Vollständige Induktion

Vollständige Induktion – Prinzip

Ziel: Wir wollen eine Aussage $A(n)$ (Prädikat) für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen! z.B.

$$A(n): \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Man kann sich natürlich davon überzeugen, dass die Gleichung für

- $n = 1$, also die Aussage $A(1)$: $\frac{1}{2^0} = 2\left(1 - \frac{1}{2^1}\right)$
- $n = 2$, —"— $A(2)$: $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} = 2\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$
- $n = 3$, —"— $A(3)$: $\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$
- usw.

gilt. Aber wie zeigt man das für alle $n \in \mathbb{N}$? Das sind ja unendlich viele ☹

Die Lösung ist das Beweisprinzip der **Vollständigen Induktion**:

$$A(1) \to A(2) \to A(3) \to A(4) \to A(5) \to \dots$$

(1) **Induktionsanfang (IA)**: Zeige $A(1)$

(2) **Induktionsschritt (IS)**: Zeige $A(n) \to A(n+1)$,

d.h. nehme an dass $A(n)$ gilt (**Induktionsvoraussetzung (IV)**) und zeige, dass damit auch $A(n+1)$ gilt.

auch Induktionsannahme (IA) aber ⚠ auch Ind.-Anfang ...

Vollständige Induktion – Übung

$\boxed{Ü}$ Zeige mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Induktionsschritt: Wir schließen von $n = k$ auf $n = k+1$

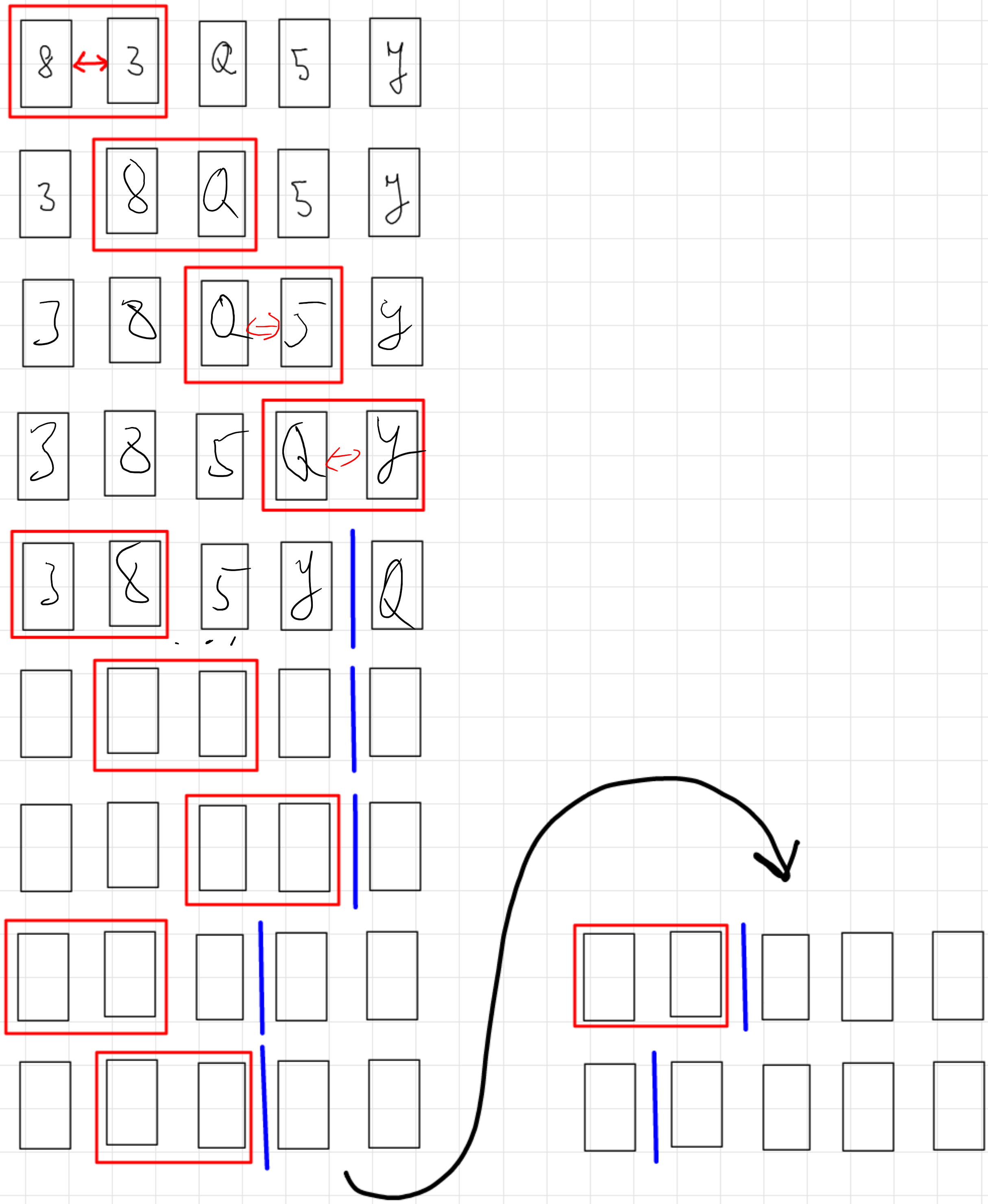
Induktionsannahme: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

zu zeigen: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{(k+1)-1}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$

Vollständige Induktion – Bubblesort

Als Anwendung betrachten wir den sogenannten **Bubblesort-Algorithmus**. Dieser dient der Sortierung bzw. Ordnung, z. B.

- Datei-Namen im Explorer
- Kartenspiel:



Vollständige Induktion – Gaußsche Summenformel

Frage: Wieviele Vergleiche „ “ benötigt man, um das Kartenspiel zu sortieren?

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Frage: Wieviele Vergleiche benötigt man, um 6 Zahlen $\boxed{8}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{1}$ zu sortieren? 15

Frage: Wieviele Vergleiche benötigt man bei 1000 Zahlen?

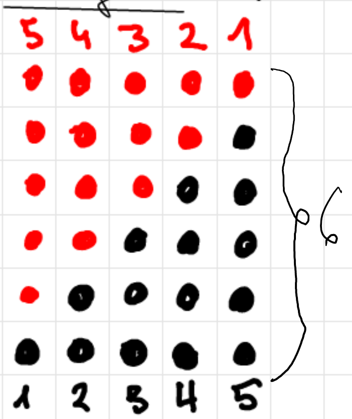
???!

Allgemein: Bei $n+1$ Karten benötigt man

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Vergleiche.

Frage: Wie kann man diese Summe effizient berechnen?



$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\boxed{\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n}$$

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$ („Der kleine Gauß")

zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis vollstd. Ind. über n

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

<u>Induktionsschritt:</u> $n = k \rightarrow n = k+1$

Induktionsannahme $\quad \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

zu zeigen $\quad \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$