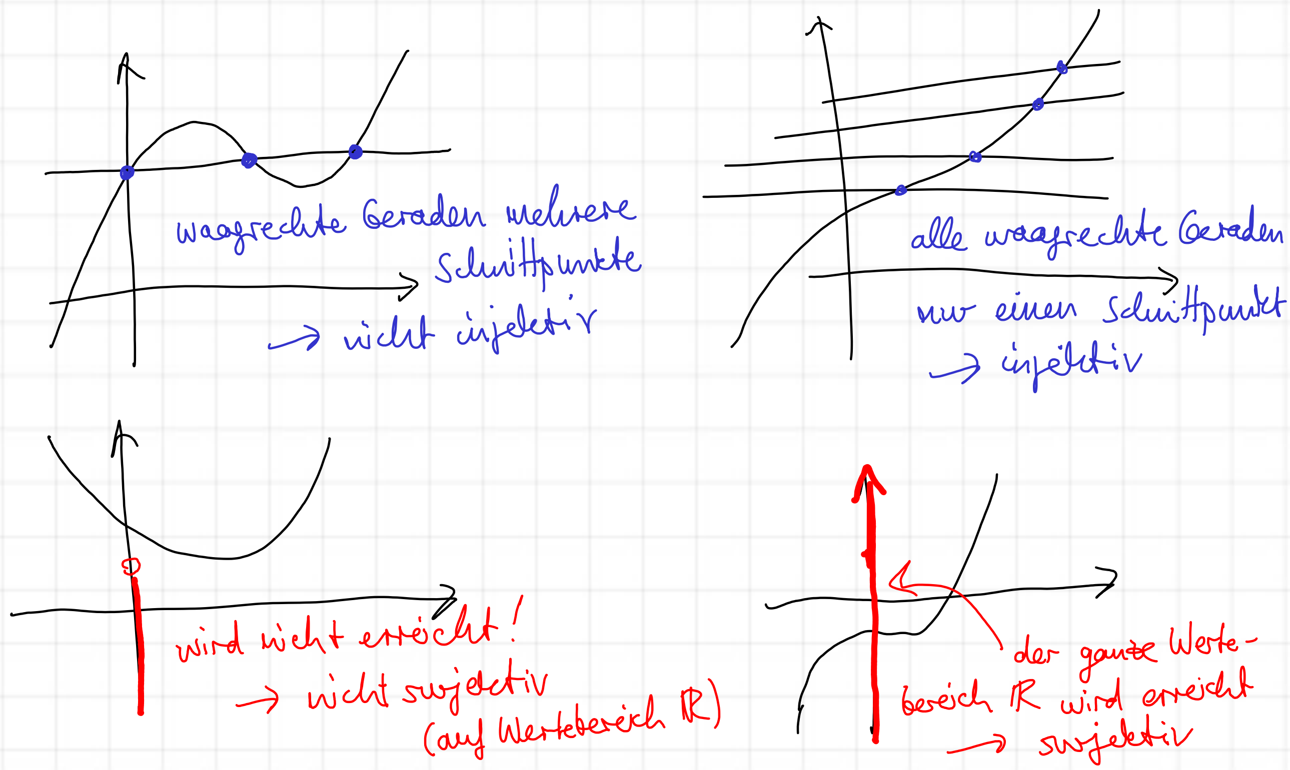
c) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto h(z) = z + 1$

surjektiv: zzg: $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists z \in \mathbb{Z}: f(z) = y$

Sei $y \in \mathbb{Z}$ gegeben. Dann gibt es dazu $z := y - 1$ mit $f(z) = f(y-1) = (y-1) + 1 = y$.

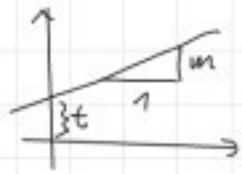
injektiv: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 + 1 = z_2 + 1 \Rightarrow z_1 = z_2$.

d) Was heißt injektiv bzw. surjektiv in Bezug auf den Graphen einer Funktion? Skizzieren Sie dies!



Funktionen – Wichtige Beispiele

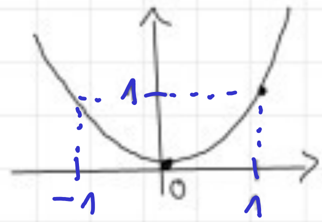
Gerade. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = mx + t$



ist bijektiv, da jede waagrechte Gerade schneidet den Graphen nur einmal und der gesamte Wertebereich wird erreicht.

Identität (Spezialfall $m=1$, $t=0$). $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}(x) = x$.
Ganz allgemein für eine beliebige Menge D ist $id_D : D \to D$, $x \mapsto x$ die Identität von D.

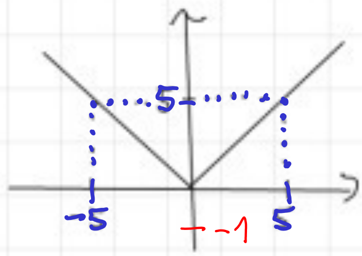
Parabel. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$



ist weder injektiv noch surjektiv, da $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ und $f(x_1) = 1 = f(x_2)$, $y = -1$ wird nicht erreicht, da $f(x) = x^2 \geq 0$.

Betragsfunktion. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

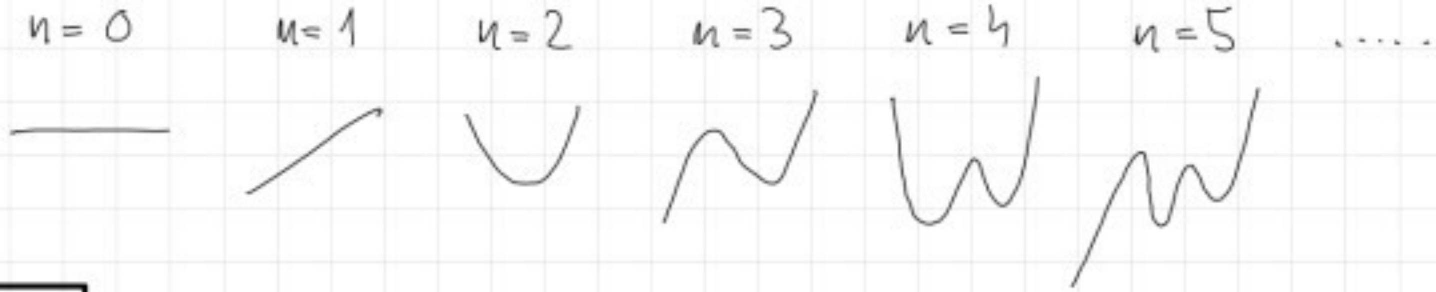
ist weder injektiv noch surjektiv,
da $|-5| = 5 = |5|$, $|x| \geq 0$, also wird z.B. $y = -1$ nicht erreicht.



Polynome. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion vom Grad n (falls $a_n \neq 0$)

z.B. $f(x) = \underset{\neq 0}{3} x^5 + 2x^2 + 1$ ist ein Polynom vom Grad 5.

Qualitativ kann man die Graphen in Abhängigkeit des Grades wie folgt zeichnen:



$\boxed{\text{Ü}}$

Für welche n ist ein Polynom surjektiv, injektiv oder bijektiv?

$n = 0$: nicht surjektiv, nicht injektiv

$n = 1$: surjektiv, injektiv

$n = 2$: nicht surjektiv, nicht injektiv

$n = 3$: surjektiv, injektiv ?

$n = 4$: nicht surjektiv, nicht injektiv

$n = 5$: surjektiv, injektiv ?

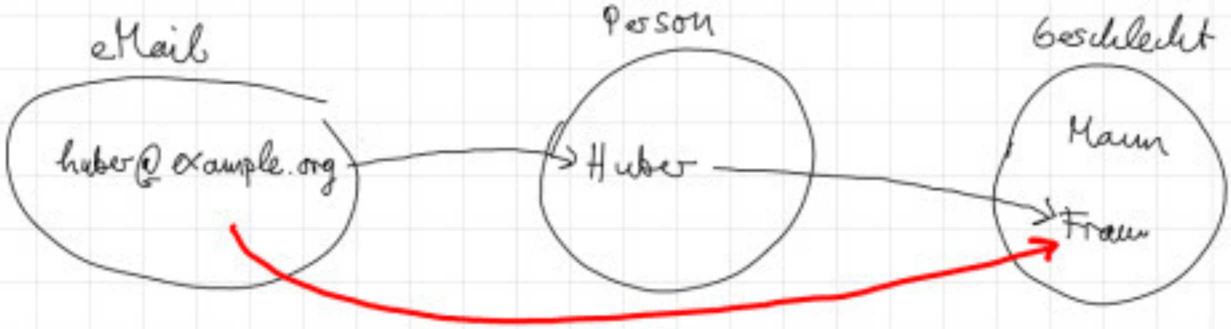
n gerade: beides nicht!

n ungerade: immer surjektiv, manchmal injektiv manchmal nicht!

Funktionen – Verknüpfung

Man kann Funktionen auch nacheinander ausführen.

z.B.



Wir erhalten eine neue **Funktion**, die einer eMail ein Geschlecht zuordnet. Etwas mathematischer:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g", "x \mapsto x+1"'] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto (x+1)^2"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f", "x \mapsto x^2"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

z.B.
$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right] & 5+1 \arrow[r, mapsto, "f"] & (5+1)^2 \end{tikzcd}$$

<u>Def.</u> Seien $f : D_f \to M$ und $g : D_g \to N$ Funktionen. Die **Hintereinanderausführung** oder **Verknüpfung** von f und g ist (im Falle $g(D_g) \subseteq D_f$) die Funktion

$$f \circ g : D_g \to M,$$
$$x \longmapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

$$
\begin{tikzcd}
D_g \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & D_f^{\subseteq N} \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, mapsto] & g(x) \arrow[r, mapsto] & f(g(x)) \\
 & & f \circ g(x) \arrow[u, phantom, "\shortparallel"]
\end{tikzcd}
$$

Man beachte bei $f \circ g$, dass g zuerst ausgeführt wird!

Ü Berechnen Sie $f \circ g$ (sofern definiert!):

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$

$f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$

$f \circ g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{x^3}$

Ü Bestimmen Sie zwei Funktionen f, g mit $h = f \circ g$:

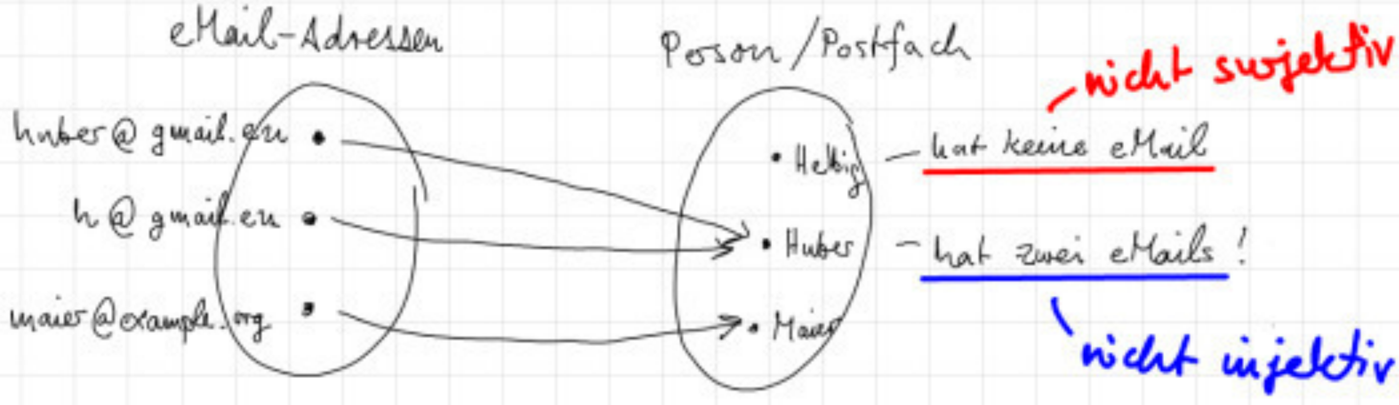
a) $h(x) = (x+1)^5$: $f(x) = x^5$ und $g(x) = x + 1$

$\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^5.$

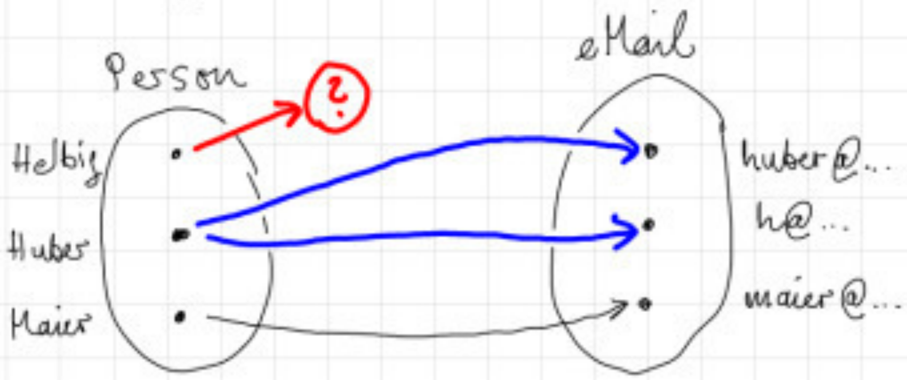
b) $h(x) = |x-2|$: $f(x) = |x|$ und $g(x) = x - 2$

$\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = |x-2|.$

Funktionen – Umkehrfunktion



Wir wollen jetzt die Funktion „rückwärts ausführen", d.h. zu gegebener Person die eMail-Adresse heraus-finden. Anders gesprochen: Wir suchen eine Funktion, die dies machen sollte:



Dabei stoßen wir auf die zwei Probleme **rot** & **blau**. D.h. dies stellt gar keine Funktion dar, da "Helbig" gar keine eMail zugewiesen wird ↯ und Huber zwei eMails zugewiesen wird ↯.

Unter welchen Bedingungen kann man eine Funktion „rückwärts ausführen", d.h. die Umkehrung ist eine Funktion? Antwort:

Die Funktion muss surjektiv & injektiv sein, damit die Probleme nicht auftreten!

Betrachten wir ein Beispiel wo alles funktioniert:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned} \qquad \text{z.B.} \quad \begin{aligned} 1 &\longmapsto 2 \\ 1{,}5 &\longmapsto 3 \\ 2 &\longmapsto 4 \\ 3 &\longmapsto 6 \end{aligned}$$

d.h. jede Zahl wird verdoppelt. Die Umkehrung ist jede Zahl zu halbieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{2}x \end{aligned} \qquad \text{z.B.} \quad \begin{aligned} 2 &\longmapsto 1 \\ 3 &\longmapsto 1{,}5 \\ 4 &\longmapsto 2 \\ 6 &\longmapsto 3 \end{aligned}$$

Hier gelten folgende wichtige Eigenschaften:

- $\boxed{f \circ g = id_{\mathbb{R}}}$ (da $\forall x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x) = 2 \cdot (\frac{1}{2}x) = x = id(x)$)
- $\boxed{g \circ f = id_{\mathbb{R}}}$ (da $\forall x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x = id(x)$)

Wir halten fest:

<u>Def. und Satz.</u> Eine Funktion $f: D \to M$ heißt **umkehrbar** oder **invertierbar** $:\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists\, g: M \to D \text{ Funktion: } \quad \begin{aligned} f \circ g &= id_M \\ g \circ f &= id_D \end{aligned}$$

$\overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow}$ f bijektiv.

In diesem Fall heißt $\overset{\text{Def.}}{g}$ eine **Umkehrfunktion** von f. Weiter ist g eindeutig $\underset{\text{Satz}}{\text{bestimmt}}$ und wir schreiben dafür $f^{-1} := g$.

Beweis. (↝ ~~Vorlesung~~) siehe Anhang!

$\boxed{\ddot{U}}$ Geben Sie die Umkehrfunktion an:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

$y = 2x + 1$, vertausche $y \leftrightarrow x$: $x = 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} =: \underline{g(x)}$

$$\left.\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\tfrac{x-1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + 1 = x = id(x) \\ g \circ f(x) &= g(2x+1) = \frac{(2x+1) - 1}{2} = x = id(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{g = f^{-1}}_{\text{Umkehrfkt!}}$$

b) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{2}{x}$.

$y = \frac{2}{x}$, Vertausche $y \leftrightarrow x$: $x = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2}{x} =: \underline{g(x)}$

$$\left.\begin{aligned} f \circ g\,(x) &= f(g(x)) = f\left(\tfrac{2}{x}\right) = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x = id(x) \\ g \circ f\,(x) &= g(f(x)) = g\left(\tfrac{2}{x}\right) = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x = id(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = f^{-1}$$

Umkehr-fkt.

Fehlender Beweis zu Satz aus dem Skript. Sei $f : D \to M$ eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ ist umkehrbar } \iff f \text{ ist bijektiv.}$$

Dies folgt aus folgenden zwei Lemmata, genauer **Lemma 2 c)**:

Lemma 1. Eine Umkehrfunktion ist eindeutig bestimmt.

Gleichheit von Fkten.

Beweis. seien g, h zwei Umkehrfktn. von $f: D \to M$ zzg: $g = h$.

$$g \overset{}{=} g \circ \underbrace{\mathrm{id}_M} = g \circ (f \circ h) \overset{\text{Assoz. von } \circ}{=} (\underbrace{g \circ f}) \circ h = \mathrm{id}_D \circ h = h \quad \square$$

$\forall x \in M: g(\mathrm{id}_M(x)) = g(x)$

$\overset{\shortparallel}{} \; \mathrm{id}_D$ da g Umkehrfkt. von f

$f \circ h = \mathrm{id}_M$, da h Umkehrfkt. von f

Lemma 2. Sei $f : D \to M$ eine Funktion. Dann gilt:

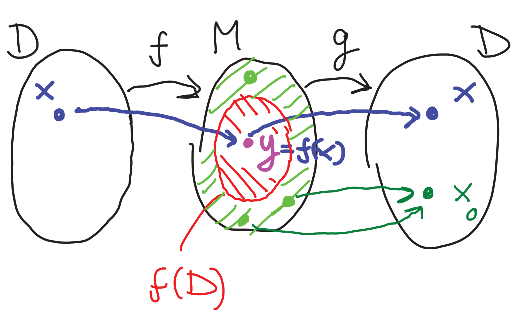
a) f ist injektiv $\iff \exists g : M \to D : g \circ f = \mathrm{id}_D$.

b) f ist surjektiv $\iff \exists h : M \to D : f \circ h = \mathrm{id}_M$.

c) f ist bijektiv $\iff$ Es gibt eine Umkehrfunktion von f.

Beweis.

a) „$\Rightarrow$": Sei f injektiv. zzg: $\exists g: M \to D: g \circ f = \mathrm{id}_D$. Also definiere ein solches g:



$$\forall y \in M: g(y) \overset{(*)}{:=} \begin{cases} x, & \text{falls } y \in f(D) \text{ mit } f(x) = y. \\ x_0, & \text{falls } y \notin f(D) \end{cases}$$

beliebig aus D! (spielt keine Rolle für $g \circ f$!)

$$\forall x \in D: (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{y}) \underset{\text{Def von } g\,(*)}{\overset{y \in f(D)}{=}} x = \mathrm{id}_D(x), \text{ also } g \circ f = \mathrm{id}_D \quad \square$$

„$\Leftarrow$" Sei g mit $g \circ f \overset{(*)}{=} id_D$ gegeben. Z.z.: f injektiv.

Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Z.z.: $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{g\circ}{\Longrightarrow} \underbrace{g \circ f}_{\overset{(*)}{=} id_D}(x_1) = \underbrace{g \circ f}_{\overset{(*)}{=} id_D}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \square$$

b) $\forall$ DIY.

c) f ist bijektiv $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ f ist injektiv & surjektiv $\overset{a),b)}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, g, h: M \to D$: $g \circ f = id_D$, $f \circ h = id_M$

$\underset{\text{Lemma 1.}}{\overset{\text{Beweis von}}{\Longleftrightarrow}}$ $g = h$ Umkehrfkt. zu f