Probeklausur

1. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? **Begründen** Sie Ihre Entscheidung bzw. **korrigieren** Sie falsche Aussagen!

a) Von einer Fußballmannschaft (11 Mann) sind 4 Spieler jünger als 22 Jahre, 3 sind 22, der Rest (4 Spieler) ist älter. Das Durchschnittsalter liegt bei 25 Jahren. Wenn für den 43-jährigen Torwart ein 16-jähriger eingewechselt wird, dann werden der Durchschnitt und der Median kleiner.

$\bar{x} = 25 \quad , n = 11$

$\bar{x}_{neu} = \frac{11 \cdot 25 - 43 + 16}{11} = 22.\overline{54}$ $\Rightarrow$ Durchschnitt wird kleiner

Der Median ist der sechste Wert der aufsteigend sortierten Werte und bleibt deshalb gleich ($x_{0.5} = 22$)

b) Wenn zwei Merkmale X und Y stark voneinander abhängen, dann ist der Korrelationskoeffizient immer größer als 0,7.

Der Korrelationskoeffizient gibt nur einen linearen Zusammenhang an und kann auch negativ sein.

c) Das 95%-Konfidenzintervall für einen unbekannten Erwartungswert lautet

$$]44.487; 51.513[$$

. Daraus lässt sich für das Testproblem $H_0 : \mu = 52$, $H_1 \neq 52$ folgern, dass H_0 zum Signifikanzniveau 10% verworfen wird .

Wenn bei einem zweiseitigen Test μ_0 nicht im 95%-Konfidenzintervall liegt, dann wird H_0 zum Signifikanzniveau 5% verworfen.
Da das Konfidenzintervall zum Signifikanzniveau 10% kleiner ist, wird auch in diesem Fall H_0 verworfen.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Wie muss der Stichprobenumfang n angepasst werden, um die Halbierung eines Konfidenzintervalls für den unbekannten Erwartungswert zu erreichen?

$$L = 2 \cdot \frac{q}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \qquad (q: \text{Quantilwert})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{2} = 2 \cdot \frac{q\sigma}{\sqrt{4n}}$$

Also muss n vervierfacht werden.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Eine Fabrik produziert Werkzeuge und dazugehörige Boxen. Nehmen Sie an, dass die Verteilung der Länge der Werkzeuge (in mm) durch eine $N_{200,9}$-Verteilung und die Länge der Boxen (in mm) durch eine $N_{210,16}$-Verteilung beschrieben werden kann. Geben Sie den R-Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewähltes Werkzeug nicht in die Box passt.

$$W \sim N_{200,9} \quad | \quad B \sim N_{210,16}$$

$$\Rightarrow \quad W - B \sim N_{-10,25} \quad \text{bzw.} \quad B - W \sim N_{10,25}$$

$$P(W-B > 0) = 1 - P(W-B \leq 0) = 1 - \text{pnorm}(0, -10, 5)$$

$$P(B-W < 0) = \text{pnorm}(0, 10, 5)$$

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Ein Labor hat einen Alkoholtest entworfen. Aus den bisherigen Erfahrungen weiß man, dass 60% der von der Polizei kontrollierten Personen tatsächlich betrunken sind. Bezüglich der Funktiosweise des Tests wurde ermittelt, dass in 95% der Fälle der Test positiv reagiert, wenn die Person tatsächlich betrunken ist, in 97% der Fälle der Test negativ reagiert, wenn die Person nicht betrunken ist.
Verwenden Sie $B =$ "Person ist betrunken" und $T =$ "Test ist positiv".

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ein negatives Testergebnis hat und trotzdem betrunken ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test positiv ausfällt.

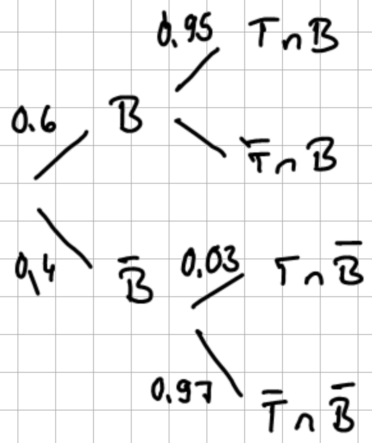
Geg.: $P(B) = 0.6 \quad , \quad P(T|B) = 0.95 \, , \; P(\bar{T}|\bar{B}) = 0.97$

a) Ges.: $P(\bar{T} \cap B) = P(\bar{T}|B) \cdot P(B) = (1 - P(T|B)) \cdot P(B)$

$= 0.05 \cdot 0.6 = 0.03$

b) Ges.: $P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap \bar{B}) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T \cap \bar{B})$

$= 0.95 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.03 = 0.582$



$P(T \cap \bar{B}) = 0.4 \cdot 0.03$

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X sei gegeben durch:

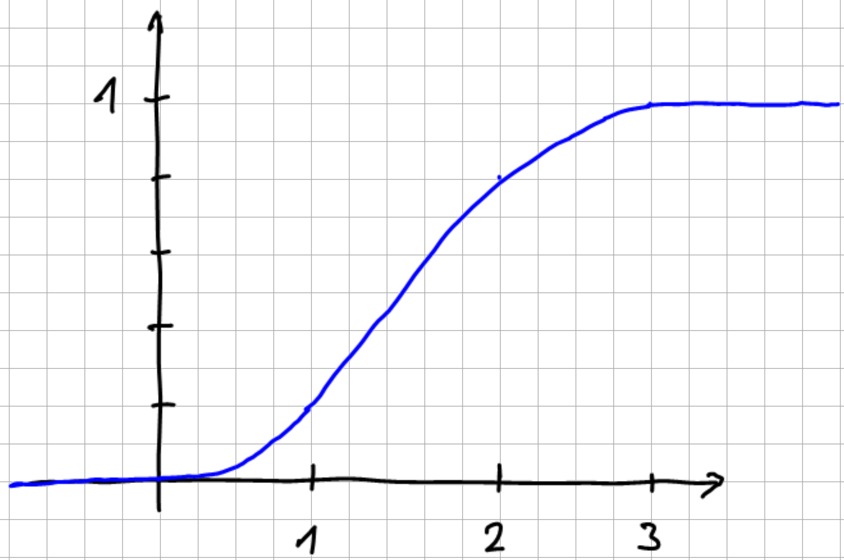
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/5, & 0 \leq x \leq 1 \\ (-x^2 + 6x - 4)/5, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion grafisch dar.

(b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(1 < X \leq 2)$.

a)



b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{5}(-2x+6), & 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Aufgabe 6 **(7 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion ein kubischer Spline ist:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, & x \leq 1 \\ \\ s_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

Stetigkeit: $s_1(1) = 1 \overset{?}{=} s_2(1) = 1$ ✓

Stetigkeit der 1. Ableitung:

$$s_1'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$s_2'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$$

$$s_1'(1) = 0 \overset{?}{=} s_2'(1) = 0$$ ✓

Stetigkeit der 2. Ableitung:

$$s_1''(x) = -3x$$

$$s_2''(x) = 3x - 6$$

$$s_1''(1) = -3 = s_2''(1)$$ ✓

Grad der Polynome ≤ 3

Also ist die Funktion ein kubischer Spline.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Quadraturformel

$$\frac{1}{3}\left(2f(0.25) - f(0.5) + 2f(0.75)\right)$$

zur näherungsweisen Berechnung von $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$.

Bestimmen Sie die Ordnung der Quadraturfomel.

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = \frac{1}{3}(2-1+2) = 1 \implies \text{Ordnung } 1$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 t \; dt \overset{?}{=} \frac{1}{3}\left(2\cdot 0{,}25 - 0.5 + 2\cdot 0.75\right) = \frac{1}{2} \implies \text{Ord. } 2$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2 \, dt \overset{?}{=} \frac{1}{3}\left(2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\implies \text{Ord. } 3$$

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 t^3 \, dt \overset{?}{=} \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{64} - \frac{1}{8} + 2\cdot\frac{27}{64}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{32} - \frac{4}{32} + \frac{27}{32}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\implies \text{Ord. } 4$$

$$\frac{1}{5} = \int_0^1 t^4 \, dt \overset{?}{=} \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{256} - \frac{1}{16} + 2\cdot\frac{81}{256}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{128} - \frac{8}{128} + \frac{81}{128}\right)$$

$$\neq \frac{1}{5} \qquad ↯$$