Lineare Gleichungssysteme

Fragen?

*** Lineares Gleichungssystem und Gauß-Algorithmus.**

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 24x_1 + 10x_2 - 13x_3 &= 25 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Unbekanntenvektor

Koeff. matrix

rechte Seite

a) Schreiben Sie dieses Lineare Gleichungssystem in Matrixform: $Ax = b$.

b) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ an und formen Sie diese mittels elementarer Zeilenumformung in Zeilenstufenform um.

c) Lesen Sie von der Zeilenstufenform von unten nach oben die Lösung ab. Identifizieren Sie vorher freie Variablen.

d) Skizzieren Sie die Lösungsmenge.

Gauß-Algorithmus

Lösung. a) Matrixmult

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) erw. Koeff.m: $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 24 & 10 & -13 & 25 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim_{\text{II}-8\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim_{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

ZSF

x_1, x_2: Pivots; $x_3 = \lambda$: freie Var.

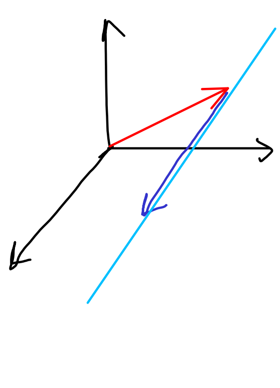
1. Zeilen vertauschen
2. Zeile mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren
3. λ-fache einer Zeile auf eine andere addieren

c) II: $2x_2 + 3\lambda = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{9-3\lambda}{2}$

I: $3x_1 + \frac{9-3\lambda}{2} - 2\lambda = 2 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{6} + \frac{7}{6}\lambda$

da $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig $\rightarrow$ ∞-viele Lösungen!

d) Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} + \frac{7}{6}\lambda \\ \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ Parameterform einer Geraden



Eigener Lösungsversuch.

Gauß-Algorithmus. Lösen Sie das LGS $Ax = b$ mit

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 24 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung.

a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ \boxed{24} & 10 & -13 & 15 \\ \boxed{0} & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \; II - 8 \cdot I \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \; III - II \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$III: \underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3}_{0} = 2 \quad ↯ \quad \underline{\text{keine Lösung}}: \; L = \emptyset = \{ \}$$

b)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ \boxed{24} & 10 & -13 & 15 \\ \boxed{0} & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \; II - 8 \cdot I \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \; III - II \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

nur Pivots (keine freien Variablen)

$$III: \; -2x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$II: \; 2x_2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

$$I: \; 3x_1 + \frac{1}{4} \underbrace{- 2\left(-\frac{1}{2}\right)}_{+1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\text{eindeutige Lösung}}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Eigener Lösungsversuch.

Rätsel. Anna ist 5 Jahre älter als ihre Schwester Hanna. In 20 Jahren ist Anna doppelt so alt wie Hanna heute ist. Wie alt sind die beiden heute?

Lösung.

LGS

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \text{Alter von Anna heute} \\ x_2 = \text{— " — Hanna "} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & x_1 = x_2 + 5 \\ (\mathrm{II}) & x_1 + 20 = 2x_2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = -20 \end{array}\right.$$

Bei 2 Variablen ist das Einsetzungsverfahren kürzer als der Gauß-Alg. (ab 3 Var. Gauß besser!):

(I) in (II): $(x_2 + \underbrace{5) + 20}_{25} = 2x_2 \Rightarrow \underline{x_2 = 25}$ in (I): $\underline{x_1} = 25 + 5 \underline{= 30}$

Eigener Lösungsversuch.

In der Kneipe.

a) Wenn Sie nur das linke Bild betrachten: Was kostet ein Bier? Was kostet eine Tüte Erdnüsse?

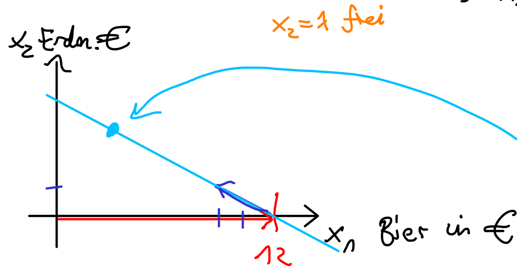
b) Wenn Sie beide Bilder betrachten: Was kostet ein Bier? Was kostet eine Tüte Erdnüsse? (Beide)

Lösung.

a) $\left.\begin{array}{l} x_1 = \text{Preis Bier} \\ x_2 = \text{Preis Erdn.} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 12$ Gauß: $\left(\underset{\text{Pivot}}{1} \quad 2 \;\middle|\; 12\right)$. $\Rightarrow x_1 + 2\lambda = 12$

$x_2 = \lambda$ frei $\qquad \Rightarrow x_1 = 12 - 2\lambda$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



b) $6\underbrace{x_1}_{\overset{a)}{=}\,12 - 2x_2} + 7x_2 = 52{,}50 \Rightarrow x_2 = 3{,}90$ Erdn.

$\overset{a)}{\Rightarrow} x_1 = 12 - 2 \cdot 3{,}90 = 4{,}20$ Bier

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}20 \\ 3{,}90 \end{pmatrix}$$

Eigener Lösungsversuch.