Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Komplexe Zahlen - Teil 2

Fragen?

$$e^{i2\pi} = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \underbrace{i\sin 2\pi}_{0} = 1$$

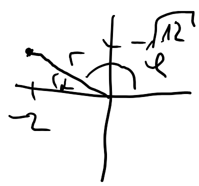
$r \cdot e^{i\varphi}$

* **Polardarstellung.** Geben Sie die Polardarstellung von folgenden komplexen Zahlen an.

a) $z_1 = -2 + \sqrt{12}i$ b) $z_2 = 3 - i$ c) $z_1 \cdot z_2$

Lösung.

a)

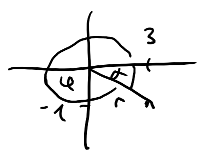


$r = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{12}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{\sqrt{12}}{2} = 60° \Rightarrow \varphi = 180° - 60° = 120° \left(\hat{=} \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(= 4\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}(\alpha)}_{-\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{2\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -2 + i2\sqrt{3}\right)$

b)



$r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\tan\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{1}{3} \approx 18{,}43° \Rightarrow 360° - 18{,}43° \approx 341{,}565°$

$(\hat{=} 1{,}8975..\pi)$

$z_2 = \sqrt{10}\, e^{i 1{,}8975..\pi}$

$2\pi = 360°$
$\pi = 180°$
$? = 341{,}565°$

c) $= \left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{10}\, e^{i 1{,}8975..\pi}\right) = \underbrace{4\cdot\sqrt{10}}_{\text{Produkt der Länge}}\, e^{i\underbrace{\left(\frac{2\pi}{3} + 1{,}8975..\pi\right)}_{\text{Summe der Winkel}}} \approx 4\sqrt{10}\, e^{i 2{,}5642..\pi}$

$\underbrace{e^{i2\pi}}_{\hat{=}\,360°} + \underline{e^{i0{,}56\pi}}$

Eigener Lösungsversuch.

Euler'sche Formel und Taylorreihen. Die Taylorreihen von e^x, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ sind:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Leiten Sie damit die Euler'sche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

her, indem Sie ix in die Taylorreihe von e^x einsetzen und die Summanden nach Real- und Imaginärteil sortieren.

Lösung.

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin x}$$

Eigener Lösungsversuch.

*** Anwendungen der Euler'schen Formel.**

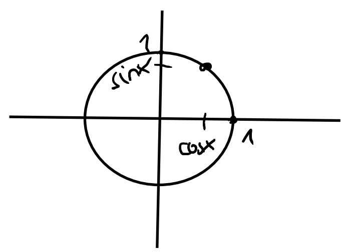
a) Was bedeutet e^{ix} geometrisch? Skizzieren Sie.

b) Skizzieren Sie $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{i2\pi}$.

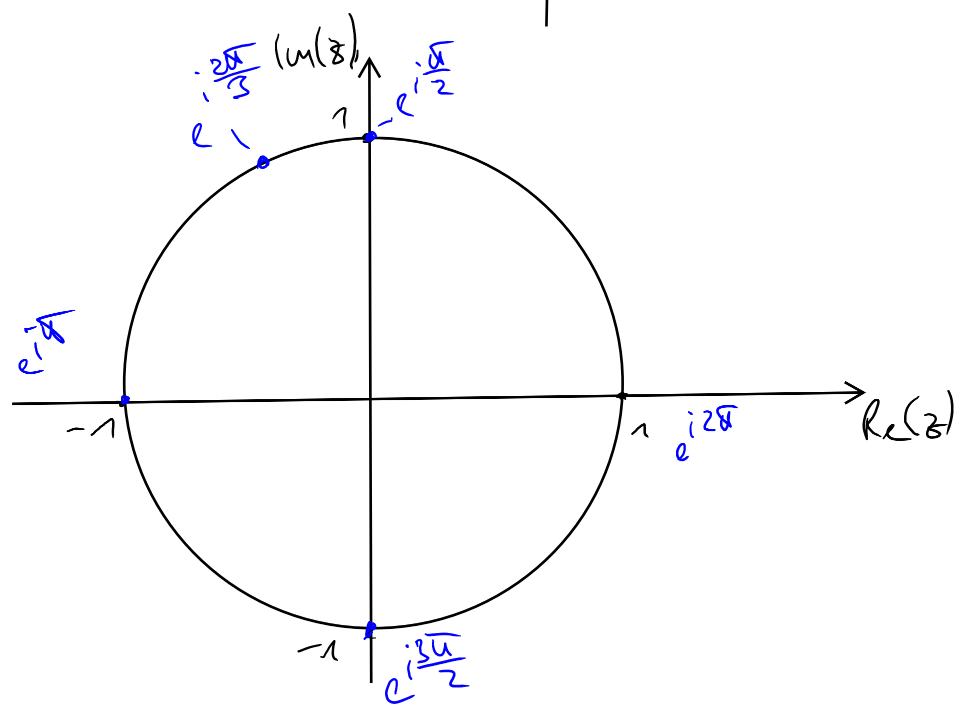
c) Leiten Sie die Additionstheoreme von sin und cos her, indem Sie für $e^{i(x+y)}$ die Euler'sche Formel benutzen.

Lösung.

a.) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$



b)



c.) $e^{i(x+y)} \overset{\text{Euler}}{=} \cos(x+y) + i\sin(x+y)$

Eigener Lösungsversuch.

* **Einheitswurzeln geometrisch.** Welche komplexen Zahlen $z = re^{i\varphi}$ erfüllen folgende Gleichung :

$$z^3 = 1$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und lösen es geometrisch, indem Sie $z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = 1$ deuten.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Formel zur Berechnung der Einheitswurzeln. Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heißen *n-te Einheitswurzeln* und lassen sich berechnen mit

$$z_0 = e^{i0\frac{2\pi}{n}} = 1$$

$$z_1 = e^{i1\frac{2\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}$$

Einheitswurzeln. Berechnen Sie die dritten Einheitswurzeln, d.h. $z^3 = 1$. $z = {}_{n}\sqrt[3]{1}^{\,n}$

Lösung.

$$z_0 = e^{i0\frac{2\pi}{3}} = 1$$

$$z_1 = e^{i1\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = e^{i2\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Eigener Lösungsversuch.

Wurzeln.

a) Berechnen Sie die dritten Wurzeln von $i+1$, d.h. Lösungen von $z^3 = i+1$.

b) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von $\sqrt{3} - i$.

c) Berechnen Sie “$\sqrt{i}$ ”.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.