

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastik und Numerik“

Aufgabe 10.1 (Verständnisfragen)

- (a) Wahr oder Falsch: Ein Problem ist schlecht konditioniert, wenn seine Lösung sensitiv gegenüber kleinen Störungen ist.
- (b) Wahr oder Falsch: Ein schlecht konditioniertes Problem wird besser konditioniert, wenn man eine genauere Gleitpunktarithmetik verwendet.
- (c) Wahr oder Falsch: Die Kondition eines Problems hängt vom Algorithmus ab, mit dem man es löst.
- (d) Wahr oder Falsch: Unabhängig von der Kondition produziert ein guter Algorithmus eine genaue Lösung.
- (e) Wahr oder Falsch: Sind zwei reelle Zahlen exakt als Gleitpunktzahl darstellbar, dann ist das Resultat einer arithmetischen Operation wieder exakt als Gleitpunktzahl darstellbar.
- (f) Wahr oder Falsch: Gleitpunktzahlen sind über ihrem Darstellungsreich gleichmäßig verteilt.
- (g) Wahr oder Falsch: Eine Gleitpunktaddition ist zwar assoziativ aber nicht kommutativ.
- (h) Was ist der Unterschied zwischen Diskretisierungs- und Rundungsfehlern?
- (i) Was ist der Unterschied zwischen relativem und absolutem Fehler?
- (j) Falls ein Problem eine Konditionszahl von 1 hat, ist dies gut oder schlecht?

Aufgabe 10.2 (Gleitpunktarithmetik)

Es sei $a = 0.471 \cdot 10^{-2}$ und $b = -0.185 \cdot 10^{-4}$. Verwenden Sie Gleitkommazahlen mit einer dreistelligen Genauigkeit, um $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und a/b auszurechnen. Bestimmen Sie jeweils auch den Rundungsfehler.

Aufgabe 10.3 (Gleitpunktarithmetik)

Gegeben sei ein 5-stelliges ($n = 5$) Gleitpunktsystem mit Basis $b = 10$ und einem Exponentenbereich von ± 20 . Geben Sie die Ergebnisse der folgenden Gleitpunktoperationen als normalisierte Gleitkommazahlen an.

- (a) $1 + 10^{-7}$ (b) $1 + 10^3$ (c) $1 + 10^7$ (d) $10^{10} + 10^3$

Aufgabe 10.4 (Gleitpunktarithmetik)

Zu lösen ist die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a = 1.22$, $b = 3.34$, $c = 2.28$, unter Verwendung eines dreistelligen Gleitpunktsystems mit Basis $b = 10$.

- (a) Wie lautet der berechnete Wert der Diskriminante $b^2 - 4ac$?
- (b) Wie lautet der wahre Wert der Diskriminante?
- (c) Geben Sie den relativen Fehler in dem berechneten Wert der Diskriminante an.

Aufgabe 10.5 (Auslöschung)

Schreiben Sie die folgenden Terme durch geschicktes Erweitern so um, dass Auslöschung vermieden wird.

- (a) $\sqrt{x+1} - 1$, $x \approx 0$ (Tipp: Erweiterung mit 3. bin. Formel)
- (b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$, $x \approx 0$

Aufgabe 10.6 (Prüfungsaufgabe)

Führen Sie im Dezimalsystem die folgenden Berechnungen in Gleitpunktarithmetik mit einer Genauigkeit von 3 Ziffern durch und bestimmen Sie jeweils den relativen Rundungsfehler:

$$(121 - 0.327) - 119$$

$$(121 - 119) - 0.327$$

Aufgabe 10.7 (Prüfungsaufgabe)

Die Berechnung von $\sum_{k=1}^{3000} k^{-2}$ in einem Dezimalsystem mit 4-stelliger Genauigkeit führt auf ein Ergebnis mit einer Genauigkeit von nur 2 Stellen. Erklären Sie warum und, ob es eine numerisch stabilere Methode zur Berechnung gibt.