Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

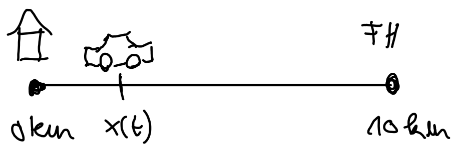
Ableitungen

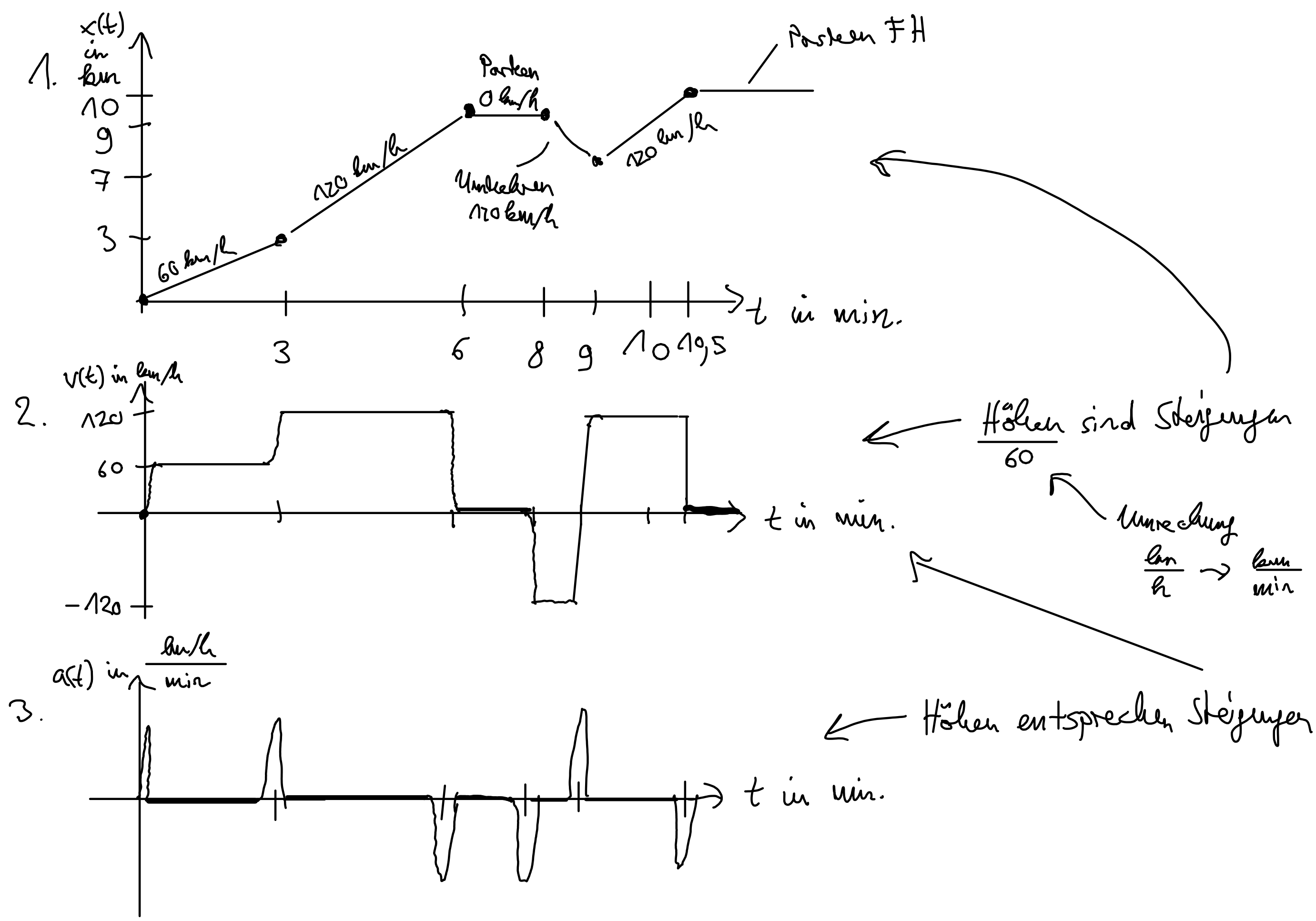
Fragen?

*** Strecke zur Hochschule.** Stellen Sie sich Ihren Weg zur Hochschule vor: Zu Hause sind Sie bei Kilometer 0 und z.B. bei Kilometer 10 sind Sie an der Hochschule.

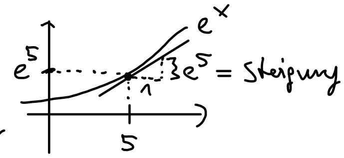
1. Zeichnen Sie ein Zeit/Weg-Diagramm in dem Sie zuerst mit 60 km/h durch die Stadt fahren, dann bis auf 120 km/h auf einer Landstrasse beschleunigen, dann kurz parken, dann ein kurzes Stück umkehren und dann aber ab in die Hochschule.
2. Zeichnen Sie zu obigem Diagramm ein Zeit/Geschwindigkeits-Diagramm.
3. Zeichnen Sie zu obigem Diagramm ein Zeit/Beschleunigungs-Diagramm.

Lösung.





Eigener Lösungsversuch.



* **Ableitungen elementarer Funktionen.** Ergänzen Sie bitte die Tabelle:

$f(x)$	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	$n x^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$n \in \mathbb{R}$!

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aus diesen Ableitungen kann man sich viele weitere Ableitungen mit Hilfe folgender Regeln überlegen:

* **Ableitungsregeln.** Ergänzen Sie bitte die Regeln:

- Linearität: $(f+g)' = f' + g'$ und $(a \cdot f)' = a \cdot f'$ mit $a \in \mathbb{R}$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g \neq 0$, Eselsbrücke: $\frac{NAZ - ZAN}{N^2}$
- Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ außen ableiten & innen hinschreiben, innen nachdifferenzieren
- Umkehrfunktion: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Ableitung ursprüngliche Fkt.

z.B. $\ln(x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

Ableitungen berechnen. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mit Hilfe dieser Regeln:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 1$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

g) $f(x) = \dfrac{x}{3x+1}$

h) $f(x) = \tan(x)$
Hinweis: $tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

i) $f(x) = e^{2x}$

j) $f(x) = \ln(2x \cdot \cos(x))$

k) $f(x) = 5^x$
Hinweis: $5^x = e^{x \cdot \ln(5)}$

l) $f(x) = \arcsin(x)$
Hinweis: Umkehrfunktion

m) $f(x) = \arctan(x)$

Lösung.

$(x^n)' = nx^{n-1}$

a) $(x^3)' = 3x^2$

b) $(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$

c) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

e) $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = 15x^2 + 4x$ (Linearität, $(x^n)' = \dots$)

f) $f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cos(x)$

g) $f'(x) \overset{QR}{=} \frac{(3x+1) \cdot 1 - x \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$

h) $f'(x) \overset{QR}{=} \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$

i) $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$

j) $\left(\ln(2x\cos x)\right)' = \frac{1}{2x\cos x} \underbrace{(2x \cdot \cos x)'}_{2\cos x + 2x(-\sin x)} = \frac{2\cos x - 2x\sin x}{2x\cos x}$

$= \frac{1}{x} - \tan x.$

feste Zahl ≈ 1,6...

k) $(5^x)' = (e^{x\ln 5})' = \underbrace{e^{x\ln 5}}_{5^x} \cdot \underbrace{(x\ln 5)'}_{\ln 5} = \ln 5 \cdot 5^x.$

Allg: $\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$

Exp.-Fkt!

l) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \overset{\text{letztes Semester}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \overset{h)}{=} \frac{1}{1 + (\underbrace{\tan(\arctan x)}_{x})^2} = \frac{1}{1+x^2}$

Eigener Lösungsversuch.