Stellenwertsysteme

Stellenwertsysteme – Dezimalsystem

Um die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu schreiben brauchen wir die Ziffern 0 – 9.

z. B. 1984

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
1	9	8	4

$$[1984] = (1984)_{10} = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$
$$= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Wir schreiben so!
(10 wegen Dezimalsystem!)

Allgemein haben wir eine Folge von n Ziffern:

$$(a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \cdot 10^i)$$

<u>Frage:</u> Wie addieren wir solche Zahlen?

$$(a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} + (b_{n-1} \dots b_2 b_1 b_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 10^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \cdot 10^i + b_i \cdot 10^i) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) \cdot 10^i$$

Stellenwertsysteme – beliebige Basis

<u>Idee:</u> Anstatt der Basis 10 im Dezimalsystem betrachten wir eine beliebige Basis $g \in \mathbb{N}$ (**g-adisches System**).

<u>Bspe.</u>

Dezimalsystem: $g = 10$, Ziffern 0–9, z.B. $(1984)_{10} = 1984$

Oktalsystem: $g = 8$, Ziffern 0–7,

z.B. $(147)_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$

Hexadezimalsystem: $g = 16$, Ziffern 0–9, A, B, C, D, E, F,

z.B. $(AFFE)_{16} = A \cdot 16^3 + F \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + E \cdot 16^0$

0x FF12A4E3 =

Binärsystem: $g = 2$, Ziffern 0, 1 (Bits = <u>bi</u>nary digi<u>ts</u>)

z.B. $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^1 = 11$

$\boxed{Ü}$ Schreiben Sie 13 und 17 in der Binärdarstellung und addieren Sie binär.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 10001 \\ \hline 11110 \end{array}$$

$2 + 4 + 8 + 16 = 30$

$13 + 17 = 30$

Stellenwertsysteme – Hornerschema

Ü Stellen Sie 197 im 4er-System dar.

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0
	3	0	1	1

$(3011)_4$

Algorithmus (wiederholte Division mit Rest / **Hornerschema**):

$$197 = 49 \cdot 4 + 1$$
$$49 = 12 \cdot 4 + 1$$
$$12 = 3 \cdot 4 + 0$$
$$3 = 0 \cdot 4 + 3$$

$$197 = 49 \cdot 4 + 1$$
$$197 = (12 \cdot 4 + 1) \cdot 4 + 1$$
$$197 = ((3 \cdot 4 + 0) \cdot 4 + 1) \cdot 4 + 1$$
$$= (3 \cdot 4 + 0)\, 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$
$$= 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

Hornerschema allgemein:

$$(a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_g = a_4 \cdot g^4 + a_3 + g^3 + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g^1 + a_0$$
$$= (a_4 \cdot g^3 + a_3 \cdot g^2 + a_2 \cdot g + a_1) \cdot g + a_0$$
$$= ((a_4 \cdot g^2 + a_3 \cdot g^1 + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0$$
$$= (((a_4 \cdot g + a_3) \cdot g + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0$$