Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Taylorpolynome und Potenzreihen

Fragen?

*** Bedeutung Taylorpolynom.**

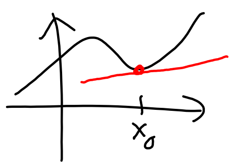
a) Was ist das Taylorpolynom 1. Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

b) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

c) Wie lautet die Formel für das Taylorpolynom n-ten Grades einer Funktion an der Stelle x_0?

Lösung.

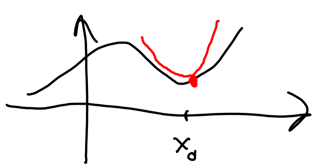
a) Tangente an x_0 (lineare Approximation von f):



$$T_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- geht durch $(x_0, f(x_0))$: $T_1(x_0) = f(x_0)$
- gleiche Steigung wie f: $T_1'(x_0) = f'(x_0)$

b) Schmiegeparabel an x_0 (quadrat. Approx. von f):



$$T_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

- geht durch $(x_0, f(x_0))$: $T_2(x_0) = f(x_0)$
- gleiche Steigung wie f: $T_2'(x_0) = f'(x_0)$
- gleiche Krümmung wie f: $T_2''(x_0) = f''(x_0)$

c)
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{k=0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{k=1}}_{T_1(x)\ \text{Tangente}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{k=2}}_{T_2(x)\ \text{Schmiegeparabel}} + \underbrace{\frac{f'''}{3!}(x-x_0)^3}_{k=3} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n}_{k=n}$$

Eigener Lösungsversuch.

* **Taylorpolynome Sinus.** Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grade $n = 1,\ 3\ ,5\ ,7$. (siehe dazu Bild auf Homepage)
Vergleichen Sie dann $T_1(0,5), T_3(0,5), T_5(0,5), T_7(0,5)$ mit $f(0,5)$.

Lösung.

$$T_7(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5 + \frac{f^{(6)}(x_0)}{6!}(x-x_0)^6 + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}(x-x_0)^7$$

$$= \underbrace{\sin(0)}_{0} + \underbrace{\cos(0)}_{1}(x-0) + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{2}}_{0}(x-0)^2 + \underbrace{\frac{-\cos(0)}{3!}}_{-\frac{1}{3!}}(x-0)^3 + \underbrace{\frac{\sin(0)}{4!}}_{0}(x-0)^4 + \underbrace{\frac{\cos(0)}{5!}}_{\frac{1}{5!}}(x-0)^5 + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{6!}}_{0}(x-0)^6 + \underbrace{\frac{-\cos(0)}{7!}}_{-\frac{1}{7!}}(x-0)^7$$

$$= \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7}$$

$$\underbrace{x}_{T_1(x) = x}$$

$$\underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3}_{T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3}$$

$$\underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5}_{T_5(x)}$$

$$\underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7}_{T_7(x)}$$

(↝ Bild HP!)

$$f(0,5) = \sin(0,5) \overset{TR}{=} 0,4794255386042\ldots$$

$$T_1(0,5) = \qquad = 0,5$$

$$T_3(0,5) = 0,5 - \frac{1}{3!}0,5^3 = 0,4791\overline{6}$$

$$T_5(0,5) = T_3(0,5) + \frac{1}{5!}0,5^5 = 0,47942708\overline{3}$$

$$T_7(0,5) = T_5(0,5) - \frac{1}{7!}0,5^7 = 0,4794255332\ldots$$

$$\Big\downarrow \text{Grad } n \to \infty$$

$$f(0,5)$$

Eigener Lösungsversuch.

Taylorpolynome Cosinus. Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grad $n = 0$,2 ,4. (siehe dazu Bild auf Homepage)

Lösung.

$$T_4(x) = \cos(0) + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{1}}_{0}(x-0) + \frac{-\cos(0)}{2}(x-0)^2 + \underbrace{\frac{\sin(0)}{3!}}_{0}(x-0)^3 + \frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{T_0(x)=1} - \frac{1}{2}x^2}_{T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{4!}x^4}_{T_4(x)}$$

($\leadsto$ Bild HP)

Eigener Lösungsversuch.

Taylorpolynome Logarithmus. Berechnen Sie T_1, T_2, T_3 von $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$. (siehe dazu Bild auf Homepage)

Lösung.

$$T_3(x) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + \frac{\frac{1}{1}}{1!}(x-1) + \frac{-\frac{1}{1^2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{2\frac{1}{1^3}}{3!}(x-1)^3$$

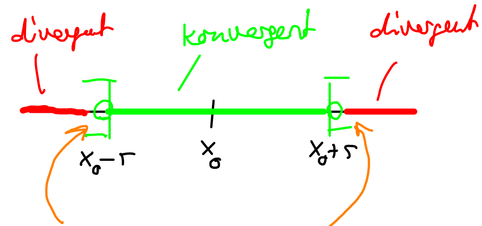
$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{T_1(x)} - \frac{1}{2}(x-1)^2}_{T_2(x)} + \frac{1}{3}(x-1)^3}_{T_3(x)}$$

($\curvearrowright$ Bild HP)

Eigener Lösungsversuch.

*** Konvergenzradius einer Potenzreihe.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$?

Lösung.



Randpunkte? müssen separat untersucht werden...

Diese Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[$

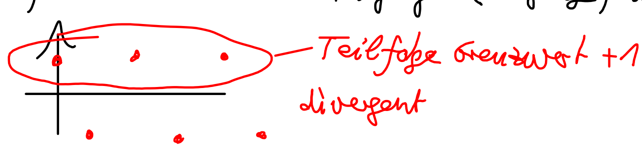
wobei r der sog. Konvergenzradius ist, der sich wie folgt berechnen lässt:

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}}$$

lim sup? Bspe: • Ist die Folge konvergent, so ist lim sup = lim!

• allgemein: größter Grenzwert aller Teilfolgen (Häufungspunkt), $a_n = (-1)^n \; (n \in \mathbb{N})$

~~Eigener Lösungsversuch.~~



$$\limsup_{k \to \infty} (-1)^k = 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=a_k} (x-x_0)^k$$

Taylorreihe. Geben Sie die Taylorreihe von folgenden Funktionen an und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe konvergiert (vgl. Bilder auf Homepage):

a) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

siehe Aufgabe zuvor!

Lösung.

a) $$T(x) = \frac{+1}{1!}x^1 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{+1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Taylorreihe von $\sin(x)$ an $x_0 = 0$.

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{\underbrace{(2(k+1)+1)}_{2k+3}!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k (2k+3)!}{(-1)^{k+1}(2k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)}\cancel{(2k)}\cdots\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{(-1)\;\cancel{(2k+1)}\cancel{(2k)}\cdots\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+3)(2k+2)}{-1} \right| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{(2k+3)}_{\downarrow\,\infty} \underbrace{(2k+2)}_{\downarrow\,\infty} = \infty$$

d.h. $T(x)$ konvergiert gegen $\sin(x)$ für $x \in \left]x_0 - \infty, x_0 + \infty\right[= \mathbb{R}$

d.h. $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

b) $$T(x) = \frac{+1}{0!}x^0 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{+1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$ Taylorreihe von $\cos(x)$ an $x_0 = 0$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k/(2k)!}{(-1)^{k+1}/\underbrace{(2(k+1))}_{2k+2}!} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{(2k+2)}_{\downarrow\,\infty}\underbrace{(2k+1)}_{\downarrow\,\infty} = \infty,$$ d.h. $\forall x \in \mathbb{R}: \cos(x) =$

c) $$T(x) = \frac{+1}{1}(x-1)^1 + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{+1}{3}(x-1)^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$ Taylorreihe von $\ln(x)$ an $x_0 = 1$.

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}/k}{(-1)^{k+2}/(k+1)} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{k} \right| = \lim_{k\to\infty} 1 + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} = 1 \;\Big/\; \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\underbrace{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|}_{\frac{1}{k}}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}_{\to 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

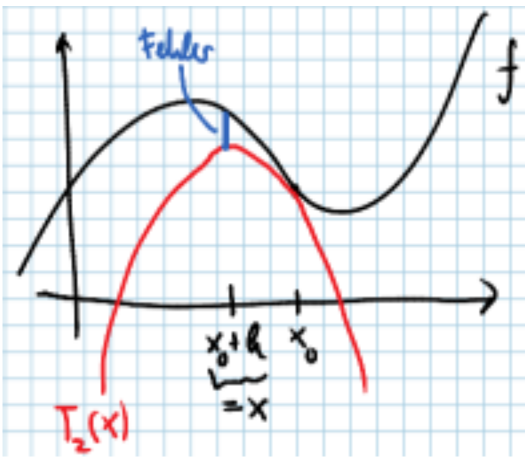
JL-Videos

$$\boxed{\forall x \in \left]\underbrace{1}_{x_0}-\underbrace{1}_{r},\underbrace{1}_{x_0}+\underbrace{1}_{r}\right[=\left]0,2\right[:\ \ln(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k}$$

$\rightsquigarrow$ Bild HP

Eigener Lösungsversuch.

Restglied und absoluter Fehler



Approximation von f an x_0 durch $T_n(x)$:

$f(x_0+h) \approx T_n(x_0+h)$ für kleine h

$f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + \underline{R_n(x_0+h)}$

also absolute Fehler $= |R_n(x_0+h)| = |f(x_0+h) - T_n(x_0+h)|$

Restgliedabschätzung

Diesen absoluten Fehler kann man nach oben abschätzen:

$\underline{|R_n(x)|} \le C \cdot \frac{\overbrace{|x-x_0|}^{h}{}^{n+1}}{(n+1)!}$ mit C ist obere Schranke von $|f^{(n+1)}(x)|$ in $[x_0, \overset{x_0+h}{x}]$

$\underline{\text{ZL}}$: $C = \max\limits_{x_1 \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(x_1)|$

(siehe auch <u>lineare Näherung</u>: damals war $n = 1$!)

Taschenrechner-Algorithmus. Was ist $\sin(0,5)$?

a) Approximieren Sie dies durch das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Schätzen Sie den Fehler ab (Restgliedabschätzung).

Lösung. $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

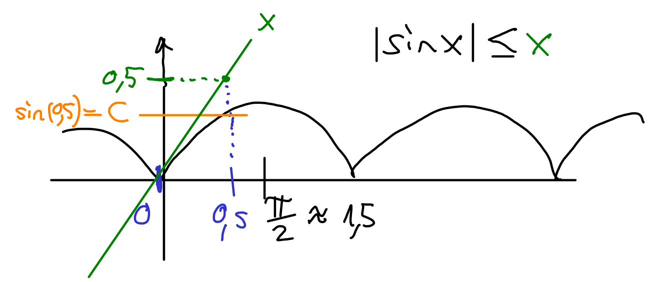
a) $\sin(0,5) \approx T_3(0,5) = \underbrace{0,5 - \frac{0,5^3}{3!}}_{\text{einfach zu berechnen!}} = 0,47917\ldots$

b) abs. Fehler: $|R_3(x)| \leq C \cdot \frac{|0,5-0|^4}{4!} \leq 0,5 \cdot \frac{0,5^4}{4!} = 0,0013020 8\bar{3}$

Zu C: $|\sin^{(4)}(x)| = |\sin(x)|$

$\Rightarrow C \leq 0,5$

$|\sin x| \leq x$



Vgl. TR: $\sin(0,5) \overset{TR}{\simeq} 0,479425538 6\ldots$

$T_3(0,5) = 0,47917\ldots$

abs. Fehler $\approx 0,00025\ldots \leq 0,0013020 8\bar{3}$

$\uparrow$ Restgliedabsch.

Eigener Lösungsversuch.