Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Inverse Matrix & LGS, Cramer'sche Regel

Fragen?

*** Inverse Matrix & LGS.** Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mithilfe der inversen Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung.

Koeff.m. muss existieren, z.B. $\det A \neq 0$

$$\underline{\text{Wdh}}: \quad A x = b \quad \xRightarrow{A^{-1}\cdot} \quad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E_n} \cdot x = A^{-1} b \quad \Rightarrow \quad \underline{x = A^{-1} \cdot b}.$$

siehe letztes Mal!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Berechne Inverse:} \quad (A | E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(\underbrace{}_{E_3} \mid \underbrace{}_{A^{-1}})$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Eigener Lösungsversuch.

Eindeutige Lösung. Ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung.

Wdh: Kriterium Invertierbarkeit: $Ax = b$ eind. lösbar $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 1 - (-4) = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{LGS eindeutig lösbar!}$$

II−I Spalte

Eigener Lösungsversuch.

Cramer, Teil 1. Berechnen Sie von dem linearen Gleichungssystem die eindeutige Lösung mit der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung.

Wdh: ⚠ Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ & $\det(A) \neq 0$ (A invertierbar)

Cramer: Voraussetzung erfüllt (Aufgabe zuvor: $\det(A) = 5 \neq 0$). ✓

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8+4-(-1)-6}{5} = \frac{7}{5} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10+(-1)-3-8}{5} = \frac{-2}{5} \\ x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5+9+16-12-20+3}{5} = \frac{-9}{5} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -2/5 \\ -9/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(Alternative zu Gauß!)

Eigener Lösungsversuch.

Cramer, Teil 2. Berechnen Sie x_3 in folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Lösung.

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{V}\\ \mathrm{II}-\mathrm{V}}}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

muss $\neq 0$ sein!

Entw. 4. Spalte

$$= \frac{\cancel{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\cancel{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{II}}}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}$$

Entw. 4. Zeile

Sarrus

$$= \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(\cancel{-}1) \cdot \cancel{(1+1)}}{(\cancel{-}2) \cdot \cancel{(1+1)}} = \frac{1}{2}$$

$\neq 0$ ✓

(Probe: Wolfram-α!)

Eigener Lösungsversuch.