



FUNKTIONEN

Gleichungen mit Exponentialfunktionen. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

1. $e^{3x+2} = 2$

3. $1 + e^{-3x} = 2.4$

5. $e^{-x} + 2 = e^x$

2. $5^x = 12$

4. $\frac{3}{1+e^{-x}} = 1$

Lösung.

1. $e^{3x+2} = 2 \xrightarrow{\ln(\dots)} \underbrace{\ln(e^{3x+2})}_{\text{id}} = \ln(2) \Rightarrow 3x+2 = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{1}{3}(\ln(2) - 2)$

2. $5^x = 12 \xrightarrow{\ln(\dots)} \ln(5^x) = \ln(12) \Rightarrow x \ln(5) = \ln(12) \Rightarrow x = \frac{\ln(12)}{\ln(5)}$

3. $1 + e^{-3x} = 2.4 \xrightarrow{-1} e^{-3x} = 1.4 \xrightarrow{\ln(\dots)} -3x = \ln(1.4) \Rightarrow x = \frac{\ln(1.4)}{-3}$

4. $\frac{3}{1+e^{-x}} = 1 \Rightarrow 3 = 1+e^{-x} \Rightarrow 2 = e^{-x} \xrightarrow{\ln(\dots)} \ln 2 = -x \Rightarrow x = -\ln 2 = \ln(2^{-1})$

5. Substitution: $u = e^x$: $\underbrace{u^{-1}}_{\frac{1}{u}} + 2 = u \xrightarrow{\cdot u} 1 + 2u = u^2 \Rightarrow u^2 - 2u - 1 = 0$
 $\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Rücksubst: $e^x = u = 1 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\ln(\dots)} x = \ln(1 \pm \sqrt{2})$

\uparrow \ln auf \mathbb{R}^+ definiert 

Eigener Lösungsversuch.

Logarithmus. Berechnen Sie:

1. $\log(1000)$

2. $\text{lb}(8)$

3. $\text{lb}(8 \cdot 4)$

4. $\log_5(1000)$

Lösung.

Wdh: $\log = \log_{10}$, $\text{lb} = \text{ld} = \log_2$, $\ln = \log_e$

1. $\log(1000) = 3$, da $10^3 = 1000$

2. $\text{lb}(8) = 3$, da $2^3 = 8$

3. $\text{lb}(8 \cdot 4) = \underbrace{\text{lb}(8)}_3 + \underbrace{\text{lb}(4)}_2 = 5$
 $2^3 = 8$ $2^2 = 4$

4. $\log_5(1000) \stackrel{\text{TR}}{=} 4,292$ $5^{4, \dots} = 1000$

ODER: $\log_5(1000) \stackrel{\text{Basiswechsel}}{=} \frac{\ln(1000)}{\ln(5)}$

Eigener Lösungsversuch.

Logarithmische Gleichungen. Welche Lösungen besitzen die folgenden logarithmischen Gleichungen?

1. $\ln(\sqrt{x}) + 1.5 \ln(x) = \ln(2x),$


2. $\ln^2(x) - \ln(x) = 2.$

Lösung.

1. $\ln(x^{\frac{1}{2}}) + \ln(x^{1.5}) = \ln(2x) \xRightarrow{e^{\quad}} x^2 = 2x \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{x(x-2)} = 0$ hat Lösungen $\cancel{x=0}, x_2=2$

$\underbrace{\ln(x^{\frac{1}{2}}) + \ln(x^{1.5})}_{\ln(x^{\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}})}$
 $\underbrace{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}_{x^2}$

\mathbb{R}^+ Def. Bereich von \ln



ODER

$\underbrace{\ln(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{3}{2} \ln(x)}_{\frac{1}{2} \ln(x) + \frac{3}{2} \ln(x) = 2 \ln(x)} = \ln(2x) \xRightarrow{e^{\quad}} \underbrace{e^{2 \ln(x)}}_{(e^{\ln(x)})^2} = 2x$

2. Subst.: $u = \ln(x): u^2 - u = 2 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Rücksubst.: $\ln(x) = u = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \xRightarrow{e^{\quad}} x = \begin{cases} e^2 \\ e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$ (beides in \mathbb{R}^+ Def. Bereich von \ln)

Eigener Lösungsversuch.


Logistische Wachstumsfunktion. Der Prozentsatz aller bayerischen Haushalte, die eine technische Neuerung nach t Jahren (z.B. Farbfernseher, Internetanschluss, Handy, Tablet etc.) besitzen, kann wie folgt modelliert werden:

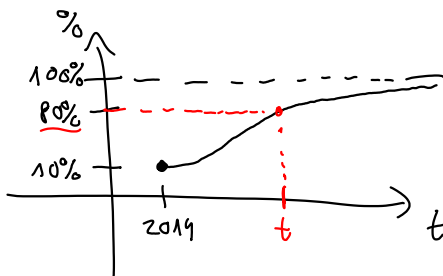
$$p(t) = \frac{1}{1 + 9e^{-0.3(t-2014)}}.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $t \geq 2014$. Wann besitzen danach 80% aller Haushalte diese Neuerung?

Lösung.

$$t = 2014: \quad p(2014) = \frac{1}{1 + 9 \cdot \underbrace{e^{-0.3 \cdot 0}}_1} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

$$t \rightarrow \infty: \quad p(t) = \frac{1}{1 + 9 \underbrace{e^{-0.3(t-2014)}}_{\substack{\rightarrow -\infty \\ \rightarrow 0}}} \rightarrow \frac{1}{1 + 9 \cdot 0} = \frac{1}{1} = 1 = 100\%$$




Eigener Lösungsversuch.

$$\text{Ansatz: } p(t) = 80\% \Rightarrow \frac{1}{1 + 9e^{-0.3(t-2014)}} = 0,8$$

$$\Rightarrow 1 = (1 + 9e^{-0.3(t-2014)}) \cdot 0,8$$

$$\Rightarrow 1 = 0,8 + 7,2 e^{-0.3(t-2014)} \Rightarrow \frac{0,2}{7,2} = e^{-0.3(t-2014)} \quad \left(\frac{1}{36}\right)$$

$$\stackrel{\ln(\dots)}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{1}{36}\right) = -0.3(t-2014) \Rightarrow t = \frac{-\ln(36)}{-0.3} + 2014 \approx \underline{\underline{2026}}$$

Sinus und Kosinus. Bestimmen Sie für die folgende Funktion die Periode, Amplitude, Nullstellen, Maximal- und Minimalstellen:

$$f(x) = \underline{5} \cdot \cos(\underline{x + 4,2})$$

Lösung.

Periode: 2π

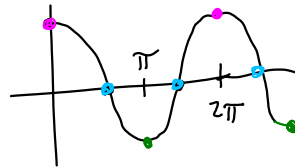
Amplitude: 5

Rechnerisch:

$$\text{NST: } x + 4,2 = \underline{\frac{\pi}{2} + k\pi} \Rightarrow x = \underline{\frac{\pi}{2} - 4,2} + k \cdot \pi$$

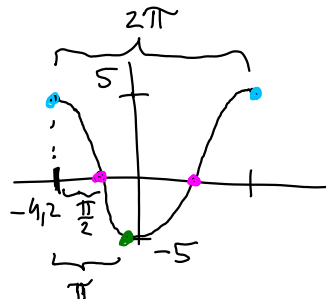
$$\text{Max: } x + 4,2 = \underline{0 + k \cdot 2\pi} \Rightarrow x = \underline{-4,2} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{Min: } x + 4,2 = \underline{\pi + k \cdot 2\pi} \Rightarrow x = \underline{\pi - 4,2} + k \cdot 2\pi$$



ODER

Graphisch:



$$\text{Max: } -4,2 + k \cdot 2\pi \quad \leftarrow \text{Periode}$$

$$\text{NST: } -4,2 + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \leftarrow \text{Halbe Periode}$$

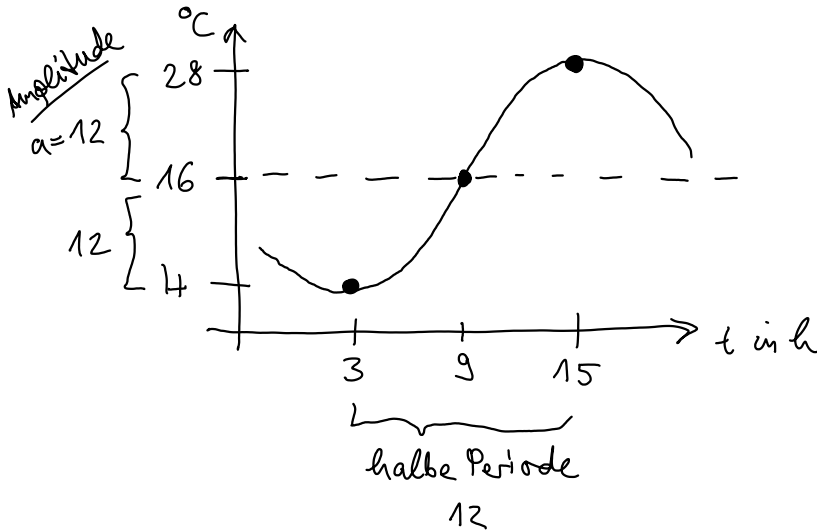
$$\text{Min: } -4,2 + \pi + k \cdot 2\pi$$

Eigener Lösungsversuch.

Simulation eines periodischen Temperaturverlaufs. In einer Simulation soll der Verlauf der Lufttemperatur T als Funktion der Zeit t angegeben werden, wobei die Periodendauer einen Tag beträgt. Es wird ein möglichst einfacher periodischer Verlauf der Form

$$T(t) = T_0 + a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

gewählt (t in Stunden h). Wenn der minimale Wert $T_{\min} = 4^\circ\text{C}$ bei $t = 3h$ und der maximale Wert $T_{\max} = 28^\circ\text{C}$ bei $t = 15h$ angenommen werden soll, wie müssen dann die Konstanten a, ω, ϕ und T_0 gewählt werden?



$T_0 = 16$ (da um 16 nach oben verschoben)

Periode $24 = p = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

„Start“ des Sinus bei 9:

$$9 = -\frac{\phi}{\omega} \Rightarrow \phi = -9 \cdot \underbrace{\omega}_{\frac{\pi}{12}} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = 16 + 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

Allgemein Verschiebung \leftrightarrow beim \sin/\cos : $\sin(\omega t + \varphi)$:

$$\omega t + \varphi = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\varphi}{\omega}$$

