3. Zufallsvariablen (ZV)

Lernziele:

- Sie haben einen Vorstellung von dem Begriff Zufallsvariable.
- Sie kennen die Eigenschaften und Unterschiede diskreter und stetiger Verteilungsfunktionen von ZVs.
- Sie können zu einer Dichtefunktion die Verteilungsfunktion einer ZV bestimmen und umgekehrt.
- Sie können mit Hilfe der Verteilungsfunktion Wahrscheinlichkeiten berechnen.
- Sie kennen die Bedeutung von Erwartungswert und Varianz einer ZV, auch in Zusammenhang mit der Chebyshev-Ungleichung.
- Sie verstehen die Bedeutung der Unabhängigkeit von ZVs.
- Sie wenden die Eigenschaften von Erwartungswerten und Varianzen auf transformierte ZVs und Summen von ZVs richtig an.

Literatur:

- Teschl Band 2, Kap. 27
- Arens et al., Kap 38.1 - 38.3
- Zucchini, Kap. 4

3.1 Zufallsvariable

Abbildung des "abstrakten" Ergebnisraums Ω auf $\mathbb{R}$.

Definition Zufallsvariable:

Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega) = x$ heißt Zufallsvariable (ZV).
$x \in \mathbb{R}$ heißt Realisation der ZV X.

- **Diskrete ZV:** $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$
  z. B. $X =$ "Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln"
- **Stetige ZV:** $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$
  z. B. $X =$ "Körpergröße eines Menschen"
- **Eindimensionale ZV:** $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- **Mehrdimensionale ZV:** $X : \Omega \to \mathbb{R}^p$
  z. B. $(X_1, X_2) =$ ("Anzahl der Jungen","Anzahl der Mädchen")

3.2 Verteilungsfunktion

Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für ein Ereignis B in $\mathbb{R}$ wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω:

$$P(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$$

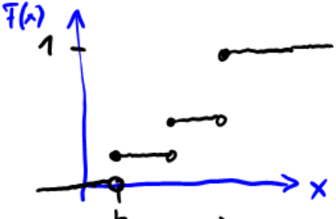
Definition Verteilungsfunktion:

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ einer ZV X definiert durch

$$F(x) = P(X \leq x)$$

kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:



- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- rechtsseitig stetig, d.h. $\lim\limits_{x \to b+} F(x) = F(b)$
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x)$ $\quad F(b) = P(X \leq b)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

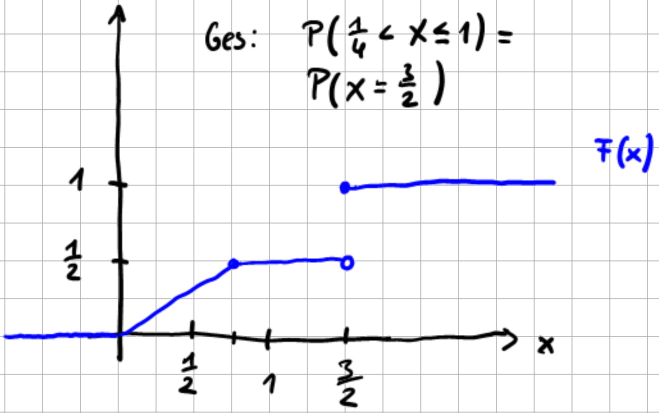
Beispiel:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{2}{3}x & , \quad 0 \le x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{3}{4} \le x < \frac{3}{2} \\ 1 & , \quad x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

rechtsseitig stetig ✓

Ges: $P(\frac{1}{4} < X \le 1) =$

$P(X = \frac{3}{2})$



Berechnen Sie $P\left(\frac{1}{4} < X \leq 1\right)$ und $P\left(X = \frac{3}{2}\right)$

$$P\left(\tfrac{1}{4} < X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(X = \tfrac{3}{2}\right) = P\left(X \leq \tfrac{3}{2}\right) - P\left(X < \tfrac{3}{2}\right) = F\left(\tfrac{3}{2}\right) - \lim_{x \to \frac{3}{2}-} F(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{(Sprunghöhe)}$$

$$P\left(X = \tfrac{1}{2}\right) = \underbrace{P\left(X \leq \tfrac{1}{2}\right)}_{= \lim_{x \to \frac{1}{2}+} F(x)} - \lim_{x \to \frac{1}{2}-} F(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

rechtsseitig stetig

(stetiger Über-gang)

3.2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{falls } x = x_i \in X(\Omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- $0 \leq p(x) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Es gilt:

- $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- $F(x)$ ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprüngen bei den Realisationen x_i.

Beispiele:

(1) X: "Anzahl der Richtigen im Lotto 6 aus 49"

Realisationen $x_i = i$ mit $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$

$$|\Omega| = \binom{49}{6}$$

$$p(0) = \frac{\binom{43}{6} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{49}{6}} \quad , \text{ allgemein: } p(i) = \frac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}} & , \text{ für } i \in \{0, 1, \dots, 6\} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

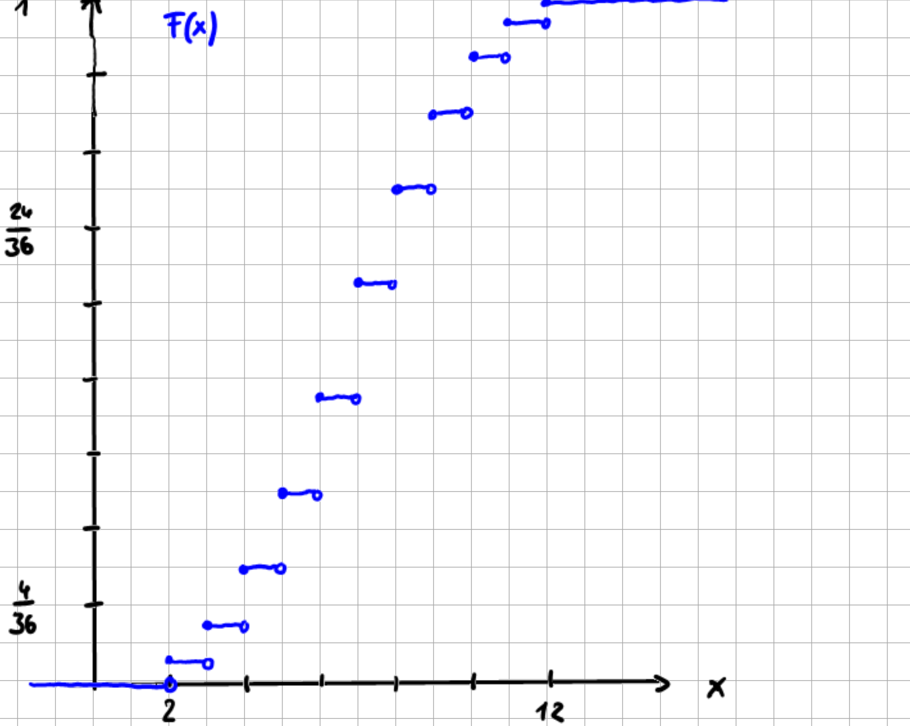
Berechne Wahrscheinlichkeit "mindestens 3 Richtige", "höchstens 2 Richtige"

mit Verteilungsfunktion

(2) X: "Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln"

Realisationen $x_i \in \{2, 3, \dots, 12\}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{für } x = 2 \lor x = 12 \\ \frac{2}{36}, & \text{für } x = 3 \lor x = 11 \\ \frac{3}{36}, & \text{für } x = 4 \lor x = 10 \\ \frac{4}{36}, & \text{für } x = 5 \lor x = 9 \\ \frac{5}{36}, & \text{für } x = 6 \lor x = 8 \\ \frac{6}{36}, & \text{für } x = 7 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



1
F(x)
24/36
4/36
2
12
x

3.2.2 Stetige Zufallsvariablen

Definition Wahrscheinlichkeitsdichte:

Für eine stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definiert durch

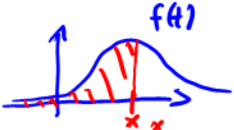
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$$

Verteilungsfunktion

$$= F(b) - F(a)$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte:

- $f(x) \geq 0$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ sicheres Ereignis



Es gilt:

- $F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ und $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

!

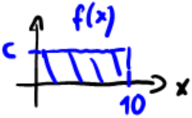
- $F(x)$ ist stetig und $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

Beispiel 3.2.2:
An einer Bushaltestelle fahren die Busse im 10 Minutentakt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss eine Person, die zu einem zufälligen Zeitpunkt an die Bushaltestelle kommt $x \in [0, 10[$ Minuten auf den nächsten Bus warten?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person zwischen 3 und 5 Minuten warten muss?

X : „Wartezeit an der Haltestelle“

Dichtefunktion $f(t) = \begin{cases} c, & \text{für } t \in [0;10[\\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ t: Zeit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 = \int_0^{10} c \; dt = [c \cdot t]_0^{10} = 10 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{10}$$



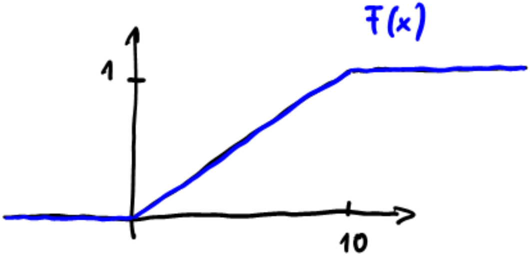
Ges.: $P(3 < x < 5) = \int_3^5 \frac{1}{10}\,dt = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Verteilungsfunktion:

$$P(3<x<5) = F(5)-F(3) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{1}{10}t\right]_0^x = \frac{1}{10}x & , \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

Merke: Die Verteilungsfunktion einer stetigen ZV ist <u>immer</u> stetig!



Bsp.: 3.2.3

Geg.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Bestimmen sie die zugehörige Verteilungsfkt. $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{2} \, dt = \left[\frac{1}{2} t\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2} x - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} & , -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Bsp. 3.2.4:

Geg.: Dichtefkt. $f(x) = \begin{cases} c\,(x^2-4), & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

einer stetigen ZV.

a) Für welches c handelt es sich um eine Dichtefunktion?

Bed.: $1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx = c\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$

$= c\underbrace{\left(\frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)\right)}_{-\frac{32}{3}} \implies c = -\frac{3}{32}$

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ -\frac{3}{32}\int_{-2}^{x}(t^2-4)\,dt \overset{*}{=} -\frac{3}{32}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)+\frac{1}{2} & , \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$* \quad -\frac{3}{32}\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{-2}^{x} = -\frac{3}{32}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right) - \underbrace{\left(-\frac{3}{32}\left(\underbrace{-\frac{8}{3}+8}_{\frac{16}{3}}\right)\right)}_{-\frac{1}{2}}$$

Was unterscheidet diskrete und stetige Zufallsvariablen?

Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{für Realisation } x_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

- Verteilungsfkt. $F(x)$ ist rechtsseitig stetige Treppenfkt.

Sprunghöhen:

$$P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x_i -} F(x) \neq 0$$

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$\overset{\text{i.a.}}{\neq} P(a \leq X \leq b)$ bzw. $P(a < X < b)$ bzw. $P(a \leq X < b)$

Stetige ZV

- Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

- Verteilungsfkt. $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x)$

$$P(X = x_i) = 0 \quad \text{(wegen Stetigkeit)}$$

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$= P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

$= P(a \leq X < b)$

3.3 Erwartungswert

Definition Erwartungswert:

Der Erwartungswert $E[X] = \mu$ einer ZV X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung. durchschnittlich zu erwartender Wert

$$\text{Für diskrete ZV:} \quad E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

$$\text{Für stetige ZV:} \quad E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele 3.3:

(1) Bei einem Gewinnspiel mit 2 Würfeln entspricht der Gewinn der maximal gewürfelten Augenzahl (von den 2 Würfeln). Jeder Spieler muss einen Einsatz d zahlen. Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist, d.h. der Einsatz dem zu erwartenden Gewinn entspricht?

$$x \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , x = 1 \\ \frac{3}{36} & , x = 2 \\ \frac{5}{36} & , x = 3 \\ \vdots & \\ \frac{11}{36} & , x = 6 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p(x_i)$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 6 \cdot \frac{11}{36}$$

$$= \frac{161}{36} \approx 4{,}5$$

Beispiele 3.3:

(2) Wie groß ist die durchschnittliche Wartezeit auf einen Bus, der im 10 Minutentakt fährt?

Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \le x \le 10 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{0}^{10} x \cdot \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = 5$$

Satz 3.1:

Sei $Y = g(X)$ eine Funktion der ZV X. Dann gilt

- für diskrete ZV: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x$

Eigenschaften des Erwartungswerts:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$ verschiebt Erwartungswert
- $E[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ "Linearität"

Beispiele 3.3:

(3) X sei die Ausfallzeit eines Rechners in einem Rechnernetz mit Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Wie hoch sind die durchschnittlich zu erwartenden Kosten $g(X) = X^3$ (in Hundert Euro) für einen Rechnerausfall?

Ges: $E[g(x)]$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx = \left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$(\hat{=}\ 25 \text{ Euro})$

Beispiele 3.3:

(4) Auf 20 verschiedene Prozessoren, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden, sollen $k = 10$ Stapelaufträge verteilt werden. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl verschiedener Prozessoren in der Auswahl.
Dabei ist die Anzahl Y verschiedener Prozessoren

$$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i \quad \text{mit } X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Prozessor } i \text{ mind. einmal ausgewählt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable

$$p(x_i) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{10}, & x_i = 1 \\ \left(\frac{19}{20}\right)^{10}, & x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow E[X_i] = 1 \cdot p(1) + 0 \cdot p(0)$$

Ges.: $E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{20} X_i\right] \overset{\text{Formel}}{=} \sum_{i=1}^{20} E[X_i] = 20 \cdot E[X_i]$

$$= 20 \cdot \left(1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right) \approx 8$$


Prozessor i
1/20
Auswahl
19/20
keine Auswahl
1/20
19/20
10-mal

3.4 Varianz und Kovarianz

Definition Varianz:

Die Varianz einer ZV X mit Erwartungswert μ ist ein quadratisches Streuungsmaß und ist definiert durch

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2].$$

Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension wie die ZV X.

Satz 3.2: Verschiebungssatz

$$\boxed{Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Eigenschaften der Varianz:

- $Var[b] = 0$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

Z-Transformation, Standardisierung:

Sei X eine ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann ist

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

die sog. standardisierte ZV mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Definition Kovarianz:

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])[(Y - E[Y])]$$

Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y. Je stärker diese korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz.
X, Y (stochastisch) unabhängig $\Longrightarrow Cov[X, Y] = 0$

Satz 3.3: Verschiebungssatz Kovarianz

$$\boxed{Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}$$

Eigenschaften der Kovarianz:

- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- $Cov[aX, Y] = a\, Cov[X, Y]$

Für die Varianz einer Summe von ZV gilt:

- $Var[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, X_j]$

  $Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov[X_1, X_2]$
- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig:

  $$\boxed{Var[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]}$$

Beispiel 3.4:

Ein Kommunikationssystem besteht aus 10 Komponenten, die unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ funktionieren. Bestimmen Sie die Varianz der ZV $Y =$ "Anzahl der funktionsfähigen Komponenten":

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad \text{mit}\, X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Komponente } i \text{ funktioniert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Übersicht: Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

- $E[aX+b] = aE[X]+b$
- $E[X_1+\cdots+X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$
- Falls X_1, X_2 unabhängig:

  $E[X_1X_2] = E[X_1]\cdot E[X_2]$

Varianz

- $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig:

  $Var[X_1+\cdots+X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$

3.5 Quantile

Definition p-Quantil:

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $0 < p < 1$.
Dann ist das p-Quantil definiert als der kleinste Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:

$$F(x_p) \geq p.$$

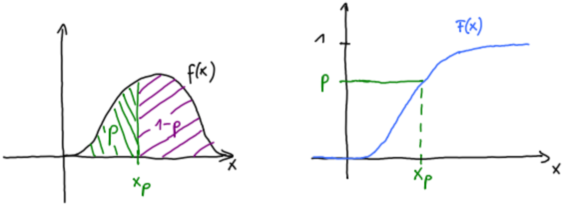


Abbildung: p-Quantil einer stetigen ZV mit **streng** monoton wachsendem $F(x)$:
$$x_p = F^{-1}(p)$$

Beispiel 3.5:
Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x, & 0 \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, & \cancel{0 \leq} \frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1, & \cancel{0 \leq} x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bestimmen Sie das 1., 2. und 3. Quartil.

3.6 Chebyshev-Ungl., schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz 3.4: Chebyshev-Ungleichung

Sei X eine ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt für eine beliebige reelle Zahl $k > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung und

$\mu = E[X_i] \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \Longrightarrow \quad \mu = E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = E[\bar{X}]$ folgt

Satz 3.5: Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$.
Dann gilt für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| > \epsilon\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

d.h. der MW $\bar{X}$ konvergiert stochastisch gegen den EW μ.