DETERMINANTE

Fragen?

Anzahl Unterdeterminanten? bei der Berechnung mit Laplace'schen Entwicklungssatz:

3 Stück!

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{5 \cdot |9| - 8 \cdot |6|} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2 Stück

*** Determinanten-Formeln.** Wie lauten die Formeln zur Berechnung der Determinante folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

d) $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Lösung.

a) $\det\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$

b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ (Sarrus)

d) $\boxed{\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \quad \& \quad a)}$

rekursiv nach Größe von A

Laplace'sche Entw. nach 1. Zeile

Vorzeichen mit „Schachbrett“

Streichungsmatrix $\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$
1. Zeile, j. Spalte gestrichen

Eigener Lösungsversuch.

a) $\det\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} =$

b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

d) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} =$

Notation: $|A| = \det(A)$

Berechnen von Determinanten.

a) $\det(5) = 5$

b) $\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = 1\cdot4 - 2\cdot3 = -2$

c) $\det\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1&0\\3&1\\4&2\end{matrix} = 1+0+12-8-0-0 = 5$

0 ist gut!

suche Zeile/Spalte mit vielen 0

d) $\begin{vmatrix}3&0&1&0\\2&1&0&3\\-4&2&1&6\\4&0&2&-1\end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{+}\cdot3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&6\\0&2&-1\end{vmatrix}}_{\text{Sarrus}} + \cancel{\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}2&0&3\\-4&1&6\\4&2&-1\end{vmatrix}} + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{+}\cdot1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&1&3\\-4&2&6\\4&0&-1\end{vmatrix}}_{\text{Sarrus}} + \cancel{\underbrace{(-1)^{1+4}}_{-}\cdot0\cdot|\dots|}$

$= -11$

Entw. 4. Spalte

e) $\begin{vmatrix}1&0&2&0&1\\3&1&0&0&1\\0&1&2&1&0\\1&2&2&0&3\\3&1&0&0&1\end{vmatrix} = -0\cdot\ldots+0\cdot\ldots-1\cdot\begin{vmatrix}1&0&2&1\\3&1&0&1\\1&2&2&3\\3&1&0&1\end{vmatrix}+0\ldots-0\ldots = -\Big[+2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&3\\3&1&1\end{vmatrix}}_{=0}+2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&1\\3&1&1\end{vmatrix}}_{=0}\Big] = 0$

ODER: 2. & 5. Zeile gleich $\Rightarrow \det(A)=0$.

f) $\begin{vmatrix}1&2&3&4&5&6\\0&7&8&9&10&11\\0&0&2&3&4&5\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&5\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}7&8&9&10&11\\0&2&3&4&5\\0&0&2&1&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&5\end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot\begin{vmatrix}2&3&4&5\\0&2&1&0\\0&0&1&2\\0&0&0&5\end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&5\end{vmatrix}}_{\text{Sarrus}} =$ Produkt über Diagonale!

$= 2\cdot1\cdot5$

obere Δ-Matrix

g) $\begin{vmatrix}1&1&2&3\\4&5&6&7\\2&2&4&6\\7&3&1&2\end{vmatrix} \overset{\text{III}-2\cdot\text{I}}{=} \begin{vmatrix}1&1&2&3\\4&5&6&7\\0&0&0&0\\7&3&1&2\end{vmatrix} = 0$ Entw. 3. Zeile

h) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&4&15&2\\3&1&9&1\\1&0&3&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&0&4\\5&4&0&2\\3&1&0&1\\1&0&0&2\end{vmatrix} = 0.$ Entw. 3. Spalte

III − 3·I

keine/wenige 0 ☹ $\longrightarrow$ Zeilen-/Spaltenumformungen:

- Vertauschen: Faktor (-1)
- Zeile/Spalte $\cdot\,\lambda\neq0$: Faktor $\frac{1}{\lambda}$
- λ-fache einer Zeile/Spalte auf Zeile/Spalte addieren: kein Faktor

Eigener Lösungsversuch.

a) $\det \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} =$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$

c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 15 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

Determinante in Java. Programmieren Sie eine rekursive Funktion `public static double det(double[][] m)`, die die Determinante einer Matrix berechnet (Algorithmus "Entwicklung nach der ersten Zeile"). Schreiben Sie ggf. Hilfsmethoden für die Berechnung und Ausgabe auf die Konsole.

Lösung. siehe Java-Klasse bzw. Blog auf bigdev.de!