2
Grundlagen zu Ableitung und Integral

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:52

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

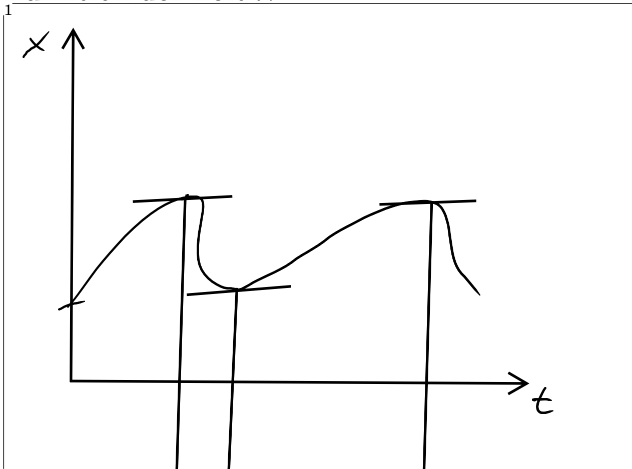
Dies ist eine Quick&Dirty-Version zu Beginn des Semesters, als Hilfe für die Parallelfächer. Im Detail behandeln wir das später noch einmal.

1 Ableitung

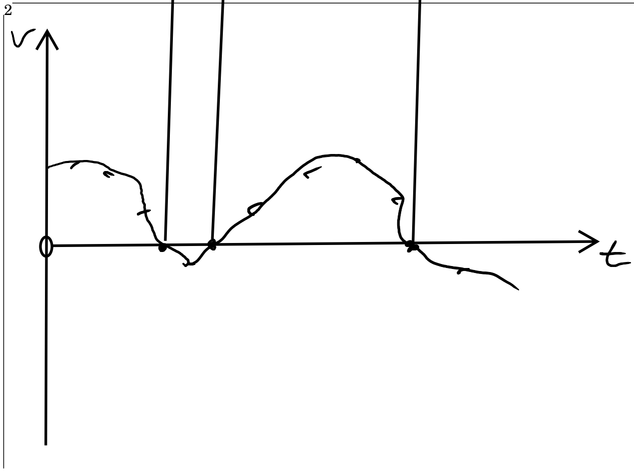
1.1 Momentangeschwindigkeit

Man stellt sich einen Zug vor, der vorwärts und rückwärts entlang einer Geraden fahren kann. Entlang dieser Geraden ist ein langes Zentimetermaß platziert, so dass man die aktuelle Position als Länge x angeben kann. Die Fahrten des Zuges lassen sich dann in einem Diagramm auftragen. Die Länge (also der Ort) x ist eine

Funktion der Zeit t:



Ebenso lässt sich zu jedem Zeitpunkt t die momentane Geschwindigkeit v vom Tacho ablesen und plotten, wie beim Fahrtenschreiber. Achtung: In der Physik zeigt der Tacho beim Rückwärtsfahren eine negative Geschwindigkeit:



Die Momentangeschwindigkeit zum Beispiel bei $t = 10\,\mathrm{s}$ lässt sich bestimmen, wenn man die Positionen für eine kleine Weile vorher und nachher kennt. Man kann die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ dann nämlich beliebig genau nähern:

$$v(10s) \approx \frac{x(10{,}001s) - x(10s)}{0{,}001s}$$

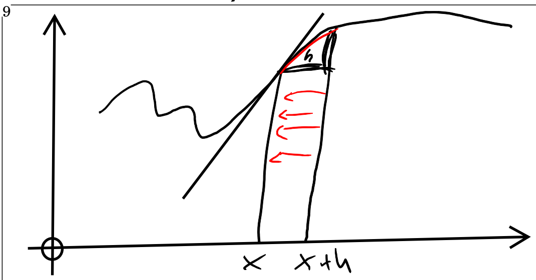
1.2 Ableitung

Dieser Übergang von der Funktion $t \mapsto x(t)$ zur Funktion $t \mapsto v(t)$ heißt „x nach t ableiten“ oder „x nach t differenzieren“ [to take the derivative / to differentiate with respect to t]. Die Funktion $t \mapsto v(t)$ heißt Ableitung [derivative] der Funktion $t \mapsto x(t)$. Man schreibt $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (gesprochen: „deh icks nach deh teh“) oder in der Physik für solche Ableitungen nach der Zeit: $v = \dot{x}$.

In der Mathematik heißt die unabhängige Variable gerne x statt t. Die Ableitung einer Funktion $x \mapsto f(x)$ heißt dann [6] $\frac{df(x)}{dx}$ oder kurz [7] f', gesprochen: „eff strich“ [f prime]. Man definiert die Ableitung analog zur Momentangeschwindigkeit:

[8]
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Die Wert der Ableitung $f'(x)$ wird dann die Steigung [slope] der Tangentengeraden an die Funktion f an der Stelle x:

[9]


1.3 Ableitungsregeln

Ableitungen der üblichen Funktionen und beliebiger Zusammensetzungen davon lassen sich nach Rezept ausrechnen. Das ist nicht sehr anspruchsvoll; Wolfram Alpha kann einem diese Aufgabe abnehmen: `derivative x^(sin(x)sqrt(x))`. Mit „Show steps“ zeigt es einem auch, welche Regeln es wie angewendet hat.

Die Regeln in komplizierten Ausdrücken immer von außen nach innen anwenden: auf einen großen Bruch erst die Quotientenregel anwenden, dann mit Zähler und Nenner weitermachen usw.

- Faktorregel: Das a-fache (a: eine konstante Zahl) einer Funktion f hat die a-fache Ableitung: [10] $(af)' = af'$
  $\frac{d\,5\sin(x)}{dx} = 5\frac{d\sin(x)}{dx}$
- Summenregel: Leitet man die Summe $x \mapsto f(x) + g(x)$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich die Summe der Ableitungen: [11] $(f+g)' = f' + g'$ $\frac{dx^2 + \sin(x)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d\sin(x)}{dx}$
- Produktregel: Leitet man das Produkt $x \mapsto f(x)g(x)$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich eine Summe, in dem jeweils eine der Funktionen abgeleitet ist: [12] $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Idee zur Herleitung: $102 \cdot 203 =$
  [13] $f(x) = x^3 + 4$
  $f'(x) = 3x^2$
  $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^3+4}{dx}$
  .
- Kettenregel: Leitet man die Verkettung $x \mapsto f(g(x))$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich ein Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer

Funktion: [14] $\frac{df(g(x))}{dx} = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere}}$ Ableitung Idee zur Herleitung: Die Ableitung sagt, wie stark eine Änderung „innen“ nach „außen“ spürbar wird.

- Exponentialfunktionen und Logarithmen: Die natürliche Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist ihre eigene Ableitung: [15] $\frac{de^x}{dx} = e^x$. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist der Kehrwert: [16] $\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$. Idee zur Herleitung: e^{x+h} mit Hilfe der Potenzrechengesetze umformen und so die lineare Näherung finden. Für den natürlichen Logarithmus die Kettenregel auf $x = e^{\ln(x)}$ anwenden.

- Potenz- und Wurzelfunktionen: Funktionen der Art $x \mapsto x^n$ mit einer konstanten Zahl n werden abgeleitet, indem man einen Faktor n nach vorne holt und den Exponenten n dann um 1 verringert: [17] $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ Idee zur Herleitung: $x^n = e^{\cdots}$, Kettenregel.

- Quotientenregel. Leitet man den Quotienten $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ von Funktionen f und g ab, ergibt sich: [18] $\frac{d\frac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ Idee zur Herleitung: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, also Produkt- und Kettenregel anwenden.

- Sinus und Cosinus: Im Bogenmaß (und nur da!) ist die Ableitung des Sinus der Cosinus. Die Ableitung des Cosinus ist minus Sinus. Idee zur Herleitung: Additionstheoreme; geometrische Näherung des Sinus und des Cosinus für Winkel nahe 0.

2 Integral

2.1 Stammfunktion

Viele mathematische Modelle verwenden Ableitungen der gesuchten Funktionen. Oft muss man dann von der Ableitung einer Funktion auf die Funktion selbst schließen. Das geht mit dem unbestimmten Integral [indefinite integral]. Es macht das Ableiten rückgängig – zumindest fast: bis auf „plus eine Konstante“. Das Ergebnis des unbestimmten Integrals heißt auch eine Stammfunktion [*im Englischen klarer benannt:* antiderivative] der gegebenen Funktion.

Eine Tabelle mit Ableitungen lässt sich damit rückwärts lesen und wird so zu einer Tabelle von Stammfunktionen:

Funktion	$\longrightarrow$	Ableitung
Stammfunktion	$\longleftarrow$	Funktion
$x \mapsto 42x + 13$		19 $x \longmapsto 42$
$x \mapsto x^{13}$		20 $x \longmapsto 13x^{12}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$		21 $x \longmapsto -x^{-2}$
$x \mapsto \sqrt{x}$ für $x > 0$		22 $x \longmapsto \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin(x)$		23 $x \longmapsto \cos(x)$
$x \mapsto e^x$		24 $x \longmapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$ für $x > 0$		25 $x \longmapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$ für $x \neq 0$		26 $x \longmapsto \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$

Achtung: In dieser Tabelle steht jeweils nur *eine* Stammfunktion (eine von vielen). Man kann eine Konstante dazu addieren und erhält eine weitere Stammfunktion, denn die Konstante fällt beim Ableiten weg. Schulbuchmäßig schreibt man das unbestimmte Integral zum Beispiel von Cosinus als $x \mapsto \sin(x) + C$. Das C steht dabei für eine unbekannte Zahl, die nicht von x abhängt, also eine Konstante.

Das unbestimmte Integral einer Funktion f wird aus historischen Gründen meist so geschrieben:

27 $$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Nicht vergessen: Es kommt dabei eine Funktion heraus (eine Stammfunktion), kein Zahlenwert. Und diese Stammfunktion ist nicht einmal komplett bekannt; man darf eine beliebige Konstante dazu addieren. Schulbuchmäßig bezeichnet man eine Stammfunktion der Funktionen f, g oder h mit dem entsprechenden Großbuchstaben, also F, G oder H.

Probe: Die Ableitung hebt das Bilden der Stammfunktion auf: 28 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

2.2 Bestimmtes Integral, Flächenberechnung

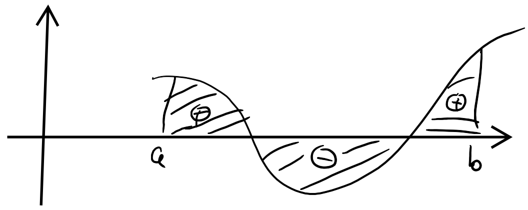
Schulmäßig definiert man das bestimmte Integral

29 $$\int_a^b f(x)\,dx$$

als den Flächeninhalt unterhalb der Funktionskurve von f zwischen den Grenzen

$x = a$ und $x = b$. Dabei werden Flächen unter der x-Achse negativ gerechnet:

30



Das bestimmte Integral ist eine Zahl (nämlich die Fläche mit Vorzeichen) und nicht wie das unbestimmte Integral eine Funktion. Trotzdem sind beide sehr eng verwandt: Hat man eine Stammfunktion (also ein unbestimmtes Integral) F von f, kann man daraus das bestimmte Integral gewinnen:

31

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

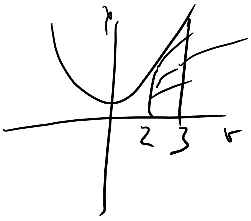
Dieser Ausdruck wird auch gerne so geschrieben:

32

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel: Wie groß ist die Fläche unter der Normalparabel von $x = 2$ bis $x = 3$?

33



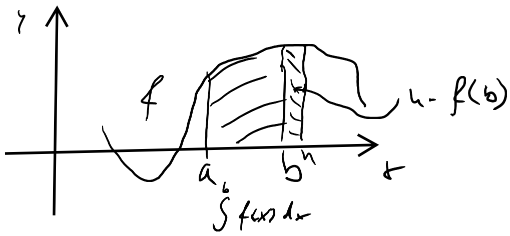
$$\int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 42\right]_2^3$$

$$= \frac{3^3}{3} + \cancel{42} - \left(\frac{2^3}{3} + \cancel{42}\right)$$

$$= 9 - \frac{8}{3} = 6\frac{1}{3}$$

Dass das bestimmte und das unbestimmte Integral auf diese Art zusammenhängen, kann man sich grob so vorstellen: Wenn man nicht bis zur oberen Grenze b integriert, sondern ein Stückchen h weiter, bis $b + h$, kommt ungefähr $f(b) \cdot h$ zur Fläche hinzu:

34



Die Fläche wächst also mit der Rate $\frac{f(b)\cdot h}{h} = f(b)$. Die Ableitung der Fläche nach der oberen Grenze b ist damit $f(b)$; also ist die Fläche in Abhängigkeit von b eine Stammfunktion von f. Außerdem weiß man, dass die Fläche null wird, wenn man die obere Grenze gleich der unteren, also $b = a$, setzt.

Hat man bereits irgendeine Stammfunktion F von f, kann man mit $F(b) - F(a)$ eine Größe mit genau diesen Eigenschaften bilden. Das ist auch die einzige Möglichkeit. Also muss das bestimmte Integral gleich $F(b) - F(a)$ sein.