Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Komplexe Zahlen - Teil 2

Fragen?

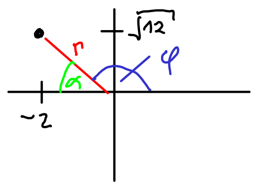
$re^{i\varphi}$

*** Polardarstellung.** Geben Sie die Polardarstellung von folgenden komplexen Zahlen an.

a) $z_1 = -2 + \sqrt{12}i$ b) $z_2 = 3 - i$ c) $z_1 \cdot z_2$

Lösung.

a)

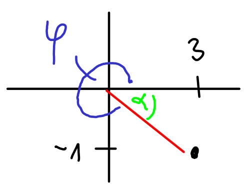


$r = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{12}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{\sqrt{12}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \left(\hat{=} \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \underline{z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

b)



$r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\tan\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18{,}43...^\circ \Rightarrow \varphi = 360^\circ - 18{,}43...^\circ = 341{,}565...^\circ \hat{=} 1{,}8975...\pi$

$\Rightarrow \underline{z_2 = \sqrt{10}\, e^{i\, 1{,}8975...\pi}}$

c) $\underline{z_1 \cdot z_2} = \left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{10}\,e^{i\,1{,}8..\pi}\right) = \underbrace{4\cdot\sqrt{10}}_{\text{Produkt der Längen}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + 1{,}8975...\pi\right)} = 4\sqrt{10}\,\underbrace{e^{i\,2{,}5692...\pi}}_{\underbrace{e^{i2\pi}}_{1}\cdot\, e^{i\,0{,}5692...\pi}}$

Summe der Winkel

$= \underline{4\sqrt{10}\, e^{i\,0{,}5692...\pi}}$

Bem: Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist eine <u>Drehstreckung</u>!

Eigener Lösungsversuch.

Euler'sche Formel und Taylorreihen. Die Taylorreihen von e^x, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ sind:

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}}$$

Leiten Sie damit die Euler'sche Formel

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

her, indem Sie ix in die Taylorreihe von e^x einsetzen und die Summanden nach Real- und Imaginärteil sortieren.

Lösung.

$$e^{ix} \overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \frac{(ix)^0}{0!} + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \mp \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots\right)}_{\overset{\text{Taylor}}{=}\ \cos x} + i \underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right)}_{\overset{\text{Taylor}}{=}\ \sin x}$$

Eigener Lösungsversuch.

*** Anwendungen der Euler'schen Formel.**

a) Was bedeutet e^{ix} geometrisch? Skizzieren Sie.

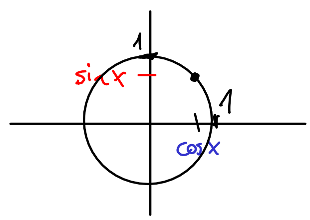
b) Skizzieren Sie $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $e^{i2\pi}$.

c) Leiten Sie die Additionstheoreme von sin und cos her, indem Sie für $e^{i(x+y)}$ die Euler'sche Formel benutzen.

Lösung.

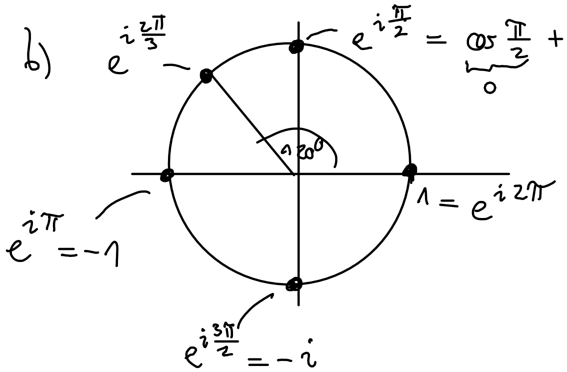
a) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Komplexe Zahl auf dem Einheitskreis!



Jede weitere komplexe Zahl kann ich durch re^{ix} darstellen $\rightarrow$ Polarform!

b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = i$



c) $$e^{i(x+y)} \overset{\text{Euler}}{=} \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

$$\parallel$$

$$e^{ix}\cdot e^{iy} \underset{\text{Euler}}{=} (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$$

Eigener Lösungsversuch.

* **Einheitswurzeln geometrisch.** Welche komplexen Zahlen $z = re^{i\varphi}$ erfüllen folgende Gleichung :

$$z^3 = 1$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und lösen es geometrisch, indem Sie $z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = 1$ deuten.

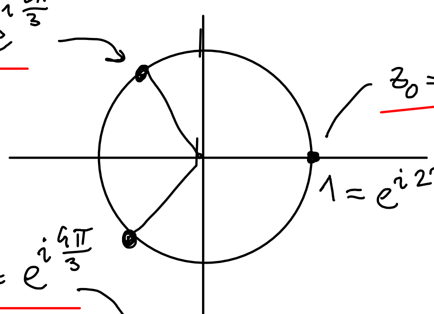
Lösung.

$$z^3 = 1 \iff r^3 e^{i3\varphi} = 1 = 1 \cdot e^{i2\pi}$$

d.h. $r^3 = 1$, $3\varphi = 2\pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

d.h. $r = 1$, $\varphi = \frac{2\pi}{3} \cdot k$

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$



$z_0 = 1$ $\quad (z_0^3 = 1^3 = 1$ ✓$)$

$1 = e^{i2\pi}$

$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$z_2^3 = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^3 = e^{i4\pi} = \left(\underbrace{e^{i2\pi}}_{1}\right)^2 = 1 \text{ ✓}$$

$$z_1^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1 \text{ ✓}$$

Drei Lösungen! Mehr Lösungen kann es nicht geben, da $z^3 - 1$ (Polynom!) maximal 3 NST hat!

Eigener Lösungsversuch.

Formel zur Berechnung der Einheitswurzeln. Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heißen n-*te Einheitswurzeln* und lassen sich berechnen mit

$$z_0 = e^{i\,0\,\frac{2\pi}{n}} = 1$$

$$z_1 = e^{i\,1\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = e^{i\,(n-1)\,\frac{2\pi}{n}}$$

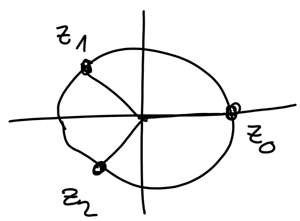
Einheitswurzeln. Berechnen Sie die dritten Einheitswurzeln, d.h. $z^3 = 1$. $z = „\sqrt[3]{1}"$

Lösung.

$$z_0 = e^{i\,0\,\frac{2\pi}{3}} = 1$$

$$z_1 = e^{i\,1\,\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = e^{i\,2\,\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$



Eigener Lösungsversuch.

Wurzeln.

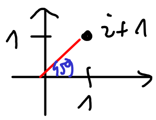
a) Berechnen Sie die dritten Wurzeln von $i+1$, d.h. Lösungen von $\underline{z^3 = i+1}$.

b) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von $\sqrt{3} - i$.

c) Berechnen Sie "$\sqrt{i}$".

Lösung.

a) $z^3 = i+1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$



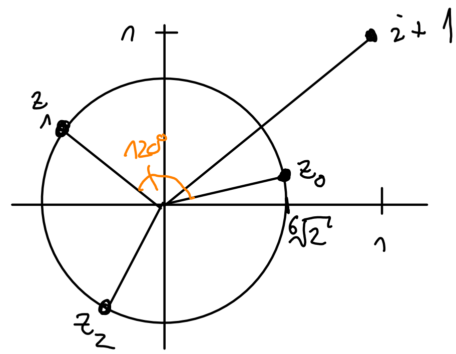
$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{\pi/4}{3} + 0\,\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\; e^{i\frac{\pi}{12}}$ — 15°

$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{\pi/4}{3} + 1\,\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\; e^{i\frac{9\pi}{12}}$ — 15°+120°

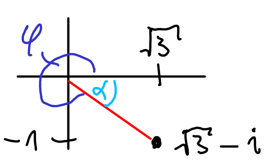
$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{\pi/4}{3} + 2\,\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}\; e^{i\frac{17\pi}{12}}$ — 15°+240°

120°

Einheitswurzeln!



b) $z^4 = \sqrt{3} - i = 2\, e^{i\frac{11\pi}{6}}$



$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

330°

$\alpha = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

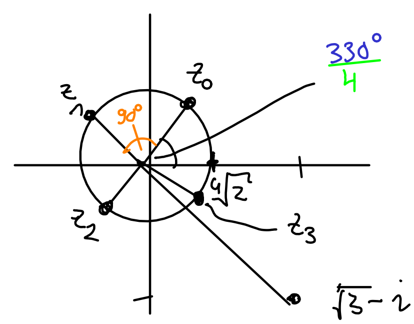
$z_0 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\left(\frac{11\pi/6}{4} + 0\,\frac{2\pi}{4}\right)}$

$z_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\left(\frac{11\pi/6}{4} + 1\,\frac{2\pi}{4}\right)}$

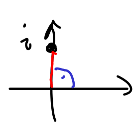
$z_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\left(\frac{11\pi/6}{4} + 2\,\frac{2\pi}{4}\right)}$

$z_3 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\left(\frac{11\pi/6}{4} + 3\,\frac{2\pi}{4}\right)}$

$\underline{\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90°}$



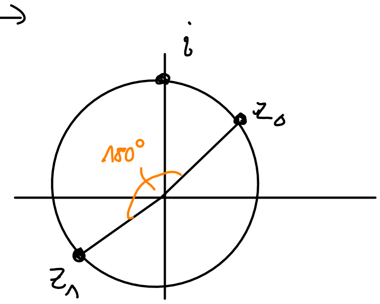
c) „$\sqrt{i}$": $z^2 = i = 1\, e^{i\frac{\pi}{2}}$



$z_0 = \sqrt[2]{1}\; e^{i\left(\frac{\pi/2}{2} + 0\,\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\; e^{i\left(\frac{\pi/2}{2} + 1\,\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$\underline{\pi \hat{=} 180°}$



Eigener Lösungsversuch.