Prof. Dr. M. Helbig
Analysis und
Lineare Algebra

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Probe-Prüfung: Lineare Algebra

1. Sei $z = i - 1 \in \mathbb{C}$.
   a) Skizzieren Sie die z.
   b) Berechnen Sie die Polarform von z.
   c) Berechnen Sie das multiplikativ Inverse von z.
   d) Berechnen und skizzieren Sie die 4. Wurzeln von z.

2. Sei $w = 2i \in \mathbb{C}$.
   a) Berechnen Sie $(\frac{1}{2}w)^{1024}$.
   b) Berechnen Sie das multiplikativ Inverse von w.
   c) Berechnen Sie in $\mathbb{C}$ die 3. Wurzeln von w.
   d) Skizzieren Sie alle Zahlen aus a) - c).

3. Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2a \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

4. Gegeben die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   a) Geben Sie die Parameterform der Ebene E an, die durch x und y aufgespannt ist.
   b) Berechnen Sie einen Vektor n, der senkrecht auf der Ebene E steht.
   c) Wie groß ist der Winkel zwischen z und der Ebene E?
   d) Wie groß ist das Volumen des von x, y und z aufgespannten Spats?

5. Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   a) Bestimmen Sie mittels der Regel von Cramer x_2 des LGS $Ax = b$.
   b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und skizzieren Sie die Eigenvektoren.

6. Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 3b & 6 \end{pmatrix}$.
   a) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar? Berechnen Sie für diese b die zu B inverse Matrix.
   b) Für welche $b \in \mathbb{R}$ besitzt B Eigenwerte?