Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Vollständige Induktion

Fragen?

Anekdote kleiner Gauß. Addieren Sie die Zahlen 1 bis 100.

$$\begin{array}{l} 1+2+3+\ldots+50 \\ 100+99+98+\ldots+51 \\ \hline \underbrace{101+101+101+\ldots+101}_{50\text{mal}} = 50\cdot 101 = \dfrac{100\cdot(100+1)}{2} = \end{array}$$

Allgemeine Gauß'sche Summenformel: $\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\sum_{i=1}^{n} i} = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

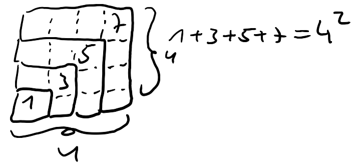
```
int sum = 0;
for (int i = 1; i <= n; i++){
    sum = sum + i
}
```

Dreieckszahlen. Geomtrische Lösung des kleinen Gauß:

$$1 \qquad 1+2 \qquad 1+2+3 \qquad 1+2+\ldots+n$$

$$\frac{2\cdot 3}{2} = 3 \qquad \frac{3\cdot 4}{2} = 6 \qquad \frac{n\cdot(n+1)}{2} =$$

Geometrischer Beweis



* **Summe der ungeraden Zahlen = Quadratzahl.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \underset{\{1,2,\dots\}}{\mathbb{N}} : \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \overset{!}{=} n^2}_{A(n)}$$

Idee!

Lösung.

(Induktionsanfang)

$\underline{IA}$: $n = 1$: $LS = \sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$ d.h. $A(1)$ gilt!

$RS = 1^2 = 1$

(Induktionsvoraussetzung/-annahme)

$\underline{IV}$: Für $n=k$ soll gelten: $\sum_{i=1}^{k} 2i-1 = k^2$ d.h. $A(k)$ soll gelten

(Induktionsschritt)

$\underline{IS}$ = $n = k \rightarrow n = k+1$ d.h. $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$

zzg.: $\sum_{i=1}^{k+1} 2i-1 = (k+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i-1 = \underset{i=1}{2\cdot 1 - 1} + \underset{i=2}{2\cdot 2 - 1} + \ldots + \underset{i=k}{2\cdot k - 1} + \underset{i=k+1}{2\cdot(k+1) - 1}$$

$$= \underbrace{1 + 3 + \ldots + 2k - 1}_{\sum_{i=1}^{k} 2i-1 \overset{IV}{=} k^2} + 2\cdot(k+1) - 1$$

$$= k^2 + 2\cdot(k+1) - 1$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

Eigener Lösungsversuch.

Geometrische Summenformel. Beweisen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}: \quad \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \overset{!}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Lösung.

IA: $n=0$ $\quad LS = \sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$

$$RS = \frac{1 - q^{0+1}}{1-q} = 1$$

IV: Für $n=k$ soll gelten $\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

IS: $n = k \to n = k+1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1 - q^{(k+1)+1}}{1-q}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \underbrace{q^0 + q^1 + \ldots + q^k}_{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}} + q^{k+1} \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$= \frac{1(-q^{k+1})(+q^{k+1}\cdot 1) - q^{k+1+1}}{1-q}$$

Eigener Lösungsversuch.

Bubble Sort in C. Implementieren Sie den Bubble-Sort-Algorithmus um ein Array aus Zahlen zu sortieren.

Lösung. $\rightarrow$ siehe C-Datei.