Komplexe Zahlen

Fragen?

* **Rechnen mit komplexen Zahlen.** Berechnen Sie:

a) $2(3+4i)-(-2-2i)$ c) $(3+4i)\cdot(3-4i)$ e) $\dfrac{2-3i}{3+4i}$

b) $(3+4i)\cdot(-2-2i)$ d) $\dfrac{2-i}{1+2i}$ f) $-\dfrac{2}{1+i}$

Nun skizzieren Sie bitte die Zahlen aus a), c), d) und f). Berechnen Sie außerdem Länge/Betrag der Zahlen und den Winkel zur x-Achse.

Wiederholung. $\boxed{|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \overset{(*)}{=} \sqrt{z\cdot\bar{z}}}$

Lösung.

a) $2(3+4i)-(-2-2i) = 6+8i+2+2i = 8+10i$

b) $(3+4i)\cdot(-2-2i) = -6-6i-8i-8\underbrace{i^2}_{(-1)} = 2-14i$

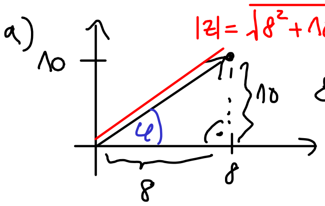
c) $(3+4i)\cdot(3-4i) \overset{3.\text{Bin.F.}}{=} 3^2-(4i)^2 = 9+16 = \underline{25} \in \mathbb{R}$ Allg.: $\boxed{z\cdot\bar{z} \overset{(*)}{=} x^2+y^2}$

d) $\dfrac{2-i}{1+2i} = \dfrac{2-i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i} \overset{(*)}{=} \dfrac{2-4i-i+2i^2}{1^2+2^2} = \dfrac{-5i}{5} = -i.$

e) $\dfrac{2-3i}{3+4i} \overset{(*)}{=} \dfrac{(2-3i)\cdot(3-4i)}{3^2+4^2} = \dfrac{6-8i-9i+12(-1)}{25} = \dfrac{-6-17i}{25} = -\dfrac{6}{25}-\dfrac{17}{25}i$

f) $-\dfrac{2}{1+i} = -\dfrac{2\cdot(1-i)}{\underbrace{1^2+1^2}_{2}} = -1+i$

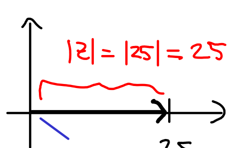
a) $|z| = \sqrt{8^2+10^2} = \sqrt{164} \approx 12,\ldots$



$8+10i \mathrel{\hat{=}} \binom{8}{10}$

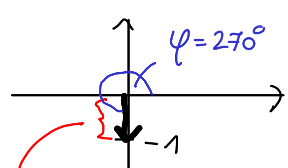
$\tan\varphi = \dfrac{10}{8} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{10}{8}\right) \approx 51{,}3^\circ\ldots$ (arctan(...), DEG)

c) $|z| = |25| = 25$



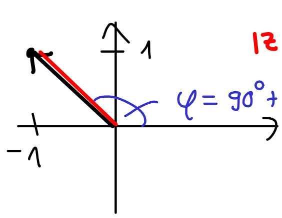
$\varphi = 0^\circ$

d) $\varphi = 270^\circ$



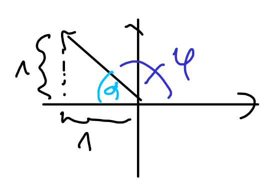
$|z| = 1$ $\left(= \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1\right)$

f) $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$



$\varphi = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

oder



$\tan\alpha = \dfrac{1}{1} \Rightarrow \alpha = \arctan(1) = 45^\circ$

$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - 45^\circ = \underline{135^\circ}.$

Eigener Lösungsversuch.

a) $2(3+4i)-(-2-2i)=$

b) $(3+4i)\cdot(-2-2i)=$

c) $(3+4i)\cdot(3-4i)=$

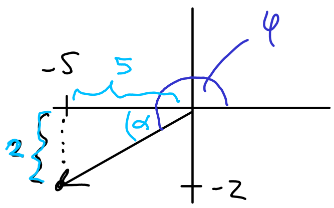
d) $\dfrac{2-i}{1+2i}=$

e) $\dfrac{2-3i}{3+4i}=$

f) $-\dfrac{2}{1+i}=$

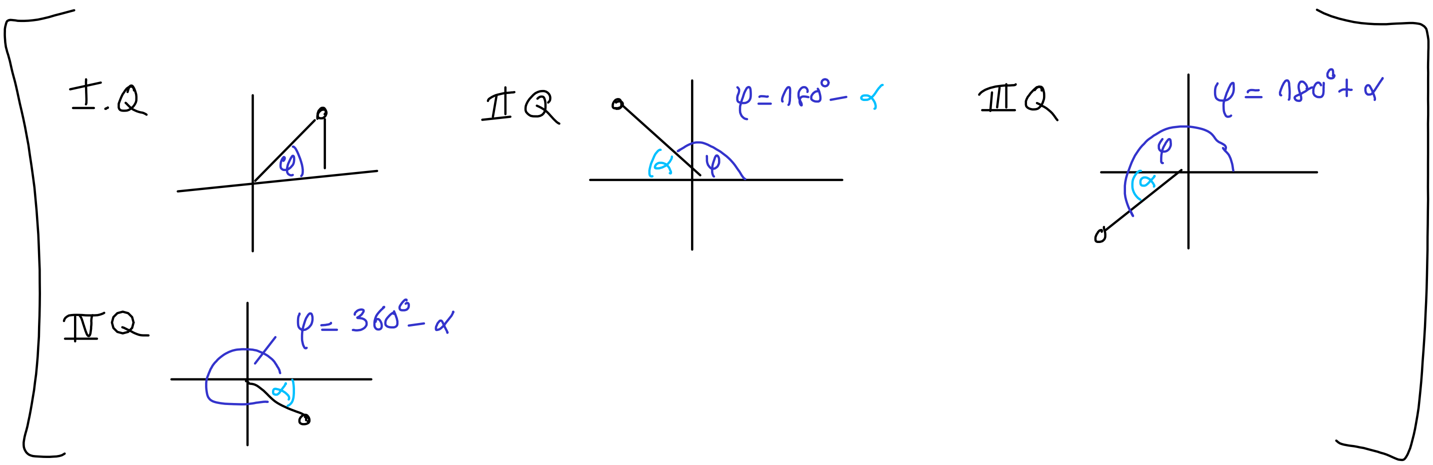
Winkel zur x-Achse. Berechnen Sie den Winkel von $-5-2i$ zur x-Achse.

Lösung.



$$\tan\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{2}{5}\right) \approx 21{,}8\ldots^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ + \alpha \approx 201{,}8\ldots^\circ$$



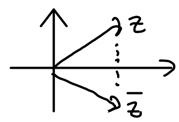
Eigener Lösungsversuch.

Konjugation und Inverse. Berechnen Sie die Konjugation und die Inverse von folgenden komplexen Zahlen:

a) $5+2i$ b) $3-i$ c) i d) 2

Wiederholung. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{x+iy} = x - iy, \\ z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\overline{z} \end{aligned}}$$



Spiegelung an x-Achse

Lösung.

a) $\overline{5+2i} = 5-2i$ $\qquad (5+2i)^{-1} = \frac{1}{5^2+2^2}(5-2i) = \frac{1}{29}(5-2i)$

b) $\overline{3-i} = 3+i$ $\qquad (3-i)^{-1} = \frac{1}{3^2+(-1)^2}(3+i) = \frac{1}{10}(3+i)$

c) $\overline{i} = -i$ $\qquad i^{-1} = \frac{1}{0^2+1^2}(-i) = \frac{1}{1}(-i) = \underline{-i}$

d) $\overline{2} = \overline{2+0\cdot i} = 2-0\cdot i = 2$ $\qquad 2^{-1} = \frac{1}{2^2+0^2}\cdot 2 = \frac{1}{2}$

<u>Probe</u>: $i\cdot(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$ ✓

Eigener Lösungsversuch.

a) $\overline{5+2i} =$ $\qquad (5+2i)^{-1} = \frac{1}{5+2i}\cdot\frac{5-2i}{5-2i} = \frac{5-2i}{5^2-(2i)^2} = \frac{1}{29}(5-2i)$

b) $\overline{3-i} =$ $\qquad (3-i)^{-1} =$

c) $\overline{i} =$ $\qquad i^{-1} =$

d) $\overline{2} =$ $\qquad 2^{-1} =$

Betrag. Zeigen Sie: $\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Lösung.

$$\text{LS:} \quad |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{RS:} \quad \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\underbrace{(x+iy)(x-iy)}_{\overset{3.\text{Bin.F.}}{=} \; x^2 - \underbrace{(iy)^2}_{+y^2}}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Eigener Lösungsversuch.

p-q-Formel

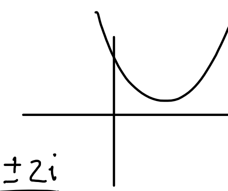
Mitternachtsformel. Berechnen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ von $2z^2 + 12z + 26 = 0$.

Lösung.

nicht definiert!

$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{64}$

$$z_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 2\cdot 26}}{2\cdot 2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{-12 \pm i\overbrace{\sqrt{64}}^{8}}{4} = -3 \pm 2i$$



Parabel in $\mathbb{R}$ keine NST!

In $\mathbb{C}$ gibt es Wurzeln der -1, d.h. Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ ($z =$ „$\sqrt{-1}$")

nämlich: $z = \pm i$ ($z^2 = (\pm i)^2 = -1$), also $z = \pm i =$ „$\sqrt{-1}$"

Anmerkung: Jedes Polynom vom Grad n besitzt n NST in $\mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra)

(↝ nächstes mal!)

Eigener Lösungsversuch.

Polynome über $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von folgenden Polynomen:

a) $z^2 - 4z + 5$

b) $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4$

Lösung.

a) $z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{4}}{2} = 2 \pm i$, wobei $\sqrt{-4} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\sqrt{4}$, $\underbrace{\sqrt{4}}_{2}$

b) Rate NST in $\mathbb{Z}$ als Teiler von -4: $z = \pm 1, \pm 2, \pm 4 \longrightarrow z_1 = 1,\ z_2 = -2$

Polynomdiv: $(z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4) : \underbrace{(z-1)(z+2)}_{(z^2+z-2)} = z^2 - 2z + 2$

$$
\begin{array}{l}
-(z^4 + z^3 - 2z^2) \\
\hline
\quad -2z^3 \qquad + 6z \\
-(-2z^3 - 2z^2 + 4z) \\
\hline
\qquad 2z^2 + 2z - 4 \\
\quad -(2z^2 + 2z - 4) \\
\hline
\qquad - \quad - \quad -
\end{array}
$$

Mitternachtsformel: $\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\underbrace{\sqrt{4}}_{2}$

$z_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = 1 \pm i$

4 NST!

Eigener Lösungsversuch.