ggT und kgV

ggT und kgV – Vielfachenmengen

Analog zur Teilermenge definieren wir die

<u>Def.</u> Sei $a \in \mathbb{N}$. $\boxed{V(a) := \{x \in \mathbb{N} \mid a \mid x\}}$ heißt **Vielfachenmenge** von a.

$\boxed{Ü}$ a) $V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots\}$

b) $V(1) = \mathbb{N}$

c) $V(2) =$

d) $V(3) \cap V(2) =$

Wie kann man dies interpretieren? (↷ kommt gleich!)

ggT und kgV — kgV

Def. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Ein $v \in V(a) \cap V(b)$ heißt **gemeinsames Vielfaches (gV)** von a und b.

$\boxed{Ü}$ Bestimmen Sie die gV von 6 und 5.

$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; \ldots\}$

$V(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; \ldots\}$

$V(a) \cap V(b) = \{30; 60; 90; \ldots\}$

Def. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $V := V(a) \cap V(b)$ und k die kleinste Zahl in V, also $\boxed{k := \min(V(a) \cap V(b))}$. Diese Zahl heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)** von a und b. Man schreibt auch $\boxed{\mathbf{kgV(a,b)} := k}$.

$\boxed{Ü}$ Bestimmen Sie mit der Definition $kgV(6,5)$ und $kgV(12,18)$.

$kgV(6;5) = 30$

$kgV(12;18) = 216$

ggT und kgV – ggT

<u>Def.</u> Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Ein $t \in T(a) \cap T(b)$ heißt **gemeinsamer Teiler (gT)** von a und b.

$\boxed{Ü}$ Bestimmen Sie die gT von 6 und 8.

$T(6) = \{1; 2; 3; 6\}$ $\quad T(6) \cap T(8) = \{1; 2\}$

$T(8) = \{1; 2; 4; 8\}$

<u>Def.</u> $a, b \in \mathbb{N}$ heißen **teilerfremd** $:\Longleftrightarrow T(a) \cap T(b) = \{1\}$.

$\boxed{Ü}$ Zeigen Sie, dass 8 und 9 teilerfremd sind.

$T(8) = \{1; 2; 4; 8\}$

$T(9) = \{1; 9\}$

<u>Def.</u> Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $T := T(a) \cap T(b)$ und $g \in T$ die größte Zahl in T, also $\boxed{g := \max(T(a) \cap T(b))}$. Diese Zahl heißt **größter gemeinsamer Teiler (ggT)** von a und b. Man schreibt auch $\boxed{\mathbf{ggT(a, b)} := g}$.

$\boxed{Ü}$ Bestimmen Sie $ggT(24, 126)$.

$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

$ggT(24; 126) = \{6\}$

ggT und kgV – ggT und PFZ

2. Verfahren zur ggT-Berechnung: mittels PFZ.

Bsp. $a = 180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$b = 600 = 2 \cdot 300 = 2^2 \cdot 150 = 2^3 \cdot 75 = 2^3 \cdot 3 \cdot 25 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$ggT(a,b) = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Satz. Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $a = \prod p^{m_p}$ und $b = \prod p^{n_p}$.

Dann gilt $$\boxed{ggT(a,b) = \prod p^{\min(m_p, n_p)}}$$

Beweis.

(1) $g = \prod p^{\min(m_p; n_p)} \in T(a) \cap T(b)$

(2) g ist $ggT(a,b)$

zu (1) $\left.\begin{array}{l} \min(m_p; n_p) \leq m_p \Rightarrow g \mid a \\ \min(m_p; n_p) \leq n_p \Rightarrow g \mid b \end{array}\right\} g \in T(a) \cap T(b)$

zu (2) Sei $t \in T(a) \cap T(b)$

$\left.\begin{array}{l} t \mid a \Rightarrow t_p \leq m_p \\ t \mid b \Rightarrow t_p \leq n_p \end{array}\right\} t_p \leq \min(m_p; n_p) \Rightarrow t \mid g$

$\Rightarrow t \leq g$

$\Rightarrow g = ggT(a;b)$

ggT und kgV – ggT und kgV

Analog kann man das kgV aus der PFZ berechnen:

$a = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$b = 600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

$ggT(a,b) = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$kgV(a,b) = 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Satz. Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $a = \prod p^{m_p}$ und $b = \prod p^{n_p}$.

Dann gilt

$$\boxed{kgV(a,b) = \prod p^{\max(m_p, n_p)}}$$

und somit

$$\underline{ggT(a,b) \cdot kgV(a,b)} = \prod p^{\min(m_p, n_p)} \cdot \prod p^{\max(m_p, n_p)}$$

$$= \prod p^{\min(m_p, n_p) + \max(m_p, n_p)} = \prod p^{m_p + n_p}$$

$$= \prod p^{m_p} \cdot \prod p^{n_p} = \underline{a \cdot b.}$$