



---

## FUNKTIONSGRENZWERTE, STETIGKEIT, L'HOPITAL

Fragen?

\* Definition Funktionsgrenzwert. Was bedeutet  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?

Lösung.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert & ist gleich  $y \Leftrightarrow$  <sup>Def.</sup>  $\forall$  Folgen  $x_n \rightarrow a$  mit  $x_n \in D:$

$$f(x_n) \rightarrow y$$

In diesem Fall schreibt man  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$

Eigener Lösungsversuch.

**Funktionsgrenzwerte.** Existieren folgende Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie diese.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ,  $f(x) = x^2$  d.)

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e.)

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  (Hinweis: l'Hopital)

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

**Lösung.**

a.)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$

b.) kein Grenzwert  
 $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \leftarrow$  Wert vom Maximum von  $\sin(x)$   
 $\rightarrow 0$  mit  $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$

$x'_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi} \rightarrow 0$  mit  $f(x'_n) = \dots = -1$

c.)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$   
 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  oder  $\frac{2}{2}$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$   
 $\rightarrow \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

**Eigener Lösungsversuch.**

**Stetigkeit.** Welche Funktionen sind stetig bzw. stetig fortsetzbar? (Mit Begründung.)

- a) Was bedeutet Stetigkeit anschaulich? Wie ist diese definiert? *ohne Absetzen*  
Def.:  $\forall x_0 \in D: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- b)  $f(x) = x^3 + 3x + 4$
- c)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- d)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- e)  $f(x) = \frac{\sin(e^{x^2})}{2x^4}$

alle Polynome,  $\sin(x), \cos(x), \tan(x), e^x, a^x, \ln x$ ,  
 $\log_a x, \sqrt[n]{x}, \dots$  sind stetig & auch  
deren Summe/Differenz/Produkt/Quotient  
und Verknüpfung

**Lösung.**

Eigener Lösungsversuch.