11a
Zahlenbereiche

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:53

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Zum Zählen benötigt man die positiven natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... In der Informatik zählt man die Null gerne zu den natürlichen Zahlen [natural numbers] $\mathbb{N}$, zum Beispiel beim Typ `unsigned int` in C. Die Norm DIN 5437 besagt dasselbe. In der Mathematik dagegen gehört die Null auch mal gerne *nicht* zu den natürlichen Zahlen. Ich schreibe deshalb sicherheitshalber $\mathbb{N}_0$ beziehungsweise $\mathbb{N}^+$, um klar zu machen, ob die Null dabei sein soll oder nicht. Vorsicht mit dem nackten Symbol $\mathbb{N}$ in Büchern und Artikeln!

1

Für den Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen [integer numbers] kommen die negativen ganzen Zahlen hinzu:

2

Kommen noch alle positiven wie negativen Brüche hinzu, erhält man den Bereich der rationalen Zahlen [rational numbers] $\mathbb{Q}$. („Ratio“ heißt nicht nur Verstand, sondern auch Verhältnis. Das „Q“ kommt von „Quotient“.)

3

2 Reelle Zahlen

Um $x^2 = 2$ lösen zu können oder den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 als Zahl ausdrücken zu können, benötigt man einen noch größeren Zahlenbereich: die reellen Zahlen [real numbers]. Messwerte werden typischerweise als reelle Zahlen aufgefasst.

4

Ein Klassiker ist, zu zeigen, dass schon $\sqrt{2}$ kein Bruch mehr sein kann, sondern erst in der Menge der reellen Zahlen existiert. Angenommen, $\sqrt{2}$ *wäre* ein Bruch, dann könnte man diesen Bruch weitestmöglich kürzen. Man erhielte einen Zähler $p \in \mathbb{N}^+$ und einen Nenner $q \in \mathbb{N}^+$ mit $\sqrt{2} = p/q$. Durch Quadrieren fände man $2 = p^2/q^2$, also $2q^2 = p^2$. Also müsste p den Primfaktor 2 haben. Dann wäre aber p^2 durch 2^2 teilbar, also müsste auch q den Primfaktor 2 haben. Also wäre nicht weitestmöglich gekürzt worden. Widerspruch.

Eine einfache (wenn auch unelegante) Art, die reellen Zahlen zu konstruieren, ist, die Menge aller Dezimalbrüche zu betrachten, egal ob endlich, periodisch oder (abzählbar) unendlich. Allerdings muss man berücksichtigen, dass viele reelle Zahlen zwei Schreibweisen haben:

5

3 Komplexe Zahlen

Man führt formal eine „imaginäre Einheit“ [imaginary unit] namens i oder in der Elektrotechnik j ein, die folgende Eigenschaft hat:

6

$i^2 = -1$

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen [complex numbers] ist dann die Menge aller $a + bi$, bei denen a und b reelle Zahlen sind. (Der Name kommt daher, dass jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, so wie ein Gebäudekomplex oder ein psychologischer Komplex zusammengesetzt sind.) Die

Grundrechenarten bleiben, wie man sie kennt; die imaginäre Einheit ist einfach eine Zahl wie alle anderen:

7

$(2+3i)(4-i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 10i + 11$

$-3i^2 = +3$

Das Teilen durch komplexe Zahlen funktioniert mit einem billigen Rechentrick:

8

$\frac{2+3i}{4-i} = \frac{2+3i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{8+2i+12i-3}{16+\cancel{4i}-\cancel{4i}+1} = \frac{5+14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17} i$

Einige Begriffe: Sei die komplexe Zahl $z = 3+4i$ gegeben. Der Realteil [real part] von z ist:

9

$Re(z) = 3$

Der Imaginärteil [imaginary part] von z ist:

10

$Im(z) = 4$

Das Komplex Konjugierte [complex conjugate] von z ist:

11

$\bar{z} = 3 - 4i$

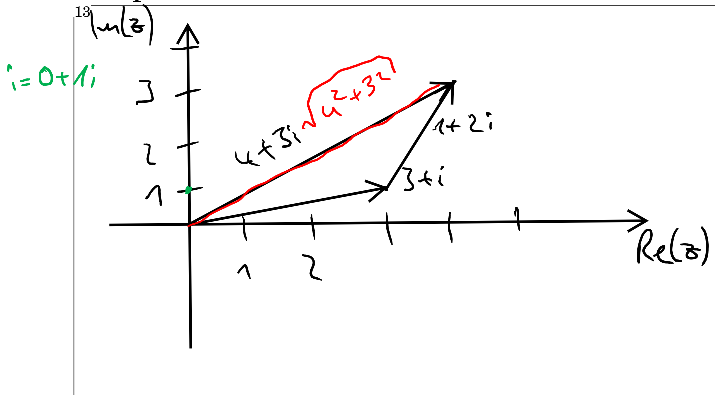
Der Betrag [magnitude] von z ist:

12

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

Man kann sich komplexe Zahlen in der „Gaußschen Zahlenebene“ aufmalen. Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen und die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl funktioniert wie bei Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

13



Die komplexen Zahlen sind in der Ingenieurmathematik vor allem wichtig, um Rechnungen mit Schwingungen zu vereinfachen. Später begründen wir die Eulersche Identität:

14

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

Statt mit Sinus und Freunden zu rechnen, kann man also die nettere Exponentialfunktion verwenden – wenn auch mit zunächst eigenwillig aussehenden Exponenten.

Insgesamt ergibt sich eine Hierarchie an Zahlenbereichen:

15

$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

4 Rechenregeln

In den bisher genannten Zahlenbereichen gelten diese Regeln:

- Assoziativität der Addition:

  [16]

- Assoziativität der Multiplikation:

  [17]

- Kommutativität der Addition:

  [18]

- Kommutativität der Multiplikation:

  [19]

- Distributivgesetz:

  [20]

Subtraktion und Division sind dagegen weder assoziativ noch kommutativ!

[21]

5 Andere Zahlenmengen

Um Orientierungen zum Beispiel in der Robotik zu beschreiben, benutzt man vierdimensionale Zahlen (Quaternionen) der Form $a+bi+cj+dk$. In der Codierung sind außerdem Zahlenbereiche (korrekt: „Körper“) wichtig, die nur endlich viele Elemente haben. In der Mathematik untersucht man obendrein Mengen, in denen unendlich große und unendlich kleine Zahlen enthalten sind.

Die ingenieurmäßigen Zahlenbereiche umfassen keine unendlich großen oder unendlich kleinen Zahlen. Die übliche Gleitkommadarstellung am Rechner (IEEE 754) besitzt dagegen drei Sonderfälle:

[22]

Schaltet man ab, dass solche Rechenergebnisse als Fehler abgefangen werden, wird mit diesen Werten sinnvoll weitergerechnet – allerdings je nach Prozessor deutlich langsamer als mit den üblichen Werten.

6 Intervalle reeller Zahlen

Ein zusammenhängendes Stück der reellen Zahlen kann man knapper als offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall schreiben. Dabei ist $\pm\infty$ an einem offenen Ende erlaubt:

[23]

7 Stellenwertsysteme

Zum Aufschreiben von Zahlen hat sich das Dezimalsystem durchgesetzt, ein Stellenwertsystem zur Basis 10:

[24]

Im Rechner werden Zahlen sinnvollerweise binär dargestellt, also mit der Basis 2:

[25]

Die Babylonier haben mit der Basis 60 statt mit der Basis 10 gearbeitet. Das merken wir noch heute bei Zeit- und bei Winkelangaben.

Das römische Zahlensystem ist kein Stellenwertsystem, sondern berücksichtigt nur die Position kleinerer Zahlen links:

MCMXV = [26]

Mit diesen Zahlen zu rechnen ist ein größere Fleißarbeit.

8 Exponentialschreibweise

Statt eine lange Zahl wie 1234500 aufzuschreiben, kann man auch zur Exponentialschreibweise greifen:

[27]

Dieser Trick wird vor allem benutzt, um die Genauigkeit einer Zahl verdeutlichen: Man gibt nur die Stellen an, die man sicher weiß („gültige Ziffern“). Wenn man Nullen sicher weiß, werden auch die angegeben, obwohl sie für den Wert scheinbar überflüssig sind:

28

Und noch die Namen einiger Zehnerpotenzen auf Deutsch und Englisch:

29