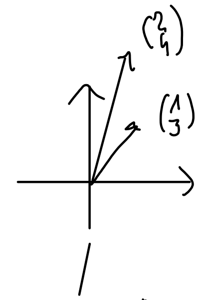
Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

# Lineare Gleichungssysteme - Teil 2




**Fragen?**

<u>Wdh. der vielen Begriffe:</u>

- Spaltenraum von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $\left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ hier 2-dim. Ebene

  Menge aller Lin. komb.

- $\mathrm{Kern}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot \vec{x} = 0 \}$ = Lösungsmenge des hom. LGS $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$ GaußAlg.

  homogenes LGS

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Matrix in ZSF: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

  3 Pivots 1 freie Var.

  Defekt $(A)$ = Anz. fr. Var $= 1$ (= Dimension vom Kern $(A)$!)

  Rang $(A)$ = Anz. Piv. $= 3$ (= Dimension vom Spaltenraum!)

  = Anz. Zeilen $\neq 0$ in ZSF

* **Handy-Tarife.** Gegeben zwei Anbieter:

- T-Mobile Magenta L: Flatrate Telefon und SMS, Grundgebühr 45 €/Monat
- Fonic Classic: 9ct/SMS & Minute, keine Grundgebühr

Bezeichne
$x_1$ = Anzahl der Minuten bei T-Mobile
$x_2$ = Anzahl der SMS bei T-Mobile
$y_1$ = Anzahl der Minuten bei Fonic
$y_2$ = Anzal der SMS bei Fonic

Berechnen Sie die monatlichen Gesamtkosten $k_T$ bei T-Mobile und $k_F$ bei Fonic und setzen Sie diese gleich. Lösen Sie das entstandene LGS und interpretieren Sie die Lösungen graphisch.

**Lösung.**

$$\left.\begin{array}{l} k_T = 45 \\ k_F = 0{,}09 \cdot y_1 + 0{,}09 \cdot y_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{gleich-setzen}} \overbrace{0{,}09\, y_1 + 0{,}09\, y_2}^{k_F} = \overbrace{45}^{k_T},$$

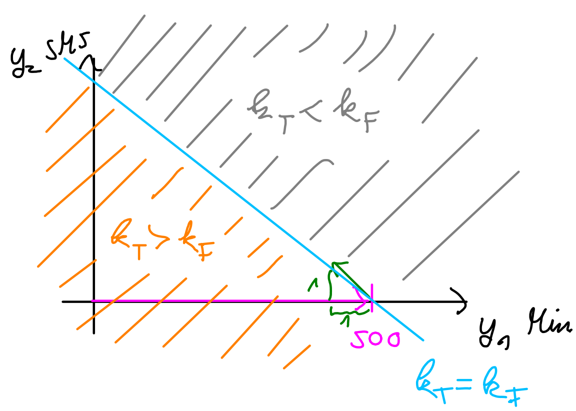
$\underline{\text{Gauß}}$: $\left(\begin{array}{cc|c} \underset{\text{Pivot}}{\underline{0{,}09}} & \underset{\text{freie Var.}}{\underline{0{,}09}} & 45 \end{array}\right)$

$\underline{y_2 = \lambda}$

$$\Rightarrow \underbrace{0{,}09}_{\frac{9}{100}}\, y_1 + 0{,}09\,\lambda = 45 \Rightarrow \underline{y_1} = \frac{100}{9}(45 - 0{,}09\,\lambda) = \underline{500 - \lambda}$$

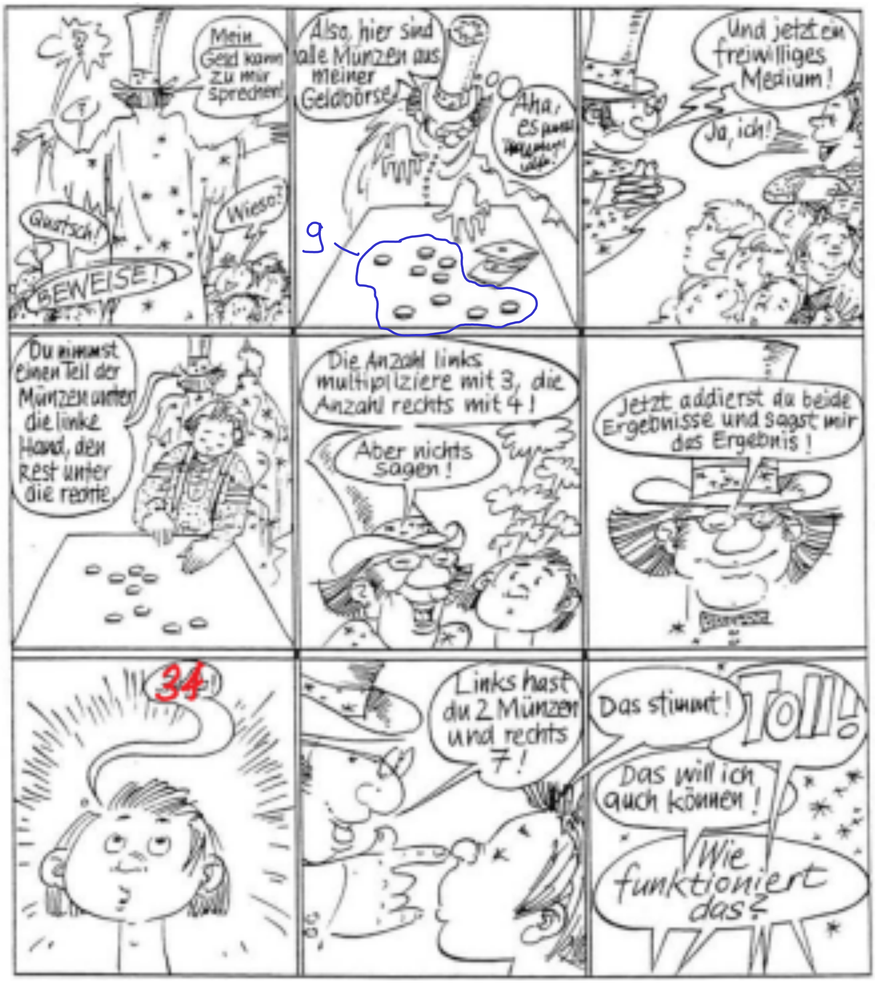
$y_2$ SMS

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{\begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\text{Parameterform Gerade}}$$




**Eigener Lösungsversuch.**

**Zauberer.** Wie macht das der Zauberer bloß?




inhomog. LGS

**Lösung.** $\left.\begin{array}{l} x_1 = \text{Anz. in linker Hand} \\ x_2 = \text{Anz. in rechter Hand} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} (I) & x_1 + x_2 = 9 \text{ — Anz. Münzen} \\ (II) & 3x_1 + 4x_2 = 34 \text{ — Ergebnis des Freiwilligen} \end{array}$

Zaubererformel!

$(I)$ in $(II)$: $\underbrace{3(9 - x_2)}_{3\cdot 9 - 3x_2} + 4x_2 = 34 \Rightarrow \boxed{x_2 = 34 - \underbrace{3\cdot 9}_{27} = 7}$ (rechts) $\xRightarrow{(I)} x_1 = 2$ (links)

- Bei einer anderen Anz. Münzen, einfach blaue Zahl anpassen!
- Man kann anstatt 3, 4 auch andere Zahlen nehmen: 1,2 / 2,3 / 3,4 / .... (auch blaue Zahl anpassen)

**Eigener Lösungsversuch.**

* **Begriffe beim LGS.** Bestimmen Sie für das LGS:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 24x_1 + 10x_2 - 13x_3 &= 25 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

a) Rang($\underbrace{A}_{\text{Koeff.m.}}$), Rang($\underbrace{A|b}_{\text{erw. Koeff.m.}}$)

b) Defekt($A$)

c) Kern($A$)

d) Ist das LGS unter- oder überbestimmt?

**Lösung.**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 24 & 10 & -13 & 25 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right)$

a) Bestimme ZSF: $(A|b) \underset{II - 8 \cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \underset{III - II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

2 Pivots  1 freie Var.

Rang$(A) = 2$, Rang$(A|b)$ = Rang$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2$

Allgemein gilt: $\boxed{\text{LGS } Ax = b \text{ lösbar} \iff \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)}$  hier: lösbar! (beide 2)

b) $\underbrace{\text{Defekt}(A) = 1}_{\text{Anz. fr. Var.}} \overset{\text{Allg.}}{=} \underbrace{n}_{\text{Anz. Variablen } 3} - \underbrace{\text{Rang}(A)}_{2}$

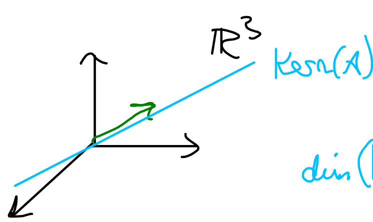
c) Kern$(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ = Lösungsmenge des homog. LGS

$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 24 & 10 & -13 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$  $x_3 = \lambda$

II: $2x_2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}\lambda$

I: $3x_1 - \frac{3}{2}\lambda - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{6}\lambda$

Kern$(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 7/6 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$




Allgemein!

dim(Kern$(A)$) $= 1 =$ Defekt$(A)$

d) $\underbrace{2}_{\text{Rang}(A)}$ Gleichungen < 3 Variablen, d.h. unterbestimmt (da freie Var bzw. Defekt$(A) > 0$)

**Eigener Lösungsversuch.**

**Lösbarkeit von LGS.** Gegeben ist ein LGS $Ax = b$. Was ist Rang$(A)$, Rang$(A|b)$, Defekt$(A)$? Beantworten Sie damit wie viele Lösungen es gibt.

a) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Rang$(A) = 2 \neq 3 =$ Rang$(A|b)$ $\Rightarrow$ nicht lösbar

Defekt$(A) = 1$

b) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rang$(A) = 2 =$ Rang$(A|b)$ $\Rightarrow$ lösbar

Defekt$(A) = 1$ $\Rightarrow$ $\infty$-viele Lsgen

c) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rang$(A) = 3 =$ Rang$(A|b)$ $\Rightarrow$ lösbar

Defekt$(A) = 0$ $\Rightarrow$ eindeutige Lsg.

**Lösung.**

Wdh.:

LGS lösbar $\Leftrightarrow$ Rang$(A) =$ Rang$(A|b)$

Dann gilt:
- Defekt$(A) = 0$ $\Rightarrow$ eindeutig lösbar
- Defekt$(A) > 0$ $\Rightarrow$ $\infty$-viele Lsgen (Anz. freie Var. $> 0$)

**Eigener Lösungsversuch.**