Folgen

Fragen?

Konvergenz: pendelt sich auf einer Höhe ein

Divergenz: pendelt sich nicht auf einer Höhe ein
geht richtung $+\infty$ und $-\infty$

bestimmt Divergent: geht entweder nur Richtung $+\infty$ oder
nur Richtung $-\infty$

* **Folgen.** Für folgende Folgen machen Sie bitte das Folgende:

- Zeichnen Sie die Folgen in einem Graphen.
- Sind die Folgen beschränkt? a.) nein b.) ja c.) ja
  (nach unten beschränkt)
- Sind die Folgen monoton wachsend oder monoton fallend? a.) w b.) sf c.) nicht monoton
- Sind die Folgen konvergent (Grenzwert?), divergent oder bestimmt divergent?

a.) bd b.) konvergent c.) divergent

a) $a_n = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$

b) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$

c) $a_n = (-1)^n$, $n \,\epsilon\, \mathbb{N}_0$

a) entweder $a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ oder $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

b) $a_n \xrightarrow{n \to 0^+} 0^+$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Zinseszins. Sie legen auf ein Tagesgeldkonto ein Kapital K_0 =1000 € zu einem Zinssatz von 2% p.a. an. Wie viel Kapital haben Sie nach n Jahren? Überlegen Sie sich eine Folge K_n, wobei K_n das Kapital im Jahre n ist.

Lösung.

nach 0 Jahren $K_0 = 1000$ €

nach 1 Jahr $K_1 = K_0 + 0{,}02 \cdot K_0 = \underbrace{1{,}02 \cdot K_0}$

2 $K_2 = K_1 + 0{,}02 \cdot K_1 = 1{,}02 \cdot K_1 = 1{,}02^2 \cdot K_0$

n $K_n = K_{n-1} + 0{,}02 \cdot K_{n-1} = 1{,}02 \cdot K_{n-1} = 1{,}02^n \cdot K_0$

Eigener Lösungsversuch.

Wurzelberechnung nach Heron. $a_0 = 2$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ für $n > 0$. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert. Implementieren Sie diese rekursive Folge als Funktion in Java.

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Grenzwerte. Berechnen Sie folgende Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) $a_n = \dfrac{4n^2 - 5}{n^2 + n + 1} = \dfrac{n^2\left(4 - \overbrace{\frac{5}{n^2}}^{\to 0}\right)}{n^2\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{0}\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \dfrac{4}{1} = 4$

b) $a_n = \dfrac{3n^2 + 2}{n^3 + 2n + 1}$, $\dfrac{n^2\left(3 + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \overbrace{\dfrac{1}{n}}^{\to 0} \cdot \dfrac{3 + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}_{0}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \cdot 3 = 0$

c) $a_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{2n^2 + e^{-n}}$

Lösung.

$$\frac{\cancel{n^2}\left(1 + \overbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(2 + \underbrace{\frac{e^{-n}}{n^2}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}$$

Eigener Lösungsversuch.