Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. J. Schmidt
Fakultät für Informatik

GDI – WS 2018/19

Zahlendarstellung – Konvertierung von Zahlen

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Leitfrage 2.2

- Wie können Zahlen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen konvertiert werden?

Direkte Methode (1)

- Einfachster Fall: kleine Zahlen
  - Verwendung von Tabellen

Dezimal	Dual	Oktal	Hexadezimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Direkte Methode (2)

- Konvertieren zwischen **Dezimalsystem und Dualsystem**
  - Division der umzuwandelnden Dezimalzahl durch die größte Potenz von 2, die kleiner oder gleich ist als diese Dezimalzahl und Schreiben einer 1 an die erste (höchstwertige) Binärstelle
  - Division des Ergebnisses durch die nächste kleinere Potenz von 2 (Resultat, 0 oder 1, gibt die nächste Binärstelle an)
  - Analoges weiteres Vorgehen bis nach der Division durch $2^0 = 1$ das Verfahren abbricht

Direkte Methode (3)

- Dezimalzahl 116 ist in binärer Schreibweise anzugeben

```
116 : 64 = 1
-64
 52 : 32 = 1
-32
 20 : 16 = 1
-16
  4 :  8 = 0
 -0
  4 :  4 = 1
 -4
  0 :  2 = 0
 -0
  0 :  1 = 0
```

- Ergebnis: $111\,0100_{(2)}$ bzw. $(111\ 0100)_2$

Direkte Methode (4)

- Konvertieren zwischen **Dualsystem und Oktalsystem**
  - Um eine im Dualsystem dargestellte Zahl ins Oktalsystem zu konvertieren, bildet man von rechts beginnend so genannte **Dualtriaden** (Dreiergruppen)

Dualzahl	110	111	001	110	010
Oktalzahl	6	7	1	6	2

  - Bei der Umwandlung einer Oktalzahl in ihre Dualdarstellung geht man den umgekehrten Weg

Oktalzahl	3	2	1	5
Dualzahl	011	010	001	101

Direkte Methode (5)

- Konvertieren zwischen **Dualsystem und Hexadezimalsystem**
  - Um eine im Dualsystem dargestellte Zahl ins Hexadezimalsystem zu konvertieren, bildet man von rechts beginnend so genannte **Dualtetraden** (Vierergruppen)

Dualzahl	`1 0111 0101 1101`
Hexzahl	`1 7 5 D`

Triade: `1 011 101 011 101`
Oktal: 1 3 5 3 5

  - … und Umwandlung Hex → Dual: umgekehrter Weg

Hexzahl	`A D A`
Dualzahl	`1010 1101 1010`

Triade: `101 011 011 010`
Oktal: 5 3 3 2

Aufgaben

- Konvertieren Sie die Zahl $(2E4)_{16}$ sowohl in das Dualsystem als auch in das Dezimalsystem
- Konvertieren Sie die Zahl $(753)_{8}$ sowohl in das Dualsystem als auch in das Hexadezimalsystem
- Konvertieren Sie die Zahl $(11010111111111010)_{2}$ sowohl in das Oktalsystem als auch in das Hexadezimalsystem

Horner- Schema und Restwertmethode

- Eine in einem Positionssystem mit der Basis *B* dargestellte natürliche Zahl

$$n = \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot B^i$$

lässt sich mit Hilfe des **Horner- Schemas** wie folgt darstellen:

$$n = \left(\cdots\left(\left((b_N \cdot B + b_{N-1}) \cdot B + b_{N-2}\right) \cdot B + b_{N-3}\right) \cdot B + \cdots + b_1\right) \cdot B + b_0$$

  - Beispiel $(1578)_{10} = ((1 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 7) \cdot 10 + 8$

- Mit Hilfe dieser Darstellung können Konvertierungen in das Dezimalsystem einfach durchgeführt werden
  - Beispiel $(754)_8 = (7 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 4 = (492)_{10}$

Aufgabe

- Konvertieren Sie die Zahl $(375)_8$ unter Zuhilfenahme des Horner- Schemas in das Dezimalsystem

Restwertmethode (1)

- Konvertierung vom Dezimalsystem in andere Positionssysteme
  - Die fortgesetzte Division einer Dezimalzahl durch die Basis
  - liefert als **Divisionsrest** die Koeffizienten b_n bis b_0
  - für die Darstellung dieser Zahl zur jeweiligen Basis

Restwertmethode (2)

- Für die Umwandlung einer Dezimalzahl x in ein Zahlensystem mit der Basis *B* kann folgender Algorithmus verwendet werden:

1. x : B = y Rest z
2. Mache y zum neuen x
   - wenn dieses x ungleich 0 ist, fahre wieder mit Schritt 1 fort,
   - sonst fahre mit Schritt 3 fort
3. Die ermittelten Reste z von unten nach oben nebeneinander geschrieben ergeben die entsprechende umgewandelte Zahl

Restwertmethode (3)

- Beispiel

  - $(43)_{10} = (?)_2$

x		B		y		z
43	:	2	=	21	Rest	1
21	:	2	=	10	Rest	1
10	:	2	=	5	Rest	0
5	:	2	=	2	Rest	1
2	:	2	=	1	Rest	0
1	:	2	=	0	Rest	1

Die Reste z von unten nach oben geschrieben liefern die gesuchte Dualzahl.

  - Ergebnis: $(101011)_2$

Aufgabe

- Konvertieren Sie die Zahl **$(10172)_{10}$** unter Anwendung der Restwertmethode sowohl in das Dualsystem als auch in das Hexadezimalsystem

$10172_{(10)}$

$= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{(2)}$

$= \qquad\qquad {}_{(16)}$

- Eine echt gebrochene Zahl n (n < 1)

$$n = \sum_{i=-M}^{-1} b_i \cdot B^i$$

  lässt sich mit Hilfe des Horner- Schemas wie folgt darstellen

$$n = \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-1} + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-2} + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-3} + \ldots + \frac{1}{B} \cdot \left(b_{-M+1} + \frac{1}{B} \cdot b_{-M} \right) \ldots \right)\right.\right.$$

  - Beispiel

$$\boxed{0{,}193_{(10)} = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} \cdot \left(9 + \frac{1}{10} \cdot 3 \right) \right)}$$

- Auch Verwendung zur Konvertierung von anderen Systemen in das Dezimalsystem

Konvertieren echt gebrochener Zahlen (2)

- Algorithmus zur Umwandlung des Nachkommateils einer Dezimalzahl in ein Zielsystem zur Basis B:

1. x · B = y Überlauf z (z = ganzzahliger Anteil)
2. Mache Nachkommaanteil von y zum neuen x
   - wenn dieses neue x ungleich 0 ist und noch nicht genügend Nachkommastellen ermittelt sind, fahre mit Schritt 1 fort,
   - sonst fahre mit Schritt 3 fort
3. Schreibe die ermittelten Überläufe von oben nach unten nach 0. nebeneinander, um die entsprechende umgewandelte Zahl zu erhalten

Konvertieren echt gebrochener Zahlen (3)

- Beispiel
  - $(0{,}34375)_{10} = (?)_2$

x	B	y		z
0,34375	· 2	= 0,6875	Überlauf	0
0,6875	· 2	= 1,375	Überlauf	1
0,375	· 2	= 0,75	Überlauf	0
0,75	· 2	= 1,5	Überlauf	1
0,5	· 2	= 1,0	Überlauf	1
0,0	· 2	= 0,0	Überlauf	0

Die Überläufe z von oben nach unten geschrieben nach 0. liefern die gesuchte Dualzahl.

  - Ergebnis: $(0{,}01011)_2$

Konvertieren echt gebrochener Zahlen (4)

- Manche gebrochenen Zahlen, die sich exakt im Dezimalsystem darstellen lassen, lassen sich nicht ganz exakt als Dualzahl darstellen

  - Typisches Beispiel
    $0{,}1_{(10)} = 0{,}0\ 0011\ 0011\ \ldots_{(2)}$
  - Periodische Ziffernfolge, Bitmuster 0011 wiederholt sich
  - Im Rechner treten Ungenauigkeiten auf
  - Genauigkeitsverluste bei Umwandlung

x		B		y		z
0,1	·	2	=	0,2	Überl.	0
0,2	·	2	=	0,4	Überl.	0
0,4	·	2	=	0,8	Überl.	0
0,8	·	2	=	1,6	Überl.	1
0,6	·	2	=	1,2	Überl.	1
0,2	·	2	=	0,4	Überl.	0
0,4	·	2	=	0,8	Überl.	0
0,8	·	2	=	1,6	Überl.	1
0,6	·	2	=	1,2	Überl.	1

Konvertieren echt gebrochener Zahlen (5)

- Andersherum: **Alle** gebrochenen Zahlen, die sich im Dualsystem exakt darstellen lassen, lassen sich auch als Dezimalzahl exakt darstellen

- Allgemein: Eine rationale Zahl p/q mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ lässt sich zur Basis b exakt darstellen, wenn **alle** Primfaktoren von q auch Primfaktoren von b sind

- Beispiele
  - $1/3_{(10)} = 0{,}33333\ldots_{(10)}$ — 3 ist kein Primfaktor von 10
  - $1/3_{(10)} = 0{,}010101\ldots_{(2)}$ — 3 ist kein Primfaktor von 2
  - $1/3_{(10)} = 0{,}1_{(3)}$ — 3 ist ein Primfaktor von 3
  - $1/10_{(10)} = 0{,}1_{(10)}$ — 2 und 5 sind Primfaktoren von 10
  - $1/10_{(10)} = 0{,}000110011\ldots_{(2)}$ — 5 ist kein Primfaktor von 2

Aufgaben

- Konvertieren Sie folgende Zahlen
  - $(0,375)_{10}$ = im Dualsystem?
  - $(0,25)_{10}$ = im Fünfersystem?
  - $(0,19)_{10}$ = im Hexadezimalsystem?

- Aufteilung der Zahl
  - in ihren ganzzahligen Teil
  - und ihren echt gebrochenen Teil,

  die dann getrennt von einander zu konvertieren sind.

- Beispiel $(12{,}25)_{10} = (1100{,}01)_2$
  - ganzzahliger Teil

12	:	2	=	6	Rest	0
6	:	2	=	3	Rest	0
3	:	2	=	1	Rest	1
1	:	2	=	0	Rest	1

$(12)_{10} = (1100)_2$

echt gebrochener Teil

0,25	·	2	=	0,5	Überl.	0
0,5	·	2	=	1,0	Überl.	1
0,0	·	2	=	0,0	Überl.	0

$(0{,}25)_{10} = (0{,}01)_2$

Aufgabe

- Geben Sie die Dezimalzahl **$39{,}6875_{(10)}$** in binärer sowie in hexadezimaler Form an.