Schaltalgebra

Montag, 20. Mai 2019 07:37

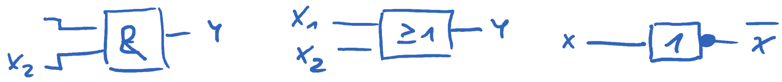
Basis der Digitaltechnik

→ Alphabet $\{0,1\}$ / $\{$wahr / falsch$\}$

Grundfunktionen: UND – $*$
ODER – $+$
NICHT – $\overline{}$, $\neg$

} vollständige Basis

Darstellung:



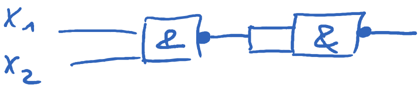
In Halbleitertechnologie:
NAND, NOR

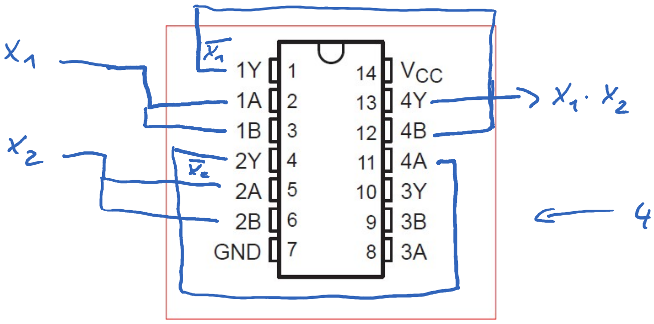
X_1	X_2	$\overline{X_1 \cdot X_2}$	$\overline{X_1 + X_2}$	$X_1 + X_2$	$X_1 \cdot X_2$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1

Anm.: Mit NAND (NOR) kann auch jede boolesche Funktion dargestellt werden.

Skizze:

$$X_1 \cdot X_2 = \overline{\overline{X_1 \cdot X_2} \cdot \overline{X_1 \cdot X_2}}$$





$$X_1 \cdot X_2 = \overline{\overline{X_1} + \overline{X_2}}$$
// De Morgan
$$= \overline{\overline{X_1 + X_1} + \overline{X_2 + X_2}}$$

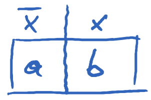
← 4fach 2-input NOR

Darstellung von Funktionen
- Term
- Funktionstabelle
- Skizze: "Gattern" + Verbindungen

Umformen von Funktionen → Zieltechnologie
- Algebraisches Umformen / Rechenregeln
- Karnaugh-Diagramm

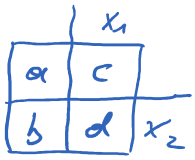
1 Variable x

x	$Y(x)$
0	a
1	b

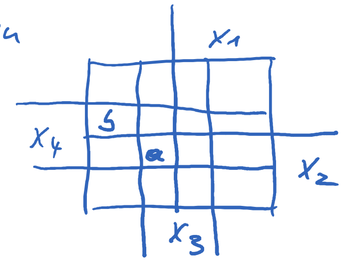


2 Variablen x_1, x_2

x_1	x_2	$Y(x_1,x_2)$
0	0	a
0	1	b
1	0	c
1	1	d



4 Variablen



$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$a \hat{=} 0\ 1\ 1\ 1$

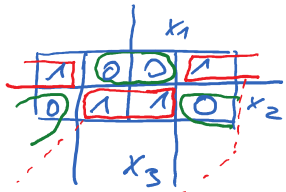
$b \hat{=} 0\ 0\ 0\ 1$

Bsp.:

$$Y(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

$\rightarrow$ 11 Basisop's

x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



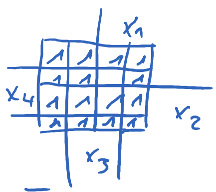
$x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ – 3 Op's

$\overline{\bar{x}_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3}$ – 3 Op's

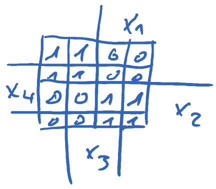
Minimieren der Anzahl der Operatoren:

Minimiere Anzahl und Länge der Terme

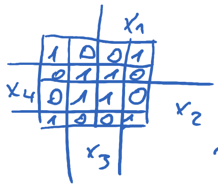
$\hat{=}$ überdecke 1'en im Diagramm mit möglichst großen, möglichst wenigen Rechtecken.



$x_1 + \bar{x}_1 = 1$

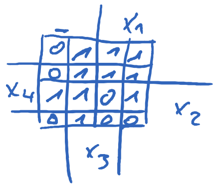


$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2$



$x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$

$x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$



Regeln der Schaltalgebra:

$|x_3|$

Regeln der Schaltalgebra:

$\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$

$0+0=0$, $1 \cdot 1 = 1 \ldots$.

De Morgan'sche Regeln $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

Assoziativgesetze: $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\oplus \quad \oplus \quad \oplus$

Kommutativg. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

Distributivg.: ① $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$

② $x_1 + (x_2 \cdot x_3) = \underbrace{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)}$

$= x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_3$

$+ x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3$

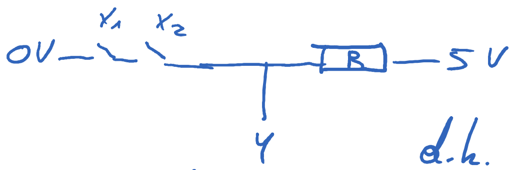
$= x_1 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2$

$+ x_2 \cdot x_3$

$= x_1 + x_2 \cdot x_3$

③ $x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \cdot x_3)$

Realisierung mit Schaltern (Transistoren) und Widerständen



d.h. NAND(x_1, x_2)

$x_1 = 1$ und
$x_2 = 1$
$\longrightarrow Y = 0V$

hier: unstrukturierte Logik

Strukturierte Logik $\longrightarrow$ Normalformen

für "unstrukturierte" Schaltungen,
z.B. Instruktionsdecoder,
ROM,
Funktionstabellen.

Bsp.: XOR , $\oplus$

$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$

$\hat{=}$ DNF

	x_1	
	0	1
x_2	1	0

DNF: Zeilen mit Fktswert 1

0	1	
1	0	x_2

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

DNF: Zeilen mit Fktswert 1

$\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2$

KNF: Zeilen mit Fktswert 0

$(x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$

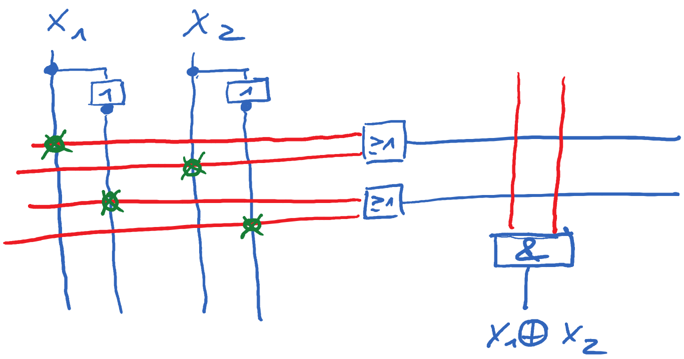
NR.:

$\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2}$ ≙ Formel für Zeilen mit Wert 0, als DNF, negiert

$= \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}$ De Morgan $\overline{a+b} = \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}}$

$= (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$

Realisierungsskizze:



$y = \underset{a}{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4} + \underset{b}{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4} + \underset{c}{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underset{d}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4} + \underset{e}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4}$

			x_1		
	0	0	0	0	
x_4	d 1	e 1	1 a	1 b	
	0	0	1 c	0	x_2
	0	0	0	0	
		x_3			

überdecke die 1'en,
keine 0'en,
mit möglichst wenigen
und großen Rechtecken

$\bar{x}_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$

Minimierung mit Redundanzen

Bsp.: BCD-Anzeige

x_3	x_2	x_1	x_0	f_0	f_4	
0	0	0	0	1	1	✓
0	0	0	1	0	0	✓
0	0	1	0	1	1	✓
0	0	1	1	1	0	✓
0	1	0	0	0	0	✓
0	1	0	1	1	0	✓
0	1	1	0	1	1	✓
0	1	1	1	1	0	✓
1	0	0	0	1	1	✓

f_0:

			x_3		
	1	1	*	1	
x_0	0	1	*	1	
	1	1	*	*	x_2
	0	1	*	*	
		x_1			

f_4:

		x_3	
1	1	*	1

NR.:

	x_3	x_2	x_1	x_0
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

0	1	1	0	1	1	✓
0	1	1	1	1	0	✓
1	0	0	0	1	1	✓
1	0	0	1	1	0	

gleich (don't care)
*

F4.

x_3

1	1	*	1
0	0	*	0
0	0	*	*
0	1	*	*

x_0 x_2 x_1

$$f_0(x_3,x_2,x_1,x_0) = x_1 + x_3 + \overline{x_0}\cdot\overline{x_2} + x_0\cdot x_2$$

$$f_4(x_3,x_2,x_1,x_0) = \overline{x_0}\cdot\overline{x_2} + \overline{x_0}\cdot x_1$$

$$f_0(\dots) = x_1 + x_3 + \overline{x_0 + x_2} + x_0\cdot x_2$$

$$f_4(\dots) = \overline{x_0 + x_2} + \overline{x_0}\cdot x_1$$