

## FUNKTIONEN

Fragen?

Umkehrfunktion berechnen. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen:

1.  $f: [0, \infty) \rightarrow [-1, \infty), f(x) = 2x^2 - 1$

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 2e^{-x}$

Wiederholung: Wie berechnet man eine Umkehrfunktion? Bsp.  $f(x) = 3x + 2$

- Schreibe  $y = 3x + 2$
- Vertausche  $x$  und  $y$ :  $x = 3y + 2$
- Löse nach  $y$  auf:  $g(x) := y = \frac{x-2}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}: f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x = id(x)$
- Prüfe  $f \circ g = id$  und  $g \circ f = id$   $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{(3x+2)-2}{3} = x = id(x)$   
 $\Rightarrow g = f^{-1}$  (Umkehrfunktion von  $f$ )

Lösung.

- 1)  $f(x) = 2x^2 - 1$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \Rightarrow g(x) \in [0; \infty]$$

richtig Funktion  
 $g: [-1; \infty] \rightarrow [0; \infty]$  da  $x \in [-1; \infty]$

$$\forall x \in [-1; \infty]: f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)^2 - 1 = x = id_{[-1; \infty]}(x)$$

$$\forall x \in [0; \infty]: g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 1) = \sqrt{\frac{(2x^2 - 1) + 1}{2}} = x = id_{[0; \infty]}(x)$$

- 2)  $f(x) = 2e^{-x}; x = 2e^{-y} / :2$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\ln(e^{-y})}_{id(-y)} = -y$$

Eigener Lösungsversuch.

$$\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow g(x) ; g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2e^{-\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2e^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x = id(x)$$

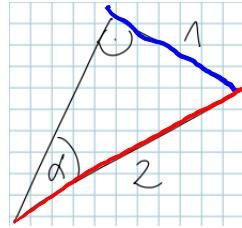
$$\forall x \in \mathbb{R}: g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2e^{-x}) = -\ln\left(\frac{2e^{-x}}{2}\right)$$

$$= -\underbrace{\ln(e^{-x})}_{\textcircled{a}} = -(-x) = x = id(x)$$

$$\Rightarrow g = f^{-1}$$

Winkelberechnung am Dreieck. Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  mit Hilfe von sin:

Umkehrfunktion  
von sin (später:  $\arcsin$ )

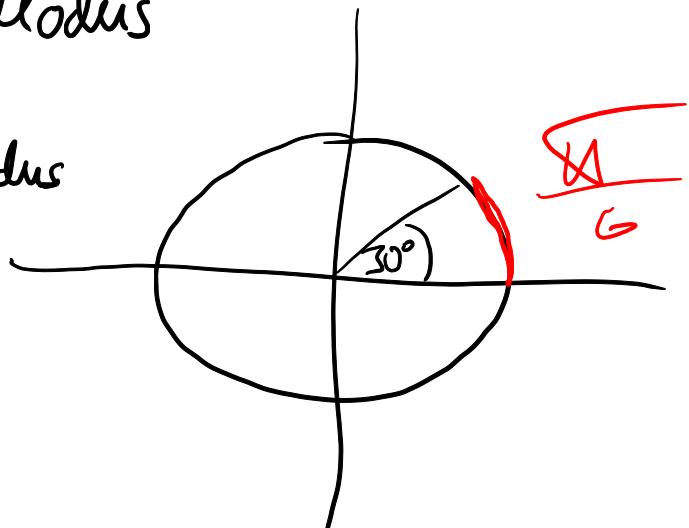


Lösung.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin^{-1}(..) \\ \Rightarrow \sin^{-1}(\sin(\alpha)) &= \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{TR} \\ \text{DEG-Modus}}} \\ \text{id}(\alpha) &= \alpha \\ &\stackrel{?}{=} \text{III} \\ &\text{RAB-Modus} \end{aligned}$$

Eigener Lösungsversuch:



**Wertetabelle in C.** Schreiben Sie ein C-Programm, das für  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  die Werte von  $\sin(x)$  und  $\arcsin(\sin(x))$  ausgibt (Schrittweite 0,1).

Lösung. → Siehe C-Datei

