Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Exponentialfunktionen, Logarithmen

Fragen?

* **Halbwertszeit.** Ein radioaktiver Stoff (z. B. Uran 238) zerfällt exponentiell:

Anzahl Teilchen zum Zeitpkt. t : $\boxed{n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}}$

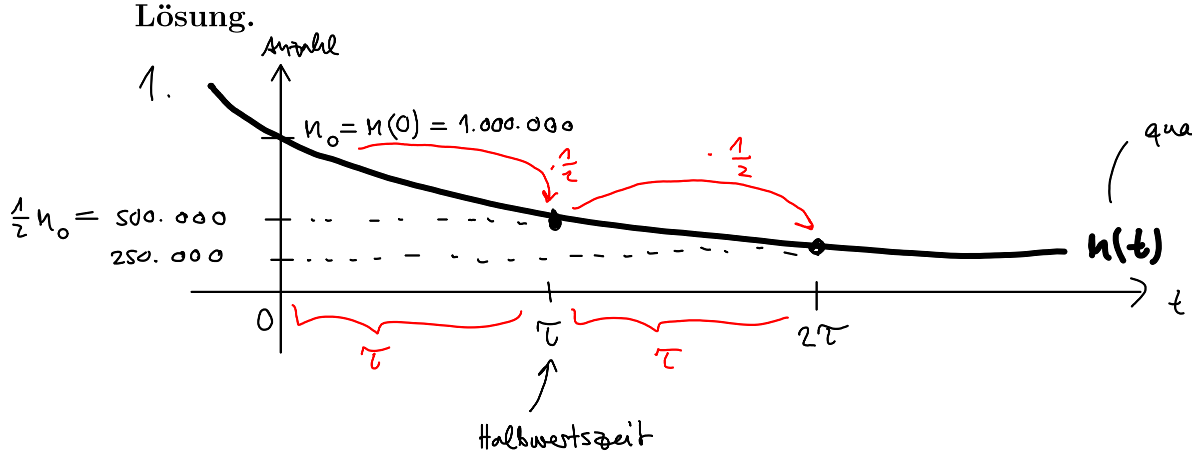
λ: Zerfallsrate (abhängig vom Stoff) / Streckung $\leftrightarrow$

n_0: Anz. Teilchen zum Zeitpkt. $t=0$ / Streckung $\updownarrow$

1. Skizzieren Sie den Graphen von $n(t)$ und deuten Sie n_0 und die sog. Halbwertszeit τ, d.h. die Zeit bis sich die Anzahl der Teilchen halbiert
2. Berechnen Sie die Halbwertszeit τ.
3. Radon $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ hat die Zerfallsrate $\lambda = 2,0974 \cdot 10^{-6}\frac{1}{s}$. Was ist die Halbwertszeit von $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$?

Lösung.

1.



qualitativ e^{-t}, also e^{t} an y-Achse gespiegelt!

2. <u>Ansatz</u>: $\underbrace{n(\tau)}_{n_0 e^{-\lambda\tau}} = \frac{1}{2} n_0 \overset{:n_0 \neq 0}{\Longrightarrow} e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \overset{\ln(\dots)}{\Longrightarrow} \underbrace{\underbrace{\ln(e}_{\text{id, da ln Umkehrfkt. von } e^{\omega}}{}^{-\lambda\tau})}_{-\lambda\tau} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\overset{:(-\lambda)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \underline{\tau} = \frac{\ln(2^{-1})}{-\lambda} = \frac{(-1)\cdot\ln(2)}{-\lambda} = \underline{\frac{\ln(2)}{\lambda}} .$$

3. $$\underline{\tau} \overset{2.}{=} \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{2,0974\cdot 10^{-6}\frac{1}{s}} = 330.479,25\ s \approx \underline{3,82\ d}$$

Eigener Lösungsversuch.

Moore's Law. Alle 2 Jahre verdoppeln sich die Transistoren in einer CPU (siehe dazu die Homepage):

$$n(t) = n_0 \cdot e^{\lambda(t-1971)}$$

mit $n_0 = 2300$. Bestimmen Sie λ so, dass sich die Transistoren alle zwei Jahre verdoppeln! Berechnen Sie dann $n(2011)$ und die Anzahl der Transistoren heute.

Lösung.

Ansatz: $\underbrace{n(1973)}_{2300\cdot e^{\lambda\cdot(1973-1971)}} = 2\cdot \underbrace{n(1971)}_{2300} \overset{:2300}{\Longrightarrow} e^{\lambda\cdot 2} = 2 \overset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} \lambda\cdot 2 = \ln(2)$

$\Rightarrow \underline{\lambda = \frac{\ln(2)}{2}} \approx 0,3466$

$n(2011) = 2300\cdot e^{\lambda(2011-1971)} = 2300\cdot e^{\frac{\ln 2}{2}\cdot 40} = 2.411.729.800 \approx 2,4$ Mrd.

$\cdot 2$: $n(2013)$

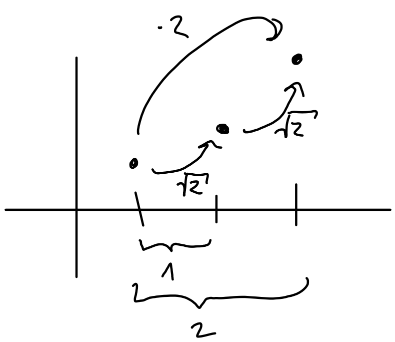
$\cdot 2$: $n(2015)$

$\cdot 2$: $n(2017)$

$\cdot 2$: $n(2019) = \underbrace{2^4}_{16}\cdot 2.411.729.800 = 38.587.596.800$

$\cdot\sqrt{2}$: $n(2020)$

Eigener Lösungsversuch.



Schachbrettproblem. Ein Schachbrett hat 64 Felder. Auf Feld 1 wird ein Reiskorn gelegt und auf das nächste Feld wird jeweils die Anzahl verdoppelt (siehe dazu das Video auf der Homepage). Berechnen Sie die Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett.

Lösung.

	<u>Reiskörner</u>
Feld 1:	$1 = 2^0$
Feld 2:	$2 = 2^1$
Feld 3:	$4 = 2^2$
Feld 4:	$8 = 2^3$
$\vdots$	
Feld 64:	2^{63}

geom. Summenformel $\boxed{\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

Insgesamt: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{2^{64}-1}{2-1} = \underline{2^{64}-1} \approx 18$ Trillionen!

Eigener Lösungsversuch.

Mit einem Blatt Papier zum Mond. Wie oft muss man ein Blatt Papier in der Mitte falten, damit es eine Dicke von hier bis zum Mond erreicht?
Hinweis: Eine Packung Druckerpapier mit 500 Blatt sind 5 cm dick und die Entfernung der Erde zum Mond ist ca. 384.400 km (ca. 1 Lichtsekunde).

Lösung.

Dicke 1 Blatt Papier: $\frac{\overset{\frac{1}{100}m}{5\,cm}}{500} = \frac{\frac{5}{100}}{500}\,m = \frac{1}{10000}\,m = \underline{10^{-4}\,m}$ (0,1 mm)

	Dicke
Faltung 0:	$10^{-4}\,m$
Faltung 1:	$2 \cdot 10^{-4}\,m$
Faltung 2:	$2^2\,10^{-4}\,m$
⋮	

Ansatz!

Faltung n: $2^n \cdot 10^{-4}\,m \overset{!}{=} 384.400.000\,m \implies 2^n = 384.400.000 \cdot 10^4$

$\overset{\ln(\ldots)}{\implies} \ln(2^n) = \ln(3844 \cdot 10^9)$

$\implies n = \frac{\ln(3844 \cdot 10^9)}{\ln(2)} \approx \underline{41{,}8}$, d.h. muss 42 mal falten!

Hausaufgabe!

Eigener Lösungsversuch.