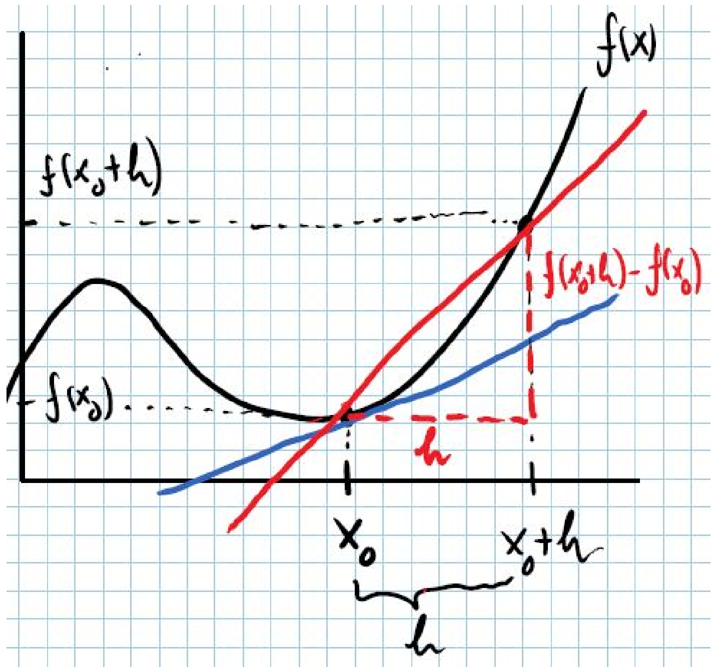
Ableitungen - Teil 2

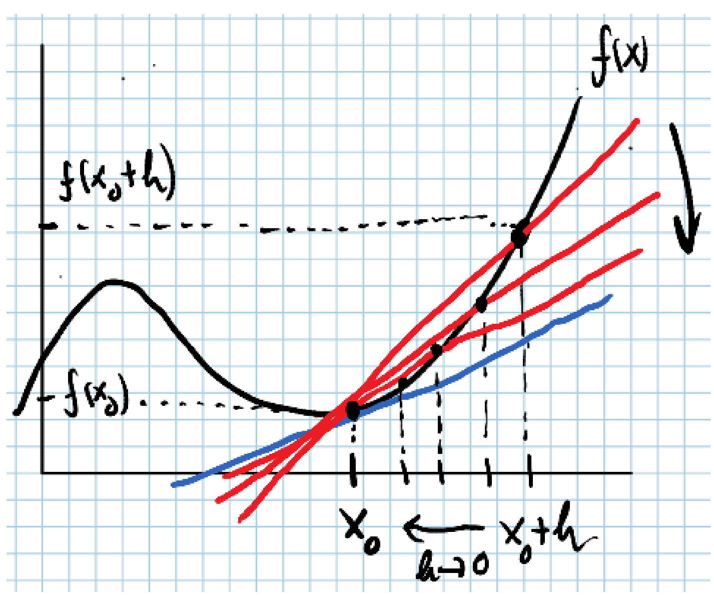
Fragen?

Wiederholung: Idee der Tangente



Frage. Wie kann ich die Tangente (und dann auch die Steigung) im Punkte x_0 bestimmen?

Idee. Als Annäherung über die Sekante: "Sekante $\xrightarrow{h\to 0}$ Tangente"



Frage. Wie berechnet man die Sekante?

* **Sekante.** Geben Sie die allgemeine Geradengleichung der Sekante an.

Lösung.

<u>Sekantensteigung</u>: $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ Differenzenquotient

$$\boxed{s(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)}$$

Steigung

Rechtsverschiebung um x_0

Verschiebung nach oben um $f(x_0)$

Eigener Lösungsversuch.

* **Tangente.** Geben Sie die Steigung und die allgemeine Geradengleichung der Tangente an (Hinweis: "Sekante $\xrightarrow{h\to 0}$ Tangente").

Lösung.

$$S(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0) \xrightarrow{h\to 0} t(x) = \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{=\, f'(x_0)\ \text{Ableitung = Tangentensteigung}}(x-x_0)+f(x_0)$$

Merke:

$$t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$ x_0 = feste Stelle, wo man Tangente anlegt

Eigener Lösungsversuch.

$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Tangenten-Berechnung. Skizzieren und berechnen Sie folgende Tangenten:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ $\quad 4 \cdot (x-2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$

b) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$ $\quad 1 \cdot (x-1) + \ln(1) = x - 1$

c) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ $\quad \cos(0) \cdot (x-0) + \sin(0) = x$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Differenzenquotient. Berechnen Sie folgende Ableitungen mittels dem Grenzwert des Differenzenquotienten:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin(x)$ (Hinweis: Additionstheorem sin)

Lösung.

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \dfrac{\cos(x)\sin(h) + \cos(h)\sin(x) - \sin(x)}{h}$

$= \cos(x) \cdot \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}}_{1} + \sin(x_0) \cdot \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h}}_{0} = \cos(x)$

Eigener Lösungsversuch.

Steigung. An welcher Stelle hat $f(x) = e^x$ die Steigung 2?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.