PROF. DR. M. HELBIG
MATHEMATIK – ÜBUNG

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

INTEGRAL - TEIL 2

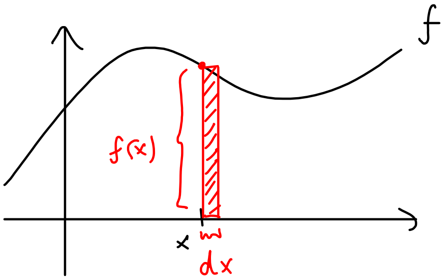
Fragen? ✗

*** Notation.** Woher kommt die Notation $\int_a^b f(x)\,dx$?

Siehe dazu DorFuchs https://youtu.be/CN_dujjMAA0.

Lösung.

„$\int$" = langgezogenes S für Summe über Rechtecksflächen $\underline{f(x) \cdot dx}$

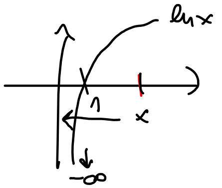


Eigener Lösungsversuch.

Uneigentliche Integrale. Bestimmen Sie:

* a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

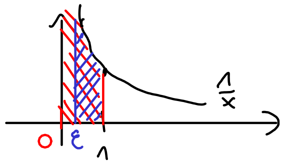
b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ d) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$



Lösung.

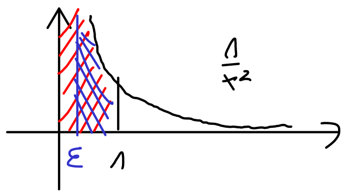
a) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx}_{\left[\ln|x|\right]_\varepsilon^1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\underbrace{\ln|1|}_{0} - \underbrace{\ln|\varepsilon|}_{\substack{\| \,\varepsilon>0 \\ \varepsilon}}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big(-\underbrace{\ln(\varepsilon)}_{\substack{\downarrow\\ -\infty}}\big) = \infty$$

Def. Lücke von $\frac{1}{x}$

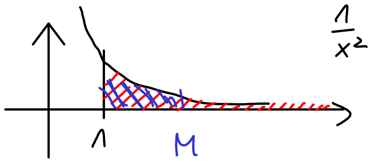


b) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx}_{\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(-\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\Big) = \infty$$

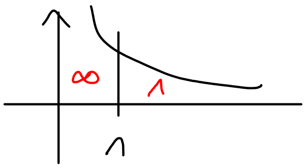
$$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$



c) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx}_{\underbrace{-\frac{1}{M}}_{\to 0} + \frac{1}{1}} = 1$$



d) $$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx}_{\overset{b)}{=}\ \infty} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{\overset{c)}{=}\ 1} = \infty$$



<u>ODER</u>: $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_\varepsilon^M \frac{1}{x^2}\,dx}_{\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^M = -\frac{1}{M} + \frac{1}{\varepsilon}}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\underbrace{\lim_{M\to\infty} \underbrace{-\frac{1}{M}}_{\to 0} + \frac{1}{\varepsilon}}_{\frac{1}{\varepsilon}}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

Wolfram-α: plot 1/x, 1/x^2 from 0 to 4.

Eigener Lösungsversuch.

⚠ Bei Quotient immer prüfen!

Logarithmische Integration. Spezialfall der Substitutionsregel (nächstes mal!):

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c}$$

* a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung.

* b) $\int \frac{6x+6}{3x^2+6x+2}\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{3x^2+6x+2}\,dx$

d) $\int \tan(x)\,dx$

e) $\int \frac{1}{x\cdot\ln(x)}\,dx$

Lösung.

a) $$\left[\ln|f(x)| + c\right]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad ✓$$

b) $$\int \frac{\overset{f'}{6x+6}}{\underset{f}{3x^2+6x+2}}\,dx = \ln|3x^2+6x+2| + c$$

c) $$\underbrace{\frac{1}{6}\int \frac{6\cdot(x+1)}{3x^2+6x+2}\,dx}_{\underline{b)}\ \ldots} = \frac{1}{6}\ln|3x^2+6x+2| + c$$

d) $$\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{\overset{f'}{-\sin(x)}}{\underset{f}{\cos(x)}}\,dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

e) $$\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \int \frac{\overset{f'}{\frac{1}{x}}}{\underset{f}{\ln x}}\,dx = \ln|\ln x| + c$$

Eigener Lösungsversuch.

EXKURS ZU STAMMFUNKTIONEN.

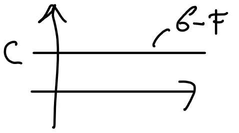
Sei F eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$. Wie sehen alle weiteren Stammfunktionen aus? $F + c,\ c \in \mathbb{R}$.

z.B. ist $F = \sin$ eine Stammfunktion von $f = \cos$ und jede weitere Stammfunktion ist von der Form $\sin + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Seien F, G zwei beliebige Stammfktnen. von f. zzg: $G = F + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

$(G-F)' \overset{\text{linear}}{=} \underbrace{G'}_{f} - \underbrace{F'}_{f} = 0$, d.h. $G-F$ hat immer Steigung 0, d.h.



$G - F = c$ konstante Fkt. (mit einem $c \in \mathbb{R}$), d.h. $G = F + c$ $\square$