$I = \int_0^2 e^x \mathrm{d}x$ soll näherungsweise mit der Trapez-Regel T_n berechnet werden.

Geben Sie die Anzahl der Punkte $n+1$ an, die benötigt wird, damit der Fehler $|I - T_n| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ 315 ✓
- ○ 192
- ○ 545
- ○ 1089

$$|I - T_n| \leq (b-a) \cdot \frac{h^2}{12} \cdot \max_{0 \leq x \leq 2} |f''(x)| \qquad h^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$\max_{0 \leq x \leq 2} |f''(x)| = e^2$$

$f(x) = e^x$

Hier: $b - a = 2$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$|I - T_n| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{n^2} \cdot e^2 \overset{!}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

Auflösen nach n: $\frac{4}{3} e^2 \cdot 10^4 \leq n^2 \implies n \geq \frac{2}{\sqrt{3}} e \cdot 10^2 \approx 314$

$\implies n+1 = 315$

$I = \int_0^2 e^x \mathrm{d}x$ soll näherungsweise mit der Simpson-Regel S_n berechnet werden.

Geben Sie die Anzahl der Punkte $2n+1$ an, die benötigt wird, damit der Fehler $|I - S_n| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ 7
- ○ 25
- ○ 15 ✓
- ○ 50

$$|I - S_n| \leq (b-a) \cdot \frac{h^4}{180} \max_{0 \leq x \leq 2} |f''(x)|$$

Hier: $(b-a) = 2$

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 2} |f''(x)| = e^2$$

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot e^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

$$\iff n^4 \geq \frac{1}{45} \cdot e^2 \cdot 10^4 \implies n \geq \sqrt[4]{\frac{e^2}{45}} \cdot 10 \approx 7$$

$\implies 2n+1 = 15$ Punkte bzw. 14 Intervalle

Berechnen Sie $\int_0^{0.8} e^{-x} \mathrm{d}x$ mit der Simpson-Regel für $n = 2$. Bei Rechnung mit 6-stelliger Genauigkeit lautet das Ergebnis:

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ 1.10135
- ○ 0.275338
- ◉ 0.550676

$$S_2 = \underbrace{\frac{(b-a)}{2n}}_{=0.2} \cdot \frac{1}{3}\left(e^0 + 4 \cdot e^{-0.2} + 2\,e^{-0.4} + 4 \cdot e^{-0.6} + e^{-0.8}\right)$$

$$= 0.2 \cdot \frac{1}{3}\left(1 + 4 \cdot 0.818730 + 2 \cdot 0.670320 + 4 \cdot 0.548812 + 0.449329\right)$$