

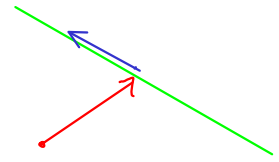


GERADENGLEICHUNGEN UND SKALARPRODUKT

Fragen?



$$g: \vec{a} + \lambda \vec{r}$$

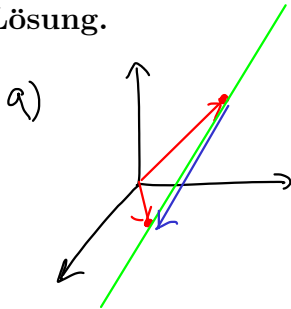


* **Parameterform.** Bestimmen Sie die Parameterform:

a) Gerade, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ geht.

b) Graph von $f(x) = 5x + 2$.

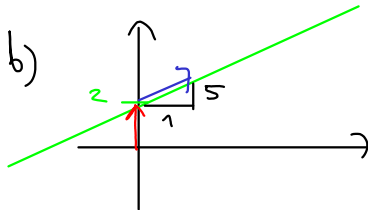
Lösung.



$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-3 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ODER: Zwei-Punkte-Form:

$$g: (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1+1 \\ -2+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$g: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ODER: Zwei-Punkte-Form (zwei Punkte bestimmen)

$$\underline{\underline{ODER}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

Eigener Lösungsversuch.

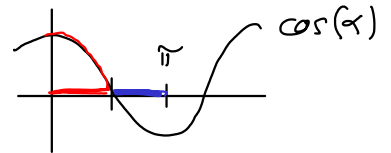
Winkel. Der Winkel $\angle(x, y) = \alpha$ zwischen den Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ lässt sich berechnen über

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Wann ist der Winkel 90° ? $\cos(90^\circ) = 0 \Leftrightarrow x \cdot y = 0$

Wann ist der Winkel spitz? $\alpha < 90^\circ: \cos(\alpha) > 0 \Leftrightarrow x \cdot y > 0$

Wann ist der Winkel stumpf? $\alpha > 90^\circ: \cos(\alpha) < 0 \Leftrightarrow x \cdot y < 0$



Berechnen Sie die Winkel zwischen folgenden Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

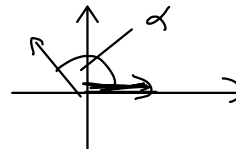
c) Gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Geraden g durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h durch $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung.

a) $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{< 0 \text{ d.h. } \alpha \text{ stumpf}}$

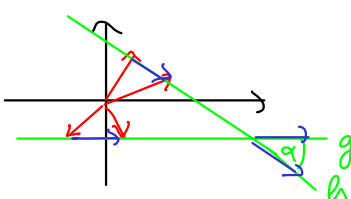
$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$



b) $\cos(\alpha) = \frac{1 - 1}{\dots} = \frac{0}{\dots} \Rightarrow \underline{\alpha = 90^\circ}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 90^\circ}$, d.h. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)



Berechne Winkel zwischen Richtungsvektoren:

$r_g = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$r_h = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{0 + (-1)}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\alpha = 135^\circ}$

Eigener Lösungsversuch.

