Funktionen, Teil 2

Fragen?

siehe hochgeladenes Skript...

Umkehrfunktion berechnen. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen:

1. $f\colon [0,\infty) \to [-1,\infty), \quad f(x) = 2x^2 - 1$
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = 2e^{-x}$

Wiederholung: Wie berechnet man eine Umkehrfunktion? Bsp. $f(x) = 3x + 2$

- Schreibe $y =$ $3x+2$
- Vertausche x und y: $x = 3y+2$
- Löse nach y auf: $\underline{g(x)} := y =$ $\underline{\frac{x-2}{3}}$ Kandidat für Umkehrfunktion.
- Prüfe $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$ $\forall x \in \mathbb{R}$: $f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x = id(x)$.
  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{(3x+2)-2}{3} = x = id(x)$
  $\Rightarrow g = f^{-1}$ Umkehrfkt. von f.

Lösung.

1. $y = 2x^2 - 1$. Vertausche x & y: $x = 2y^2 - 1 \overset{+1,\,:2}{\Rightarrow} y^2 = \frac{x+1}{2} \overset{\sqrt{\;}}{\Rightarrow} y = \cancel{\pm}\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{2}}}_{\geq 0 \text{ da } x \in [-1,\infty)} =: g(x) \in [0,\infty)$

   liefert Funktion $g: [-1,\infty) \to [0,\infty)$

   $\forall x \in [-1,\infty)$: $f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)^2 - 1 = x = id_{[-1,\infty)}(x)$.

   $\forall x \in [0,\infty)$: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x^2-1) = \sqrt{\frac{(2x^2-1)+1}{2}} = x = id_{[0,\infty)}(x)$.

   $\Rightarrow g = f^{-1}$.

2. $y = 2e^{-x}$. Vertausche x & y: $x = 2e^{-y} \overset{:2}{\Rightarrow} \frac{x}{2} = e^{-y} \overset{\ln(..)}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\ln(e^{-y})}_{\underbrace{id(-y)}_{-y}}$ ln Umkehrfkt. von $e^{\cdot}$

   $\Rightarrow y = \underline{-\ln\left(\frac{x}{2}\right) =: g(x)}$, $\quad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

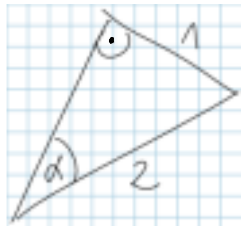
   $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $\underline{f \circ g}(x) = f(g(x)) = f\left(-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2e^{-\left(-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = 2e^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\frac{x}{2} = x = \underline{id}(x)$

   $\forall x \in \mathbb{R}$: $\underline{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(2e^{-x}) = -\ln\left(\frac{2e^{-x}}{2}\right) = -\underbrace{\ln(e^{-x})}_{-x} = -(-x) = x = \underline{id}(x)$

   $\Rightarrow g = f^{-1}$.

Eigener Lösungsversuch.

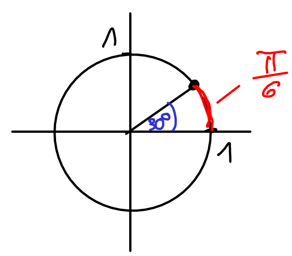
Winkelberechnung am Dreieck. Berechnen Sie den Winkel α mit Hilfe von sin:



Lösung.

Umkehrfkt. von sin (später: arcsin)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{1}{2} \overset{\sin^{-1}(\dots)}{\Longrightarrow} \underbrace{\sin^{-1}(\sin(\alpha))}_{\mathrm{id}(\alpha)=\alpha} = \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\overset{\text{TR}}{=} 30^\circ \\ \text{DEG-Modus} \\ \hat{=}\ \frac{\pi}{6} \\ \text{RAD-Modus}}}$$



Eigener Lösungsversuch.

Wertetabelle in C. Schreiben Sie ein C-Programm, das für $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ die Werte von $\sin(x)$ und $\underbrace{\arcsin(\sin(x))}_{x}$ ausgibt (Schrittweite 0,1).

Lösung. → Siehe C-Datei