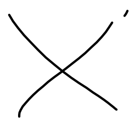
Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit, L'Hopital

Fragen?



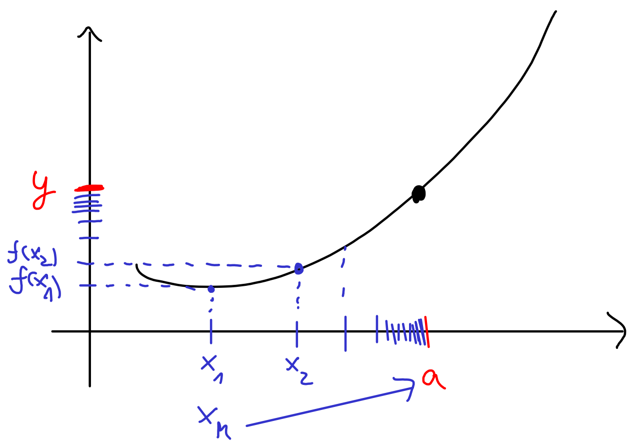
* **Definition Funktionsgrenzwert.** Was bedeutet $\lim_{x\to a} f(x)$? $f: D \to \mathbb{R}$

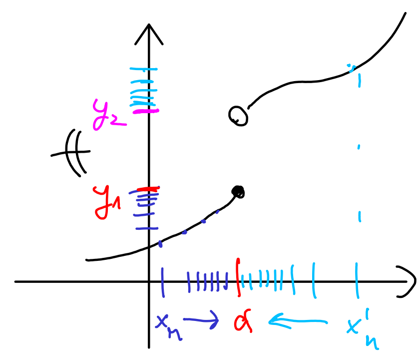
Lösung.

$\lim_{x\to a} f(x)$ existiert & ist gleich y $:\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ Folgen $x_n \to a$ mit $x_n \in D$:

$$f(x_n) \longrightarrow y.$$

In diesem Fall schreibt man $\lim_{x\to a} f(x) = y$.





$\lim_{x\to a} f(x)$ existiert nicht!

Eigener Lösungsversuch.

Funktionsgrenzwerte. Existieren folgende Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie diese.

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x),\ f(x) = x^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (Hinweis: l'Hopital)

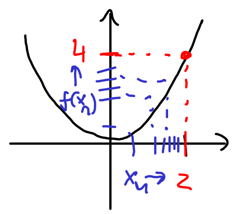
d) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x),\ f(x) = \frac{x}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x),\ f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Falls möglich einfach einsetzen, sofern die Fkt. stetig ist!

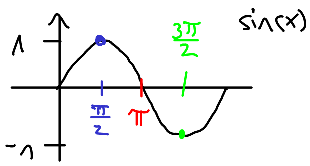
Lösung.

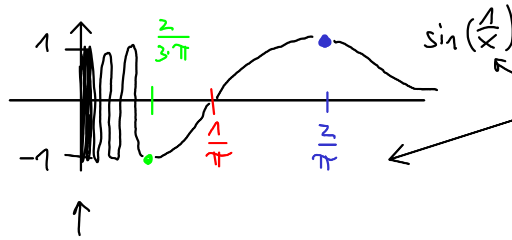
a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4.$



(man müsste zeigen: $\forall$ Folgen $x_n \to 2$: $f(x_n) \to 4$)

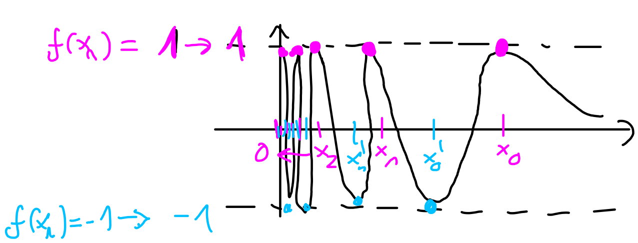
b)





← Kehrwert!

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to 0$, da es sich in keiner Höhe einpendelt!



Kehrwert von Maximum von sin(x).

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi} \to 0$ mit $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$

$x'_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi} \to 0$ mit $f(x'_n) = \dots = -1$

Zwei Folgen x_n & $x'_n \to 0$, aber $f(x_n) \to 1$, $f(x'_n) \to -1$ $\nexists$ d.h. Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht!

~~Eigener Lösungsversuch.~~

$$\boxed{\underline{l'H:}\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“},\ \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“ oder „}\frac{?}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Punkteabzug in Klausur!

⚠ Notation:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nicht erlaubt: „$\frac{\infty}{0}$“, „$\frac{2}{0}$“

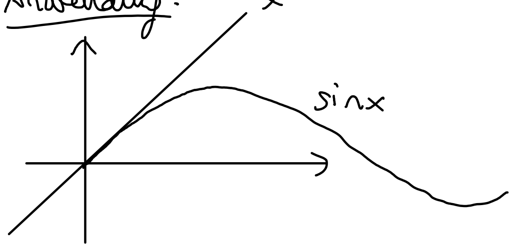
„$\frac{2}{0}$“:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}} = 2x \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

$$\frac{2}{-\frac{1}{x}} = -2 \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$

c) $$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = \underline{1.}$$

<u>Anwendung:</u>



Für $x \approx 0$ gilt $\frac{\sin(x)}{x} \approx 1 \implies \sin(x) \approx x$, z.B. $\underbrace{\sin(0{,}01)}_{\overset{TR}{=}0{,}00999\ldots} \approx 0{,}01$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x} \underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>ODER:</u>

$$\frac{x}{1+x} = \frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}(\underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{x}}+1)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{0+1} = 1.$$

e) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1} = \frac{2\cdot 1}{1} = 2$$

<u>ODER:</u>

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 \xrightarrow{x\to 1} 1+1 = 2.$$

Stetigkeit. Welche Funktionen sind stetig bzw. stetig fortsetzbar? (Mit Begründung.)

a) Was bedeutet Stetigkeit anschaulich? Wie ist diese definiert?

b) $f(x) = x^3 + 3x + 4$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(e^{x^2})}{2x^4}$

Lösung.

a) anschaulich: „Durchzeichnen ohne Absetzen"

Def: $\forall x_0 \in D: \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Stetigkeit: Alle elementaren Fkten (Polynome, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sqrt[a]{x}$, ...) sind stetig (auf dem Def.-Bereich) & auch deren Summe/Differenz/Produkt/Quotient/Verknüpfung!

b) Polynom stetig ✓ c) $\dfrac{\sin x}{x}$ ← Quotient stetig ✓ ($\sin x$ stetig, x stetig) d) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ Verknüpfung stetig! ($\sin$ stetig, $\frac{1}{x}$ Quotient stetig)

e) ebenso stetig ✓

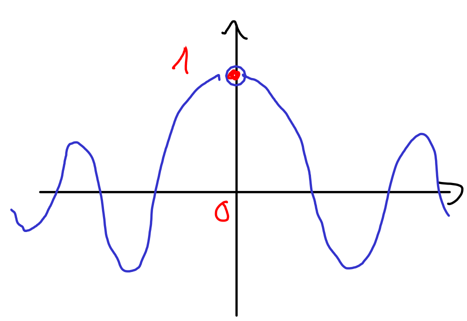
Stetig fortsetzbar: Eine Funktion ist stetig fortsetzbar an einer Stelle x_0, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert! Man definiert dann $f(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

b) Def.bereich $D = \mathbb{R}$, nichts zu tun!

c) stetige Fortsetzung von f:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, & x = 0 \end{cases}$$

siehe c) Übung zuvor



~~Eigener Lösungsversuch.~~

d) nicht stetig fortsetzbar, da $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht existiert (siehe b) Übung zuvor)

e) nicht stetig fortsetzbar, da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(e^{x^2})}{2x^4}$ nicht existiert (l'H geht nicht „$\frac{\sin(1)}{0}$"):

$$\frac{\overbrace{\sin(\overbrace{e^{x^2}}^{\to 1})}^{\to \sin(1)>0}}{\underbrace{2x^4}_{\to 0^+}} \longrightarrow +\infty$$