Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Geometrie mit Determinanten, Inverse Matrix

Fragen?

* **Geometrische Interpretation.** Was bedeutet

a) die Determinante

b) das Spatprodukt

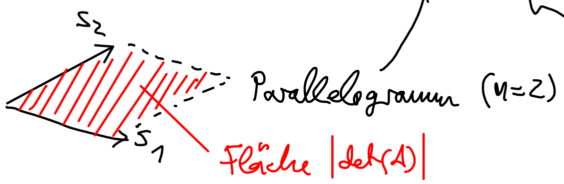
c) das Vektor-/Kreuzprodukt

geometrisch?

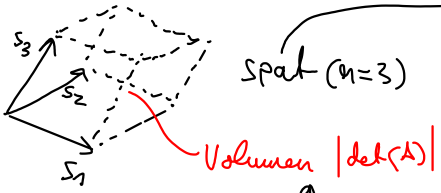
Lösung.

a) $A = (s_1|\dots|s_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\det(A) = \overset{\pm}{\text{orientierte}}$ Volumen des von den Spalten $s_1,\dots,s_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds.

z.B. $\underline{n=2}$: $A = \left(\underbrace{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}}_{s_1}\middle|\underbrace{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}}_{s_2}\right)$

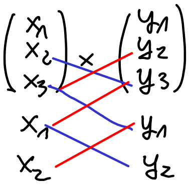


$\underline{n=3}$: $A = \left(\underbrace{\begin{matrix}1\\4\\0\end{matrix}}_{s_1}\middle|\underbrace{\begin{matrix}2\\0\\1\end{matrix}}_{s_2}\middle|\underbrace{\begin{matrix}3\\1\\3\end{matrix}}_{s_3}\right)$

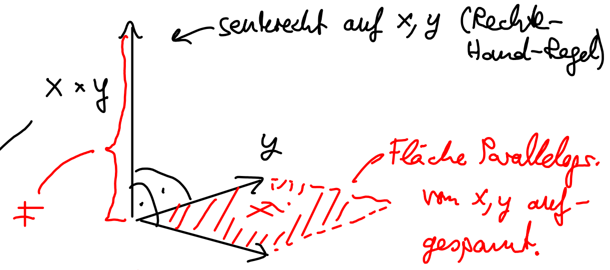


b) $\underline{n=3}$: Spatprodukt = Volumen des Spats siehe a)

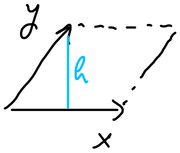
c) $\underline{n=3}$:



$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$



$F = \|x \times y\|$



$F = h \cdot |x|$

Eigener Lösungsversuch.

Geometrie und Physik. Berechnen Sie:

a) die Fläche von dem Parallelogram, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

b) das Volumen von dem Spat, das von den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

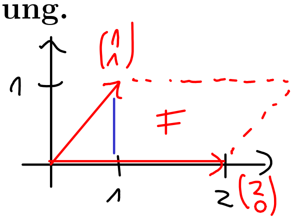
Geschwindigkeitsvektor eines positiv geladenen Teilchens (q=1)

c) die Lorentz-Kraft: $F_L = \overset{\downarrow}{v} \times \underset{\uparrow}{B}$ mit $v = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$

Magnetische Flussdichte

Lösung.

a)



$$F = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\right| = |1\cdot 0 - 2\cdot 1| = 2$$

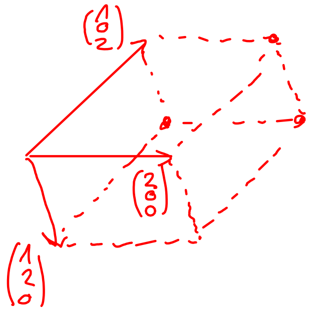
ODER

$$F = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\0-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+0^2+(-2)^2} = 2$$

ODER

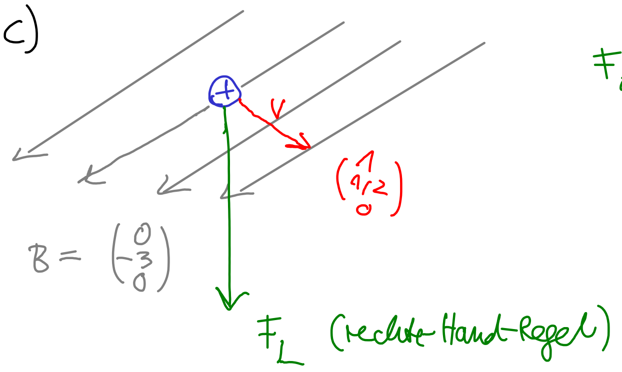
$$F = \underbrace{\text{Höhe}}_{1} \cdot \underbrace{\left\|\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\|}_{2} = 2$$

b)



$$V = \left|\underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\\2 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{0+8+0-0-0-0}\right| = |8| = 8$$

c)



$$F_L = v \times B = \begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-3-0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}}$$

Eigener Lösungsversuch.

INVERSE MATRIX

Wozu braucht man eine inverse Matrix? z.B. zum Lösen eines LGS $Ax = b$. Wie löst man dieses mit $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, also z.B.

$$5x = 10 \quad \overset{5^{-1}\cdot}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{5^{-1}\cdot 5}_{1}\cdot x = 5^{-1}\cdot 10 \Rightarrow x = 5^{-1}\cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$$

Das gleiche allgemein für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$Ax = b \quad \overset{A^{-1}\cdot}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E_n}\cdot x = A^{-1}\cdot b \Rightarrow x = A^{-1}\cdot b$$

Wir suchen also eine Matrix A^{-1} zu A, so dass $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$. Wann existiert diese?

KRITERIUM FÜR INVERTIERBARKEIT

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar $\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\iff$ $\text{Rang}(A) = n$ (voller Rang, d.h. n Pivots in ZSF)

$\iff$ $\text{Defekt}(A) = 0$ (keine freie Variablen in ZSF)

$\iff$ $\text{Kern}(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ ($\dim(\text{Kern}(A)) = \text{Defekt}(A)$)

$\iff$ LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar (mit $x = A^{-1}\cdot b$)

Wie kann man in diesem Fall die inverse Matrix berechnen?

- $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

  $A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

  $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

  $A^{-1} = ⓘ$ → Algorithmus:

  $$(A \mid E_n) \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{in ZSF}}{\sim \dots \sim}} (E_n \mid A^{-1})$$

Inverse Matrix. Berechnen Sie, falls möglich A^{-1}.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung.

a) $\det(A) \overset{\text{Sarrus}}{=} 0+0+0-0-0-0 = 0 \overset{\text{Kriterium}}{\Longrightarrow}$ A <u>nicht</u> invertierbar!

<u>ODER</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rang $A = 2 \neq 3$ (nicht voll) $\Rightarrow$ A nicht inv.

Defekt $A = 1 \neq 0$ (freie Var!) $\Rightarrow$ —"—

b) $\det(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ A <u>nicht</u> inv.

c) $\det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ <u>A inv.</u> mit $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>Probe</u>: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = E_2$

d) $\det(A) = 0+0+0-1-0-0 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ A inv. $A^{-1} = \textcircled{?} \to$ Algorithmus:

$$(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{III-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{III-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{matrix} I+III \\ \\ (-1)\cdot III \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (E_3 \mid A^{-1}) \quad \text{also } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{E_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Eigener Lösungsversuch.