Relationen

Relationen – Intro

Sie kennen bereits mehrere Relationen, ohne es zu wissen:

- „Kleiner"-Relation, z.B. $3 < 5$
- „Teilt"-Relation, z.B. $2 \mid 6$
- „Gleich"-Relation, z.B. $3 = 3$
- „Kongruenz"-Relation, z.B. $16 \equiv 4 \mod 12$

Zur Definition einer Relation brauchen wir das **Kreuzprodukt / kartesische Produkt** zweier Mengen:

$A = \{0; 1; 2\}$

$B = \{s; t\}$

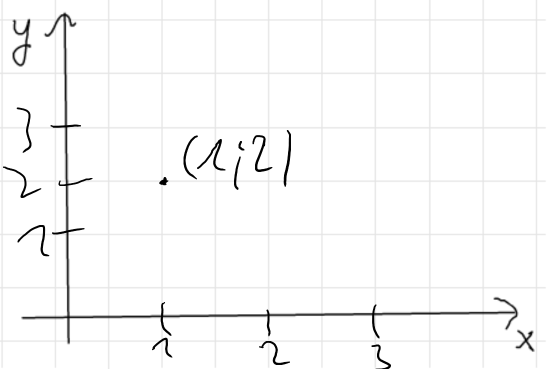
Tupel oder Paare

$\mathbf{A \times B} = \{(0;s), (0;t), (1;s), (1;t), (2;s), (2;t)\}$

Alternative Schreibweise:

A \ B	s	t
0	(0;s)	(0;t)
1	(1;s)	(1;t)
2	(2;s)	(2;t)

Bsp. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt im kartesischen Koordinatensystem:



Relationen – Definition

Def. Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge $\boxed{R \subseteq A \times B}$ des kartesischen Produkts $A \times B$ heißt **Relation** zwischen A und B.

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Relation **auf A**.

Wenn $a \in A$, $b \in B$ mit $(a,b) \in R \subseteq A \times B$, dann **steht a in Relation zu b.**

Alternative Schreibweisen:

$\boxed{\text{Ü}}$ Geben Sie $R \subseteq A \times A$ an, das die

a) „Kleiner"-Relation

b) „Gleich"-Relation

c) „Kleinergleich"-Relation

auf $A = \{0, 1, 2\}$ beschreibt.

a) $R_{<} = \{(0;1)(1;2)(0;2)\}$

$0 < 1;\ 1 < 2;\ 0 < 2$

b) $R_{=} = \{(0;0)(1;1)(2;2)\}$

c) $R_{=} \cup R_{<}$

Relationen - Eigenschaften

Def. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

1. **reflexiv** $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in A.\ a \sim a$; $\forall a \in A. (a;a) \in R$
2. **irreflexiv** $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in A. \neg(a \sim a)$; $\forall a \in A. \neg(a;a) \in R$
3. **symmetrisch** $:\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in A.\ a \sim b \Rightarrow b \sim a$
4. **asymmetrisch** $:\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in A.\ a \sim b \Rightarrow \neg(b \sim a)$
5. **antisymmetrisch** $:\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in A.\ a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$
6. **transitiv** $:\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c \in A.\ a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Bspe.

$\boxed{\text{Ü}}$ Sei A die Menge aller Studenten in einem Hörsaal und $R \subseteq A \times A$ die Relation „x sitzt in der gleichen Reihe wie y". Diskutieren Sie die Eigenschaften dieser Relation.

<u>Def.</u> Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

a) **Äquivalenzrelation** $:\Longleftrightarrow$ R ist i) reflexiv

ii) symmetrisch

iii) transitiv

b) **Ordnungsrelation** $:\Longleftrightarrow$ R ist i) reflexiv

ii) antisymmetrisch

iii) transitiv