MATRIZEN

Fragen?

Spalte Zeile

* **Matrizengrößen.** Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $p \times q$-Matrix.

a) Wann kann man $A + B$ berechnen und welche Größe hat das Ergebnis?

b) Wann kann man $A \cdot B$ berechnen und welche Größe hat das Ergebnis?

Lösung.

gleiche Spaltenanzahl

selbe Größe kommt raus

a.) $m = p$, $n = q$; $m \times n$ oder $p \times q$

gleiche Zeilenanzahl

b.) $n = p$

Zeile link muss gleich Spalte rechts sein

$m \times q$ = Größe

1 Zeile mal 1 Spalte
+ 2 Zeile mal 2 Spalte
...

Eigener Lösungsversuch.

Rechnen mit Matrizen. Bestimmen Sie die Größen aller Matrizen und berechnen Sie falls möglich.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \lightning$

Skalar-multiplikation

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

erste Zeile · erste Spalte

erste Zeile · zweite Spalte

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

zweite Zeile · erste Spalte

zweite Zeile · zweite Spalte

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \lightning$

k) **Kommutativ?** Mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen Sie

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l) **Einheitsmatrix** $E_n = \mathbb{1} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ berechnen Sie

$$A \cdot E_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$E_n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Eigener Lösungsversuch.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T =$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T =$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T =$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T =$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

k) **Kommutativ?** Mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

l) **Einheitsmatrix** $E_n = \mathbb{1} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ berechnen Sie

$A \cdot E_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$E_n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$

$(M, \circ)$ Halbgruppe Gruppe | $(M, +, \cdot)$ Ringe Körper | $(M, +, \cdot)$ Vektorraum

Skalarmul.

Algebraische Strukturen. Welche algebraische Struktur besitzt:

a) $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ (mit $\cdot$ Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot A$)

b) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ (mit $\cdot$ Matrizenmultiplikation: $A \cdot B$)

Lösung.

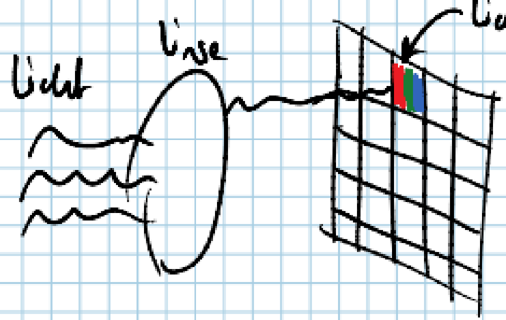
a.) Matrizenaddition:
- Halbgruppe:
  - Abgeschlossen ✓
  - Assoziativ ✓
- Gruppe:
  - neutr. Element ✓ (= null Matrix)
  - inverses Element ✓ zu A ist $-A$ invers $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
- abelsche Gruppe:
  - Kommutativ ✓

Skalarmul.: Vektorraum
- Ab ✓
- Ass ✓
- neutr. El. ✓ $1 \cdot A = A$
- Distributiv ✓ $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$

b) siehe Prof Datei

Eigener Lösungsversuch.

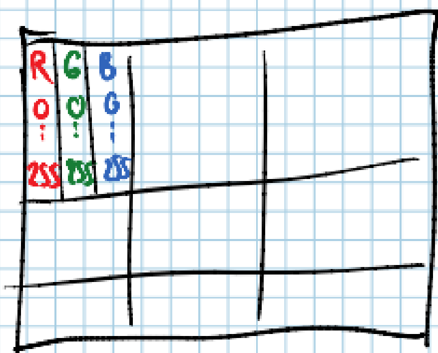
Ü Bildbearbeitung.



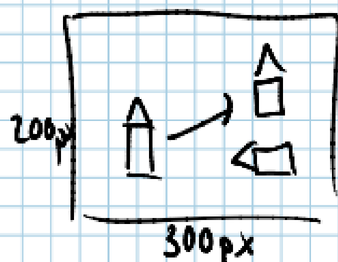
Licht-Sensoren (Pixel)
misst RGB/Farbanteile 0 – 255
↑
VGA-Kodierung

→ Pixelformat

z.B. JPEG
TIF
PNG



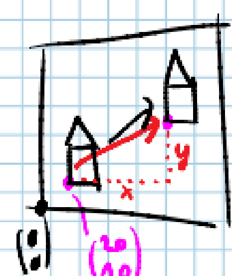
Demo in Paint



Verschieben
Drehen
stauchen/strecken in x/y-Richtung

Was sind die neuen Koordinaten in der Pixelmaske?

a) Verschiebung:



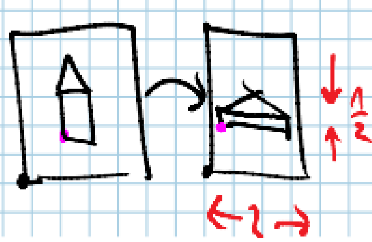
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \end{pmatrix}$ ← 80px nach re / ← 40px nach oben

$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \longmapsto$

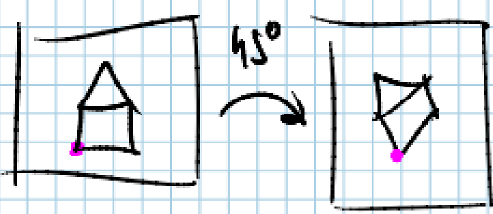
↑
neue Position

b) Skalierung:



$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \longmapsto$

c) Drehung mit Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ Drehung um α um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \mapsto$

neue Koord.