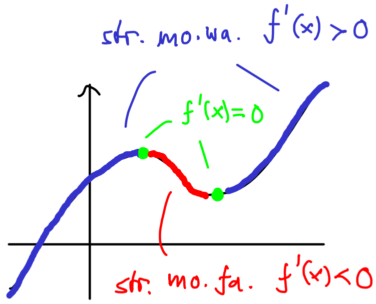
Kurvendiskussion

Fragen?

Monotonie. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $f(x) = x^3 - x$? (Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung)

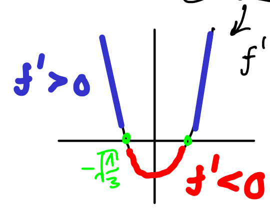
Lösung.

Wdh.



Suche NST von $f'(x)$:

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 - 1}_{f'} \overset{!}{=} 0 \implies x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

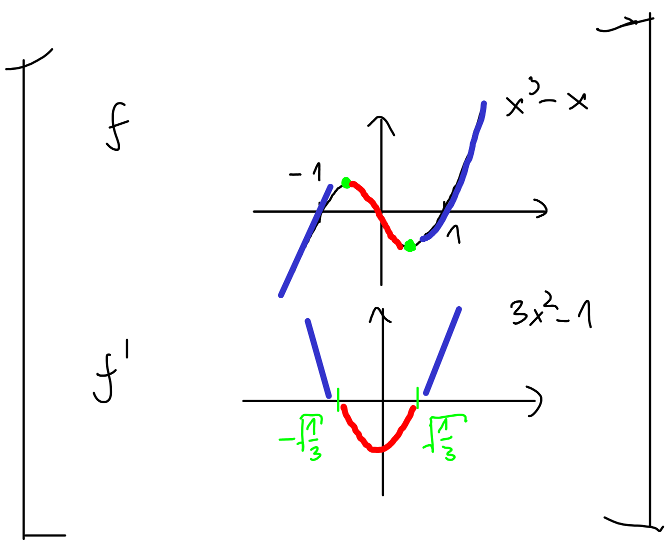


(Schule:

x		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\sqrt{\frac{1}{3}}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

)

$$\implies \begin{cases} \text{in } \left]-\infty, -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right] \text{ und } \left[\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \infty\right[\text{ str. mo. wa.} \\ \text{in } \left[-\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right] \text{ str. mo. fa.} \end{cases}$$



Eigener Lösungsversuch.

Krümmung und Wendepunkte. Bestimmen Sie Krümmungsverhalten und Wendepunkte von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3 - x$

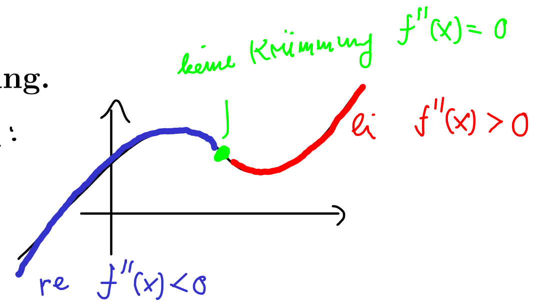
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (auf Homepage)

c) $f(x) = x^4$ d) $f(x) = x^5$

⚠ $f''(x)=0 \wedge f'''(x)=0 \not\Rightarrow x$ kein WP ↯

Lösung.

Wdh:



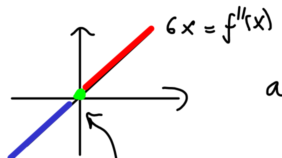
$\times$ WP: hinreichende Bed.

$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0 \Longrightarrow \times$ WP

$\times$ WP $\Rightarrow f''(x)=0$ Notwend. Bed.

$\times$ WP $\Longleftrightarrow f''(x)=0$ & f'' NST-Durchg.

a) $f''(x) = (x^3-x)'' = (3x^2-1)' = 6x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0.$



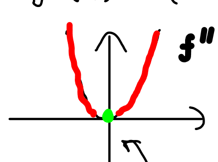
also $]-\infty,0[$ re-gekr., bei 0 keine Krümmung, $]0,\infty[$ li-gekr.

NST-Durchgang & $f''(0)=0 \Rightarrow$ bei $x=0$ ist WP

[ODER: $f''(0)=0$ & $f'''(0)=6\neq 0 \Rightarrow x=0$ ist WP]

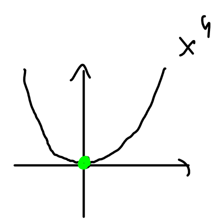
b) wie a) ↝ Homepage!

c) $f''(x) = (x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x=0$



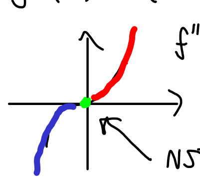
also $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ links-gekr., 0 keine Krümmung

kein NST-Durchgang, also $x=0$ kein WP



[$f'''(x) = 24x$, damit $f'''(0) = 0$?]

d) $f''(x) = (x^5)'' = (5x^4)' = 20x^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x=0$

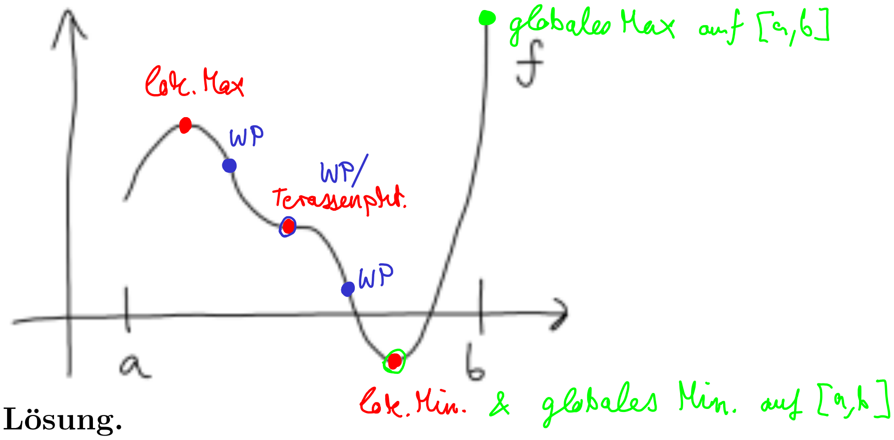


also $]-\infty,0[$ rechts-gekr., 0 keine Krümmung, $]0,\infty[$ li-gekr.

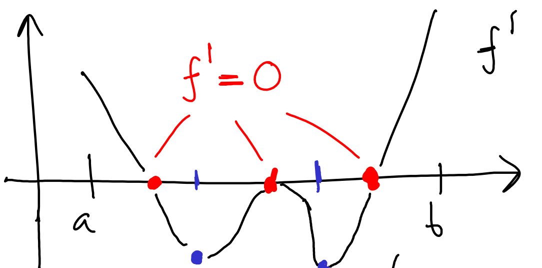
NST-Durchg., also $x=0$ WP   [$f'''(x) = 60x^2$, $f'''(0)=0$?]

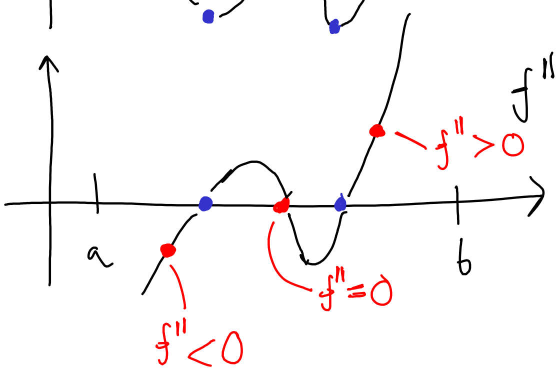
Eigener Lösungsversuch.

* **Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema.** Skizzieren Sie f' und f'' von unten skizzierter Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und überlegen Sie sich das hinreichende Kriterium für lokale Extrema anhand der Graphen von f' und f''.



Lösung.





Min./Max

x_0 lok. Extremum $\Longleftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

& f' Nullstellendurchgang

z.B. $f''(x_0) \neq 0$

Hinreichende Kriterium:

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ lok. Min.

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ lok. Max.

Eigener Lösungsversuch.

Berechnung lokale/globale Extrema. Berechnen Sie die lokalen/globalen Extrema von folgenden Funktionen:

* a) $f : [-1, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (auf Homepage)

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$

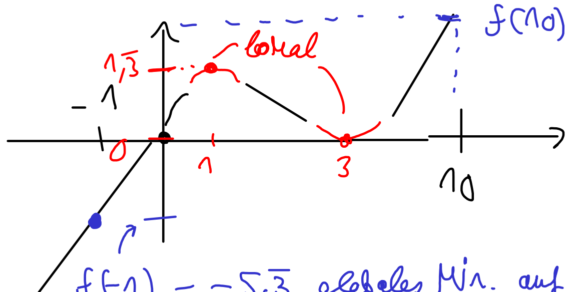
Lösung.

a) lokale Extrema: $f'(x) = x^2 - 4x + 3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$f''(x) = 2x - 4$: $f''(1) = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow x_1 = 1$ lok. Max

$f''(3) = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow x_2 = 3$ lok. Min.

globale ?:



$f(10) = 163,\bar{3}$ globales Max auf $[-1,10]$

$f(-1) = -5,\bar{3}$ globales Min. auf $[-1,10]$

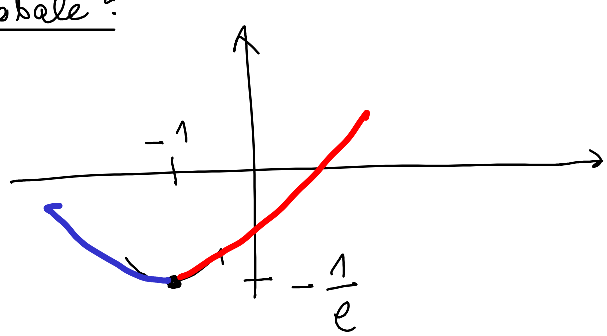
b) lokale Extrema: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)\underbrace{e^x}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 1 + x = 0$ $\quad : e^x \neq 0$

$\Rightarrow x = -1.$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = (2+x)e^x$: $f''(-1) = \underbrace{(2-1)}_{1}\underbrace{e^{-1}}_{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,7} > 0$

d.h. $x = -1$ lok. Min.

globale ?:



$x < -1$: $f'(x) = \underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{e^x}_{>0} < 0$

also streng mo fa

$x > -1$: $f'(x) = \underbrace{(x+1)}_{>0}\underbrace{e^x}_{>0} > 0$

also streng mo wa

$\Rightarrow$ $x = -1$ globales Min. & kein lokales/globales Maximum.

Eigener Lösungsversuch.