## 5. Übungsblatt zur Vorlesung "Stochastik und Numerik"

## Aufgabe 5.1 (Prüfungsaufgabe)

Sei X eine stetige Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2), & 2 \le x \le 3\\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie *c* und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

Im Folgenden sei c = 2.

- b) Berechnen Sie P(2.1 < X < 2.8).
- c) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und den Median von X.

## **Aufgabe 5.2** (Stetige Verteilung und Quantil-Funktion)

Sei *X* eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

- a) Bestimmen Sie die zugehörige Dichte f(x).
- b) Stellen Sie die *F*(*x* grafisch dar und überzeugen Sie sich davon, dass *F* streng monoton und damit umkehrbar ist.
- c) Ermitteln Sie mit der Umkehrfunktion $F^{-1}(p)$  einen Ausdruck für das p-Quantil  $x_p$  und berechnen Sie das 1., 2. und 3. Quartil der Verteilung.

## **Aufgabe 5.3** (Erwartungswert einer transformierten Zufallsvariable)

Die Grünphase (einschließlich Blinkphase) einer Fußgängerampel beträgt 25 Sekunden, die Rotphase 65 Sekunden. Sie kommen zu einem zufälligen Zeitpunkt an die Ampel. X sei die Ankunftszeit und Y = g(X) die Wartezeit an der Ampel.

Wie lange warten Sie im Mittel, wenn Ihre Ankunft an der Ampel rein zufällig innerhalb eines Intervalls von 90 Sekunden bestehend aus Grün- und Rotphase erfolgt?

**Aufgabe 5.4** (Alternative Formeln zur Berechnung der Varianz und Kovarianz)

Beweisen Sie die folgenden Formeln für Zufallsvariablen X und Y:

a) 
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

b) 
$$Cov[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$