11. Übung – Lösung

11.1

(a) Wahr: Polynom, Spline, ...

(b) Falsch: Das Interpolationspolynom vom Grad n für $n+1$ Stützpunkte ist eindeutig

(c) Wahr: Durch $n+1$ Stützpunkte können Polynome vom Grad n und höher gelegt werden.

(d) Falsch: Es können verschiedene Basisfunktionen für die Darstellung verwendet werden:

$1, x, x^2, \dots$

$1, (x-x_1), (x-x_1)(x-x_2), \dots$

Lagrangefkt.en $L_k(x)$

(e) Falsch: Beispiel Runge-Funktion; je höher der Grad desto stärker werden die Oszillationen am Rand.

(f) Wahr: Wenn die Stützpunkte am Rand dichter werden, verhindert die das Problem der Oszillationen.

11.2

$$(x_0, y_0) = (-1, 3), \quad (x_1, y_1) = (0, 1), \quad (x_2, y_2) = (2, 3)$$

(a) Klassischer Ansatz: Vandermonde-Matrix

$$\begin{array}{c} x_i^0 \quad x_i^1 \quad x_i^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} y_i \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(II): $b_0 = 1$

$(I)-(II)$: $b_2 = 2 + b_1$

in (III): $1 + 2b_1 + 4(2 + b_1) = 3 \iff 6b_1 = -6 \iff b_1 = -1$

$\implies b_2 = 1$

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 1 - x + x^2 \overset{\text{Horner}}{=} 1 + x \cdot (-1 + x)$$

(b) Ansatz nach Newton:

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(I) $c_0 = 3$

(II) $c_1 = 1 - 3 = -2$

(III) $6c_2 = 3 - 3 + 6 \iff c_2 = 1$

Alternativ: Dividierte Differenzen

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & & \\ \hline -1 & 3 = c_0 & & \\ & & -2 = c_1 & \\ 0 & 1 & & 1 = c_2 \\ & & 1 & \\ 2 & 3 & & \end{array}$$

$$p_2(x) = 3 - 2(x+1) + (x+1)x \overset{\text{Horner}}{=} 3 + (x+1)\cdot(-2+x)$$

(c) $p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) =$

$= 3 L_0(x) + L_1(x) + 3 L_2(x)$

mit

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{(-1)\cdot(-1-2)} = \frac{1}{3}x(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{1\cdot(-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)x}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}x(x+1)$$

Bemerkung: Falls die Stützstellen x_i gleich bleiben und sich nur ein oder mehrere y-Werte ändern, dann ist dieser Ansatz besonders gut geeignet, da die Lagrange-funktionen gleich bleiben.

$$p_2(x) = x(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x+1)$$

11.3

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
y_i	5	3	5	21

$$\begin{array}{cc|ccc} x & y & & & \\ \hline -1 & 5 & & & \\ & & \frac{3-5}{0-(-1)} = -2 & & \\ 0 & 3 & & \frac{2-(-2)}{1-(-1)} = 2 & \\ & & \frac{5-3}{1-0} = 2 & & \frac{2-2}{3-(-1)} = 0 \\ 1 & 5 & & \frac{8-2}{3-0} = 2 & \\ & & \frac{21-5}{3-1} = 8 & & \\ 3 & 21 & & & \end{array}$$

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1)$$

$$= 5 - 2(x+1) + 2(x+1)x = 2x^2 + 3$$

11.4

a)

x	y			
-1	4			
		-6		
0	-2		$\frac{5}{2}$	
		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$
2	1		0	
		$\frac{3}{2}$		
-2	-5			

$$p_3(x) = 4 - 6(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)x + \frac{5}{2}(x+1)x(x-2)$$

b) Verwendung eines kubischen Splines macht keinen Unterschied zu einem Polynom 3. Grades.

c) Hoher Polynomgrad bei Verwendung äquidistanter Stützstellen ungeeignet – insbesondere für Glockenkurve – wegen Oszillationen.

<u>Besser:</u>
- Polynominterpolation mit Chebyshev-Knoten
- Kubischer Spline