



$$\begin{array}{l} \text{I } \varphi(n \cdot n) = \varphi(n) \cdot \varphi(n) \\ \text{II } \varphi(\text{PRIM}) = \text{PRIM} - 1 \\ \text{III } \varphi(\text{PRIM}^n) = \text{PRIM}^{n-1} \cdot \text{PRIM}^{n-n} \end{array}$$

PROBE-PRÜFUNG 2

$$\varphi(4860) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(3^5) = (2^{2-1}) \cdot 4 \cdot (3^{5-1}) =$$

1. **Warm-Up.** Bestimmen bzw. beantworten Sie:

- a) $\varphi(4860)$.
- b) $2^{980} \bmod 243$. $(2^{14})^{70} = (103^2)^{35} = 160 \cdot (160^2)^{17} = 160 \cdot 85 \cdot (85^2)^8 \cdot 160 \cdot 85 \cdot (178^2)^4 = 235 \cdot (34^2)^2 = 235 \cdot 241 = 13$
- c) Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \log_3 x$.
- d) Ist $\sin: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv? (Skizze reicht als Begründung) ~~Ja~~ Nein
- e) Amplitude und Periode von $f(x) = \sin(2x)$.

2. **Lexikographische Ordnung.** Es sei $A = \{\text{"a"}, \text{"aa"}, \text{"b"}, \text{"inf"}\}$ eine Teilmenge aller Strings und $R \subseteq A \times A$ die Relation auf A gegeben durch die lexikographische Ordnung, d.h. "steht im Telefonbuch vor oder ist gleich" (Telefonbuchordnung).

- a) Geben Sie R an. $(a; a), (a; aa), (a; b), (a; \text{inf}), (aa; aa), (aa; b), (aa; \text{inf}), (b; b), (b; \text{inf}), (\text{inf}; \text{inf})$
- b) Ist R reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?
- c) Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnung?

3. **Interpolation mit der Exponentialfunktion.** Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = ae^{bx}$ durch die Punkte $(0; 2)$ und $(3; 1)$ geht.

$$\begin{aligned} 2 &= a e^{b \cdot 0} = a \xrightarrow{a=2} 2 = 2 e^{3b} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{3b} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3b \xrightarrow{b=\ln\left(\frac{1}{2}\right)/3} b = -\frac{1}{3} \ln 2 \\ 1 &= a e^{b \cdot 3} = 2 e^{3b} \end{aligned}$$

4. **Sinus und Kosinus.** Bestimmen Sie für die folgende Funktion die Periode, Amplitude, Nullstellen, Maximal- und Minimalstellen:

Periode $\frac{2\pi}{3}$
Amplitude 2

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Max: } \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

5. **Trigonometrische Gleichung.** Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$1.6 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad | -1 \quad 0.6 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \xrightarrow{\text{arccos}} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \arccos(0.6) + \frac{\pi}{4} \quad | :2$$

6. **Wurm.** (z.B. <http://de.wikipedia.org/wiki/Loveletter>) Ein Computer-Wurm soll sich wie folgt verbreiten: Am Anfang soll der Wurm auf einem Rechner vorhanden sein (böser Schurke). Nach einer Stunde verschickt er sich an 2 Email-Adressen und deinstalliert sich wieder. Bei den 2 Empfängern installiert er sich, verschickt sich nach einer Stunde wieder an 2 neue Email-Adressen und deinstalliert sich...

- a) Bestimmen Sie eine Funktion $n(t)$, die die Anzahl der infizierten Rechner zur Stunde t berechnet. $\sum_{k=0}^t 2^k = \frac{2^{t+1}-1}{2-1}$
- b) Wie viele Rechner sind nach einem Tag infiziert? $(\text{siehe } (33554431) / 2^{24})$
- c) Nach wie vielen Stunden ist die ganze Weltbevölkerung (7,2 Mrd.) infiziert?

$$\left(\frac{2^{t+1}-1}{2-1} \approx 7,2 \text{ Mrd für } t \text{ nach 32 Stunden} \right) \quad \begin{aligned} 7,2 \text{ Mrd} &= 2^x \\ x &= 32,75 \end{aligned}$$