Teilbarkeit und Primzahlen

Fragen?

Teilermenge $T(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid a\}$

$|T(a)| \geq 2$ für $a > 1$

Wegen $1 \mid a$ $(1 \cdot a = a)$ gilt $1 \in T(a)$

Wegen $a \mid a$ $(a \cdot 1 = a)$ gilt $a \in T(a)$

* **Teilbarkeit.** Wahr oder falsch? Warum?

✓ 1. $3 \mid 12$ $\exists q \in \mathbb{Z}: 3 \cdot q = 12$ wahr, denn es gibt $q = 4 : 3 \cdot 4 = 12$

✗ 2. $2 \mid 7$ $\forall q \in \mathbb{Z}: 2 \cdot q \neq 7$ Annahme $2 \cdot q = 7$ $q = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$ ↯

✓ 3. $1 \mid 8$ $1 \cdot 8 = 8$

✗ 4. $0 \mid 5$ $0 \cdot 5 \neq 5$

✓ 5. $8 \mid 0$ $8 \cdot 0 = 0$

✗ 6. $\forall a \in \mathbb{N} : 0 \mid a$ gegenbsp. 4

✓ 7. $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid 0$ $a \cdot 0 = 0$

✓ 8. $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid a$ $a \cdot 1 = a$

Eigener Lösungsversuch.

1. $3 \mid 12$
2. $2 \mid 7$
3. $1 \mid 8$
4. $0 \mid 5$
5. $8 \mid 0$
6. $\forall a \in \mathbb{N} : 0 \mid a$
7. $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid 0$
8. $\forall a \in \mathbb{N} : a \mid a$

Gerade und ungerade Zahlen.

$$2\mathbb{Z} := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$
$$2\mathbb{Z}+1 := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$$

Zeigen Sie, dass eine gerade Zahl durch 2 teilbar ist und ungerade Zahlen *nicht* durch 2 teilbar sind.

Lösung. Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine gerade Zahl d.h. $a = 2n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$; das heißt $2 \mid a$

Def. der Teilbarkeit: $t \mid a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : t \cdot q = a$

Sei $a \in 2\mathbb{Z}+1$ eine ungerade Zahl, d.h. $a = 2n+1$ für $n \in \mathbb{Z}$

$2 \mid a$, d.h. $\exists q \in \mathbb{Z} : 2 \cdot q = a \Rightarrow 2q - 2n = 1$ d.h. $2 \mid 1$ ↯ $(2 > 1)$

Eigener Lösungsversuch.

Exkurs zur Unendlichkeit: Hilberts Hotel

Stellen Sie sich ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor. Die Zimmer-Nummern seien durch $\mathbb{N}$ gegeben:

Zimmer-Nummer:	1	2	3	4	5	...

Auf einmal kommt ein Bus mit unendlich vielen Gästen, aber schön durch nummeriert:

Gast-Nummer:	1	2	3	4	5	...

Wie kann man die Gäste verteilen? Na klar, Gast-Nr. n kommt auf Zimmer ______. Dies kann man schön mit einer Zuordnung/Funktion schreiben als

Gast-Nr. Zimmer Nr.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \underline{\ n\ }.$$

Soweit so gut. Jetzt kommt aber noch ein Bus mit unendlich vielen Gästen. Was nun?

Bus 1, Gast-Nr: 1 2 3 ..., Bus 2, Gast-Nr: 1 2 3 ...

ungerade Zimmer Nr.

Zimmer-Nummer: 1 2 3 4 5 6 ...

gerade Zimmer Nr.

Dies kann man schön mit einer Zuordnung/Funktion schreiben als

Bus Nr Gast Nr. Zimmer Nr.

$$f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n_{\text{Bus}}, n_{\text{Gast}}) \mapsto \begin{cases} 2 \cdot n_{\text{Gast}} - 1 & \text{falls } n_{\text{Bus}} = 1 \\ 2 \cdot n_{\text{Gast}} & \text{falls } n_{\text{Buss}} = 2 \end{cases}$$

z.B $(\overset{\text{Bus}}{1}, 5) \mapsto 2 \cdot 5 - 1 = 9 \leftarrow$ Zimmer

Auch gemeistert! Aber oje, jetzt kommen unendlich viele Busse mit unendlich vielen Gästen!!! Was nun?

	1	2	6	7	
Bus 1, Gast-Nr:	1	2	3	4	...
Bus 2, Gast-Nr:	1	2	3	4	...
Bus 3, Gast-Nr:	1	2	3	4	...
Bus 4, Gast-Nr:	1	2	3	4	...

$\vdots$

Teilermenge und Primfaktorzerlegung. Betrachten Sie folgende Zahlen:

$$18, \quad 24, \quad 256, \quad 333, \quad 341, \quad 10^{100}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Teilermenge und Primfaktorzerlegung.

Lösung. $T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ $\quad 2 \cdot 3^2$

$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ $\quad 2^3 \cdot 3$

$T(256) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256\}$ $\quad 2^7$

$T(333) =$

Eigener Lösungsversuch.

* $\sqrt{2}$ **ist irrational.** Zeigen Sie: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Hinweis: Nehmen Sie $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und a, b haben keinen gemeinsamen Primfaktor (vollständig gekürzt!), und führen Sie dies zum Widerspruch!

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

Ein einfacher Primzahltest.

Frage: Ist 76.457 eine Primzahl?

Naiver Test: Teste Teilbarkeit $d \mid 76.457$ für alle $2 \leq d \leq 76.457$.

Bessere Vorgehensweise: Teste nur mit Primzahl $d \leq \sqrt{76457} = 276,5\ldots$, also folgender Algorithmus

- Teste $d = 2 \mid 76.457$. Ja? keine Primzahl, Nein? iteriere mit nächster Primzahl $d = 3 \leq 276$
- Teste $d = 3 \mid 76.457$. Ja? keine Primzahl, Nein? iteriere mit nächster Primzahl $d = 5 \leq 276$
- Teste $d = 5 \mid 76.457$. Ja? keine Primzahl, Nein? iteriere mit nächster Primzahl $d = 7 \leq 276$
- ...

Falls wir bei $d > 276$ angekommen sind, haben wir eine Primzahl!

Zur Implementierung brauchen wir aber zwei Dinge:

- Teilbarkeits-Test $d|n \iff$ ________________ (in C-Code)
- Primzahlliste bis 276 $\to$ Wikipedia oder später mit Sieb des Erathostenes

Primzahltest in C. Schreiben Sie eine Funktion in C, die prüft ob ein übergebenes $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.

Lösung. $\to$ C-Datei