PROF. DR. M. HELBIG
MATHEMATIK – ÜBUNG

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

# FUNKTIONEN

**Gleichungen mit Exponentialfunktionen.** Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

1. $e^{3x+2} = 2$
2. $5^x = 12$
3. $1 + e^{-3x} = 2.4$
4. $\frac{3}{1+e^{-x}} = 1$
5. $e^{-x} + 2 = e^x$

**Lösung.**

1. $e^{3x+2} = 2 \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} \underbrace{\ln(e}_{id}{}^{3x+2}) = \ln(2) \Rightarrow 3x+2 = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{1}{3}(\ln(2) - 2)$

2. $5^x = 12 \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} \ln(5^x) = \ln(12) \Rightarrow x \ln(5) = \ln(12) \Rightarrow x = \frac{\ln(12)}{\ln(5)}$.

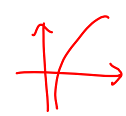
3. $1 + e^{-3x} = 2,4 \overset{-1}{\Longrightarrow} e^{-3x} = 1,4 \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} -3x = \ln(1,4) \Rightarrow x = \frac{\ln(1,4)}{-3}$

4. $\frac{3}{1+e^{-x}} = 1 \Rightarrow 3 = 1 + e^{-x} \Rightarrow 2 = e^{-x} \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} \ln 2 = -x \Rightarrow x = -\ln 2 = \ln(\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{2^{-1}})$

5. Substitution: $u = e^x$: $\underbrace{u^{-1}}_{\frac{1}{u}} + 2 = u \overset{\cdot u}{\Longrightarrow} 1 + 2u = u^2 \Rightarrow u^2 - 2u - 1 = 0$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Rücksubst: $e^x = u = 1 \pm \sqrt{2} \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} x = \ln(1 \cancel{\pm} \underbrace{\sqrt{2}}_{1,41\ldots})$

ln auf $\mathbb{R}^+$ definiert 

**Eigener Lösungsversuch.**

**Logarithmus.** Berechnen Sie:

1. $\log(1000)$
2. $\mathrm{lb}(8)$
3. $\mathrm{lb}(8 \cdot 4)$
4. $\log_5(1000)$

**Lösung.**

<u>Wdh</u>: $\log = \log_{10}$ , $\mathrm{lb} = \mathrm{ld} = \log_2$ , $\ln = \log_e$

1. $\log(1000) = 3$ , da $10^3 = 1000$

2. $\mathrm{lb}(8) = 3$ , da $2^3 = 8$

3. $\mathrm{lb}(8 \cdot 4) = \underbrace{\mathrm{lb}(8)}_{3} + \underbrace{\mathrm{lb}(4)}_{2} = 5$

$2^3 = 8 \qquad 2^2 = 4$

4. $\log_5(1000) \overset{TR}{=} 4{,}292 \qquad 5^{4,\dots} = 1000$

<u>ODER</u>: $\log_5(1000) \overset{\text{Basiswechsel}}{=} \dfrac{\ln(1000)}{\ln(5)}$

**Eigener Lösungsversuch.**

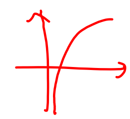
**Logarithmische Gleichungen.** Welche Lösungen besitzen die folgenden logarithmischen Gleichungen?

1. $\ln(\sqrt{x}) + 1.5\ln(x) = \ln(2x)$,
2. $\ln^2(x) - \ln(x) = 2$.

**Lösung.**

1. $$\underbrace{\ln(x^{\frac{1}{2}}) + \ln(x^{1,5})}_{\ln(\underbrace{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}_{x^2})} = \ln(2x) \xRightarrow{e^{\sqcup}} x^2 = 2x \Rightarrow \cancel{x=0} \vee x = 2$$

$\notin \mathbb{R}^+$ Def.bereich von ln



ODER

$$\underbrace{\underbrace{\ln(x^{\frac{1}{2}})}_{\frac{1}{2}\ln(x)} + \frac{3}{2}\ln(x)}_{2\ln x} = \ln(2x) \xRightarrow{e^{\sqcup}} \underbrace{e^{2\ln x}}_{(\underbrace{e^{\ln x}}_{x})^2} = 2x$$

2. Subst: $u = \ln(x)$: $u^2 - u = 2 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Rücksubst: $\ln(x) = u = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \xRightarrow{e^{\sqcup}} x = \begin{cases} e^2 \\ e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$ (beides in $\mathbb{R}^+$ Def.bereich von ln)

**Eigener Lösungsversuch.**

**Logistische Wachstumsfunktion.** Der Prozentsatz aller bayerischen Haushalte, die eine technische Neuerung nach $t$ Jahren (z.B. Farbfernseher, Internetanschluss, Handy, Tablet etc.) besitzen, kann wie folgt modelliert werden:

$$p(t) = \frac{1}{1 + 9e^{-0.3(t-2014)}}.$$

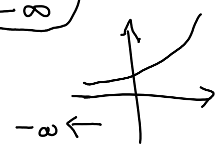
Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $t \geq 2014$. Wann besitzen danach 80% aller Haushalte diese Neuerung?

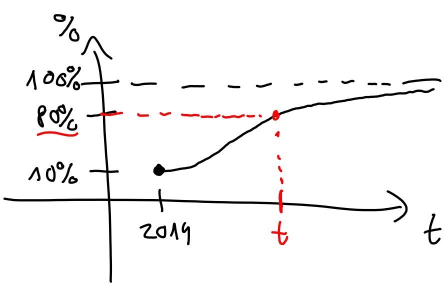
**Lösung.**

$t = 2014$: $\quad p(2014) = \dfrac{1}{1 + 9 \cdot \underbrace{e^{-0,3 \cdot 0}}_{1}} = \dfrac{1}{10} = 0,1 = 10\%$

$t \to \infty$:

$$p(t) = \frac{1}{1 + \underbrace{9\, e^{\overbrace{-0,3\,(t-2014)}^{\to -\infty}}}_{\to 0}} \longrightarrow \frac{1}{1 + 9 \cdot 0} = \frac{1}{1} = 1 = 100\%$$




Ausatz: $p(t) = 80\% \Rightarrow \dfrac{1}{1 + 9e^{-0,3\,(t-2014)}} = 0,8$

$\Rightarrow 1 = \left(1 + 9\, e^{-0,3(t-2014)}\right) \cdot 0,8$

$\Rightarrow 1 = 0,8 + 7,2\, e^{-0,3\,(t-2014)} \Rightarrow \overbrace{\dfrac{0,2}{7,2}}^{\frac{1}{36}} = e^{-0,3(t-2014)}$

$\overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} \ln\left(\dfrac{1}{36}\right) = -0,3\,(t-2014) \Rightarrow t = \dfrac{-\ln(36)}{-0,3} + 2014$

$\approx \underline{2026}$

~~Eigener Lösungsversuch~~.

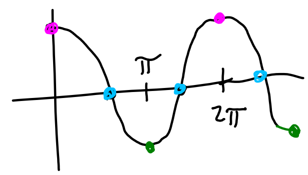
**Sinus und Kosinus.** Bestimmen Sie für die folgende Funktion die Periode, Amplitude, Nullstellen, Maximal- und Minimalstellen:

$$f(x) = 5 \cdot \cos(x + 4,2)$$

**Lösung.**

Periode: $2\pi$

Amplitude: $5$




Rechnerisch:

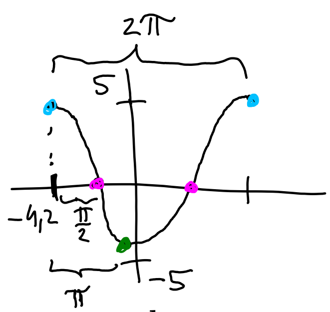
NST: $x + 4,2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - 4,2 + k \cdot \pi$

Max: $x + 4,2 = 0 + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -4,2 + k \cdot 2\pi$

Min: $x + 4,2 = \pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \pi - 4,2 + k \cdot 2\pi$

ODER

Graphisch:




Max: $-4,2 + k \cdot 2\pi$ Periode

NST: $-4,2 + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ halbe Periode

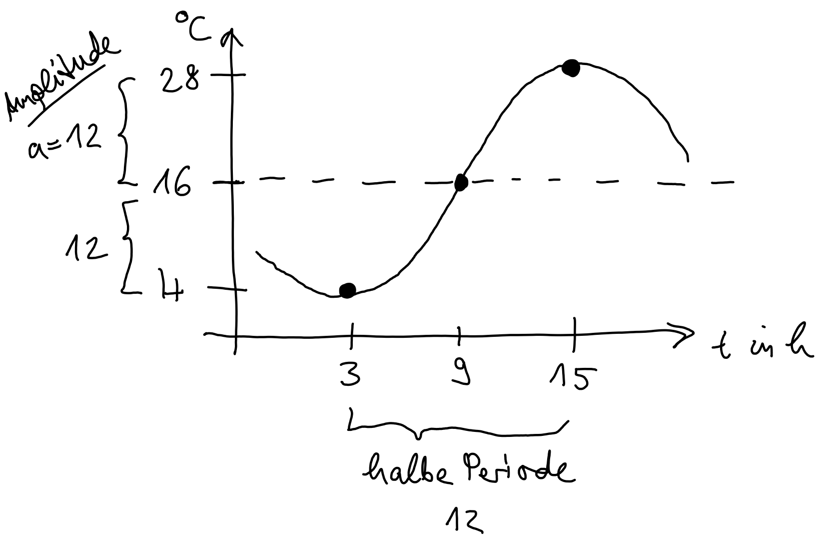
Min: $-4,2 + \pi + k \cdot 2\pi$

**Eigener Lösungsversuch.**

**Simulation eines periodischen Temperaturverlaufs.** In einer Simulation soll der Verlauf der Lufttemperatur $T$ als Funktion der Zeit $t$ angegeben werden, wobei die Periodendauer einen Tag beträgt. Es wird ein möglichst einfacher periodischer Verlauf der Form

$$T(t) = T_0 + a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

gewählt ($t$ in Stunden $h$). Wenn der minimale Wert $T_{min} = 4°C$ bei $t = 3h$ und der maximale Wert $T_{max} = 28°C$ bei $t = 15h$ angenommen werden soll, wie müssen dann die Konstanten $a, \omega, \phi$ und $T_0$ gewählt werden?




$T_0 = 16$ (da um 16 nach oben verschoben)

Periode $24 = p = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

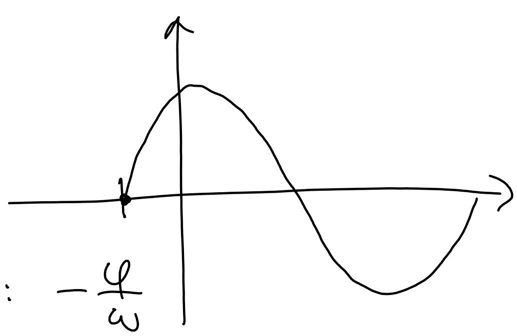
Verschiebung nach rechts um 9:

$$9 = -\frac{\phi}{\omega} \Rightarrow \phi = -9\underbrace{\omega}_{\frac{\pi}{12}} = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = 16 + 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

Allgemein Verschiebung $\Leftrightarrow$ beim sin/cos: $\sin(\omega t + \varphi)$:

$$\omega t + \varphi = 0 \Leftrightarrow \underline{t = -\frac{\varphi}{\omega}}$$



Start bei: $-\frac{\varphi}{\omega}$