Prof. Dr. M. Helbig
Analysis und
Lineare Algebra

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Probe-Prüfung: Analysis

1. Berechnen bzw. beantworten Sie:

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4-3n^2+7}{3n^4-2n}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{e^x}$

   d) Begründen oder widerlegen Sie: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \cos(2)$.
   e) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k}{(k+1)!}(x-2)^k$?

2. Sei $h(x) = \ln(x)$
   a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ vom Grad 3 von h an der Stelle $x_0 = 1$.
   b) Approximieren Sie $h(x) \approx T_3(x)$ für $x = 0,5$. Wie groß ist der Fehler?
   c) Geben Sie die Taylorreihe $T(x)$ an und berechnen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ diese konvergiert.

3. Sei $g(x) = x^2 e^x$.
   a) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to\infty} g(x)$.
   b) Berechnen Sie die Nullstellen, lokalen Extrema und Wendepunkte von g.
   c) Skizzieren Sie den Graphen von g.
   d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ vom Grad 2 von g an der Stelle $x_0 = 0$.
   e) Wie groß ist der Fehler der Approximation $g(x) \approx T_2(x)$ für $x \in [0,1]$?

4. Sei $f(x) = x^{-2} e^{x^2}$.
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
   b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
   c) Ist die Funktion stetig hebbar auf ganz $\mathbb{R}$?
   d) Berechnen Sie die Nullstellen.
   e) Berechnen Sie die Ableitungen f', f''.
   f) Bestimmen Sie lokale Extrema und Wendepunkte von f.
   g) Skizzieren Sie den Graphen von f.
   h) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ vom Grad 2 von f an der Stelle $x_0 = 1$.
   i) Approximieren Sie $f(1,01)$ mit dem Taylorpolynom und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) $\int_0^2 z\sqrt{z^2+4}\,dz$
   b) $\int xe^x dx$
   c) $\int xe^{x^2} dx$
   d) $\int \sin(x)(2-x)dx$
   e) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x} dx$
   f) $\int \frac{x^2}{x^2-2x+1} dx$
   g) $\int \frac{2x+8}{x^2+4x+5} dx$