1
Folgen. Grenzwerte. Stetigkeit

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:57

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos: http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Folgen

Eine Folge [sequence] ist eine Auflistung von mathematischen Objekten: Zahlen, Vektoren, Funktionen, … Typischerweise bezeichnet man mit dem Begriff „Folge" eine *unendliche* Folge, will sagen, eine Folge, bei der jedem Index aus $\mathbb{N}^+$ oder $\mathbb{N}_0$ ein Folgenglied zugeordnet wird. Eine Folge ist also nichts Anderes als eine Abbildung mit Definitionsbereich $\mathbb{N}^+$ oder $\mathbb{N}_0$.

Hier sind ein paar Folgen von Zahlen:

1

n	1	2	3	4	…
a_n	5	7	3	11	…
	$\uparrow a_1$	$\uparrow a_2$	$\uparrow a_3$	$\uparrow a_4$	
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	…
c_n	3	3,1	3,14	3,141	…

Hier eine Folge von Funktionen:

2

n	1	2	3	$\ldots$
d_n	$x \mapsto x$	$x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$	$x \mapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	

$\longrightarrow \sin$

Hieran sieht man auch schon die wesentliche Anwendung für Folgen: Sie erlauben, die Annäherung im Unendlichen mathematisch auszudrücken.

Weil man nicht unendlich viele Folgenglieder angeben kann, nennt man typischerweise nur ein Bildungsgesetz, zum Beispiel eine Rechenvorschrift. Das Bildungsgesetz kann explizit sein, d. h. der Wert des n-ten Folgenglieds ist direkt zu berechnen:

3

$a_n = 2n+3$

$b_n = \frac{1}{n}$

explizit

Das Bildungsgesetz kann aber auch implizit sein. Das heißt, auf beiden Seiten der Gleichung kommen Folgenglieder vor; außerdem ist dann typischerweise der Anfang der Folge gegeben. Dann kann man die Folgenglieder typischerweise per Rekursion bestimmen:

4

rekursiv

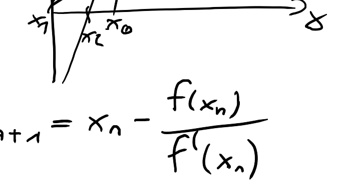
$a_1 = 5$

$a_{n+1} = a_n + 2$

Viele Näherungsverfahren erzeugen rekursiv definierte Folgen. Beispiel: das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche.

5

z. B. Newton – Verfahren



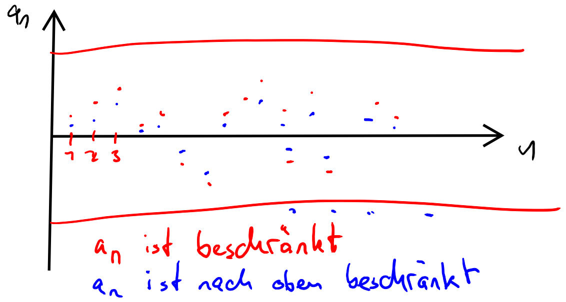
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

x_0 = gegeben

2 Eigenschaften von Folgen

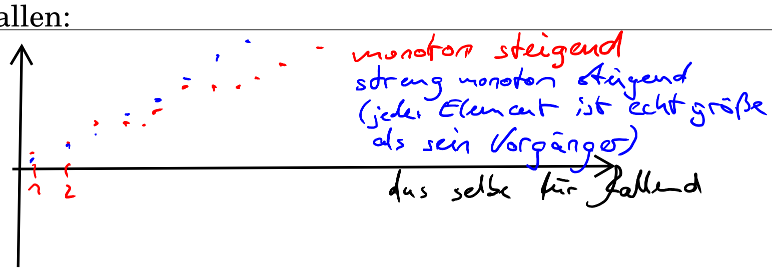
Folgen können beschränkt oder unbeschränkt sein, auch nur von oben oder unten:

6



Folgen können (müssen aber nicht) monoton oder streng monoton wachsen oder fallen:

7



3 Grenzwerte von Folgen

Folgen werden oft benutzt, um im Unendlichen eine Zahl, einen Vektor, eine Funktion oder Ähnliches anzunähern. Eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ heißt dann konvergent (Gegenteil: divergent) und ihr Ziel im Unendlichen heißt Grenzwert [limit] a, geschrieben

8

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

oder mit einem simplen Pfeil:

9

$$a_n \to a$$

Eine Folge mit Grenzwert null heißt auch Nullfolge.

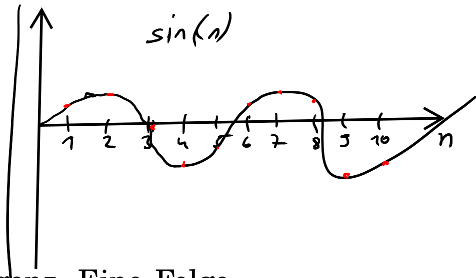
Beispiele:

10

$$\frac{3}{n} \longrightarrow 0$$

n	1	2	3	4	...
$\frac{n^2+2}{3n^2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{18}{48}$	...

$$= \frac{1+\overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}}{3} \to \frac{1}{3}$$



Hart an der Grenze zur Konvergenz ist die bestimmte Divergenz. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ von Zahlen, die über alle Grenzen wächst (ohne ausflugsweise zurückzukehren!), heißt bestimmt divergent nach plus Unendlich, geschrieben

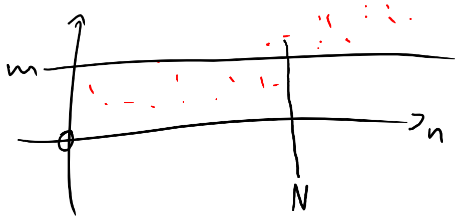
11

$a_n \to \infty$. Formal liest sich das:

12

$$a_n \to \infty$$
$$\Updownarrow$$

Für jedes $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}^+$, sodass $a_n \geq M$ für alle $n \geq N$



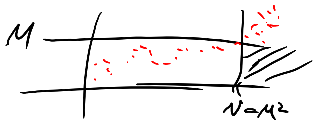
Entsprechend definiert man bestimmte Divergenz nach minus Unendlich.

Beispiele:

13

$n^2 \to \infty$
$e^n \to \infty$

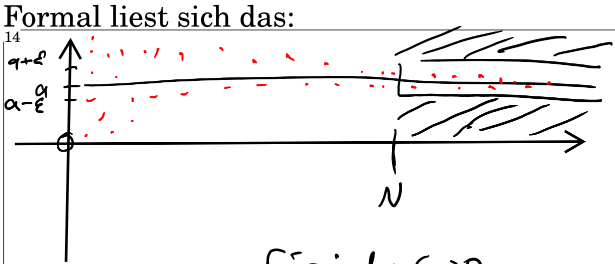
$\sqrt{n} \to \infty$



$N = M^2 \Rightarrow$ $\sqrt{n} \geq M$ ← gegeben, für alle $n \geq N$ ← gesucht

Etwas komplizierter gerät die Definition der Konvergenz: Eine Folge von Zahlen a_n heißt konvergent mit Grenzwert a, wenn ihre Folgenglieder ab einem gewissen Index immer in einem Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ liegen, egal wie klein man $\epsilon > 0$ wählt. Formal liest sich das:

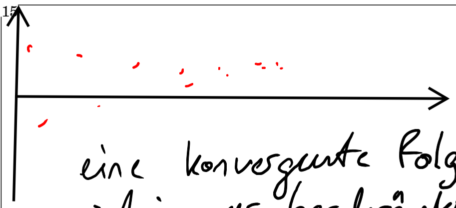
14



$a_n \to a \iff$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}^+$, sodass $a-\varepsilon \leq a_n \leq a+\varepsilon$ für alle $n \geq N$

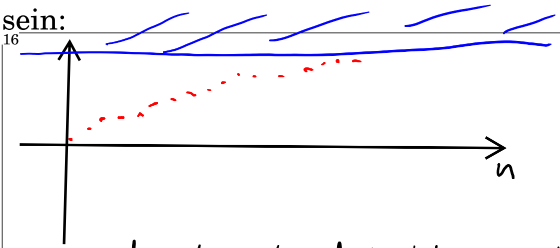
In der Praxis prüft man höchst selten diese Definition nach. Vielmehr sondern benutzt man meist Grenzwertsätze, um sofort das Ergebnis abzulesen.

Jede konvergente Folge muss beschränkt sein, allerdings ist längst nicht jede beschränkte Folge konvergent:

15


eine konvergente Folge ist immer beschränkt, aber nicht jede beschränkte Folge ist konvergent

Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge muss aber auch konvergent sein:

16


nach oben beschränkt, monoton wachsend

$\Rightarrow$ konvergent

4 Grenzwertsätze

Es seien zwei konvergente Zahlenfolgen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gegeben. Dann gilt offensichtlich:

17

$$a_n \to a$$
$$b_n \to b$$
$$\Rightarrow a_n + b_n \to a+b$$
$$a_n - b_n \to a-b$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$
$$a_n / b_n \to a/b$$

alle $b_n \neq 0$ $\quad$ $b \neq 0$

$\to$ Problem z.B. $\frac{\frac{n^2+2}{3n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2+2}{3n^2} \cdot \frac{n}{1}$

$$= \frac{n^2+2}{3n} = \frac{n+\frac{2}{n}}{3} \to \infty$$

Es seien eine beschränkte Zahlenfolge c_n und eine bestimmt divergente Zahlenfolge $d_n \to \infty$ gegeben. Dann gilt offensichtlich:

18
c_n beschränkt, $d_n \to \pm\infty$

$$\Rightarrow \frac{c_n}{d_n} \to 0$$

Beispiel: Was passiert mit $\frac{n^2+\sin(n)}{2n^2+e^{-n}}$ für $n \to \infty$?

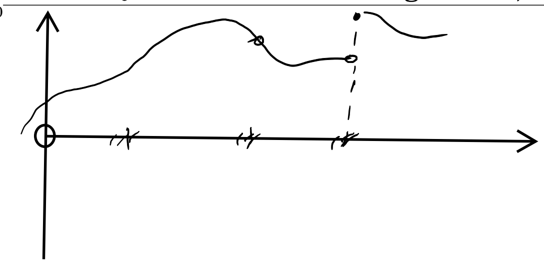
19

$$\frac{n^2+\sin(n)}{2n^2+e^{-n}} = \frac{\underbrace{1+\underbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}_{\to 0}}_{\to 1}}{\underbrace{2+\underbrace{\frac{e^{-n}}{n^2}}_{\to 0}}_{\to 2}} \to \frac{1}{2}$$

5 Grenzwerte von Funktionen

Man kann sich fragen, was der Wert einer Funktion f an einer Stelle x_0 am besten sein *sollte* – basierend auf den Werten an benachbarten Stellen, wenn man den Wert an x_0 nicht hat oder ihn ignoriert, falls man ihn hat:

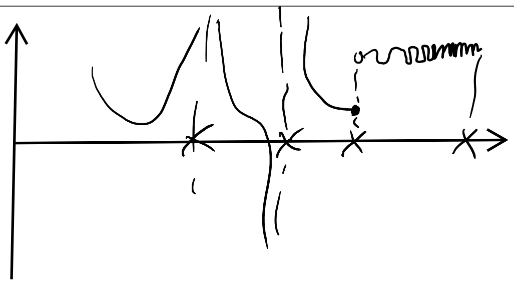
20



Diese Frage ist nur an solchen Stellen x_0 sinnvoll, die beliebig nahe Nachbarn im Definitionsbereich haben. Diese Stellen können im Definitionsbereich oder (knapp!) außerhalb davon liegen. Einen Grenzwert an einer isolierten Stelle im Definitionsbereich kann man mit dem klassischen Grenzwertbegriff nicht bilden.

Der „sinnvolle" Wert heißt dann Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0, geschrieben 21 $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Allerdings muss es diesen Grenzwert nicht immer geben:

22

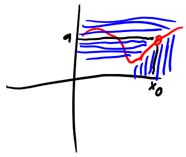


Schulmäßig schreibt man für den Grenzwert einer Funktion eine Definition wie für den Grenzwert eine Folge hin (dann mit ϵ und δ). Einfacher zu verstehen ist es aber vielleicht mit Folgen:

23 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist $= a$

$\Updownarrow$

Für jede Folge x_n in Definitionsbereich mit $x_n \to x_0$, aber $x_n \neq x_0$ für alle n gilt $f(x_n) \to a$.



Beispiele:

24 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+7}{e^x}$ existiert und ist gleich $\frac{2^2+7}{e^2}$

$\lim_{x \to} \frac{x^2-1}{\cancel{x-1}}$ $(x+1)\cancel{(x-1)}$ existiert und ist gleich 2

Man kann den Begriff des Grenzwerts einer Funktion einschränken auf den einseitigen Grenzwerte für $x \downarrow x_0$ (schulmäßig geschrieben als $x \to 0^+$) und den einseitigen Grenzwert für $x \uparrow x_0$ (schulmäßig geschrieben als $x \to 0^-$). Beispiele:

25 $\lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{|x|} = -1$

Weitere Grenzwerte von Funktionen sind die im Unendlichen, also für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$. Hier kann man untersuchen, wie sich $f(x_n)$ verhält, wenn x_n eine bestimmt divergente Folge im Definitionsbereich (!) ist.

Es gelten für die Grenzwerte von Funktionen entsprechende Grenzwertsätze wie für die Grenzwerte von Folgen, siehe Abschnitt 4.

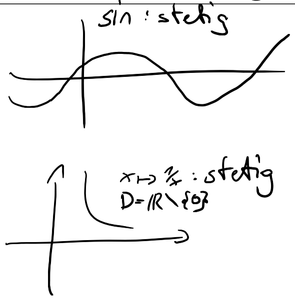
6 Stetigkeit

Stetige [continuous] Funktionen sind solche, bei denen ein kleine Ursache (Änderung von x) auch nur eine eine kleine Änderung (Änderung von $f(x)$) hat. Genauer heißt eine Funktion der folgenden Art stetig:

26 • f hat an allen $x \in D$ die nicht isoliert liegen einen Grenzwert
• Dieser Grenzwert ist jeweils gleich $f(x)$

Dort, *wo der Definitionsbereich keine Lücke hat*, ist der Graph einer solchen Funktion eine durchgezogene Kurve. Beispiele:

27



Insbesondere ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \mapsto 1/x$ eine stetige Funktion, auch wenn das in der Schulmathematik gerne anders gesagt wird. Jede rationale Funktion ist stetig! Man bezeichnet sogar jede beliebige Funktion als stetig an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, die isoliert liegt.

Der Zwischenwertsatz [intermediate value theorem] drückt die Eigenschaft der „durchgezogenen Kurve“ aus:

28 Zwischenwertsatz
– f stetig
– $[a;b] \subset D$
$\Rightarrow$ Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es mindestens ein $x \in [a;b]$ mit $f(x) = y$

Aus der Definition der Stetigkeit folgt ein weiterer Satz für Grenzwerte:

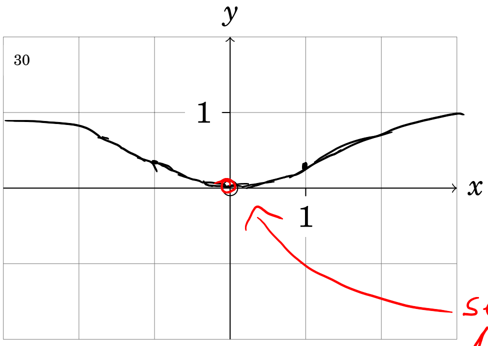
29 – f stetig
– $x_n \in D$
– $x_n \to x_0 \in D$
$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

z.B. $x_n \to \frac{3}{4} \Rightarrow \sin(x_n) \to \sin(\frac{3}{4})$

Mit anderen Worten: Der Grenzwert eine stetigen Funktion ist die Funktion vom Grenzwert.

Eine Definitionslücke einer Funktion lässt sich sinnvoll schließen (sie ist „hebbar"), wenn der Grenzwert existiert. Dies ergibt dann eine stetige Fortsetzung der Funktion. Die Schulmathematik redet gerne von „hebbaren Unstetigkeiten", was aber korrekt „stetig hebbare Definitionslücken" heißen muss. Beispiel: $x \mapsto e^{-1/x^2}$

30



$x \mapsto e^{-1/x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

↳ stetig hebbare Definitionslücke

setze $y = 0$ für $x = 0$

7 Regel von L'Hospital

Der Grenzwertsatz über den Quotienten versagt, wenn der Nenner gegen Null geht. Allerdings kann man im folgenden Fall noch etwas retten: Es wird der Grenzwert von $f(x)/g(x)$ für $x \to x_0$ gesucht. Beide Funktionen f und g haben an x_0 den Grenzwert null. Beide Funktionen f und g sind an x_0 differenzierbar. Die Ableitung $g'(x_0)$ ist *nicht null*. Dann gilt:

31

$f(x) \to 0$ für $x \to x_0$

$g(x) \to 0$ —"—

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = 1$$

L'Hospital: $\dfrac{\cos(0)}{e^0} = \dfrac{1}{1}$

Dies ist die Regel von L'Hospital, auch L'Hôpital geschrieben.

Überschlägig kann man das so sehen:

32

Tangentengerade

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots}$$

$$= \frac{f'(x_0)\cancel{(x-x_0)} + \dots}{g'(x_0)\cancel{(x-x_0)} + \dots} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Sollten $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ beide null sein, kann man die zweiten Ableitungen betrachten usw. Ebenso kann man betrachten, dass Zähler und Nenner nicht beide null werden, sondern beide unendlich werden.