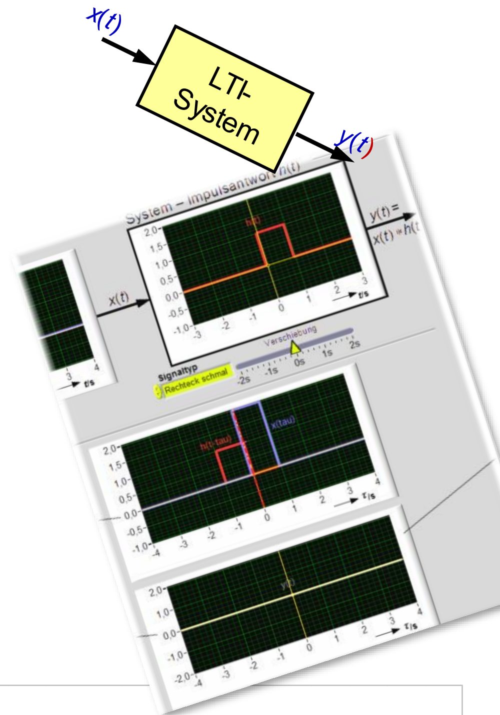
TGI – Kapitel 5:

Signale & Systeme im Zeitbereich

Inhalt dieses Kapitels:



Lernziele dieses Kapitels:

⇨ Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels wissen Sie, dass Ströme und Spannungen von Sensoren und Parameter zu Ansteuerung von Aktoren als *Signale* aufgefasst werden können.

⇨ Und Sie kennen die Beschreibung *linearer* und *zeitinvarianter* (LTI) Systeme, die *Eingangs-signale* zu *Ausgangssignalen* verarbeiten.

Taxonomie / Kompetenzart	Kennen	Können	Verstehen
Fach-kompetenz	Unterscheidung zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Signale bzgl. ihrer Eigenschaften und Ihrer Darstellung; Beschreibung *linearer* und *zeitinvarianter* (LTI) Systeme durch die Impulsantwort	Berechnung einfacher Faltungs-integrale mit aperiodischen und periodischen Signalen	
Methoden-kompetenz	Wichtigkeit von Achsenbeschriftung und -skalierung in Diagrammen;	„Grafische" Veranschaulichung des Faltungsintegrals mittels Papier und Folie	
Persönliche & soziale Kompetenz	Spätestens bis Weihnachten sollten Sie Ihren persönlichen Prüfungsvorbereitungsplan im Detail ausgearbeitet haben!	Auswahl passender ergänzender Literatur in der Hochschulbibliothek	

Motivation – *Wozu Signale & Systeme*?

■ *Systemtheorie*: Transformation von Eingangssignalen auf Ausgangssignale

Die *Systemtheorie* beschäftigt sich mit der Betrachtung veränderlicher, voneinander abhängiger Größen, sog. *Signale*. Diese Signale können physikalischer, biologischer oder auch ökonomischer Natur sein, sie können zeitveränderlich und/oder ortsveränderlich sein, kontinuierlich oder diskret.

Die Abhängigkeit zwischen den Signalen wird durch Systeme beschrieben, welches jeweils eines oder mehrere Eingangssignale in ein Ausgangssignal transformieren:

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine allgemeine Definition möglicher Signale, um dann die Auswirkungen eines sog. LTI(*Linear & Time-Invariant*)-Systems im Zeitbereich zu betrachten. Insbesondere wird die *Faltungs*operation beschrieben, welche das Eingangssignal mit der Impulsantwort des Systems verknüpft, um das Ausgangssignal zu ermitteln.

Später im Verlauf dieser Vorlesung werden dann Beschreibungen von Signalen und Systemen im *Frequenz*bereich behandelt, mittels *Fourierreihe* und *Fouriertransformation*.

■ Unterscheidung von Signalen

- … bzgl. der Einheit[1)] der Signalgröße, z.B.
  - ⇒ V (*Spannung*)
  - ⇒ Pa (*Druck*)
  - ⇒ m (*Auslenkung*)

- … bzgl. der Einheit[1)] und der Dimension der „Zeit“:
  - ⇒ *Zeitsignale* (1-dimensional)
  - ⇒ Ortssignale (1/2/3-dimensional)

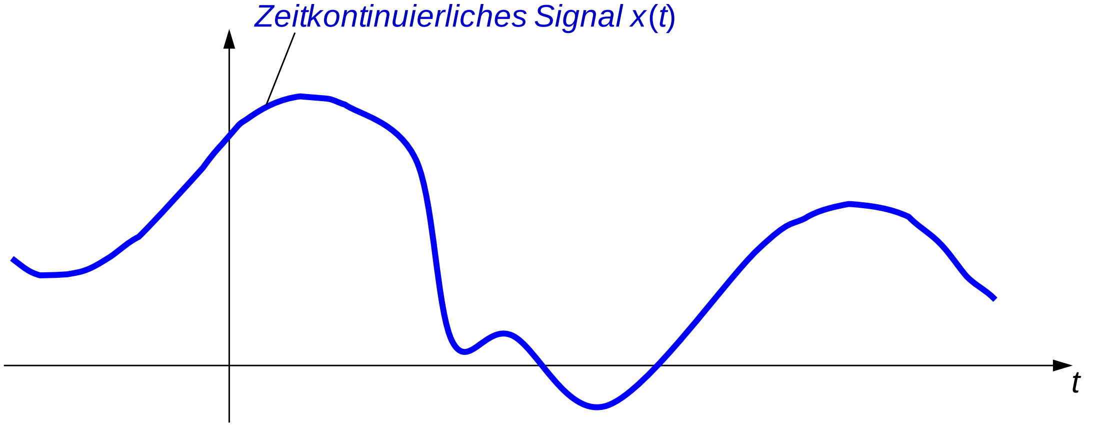
[1)] Im Rahmen dieser Veranstaltung werden wir uns überwiegend mit Zeitsignalen beschäftigen.
Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Signalgröße einheitslos betrachtet!

Digitalisierung von Signalen zur Verarbeitung am Rechner

Signalkategorien

Zur Weiterverarbeitung eines analogen Signals auf einem Rechner muss es digitalisiert werden. Neben der Abtastung (s. unten und Kap. 7) ist dazu zusätzlich eine Quantisierung (s. Kap.7) nötig. Üblicherweise folgt dann noch eine Codierung als Binärsignal.

Abtastung eines Signals



Demonstration **Bestimmung der Grundfrequenz Ihrer Stimme in einem digitalen Signal**

Starten Sie das **Programm `1_AudioSignal.exe`** und stellen Sie einen gesprochenen Vokal dar. Achten Sie dabei in den Soundkarteneinstellungen auf die Auswahl des Mikrofons als „Standardgerät“ und auf die korrekte Aufnahmeaussteuerung („Pegel“).

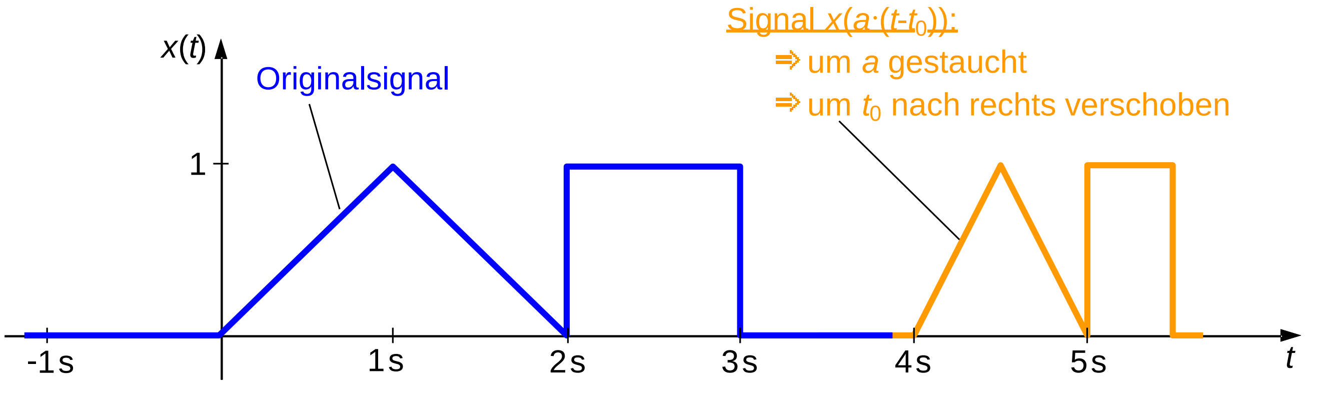
a) Woran erkennen Sie, dass es sich um ein abgetastetes Signal handelt?

b) Frieren Sie das aufgenommene Vokalsignal ein und bestimmen Sie die Abtastfrequenz.

c) Wie groß ist die Periodendauer des Signals?

Verschiebung und Maßstabsänderung von Signalen

- **Im Laufe dieser Veranstaltung werden wir oft manipulierte Signale betrachten:**



Beispiele

a) $x_1(t) = x(t + 2\text{ s})$

b) $x_2(t) = x(t - 1\text{ s})$

c) $x_3(t) = x(^t/_3)$

Übungen zur Verschiebung und Maßstabsänderung von Signalen

Beispiele (Fortsetzung von S. 4)

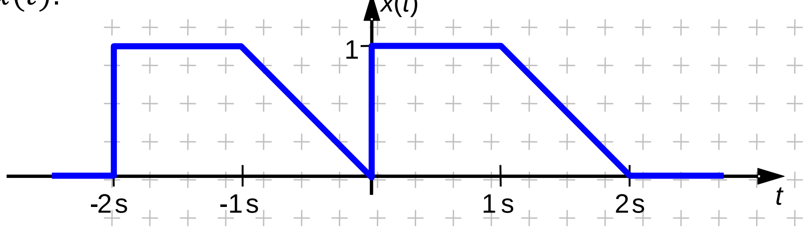
d) $x_4(t) = x(2t - 2\text{ s})$

Übungsaufgabe

a) $x_5(t) = x(t/2 - 1\text{ s})$

b) $x_6(t) = x(-t/2 + 1\text{ s})$

c) Gegeben sei das Signal $x(t)$:

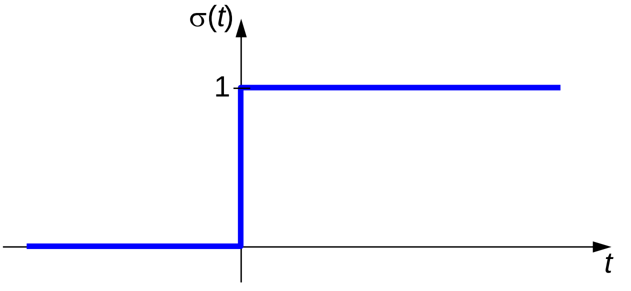


⇒ Skizzieren Sie $x(1\text{ s} - 2t)$

Spezielle Signale

Die Sprungfunktion:

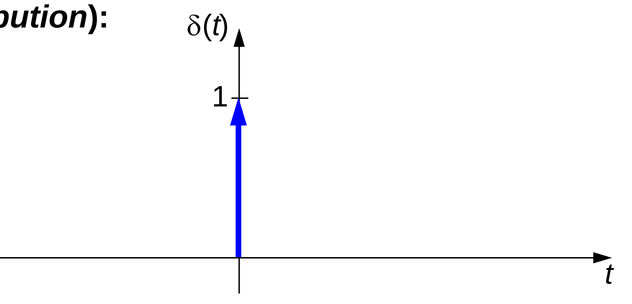
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



Die *Dirac*[1]'sche δ-Funktion (sog. *Distribution*):

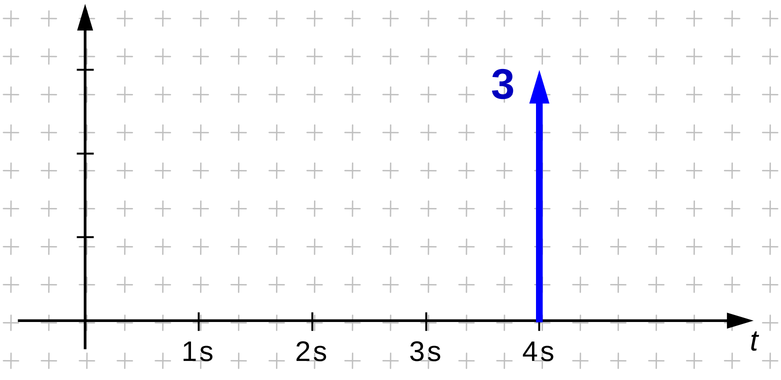
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot d\tau = 1$$



Beispiel **Aufgaben zum δ-Impuls**

a) Darstellung eines gewichteten, verschobenen δ-Impulses



b) $x(t) = \delta\left(\frac{t}{2}\right)$

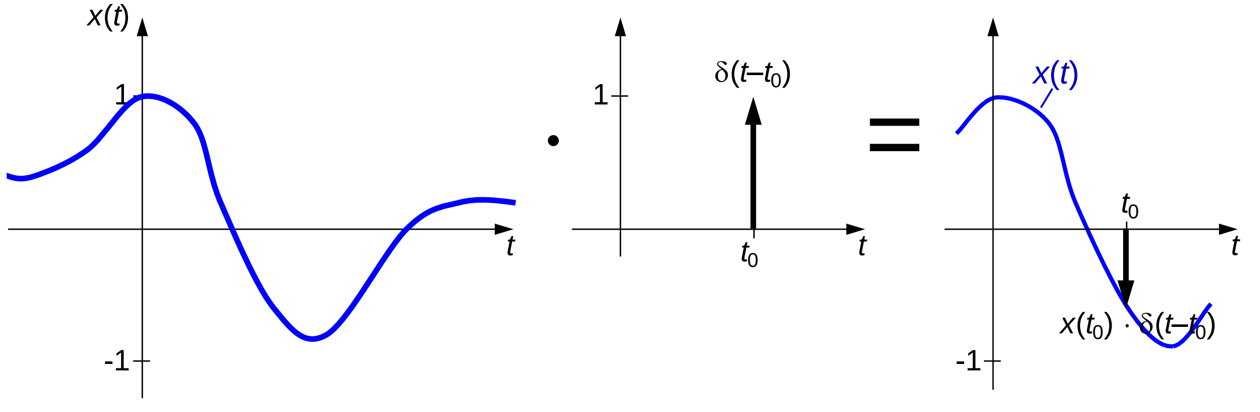
c) $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau + 1\,\mathrm{s}) \cdot d\tau$

[1] *Paul Adrien Maurice Dirac* (1902–1984), engl. Physiker

Die Ausblendeigenschaft des δ-Impulses

Multiplikation eines an die Stelle t_0 verschobenen δ-Impulses mit einem Signal

bewirkt eine Gewichtung des Impulses mit dem Signalwert an der Stelle $t = t_0$:



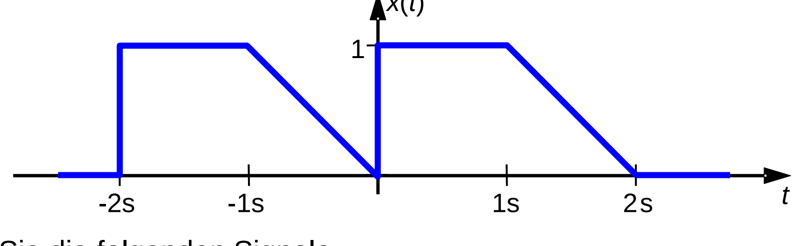
Beispiel **Multiplikation zweier δ-Impulse**

a) Skizzieren Sie das Signal $\delta(t + 1\text{s}) \cdot \delta(t - 1\text{s})$

b) Skizzieren Sie $\delta(t) \cdot \sigma(1\text{s} - t)$

Übungsaufgabe **Multiplikation eines Signals mit der Sprungfunktion und dem δ-Impuls**

Gegeben sei das Signal $x(t)$:



Skizzieren Sie die folgenden Signale

a) $x(t) \cdot [\sigma(t + 1\text{s}) - \sigma(t - 1\text{s})]$

b) $x(t) \cdot \delta(t - 1\text{s})$

c) $x(t/2) \cdot \delta(t + 1\text{s})$

Impulsdarstellung eines Signals

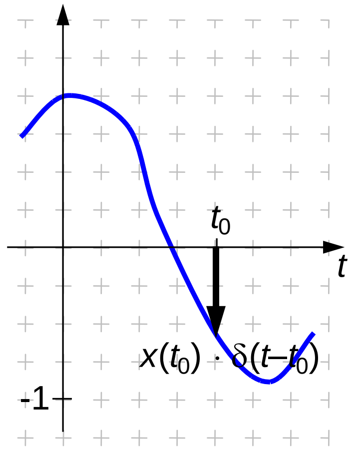
Darstellung eines Signalwertes mittels δ-Impuls

Mit

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

ergibt sich der Signalwert zum Zeitpunkt t_0 als Integral des gewichteten δ-Impulses:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) \cdot dt$$



Zusammensetzung eines Signals aus δ-Impulsen

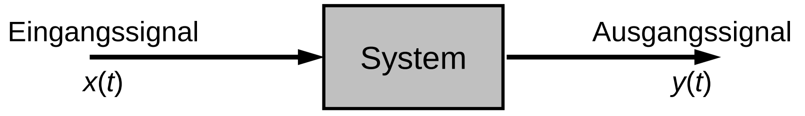
Somit lässt sich jedes beliebige Signal $x(t)$ darstellen als Integral über gewichtete δ-Impulse:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau}$$

Auf diese sog. *Impulsdarstellung* wird etwas später (Seite 11) bei der Einführung der Faltungsoperation zurückgegriffen.

Lineare, zeitinvariante (LTI-)Systeme

- **Ein Übertragungssystem transformiert ein Eingangssignal $x(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$:**



- <u>Mögliche Eigenschaften eines Übertragungssystems:</u>

1. Linearität:

Wenn gilt $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

und $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$,

dann gilt auch $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$.

2. Zeitinvarianz:

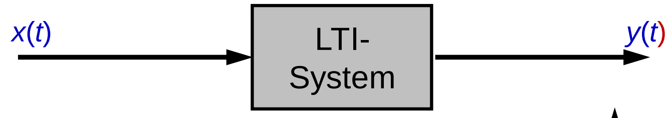
Wenn gilt $x(t) \longrightarrow y(t)$,

dann gilt auch $x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0)$.

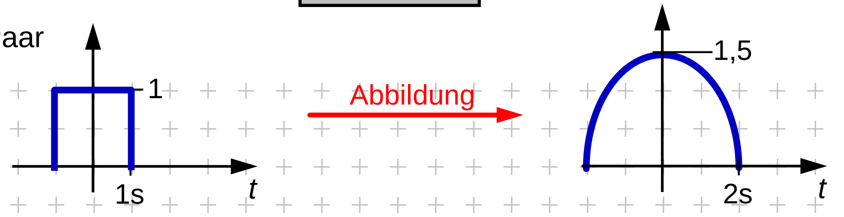
- LTI(*Linear and Time-Invariant*)-Systeme erfüllen beide dieser Bedingungen!
- Praktische Beispiele für Systeme, die sehr nah an das <u>LTI-Ideal</u> herankommen:
  - ⇒ Leitungen (z.B. für Stromversorgung, USB, Netzwerk)
  - ⇒ Audio-Verstärker (nicht übersteuert!)
  - ⇒ RC-Glied
  - ⇒ Frequenzweiche (z.B. im Lautsprecher)

LTI-Systeme – Superposition des Ausgangssignals

Beispiel LTI-System mit bekanntem Ein- und Ausgangssignal

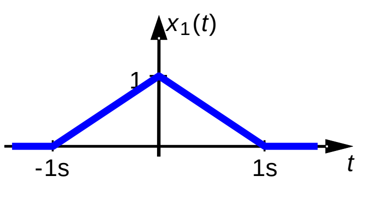


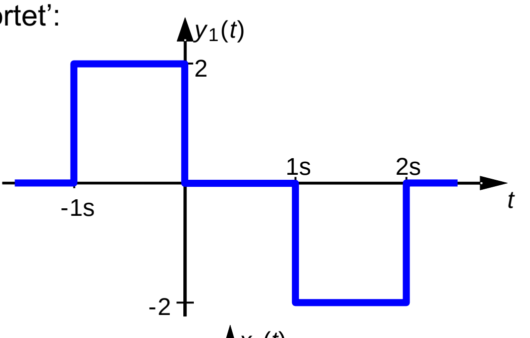
Annahme: Bekanntes Paar



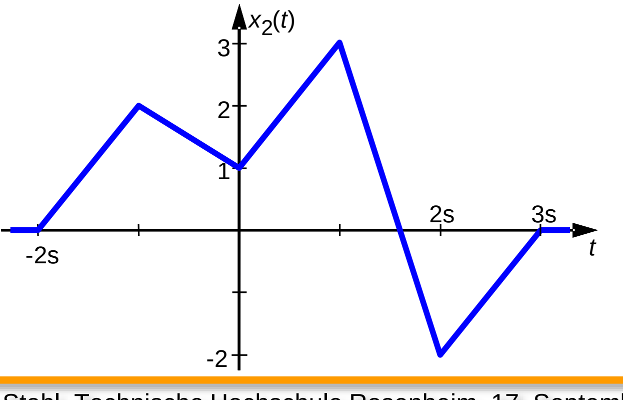
Übungsaufgabe LTI-System mit bekanntem Ein-und Ausgangssignal

Von einem LTI-System weiß man, dass es bei dem links dargestellten Eingangssignal $x_1(t)$ mit dem rechts dargestellten Ausgangssignal $y_1(t)$ ‚antwortet':





Das LTI-System wird nun mit dem Eingangssignal $x_2(t)$ beaufschlagt:

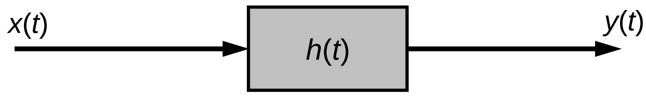


⇒ Bestimmen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y_2(t)$!

LTI-System: Signalverarbeitung durch Faltung mit der Impulsantwort

Wie lässt sich ein LTI-System allgemein beschreiben?

- Durch seine Impulsantwort h(t):



⇒ Die *Impulsantwort* beschreibt das Ausgangssignal des Systems, wenn es am Eingang mit dem δ-Impuls beaufschlagt wird.

> Da sich jedes beliebige Signal als Superposition gewichteter und verschobener δ-Impulse darstellen lässt (*Impulsdarstellung*), ergibt sich das Ausgangssignal als Superposition gewichteter und verschobener Impulsantworten!

Impulsdarstellung (siehe Seite 8):

Jedes Eingangssignal eines Systems ist als Superposition gewichteter und verschobener Impulse $\delta(t-\tau)$ darstellbar:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

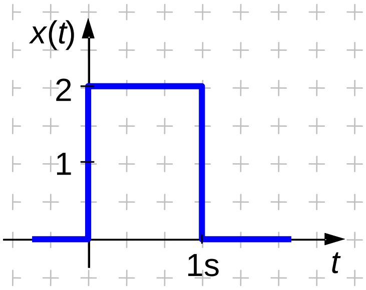
Faltung:

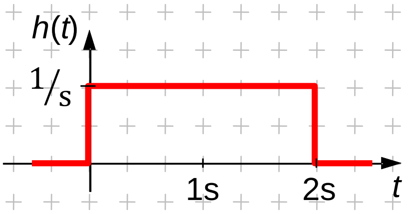
Das Ausgangssignal eines LTI-Systems ist als Superposition gewichteter und verschobener Impulsantworten $h(t-\tau)$ darstellbar :

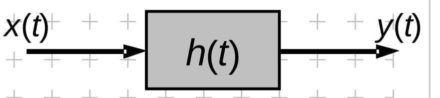
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Durchführung der Faltung

Beispiel **Faltung zweier Rechteck-Signale**







$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = ?$$

Fünf Schritte zur Faltung

1. Darstellung von $x(t)$ auf der τ-Achse: $\boldsymbol{x(t) \rightarrow x(\tau)}$
2. Spiegelung von $h(\tau)$: $\boldsymbol{h(\tau) \rightarrow h(-\tau)}$
3. Verschiebung um t auf der τ-Achse: $\boldsymbol{h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)}$
4. Berechnung des **Produktes** $\boldsymbol{x(\tau) \cdot h(t-\tau)}$ für alle t.
5. Berechnung des **Integrals über** $\boldsymbol{x(\tau) \cdot h(t-\tau)}$ für alle t.

Beispiele zur Faltung

Demonstration **Nachvollziehen aller Schritte im Detail…**

Rufen Sie das **Programm `2_Faltung.exe`** auf und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Versuchen Sie, das Beispiel oben zu reproduzieren, um das Ausgangssignal *y*(*t*) zu berechnen. Wo genau werden die „Fünf Schritte zur Faltung" jeweils durchgeführt?

b) Beschreiben Sie in Worten, was bei einer Verschiebung des Eingangssignals *x*(*t*) passiert.

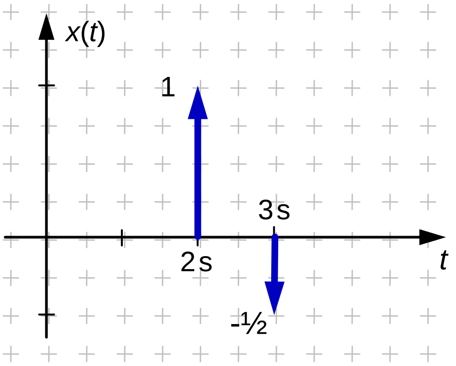
c) Beschreiben Sie in Worten, was bei einer Verschiebung der Impulsantwort *h*(*t*) passiert.

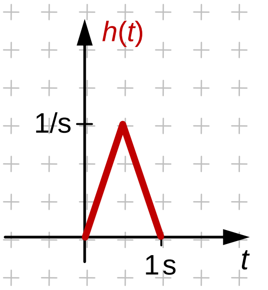
d) Stellen Sie eine allgemeingültige Regel auf, wie die Dauer des Ausgangssignals *y*(*t*) von der Dauer des Eingangssignals *x*(*t*) und der Impulsantwort *h*(*t*) abhängt!

e) Warum ergibt die Faltung der *periodischen Rechteckfunktion* mit dem *breiten Rechteck* Null?

Beispiel **Besonders einfach: Faltung eines Signals mit δ-Impulsen!**

Bestimmen Sie das Faltungsprodukt $x(t) * h(t)$ der folgenden Signale:

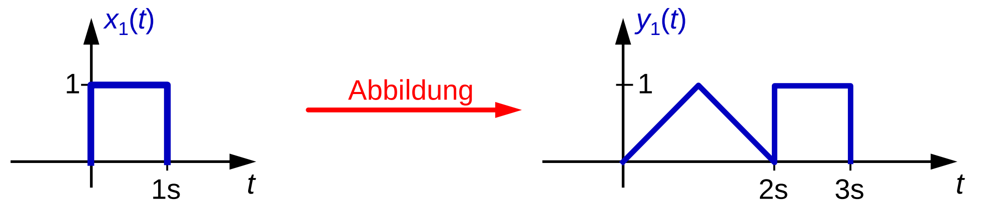




Übungen zur Faltung

Übungsaufgabe

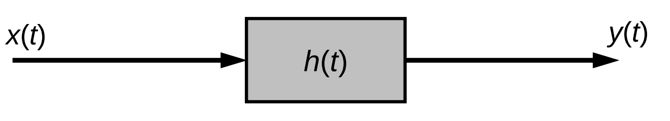
Gegeben sei ein LTI-System, dass auf das Signal $x_1(t)$ mit $y_1(t)$ antwortet:



⇒ Skizzieren Sie die Impulsantwort des Systems!

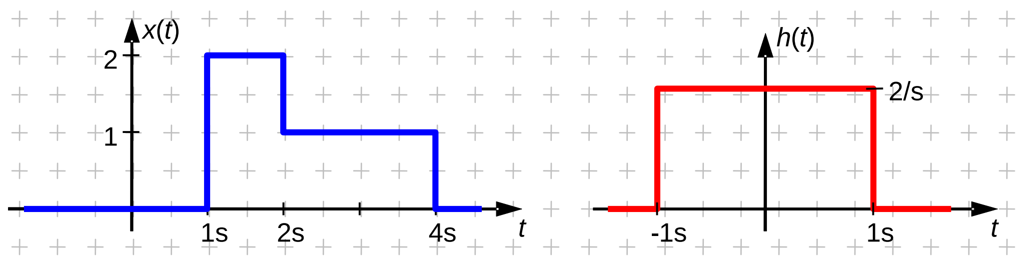
Übungsaufgabe

Am Eingang eines LTI-Systems (Impulsantwort $h(t)$) liegt das Eingangssignal $x(t)$:

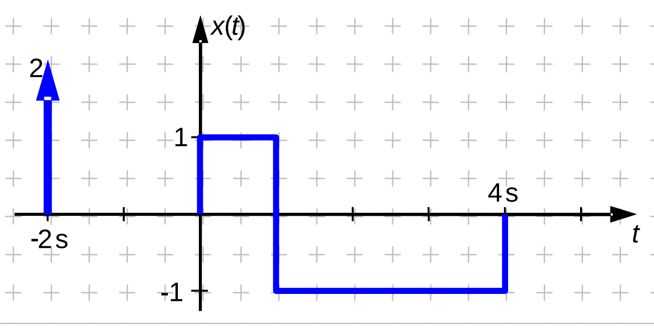


Bestimmen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$ für folgende zwei Fälle:

a)



b)



$h(t) = \sigma(t)$

Algebraische Eigenschaften der Faltung

1. Kommutativität:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

- Vertauschbarkeit von Eingangssignal und Impulsantwort

2. Assoziativität:

$$\boxed{y(t) = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}}$$

- Die Kaskadenschaltung von LTI-Systemen ist äquivalent einem einzigen LTI-System, dessen Impulsantwort gleich der Faltung der einzelnen Impulsantworten ist.

3. Distributivität:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}}$$

- Die Parallelschaltung von LTI-Systemen (zwei oder mehr) ist äquivalent einem einzigen LTI-System, dessen Impulsantwort gleich der Summe der einzelnen Impulsantworten ist.