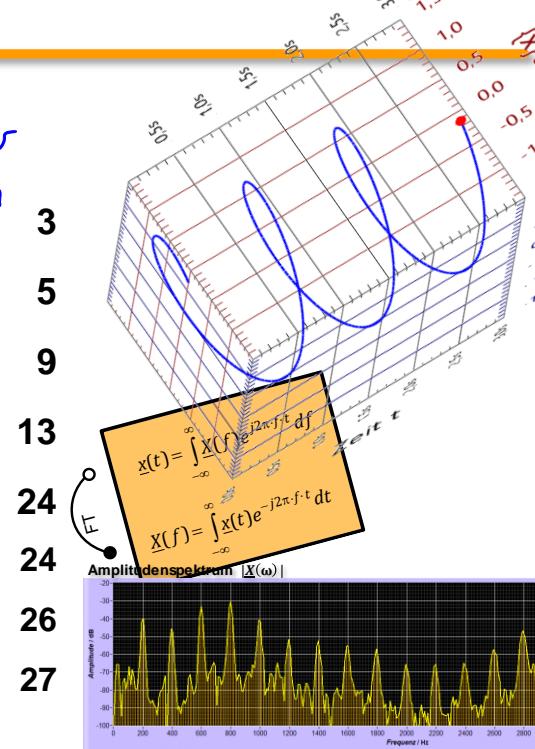


# Betrachtung von Signalen im Frequenzbereich

## Inhalt dieses Kapitels:

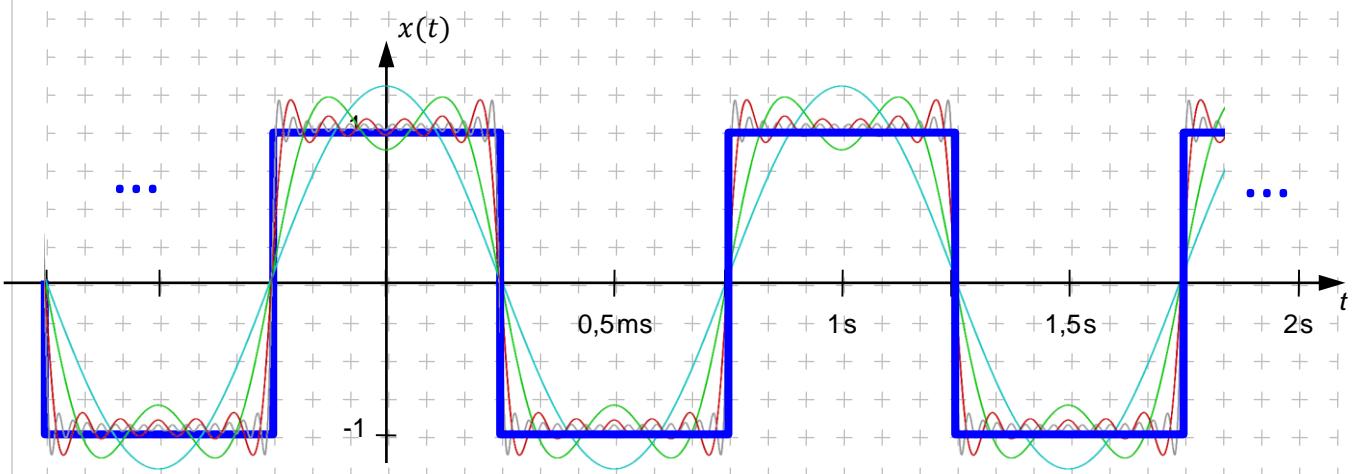
- Periodische Signale
- Reelle Fourierreihe
- Fourierreihe mit komplexen Koeffizienten
- Fouriertransformation
- ANHANG
  - Komplexe Zahlen
  - Das Analyseintegral der Fourierreihe
  - Die FT einer exponentiellen Schwingung...

*„Darstellung periodischer Signale als Summe von Sin- & cos - Fkt.“*



## Approximation einer periodischen Rechteckschwingung

Mit Hilfe der *Fourierreihe* lässt sich ein periodisches Signal als Summe gewichteter Sinus- und Kosinusschwingungen darstellen, deren Frequenz jeweils ein ganzzahliges Vielfaches der sog. **Grundfrequenz** des Signals ist:



Obiges Bild zeigt die sukzessive Annäherung durch Superposition von 1, 2, 3, 4 cos-Schwingungen.  
S.a. Demoprogramm von Prof. Michael Diegelmann: <http://diegelmann.fh-rosenheim.de/#FourierSynthesis>.

<sup>1)</sup> Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830), frz. Mathematiker & Physiker



## Lernziele dieses Kapitels:

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels ...

- ⇒ können Sie ~~sowohl~~ Signale, ~~als auch~~ Signale nicht nur im Zeitbereich, sondern alternativ auch im sog. Spektralbereich betrachten, z.B. als **Fourierreihe** oder **Fouriertransformation**.
- ⇒ Sie wissen, dass diese Darstellung im *Frequenzbereich* äquivalent zur Darstellung im *Zeitbereich* ist, aber oftmals günstiger, um bestimmte Phänomene an Systemen zu verstehen.

Taxonomie Kompetenzart	Kennen	Können	Verstehen
<b>Fach-kompetenz</b>	Wenn Sie qualitative Eigenschaften eines Signals kennen (z.B. Symmetrien, Abtastung, Periodizität, Gleichanteil, Kausalität, etc.) können Sie daraus die resultierenden Eigenschaften im Frequenzbereich (FT oder FR) vorhersagen; und umgekehrt...		
<b>Methoden-kompetenz</b>		Kompetente Bedienung der Demoprogramme zur Vorlesung – unter Kenntnis aller Parameter!	
<b>Persönliche &amp; soziale Kompetenz</b>	<u>Während Prüfungsvorbereitung in den Weihnachtsferien:</u> Formulierung finaler Fragen an den Prof.: Sie bestimmen damit die Qualität und die Detailtiefe seiner Tipps für Ihre bevorstehende Prüfung!		Bewusstsein, dass es jetzt wichtig ist, am Ball zu bleiben. Damit der sehr abstrakte Stoff greifbar wird, ist es unabdingbar, mit den Demoprogrammen zu „spielen“.



## Periodische Signale

- Ein zeitkontinuierliches Signal  $\tilde{x}(t)$  heißt periodisch, wenn für alle Zeiten gilt:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T_0) = \tilde{x}(t - \tau \cdot T_0); \tau = \pm 1; \pm 2; \dots$$

mit  $T_0 > 0$  :

Grundperiode, kleinstes Zeitintervall, mit dem sich der Signalverlauf wiederholt

und  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ :

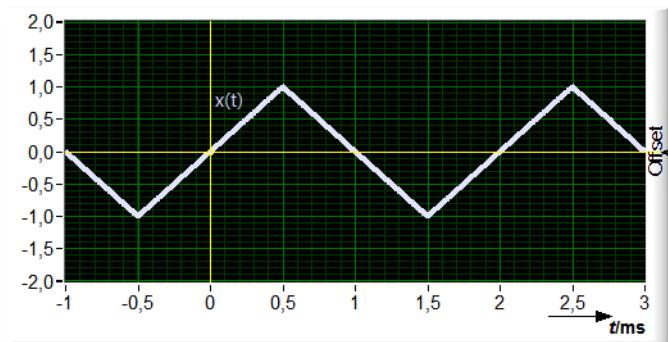
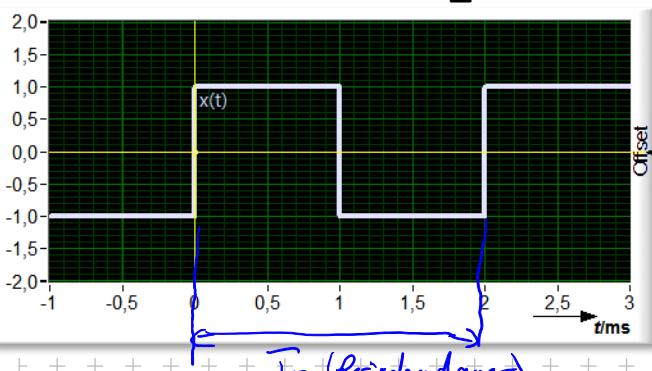
Grundfrequenz

### Beispiel Periodische Signale:

- Kosinus-Schwingung

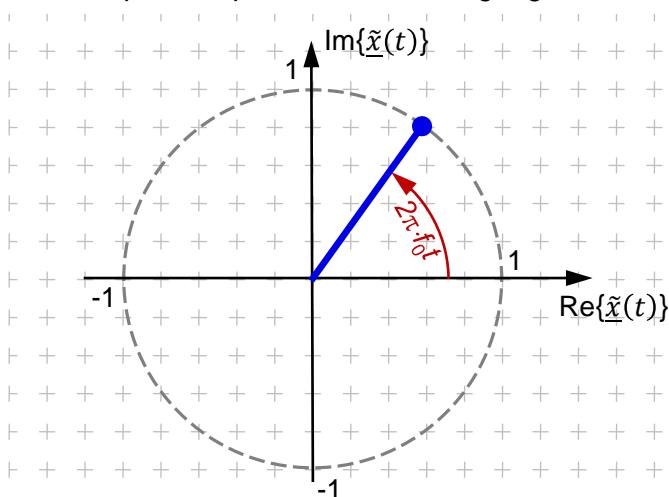
$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \cos[2\pi f_0(t + T_0)]$$

- Beliebige nicht-sinusförmige Schwingungen, wie beispielsweise als Kurvenverläufe elektrischer Spannungen im Programm 6\_FourierreiheAnalyse.exe. Beispiel für  $T_0 = 2$  ms.



- Sprachsignal eines gesprochenen Vokals

- Komplexe exponentielle Schwingung:



$$\tilde{x}(t) = e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} = e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot (t + T_0)}$$

$$= \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + j \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$



## Komplexe Schwingung – Aufgaben

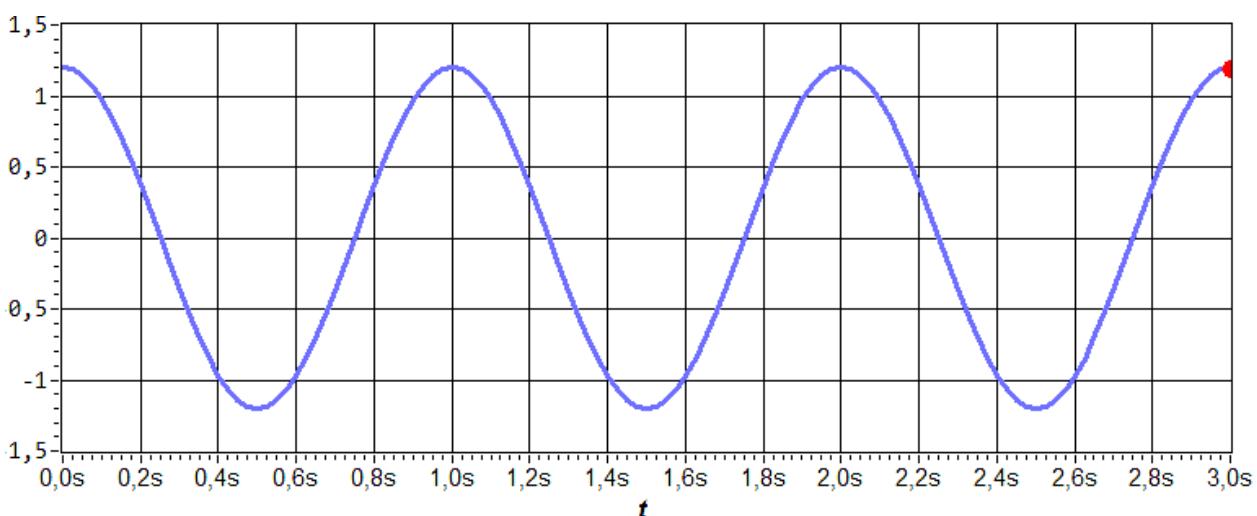
### Demonstration Ansichten einer komplexen exponentiellen Schwingung

Das Programm **4\_KomplexeSchwingung.exe** zeigt eine komplexe Schwingung  $\tilde{x}(t) = e^{j \cdot 2\pi f_0 t}$ :

- Welche geometrische Figur repräsentiert der „Momentanwert  $\tilde{x}(t)$ “?  
*Einheitskreis*
- Welche mathematische Funktion repräsentiert  $\operatorname{Re}\{\tilde{x}(t)\}$ ?  
 *$\cos(2\pi f_0 t)$*
- Welche mathematische Funktion repräsentiert  $\operatorname{Im}\{\tilde{x}(t)\}$ ?  
 *$\sin(2\pi f_0 t)$*
- Was ändert der Parameter Frequenz  $f_0$  an den Kurven  $\operatorname{Re}\{\tilde{x}(t)\}$  und  $\operatorname{Im}\{\tilde{x}(t)\}$ ?  
*Umlaufzeit = Periodendauer  $T_0 = 1/f_0$*
- Welche der drei Darstellungen ändern sich bei negativen Frequenzen?  
*Momentanwert  $\tilde{x}$ : Dreh im Uhrzeigersinn;  $(\operatorname{Im}\{\tilde{x}\})^2 = -1$*
- Was verändert der Parameter Amplitude an den Kurven  $\operatorname{Re}\{\tilde{x}(t)\}$  und  $\operatorname{Im}\{\tilde{x}(t)\}$ ?

### Übungsaufgabe Betrachtung eines Signals als Ansicht einer komplexen Schwingung

Das im Bild unten gezeigte periodische Signal sei eine Ansicht der komplexen Schwingung  $\tilde{x}(t)$ :



- Ist hier der Realteil oder der Imaginärteil dargestellt (Begründung!)?
- Wie lautet die Formel mit korrekten Parametern für  $\tilde{x}(t)$ ? Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen.
- Skizzieren Sie  $\operatorname{Im}\{\tilde{x}(t)\}$  für eine der von Ihnen gefundenen Lösungen!



## Darstellung periodischer Signale als reelle Fourierreihe (FR)

### ■ Fourier-Synthese

Wechselgrößen – auch nicht sinusförmige – können auf eine Überlagerung mehrerer sinusförmiger Wechselvorgänge (sog. *orthogonales* Funktionensystem) mit unterschiedlicher Amplitude, Frequenz, und Phase zurückgeführt werden. Mathematisch ist das die Darstellung als *Fourierreihe*:

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t), \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Gleichanteil gerader Anteil ungerader Anteil

Die Zahlen  $a_k$  und  $b_k$  werden als **Fourierkoeffizienten** bezeichnet. Da sie auch negativ sein können, sind sie nicht als Amplituden zu interpretieren, sondern als **Gewichte**.

### ■ Bezeichnung der FR-Spektralkomponenten als *Harmonische* und *Oberwellen*

Es bedeuten:  $a_0 \hat{=} \text{,Gleichanteil};$

$a_1 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 f_0 \cdot t) \& b_1 \cdot \sin(2\pi \cdot 1 f_0 \cdot t) \hat{=} \text{,1. Harmonische} \hat{=} \text{Grundwelle}$

$a_2 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 f_0 \cdot t) \& b_2 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 f_0 \cdot t) \hat{=} \text{,2. Harmonische} \hat{=} \text{,1. Oberwelle}$

$a_k \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t) \& b_k \cdot \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t) \hat{=} \text{k-te Harmonische} \hat{=} \text{(k-1)te Oberwelle}$

### Beispiel Parameter der Fourierreihe

Folgendes Signal soll als reelle FR (*Fourierreihe*) dargestellt werden:

$$\tilde{x}(t) = \underbrace{\cos(2\pi \cdot 4 \text{kHz} \cdot t)}_{2f_0} + \underbrace{\sin(2\pi \cdot 6 \text{kHz} \cdot t)}_{3f_0}$$

Bestimmen Sie die Grundfrequenz  $f_0$  sowie die Fourier-Koeffizienten des Signals.

$$f_0 = \text{ggF}(4 \text{kHz}, 6 \text{kHz}) = 2 \text{kHz}$$

$$a_2 = b_3 = 1; \text{ alle anderen } a_k = b_k = 0$$

$\Rightarrow$  kein Gleichanteil; keine Grundwelle; nur 1(2. Oberwelle; 2/3. Harmonische/Oberwelle)

### ■ Vorteil der Betrachtung eines Signals als Fourierreihe

Die Betrachtung von Signalen als sog. *Spektrum* (die Fourierkoeffizienten) bietet einige Vorteile:

- Bestimmung der Ausgangssignale von LTI-Systemen ohne Faltungsoperation (s. Kapitel 7)
- Veranschaulichung des Abtasttheorems (s. Kapitel 7)
- Signale, die verschiedene Frequenzen haben, lassen sich über dasselbe Medium übertragen und können anschließend wieder getrennt werden (z.B. Rundfunksender), s. Seite 12.



↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

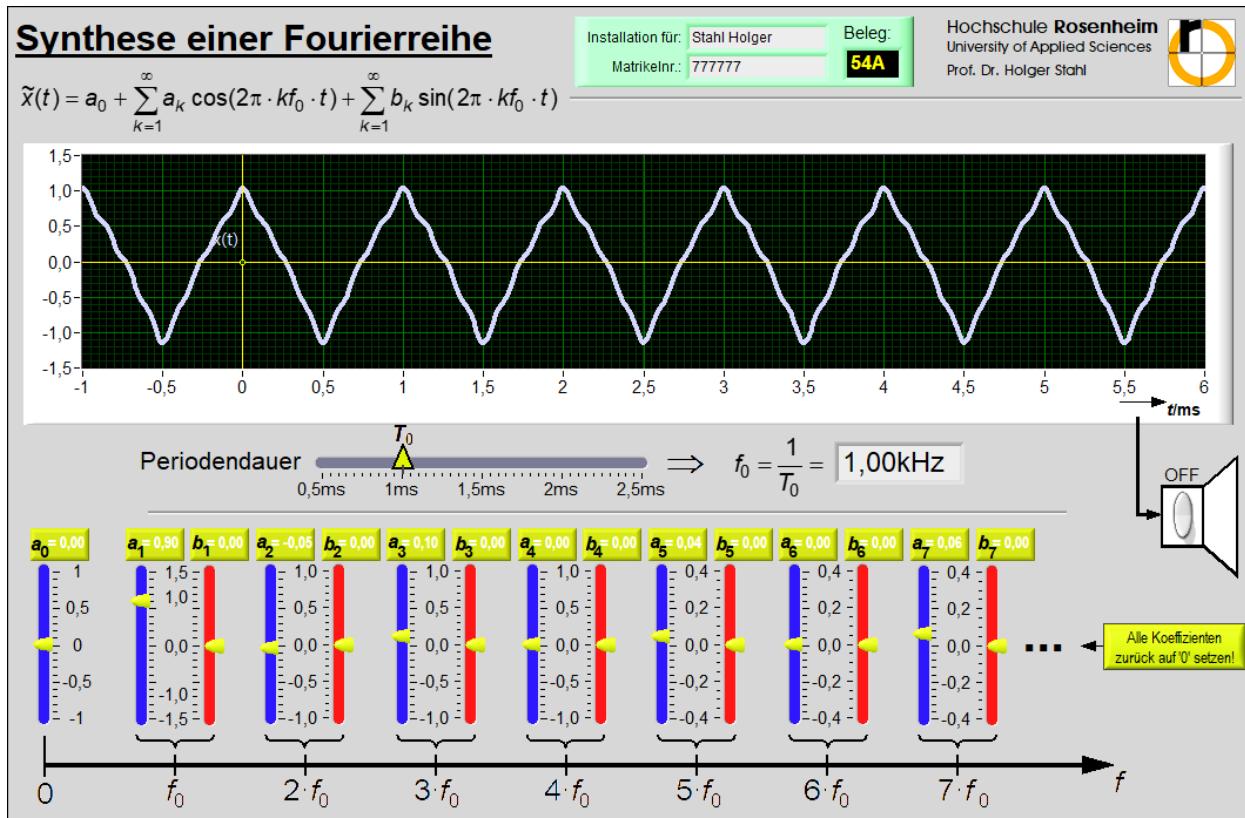
↳ FT – Regeln und Paare

ANHANG

## Synthese periodischer Signale

### Demonstration Approximation eines Dreiecksignals aus Sin- und Cos-Schwingungen

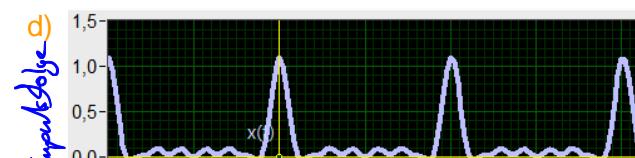
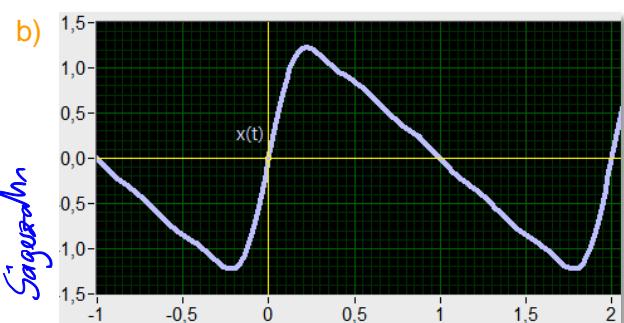
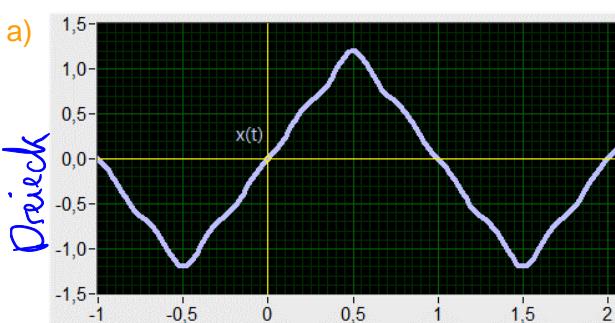
- a) Erzeugen Sie mit dem Programm **5\_FourierreiheSynthese.exe** ein Signal wie im Bild:



- b) Warum ist es hierbei nicht möglich, ein vollkommen exaktes Dreiecksignal zu synthetisieren?

Abbruch der FR-Entwicklung bei  $K > 7$

### Übungsaufgabe Approximieren Sie mit dem Programm folgende Signale...





↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

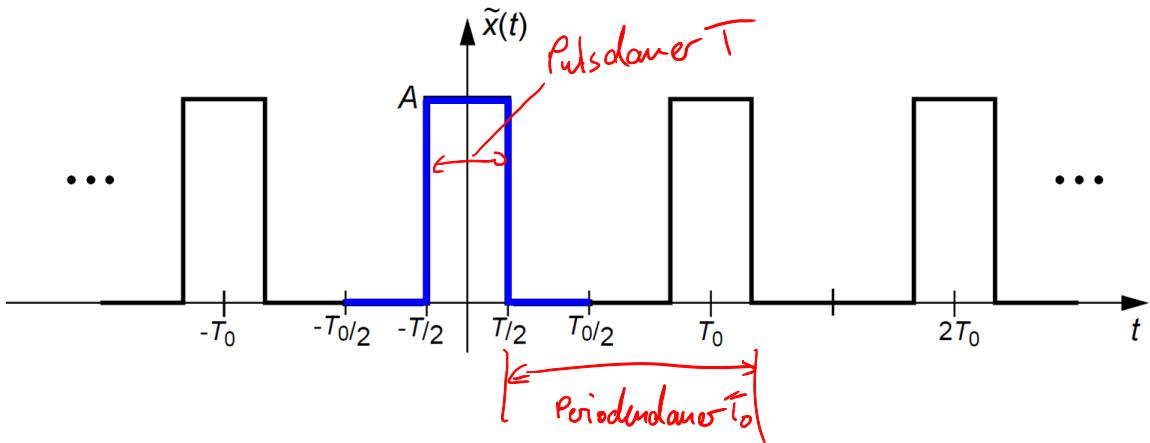
↳ FT – Regeln und Paare

ANHANG

## FR-Entwicklung einer Rechteckwelle

### Beispiel Betrachtet wird eine Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$

mit der Impulsbreite  $T$ , der Periodendauer  $T_0$  und der Amplitude  $A$ :



- Die Fourierkoeffizienten hierzu lauten (Die ausführliche Berechnung der Analyseintegrale finden Sie im Anhang auf Seite 26):

$$a_0 = A \cdot \frac{T}{T_0};$$

Gleichanteil  
(Mittelwert)

$$a_k = 2A \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot k \cdot T/2T_0)}{k\pi}$$

$$b_k = 0$$

⇒ nur Cosinus-Schwingungen

⇒ keine Sinus-Schwingungen

### Demonstration Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ mit $T_0 = 2$ ms, $T = 0,5$ ms und $A = 2$

a) Wie lauten die Grundfrequenz und die Fourierkoeffizienten für  $\tilde{x}(t)$ ?

b) Approximieren Sie das Signal mit 5\_FourierreiheSynthese.exe für  $k \leq 7$ !

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,5} \cdot \frac{1}{s} = 95 \cdot 1000 \cdot Hz = 500 \text{ Hz}$$

$$b_k = 0 \text{ für alle } k$$

$$a_2 = 0,62$$

$$a_3 = 0,13$$

$$a_4 = -0,12$$

$$a_5 = -0,18$$

$$\dots$$

$$a_n = 0$$

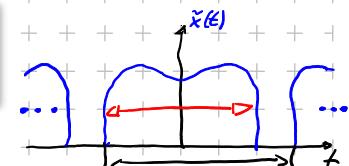


## Symmetrieeigenschaften der FR

■ Folgende Vereinfachungen ergeben sich bei symmetrischen reellen Signalen:

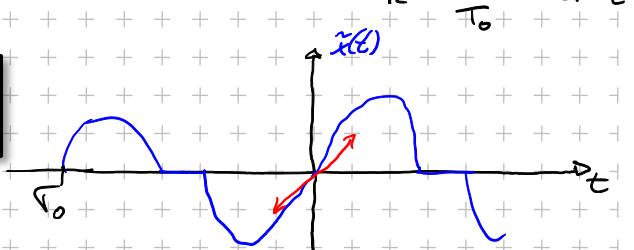
**1. Achsensymmetrie**, d.h.  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$ :

Nur Gleichanteil  $a_0$  und cos-Schwingungen  $a_k \cdot \cos(2\pi \cdot k f_0 \cdot t)$ , alle  $b_k = 0$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$ !



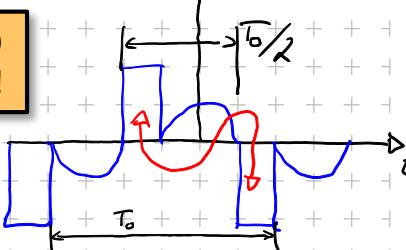
**2. Punktsymmetrie**, d.h.  $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(-t)$ :

Nur sin-Schwingungen  $b_k \cdot \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t)$ , alle  $a_k = 0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$ !

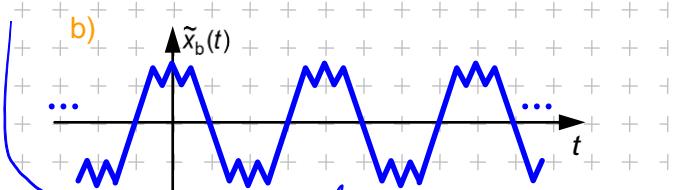
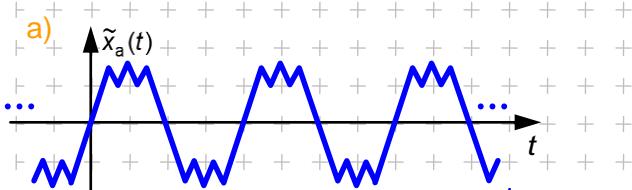


**3. Halbwellensymmetrie**, d.h.  $\tilde{x}(t) = -\tilde{x}\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$ :

Es existieren nur ungerade Harmonische (d.h. für  $k = 1, 3, 5, \dots$ )  
d.h. alle  $a_k = 0$  für  $k = 0, 2, 4, \dots$  und  $b_k = 0$  für  $k = 2, 4, 6, \dots$ !



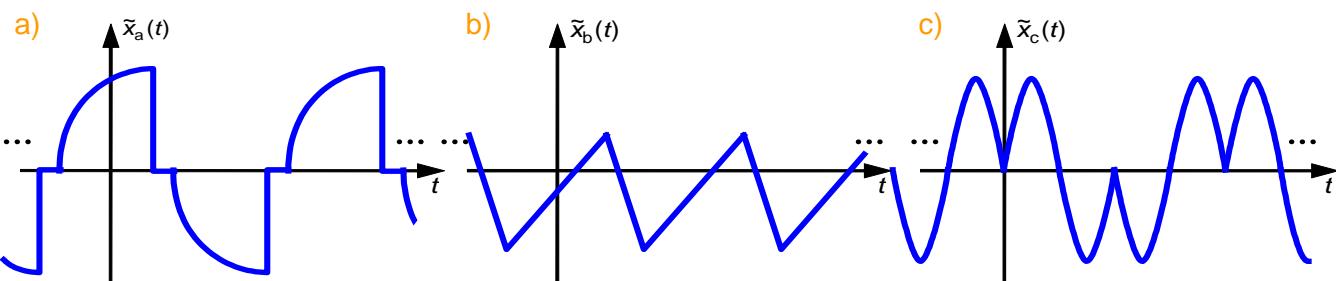
**Beispiel** Welche Symmetrieeigenschaften haben die beiden folgenden Signale?



$\Rightarrow$  Punktsymmetrie + Halbwellen-Symmetrie  $\Rightarrow$  Achsensymmetrie + HW-Symmetrie

### Übungsaufgabe Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der FR

Der Aufwand für die FR-Analyse eines Signals verringert sich, wenn vorhandene Symmetrieeigenschaften des Signals erkannt werden. Betrachten Sie die drei folgenden periodischen Signale im Bild unten. Welche Koeffizienten der zugehörigen FR sind von Null verschieden?



- d) Verifizieren Sie die drei Symmetrieaussagen oben auf dieser Seite (d.h. bestimmte Koeffizienten werden zu Null) für die vier Signale aus der Übungsaufgabe von Seite 6 unten.



Periodische Signale

Reelle FR

Komplexe FR

Fouriertransformation

FT – Regeln und Paare

ANHANG

## Darstellung periodischer Signale als FR mit komplexen Koeffizienten

Im folgenden fassen wir die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  zur Darstellung der  $k$ -ten Harmonischen zu einem **komplexen Koeffizienten**  $\underline{X}_k$  zusammen. Die Darstellung des Spektrums wird damit kompakter und übersichtlicher, weil es nur noch einen Koeffizienten für je ein Paar aus sin- und cos-Anteil einer Signalfrequenz  $k f_0$  gibt. Als orthogonales Funktionensystem werden hier statt der reellen sin- und cos-Schwingungen  $\sin(2\pi k f_0 t)$  und  $\cos(2\pi k f_0 t)$  **exponentielle Schwingungen**  $e^{j \cdot 2\pi k f_0 t}$  genutzt.

### Synthese- und Analysegleichungen der komplexen FR

$$\cos(2\pi f_0 t) + j \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

Synthese

Transformation  
symbol

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k e^{jk \cdot 2\pi f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fourierreihe

Analyse

$$\underline{X}_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk \cdot 2\pi f_0 t} dt$$

Entwicklungskoeffizienten

Die Gesamtheit aller Fourerkoeffizienten eines Signals wird auch **Spektrum** genannt.

Es bedeuten wieder:  $X_0$  Gleichanteil |  $X_1/X_1$  1. Harmonische / Grundwelle  
 $X_2/X_2$  d. - u - / 1. Oberwelle  
 $X_k/X_{-k}$  - u - / (k-1)-te Oberwelle

### Symmetrieeigenschaften der FR eines reellen Signals

- Für reelle Signale gilt:  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}^*(t)$  und damit  $\underline{X}_{-k} = \underline{X}_k^*$
- Damit lässt sich jeder komplexe Koeffizient  $\underline{X}_k$  in zwei reelle Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  überführen:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \underline{X}_0; \quad a_k &= \underline{X}_k + \underline{X}_{-k} = 2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{X}_k\} \\ b_k &= \frac{-\underline{X}_k + \underline{X}_{-k}}{j} = 2 \cdot \operatorname{Im}\{\underline{X}_k\} \end{aligned} \right\}$$

für  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{X}_k =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_k - jb_k}{2} & \text{für } k \geq 1 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{a_k + jb_k}{2} & \text{für } k \leq -1 \end{array} \right.$$

### Beispiel Parameter der Fourierreihe

Folgendes Signal soll als FR mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden, vgl. Seite 5 :

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi \cdot 4 \text{kHz} \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 6 \text{kHz} \cdot t)$$

Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten des Signals.

Ist die Grundwelle vorhanden? Welche Harmonische sind vorhanden?

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 2\pi \cdot 4 \text{kHz} \quad | \quad a_2 = 1 \Rightarrow \underline{X}_2 = \frac{1}{2} = \underline{X}_{-2} \\ b_3 &= 1 \Rightarrow \underline{X}_3 = 1 = -j \cdot \frac{1}{2}; \quad \underline{X}_{-3} = j \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{: keine Grundwelle} \\ \text{: nur 1+2 Oberwellen} \end{array}$$

alle anderen  $\underline{X}_k = 0$



## Rechnerische FR-Entwicklung einer Rechteckimpulsfolge

**Beispiel** Betrachtet wird eine Rechteckimpulsfolge  $\tilde{x}(t)$ , wie auf Seite 7 abgebildet,

mit der Impulsbreite  $T$ , der Periodendauer  $T_0$  und der Amplitude  $A$ :

- Die komplexen Fourierkoeffizienten hierzu lauten (Rechnung im Anhang auf der Seite 26 unten):

$$\underline{X}_k = A \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot T}{2 \cdot T_0}\right)}{k\pi} = A \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot k \cdot T}{T_0}\right)}{k\pi}$$

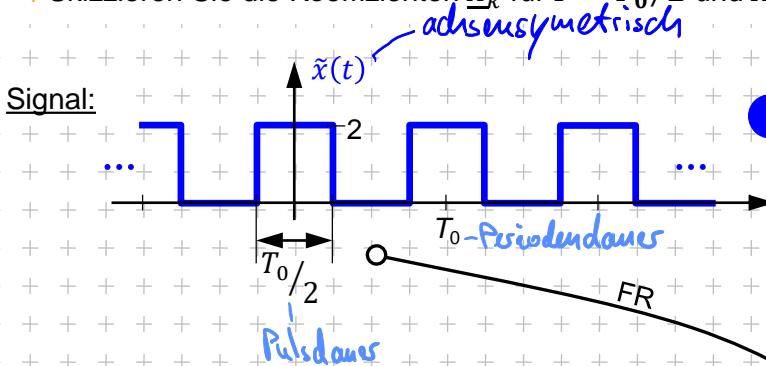
Rechnungen  
nicht Prüfung relevant

**Übungsaufgabe** FR-Entwicklung für die Rechteckimpulsfolge nach obiger Formel:

- Berechnen Sie die ersten vier FR-Koeffizienten  $\underline{X}_0 \dots \underline{X}_3$  für  $T_0 = 2$  ms,  $T = 0,5$  ms und  $A = 2$ .
- Prüfen Sie, ob die „Symmetrieeigenschaften der FR eines reellen Signals“ von S. 9 erfüllt sind!
- Verifizieren Sie, dass die komplexen und die reellen Koeffizienten identisch sind.

**Übungsaufgabe** Symmetrische Rechteckimpulsfolge (Puls-/Pausenverhältnis 1:1):

⇒ Skizzieren Sie die Koeffizienten  $\underline{X}_k$  für  $T = T_0/2$  und  $A = 2$  in das untenstehende Diagramm:



Si-/Spaltfunktion

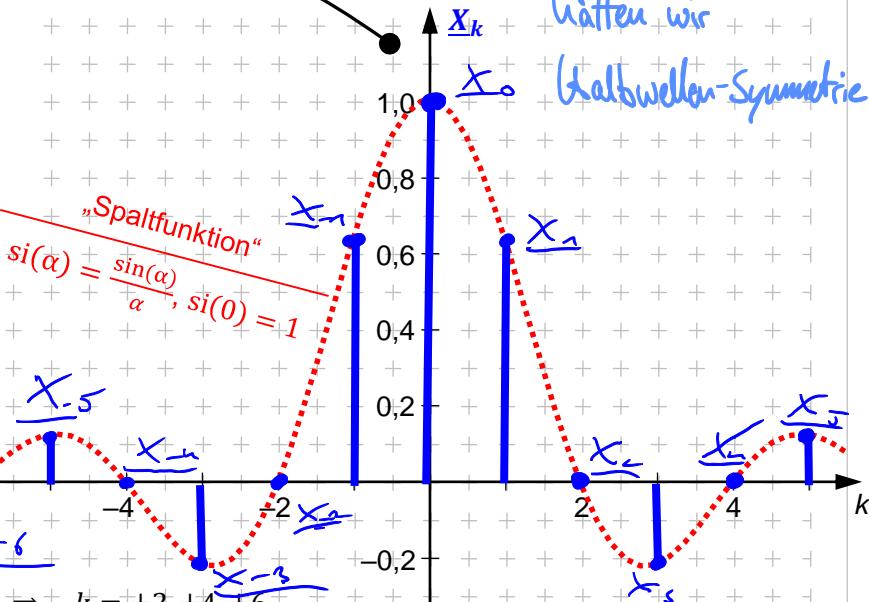
$$Si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Ohne Gleichanteil  
würden wir

Halbwellen-Symmetrie

Spektrum:

$$\begin{aligned} \underline{X}_k &= \frac{2}{k\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot k \cdot T_0}{T_0}\right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = si\left(k \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$





↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

↳ FT – Regeln und Paare

↳ ANHANG

## Analyse periodischer Signale am Rechner

### Demonstration Analyse des symmetrischen Rechtecksignals mit $T = T_0/2$ und $A = 2$ :

- a) Rufen Sie das Programm **6\_FourierreiheAnalyse.exe** auf und erzeugen Sie ein Signal wie in der 2. Übungsaufgabe auf der vorherigen Seite [10](#) verwendet, und wie rechts im Bild im Spektralbereich dargestellt.

- b) Welche Symmetrieeigenschaften (auf der Seite [8](#)) gelten für dieses Signal?  
Welche FR-Koeffizienten sind daher von Null verschieden?

*Achsensymmetrie*

$$\Rightarrow b_k = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \{X_k\} = 0 \text{ für alle } k$$

*HW-Symmetrie u. ...*

$$\Rightarrow a_k = b_k = X_k = 0 \text{ für } k \text{ gerade } \neq 0$$

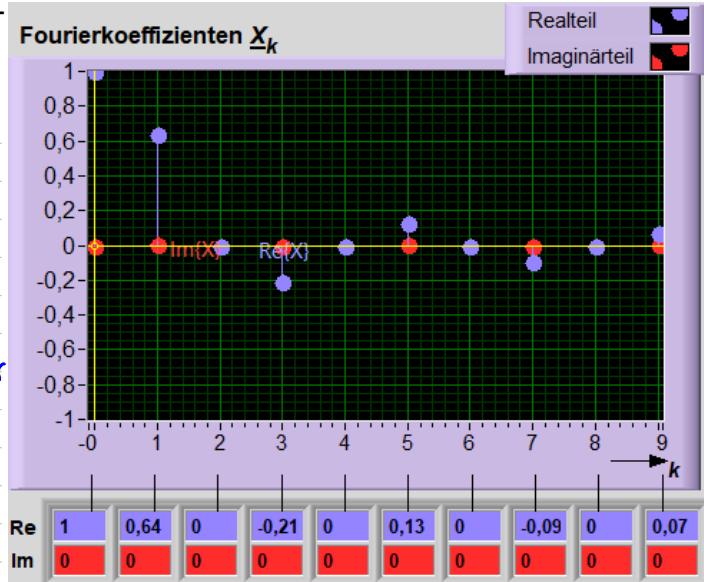
- c) Berechnen Sie die reellen FR-Koeffizienten  $a_0 \dots a_7$ . Überprüfen Sie die Koeffizienten, indem Sie diese in das Programm **5\_FourierreiheSynthese.exe** eingeben.

*Koeffizienten der reellen Fourierreihe (Seite 6-8)*

$$a_0 = X_0$$

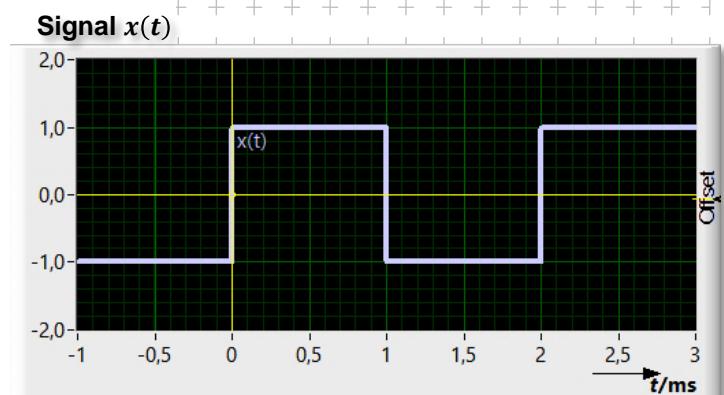
$$a_k = 2 \cdot \operatorname{Re} \{X_k\}$$

k	0	1	3	5	7
$a_k$	1	1,128	-0,42	0,26	-0,18



### Übungsaufgabe Modifizierte Rechteckimpulsfolge

- a) Wodurch unterscheidet sich das rechts im Bild dargestellte Signal von dem oben behandelten im Zeitbereich?  
b) Welche Unterschiede gibt es im Spektrum?  
c) Berechnen Sie die die reellen FR-Koeffizienten für  $k = 0 \dots 7$ . Überprüfen Sie diese wieder mit dem Programm **5\_FourierreiheSynthese.exe**.



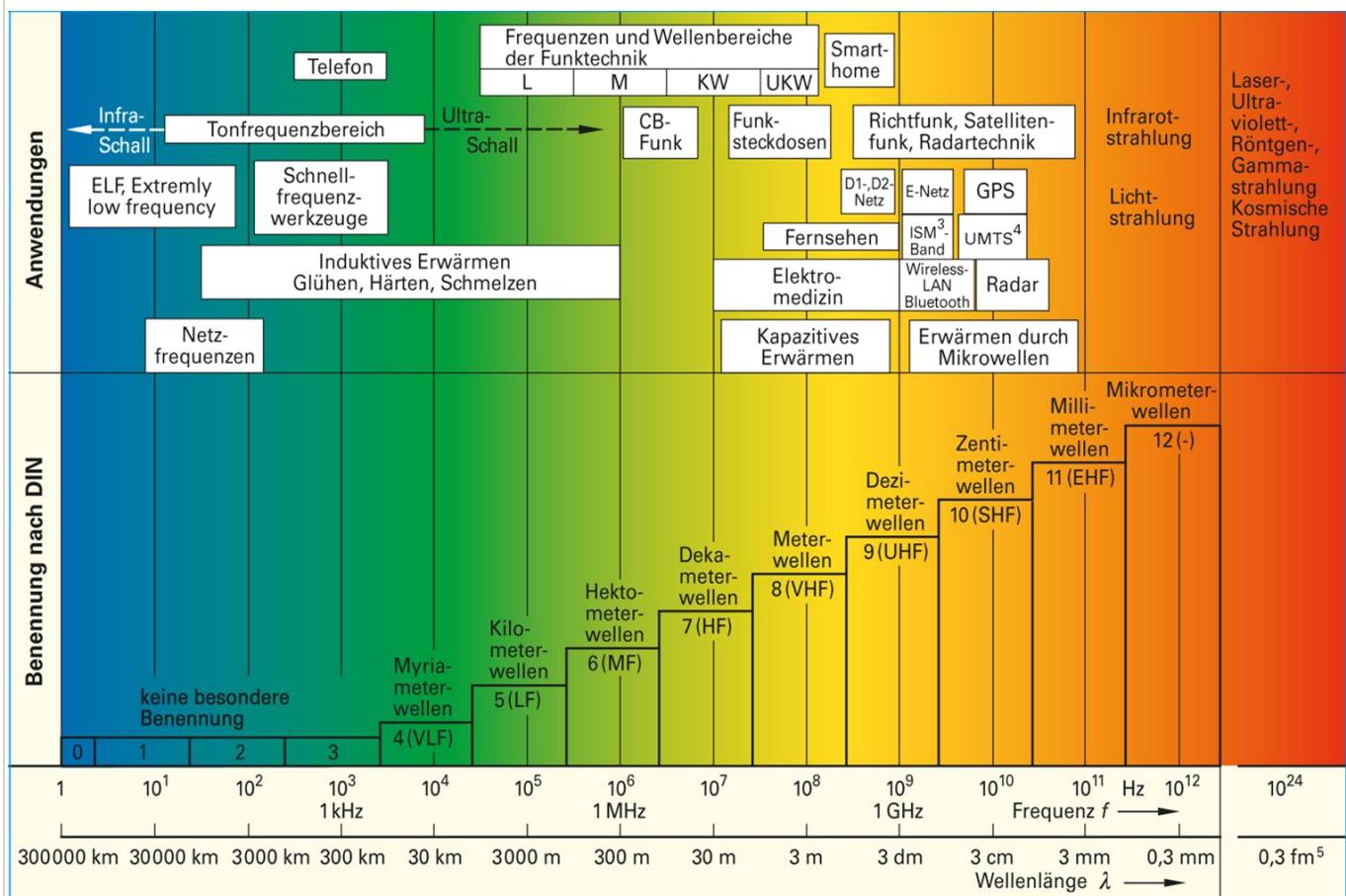
### Übungsaufgabe Dreiecksignal

⇒ Wiederholen Sie die Analyse und die Synthese auch für das periodische Dreiecksignal.



# Frequenzbereiche und einige Anwendungen im Alltag

Auch im alltäglichen Leben unterscheiden wir Signale mit Frequenzen über viele Zehnerpotenzen. Das folgende **Bild** gibt einen sehr groben Überblick aller im Alltag vorkommenden Frequenzbereiche:



- aus [BumilFE], mit freundlicher Genehmigung

## **Beispiel Gefahrenpotential für den Menschen durch elektromagnetische Wellen**

- a) Welche (wissenschaftlich anerkannten!) Gefahren durch elektromagnetische Wellen gibt es?
  - b) In welchen Frequenzbereichen bestehen diese Gefahren jeweils?

a.) Zellzerstörung durch Gifte, oder Zellbeschädigung durch ionisierende Strahlung

b.) Desertalwellen (Band 1 WS-Lam) ; UV-Strahlung, Röntgen-Strahlung

**Übungsaufgabe** Mit welcher *Frequenz* oder welchem *Frequenzbereich* arbeitet ...

- a) das elektrische Stromnetz in Europa,  $50\text{Hz}$
  - b) das elektrische Stromnetz in USA,  $60\text{Hz}$
  - c) das menschliche Gehör,  $20\text{Hz} - 20\text{kHz}$
  - d) der UKW(*Ultrakurzwelle*)-Sender Bayern 3,  $98,5\text{MHz}$
  - e) ein Mikrowellenherd,  $2,45\text{GHz}$
  - f) Handys der 4. Mobilfunkgeneration *LTE*,  $800\text{MHz} - 5\text{GHz}$
  - g) W-LAN-Standard WiFi,  $2,45\text{GHz}$ ;  $(60\text{GHz}), 4-5\text{GHz}$
  - h) W-PAN-Standard Bluetooth,  $2,45\text{GHz}$



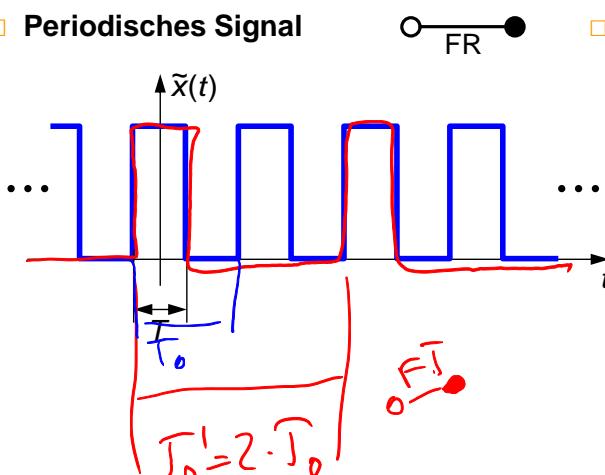
## Übergang von der Fourierreihe (FR) zur Fouriertransformation (FT)

### Notwendigkeit der Fouriertransformation als Ergänzung zur Fourierreihe

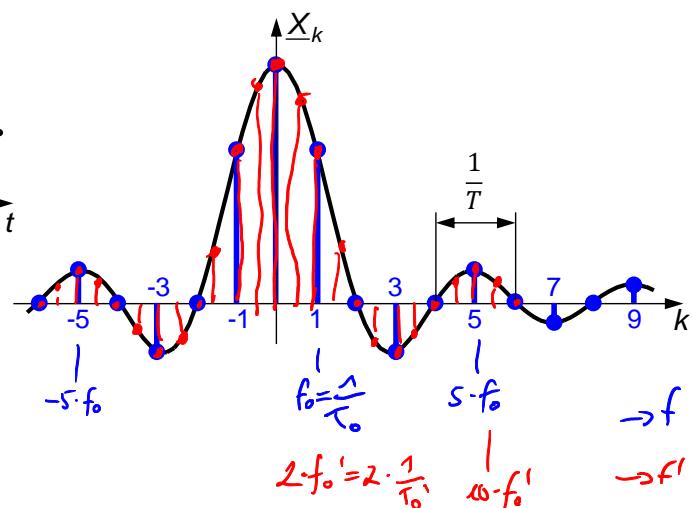
Mit der FR können nur periodische Signale in den FB transformiert werden. Viele (streng genommen: alle!) Signale im täglichen Leben sind jedoch nicht-periodisch. So auch die Impulsantwort von LTI-Systemen, die im Spektrum den sog. *Frequenzgang* liefert, mit dem sich die Filterung eines Signals viel anschaulicher darstellen lässt, als durch die Faltung im Zeitbereich.

### Auffassung der Fouriertransformation als FR mit unendlich großer Periode $T_0$

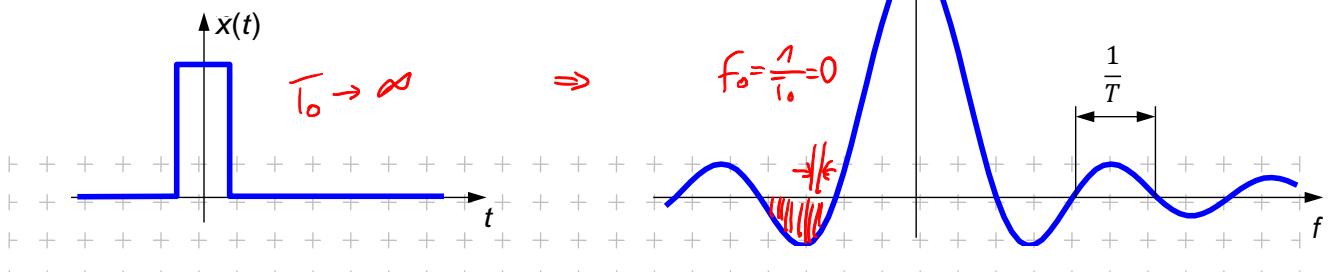
#### Periodisches Signal



#### Fourierkoeffizienten (vgl. Seite 10)



#### Nicht-periodisches Signal



⇒ Die Fourierreihe stellt ein periodisches Signal dar durch Superposition harmonischer Schwingungen (z.B. Sinus und Kosinus) der Frequenz  $k \cdot f_0$ . Die Amplitude dieser Schwingungen ist gewichtet durch die Koeffizienten  $X_k$ .

⇒ Je größer die Periode  $T_0$  des Signals ist, desto kleiner wird der Frequenzabstand  $f_0 = 1/T_0$  zwischen den einzelnen Harmonischen.

#### Übergang zur Fouriertransformation:

⇒ Periodizitätsintervall  $T_0 \rightarrow \infty$

⇒ diskrete Frequenzfolge ( $k \cdot f_0$ ) → Frequenzkontinuum ( $f$ )



Periodische Signale

Reelle FR

Komplexe FR

Fouriertransformation

FT – Regeln und Paare

ANHANG

## Definition der Fouriertransformation (FT)

Die FT gilt als die „Grund“-Transformation, mit Hilfe derer ein zeitkontinuierliches Signal als frequenzkontinuierliches Spektrum betrachtet werden kann. Viele Operationen (Filterung, Modulation, Abtastung) lassen sich im Spektralbereich viel einfacher und anschaulicher betrachten als im Zeitbereich.

### Vergleich Synthese- und Analysegleichungen der Fouriertransformation und -reihe

$$\text{Fouriertransformation} = \cos(2\pi f \cdot t) + j \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

$$\text{Fourierreihe}$$

$$\underline{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f \cdot t} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}(t) e^{-j2\pi f \cdot t} dt$$

**Synthese**  
(inverse FT)

**Analyse (FT)**

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk \cdot 2\pi f_0 \cdot t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \widetilde{x}(t) e^{-jk \cdot 2\pi f_0 \cdot t} dt$$

$$= \cos(2\pi f \cdot t) - j \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

#### Gemeinsamkeit FT und FR:

⇒ Das orthogonale Funktionensystem sind exponentielle Schwingungen  $e^{j \cdot 2\pi f}$ .

#### Unterschiede FT und FR:

⇒ Die FT-Synthese enthält ein Integral über alle Frequenzkomponenten, die FR eine Summe.

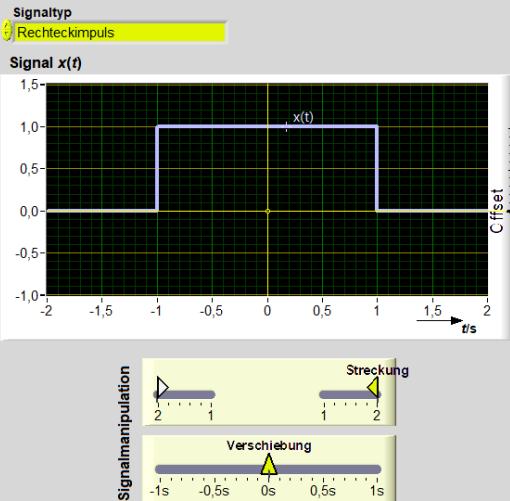
⇒ Das Analyse-Integral der FT läuft von  $t = -\infty$  bis  $+\infty$ , das Analyse-Integral der FR nur über eine beliebige Periode.

⇒ Mit der FT können damit auch nicht-periodische Signale transformiert werden, wie z.B. ein einzelner Rechteckimpuls (hier mit dem Programm 7\_Fouriertransformation.exe):

### Fouriertransformation

Installation für: Stahl Holger  
Beleg:  
Matrikelnr.: 777777  
74F

Hochschule Rosenheim  
University of Applied Sciences  
Prof. Dr. Holger Stahl



<sup>1)</sup> Die ausgefüllte Seite der Hantel zeigt immer zum Spektrum (d.h. in den Frequenzraum). Die Beschriftung „FT“ kann auch weggelassen werden, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Transformationen besteht, z.B. mit der Fourierreihe FR.

# Fouriertransformation periodischer Signale

Die FT eignet sich zur Transformation sog. *energiebegrenzter* Signale. Periodische Signale gehören definitiv nicht zu dieser Kategorie. Allerdings lassen sich mit einem Trick auch periodische Signale Fourier transformieren: Wenn man zulässt, dass im Spektralbereich  **$\delta$ -Impulse** auftreten:

- Das Spektrum eines periodischen Signals ist eine äquidistante Impulsfolge:

- Wie im Anhang auf S. 27 bewiesen, ist die Fouriertransformierte einer exponentiellen Schwingung ein auf der Frequenzachse verschobener  $\delta$ -Impuls. Mit der Linearität der FT gilt daher:

⇒ Periodisches Signal  $\tilde{x}(t)$  als FR dargestellt = Summe aus exponentiellen Schwingungen:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Das Spektrum einer exponentielle Schwingung ist  $\propto e^{-|f-f_0|t}$  an der Stelle  $f=f_0$

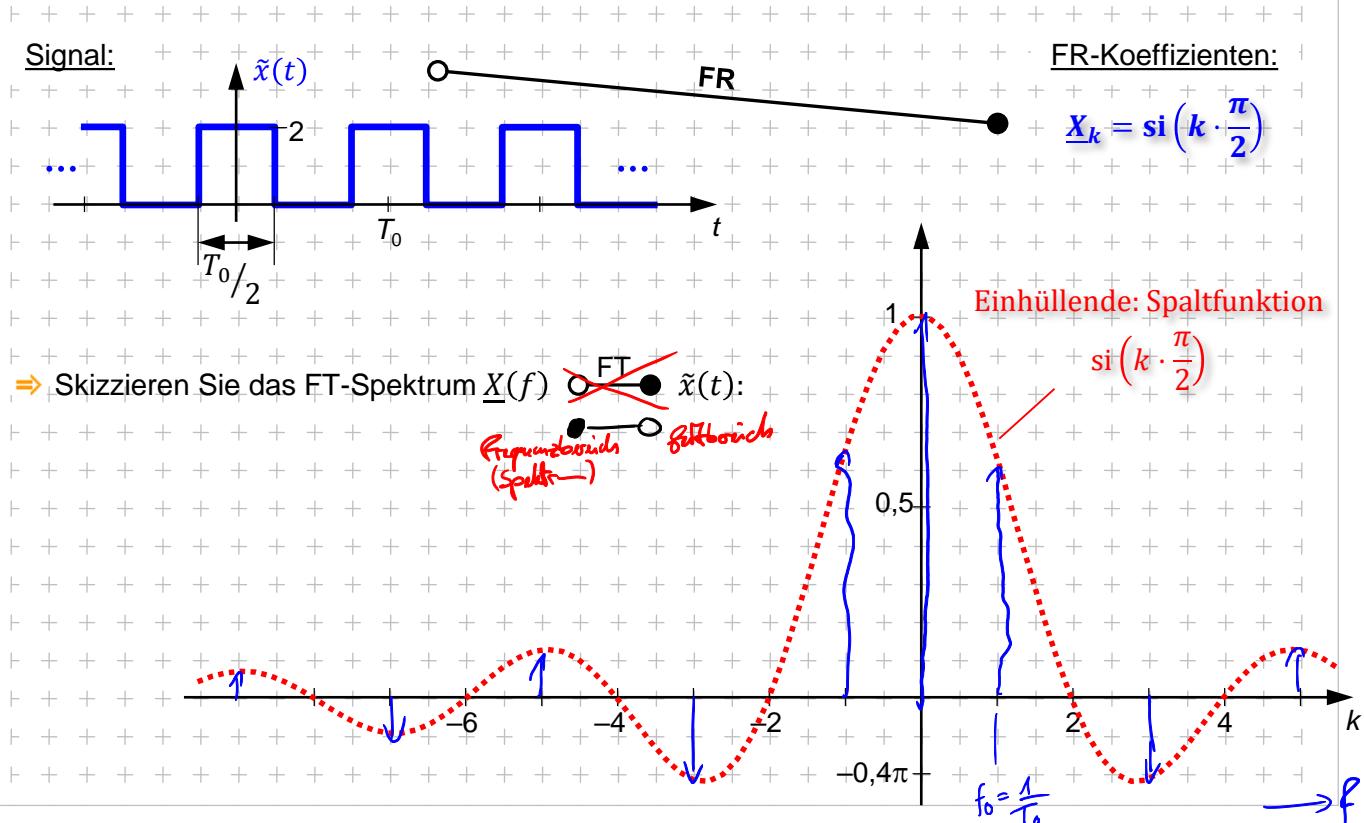
⇒ Dazu das FT-Spektrum  $X(f)$  = Summe aus verschobenen, gewichteten  $\delta$ -Impulsen:

$$\underline{X}(f) = \sum \underline{X}_k \cdot \delta(f - kf_0)$$

- jeder FR-Koeffizient gewichtet seinen  $\zeta$ -Impuls an der Stelle  $f = kf_0$ .

**Beispiel** Rechteckimpulsfolge mit Puls-/Pausenverhältnis 1:1

Betrachtet wird folgendes periodisches Rechtecksignal  $\tilde{x}(t)$  mit den FR-Koeffizienten  $X_k$  (vgl. S. 10):





Periodische Signale

Reelle FR

Komplexe FR

Fouriertransformation

FT – Regeln und Paare

ANHANG

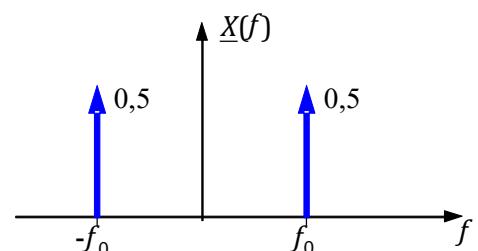
## Fouriertransformation periodischer Signale – Kosinus und Sinus

### Beispiel cos-Signal<sup>1)</sup>

Eulersche Formel  
(S. 24 unten)

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi \cdot f_0 t} + e^{-j2\pi \cdot f_0 t})$$

FT

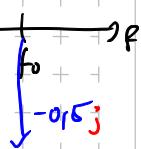


D sin-Signal:

$$\tilde{x}(t) = \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2j} (e^{j2\pi \cdot f_0 \cdot t} - e^{-j2\pi \cdot f_0 \cdot t})$$

FT

$$X(f) = \frac{1}{2j} (\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0))$$



### Demonstration Fragen zur Fouriertransformation verschiedener periodischer Signale

a) Welche Einheit hat die Frequenzachse im Programm **7\_Fouriertransformation.exe**?

Hz (Frequenz)

b) Welche Einheit hat die Hochachse?

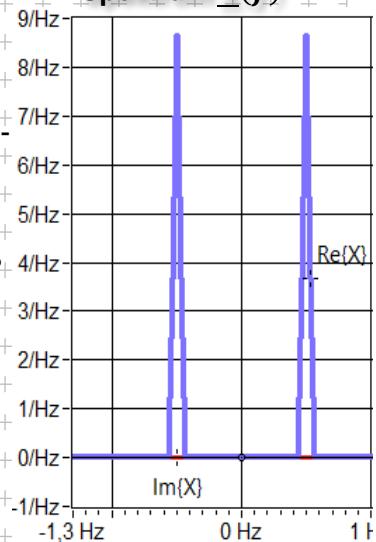
1/Hz (spektrale Amplitudendichte)

c) Untersuchen Sie ein **cos**-Signal. Prüfen Sie, ob die Impulse im Spektrum an den richtigen Positionen auf der Frequenzachse auftreten.

f0

d) Warum sind Breite und Amplitude der  $\delta$ -Impulse (**Bild**) nicht korrekt?

Spektrum  $X(f)$



e) Untersuchen Sie ein **sin**-Signal. Schaut das Spektrum wie erwartet aus, mit Impulsen an der richtigen Position auf der Frequenzachse?

### Übungsaufgabe Periodisches Rechtecksignal in **7\_Fouriertransformation.exe**

Untersuchen Sie die Rechteckimpulsfolge aus dem Beispiel auf der vorherigen Seite.

a) Prüfen Sie, ob die Frequenzanteile genau an den erwarteten Stellen erscheinen.

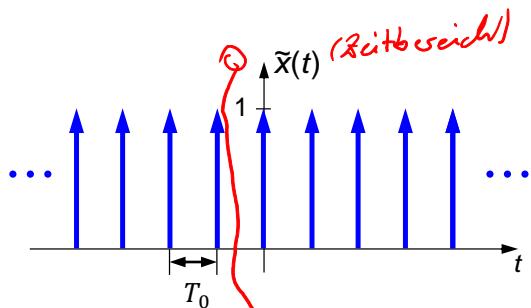
b) Woran erkennen Sie im Spektrum eindeutig den Gleichanteil des Signals, sowie dessen Höhe?

<sup>1)</sup> Zur Erinnerung: Die Fouriertransformation einer exponentiellen Schwingung ist ein verschobener  $\delta$ -Impuls, s. auch Anhang auf Seite 27.

Fouriertransformation periodischer Signale –  $\delta$ -Impulsfolge**Beispiel Die unendlich ausgedehnte Impulsfolge im Zeitbereich...**

... korrespondiert mit einer unendlich ausgedehnten Impulsfolge im Frequenzbereich:

□ Impulsfolge im Zeitbereich:  $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$



□ als FR geschrieben:  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$

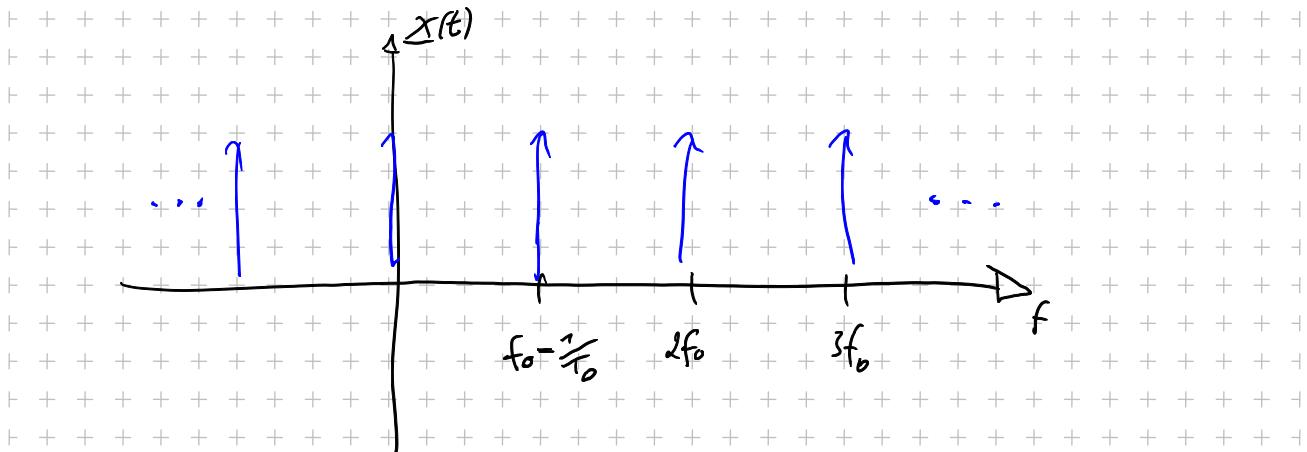
□ Bestimmung der FR-Koeffizienten:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) dt = \frac{1}{T_0}$$

E gilt die Ausblendeigenschaft  
als  $\delta$ -Impuls  $\int e^{-jk2\pi k f_0 t} |_{t=nT_0} = 1$  für alle  $n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots$

□ Mit den Formeln auf Seite 15 ergibt sich die FT  $X(f)$   $\xrightarrow{\text{FT}}$   $\tilde{x}(t)$  zu:

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0)$$



Die Impulsfolge wird genutzt zur Darstellung der Abtastung



↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

↳ FT – Regeln und Paare

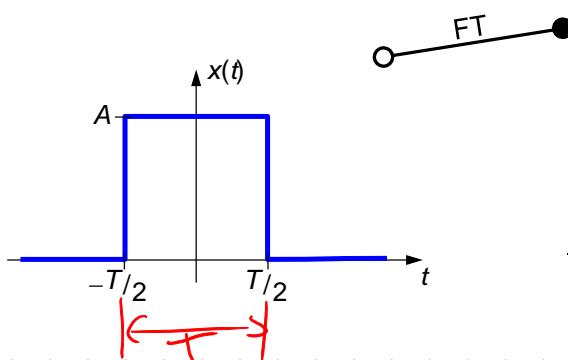
↳ ANHANG

## Fouriertransformation nicht-periodischer Signale – Beispiele

### Beispiel Der Rechteck-Impuls

□ Signal:

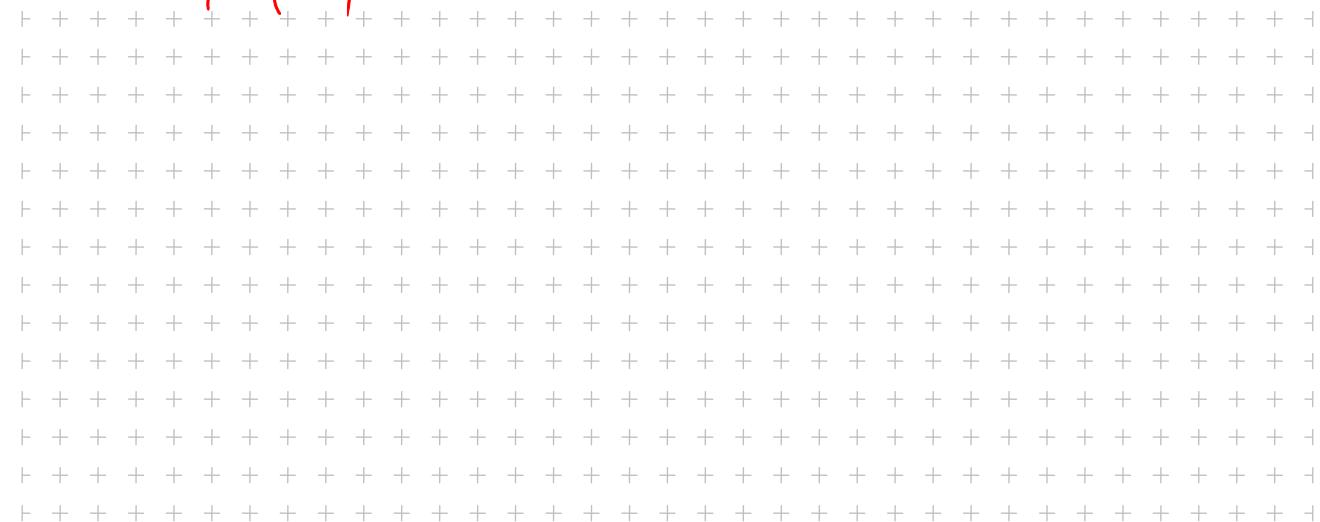
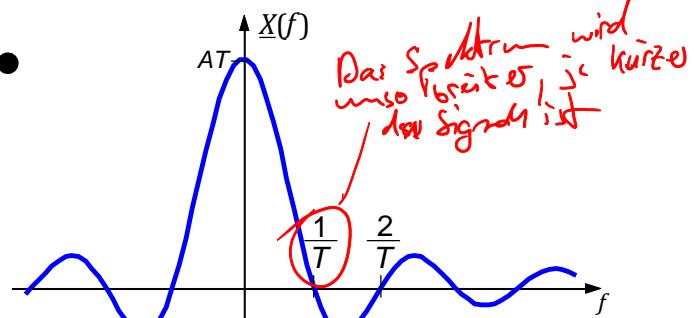
$$x(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$



□ Spektrum:

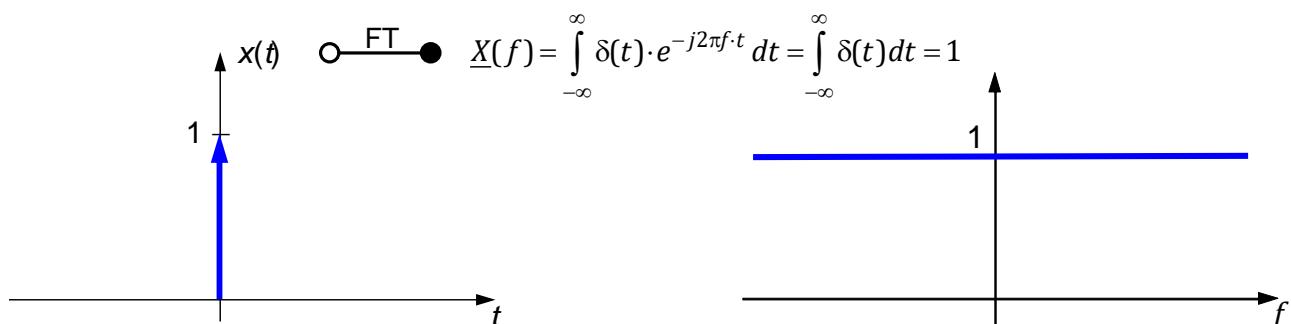
$$\underline{X}(f) = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f \cdot t} dt = AT \cdot \sin(\pi \cdot f \cdot T)$$

*Spaltfunktion*



### Beispiel Der Dirac'sche $\delta$ -Impuls

□ Das Spektrum des  $\delta$ -Impulses  $x(t) = \delta(t)$  ist konstant 1, siehe auch Anhang Seite 27 unten:





↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

↳ FT – Regeln und Paare

↳ ANHANG

## Rechenregeln der Fouriertransformation

Mit Hilfe folgender Regeln lassen sich neue FT-Korrespondenzen aus bereits bekannten bilden:

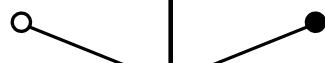
	Zeitbereich $\underline{x}(t)$	$\overset{\text{FT}}{\circ}$	Frequenzbereich $\underline{X}(f)$
Vertauschung	$\underline{X}^*(t)$		$\underline{x}^*(f)$
Linearität	$a \cdot \underline{x}_1(t) + b \cdot \underline{x}_2(t)$		$a \cdot \underline{X}_1(f) + b \cdot \underline{X}_2(f)$
Maßstabsänderung	$\underline{x}(at)$		$\frac{1}{ a } \underline{X}\left(\frac{f}{a}\right)$
Verschiebung (Zeit) (Frequenz)	$\underline{x}(t - t_0)$		$e^{-j \cdot 2\pi f \cdot t_0} \cdot \underline{X}(f)$
Faltung & Modulation	$e^{j \cdot 2\pi f_0 \cdot t} \underline{x}(t)$		$\underline{X}(f - f_0)$
	$\underline{x}_1(t) * \underline{x}_2(t)$		$\underline{X}_1(f) \cdot \underline{X}_2(f)$
	$\underline{x}_1(t) \cdot \underline{x}_2(t)$		$\underline{X}_1(f) * \underline{X}_2(f)$

### Zuordnungssatz

reell & gerade



reell & ungerade



imaginär & gerade



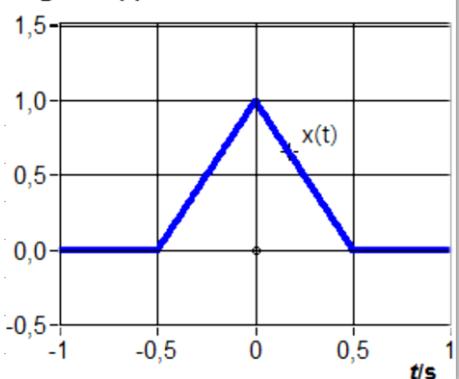
imaginär & ungerade



### Beispiel Zuordnungssatz

Welche der Eigenschaften *gerade*, *ungerade*, *reell*, oder *imaginär* treffen auf das Spektrum des Dreiecksignals im Bild rechts zu?

Signal  $x(t)$





Periodische Signale

Reelle FR

Komplexe FR

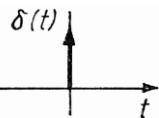
Fouriertransformation

FT – Regeln und Paare

ANHANG

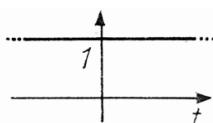
## Häufig benötigte Paare (Korrespondenzen) der Fouriertransformation

Zeitbereich  $x(t)$   $\xrightarrow{\text{FT}}$  Frequenzbereich  $X(f)$



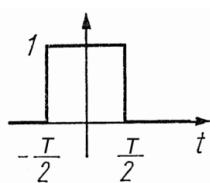
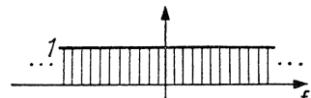
$$\delta(t)$$

$$1$$



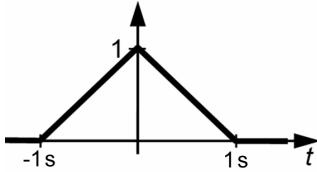
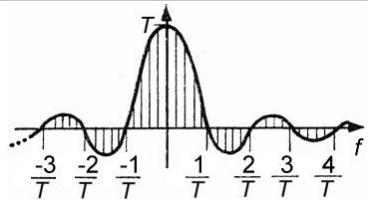
$$1$$

$$\delta(f)$$

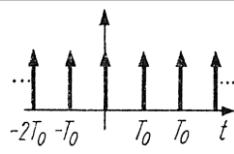
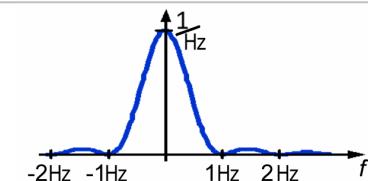


$$\sigma\left(t + \frac{T}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{T}{2}\right); \\ T > 0$$

$$T \cdot \text{si}(T \cdot \pi f)$$

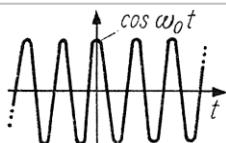
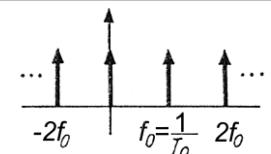


$$\text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{f}{\text{Hz}}\right) \cdot \frac{1}{\text{Hz}}$$



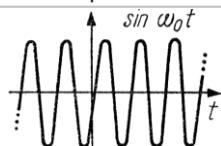
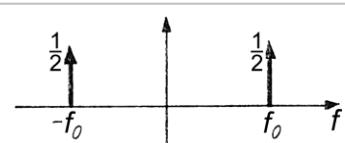
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$f_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot f_0); \\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$



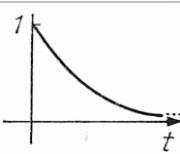
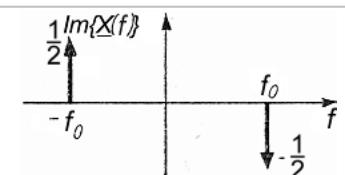
$$\cos(2\pi f_0 \cdot t)$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$



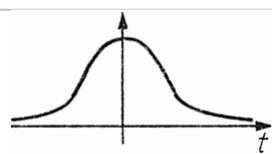
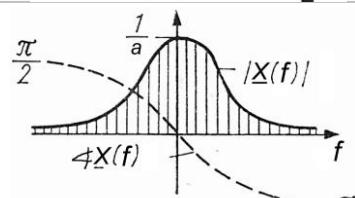
$$\sin(2\pi f_0 \cdot t)$$

$$\frac{1}{2j} \cdot (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$



$$e^{-at} \sigma(t); a > 0$$

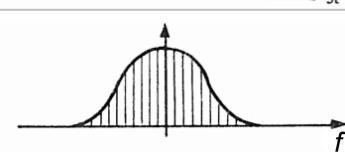
$$\frac{1}{a + j \cdot 2\pi f}$$



$$e^{-\pi \frac{t^2}{\sigma^2}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk \cdot 2\pi f_0 \cdot t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k \cdot f_0)$$





↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

↳ FT – Regeln und Paare

↳ ANHANG

## Analyse eines Sprachsignals in Zeit- und Frequenzbereich

Zur Spektralanalyse eines Signals  $x(t)$  möchte man oft nur wissen, wie stark der entsprechende Spektralanteil ist, ohne dessen Aufteilung in Real- und Imaginärteil zu kennen. Es reicht dann, den Betrag des komplexen Spektrums  $\underline{X}(f)$  darzustellen – das sog. **Amplitudenspektrum**  $|\underline{X}(f)|$ :

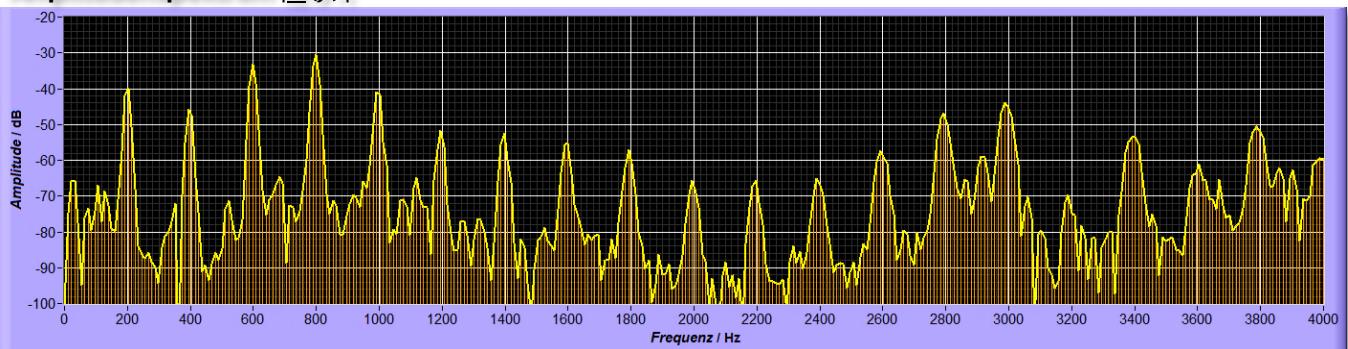
### Demonstration Analyse Ihrer eigenen Stimme

Starten Sie das Programm **8\_AudioSignalUndSpektrum.exe**, um Proben Ihrer Stimme zu analysieren! Achten Sie bei den Aufnahmen auf eine gute Aussteuerung der Aufnahme!

- a) Wodurch unterscheiden sich die Frikative (Zischlaute)  $\langle s \rangle$ ,  $\langle f \rangle$ ,  $\langle ch \rangle$  und  $\langle sch \rangle$  von den Vokalen  $\langle a \rangle$ ,  $\langle o \rangle$ ,  $\langle u \rangle$ ,  $\langle e \rangle$ ,  $\langle i \rangle$ ,  $\langle l \rangle$  im Zeitbereich und im Spektrum?
- b) Wo ist die Tonhöhe sichtbar?
- c) Wodurch unterscheiden sich Vokale, die von einem Mann oder einer Frau gesprochen wurden?
- d) Wodurch unterscheiden sich die beiden Vokale  $\langle e \rangle$  und  $\langle u \rangle$  im Zeitsignal?
- e) Wodurch unterscheiden sich die Vokale  $\langle e \rangle$  und  $\langle u \rangle$  im Spektrum?

### Übungsaufgabe Analyse einer fremden Stimme:

#### Amplitudenspektrum $|\underline{X}(f)|$



- a) Wurde hier ein Frikativlaut oder ein Vokal gesprochen (Begründung)?
- b) Wie hoch ist die Grundfrequenz  $f_0$  des Signals?
- c) Nehmen Sie an, dass dieses Signal mit der normalen Tonlage des Sprechers oder der Sprecherin erzeugt wurde. War dies vermutlich ein Mann oder eine Frau (Begründung)?
- d) Finden Sie durch Vergleich mit Ihrer eigenen Stimme heraus, welcher Vokal gesprochen wurde!



↳ Periodische Signale

↳ Reelle FR

↳ Komplexe FR

↳ Fouriertransformation

↳ FT – Regeln und Paare

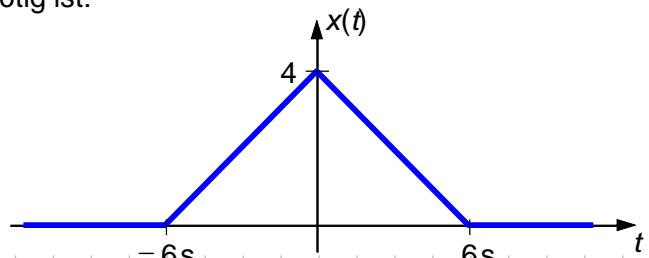
↳ ANHANG

## Ableitung weiterer FT-Korrespondenzen mit Hilfe der Regeln

Mit dem Werkzeugen auf den Seiten [19](#) und [20](#) lassen sich weitere Korrespondenzen finden, ohne dass die explizite Ausführung des Fourier-Integrals nötig ist:

### Beispiel Spektrum eines Dreiecksignals

⇒ Berechnen Sie FT  $X(f)$   $x(t)$  zu dem rechts dargestellten Signal  $x(t)$ !



### Übungsaufgabe Verwandtschaft von Rechteck- und Dreieckimpuls

Vergleichen Sie im Programm [7\\_Fouriertransformation.exe](#) die Spektren des Rechteck- und des Dreiecksimpulses. Achten Sie dabei ganz besonders auf die Lage der Nullstellen!

- Warum hat das Spektrum des Dreieckimpulses keine negativen Anteile?
- Erklären Sie in einem Satz, warum die Lage der Nullstellen im Spektrum des Dreiecksimpulses genau doppelt so weit auseinander sind wie die im Spektrum des Rechteckimpulses.



## Praktische Übungen zu wichtigen Rechenregeln der FT

### Demonstration Der Zuordnungssatz

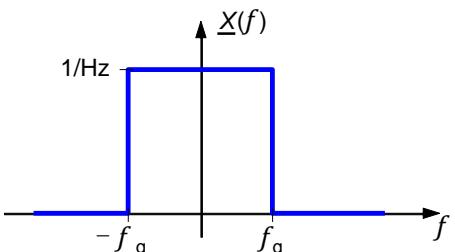
Alle mit dem Programm 7\_Fouriertransformation.exe erzeugten Zeitsignale lassen sich so verschieben, dass sie **gerade** (d.h. achsensymmetrische) Funktionen darstellen.

- Prüfen Sie die Gültigkeit des Zuordnungssatzes für alle Signale in Achsensymmetrie!
- Die drei (im Auswahlmenü *letzten*) periodischen Signale lassen sich auch ungerade (d.h. Punktsymmetrie) verschieben. Prüfen Sie auch hier die Gültigkeit des Zuordnungssatzes.

### Beispiel Der Vertauschungssatz

Rechts im Bild dargestellt ist das rechteckförmige Spektrum  $\underline{X}(f)$ :

$$\underline{X}(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_g \\ 0 & \text{für } |f| \geq f_g \end{cases}$$

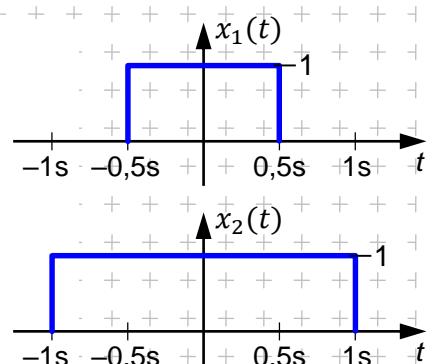


- Berechnen Sie das zugehörige Signal  $x(t)$  mit Hilfe des Vertauschungssatzes.

- Verifizieren Sie Ihre Berechnung mit dem passenden Transformationspaar im Programm 7\_Fouriertransformation.exe.

### Übungsaufgabe Reziprozität von Zeitdauer und Bandbreite

Betrachtet werden die zwei rechts dargestellten Rechtecksignale  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ , die sich nur durch einen Streckungsfaktor von einander unterscheiden.



- Wie lautet das Spektrum  $\underline{X}_1(f)$   $\xrightarrow{\text{FT}}$   $x_1(t)$ ?
- Berechnen Sie das Spektrum  $\underline{X}_2(f)$   $\xrightarrow{\text{FT}}$   $x_2(t)$ .
- Um welchen Faktor  $1/a$  ist das Signal  $x_2(t)$  gegenüber  $x_1(t)$  gestreckt? Welche Änderung erwarten Sie demnach im Spektrum?
- Berechnen Sie das Spektrum  $\underline{X}_2(f)$  zusätzlich durch die auf Seite 19 beschriebene Maßstabsänderung. Es sollte sich dasselbe Spektrum ergeben, wie unter b)!
- Untersuchen Sie für alle Signale, die sich mit 7\_Fouriertransformation.exe erzeugen lassen, wie Zeitdauer und Bandbreite voneinander abhängen.



## ANHANG: Komplexe Zahlen (1) – Einführung

Im diesem Kapitel betrachten wir Spektren in *mathematisch komplexer Form* – dies vereinfacht die Darstellung. Daher an dieser Stelle einige Definitionen oder Wiederholungen:

### ■ Definition einer komplexen Zahl $\underline{z} \in \mathbb{C}$ in kartesischen Koordinaten

- Die **Normalform** lautet:  $\underline{z} = a + j \cdot b = \operatorname{Re}\{\underline{z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$

⇒  $a$  heißt **Realteil**,  $b$  heißt **Imaginärteil** der komplexen Zahl  $\underline{z}$ .

⇒ Eine komplexe Zahl enthält damit quasi zwei Zahlenwerte in einer verpackt!

- Eine Schlüsselfunktion für den komplexen Zahlenraum spielt die **imaginäre Zahl  $j$** :

$$j = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = -1/j$$

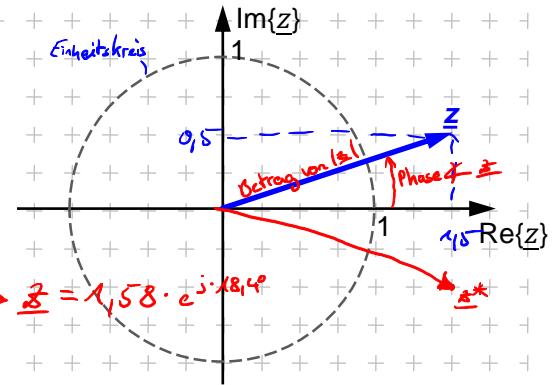
Beispiele:  $3j + 4j = -12$   
 $j^3 = -j$   
 $(5j)^2 = -25$   
 $1/j = -j$

### ■ Auffassung von $\underline{z}$ als Vektor in der komplexen Ebene (Gauß'sche<sup>1)</sup> Zahlebene)

Beispiel  $\underline{z} = a + j \cdot b = 1,5 + 0,5 \cdot j$

- **Betrag**  $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1,5^2 + 0,5^2} = 1,58$   
 ⇒ Länge des Zeigers

- **Phase**  $\angle \underline{z} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18,4^\circ$   
 ⇒ Winkel des Zeigers mit der realen Achse



### ■ Polarkoordinatendarstellung der Zahl $\underline{z}$

- Darstellung in **Exponentialform** mit Betrag und Phase:

- Die imaginäre Zahl als Exponentialfunktion:  $j = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{j \cdot 90^\circ}$

- Umrechnung Polar- in kartesische Koordinaten und umgekehrt – mit der **Euler'schen<sup>2)</sup> Formel:**

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}}{2j}, \quad \cos(\varphi) = \frac{e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}}{2}$$

Konjugiert Komplexe Zahl  $\underline{z}^* = \underline{a} - j \underline{b} = |\underline{z}| \cdot e^{-j \cdot \varphi}$

<sup>1)</sup> Johann Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), deutscher Mathematiker

<sup>2)</sup> Leonhard Euler (1707 – 1783), schweizer Mathematiker



## ANHANG: Komplexe Zahlen (2) – Rechnen mit komplexen Zahlen

### Demonstration Veranschaulichung in der komplexen Ebene

- Testen Sie das Beispiel der vorherigen Seite mit dem Programm `3_KomplexeZahl.exe`.
- Wie verändert sich der Zeiger, wenn Sie den Betrag oder die Phase ändern?

### ■ Rechenregeln für komplexe Zahlen:

#### □ Addition:

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

*Re{\underline{z}}*  
*Im{\underline{z}}*

#### □ Multiplikation:

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

*ist mit Polarkoordinaten  
viel einfacher!*

$$= |\underline{z}_1| \cdot e^{j \cdot \arg \underline{z}_1} \cdot |\underline{z}_2| \cdot e^{j \cdot \arg \underline{z}_2} = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| \cdot e^{j \cdot (\arg \underline{z}_1 + \arg \underline{z}_2)}$$

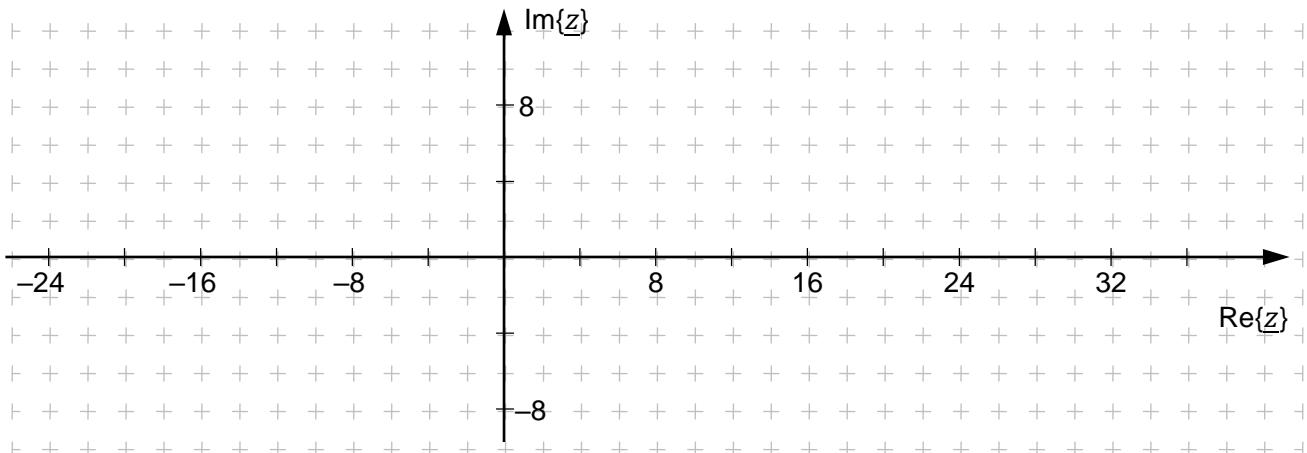
*Betrag*  
*Phase*

### Übungsaufgabe Grafische Darstellung komplexer Zahlen

Betrachtet werden zwei komplexe Zahlen  $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in \mathbb{C}$ :

$$\underline{z}_1 = 29 + 3j, \quad \underline{z}_2 = 3 + 5j$$

- Berechnen Sie die Summe  $\underline{s} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$ .
- Skizzieren Sie die Summe  $\underline{s}$  als Zeiger in die unten vorbereitete komplexe Ebene.
- Skizzieren Sie die konjugiert komplexe Summe  $\underline{s}^*$ .



- Berechnen Sie das Produkt  $\underline{p} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$  in kartesischen Koordinaten.
- Stellen Sie beide Zahlen  $\underline{z}_1$  und  $\underline{z}_2$  in Polarkoordinaten dar.
- Berechnen Sie das Produkt auch mit  $\underline{z}_1$  und  $\underline{z}_2$  in Polarkoordinaten.
- Zeigen Sie, dass beide unter d) und unter f) berechneten Produkte identisch sind!

## **ANHANG: Das Analyseintegral der Fourierreihe**

## ■ Fourier-Analyse

Die Koeffizienten werden jeweils berechnet als Integral über eine Periode  $T_0$  des Signals, multipliziert mit der entsprechenden Sinus- oder Kosinus-Schwingung:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} \tilde{x}(t) dt , \quad a_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{T_0} \tilde{x}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot kf_0 \cdot t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{T_0} \tilde{x}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot kf_0 \cdot t) dt \end{aligned} \right\} , k \in \mathbb{N}$$

Der Koeffizient  $a_0$  ist identisch mit dem Gleichanteil  $U_{\text{offs}}$  des Signals (vgl. Kapitel 1).

## ■ Berechnung der reellen FR-Koeffizienten zur Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ von Seite 7

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) dt = \frac{A}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 \cdot dt = A \cdot \frac{T}{T_0}$$

$$\mathbf{a}_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0}^{T_0} \tilde{x}(t) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{T_0} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t\right) dt$$

$$= \frac{2A}{T_0} \cdot \left[ \frac{T_0}{2\pi \cdot k} \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t\right) \right]_{-T/2}^{T/2} = 2A \cdot \frac{\sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T/2\right)}{k\pi}$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{T_0} \tilde{x}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot kf_0 \cdot t) dt = \frac{2A}{T_0} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t\right) dt$$

$$= \frac{2A}{T_0} \cdot \left[ -\frac{T_0}{2\pi \cdot k} \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t\right) \right]_{-T/2}^{T/2} = 2A \cdot \frac{-\cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T/2\right) + \cos\left(-2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T/2\right)}{2 \cdot k\pi} = \mathbf{0}$$

## Berechnung der komplexen FR-Koeffizienten zur Rechteckimpulsfolge $\tilde{x}(t)$ von S. 10

$$\underline{X}_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} \cdot t} dt = \frac{A}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} \cdot t} dt$$

$$= \frac{A}{T_0} \cdot \left[ \frac{e^{-j2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot t}}{-j2\pi \cdot \frac{k}{T_0}} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{-A}{j2\pi \cdot k} \cdot \left[ e^{-j2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T/2} - e^{j2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T/2} \right] = A \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi \cdot \frac{k}{T_0} \cdot T}{2}\right)}{k\pi}$$

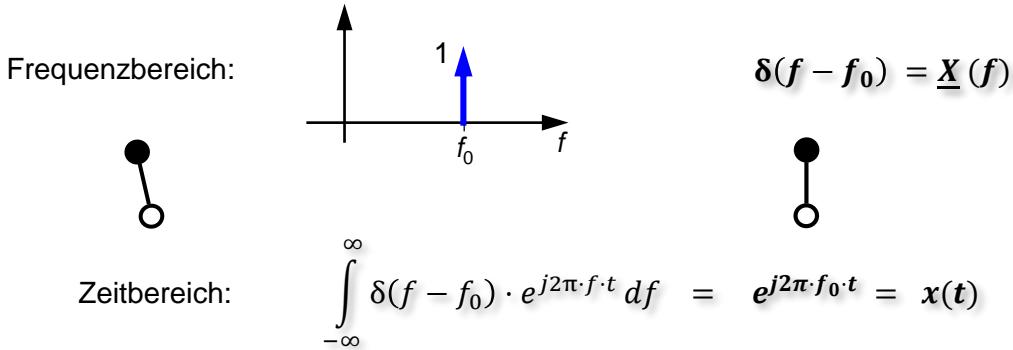


**ANHANG: Die FT einer exponentiellen Schwingung ist ein  $\delta$ -Impuls!**

- Exp. Schwingung im Zeitbereich  verschobener  $\delta$ -Impuls im Frequenzbereich

$$e^{j2\pi \cdot f_0 \cdot t} \quad \text{---} \quad \delta(f - f_0)$$

- Beweis durch inverse Fouriertransformation der rechten Seite:



- Diese Beziehung wird immer dann ausgenutzt, wenn die Fouriertransformierte periodischer Signale berechnet werden soll, erläutert auf den Seiten [15](#) ... [17](#).

## ■ Ind genauso umgekehrt:

Verschobener  $\delta$ -Impuls im Zeitbereich  exp. Schwingung im Frequenzbereich

$$\delta(t - t_0) \quad \text{---} \quad e^{-j2\pi \cdot t_0 \cdot f}$$

#### □ Beweis durch Fouriertransformation der linken Seite:

