9. Interpolation

Lernziele:

- Sie verstehen am Beispiel der Polynominterpolation, dass unterschiedliche Darstellungen zu numerischen Verfahren mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen führen.
- Sie sind in der Lage sich - abhängig von der Problemstellung - für das numerisch günstigste Interpolationsverfahren zu entscheiden.
- Sie kennen die Grenzen der Polynominterpolation und alternative Lösungsansätze.
- Sie verstehen die Idee der Spline-Interpolation.

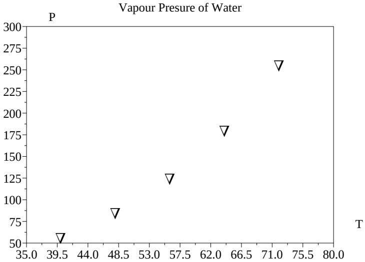
Literatur:

- Huckle T., Schneider S.: Numerische Methoden, Kap. 14
- Chapra S. C.: Applied Numerical Methods with Matlab, Chap. 17.1.2, 17.2, 17.5.2

9.1 Problemstellung

Beispiel: Messwerte

T	P
40	55.3
48	83.7
56	123.8
64	179.2
72	254.5



- Ermittlung von Zwischenwerten
- Plot einer glatten Kurve durch diskrete Punkte
- Differentiation bzw. Integration von Tabellenwerten
- Ersatz einer schwer behandelbaren Funktion durch eine einfachere

Interpolationsproblem

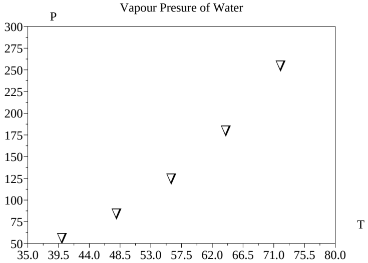
Bestimmen Sie zu gegebenen Punkten (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, eine Funktion G (diese ist nicht eindeutig!), so dass

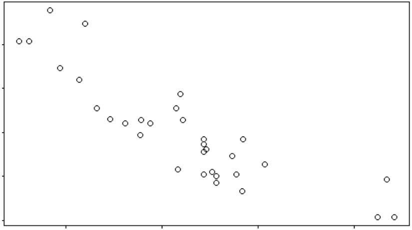
$$G(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Interpolation vs. Approximation

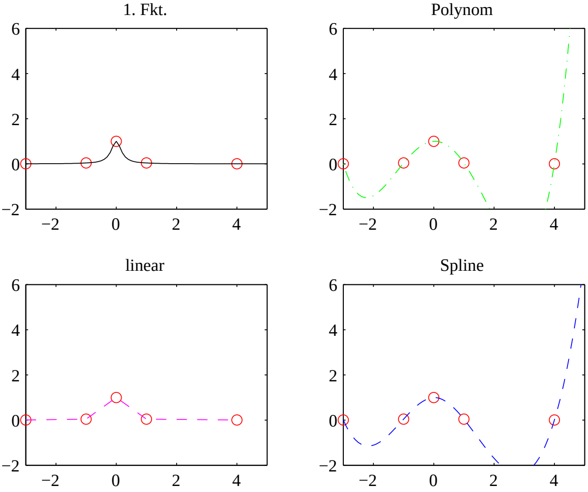
Interpolation ist nicht geeignet für verrauschte Daten.

In diesem Fall: Least squares Approximation durch eine Funktion, die den Trend der Daten beschreibt.





Wahl der Funktionsklasse



Häufig verwendete Funktionsklassen:

- Polynome
- Stückweise zusammengesetzte Polynome (Splines)
- Trigonometrische Funktionen

9.2 Polynominterpolation
9.2.1 Klassischer Ansatz / Vandermonde Ansatz

Unterschiedliche Darstellungen (bzgl. unterschiedlicher Polynombasen) für ein Interpolationspolynom $G(x) = p_n(x)$ vom Grad n haben unterschiedliche Eigenschaften bei der numerischen Berechnung.

Monombasis: $1, x, x^2, x^3, \ldots$

$$\boxed{p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}$$

n+1 unbekannte Koeff.

Ziel: Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so, dass

$$p_n(x_i) = y_i = a_n x_i^n + \cdots + a_1 x_i + a_0$$

für $i = 0, \ldots, n$.

Interpolationsbedingungen:

Um die $n+1$ unbekannten Koeff. $a_0, a_1, \dots, a_n$ zu bestimmen benötigt man ein GS mit $n+1$ Gleichungen

(I) $y_0 = a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0$ (Einsetzen von (x_0, y_0) in Ansatzfunkt.)

$\vdots$

(n) $y_n = a_n x_n^n + \dots + a_1 x_n + a_0$

Beispiel: Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die Punkte $(0|1)$, $(\frac{2}{3}|\frac{1}{2})$, $(1|0)$

Ansatzfkt.: $p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

∇ Polynom vom Grad n ist durch n+1 Punkte eindeutig bestimmt.

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + a_0 = 1 \\
&(\mathrm{II}) \quad \tfrac{4}{9} a_2 + \tfrac{2}{3} a_1 + a_0 = \tfrac{1}{2} \\
&(\mathrm{III}) \quad 1 a_2 + 1 \cdot a_1 + a_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc} x_i^2 & x_i & \\ \end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}
$$

Lösung:

$a_0 = 1$

$a_1 = -\frac{1}{4}$

$a_2 = -\frac{3}{4}$

$p_2(x) = -\frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{4} x + 1$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix ist die sog. **Vandermonde Matrix**.

Eigenschaften:

- Die Vandermonde Matrix ist nicht singulär (falls alle x_i verschieden).
- Rechenaufwand für Lösung des LGS ist hoch: $\mathcal{O}(n^3)$ flops
- Die Vandermonde Matrix ist für große n **sehr schlecht konditioniert** und ist deshalb als allgemeiner Ansatz nicht geeignet.

Beispiel 9.2.1: Stellen Sie das klassische Interpolationspolynom durch folgende Stützpunkte auf.

i	0	1	2
x_i	-2	3	1
y_i	-15	-5	3

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overset{=x_0^2}{4} & \overset{=x_0}{-2} & 1 \\ 9^{=x_1^2} & 3^{=x_1} & 1 \\ 1^{=x_2^2} & 1^{=x_2} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_i^2 & x_i & 1 \end{matrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

9.2.2 Ansatz nach Lagrange

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

z. B. $p_n(x_0) = y_0 \cdot \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \cdot \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + \ldots + y_n \underbrace{L_n(x_0)}_{=0} \overset{!}{=} y_0$

Basis: Lagrangefunktionen $L_k(x)$ mit $L_k(x_k) = 1$ und $L_k(x_j) = 0$ für $j \neq k$

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{x-x_0}{x_k-x_0} \cdots \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \cdots \frac{x-x_n}{x_k-x_n}$$

Polynome vom Grad n

Jede Basisfunktion $L_k(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Bemerkungen:

- Eleganter Ansatz; findet Anwendung bei der Numerischen Integration
- Aber Rechenaufwand für Lagrangefunktionen hoch: $\mathcal{O}((n+1)^2)$
- Nachteil: Bei Hinzunahme weiterer Stützpunkte müssen Lagrangefunktionen neu berechnet werden.

Beispiel von oben: $(x_0, y_0) = (0,1)$

$(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$

$(x_2, y_2) = (1, 0)$

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$p_2(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x)$$

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - \frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x - 1}{-1}$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x - 1) \qquad L_0(x_0) = 1 \checkmark$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{x - 1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{2} x (x - 1)$$

$$\checkmark \quad 1 = L_1\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x \cdot \frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Beispiel 9.2.2: Stellen Sie das Interpolationspolynom nach Lagrange durch folgende Stützpunkte auf.

i	0	1	2
x_i	-2	3	1
y_i	-15	-5	3

$$L_0(x) = \frac{1}{15}(x-3)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{10}(x+2)(x-1) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+2}{5} \cdot \frac{x-1}{2}$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{6}(x+2)(x-3)$$

$$p_2(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) = -(x-3)(x-1) - \frac{1}{2}(x+2)(x-1) - \frac{1}{2}(x+2)(x-3)$$

nach Vereinfachung: $p_2(x) = -2x^2 + 4x + 1$ (s. Bsp. 9.2.1)

Wenn ein $\boxed{\begin{matrix}\text{LGS}\\ Ax=b\end{matrix}}$ eindeutig lösbar ist, dann ...

A. ist es <u>immer</u> gut konditioniert.

✓ B. hängt es <u>nur</u> von A ab, ob es gut konditioniert ist.

C. hängt es von A <u>und</u> b ab, ob es gut konditioniert ist.

D. keine Ahnung, welche der Antworten richtig ist.

Die Hinzunahme eines weiteren Stützpunktes bei einem Interpolationsproblem ...

A. ist beim klassischen Ansatz ohne großen Aufwand möglich.

B. ist beim Ansatz nach Lagrange ohne großen Aufwand möglich.

C. ist bei beiden Verfahren ohne großen Aufwand möglich.

√ D. ist bei keinem der beiden Verfahren ohne großen Aufwand möglich.

9.2.3 Ansatz nach Newton

Ziel: Darstellung des Interpolanten, die auf ein gestaffeltes LGS führt und einfache Hinzunahme weiterer Punkte erlaubt

$n = 1 : p_0(x) = y_0 = c_0$ interpoliert (x_0, y_0)

$n = 2 : p_1(x) = p_0(x) + c_1(x - x_0)$ interpoliert (x_0, y_0), (x_1, y_1)

$n = 3 : p_2(x) = p_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$ interpoliert $(x_0, y_0), \ldots, (x_2, y_2)$

$\vdots$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_{n\cancel{-1}}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

interpoliert (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$

$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$

Basis: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$

basiert auf Stützstellen x_i

$n=2:\quad p_1(x_0) = p_0(x_0) = y_0$ ✓

$p_1(x_1) \overset{!}{=} y_1 = \underbrace{p_0(x_1)}_{y_0} + c_1(x_1 - x_0)$

Bedingung für c_1 bei Hinzunahme eines weiteren Punktes

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0 &= c_0 \\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} &= c_1 \end{aligned}}$$

mit Ansatz funktion
$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$

Interpolationsbedingungen:

$$\text{I)}\quad y_0 = c_0 \qquad \text{(Einsetzen von } (x_0|y_0))$$

$$\text{II)}\quad y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \qquad \text{(Einsetzen von } (x_1|y_1))$$

$$y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\vdots$$

$$y_n = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + c_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

Das resultierende LGS hat untere Dreiecksform.

Vorteile:

- Rechenaufwand reduziert sich auf $\mathcal{O}(n^2)$ Gleitpunktoperationen.
- Hinzufügen weiterer Stützpunkte durch Erweiterung des LGS ohne großen Aufwand möglich. nur c_{n+1} muss neu berechnet werden

Beispiel: Interpolationspolynom mit dem Ansatz nach Newton durch

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$
$$(x_1, y_1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$(x_2, y_2) = (1, 0)$$

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2 \cdot x \cdot \left(x - \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{I}) & 1 = c_0 & \\
(\mathrm{II}) & \tfrac{1}{2} = c_0 + \tfrac{2}{3} c_1 & \overset{(\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{2}{3} c_1 \Longleftrightarrow -\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} c_1 \\
 & & \Longrightarrow c_1 = -\tfrac{3}{4} \\
(\mathrm{III}) & 0 = c_0 + c_1 + \tfrac{1}{3} c_2 & \Longrightarrow 0 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} c_2 \\
 & & \Longrightarrow c_2 = -\tfrac{3}{4}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow p_2(x) = 1 - \tfrac{3}{4} x - \tfrac{3}{4} x \left(x - \tfrac{2}{3}\right) = 1 - \tfrac{3}{4} x - \tfrac{3}{4} x^2 + \tfrac{1}{2} x$$
$$= -\tfrac{3}{4} x^2 - \tfrac{1}{4} x + 1$$

(s. klassischer Ansatz)

Beispiel 9.2.3:

Berechnen Sie Näherungswerte für $\ln(\overset{x}{2.5}) \approx p_n(2.5)$

- unter Verwendung von linearer Interpolation durch $(x_0, y_0) = (1, \underbrace{\ln(1)}_{=0}), (4, \ln(4)) = (x_1, y_1)$
- unter Verwendung des Newton'schen Interpolationspolynoms durch äquidistante Punkte $(1, \underbrace{\ln(1)}_{=0}), (\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{\ln(2)}), (\underset{x_2}{3}, \underset{y_2}{\ln(3)}), (\underset{x_3}{4}, \underset{y_3}{\ln(4)})$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert des Taschenrechners.

Ansatz: lineare Interpolation

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = \overbrace{y_0}^{=0} + [y_0, y_1](x - x_0)$$

$$= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Steigung der Gerade durch (x_0, y_0) und (x_1, y_1)

Im Beispiel: $p_1(x) = \frac{\ln 4}{3} \cdot (x - 1) \Rightarrow p_1(2.5) = \frac{\ln 4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\ln 4}{2} \approx 0.693$

Ansatz: kubisches Interpolationspolynom

$$p_3(x) = \underbrace{c_0}_{=y_0=0} + c_1(x-x_0) + c_2\cdot(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Im Beispiel: $p_3(x) = c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\underset{\uparrow \text{Horner}}{=} \Big(\big(c_3\cdot(x-3)+c_2\big)\cdot(x-2)+c_1\Big)\cdot(x-1)$$

$$\begin{array}{cc|cccc}
x_i & y_i & & & & \\
\hline
1 & 0 = c_0 & & & & \\
 & & \ln 2 = c_1 & & & \\
2 & \ln 2 & & \frac{\ln 3 - 2\ln 2}{2} = c_2 & & \\
 & & \ln 3 - \ln 2 & & \frac{\ln 4 - 3\ln 3 + 3\ln 2}{6} = c_3 & \\
3 & \ln 3 & & \frac{\ln 4 - 2\ln 3 + \ln 2}{2} & & \\
 & & \ln 4 - \ln 3 & & & \\
4 & \ln 4 & & & &
\end{array}$$

Näherungswert für $\ln 2.5$

$$\Rightarrow p_3(2.5) \approx \frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{4}c_2 - \frac{3}{8}c_3 \approx 0.921 \quad (\ln 2.5 \approx 0.916)$$

Dividierte Differenzen

$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

Die Koeffizienten c_i lassen sich rekursiv durch wiederholte Bildung von "Differenzenquotienten" berechnen. Man spricht von den sog. **dividierten Differenzen** $[y_0,\dots,y_k] = y_{k,k-1,\dots,0}$, die nach folgendem Schema berechnet werden:

x	y			
x_0	$y_0 = c_0$			
		$[y_0,y_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = c_1$		
x_1	y_1		$[y_0,y_1,y_2] = \frac{[y_1,y_2]-[y_0,y_1]}{x_2-x_0} = c_2$	
		$[y_1,y_2] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$[y_0,y_1,y_2,y_3] = c_3$
x_2	y_2		$[y_1,y_2,y_3] = \frac{[y_2,y_3]-[y_1,y_2]}{x_3-x_1}$	
		$[y_2,y_3] = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		
x_3	y_3			

Allgemein:

"0-te" dividierte Diff. $\quad [y_k] := y_k, \qquad k = 0,\dots,n$

k+1-te dividierte Diff. $\quad [y_0,\dots,y_k] := \dfrac{[y_1,\dots,y_k]-[y_0,\dots,y_{k-1}]}{x_k - x_0}$

Beispiel: $\quad (0,1)\,,\ \left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2}\right),\ (1,0)$

x	y
0	$1 = c_0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{3}-0} = -\frac{3}{4} = c_1$$

$$\frac{0-\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-0} = -\frac{3}{4} = c_2$$

Interpolationspolynom:

$$p_2(x) = 1 - \frac{3}{4}\,x - \frac{3}{4}\,x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

Beispiel 9.2.4: Stellen Sie das Newton'sche Interpolationspolynom durch folgende Stützpunkte auf.

i	0	1	2	3
x_i	-2	3	1	4
y_i	-15	-5	3	1

x	y			
-2	$-15 = c_0$			
		$\frac{-5+15}{3+2} = 2 = c_1$		
3	-5		$\frac{-4-2}{1+2} = -2 = c_2$	
		$\frac{3+5}{1-3} = -4$		$\frac{\frac{10}{3}+2}{4+2} = \frac{16}{18} = c_3$
1	3		$\frac{-\frac{2}{3}+4}{4-3} = \frac{10}{3}$	
		$\frac{1-3}{4-1} = -\frac{2}{3}$		
4	1			

$$p_2(x) = -15 + 2(x+2) - 2(x+2)(x-3)$$

9.2.4 Effizienz und numerische Effekte der Polynominterpolation

Klassische Auswertung:

n-1 Mult.

$$p_n(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

n Mult.

Aufwand: 2n-1

an Multiplikationen

Horner-Schema: sehr gut auf Ansatz nach Newton anwendbar!

Effizienter durch gestaffelte Auswertung

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

Allgemein:

$$p_n(x) = (\dots(a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

Aufwand: n Multiplikationen

Interpolationsfehler

Wie gut sind die Näherungswerte für eine durch die Interpolationspunkte gegebene stetige Funktion zwischen den Stützstellen?

Satz: hinreichend oft stetig differenzierbar

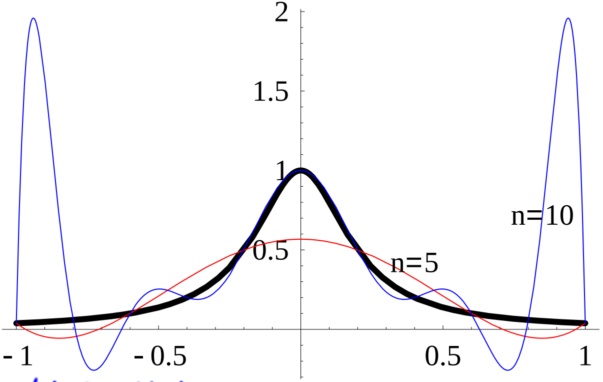
Falls f hinreichend glatt ist und p_n das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad n, dann gilt für den Interpolationsfehler
$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ mit $\theta \in [x_0; x_n]$

Bemerkungen:

- Da θ nicht bekannt ist, kann der Fehler nur abgeschätzt werden.
- Der Fehler hängt von der Verteilung der Stützstellen ab.
  Er ist bei großem n nicht gleichmäßig groß auf $[x_0, x_n]$, sondern an den Rändern des Intervalls größer.

Wahl der Stützstellen

Am Beispiel der sog. Runge-Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ ist erkennbar, dass im Fall von äquidistanten Stützstellen das Interpolationspolynom nicht immer gegen die zugrundeliegende stetige Funktion konvergiert, wenn die Anzahl der Stützstellen und damit der Grad des Polynoms wächst:



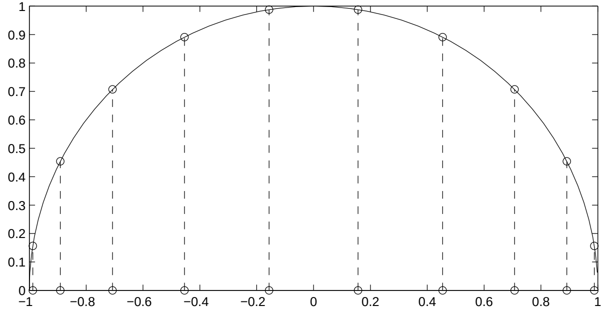
(gleichmäßige)

Abhilfe: Nicht-äquidistante Verteilung der Stützstellen, insbesondere dichter an den Intervallgrenzen

Chebyshev-Punkte

- haben genau diese Eigenschaft.
- erhält man durch orthogonale Projektion von gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis.

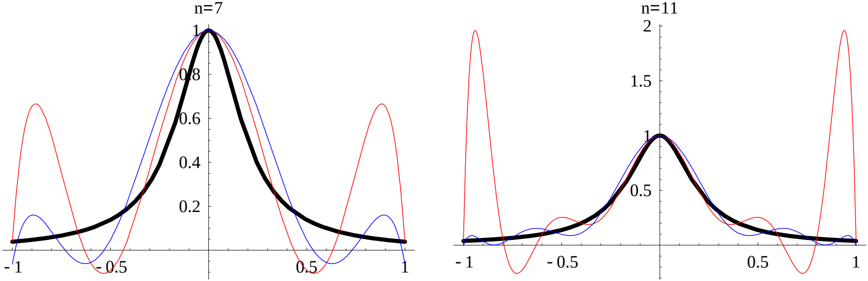
$$t_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad , \; k = 1, \dots, n \quad \text{auf} \quad]-1, 1[$$



Transformation auf Intervall $]a, b[$: $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cdot t_k$

Durch die Verwendung von Chebyshev-Punkten wird der Fehler gleichmäßiger verteilt und Konvergenz erreicht.

Beispiel: Runge-Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

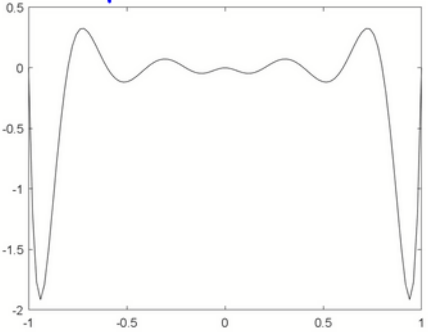


(Chebyshev-Punkte, äquidistante Punkte)

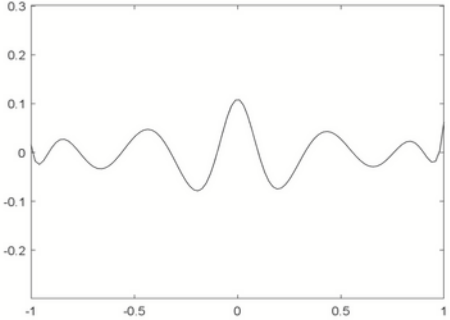
↳ Fehler gleichmäßig groß auf ganzem Intervall! ☺

Interpolationsfehler für n = 11

Äquidistant



Chebyshev



9.3 Spline-Interpolation

Weiterer Ansatz, um Oszillationen zu vermeiden:

Hinreichend glatte ($(k-1)$-mal stetig differenzierbare), stückweise zusammengesetzte Polynome, sog. **Splines** vom Grad k

Definition Kubischer Spline:

Ein kubischer Spline ist eine Funktion $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, die auf den Teilintervallen$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$ zweimal stetig differenzierbar und stückweise aus Polynomen vom Grad ≤ 3 zusammengesetzt ist:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R})$$

Beispiel: $n = 4$, d.h. 4 Stützstellen x_0, x_1, x_2, x_3

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & , \; x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) & , \; x_1 < x \leq x_2 \\ S_2(x) & , \; x_2 < x \leq x_3 \end{cases}$$

Überprüfung, ob eine derart gegebene Funktion $S(x)$ ein kubischer Spline ist:

1. Jede Funktion $S_i(x)$ ist ein Polynom vom Grad ≤ 3
2. $S(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar, d.h.
   - $S_0(x_1) = S_1(x_1)$ und $S_1(x_2) = S_2(x_2)$ (Stetigkeit)
   - $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$ und $S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$ (stetig diff.bar)
   - $S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$ und $S_1''(x_2) = S_2''(x_2)$ (2-mal stetig diff.bar)

Beispiel: Überprüfen Sie, ob

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = x^3 + 1 & , \; 0 \le x < 1 \\ s_1(x) = 2x^2 - 2x + 2 & , \; 1 \le x < 2 \\ s_2(x) = 3x^2 - 6x + 3 & , \; 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

ein kubischer Spline ist.

Verständnisfragen:

(1) Ist jeder quadratische Spline auch ein kubischer Spline? Gegenbeispiel! s. folgende Folie

(2) Ist jeder kubische Spline auch ein quadratischer Spline? Nur, wenn alle Polynome $s_i(x)$ vom Grad ≤ 2!

Ist die Funktion

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = x^2 & , -10 \le x < 0 \\ S_1(x) = -x^2 & , 0 \le x < 1 \\ S_2(x) = 1-2x & , x \ge 1 \end{cases}$$

$S_0(0) = S_1(0)$ ✓

$-1 = S_1(1) = S_2(1) = -1$ ✓

(a) ein quadratischer Spline ?

(1) Polynomgrad ≤ 2 ✓

(2) S und S' stetig ✓

(b) ein kubischer Spline ?

Nein!

(1) Polynomgrad ≤ 3 ✓

zusätzlich : S'' stetig ?

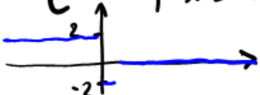
Nein!

$$S'(x) = \begin{cases} 2x & , -10 < x < 0 \\ -2x & , 0 < x < 1 \\ -2 & , x > 1 \end{cases}$$

$S_0'(0) = S_1'(0)$ ✓

$S_1'(1) = S_2'(1)$ ✓

$$S''(x) = \begin{cases} 2 & , -10 < x < 0 \\ -2 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$$

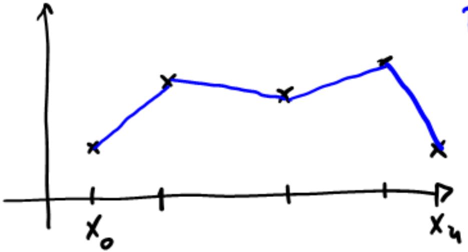


Wie sieht ein linearer Spline aus?
$(k=1)$

Bedingungen:

(1) Aus Polynomen vom Grad ≤ 1 zusammengesetzt.

(2) $s(x)$ muss stetig sein. (bis zur $(k-1)$-ten Abl. stetig)



Polygonzug
= linearer Spline

Allgemein: Bedingungen an einen Spline $S(x)$ vom Grad k

(1) Zusammengesetzt aus Polynomen vom Grad $\leq k$

(2) Stetigkeit von $\underbrace{S^{(i)}(x)}_{\text{i-te Ableitung}}$ für $i = 0, 1, \dots, k-1$

i-te Ableitung, $S^{(0)}(x) = S(x)$

Bestimmung der Koeffizienten eines kubischen Splines durch $n+1$ Stützpunkte (x_i, y_i) für $i = 0, 1, \dots, n$

mit Ansatz: $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$

$4 \cdot n$ unbekannte Koeffizienten

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x_0 \le x < x_1 \\ S_1(x), & x_1 \le x < x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

Bem.: Ansatz wird so gewählt, um ein möglichst dünnbesetztes LGS zu bekommen.

Gleichungssystem für die $4n$ Parameter a_i, b_i, c_i, d_i für $i = 0, \dots, n-1$ aus

- den $2n$ Interpolationsbedingungen

$$s_i(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$
$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

- den $n-1$ Bedingungen für die Stetigkeit der ersten Ableitungen

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \dots, n-2$$
$$\Longleftrightarrow \quad s_i'(x_{i+1}) - s_{i+1}'(x_{i+1}) = 0$$

- den $n-1$ Bedingungen für die Stetigkeit der zweiten Ableitungen

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \dots, n-2$$

- 2 geeigneten Randbedingungen (RB), z. B. *natürlichen* RB

$$\left.\begin{array}{l} s_0''(x_0) = 0 \\ s_{n-1}''(x_n) = 0 \end{array}\right\} \text{natürliche RB}$$

Nach geschickter Umformung der Gleichungen hat das resultierende LGS Tridiagonalform $\Longrightarrow$ Rechenaufwand $\mathcal{O}(n)$ Gleitpunktoperationen

$$\begin{pmatrix} * & * & & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{pmatrix} \quad \text{Tridiagonalmatrix}$$

Beispiel 9.3.1:

Stellen Sie das Gleichungssystem auf für den kubischen Spline mit natürlichen RB durch

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	0	2	0

Ansatz:

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3, & \underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}} \le x < \underset{x_1}{1} \\ s_1(x) = a_1 + b_1 (x-1) + c_1 (x-1)^2 + d_1 (x-1)^3, & 1 \le x < \underset{x_2}{\overset{}{2}} \end{cases}$$

8 Unbekannte

$$S'(x) = \begin{cases} S_0'(x) = b_0 + 2c_0 x + 3d_0 x^2 & , 0 < x < 1 \\ S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2 & , 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} S_0''(x) = 2c_0 + 6d_0 x & , 0 < x < 1 \\ S_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x-1) & , 1 < x < 2 \end{cases}$$

4 Interpolationsbed.

(I) $y_0 = S_0(0) = a_0 = 0$

(II) $y_1 = S_0(1) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 2$

(III) $y_1 = S_1(1) = a_1 = 2$

(IV) $y_2 = S_1(2) \quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$

Stetigkeit der Abl.

(V) $0 = S_0'(1) - S_1'(1) = b_0 + 2c_0 + 3d_0 - b_1 = 0$

(VI) $0 = S_0''(1) - S_1''(1) = 2c_0 + 6d_0 - 2c_1 = 0$

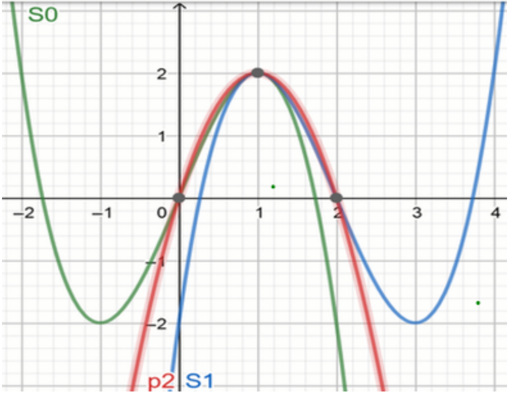
(VII) $0 = S_0''(0) = 2c_0 = 0$

(VIII) $0 = S_1''(2) = 2c_1 + 6d_1 = 0$

Lösung: $a_0 = 0$, $b_0 = 3$, $c_0 = 0$, $d_0 = -1$

$a_1 = 2$, $b_1 = 0$, $c_1 = -3$, $d_1 = 1$

$$S(x) = \begin{cases} 3x - x^3 & , \; 0 \le x \le 1 \\ 2 - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 & , \; 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



$p_2(x) = 4x - x^2$
ist das quadratische Interpolationspolynom durch die 3 Punkte