FUNKTIONEN

Definitionsbereich und Bild. Geben Sie für die folgenden Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich D und die Bildmenge $f(D)$ an $(D \subset \mathbb{R})$

* a) $f(x) = |x|$ * b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ * c) $f(x) = \sqrt{x+3}$

d) Es sei $B =]-1,1[$. Was ist für jede der obigen Funktionen $f(B)$?

e) (optional) Programmieren Sie jede der obigen Funktionen in C.

Lösung.

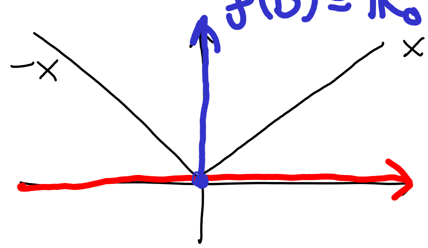
$\swarrow \sqrt{x^2}$

a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ z.B. $|-5| = -(-5) = 5$

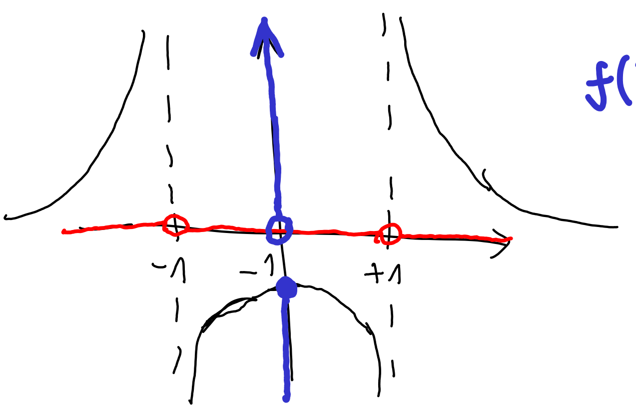
C:
```
double abs(double x){
   if (x>=0) return x;
   else return -x;
}
```

$D = \mathbb{R}$

$f(D) = \mathbb{R}_0^+ = [0,\infty[$



b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (da Nenner $\neq 0$: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$)



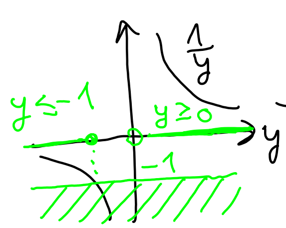
$f(D) = \mathbb{R} \setminus]-1,0] =]-\infty,-1] \cup]0,\infty[$

$f(D)$ mathematisch: $y \in f(D) \Leftrightarrow \exists x \in D: y = \dfrac{1}{x^2-1}$

$\overset{y \neq 0}{\Rightarrow} x^2 - 1 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{y} + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y}+1}$

$\dfrac{1}{y} + 1 \geq 0$

$\dfrac{1}{y} \geq -1$

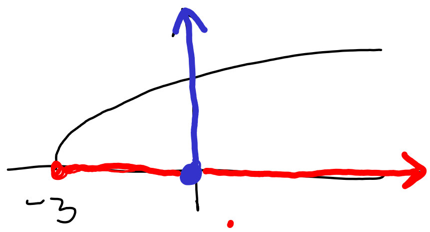


$\Rightarrow$ $y \leq -1 \vee y \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -1 \vee y \geq 0$, d.h. $y \in \mathbb{R} \setminus]-1,0]$

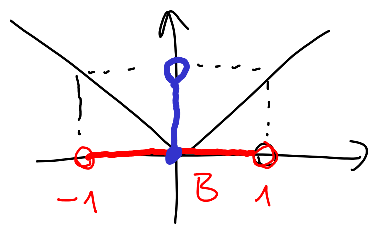
~~Eigener Lösungsversuch.~~

c) $f(x)=\sqrt{x+3}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus]-\infty,-3[= [3,\infty[\quad (x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3)$



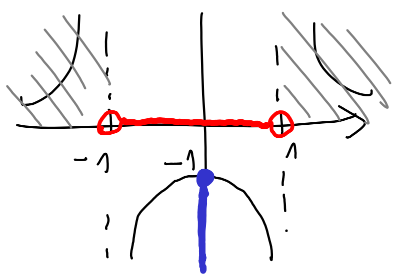
$f(D) = \mathbb{R}_0^+.$

d) a)



$f(B) = [0,1[$

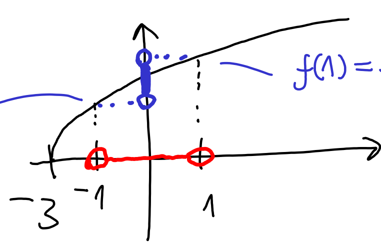
b)



$f(B) =]-\infty,-1]$

c)

$f(-1) = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2}$



$f(1) = \sqrt{1+3} = 2$

$f(B) =]\sqrt{2}, 2[$

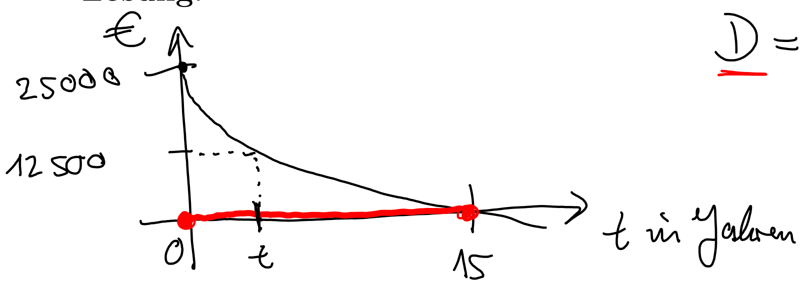
$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Zeitwert Auto. Der Zeitwert eines Autos nach t Jahren sei gegeben durch

$$f(t) = 25000 \cdot \frac{30 - 2t}{30 + 15t}.$$

Geben Sie die ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge an. Wann hat sich der Wert des Fahrzeuges auf die Hälfte reduziert?

Lösung.



Jahr 0 ist jetzt!

$$D = [0, 15]$$

$$\underbrace{\text{Fahrzeugwert}}_{= f(t)} \geq 0$$

$$\iff 25000 \cdot \frac{30-2t}{30+15t} \geq 0$$

$\cdot (30+15t) > 0$

$$\overset{\geq 0}{\iff} 25000 \cdot (30-2t) \geq 0$$

$$\overset{:25000}{\iff} 30-2t \geq 0 \iff 30 \geq 2t$$

$$\iff \underline{15 \geq t}$$

$$f(t) = 12.500 \iff 25000 \, \frac{30-2t}{30+15t} = 12.500$$

$$\iff 30-2t = \frac{1}{2}(30+15t)$$

$$\iff 30-2t = 15 + 7{,}5t$$

$$\iff 15 = 9{,}5t$$

$$\iff t = \frac{15}{9{,}5} \approx \underline{1{,}58 \text{ J}}.$$

Eigener Lösungsversuch.

Lineare Transformationen eines Graphen. Wie ändert sich der Funktionsgraph, wenn man von einer Funktion $f(x)$ zu folgender Funktion übergeht? Dabei sei immer $a > 0$.

* 1. $f(x) + a$

* 2. $f(x) - a$

3. $f(x + a)$

4. $f(x - a)$

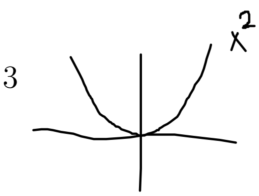
5. $af(x)$ ($a > 1$ und $a < 1$)

6. $f(ax)$ ($a > 1$ und $a < 1$)

7. $-f(x)$

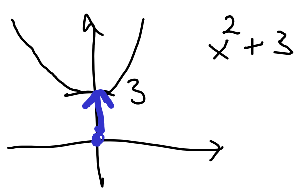
8. $f(-x)$

Hinweis: überlegen Sie mithilfe eines konkreten Beispiels z.B. $f(x) = x^2$ und $a = 3$ bzw. $a = \frac{1}{3}$.



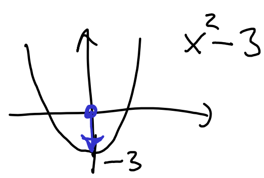
Lösung.

1.



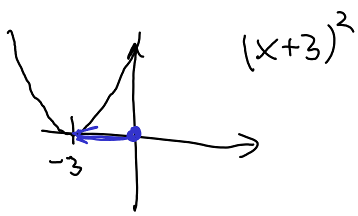
Verschiebung um a nach oben

2.



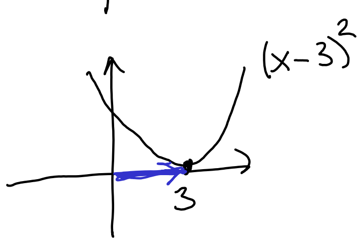
Verschiebung um a nach unten

3.



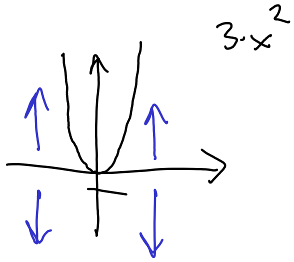
Verschiebung um a nach links

4.



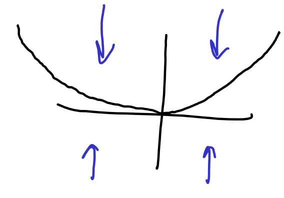
Verschiebung um a nach rechts

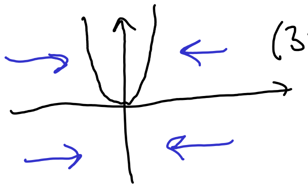
5.



Streckung in y-Richtung, falls $a > 1$

Stauchung — " — , falls $a < 1$ ← z.B. $a = \frac{1}{3}$



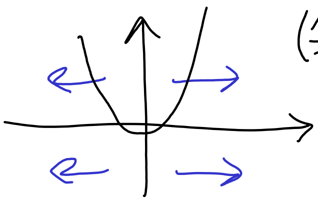
6. 

$(3x)^2$

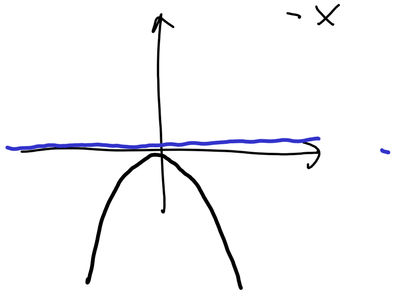
Stauchung in x Richtung, falls $a > 1$

Streckung — " —, falls $a < 1$

Eigener Lösungsversuch.

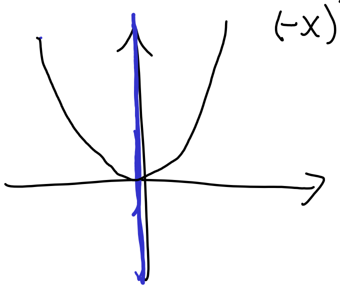


$\left(\frac{1}{3}x\right)^2$

7. 

$-x^2$

$-f(x)$ Spiegelung an x-Achse!

8. 

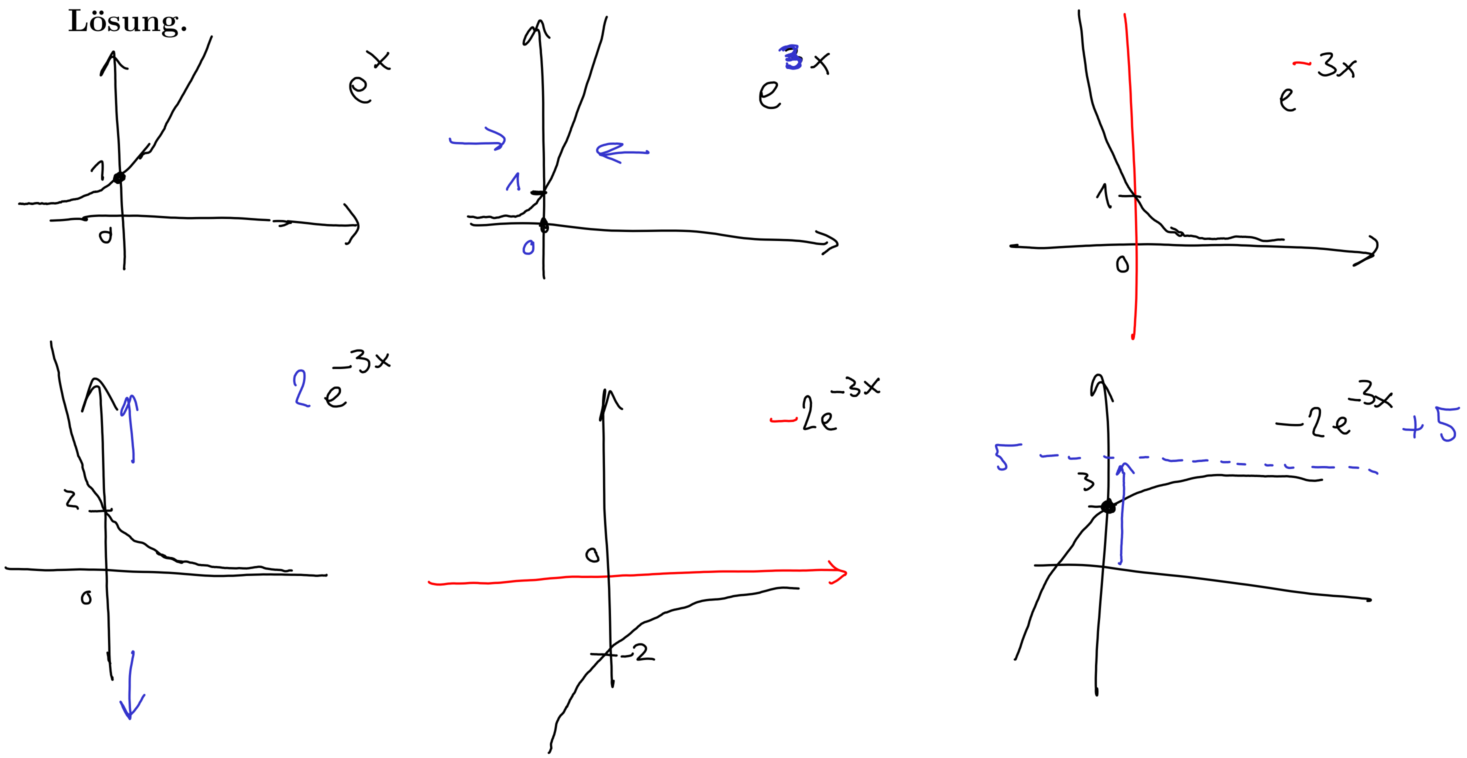
$(-x)^2$

$f(-x)$ Spiegelung an y-Achse

Graph skizzieren. Skizzieren Sie den Graphen folgender Funktion qualitativ:

$$f(x) = -2e^{-3x} + 5$$

Lösung.



Eigener Lösungsversuch.

Surjektivität. Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : D \longrightarrow Z$ die Bildmenge $f(D)$ an. Ist die Funktion surjektiv?

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$

3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Lösung.

1.

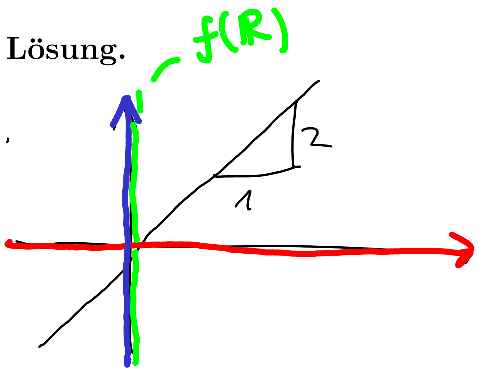
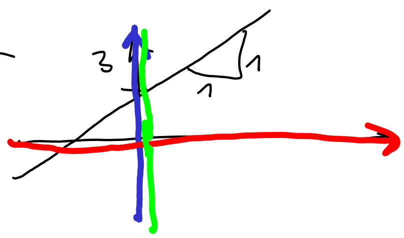


Bild von f

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, d.h. f surjektiv, da die ganze blaue y-Achse erreicht wird.

2



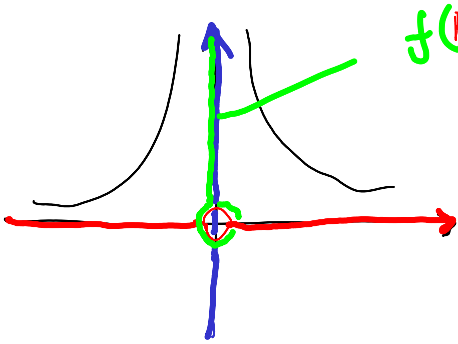
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, — " —

Mathematisch sauber: ~~zz~~: $\forall y \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{f(x)}_{x+3} = y \iff x = y-3$

Zu $y \in \mathbb{R}$ definiere ich $x := y-3$. Dann gilt: $f(x) = f(y-3) = (y-3)+3 = y$ $\square$

~~**Eigener Lösungsversuch.**~~

3.



$f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}^+ =]0,\infty[\neq \mathbb{R}$, d.h. nicht surjektiv!

Injektivität. Welche der Funktionen ist injektiv?

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

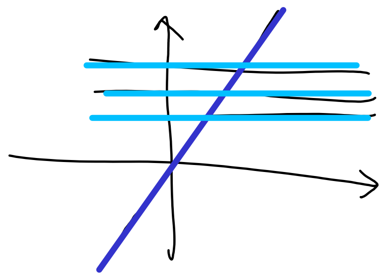
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$

3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

Lösung.

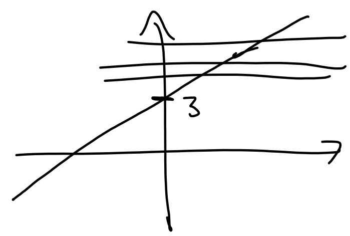
1.



Jede horizontale Gerade hat nicht mehr wie einen Schnittpunkt mit dem Graphen, d.h. injektiv

(d.h. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

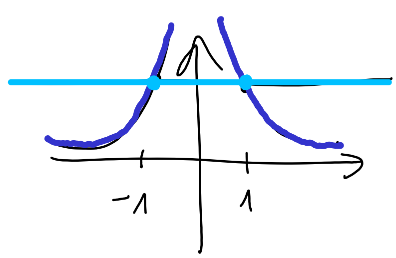
2.



— 〃 —

~~Eigener Lösungsversuch.~~

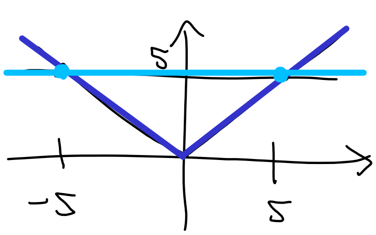
3.



$x_1 = -1 \neq 1 = x_2$, aber $f(x_1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1 = \frac{1}{1^2} = f(x_2)$

d.h. nicht injektiv

4.



$x_1 = -5 \neq 5 = x_2$, aber $f(-5) = |-5| = 5 = |5| = f(5)$

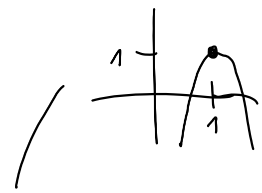
d.h. nicht injektiv

Verknüpfung von Funktionen, Teil 1. Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$ und $g(x) = x - 1$. Geben Sie die folgenden Funktionen an:

* 1. $f \circ g$

2. $g \circ f$

Lösung.



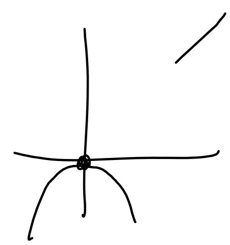
1. $f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto \underline{f(g(x))} = f(x-1) = 1-(x-1)^2$$

$$= 1-(x^2-2x+1) = \underline{-x^2+2x}$$

2. $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto \underline{g(f(x))} = g(1-x^2) = (1-x^2) - 1 = \underline{-x^2}$$



Eigener Lösungsversuch.

Verknüpfung von Funktionen, Teil 2. Schreiben Sie h als Hintereinanderausführung von zwei Funktionen f und g.

* 1. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (3x+1)^2$

2. $h : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{3+x}$.

Allgemein: $g(\mathbb{R}) \subseteq D_f$ (↝ Skript!)

Lösung.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x+1$

$\Rightarrow f \circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f(g(x)) = (3x+1)^2 = h(x)$ ✓

2. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$g : \cancel{\mathbb{R}} \to \cancel{\mathbb{R}}$, $g(x) = 3+x$

$\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ $\quad$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(x) = 3+x \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -3$

$\Rightarrow f \circ g : \cancel{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \cancel{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ $\quad$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(g(x)) = \frac{1}{3+x} = h(x)$ ✓

Eigener Lösungsversuch.

Umkehrfunktionen, Teil 1. Geben Sie die Umkehrfunktion an:

* 1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \underline{2x}$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \underline{4x + 3}$

Lösung.

1. $y = 2x \overset{\text{Vertausche}}{\underset{x \leftrightarrow y}{\longleftrightarrow}} x = 2y \Longrightarrow y = \underbrace{\frac{1}{2}x}_{g(x):=}$ Kandidat für Umkehrfkt.

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g\,(x) = f(g(x)) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = x = id_{\mathbb{R}}(x) \\ g \circ f\,(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}(2x) = x = id_{\mathbb{R}}(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow g = f^{-1} \text{ Umkehrfkt!}$$

$id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$

2. $y = 4x+3 \overset{x \leftrightarrow y}{\longleftrightarrow} x = 4y+3 \Longrightarrow \underline{y = \frac{x-3}{4} =: g(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g\,(x) = f(g(x)) = 4\left(\frac{x-3}{4}\right) + 3 = x \\ g \circ f\,(x) = g(f(x)) = \frac{(4x+3) - 3}{4} = x \end{array}\right\} \Longrightarrow g = f^{-1} \text{ Umkehrfkt.!}$$

Eigener Lösungsversuch.

Umkehrfunktionen, Teil 2. Wie lautet die Umkehrfunktion von

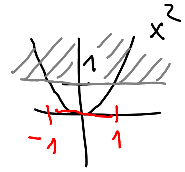
$$f(x) = \sqrt[4]{1-x^2} + 2\ ?$$

Geben Sie jeweils Definitions- und Bildmengen an.

Lösung.

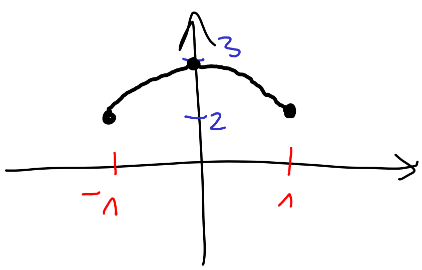
Definitionsbereich: $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$



$f : [-1, 1] \longrightarrow$? $\leftarrow$ Bildmenge, damit f surjektiv wird!

$[2,3]$, da • $\underbrace{1-x^2}_{\geq 0}$ für $-1 \leq x \leq 1$ ist dies bei $x = \pm 1$ minimal gleich 0, also $f(\pm 1) = 0 + 2 = 2$ Minimum.



• $\underbrace{1-x^2}_{\geq 0}$ ist maximal für $x = 0$, also $f(0) = 1 + 2 = 3$ Maximum

Wegen $f(-1) = 2 = f(1)$ ist die Funktion nicht injektiv. Schränke Def. bereich ein:

$f : [0,1] \longrightarrow [2,3]$ Hoffe, dies ist bijektiv. Die Bijektivität folgt aus der Existenz der Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt[4]{1-x^2} + 2 \overset{x \leftrightarrow y}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt[4]{1-y^2} + 2 \overset{-2}{\Rightarrow} x - 2 = \sqrt[4]{1-y^2} \overset{(\ )^4}{\Rightarrow} (x-2)^4 = 1 - y^2$$

$$\overset{-1}{\Rightarrow} (x-2)^4 - 1 = -y^2 \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -(x-2)^4 + 1 = y^2$$

$$\overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} y = \cancel{\pm}\sqrt{-(x-2)^4 + 1} =: g(x)$$

nicht eindeutig: $g(x) \in [0,1]$

$g : [2,3] \longrightarrow [0,1]$, $g(x) = \sqrt{-(x-2)^4 + 1}$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt[4]{1 - \left(\sqrt{-(x-2)^4+1}\right)^2} + 2 = x = id_{[2,3]}(x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{-\left(\left(\sqrt[4]{1-x^2}+2\right) - 2\right)^4 + 1} = x = id_{[0,1]}(x)$$

$\Rightarrow g = f^{-1}$ Umkehrfkt. & f bijektiv

Eigener Lösungsversuch.

Optimaler Preis. Ein Unternehmen stellt USB-Sticks her. Durch eine Marktanalyse wurde festgestellt, dass bei einem Stückpreis von p ungefähr $x = 200 - 20p$ Stück pro Tag verkauft werden können.

* 1. Geben Sie den Preis als Funktion der Stückzahl an. Welcher Definitionsbereich ist ökonomisch sinnvoll? Fertigen Sie eine Skizze an.

* 2. Werden pro Tag x USB-Sticks produziert, dann fallen dabei die Produktionskosten $k(x) = 100 + 4x$ an. Beim Verkauf von x USB-Sticks erzielt das Unternehmen die Einnahmen $e(x) = x \cdot p(x)$. Skizzieren Sie die Funktionen k und e grob.

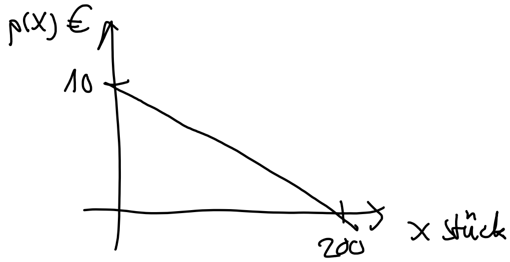
3. Beim Verkauf von x USB-Sticks macht das Unternehmen einen Gewinn von $g(x) = e(x) - k(x)$. Skizzieren Sie $g(x)$ grob.

4. Das Unternehmen arbeitet kostendeckend, wenn $g(x) \geq 0$ ist. Welchem Stückzahlenbereich entspricht das?

5. Welchen Preis soll das Unternehmen festlegen, damit der Gewinn maximal wird?

Lösung.

1. $x = 200 - 20p \Rightarrow x - 200 = -20p \Rightarrow \underbrace{\frac{x-200}{-20}}_{-\frac{1}{20}x + 10} = p \Rightarrow \boxed{p(x) = -\frac{1}{20}x + 10}$

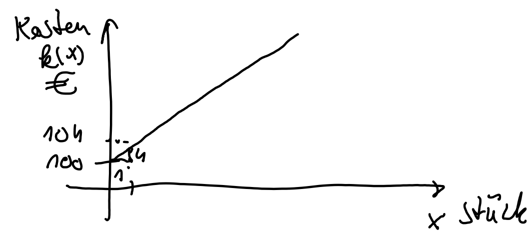


$D =]0, 200[$

Verkauf nix ↯ $\quad$ $p(200) = 0$ € ↯

2. $k(x) = 100 + 4x$

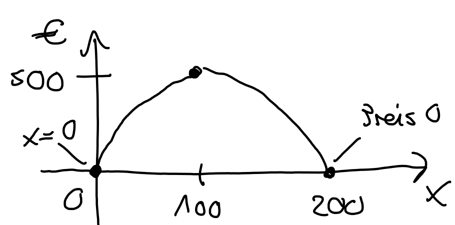
Fixkosten $\quad$ Materialkosten

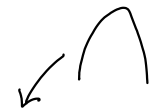


Stück $\quad$ Preis

$e(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{20}x + 10\right) = -\frac{1}{20}x^2 + 10x$ Parabel ∩

NST: 0, 200

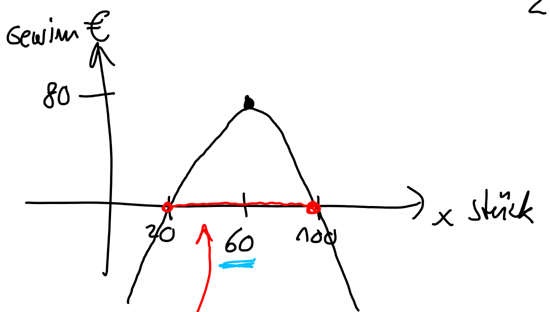




~~**Eigener Lösungsversuch**~~.

3. $g(x) = e(x) - k(x) = \left(-\frac{1}{20}x^2 + 10x\right) - (100 + 4x) = -\frac{1}{20}x^2 + 6x - 100$

$\underline{\text{NST}}$: $g(x) = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)(-100)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)} = \frac{-6 \pm 4}{-\frac{1}{10}} = \begin{cases} 20 \\ 100 \end{cases}$



4. $\underline{x \in [20, 100]}$ kostendeckend $(g(x) \geq 0)$

5. Bei $x = \underline{60}$ ist der Gewinn maximal: $p(60) = -\frac{1}{20}\cdot 60 + 10 = \underline{7}$ €