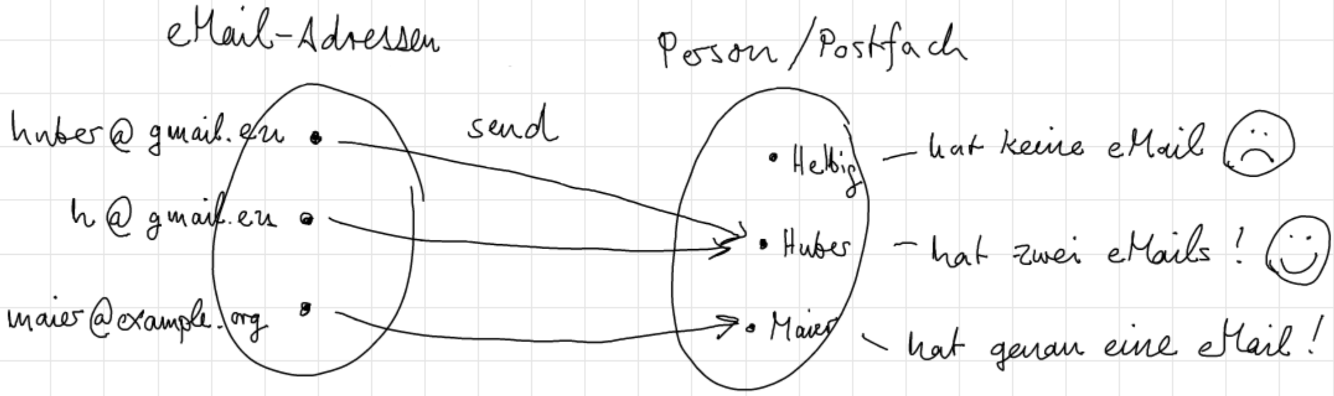
Funktionen

Funktionen - Intro

Funktionen (auch **Abbildungen** genannt) sind wie die Mengen ein grundlegendes mathematisches Konzept.

Motivation: Zuordnung eMail-Adresse zu Person



eine eMail kann nicht an zwei Personen gehen!

$\boxed{\text{ZIEL}}$ Was lerne ich?

- Erkennen von Funktionen
- Prüfen von Funktionen auf **Injektivität**, **Surjektivität** und **Bijektivität**
- Bestimmen der **Umkehrfunktion** (falls Fkt. bijektiv)

Funktionen – Konzept

Def. Eine **Funktion** (oder auch **Abbildung**) f von einer Menge D in eine M ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in M$ zuordnet.

(d.h. $\forall x \in D \; \exists_1 \, y \in M : \; f(x) = y$)

Man schreibt:

$$f : D \to M$$
$$x \to f(x)$$

und sagt:

„x wird auf $f(x)$ abgebildet" bzw. „$f(x)$ ist das Bild (oder Funktionswert) von x"

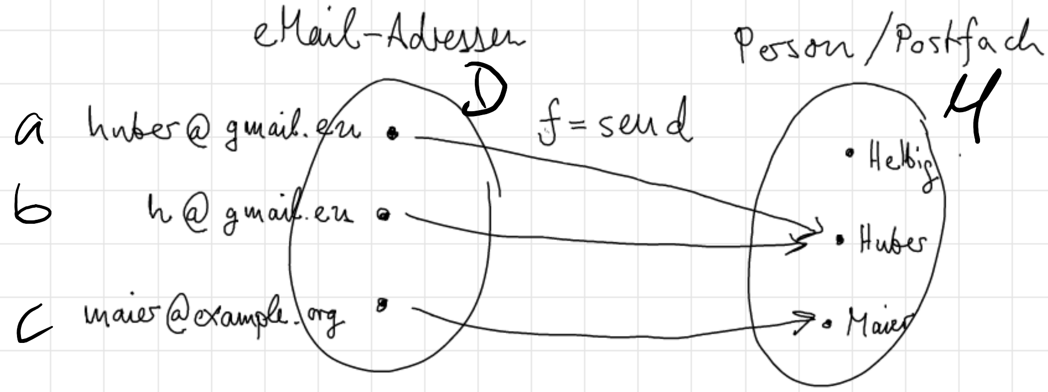
Die Menge D heißt Definitionsbereich

Die Menge $f(D) := \{f(x) / x \in D\} \subseteq M$ heißt Bildmenge

Die Menge M heißt Wertebereich.

Für $B \subseteq M$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in D \mid f(x) \in B\}$

Ü Diskutieren Sie die Begriffe am Beispiel folgender Vorschrift:



Ist dies eine Funktion? ☒ ja ☐ nein,

weil von D max. 1 Pfeil weg geht.

$D = \{$huber@gmail.eu; h@gmail.eu; maier@example.org$\}$ heißt Definitionsbereich

$M = \{$Helbig; Huber; Maier$\}$ heißt Wertebereich

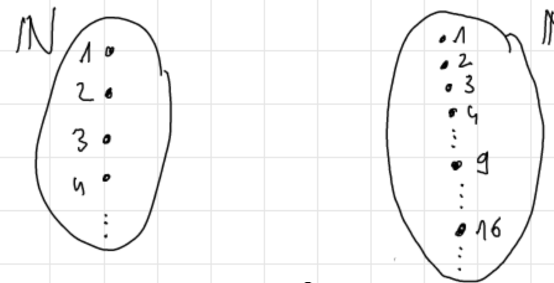
$f(D) = \{$Huber; Maier$\}$ heißt Bildmenge

$f^{-1}(\{\text{Huber}\}) = \{ a ; b \}$ heißt

Zeichnen Sie die Mengen in obigem Bild ein!

Ü Diskutieren Sie die Begriffe an folgenden Vorschriften:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto f(n) = n^2$

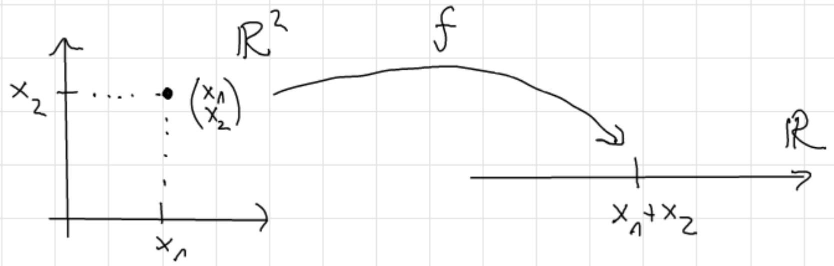


$f(1) = 1, \quad f(2) = 4$

$f(3) = 9, \quad f(4) = 16$

$f(\mathbb{N}) = \{1; 4; 9; 16; 25; \ldots\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$

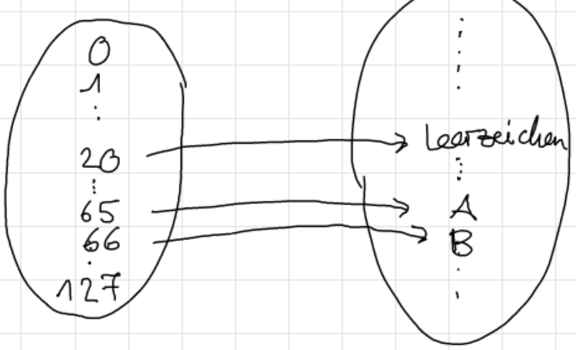


$f(1,3) = 4$

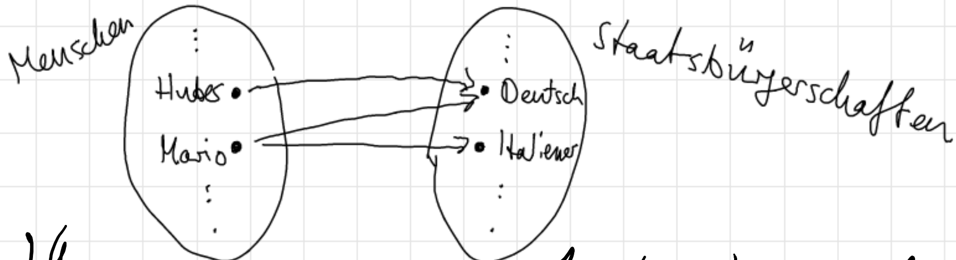
$f(2,2) = 4$

$f(-3,1) = -2$

c) ASCII-Code:

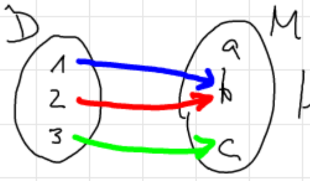
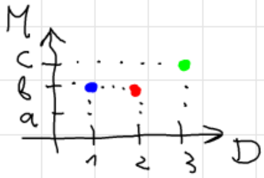


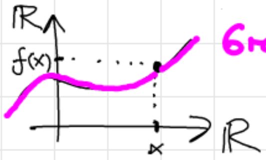
d) Ist folgende Vorschrift eine Funktion?



Nö; weil einem Definitionsbereich zwei Wertebereiche zugeordnet ist.

Funktionen – Graph

Anstatt  kann man das auch so 

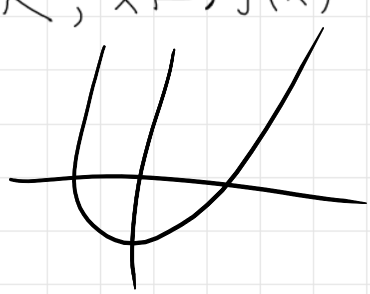
malen. Das kennt man bei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Graph: 

Abstrakt mathematisch

<u>Def.</u> Die Menge $G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in D \} \subseteq D \times M$ heißt Graph der Funktion $f: D \to M$.

$\boxed{\text{Ü}}$ Zeichnen Sie G_f von folgenden Funktionen:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x) = x^2$



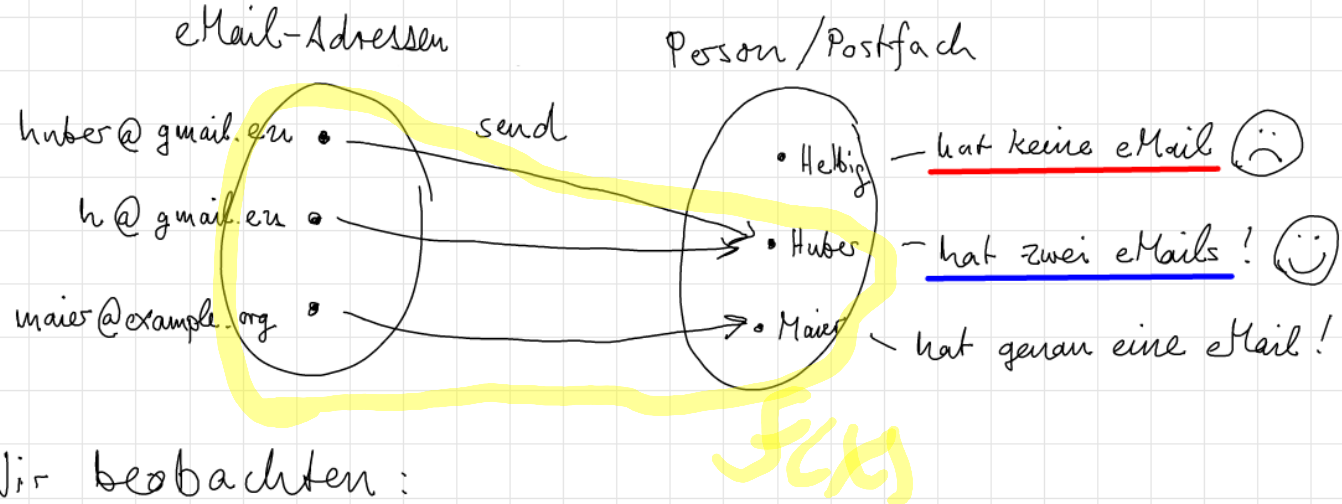
Parabell

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; n \mapsto f(n) = n^2$

auch Parabell?

Funktionen – Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Betrachten wir nochmals folgendes Beispiel:



Wir beobachten:

- Nicht jedes Element im Wertebereich ist im Bild der Funktion.
- Es gibt Elemente im Wertebereich, auf die mehrfach abgebildet wird.

Ü Negieren Sie die Aussagen der beiden Beobachtungen!

Die Negation dieser Beobachtungen liefert folgende Eigenschaften von Funktionen:

<u>Def.</u> Eine Funktion $f: D \to M$ heißt „Jedes y ist Bild eines x"

a) **surjektiv** $:\Leftrightarrow \forall y \in M \; \exists x \in D: \; y = f(x).$

$\Leftrightarrow f(D) = M$

„verschiedene x werden verschieden abgebildet"

b) **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

c) **bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ surjektiv & injektiv.

$\boxed{\text{Ü}}$ Welche der folgenden Abbildungen ist surjektiv, injektiv, bijektiv? Zeigen Sie dies mit obiger Definition!

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \; z \mapsto f(z) = z^2$

- nicht injektiv
- nich surjektiv

b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto g(n) = n^2$

- injektiv
- nicht surjektiv

c) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto h(z) = z+1$

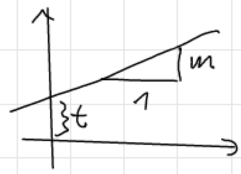
- injektiv
- surjektiv

d) Was heißt injektiv bzw. surjektiv in Bezug auf den Graphen einer Funktion? Skizzieren Sie dies!

- ist der Graph einer funktion injektiv, so kommt jeder existierender y-Wert höchstens ein mal vor.
(der Graph kann nur von oben nach unten oder umgekehrt sein, „nicht gewellt")
- ist der Graph einer Funktion surjektiv, so kann der Graph Kurven haben

Funktionen – Wichtige Beispiele

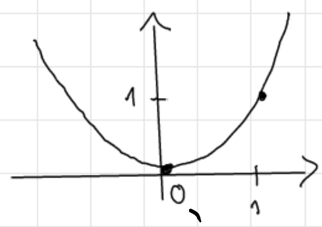
Gerade. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = mx + t$



ist bijektiv, da es eine Gerade ist.

Identität (Spezialfall $m=1$, $t=0$). $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}(x) = x$.
Ganz allgemein für eine beliebige Menge D ist
$id_D: D \to D$, $x \mapsto x$ die Identität von D.

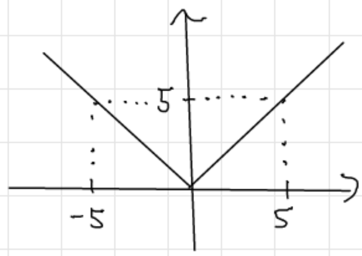
Parabel. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$



ist weder injektiv noch surjektiv, da es eine Parabel ist.

Betragsfunktion. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

ist weder injektiv noch surjektiv,

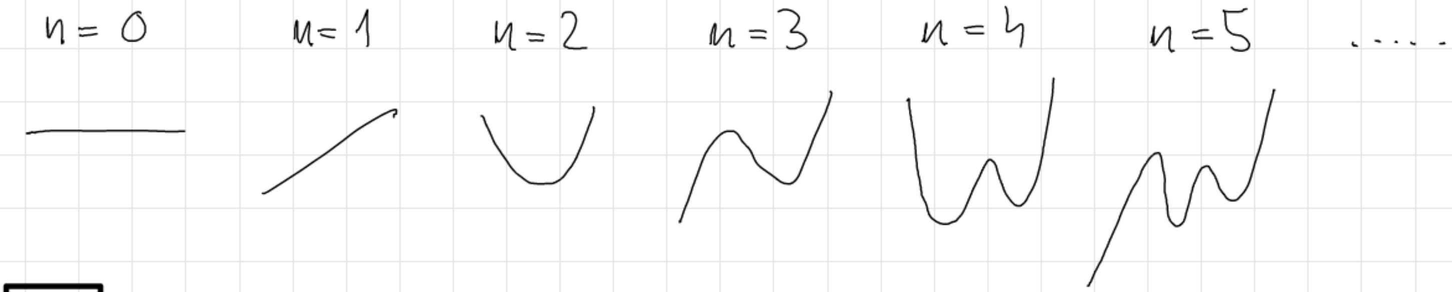


da die selben Probleme wie bei der Parabell vorhanden sind.

Polynome. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion vom Grad n
(falls $a_n \neq 0$)

z.B. $f(x) = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{3} x^5 + 2x^2 + 1$ ist ein Polynom vom Grad 5.

Qualitativ kann man die Graphen in Abhängigkeit des Grades wie folgt zeichnen:



$\boxed{\text{Ü}}$

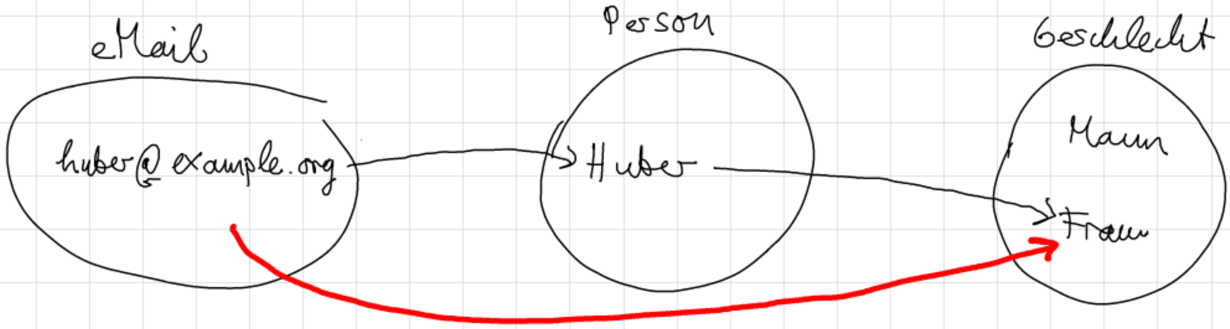
Für welche n ist ein Polynom surjektiv, injektiv oder bijektiv?

- ein Polynom ist für $n=1$ bijektiv
- " für $n =$ ungerade surjektiv
- " für $n=1$ injektiv
- für $n=$ gerade nichts

Funktionen - Verknüpfung

Man kann Funktionen auch nacheinander ausführen.

z.B.



Wir erhalten eine neue **Funktion**, die einer eMail ein Geschlecht zuordnet. Etwas mathematischer:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g", "x \mapsto x+1"'] \arrow[rr, bend right, "x \longmapsto (x+1)^2"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f", "x \mapsto x^2"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

z.B. $\quad 5 \overset{g}{\longmapsto} 5+1 \overset{f}{\longmapsto} (5+1)^2$

<u>Def.</u> Seien $f: D_f \longrightarrow M$ und $g: D_g \longrightarrow N$ Funktionen.
Die **Hintereinanderausführung** oder **Verknüpfung** von f und g ist (im Falle $g(D_g) \subseteq D_f$) die Funktion

$$f \circ g : D_g \longrightarrow M,$$
$$x \longmapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

$$\begin{tikzcd} D_g \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & D_f \subseteq N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, mapsto, bend right] & g(x) \arrow[r, mapsto] & f(g(x)) = f\circ g(x) \end{tikzcd}$$

Man beachte bei $f \circ g$, dass g zuerst ausgeführt wird!

$\boxed{\text{Ü}}$ Berechnen Sie $f \circ g$ (sofern definiert!):

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$

$f \circ g: D_g \to M$, $f \circ g(x) = (3x)^2 = 9x^2$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$

$f \circ g: D_g \to M$, $f \circ g(x) = 1/(x^3) = x^{-3}$

$\boxed{\text{Ü}}$ Bestimmen Sie zwei Funktionen f, g mit $h = f \circ g$:

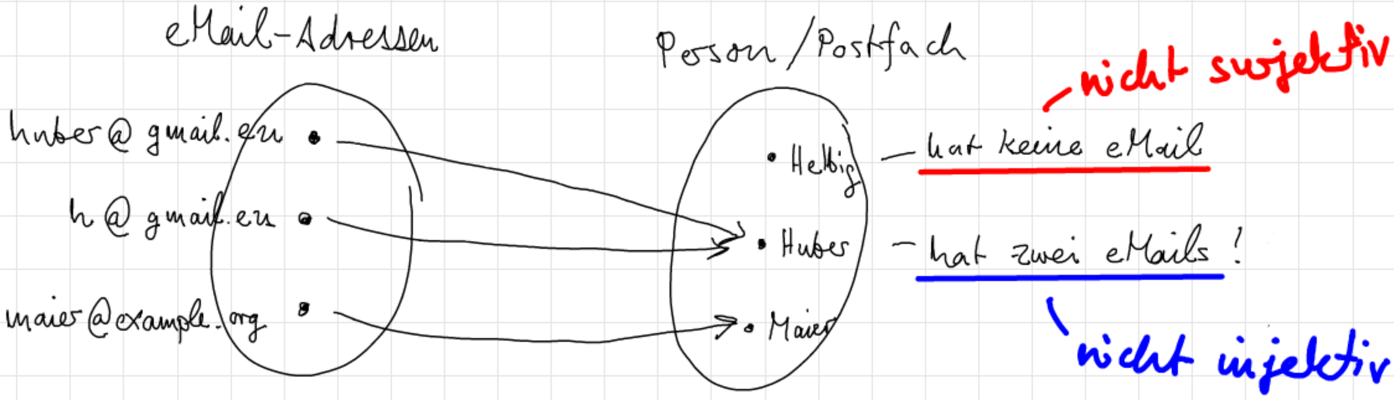
a) $h(x) = (x+1)^5$

$g(x) = x + 1$
$f(x) = x^5$

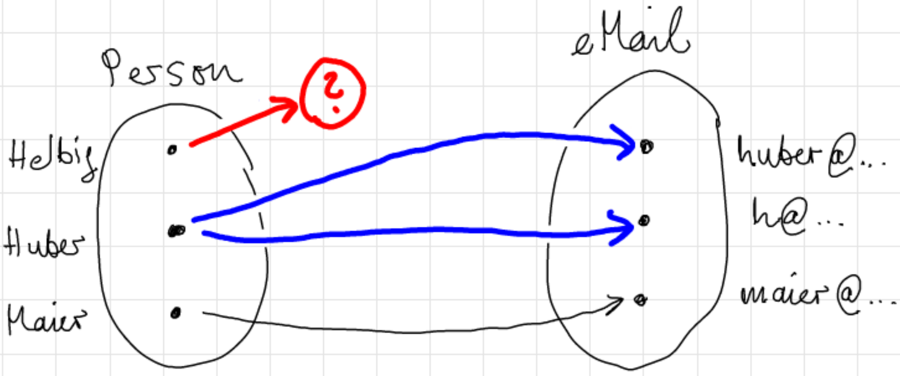
b) $h(x) = |x-2|$

$g(x) = x - 2$
$f(x) = |x|$

Funktionen – Umkehrfunktion



Wir wollen jetzt die Funktion „rückwärts ausführen", d.h. zu gegebener Person die eMail-Adresse heraus-finden. Anders gesprochen: Wir suchen eine Funktion, die dies machen sollte:



Dabei stoßen wir auf die zwei Probleme rot & blau. D.h. dies stellt gar keine Funktion dar, da von blau 2 Pfeile weggehen und von rot gar keiner.

Unter welchen Bedingungen kann man eine Funktion „rückwärts ausführen", d.h. die Umkehrung ist eine Funktion? Antwort: wenn die Funktion bijektiv ist

Betrachten wir ein Beispiel wo alles funktioniert:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

z.B. $1 \longmapsto 2$
$1{,}5 \longmapsto 3$
$2 \longmapsto 4$
$3 \longmapsto 6$

d.h. jede Zahl wird verdoppelt. Die Umkehrung ist jede Zahl zu halbieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

z.B. $2 \longmapsto 1$
$3 \longmapsto 1{,}5$
$4 \longmapsto 2$
$6 \longmapsto 3$

Hier gelten folgende wichtige Eigenschaften:

- $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$ (da $\forall x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(x) = f(g(x)) =$
  $=$
  $= id(x)$)

- $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$ (da $\forall x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) =$
  $= id(x)$)

Wir halten fest:

<u>Def. und Satz.</u> Eine Funktion $f: D \to M$ heißt **umkehrbar** oder **invertierbar** $:\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ bijektiv

$$\exists\, g: M \to D \text{ Funktion: } \quad f \circ g = id_M$$
$$g \circ f = id_D$$

$\overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow}$ f bijektiv.

In diesem Fall heißt g eine **Umkehrfunktion** von f. Weiter ist g eindeutig bestimmt und wir schreiben dafür $f^{-1} := g$.

Def. (above "heißt g"); Satz (below "bestimmt")

Beweis. ($\rightsquigarrow$ Vorlesung)

$\boxed{Ü}$ Geben Sie die Umkehrfunktion an:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

$(x-1)/2$

b) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{2}{x}$. $\frac{2}{x}$

$2/x = y \quad | \cdot x \quad | : y$

$\Leftrightarrow \quad x = 2/y$