Teilbarkeit und Primzahlen

Teilbarkeit und Primzahlen – Teilbarkeit

Die Zahl 4 teilt 12, in Zeichen $4 \mid 12$, da $4 \cdot 3 = 12$.

Dieses Konzept definieren wir jetzt allgemein:

Def. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.

a heißt **Teiler** von b $:\Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a \cdot q = b$.

Man schreibt $a \mid b$.

$\boxed{\text{Ü}}$ a) $2 \mid 6$? ☒ Ja ☐ Nein, da $2 \cdot 3 = 6$

b) $-2 \mid 6$? ☒ Ja ☐ Nein, da $-2 \cdot -3 = 6$

c) $0 \mid 6$? ☐ Ja ☒ Nein, da $0 \cdot \quad \neq 6$

d) $3 \mid 0$? ☒ Ja ☐ Nein, da $3 \cdot 0 = 0$

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen Sie: $\forall a \in \mathbb{Z}: a \mid a$.

Sei a fest aber beliebig.

Dann gilt $a \cdot 1 = a$

Also existiert ein q mit $a \cdot q = a$ (nämlich 1)

also gilt $a \mid a$

Teilbarkeit und Primzahlen – Teilermenge

Die Menge aller Teiler von 6 ist $T(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

Dies definieren wir allgemein:

<u>Def.</u> Sei $a \in \mathbb{Z}$. $T(a) := \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid a\}$ heißt **Teilermenge** der Zahl a.

$\boxed{\text{Ü}}$ a) $T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

b) $T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$

c) $T(35) = \{1; 5; 7; 35\}$

d) $T(31) = \{1; 31\}$

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeigen Sie $|T(a)| \geq 2$. Hinweis: Gilt $1 \mid a$, $a \mid a$?

Teilbarkeit und Primzahlen – Primzahlen

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl ≥ 2, die keine Teiler außer 1 und sich selbst besitzt. Dies kann man auch so formulieren:

Def. Sei $n \in \mathbb{N}$.

n heißt **Primzahl** $:\Longleftrightarrow |T(n)| = 2$

Die Menge aller Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$.

Ü a) Geben Sie die ersten 10 Primzahlen an:

$\mathbb{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$

b) Ist 1 eine Primzahl? ☐ Ja ☒ Nein

da $T(1) = \{1\}$

c) 5 ist eine Primzahl, da $T(5) = \{1; 5\}$

Ü Zeigen Sie: $\forall a, b \in \mathbb{N}: a \mid b \Longleftrightarrow T(a) \subseteq T(b)$.

Seien a, b fest aber beliebig

zeige: $a \mid b \Rightarrow T(a) \subseteq T(b)$

Gelte $a \mid b$ zeige: $T(a) \subseteq T(b)$, das gilt gdw.

$\forall c \in \mathbb{N}.\ c \mid a \Rightarrow c \mid b$

Sei c fab mit $c \in T(a)$ $\quad c \mid a \wedge a \mid b \Rightarrow c \mid b \Rightarrow c \in T(b)$

Teilbarkeit und Primzahlen – Primfaktorzerlegung

Man kann eine natürliche Zahl > 1 in ihre Primfaktoren zerlegen, z. B. sind die **Primfaktorzerlegungen (PFZ)** von

- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
- $30 = 2^2 \cdot 5$
- $35 = 5 \cdot 7$
- $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$

Frage: Geht das immer und ist diese Zerlegung auch eindeutig? $\to$ Hauptsatz der elementaren Zahlenth.

Def. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ mit $\boxed{n = p_1 \cdots p_k}$.
Dieses Produkt heißt eine **PFZ** von n.

$\boxed{\text{Ü}}$ Bestimmen Sie die PFZ von 120.

$$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15$$
$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$