Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Vektorräume

Fragen?

*** Vektoren.** Skizzieren und berechnen Sie folgende Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

b) $y = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

c) $3 \cdot y$ $\begin{pmatrix} 1,5 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $-\frac{1}{2} \cdot x$ $\begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

e) $x + y$ $\begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Formel: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Länge $= \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$

$= \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$

*** Länge.** Berechnen Sie die Länge von folgenden Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung.

a) Pytagoras: $|x| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

b) $|y| = \sqrt{-1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

c) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Eigener Lösungsversuch.

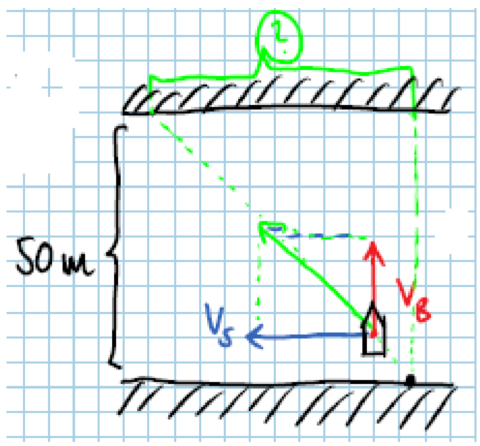
Algebraische Struktur.

- Welche algebraische Struktur weist $(\mathbb{R}^n, +)$ auf? (kommutativ) Gruppe/Halbgruppe?
- Welche Regeln gelten für die Skalarmultiplikation in $(\mathbb{R}^n, \cdot)$? $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Wie ist die algebraische Struktur eines Vektorraums definiert?

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Flussüberquerung. Sie wollen einen 50 m breiten Fluss mit einem Boot überqueren, wobei eine starke Strömung herrscht. Dabei sei in folgendem Bild v_B der Bootsgeschwindigkeitsvektor mit Bootsgeschwindigkeit $|v_B| = 10$ km/h und v_S der Strömungsgeschwindigkeitsvektor mit Strömungsgeschwindigkeit $|v_S| = 30$ km/h
Wie viele Meter kommen Sie versetzt an? Berechnen Sie ?.



Lösung.

$$10.000\,m/h \hat{=} 166\tfrac{2}{3}\,m/m \hat{=} 2\tfrac{7}{9}\,m/s$$

$$50\,m : 2\tfrac{7}{9}\,m/s = 18\,s$$

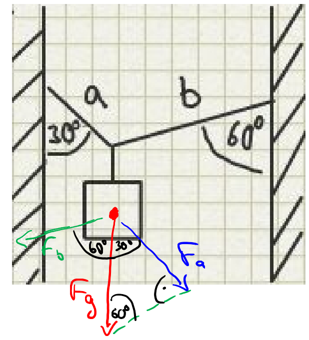
$$30.000\,m/h \hat{=} 500\,m/m \hat{=} 8\tfrac{1}{3}\,m/s$$

$$18\,s \cdot 8\tfrac{1}{3}\,m/s = \underline{\underline{150\,m}}$$

Eigener Lösungsversuch.

Gewichtskraft.

Ein Gewicht mit Masse $m = 100$ kg hängt an einer Seilkonstruktion. Berechnen Sie die Kräfte die auf die Seile a und b wirken.



Lösung.

$$|F_g| = m \cdot g = 100\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\frac{m}{s}}{s} = 981\,\text{N}$$

$$|F_a| = \sin(60°) \cdot |F_g| \approx 850\,\text{N}$$

$$|F_b| = \sin(30°) \cdot |F_g| \approx 490{,}5\,\text{N}$$

Eigener Lösungsversuch.

*** Vektoren als Java-Objekte.** Implementieren Sie eine Java-Klasse namens `Vector`, die einen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ modelliert. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Die Klasse soll zwei Variablen besitzen, die die beiden Koordinaten beschreiben. Implementieren Sie einen geeigneten Konstruktor und eine `toString()`-Methode.
2. Zusätzlich soll die Klasse über folgende Methoden verfügen (sind die angegebenen Signaturen sinnvoll?):
   - Vektoraddition: `public Vector add(Vector v)`
   - Skalarmultiplikation: `public Vector scalarMult(double lambda)`
   - Länge des Vektors: `public double length()`
   - Skalarprodukt: `public double scalarProd(Vector v)`
   - Winkel zu einem anderen Vektor: `public double angle(Vector v)`

   (Skalarprodukt und Winkel wird später behandelt, Technikzweige/Gymnasium kennt das schon!)
3. Schreiben Sie eine Main-Methode, die ihre Methoden testet.

Lösung. siehe Java-Klasse bzw. Blog auf bigdev.de!