10
Exponentialfunktionen, Eulersche Zahl, Logarithmen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 16:00

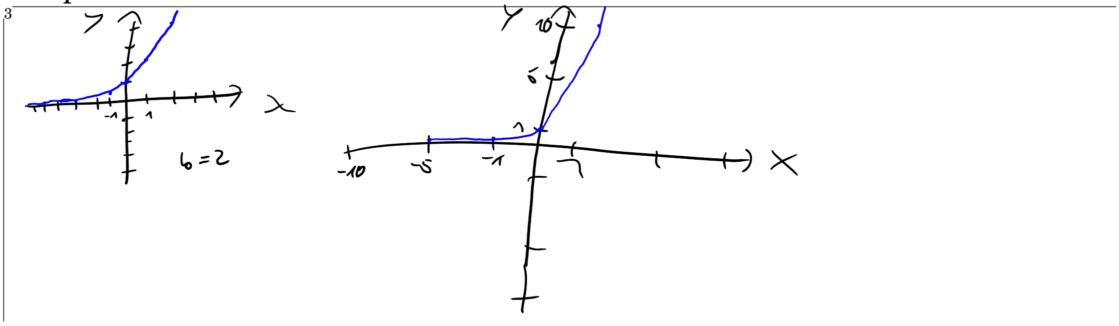
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Exponentialfunktionen

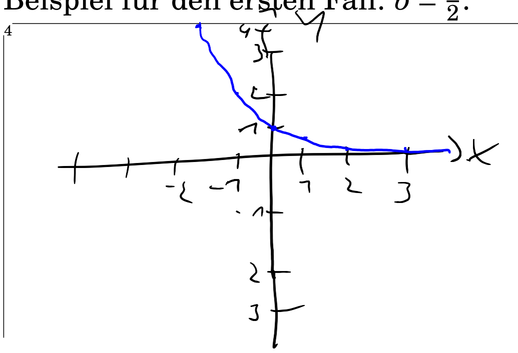
Eine Funktion der Art $x \mapsto 7 \cdot 3^x$ heißt Exponentialfunktion [exponential function]. Die Zahl 3 in diesem Beispiel heißt Basis [base]. Um Probleme mit dem Definitionsbereich zu vermeiden, betrachtet man keine negativen Basen. (Was wäre das Problem?) Die Basis 0 und die Basis 1 sind nicht allzu spannend, denn 1 $0^x = 0$; $1^x = 1$. Als interessante Basen bleiben die Zahlen b mit 2 $b \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

Beispiele für den zweiten Fall: $b = 2$ und $b = 10$.



Diese Funktionen sind streng monoton steigend und haben die Bildmenge $(0;\infty)$.

Beispiel für den ersten Fall: $b = \frac{1}{2}$.

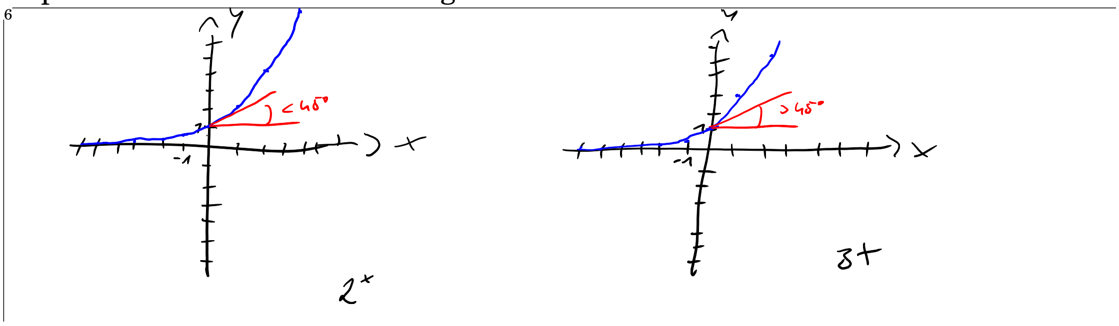


Diese Funktion ist streng monoton fallend, hat aber ebenfalls die Bildmenge $(0;\infty)$.

Dieses Verhalten ist nicht überraschend, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

2 Eulersche Zahl

Die Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ steigt an $x = 0$ etwas flacher als 45°, die Exponentialfunktion $x \mapsto 3^x$ steigt an $x = 0$ etwas steiler als 45°:



Zwischen 2 und 3 wird also eine Zahl e liegen, so dass $x \mapsto e^x$ an $x = 0$ *genau* in einem Winkel von 45° steigt. Diese Zahl e heißt Eulersche Zahl [Euler's number]. Diese Funktion $x \mapsto e^x$ heißt *die* Exponentialfunktion exp (mit betontem „die").

Mit dieser Eigenschaft kann man die Zahl e näherungsweise ausrechnen:

7 $e = e^1 = e^{\frac{1}{1000}\cdot 1000} = \left(e^{\frac{1}{1000}}\right)^{1000} \approx \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$

Mit der binomischen Formel wird daraus:

8 $(a+b)^{1000} = a^{1000} + 1000a^{999}b + \binom{1000}{2}a^{998}b^2 + \binom{1000}{3}a^{997}b^3 + \ldots$

$1^{1000} + 1000\cdot 1^{999}\cdot\frac{1}{1000} + \binom{1000}{2}\cdot 1^{998}\cdot\frac{1}{1000^2} + \binom{1000}{3}\cdot 1^{997}\cdot\frac{1}{1000^3} + \ldots$

$= 1 + 1 + \frac{\cancel{1000}\cdot\cancel{999}}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{\cancel{1000^2}} + \frac{\cancel{1000}\cdot\cancel{999}\cdot\cancel{998}}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{\cancel{1000^3}} + \ldots$

$\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

$\approx 2{,}718\ldots$

Wenn man hinreichend große Potenzen benutzt, werden diese Formeln beliebig genau. Es ergibt sich $e = 2{,}7\ldots$ (Vorsicht: Die obere Formel ist nicht nur ineffizient, sondern scheitert für große Potenzen an Rundungsfehlern. Warum?)

Mit demselben Trick kann man die Funktion exp überall beliebig genau berechnen, ohne tatsächlich „krumme“ Potenzen zu bilden:

9 $e^x = e^{\frac{x}{1000}\cdot 1000} = \left(e^{\frac{x}{1000}}\right)^{1000} \approx \left(1+\frac{x}{1000}\right)^{1000}$

Und mit der binomischen Formel:

10 $1^{1000} + 1000\cdot 1^{999}\cdot\frac{x}{1000} + \binom{1000}{2} 1^{998}\cdot\frac{x^2}{1000^2} + \binom{1000}{3} 1^{997}\cdot\frac{x^3}{1000^3} + \ldots$

$= 1 + x + \frac{\cancel{1000}\cdot\cancel{999}}{2\cdot 1}\cdot\frac{x^2}{\cancel{1000^2}} + \frac{\cancel{1000}\cdot\cancel{999}\cdot\cancel{998}}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{x^3}{\cancel{1000^3}} + \ldots$

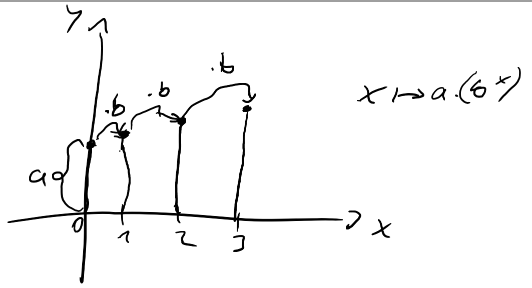
$\approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$\approx 1 + x\ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$

3 Modelle mit Exponentialfunktionen

Die klassischen Anwendungsfälle für Exponentialfunktionen sind das ungebremste Wachstum (Zinseszins, Mooresches Gesetz, . . .)

11



und der radioaktive Zerfall oder die Entladekurve eines Kondensators:

12

Skalen auf Messgeräten und die Stückelungen von Münzen und Banknoten sind typischerweise ungefähr exponentiell:

13

In der Thermodynamik betrachtet man häufig Verteilungen von Teilchen auf Niveaus verschiedener Energie E. Sind quantenmechanische Effekte egal und ist die Zahl der Teilchen fest und ist die Gesamtenergie fest und ist die Unordnung (Entropie) maximal, ist das Energieniveau E proportional zu $e^{-E/kT}$ besetzt. Dazu kommen noch weitere Faktoren, zum Beispiel, um die Zustandsdichten zu berücksichtigen. Dabei ist k die Boltzmann-Konstante $k \approx$ 14 .

Diese Verteilung schlägt sich an vielen Stellen nieder. Die Arrhenius-Gleichung modelliert, wie eine Reaktionsgeschwindigkeit von der Temperatur abhängt:

15

In der Halbleiterdiode wirkt die Raumladungszone am pn-Übergang wie die Aktivierungsenergie in einer chemischen Reaktion. Die benötigte Energie wird durch eine in Durchlassrichtung angelegte Spannung U vermindert. Das übliche Modell für kleine Ströme durch eine Diode ist damit:

16

Was sind offensichtliche Grenzen dieses Modells?

4 Logarithmen

Die Exponentialfunktionen $x \mapsto b^x$ mit Basis $b \in (0;1)$ sind streng monoton fallend, die mit $b \in (1;\infty)$ sind streng monoton steigend. Also kann man in allen diesen Fällen jeweils die Umkehrfunktion bilden: den Logarithmus [logarithm] zur Basis b. Es gilt also:

17 $y = b^x \Longleftrightarrow x = \log_b(y)$

Ein Logarithmus beantwortet die Frage: Womit muss man die Basis potenzieren, damit das herauskommt, was im Logarithmus steht? Aus den Exponentialfunktionen kommen immer nur positive Zahlen heraus, also können alle Logarithmen nur positive Zahlen verarbeiten.

Einige Logarithmusfunktionen sind besonders wichtig und haben deshalb eigene Namen:

18 $\lg = \log_{10}$

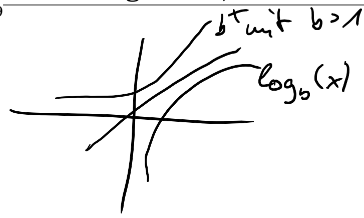
$\ln = \log_e$

$\mathrm{lb} = \mathrm{ld} = \log_2$

Vorsicht: In Programmiersprachen und in der fortgeschrittenen Mathematik heißt der natürliche Logarithmus gerne `log`.

Exponentialfunktionen explodieren; Logarithmusfunktionen kriechen dagegen immer langsamer, erreichen aber dennoch jedes noch so großes Ergebnis. Grafisch:

19



5 Rechenregeln für Logarithmen

Weil die Logarithmusfunktionen die jeweiligen Exponentialfunktionen umkehren, kann man aus den Potenzrechengesetzen die Rechenregeln für Logarithmen folgern:

20

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$
$$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$$
$$\log_b(x^z) = z \cdot \log_b(x)$$
$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$$
$$\log_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_b(x)$$

für alle $x, y > 0$ & $n \neq 0$ & $z \in \mathbb{R}$

Oft sind am Rechner nur lg und ln verfügbar, keine Logarithmusfunktion zu beliebigen Basen b. Dann kann man sich so behelfen: $x = \log_3(7)$, also $7 = 3^x$, also:

21

$$x = \log_3(7) \Leftrightarrow 7 = 3^x$$
$$10^{\lg(7)} = 7 = 3^x = (10^{\lg(3)})^x$$
$$\Rightarrow \lg(7) = x \lg(3)$$
$$\Rightarrow x = \frac{\log(7)}{\log(3)}$$

6 Modelle mit Logarithmusfunktionen

Logarithmen taugen oft als Modelle der menschlichen Wahrnehmung, so beim Schalldruckpegel:

22

und bei musikalischen Intervallen zwischen Frequenzen:

23

Außerdem verhält sich der Informationsgehalt logarithmisch:

24

7 Logarithmische Darstellung

Um Zusammenhänge zu plotten, die ungefähr exponentiell oder logarithmisch sind, empfiehlt sich eine logarithmische Einteilung der y-Achse beziehungsweise der x-Achse:

Für Zusammenhänge, die ungefähr Potenzfunktionen oder Polynome sind, empfiehlt sich, sowohl die x-Achse wie auch die y-Achse logarithmisch einzuteilen: