Aufgaben zu – $\mathbb{C}$

– Geraden/Ebenen

– LGS/~~det~~/Inverse M.

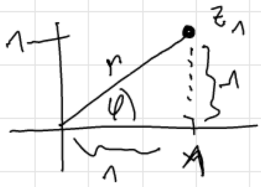
– EV/EW/~~Diagonalisierung~~

Radius Länge → $r e^{i\varphi}$ ← Winkel ←

Ü Schreiben Sie in Polarform und geben das Inverse an:

a) $z_1 = 1+i$ b) $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ c) $z_3 = -2-2i$

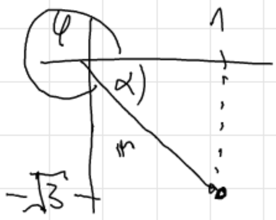
a)



$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\tan\varphi = \frac{1}{1} = 1 \overset{\tan^{-1}}{\Rightarrow} \varphi = 45° \hat{=} \frac{\pi}{4}$

$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

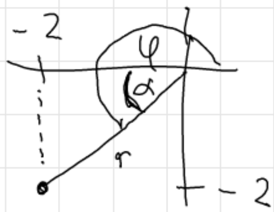
b)



$r = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ ≙ 60°

$\boxed{z_2 = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\, e^{i\frac{5\pi}{3}}}$ ← $2\pi - \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\alpha} = \frac{(6-1)\pi}{3}$

c)



$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{\underset{2\cdot 4}{8}} = 2\sqrt{2}$, $\tan\alpha = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \pi + \underbrace{\alpha}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{4}$: $\boxed{z_3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

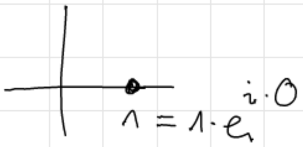
Inverse: a) Entweder über Kartesische Form oder Polarform:

$\hookrightarrow z_1 = 1+i$, $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\underbrace{z_1\cdot\bar{z}_1}_{=r^2}} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}(1-i)$

$1 - \underbrace{i + i}_{0} - \underbrace{i^2}_{-1} = 2$

$\hookrightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i(-\frac{\pi}{4})}$



$$z_1 - z_1^{-1} = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 1$$

$$1 \qquad e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}} = e^0 = 1$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

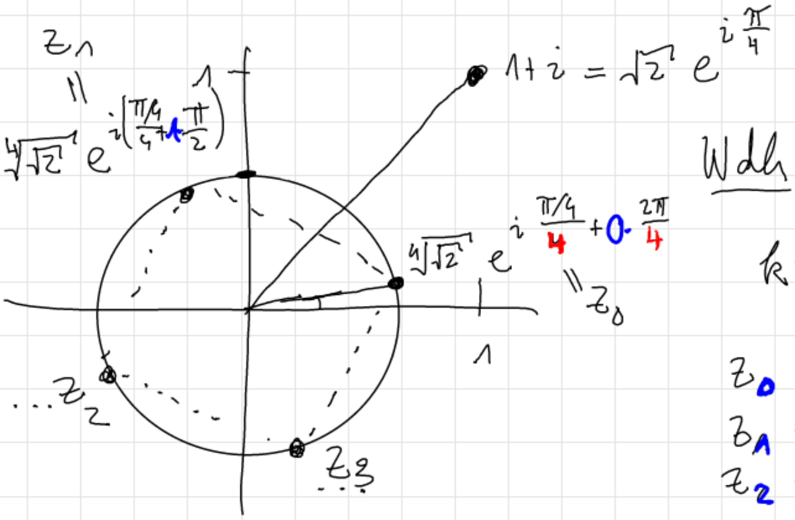
b) Polarform: $z_2^{-1} = \frac{1}{2} e^{+i\frac{\pi}{3}}$

$\left(\text{Allgemein: } z = re^{i\varphi} \qquad z^{-1} = \frac{1}{r} e^{i(-\varphi)}\right)$

c) Kartesisch:

$$z_3 = -2 - 2i \;, \quad z_3^{-1} = \frac{\overline{z_3}}{z_3 \overline{z_3}} = \frac{1}{r^2} \overline{z_3} = \frac{1}{8}(-2+2i) = \frac{1}{4}(-1+i)$$

$\boxed{\ddot{u}}$ Berechnen Sie die 4. Wurzeln von $1+i$, d.h. alle z mit $z^4 = 1+i$. Skizzieren Sie die Lösungen!

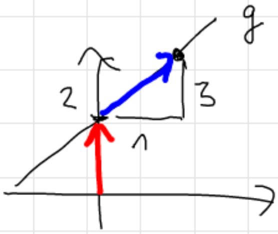


<u>Wdh:</u> $z^n = re^{i\varphi}$

$$k = 0, \dots, n-1: \quad z_k = \sqrt[n]{r} \, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$z_0 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/4}{4} + 0 \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \, e^{i\frac{\pi}{16}}$$
$$z_1 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/4}{4} + 1 \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \, e^{i\frac{\pi 9}{16}}$$
$$z_2 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/4}{4} + 2 \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \, e^{i\frac{\pi 17}{16}}$$
$$z_3 = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/4}{4} + 3 \frac{2\pi}{4}\right)} = \sqrt[8]{2} \, e^{i\frac{\pi 25}{16}}$$

$\boxed{\ddot{u}}$ Bestimmen Sie die Parameterform in $\mathbb{R}^2$ der Geraden $y = 3x + 2$ an!



Parameter

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} + \lambda \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{x \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} + \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}}$$

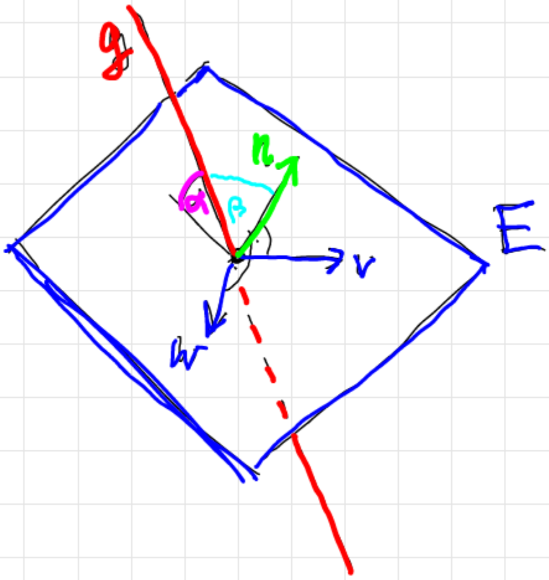
Ü Sei E die Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die Vektoren $v = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt ist.

a) Geben Sie einen Vektor n der Länge 1 an, der auf der Ebene senkrecht steht (Normalenvektor)

b) Sei $g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ eine Gerade. Skizzieren Sie E und g. und n.

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen g und E.

b)



a) 2 Mgl:

- $\tilde{n} = v \times w = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-0\\0-1\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

  $\tilde{n} \perp v, \; \tilde{n} \perp w.$

  $n = \frac{1}{\|\tilde{n}\|}\tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}}$

- $n \perp v, \; n \perp w, \; \|n\| = 1$

  $n = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$: $\underset{(I)}{n \cdot v = 0}, \; \underset{(II)}{n \cdot w = 0}, \; \underset{(III)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1}$

$$\text{(I)} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = x + 2y + 0 \cdot z \overset{!}{=} 0$$

$$\text{(II)} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = x + y + z \overset{!}{=} 0$$

LGS mit Gauß ... mit (III)

bekomme ich 2 Lsgen

c) Wir berechnen β zwischen g und n:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| \cdot \underbrace{\|n\|}_{=1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}(2+0-1)}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow \overset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\arccos}} \frac{1}{\sqrt{12}} \approx \underline{73,2^\circ}$$

$\alpha = 90° - \beta \approx \underline{16{,}8°}$

$\boxed{\text{Ü}}$ Gegeben das LGS mit erweiterter Koeff.matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5+a & b \end{array}\right) \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A}$

a) Für welche a ist das LGS eindeutig lösbar?

b) Für welche a, b besitzt das LGS keine Lösung?

c) —"— —— ∞-viele —"— en?

d) Berechnen Sie det(A)

e) Für welche a ist A invertierbar?

f) Invertieren Sie A für a = 1.

Mit dem Gauß-Algorithmus ....

hier wurde nur ⊛ gemacht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 2+b \end{array}\right)$$

a) $a \neq 0$, dann gibt es genau 1 Lsg! (keine freien Parameter!)

b) $a = 0$, $2+b \neq 0$ $\left(\begin{array}{c|c} \ast & \\ 0 & 3 \end{array}\right)$ $0 = 3$ ↯ $\iff \underline{a = 0,\ b \neq -2}$

c) $a = 0$, $2+b = 0$ $\left(\begin{array}{c|c} & \\ 0 & 0 \end{array}\right)$

1 freier Par. → ∞-viele Lsgen!

d) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5+a \end{pmatrix} \overset{}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot a$$

↑ Addiere Vielfache einer Zeile auf eine andere! s.o. ⊛

$$= \underline{\underline{6a}}.$$

⚠ Zeilen vertauschen gibt negatives Vorzeichen → $-\det$

2·Zeile gibt $\frac{1}{2}\cdot\det$ ...

e) A inv. $\left(\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 4\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\Leftrightarrow \underbrace{\det(A)}_{6a} \neq 0 \\ &\left(\Leftrightarrow \operatorname{defekt}(A) = 0\right. \\ &\left.\Leftrightarrow \text{LGS } Ax=b \text{ eind. lösbar}\right) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow a \neq 0$$

f)
$$(A|E_4) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ \ldots$$

↑ $a=1$!

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_4} & \underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ -42 & 24 & 0 & -6 \\ -14 & 6 & 2 & -2 \\ 30 & -18 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Ü Bestimmen Sie EW/EV von folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{III-I}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 0 & -\lambda+1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= (-\lambda)\cdot(-2-\lambda)(-\lambda+1) - \underbrace{(-1+\lambda)(-2-\lambda)(-1)}_{(1-\lambda)} = (-2-\lambda)(1-\lambda)\left[-\lambda-1\right]$$

$\lambda_1 = -2 \, , \quad \lambda_2 = 1 \, , \quad \lambda_3 = -1 .$

EV:

$\lambda_1 = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{I} \\ 2\text{III}+\text{I} \\ \text{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} : 2x_1 - \mu - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \mu \\ : x_2 = -\mu \\ \end{array}$$

$\uparrow$ $x_3 = \mu$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} . \quad = v_1$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{-3}\text{II} \\ \text{III}-\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -x_1 - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = -\mu \\ x_2 = 0 \\ \end{array}$$

$\uparrow$ $x_3 = \mu$

$$x = \mu \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = v_2$$

$\lambda_3 = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ \text{III}+\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow$ $x_3 = \mu$

II: $x_2 = 0$

I: $x_1 - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \mu$

$$x = \mu \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = v_3$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - (1-\lambda)\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(1-\lambda)(-1-\lambda)}_{(-\lambda)^2-1^2} + \underbrace{\sqrt{3}^2}_{3}\right] = (1-\lambda)\underbrace{(+\lambda^2+2)}_{}$$

zerfällt nicht in Linfaktoren, da keine NST!

EV zu $\lambda = 1$: ... $x = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$