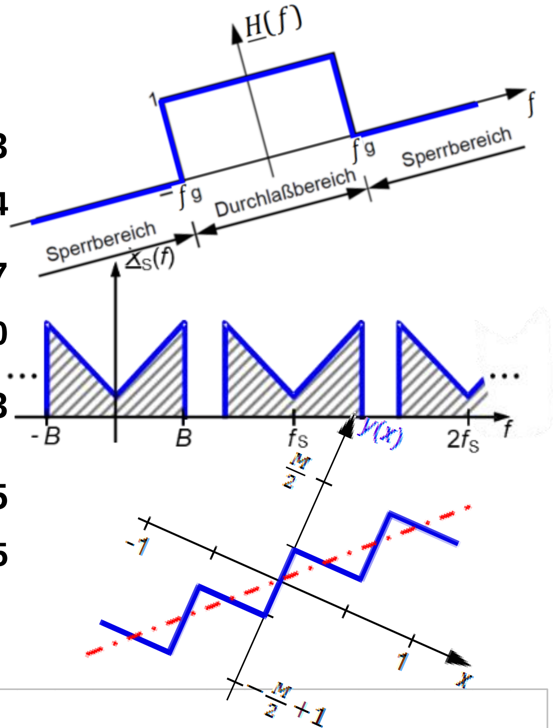
TGI – Kapitel 7:

Verarbeitung von Signalen

Inhalt dieses Kapitels:



Lernziel dieses Kapitels

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels kennen Sie drei wichtige Prozesse der Signalverarbeitung:

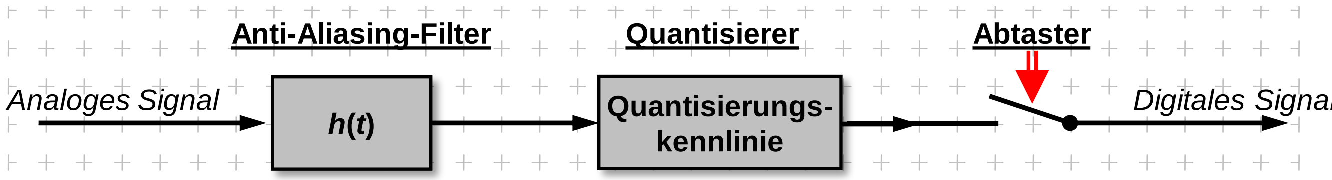
1. **Filterung** durch LTI-Systeme, sowie
2. **Abtastung** &
3. **Quantisierung** zur Analog/Digital-Wandlung

Sie wissen, in welchen Teilen von Rechnern und Peripherie diese Prozesse eingesetzt werden.

Sie verstehen diese Prozesse – insbesondere die *Filterung* und die *Abtastung* – weil Sie deren Auswirkung auf Signale nicht nur im Zeitbereich, sondern auch im Frequenzbereich betrachten können.

Beispiel **Soundkarte eines Rechners**

Um ein Mikrofonsignal „in den Rechner" zu bekommen, muss es zunächst **gefiltert** (zur Begrenzung der Bandbreite!), und anschließend **quantisiert** und **abgetastet** werden:



Lernziele dieses Kapitels…

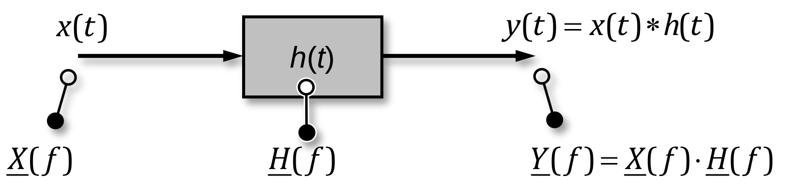
… in ausführlicher und gewohnter Tabellenform:

Taxonomie / Kompetenzart	Kennen	Können	Verstehen
Fach-kompetenz	Das Abtasttheorem; Sie kennen das Prinzip der Quantisierung mit einer linearen Quantisierungskennlinie. Abhängig von der Wortbreite sind Sie in der Lage, die Stufenzahl und den Dynamikbereich zu berechnen, und Sie können den Verlauf des quantisierten Signals skizzieren.	Sog. Filterung: Bestimmung von Ausgangssignalen eines LTI-Systems auch über den Spektralbereich; Sie verstehen die grundsätzlichen Auswirkungen der Abtastung auf ein Signal und auf dessen Spektrum. Sie können die Werte aller relevanten Parameter vorhersagen, die zur Einhaltung des Abtasttheorems (1) und zur erfolgreichen Rekonstruktion (2) nötig sind.	Vorteil der Betrachtung bestimmter Szenarien im Frequenz- statt im Zeitbereich; z.B. um das Ausgangssignal eines Filters unter Umgehung der Faltung zu bestimmen; Erkennen, in welchen Teilen eines Rechners die Prozesse *Filterung*, *Abtastung* und *Quantisierung* eingesetzt werden.
Methoden-kompetenz		Kompetente Bedienung der Demoprogramme zur Vorlesung – unter Kenntnis aller Parameter!	
Persönliche & soziale Kompetenz		Finale Fragen an den Prof.: Sie bestimmen die Qualität und die Detailtiefe seiner Prüfungstipps!	**Empfehlung des Profs:** Erstellen von 2 DIN-A4-Seiten Formelsammlung f. Teil II: *Signale & Systeme* Eine selbstgeschriebene Formelsammlung bringt Ihnen in der Prüfung sicher mehr, als das handschriftliche Kopieren aller Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen!

Signalübertragung durch LTI-Systeme

Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(f)$ eines LTI-Systems ist die FT der Impulsantwort

- Laut den „Rechenregeln der Fouriertransformation“ im Kap. 6 entspricht die <u>Faltung im Zeitbereich</u> einer <u>Multiplikation im Frequenzbereich</u>:



> Das Spektrum des Ausgangssignals eines LTI-Systems ist das Produkt des Spektrums des Eingangssignals und der Übertragungsfunktion.

⇒ **<u>LTI-System:</u>** Es werden keine neuen Frequenzen erzeugt, stattdessen werden nur die Frequenzanteile des Eingangssignals <u>neu gewichtet</u>.

Praktische Beispiele für Systeme, die nah an das LTI-Ideal herankommen:

(siehe auch Kap. 5 „Lineare, zeitinvariante (LTI-)Systeme“)

- Leitungen (für Stromversorgung, USB, Netzwerk)
- RC-Glied
- Frequenzweiche (z.B. im Lautsprecher)
- Audio-Verstärker (nicht übersteuert!)

Demonstration **Eines der beiden Signale kommt definitiv <u>nicht</u> aus einem LTI-System:**

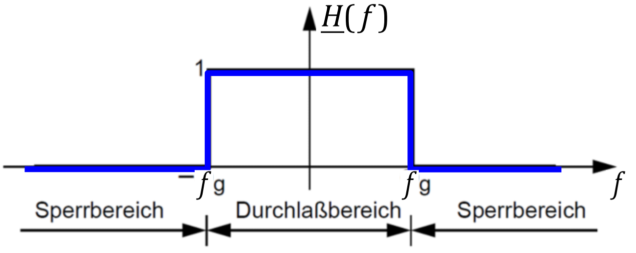
Vergleichen Sie zwei ähnliche Signale: Wodurch unterscheiden sich diese im Spektrum?

- `SignalGuitarClean.wav` wurde über einen normalen Gitarrenverstärker aufgenommen.
- `SignalGuitarOverdrive.wav` wurde mit einem sogenannten ‚Verzerrer‘ aufgenommen.

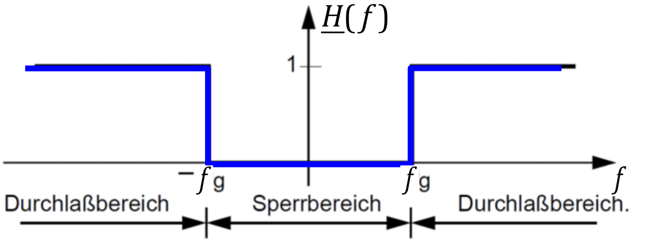
[1] Die Dateien finden Sie in dem zu diesem Kapitel herunterladbaren zip-Archiv in der Hochschul-Cloud, im Unterverzeichnis ‚`BeispielSignaleZugabe`‘. Öffnen Sie diese im Open-Source-Programm ‚*Audacity*‘, so lässt sich das Signal auch im Spektralbereich betrachten (Menü SignalGuita ▼→Spektrum). Zuvor ist im Menü folgende Konfiguration durchzuführen: *Bearbeiten→Einstellungen→Spuren→Spektrogramme→**Fenstergröße*** **= 2048**

Ideale und reale Filter

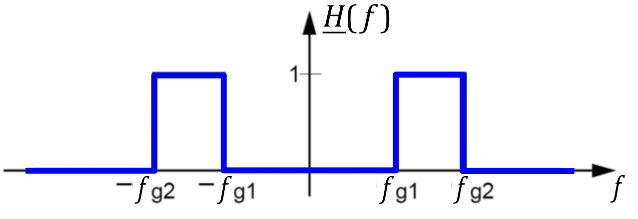
- Frequenzgang eines **idealen Tiefpassfilters:**



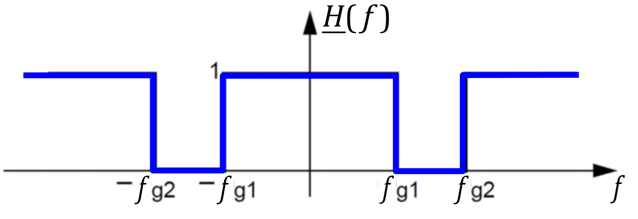
- Frequenzgang eines **idealen Hochpassfilters:**



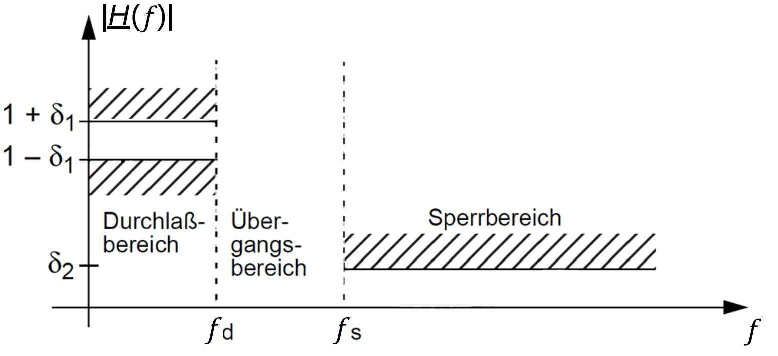
- Frequenzgang eines **idealen Bandpassfilters:**



- Frequenzgang einer **idealen Bandsperre:**



- **Eigenschaften und Parameter eines realen Filters:**
  - Welligkeit im Durchlassbereich zwischen $1+\delta_1$ und $1-\delta_1$
  - Welligkeit im Sperrbereich zwischen 0 und δ_2
  - Durchlasskante f_d
  - Sperrkante f_s



Übungsaufgabe **Ideales Tiefpassfilter**

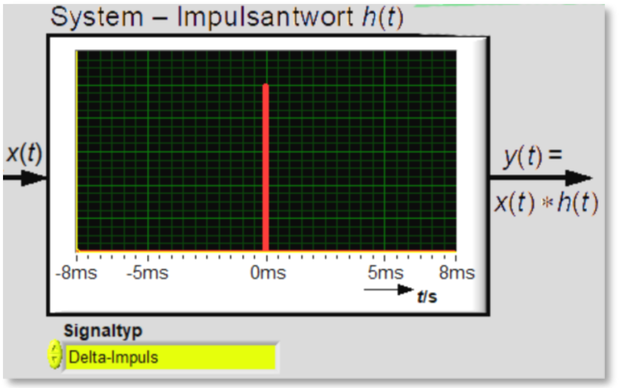
Wie lautet die Impulsantwort $h(t) \circ\!\!\overset{\text{FT}}{—}\!\!\bullet\ \underline{H}(f)$ zum Frequenzgang ganz oben auf dieser Seite?

Signale und Spektren an einem LTI-System

Demonstration Filterung mit einem konstanten Frequenzgang

Starten Sie das Programm **`9_FaltungIstFilterung.exe`**.

Das **Bild** rechts zeigt die Filterung mit einem LTI-System, dessen Impulsantwort ein δ-Impuls ist:



a) Welchen Frequenzgang $\underline{X}(f) \overset{FT}{\bullet\!\!-\!\!\circ} x(t)$ hat dieses Filter?

b) Was ändert dieses Filter an dem Signal (Vergleich von Eingangs- und Ausgangssignal)?

Übungsaufgabe Filterung eines periodischen Rechtecksignals

Legen Sie jetzt das periodische Rechtecksignal an den Eingang des Filters. Beschreiben Sie den Klang des Ausgangssignals und begründen Sie Ihren Eindruck mit dessen Spektrum!

a) **Delta**

b) **Schmale Spaltfunktion**

c) **Breite Spaltfunktion**

d) **Bandpass**

Demonstration Filterung einer Audio-Datei

a) Es soll die Wirkung der vier Impulsantworten in **`9_FaltungIstFilterung.exe`** auf ein Musiksignal untersucht werden. Beschreiben Sie jeweils den Klang des Ausgangssignals für alle vier Impulsantworten.

b) Begründen Sie Ihre akustische Empfindung mit den Beobachtungen, die Sie in der vorherigen Übungsaufgabe gemacht haben.

Filterung = Faltung im Zeitbereich = Gewichtung im Frequenzbereich!

Demonstration Reziprozität von Zeitdauer und Bandbreite

Betrachten Sie die beiden Spaltfunktionen:

a) Um welchen Faktor unterscheidet sich die Breite (= Abstand der Nullstellen) der Impulsantwort der „breiten si-Funktion“ von der Dauer der Impulsantwort der „schmalen si-Funktion“?

b) Um welchen Faktor unterscheidet sich die Bandbreite der beiden Spektren?

Übungsaufgabe LTI-Bedingung

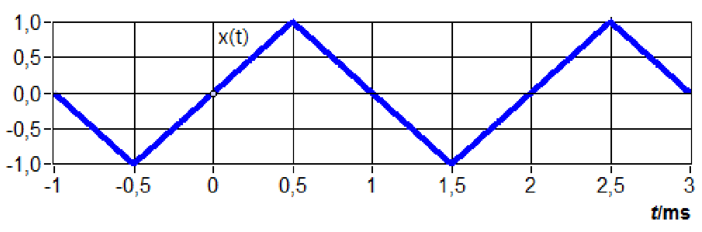
Überprüfen Sie im Programm `9_FaltungIstFilterung.exe` am Beispiel des periodischen Rechtecksignals, ob die Bedingung von Seite 3 für LTI-Systeme erfüllt ist, dass beim Passieren des Signals durch das System keine neuen Frequenzen erzeugt werden:

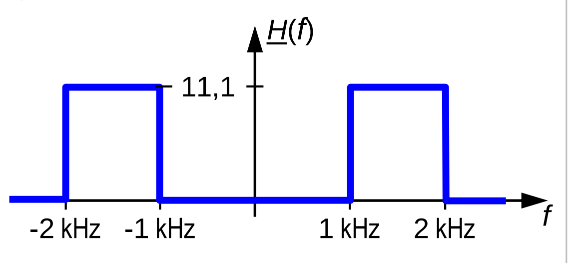
a) Welche Harmonische gibt es vor der Filterung, welche passieren den Filter?

b) Mit beiden Filtern „si-Funktion“ sind im Ausgangssignal Überschwinger sichtbar, die über die Amplitude 1,0 des Originalsignals hinausgehen. Erklären Sie diese mit Hilfe der Erfahrungen, die Sie in der Übungsaufgabe auf Seite 5 gemacht haben!

Übungsaufgabe Filterung eines Dreiecksignals

Ein periodisches Dreiecksignal (dargestellt im **Bild** unten links) dient als Eingangssignal $x(t)$ eines Filters, dessen Frequenzgang $\underline{H}(f)$ unten rechts dargestellt ist.





Rechts ist $x(t)$ als FR dargestellt; sichtbar sind nur die ersten 5 Harmonischen:

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2}\sin(2\pi f_0 t) - \frac{8}{9\pi^2}\sin(6\pi f_0 t) + \frac{8}{25\pi^2}\sin(10\pi f_0 t) + \cdots$$

a) Um welchen Filtertyp (*Tiefpass*, *Hochpass*, *Bandpass*, *Bandsperre*) handelt es sich dabei?

b) Skizzieren Sie die FT $\underline{X}(f) \bullet\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\circ\ x(t)$ des Eingangssignals, im Bereich $-1 < f \leq 1$.

c) Skizzieren Sie die FT $\underline{Y}(f) \bullet\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\circ\ y(t)$ des Ausgangssignals, im Bereich $-1 < f \leq 1$.

d) Wie lautet das Ausgangssignal $y(t)$ des Filters?

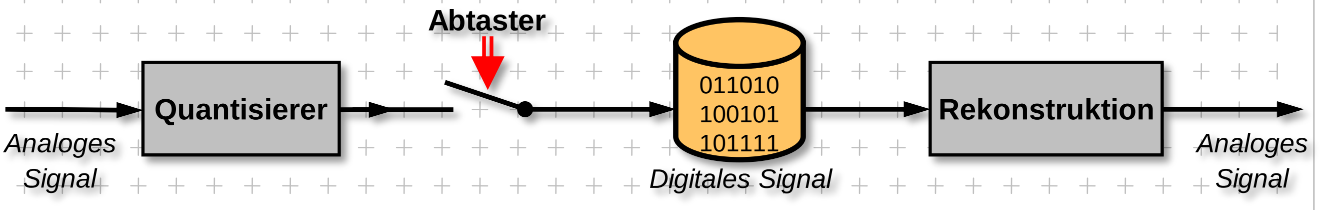
Digitalisierung von Signalen: *Quantisierung* und *Abtastung*

Digitalisierung eines analogen Signals

Bereits in Kap. 5 „ Digitalisierung von Signalen zur Verarbeitung am Rechner“ wurden die beiden wesentlichen Schritte zur Erfassung eines analogen Signals genannt:

1. ***Quantisierung*** (um das Signal wertediskret zu machen), und
2. ***Abtastung*** (um das Signal zeitdiskret zu machen).

Das eigentliche Ziel ist jedoch meist nicht die reine Analog→Digital-Wandlung, sondern die Rekonstruktion des Signals, nachdem es digital gespeichert, verarbeitet, oder übertragen wurde:



In der Peripherie heutiger Rechnersysteme (z.B. PC-*Soundkarte*) werden die beiden Schritte *Quantisierung* und *Abtastung* meist in einem einzigen integrierten Baustein durchgeführt, ebenso die Rückwandlung eines digitalen Signals in ein analoges. Diese Bausteine werden

- ***Analog/Digital-Wandler*** (*Analog to Digital Converter*, ADC) und
- ***Digital/Analog-Wandler*** (*Digital to Analog Converter*, DAC)

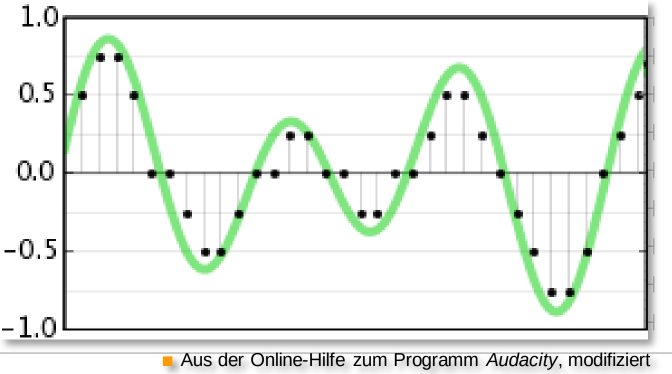
genannt. Nichtsdestotrotz betrachten wir auf den folgenden Seiten die beiden Schritte *Abtastung* und *Quantisierung* separat – der Übersichtlichkeit halber.

Beispiel Digitales Signal

Das Bild unten zeigt durchgezogen ein (willkürliches) analoges Signal; dazu als schwarze Punkte die daraus gewonnenen Abtastwerte.

Im Bild sind zwei wesentliche Parameter der *Quantisierung* und der *Abtastung* sichtbar: Kennzeichnen Sie darin…

a) die Quantisierungsstufe und
b) das Abtastintervall.



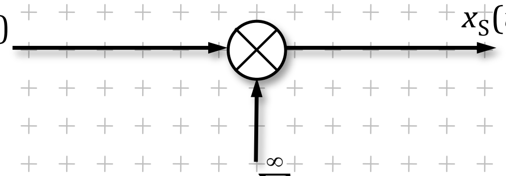
Aus der Online-Hilfe zum Programm *Audacity*, modifiziert

Betrachtung der Abtastung im Zeitbereich

Abtastung eines Signals mittels sog. *Impulsmodulator*

Üblicherweise wird die Abtastung *äquidistant* durchgeführt, d.h. regelmäßig wird nach Ablauf einer bestimmten Zeitdauer T_S (der sog. *Abtastperiode*) ein Momentanwert des Signals erfasst.

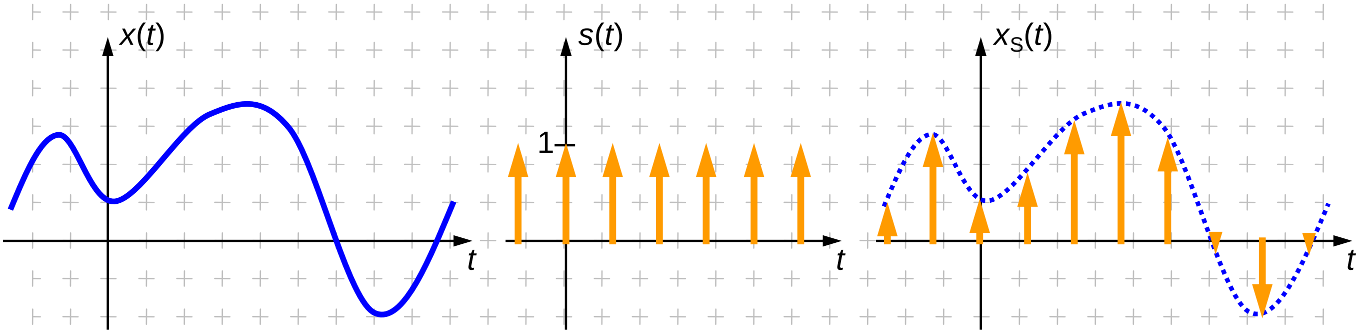
- Diese Umwandlung von einem *zeitkontinuierlichen* in ein *zeitdiskretes* Signal kann mathematisch z.B. durch einen Schalter dargestellt werden, so wie im Bild der vorherigen Seite 7 .
- Damit wir den Abtastvorgang jedoch weiterhin mit Hilfe der uns vertrauten Fouriertransformation betrachten und verstehen können, nutzen wir einen *Impulsmodulator*, der das Signal in eine gewichtete Folge von δ-Impulsen wandelt, siehe nachfolgende **Bilder**:



$$x(t)$$

$$x_S(t) = x(t)\cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S)\cdot\delta(t-nT_S)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_S)$$



Abtastparameter

- Den konstanten Abstand zwischen zwei Abtastwerten nennt man **Abtastperiode T_S**.
- Deren Kehrwert, also die Häufigkeit der Abtastung ist die **Abtastrate** (auch: **Abtastfrequenz** genannt)

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Beispiel Telefonübertragung

Die Sprachübertragung beim Telefon geschieht heute praktisch nur noch digital. Die übliche Abtastrate beträgt f_S = 8 kHz.

a) Bestimmen Sie die Abtastperiode T_S.

b) Wie viele Abtastwerte müssen für ein 10-minütiges Telefongespräch in jeder Richtung übertragen werden?

Betrachtung der Abtastung im Frequenzbereich

Betrachtung der Abtastung im Frequenzbereich

- Laut den „Rechenregeln der Fouriertransformation“ im Kap. 6 entspricht die Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich:

Modulation	$\underline{x}_1(t) \cdot \underline{x}_2(t)$	$\underline{X}_1(f) * \underline{X}_2(f)$

- Damit lässt sich das Spektrum des Signals $x_S(t) = x(t) \cdot s(t)$ nach dem Abtaster angeben zu:

$$\underline{X}_S(f) = \underline{X}(f) * \underline{S}(f) = \frac{1}{T_S} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}(f - k f_S)$$

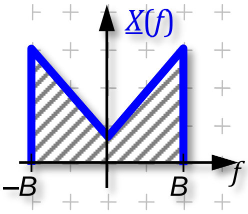
… weil das Spektrum von $s(t)$ ebenfalls eine Impulsfolge ist: $\underline{S}(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_S)$

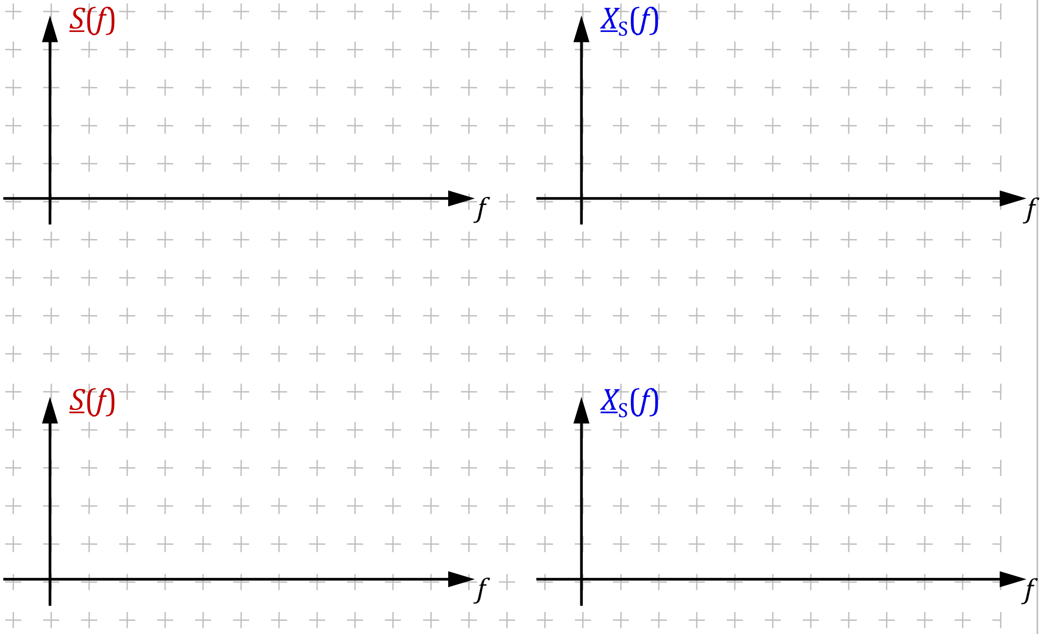
⇒ Spektrum des abgetasteten Signals ist periodisch mit $f_S = \frac{1}{T_S}$!

Beispiel **Spektren eines abgetasteten Signals für zwei verschiedene Abtastraten**

Annahme:

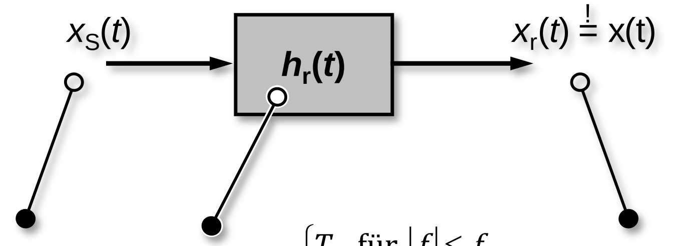
Das Spektrum des Signals ist bandbegrenzt:

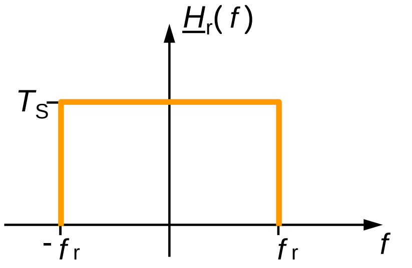




Bedingung für die Rekonstruktion: Einhaltung des Abtasttheorems

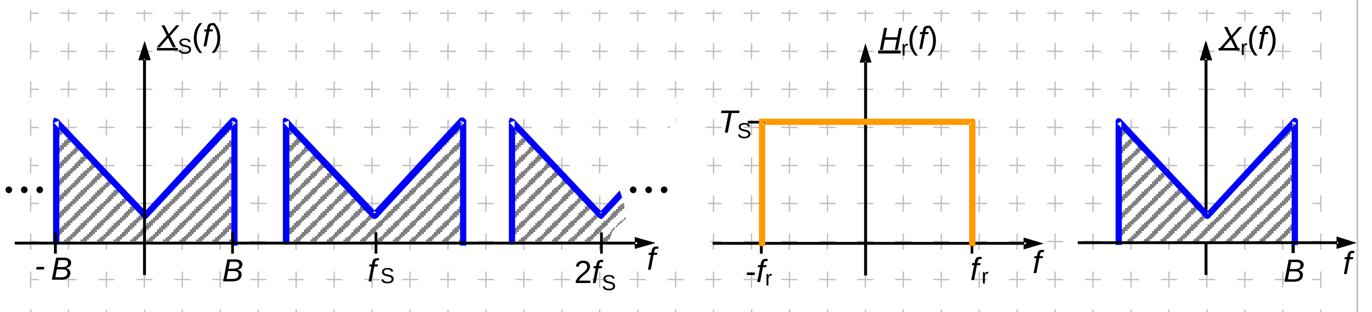
Rekonstruktion des Signals durch Tiefpassfilterung:





$\underline{X}_S(f)$ $\qquad$ $\underline{H}_r(f) = \begin{cases} T_S & \text{für } |f| \le f_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\qquad$ $\underline{X}_r(f) = \begin{cases} T_S \cdot \underline{X}_S(f) & \text{für } |f| \le f_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe des Rekonstruktionsfilters: Ausschneiden einer Periode im Spektrum:



Rekonstruktion ist prinzipiell immer dann möglich, wenn das <u>Abtasttheorem</u> gilt:

- Die periodischen Fortsetzungen in $\underline{X}_S(f)$ $\bullet\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\circ$ $x_s(t)$ überlappen nicht, wenn folgendes gilt:
  1. Das Spektrum $\underline{X}(f)$ $\bullet\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\circ$ $x(t)$ ist bandbegrenzt.
  2. Der gegenseitige Abstand f_S zwischen den Einzelspektren ist ausreichend groß.

> Sei $x(t)$ ein bandbegrenztes Signal mit dem Spektrum $\underline{X}(f) = 0$ für $f > B$, dann ist $x(t)$ eindeutig bestimmt durch seine Abtastwerte $x(nT_S)$ mit $n = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$ wenn gilt: $\quad f_S = \dfrac{1}{T_S} \ge 2 \cdot B$

Terminologie:

- ***Nyquistrate***[1]: $\quad 2 \cdot B$
- ***Überabtastung***: $\quad f_S > 2 \cdot B$
- ***Unterabtastung***: $\quad f_S < 2 \cdot B$

  ⇒ führt zu spektralen Überlappungen, sog *Rückfaltung* oder *Aliasing*

[1] Harry Nyquist (1889-1976), US-amerikanischer Physiker

Übungen – Abtastung und Rekonstruktion deterministischer Signale

Demonstration Abtastung eines sinusförmigen Signals mit einer Impulsfolge

a) Starten Sie das Programm **`A_Abtastung.exe`**:
⇒ Wie hoch ist die Abtastfrequenz (herausgelesen in Zeit- und Frequenzbereich)?

b) Wird das Abtasttheorem bei der voreingestellten Frequenz $f = 1{,}4$ kHz eingehalten?
⇒ Zeigen Sie dies im Spektrum $\underline{X}_S(f)$ $\bullet\!\overset{\text{FT}}{—}\!\circ$ $x_S(t)$ des abgetasteten Signals!

c) Das Signal am Ausgang des Rekonstruktionstiefpasses schaut weder sinusförmig aus, noch klingt es so. Erklären Sie, warum das nicht der Fall ist!

d) Auf welche Bandbreite muss der Rekonstruktionsfilter eingestellt sein, damit ein sinusförmiges Signal $x(t)$ der Frequenz $f = 1{,}4$ kHz korrekt zu $x_r(t) = x(t)$ rekonstruiert wird?

e) Finden Sie drei weitere Frequenzen der Sinus-Funktion $x(t)$, die nach der Rekonstruktion ebenfalls in einem sinusförmigen Signal $x_r(t)$ mit $f = 1{,}4$ kHz resultieren!

Übungsaufgabe Abtastung eines sinusförmigen Signals

Ein sinusförmiges Signal der Frequenz $f = 3{,}1$ kHz wird mit $f_S = 3$ kHz abgetastet.

a) Skizzieren Sie die Amplitudenspektren $|\underline{X}(f)|$ und $|\underline{X}_S(f)|$

b) Ist das Abtasttheorem erfüllt (Begründung!)?

Nach der Abtastung durchläuft das Signal einen Tiefpass, *Grenzfrequenz* = $\frac{1}{2}$ · *Abtastfrequenz* f_S:

c) Welche Signalform erhalten Sie nach der Rekonstruktion?

d) Welche Frequenz hat das rekonstruierte Signal?

Übungsaufgabe Abtastung der Spaltfunktion

a) Welchen Verlauf hat das Spektrum der Spaltfunktion?

b) Welche Grenzfrequenz müsste der Rekonstruktionsfilter haben, damit die Spaltfunktion der Bandbreite $B = 1{,}4$ kHz korrekt rekonstruiert wird (es gibt mehrere mögliche Lösungen!)?

c) Im Programm **`A_Abtastung.exe`** entspricht das Spektrum $\underline{X}_r(f)$ $\bullet\!\overset{\text{FT}}{—}\!\circ$ $x_r(t)$ des rekonstruierten Signals nicht exakt dem Spektrum $\underline{X}(f)$ $\bullet\!\overset{\text{FT}}{—}\!\circ$ $x(t)$ des Originalsignals. Im Zeitbereich sieht das Signal $x_r(t)$ sogar völlig anders aus. Warum?

d) Stellen Sie die Bandbreite der Spaltfunktion auf $B = 1{,}5$ kHz ein. Erklären Sie den Verlauf des abgetasteten Signals $x_S(t)$ sowie des zugehörigen Spektrums $X_S(f)$!

e) Stellen Sie die Bandbreite der Spaltfunktion auf $B = 2$ kHz ein. Warum stellt das Spektrum $X_S(f)$ $\bullet\!\overset{\text{FT}}{—}\!\circ$ $x_S(t)$ jetzt eine Rechteckfunktion dar, die nie zu Null wird?

Übungen – Abtastung und Rekonstruktion natürlicher Signale

Demonstration Abtastung und Rekonstruktion Ihrer eigenen Stimme

Stellen Sie im Programm **`A_Abtastung.exe`** als Signalquelle das Mikrofon ein:

a) Welche Aufgabe hat der jetzt eingefügte „*Anti-Aliasing-Tiefpass*“?

b) An welcher Stelle im Signalpfad muss der *Anti-Aliasing-Tiefpass* daher grundsätzlich bei Analog/Digital-Wandlern eingebaut sein? Auflösung: Blockschaltbild von **`A_Abtastung.exe`**.

c) Stellen Sie die beiden Bandbreiten so ein, dass eine korrekte Rekonstruktion unter Erfüllung des Abtasttheorems durchgeführt wird. Ihre Stimme sollte jetzt mit etwa 0,5 s Verzögerung wiedergegeben werden.

d) Erweitern Sie nun die Bandbreite des Signals auf $B = 10\ \mathrm{kHz}$ (die Grenzfrequenz des Rekonstruktionstiefpassfilters bleibt auf $f_\mathrm{r} = 1{,}5\ \mathrm{kHz}$) und verletzen Sie bewusst das Abtasttheorem, indem Sie eine Melodie oberhalb von $1{,}5\ \mathrm{kHz}$ pfeifen.
⇒ Beschreiben Sie den hörbaren Aliaseffekt!

Übungsaufgabe Abtastung und Rekonstruktion eines Musiksignals

a) Stellen Sie im Programm **`A_Abtastung.exe`** sowohl die Signalbandbreite, als auch die Bandbreite des Rekonstruktionstiefpasses jeweils auf $1{,}5\ \mathrm{kHz}$ ein.
⇒ Ist das Abtasttheorem mit diesen Einstellungen erfüllt?

b) Warum klingt die Musik nicht wirklich natürlich?

c) Erweitern Sie nun die Bandbreite des Signals auf $B = 10\ \mathrm{kHz}$ (der Rekonstruktionstiefpass bleibt auf der Grenzfrequenz $1{,}5\ \mathrm{kHz}$).
⇒ Ist das Abtasttheorem erfüllt?
⇒ Wodurch unterscheidet sich das rekonstruierte Signal $x_\mathrm{r}(t)$ vom Originalsignal $x(t)$ – optisch und akustisch?

d) Stellen Sie nun die Bandbreite des Signals zurück auf $B = 1{,}5\ \mathrm{kHz}$ und die Grenzfrequenz des Rekonstruktionstiefpasses auf $10\ \mathrm{kHz}$.
⇒ Ist das Abtasttheorem erfüllt?
⇒ Wodurch unterscheiden sich die Spektren $\underline{X}_\mathrm{r}(f)$ und $\underline{X}(f)$?
⇒ Was hören Sie?

Quantisierung analoger Signale

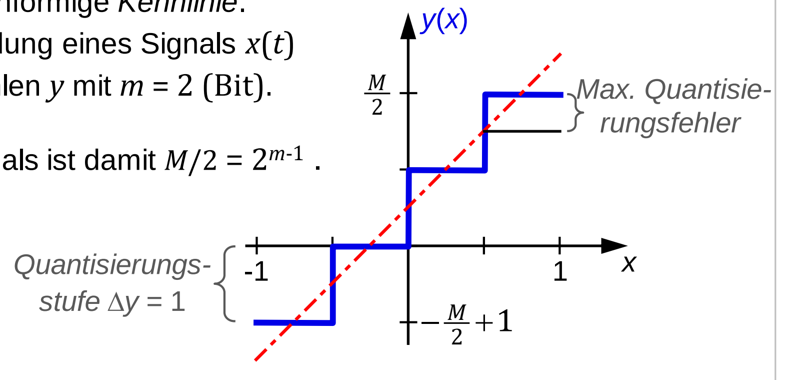
Lineare Quantisierung mittels treppenförmiger Kennlinie *y*(*x*):

- Die Darstellung eines diskreten Signalwertes am Rechner geschieht meist durch eine Ganzzahl, die eine feste Wortbreite von ***m*** **Bit** aufweist. Dementsprechend gibt es

  $M = 2^m$ Stufen, z.B. Vorzeichen behaftet von $(-2^{m-1} + 1)$ bis 2^{m-1}

- Die Abbildungsfunktion ist eine treppenförmige *Kennlinie*.
  Im Bild rechts dargestellt ist die Abbildung eines Signals $x(t)$ (Wertebereich $-1 < x \leq 1$) auf Ganzzahlen y mit $m = 2$ (Bit).

  Der maximale Wert des Ausgangssignals ist damit $M/2 = 2^{m-1}$.



Quantisierungsfehler *q*(*t*):

- Wie im Bild oben dargestellt, entsteht durch die Quantisierung ein Fehler q, dessen Betrag maximal die Hälfte der Quantisierungsstufe Δy beträgt:

$$|q| \leq q_{\max} = \frac{\Delta y}{2} = 0{,}5$$

- Unter der Annahme, dass der Rundungsfehler bei größeren Wortbreiten gleichverteilt zwischen dem minimal möglichen Wert -0,5 und dem maximal möglichen Wert +0,5 liegt, stellt dieser ein Rauschsignal *q*(*t*) dar. Die Quantisierung lässt sich somit äquivalent als Addition des Quantisierungsrauschens $q(t)$ zum Nutzsignal $x(t)$ auffassen!

Dynamikumfang des quantisierten Signals *y*(*t*) mit linearer Quantisierung

- Der Dynamikumfang $D_{\max}$ beschreibt das Verhältnis der Nutzsignalleistung zur Rauschsignalleistung. Als erste – grobe[1)] – Abschätzung des Dynamikumfangs kann das *Verhältnis der Maximalamplituden* der beiden Signale zur Berechnung herangezogen werden:

$$D_{\max} = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{N}}} \approx \left(\frac{M/2}{q_{\max}}\right)^2 = \left(\frac{2^{m-1}}{0{,}5}\right)^2 = \left(2^m\right)^2 = 4^m$$

[1)] Die korrekte Berechnung des Dynamikbereiches findet sich im Anhang auf Seite 15.

Übungen zur Quantisierung

Demonstration Quantisierung von Audiosignalen

Rufen Sie das Programm **`B_Quantisierung.exe`** auf.

a) Ist der Einfluss der Quantisierung (Sinus-förmiges Signal mit $m = 8$ Bit Auflösung) im Ausgangssignal $y(t)$ erkennbar?

b) Welchen Wertebereich überstreicht das Fehlersignal $q(t)$ bei lauten/leisen Passagen des Musiksignals?

c) Ab welcher Wortbreite m hören Sie das Rauschen beim Sinus-, und beim Sägezahnsignal?

d) Ab welcher Wortbreite m bei dem Musiksignal ist das Quantisierungsrauschen tatsächlich so zufällig, dass Sie daraus nicht mehr auf die Stelle im Musikstück zurückschließen können?

Übungsaufgabe Quantisierung und Dynamik

a) Skizzieren Sie die Quantisierungskennlinie für $m = 3$, und ein Signal im Wertebereich $-1 \le x < 1$. Achten Sie darauf, dass jede Quantisierungsstufe exakt gleiche Wertebereiche repräsentiert.

b) Welche Dynamik hat das Musiksignal im Programm **`B_Quantisierung.exe`**?
Hinweis: Ermitteln Sie dazu die Wortbreite, ab der die Rauschleistung der Aufnahme gleich der Leistung des Quantisierungsrauschens ist.

Beispiel Abtastung und Quantisierung bei einer Audio-CD (*Compact Disc*)

a) Welche Wortbreite hat das Signal einer Audio-CD pro Kanal?

b) Welche Abtastrate hat das Signal einer Audio-CD?

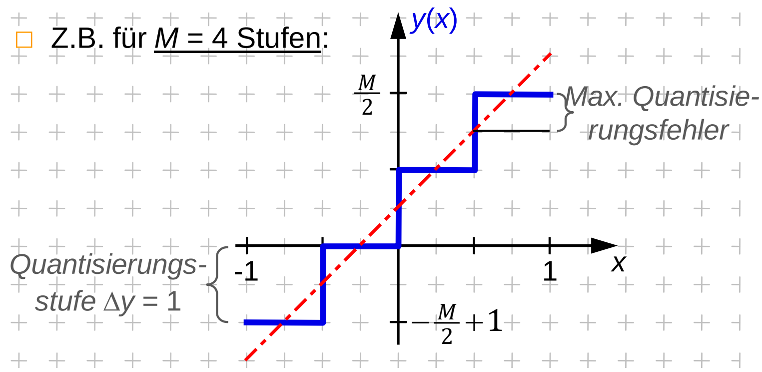
c) Welche Gesamt-Datenrate ergibt sich für beide Stereo-Kanäle?

d) Wieviel Speicherplatz ist für ein 60-minütiges Musikstück nötig?

ANHANG: *Quantisierung* – Berechnung des Dynamikbereichs

Quantisierungskennlinie:

- Z.B. für <u>$M = 4$ Stufen</u>:



Max. Nutzsignalleistung am Ausgang des Quantisierers

- <u>Annahme:</u> Sinusförmiges Signal $y(t)$ der Amplitude $\hat{Y}$ (d.h. Vollaussteuerung)

  ⇒ Betrachtung der Signalleistung am <u>Einheitswiderstand</u>: $P = \dfrac{U^2}{R} = U^2$

  (weiter unten werden wir den Dynamikumfang als Verhältnis zweier Leistungen berechnen, so dass sich der Widerstand ohnehin herauskürzen würde)

  ⇒ Berechnung der Signalleistung mittels <u>Effektivwert</u> Y_{eff}: $P_{\max,\sin} = Y_{\text{eff}}^2 = \left(\dfrac{\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx \left(\dfrac{M}{2\cdot\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{M^2}{8}$

  (vgl. Kap. 1: „Mittel- und Effektivwert")

Quantisierungsrauschen

- Maximaler Quantisierungsfehler aus der Kennlinie oben: $q_{\max} = 0{,}5$
- <u>Annahme:</u> Statist. Gleichverteilung des Rauschsignals: $-0{,}5 < q(t) \le 0{,}5$

  ⇒ Rauschsignalleistung am Einheitswiderstand: $P_{\text{N}} = \dfrac{\Delta y}{12} = \dfrac{1}{12}$

  (berechnet als sog. *Varianz der Gleichverteilung*)

Dynamikumfang

Der Dynamikumfang $D_{\max}$ bezeichnet das Verhältnis der maximalen Nutzsignalleistung zur kleinsten noch auflösbaren Nutzsignalleistung (SNR, *Signal to Noise Ratio*). Er ist definiert als

$$D_{\max} = \frac{P_{\max,\sin}}{P_{\text{N}}} = \frac{M^2/8}{1/12} = \frac{12}{8}M^2 = \frac{3}{2}M^2 = \frac{3}{2}\cdot 4^m \quad \text{mit} \quad \underbrace{M^2 = \left(2^m\right)^2 = \left(2^2\right)^m = 4^m}$$

- Logarithmische Darstellung in der Pseudo-Einheit ‚dB' (Dezibel):

  (vgl. Kap. 1: „Pegelrechnung – Definition")

$$D_{\max} = 10\cdot\log\left(\frac{3}{2}\cdot 4^m\right)\text{dB} = 10\cdot\left[\log\left(\frac{3}{2}\right) + m\cdot\log(4)\right] = [1{,}76 + 6\cdot m]\,\text{dB}$$