

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastik und Numerik“

Aufgabe 12.1 (Verständnisfragen)

Wahr oder Falsch?

- (a) Die Gewichte einer Quadraturformel sind immer positiv.
- (b) Die Newton-Cotes-Formeln basieren auf Interpolationspolynomen nach dem Ansatz von Newton.
- (c) Die Simpson-Regel liefert immer exakte Werte für $\int_a^b f(x) dx$, wenn $f(x)$ ein Polynom vom Grad ≤ 3 ist.
- (d) Wenn eine Quadraturformel der Ordnung 2 verwendet wird, dann wird ein Polynom 2. Grades exakt integriert

Aufgabe 12.2 Berechnen Sie eine Näherung von

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

mit der Simpson-Regel. Wie groß ist der absolute Fehler?

Aufgabe 12.3 Berechnen Sie Näherungen von

$$\int_0^4 \frac{x}{1+x} dx$$

mit der Summenformel für die Trapezregel für $n = 2$ und $n = 4$. Wie groß ist jeweils der absolute Fehler?

Aufgabe 12.4 Bestimmen Sie einen Näherungswert zu den Integralen

(a) $\int_{-1}^1 \cos x \, dx$

(b) $\int_{-1}^1 (3x^2 - 2e^x - 5) \, dx$

unter Verwendung der Trapezregel, der Summenformel für die Trapezregel für $n = 4$ und der Simpsonregel.

Bestimmen Sie den exakten Wert der Integrale sowie den jeweiligen absoluten Fehler.

Aufgabe 12.5 Bestimmen Sie die Ordnung der Quadraturformel

$$\int_0^1 f(t) \, dt \approx \frac{1}{4} \left(3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) \right)$$