Probeklausur: Mathematik 3

Studiengang INF-B

Prof. Dr. B. Naumer

25.06.2019

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? **Begründen** Sie Ihre Entscheidung bzw. **korrigieren** Sie falsche Aussagen!

a) Der Median ist empfindlicher gegenüber Ausreißern als der Durchschnitt.

b) Es sei $X \sim U_{1,2,\ldots,10}$.
Dann gilt: $P(X > 3) = 1 - P(X < 3)$.

c) Für die Quantilsfunktion Φ^{-1} der Standardnormalverteilung gilt:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$$

Zur Begründung ist eine Skizze ausreichend!

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Zeichnen Sie die Boxplots zu den folgenden mit **R** berechneten Kenngrößen:

```
> summary(KlausurA)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   8.00   32.75   44.00   46.09   61.00   90.00
> summary(KlausurB)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   7.00   32.00   44.00   44.32   57.00   80.00
```

Wodurch unterscheiden sich die beiden Datensätze?

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Ein Labor hat einen Alkoholtest entworfen. Aus den bisherigen Erfahrungen weiß man, dass 60% der von der Polizei kontrollierten Personen tatsächlich betrunken sind. Bezüglich der Funktiosweise des Tests wurde ermittelt, dass in 95% der Fälle der Test positiv reagiert, wenn die Person tatsächlich betrunken ist, in 97% der Fälle der Test negativ reagiert, wenn die Person nicht betrunken ist.
Verwenden Sie $B =$ "Person ist betrunken" und $T =$ "Test ist positiv".

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ein negatives Testergebnis hat und trotzdem betrunken ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test positiv ausfällt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person betrunken ist, wenn der Test positiv reagiert.

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X sei gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/5, & 0 \leq x \leq 1 \\ (-x^2 + 6x - 4)/5, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion grafisch dar.

(b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(1 < X \leq 2)$.

(d) Berechnen Sie den Median von X.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Man benötigt einen 10 MΩ Widerstand und kann diesen wahlweise durch Hintereinanderschalten von

- zehn unabhängigen, normalverteilten 1MΩ-Widerständen mit $\mu_X = 1$ und $\sigma_X = 0.015$ oder
- fünf unabhängigen, normalverteilten 2 MΩ-Widerständen mit $\mu_Y = 2$ und $\sigma_Y = 0.03$

herstellen.
Welche der beiden Möglichkeiten sollte man wählen, wenn der 10 MΩ Widerstand möglichst genau sein sollte?

Aufgabe 6 **(7 Punkte)**

Ein Läufer läuft im Rahmen seiner Marathonvorbereitung innerhalb einer Woche 5 Trainingseinheiten von je 20 km. Bezeichne X die Zeit in Stunden pro 20 km und sei $X \sim N_{\mu_X, \sigma_X{}^2}$ mit unbekannten Parametern. Die Laufzeiten sind durch die folgende Stichprobe gegeben:

i	1	2	3	4	5
x_i	2.2	2.3	2.6	2.0	2.9

(a) Berechnen Sie das Stichprobenmittel $\overline{x}$ und die Stichprobenvarianz $s_X{}^2$.

(b) Der Läufer vermutet, dass er im Durchschnitt eine bessere Leistung als 2.5 Stunden erbringt. Formulieren Sie das Testproblem, um die Behauptung des Läufers signifikant zu belegen. Zu welcher Entscheidung kommen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$?
(Hinweis: `qt(0.05,4)` $\approx$ -2.13)

(c) Wie berechnet man, ab welchem Signifikanzniveau sich die Testentscheidung aus (b) ändern würde?
(Es genügt eine Erklärung ohne den Wert zu berechnen.)

Aufgabe 7 **(4 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion ein kubischer Spline ist:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, & x \leq 1 \\ \\ s_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 8 **(7 Punkte)**

Gegeben ist die Quadraturformel

$$\frac{1}{3}\left(2f(0.25) - f(0.5) + 2f(0.75)\right)$$

zur näherungsweisen Berechnung von $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der Quadraturfomel.

b) Verwenden Sie die Formel zur Approximation von $\int\limits_1^4 x\ln(x)\,dx$.