# Logik und Mengen

* **Aussagen.** Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von $P$ :„Hans spielt Tennis "und $Q$ :„Hans läuft gern":

1. Wenn Hans Tennis spielt, dann läuft er gern.
2. Hans läuft weder gern noch spielt er Tennis.
3. Hans läuft nicht gern aber er spielt Tennis.
4. Wenn Hans nicht gern läuft, dann spielt er auch nicht Tennis.
5. Hans läuft nicht gern oder er spielt nicht Tennis.

**Lösung.**

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\neg P \wedge \neg Q$
3. $P \wedge \neg Q$
4. $\neg Q \Rightarrow \neg P$
5. $\neg P \vee \neg Q$ / $\neg P \oplus \neg Q$ Alltags-Oder

**Eigener Lösungsversuch.**

* **Quantoren.** Formalisieren und negieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt einen Mitarbeiter, der C++ kann.
2. Es gibt eine reelle Zahl $C > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \leq C$. (*Bemerkung:* Die Funktion $f$ heißt in diesem Fall *nach oben beschränkt*)

**Lösung.**

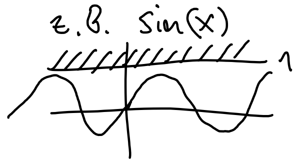
1. $\left.\begin{array}{ll} M: & \text{Menge aller Mitarbeiter} \\ P(x): & x \text{ kann C++} \end{array}\right\}$ $\quad \exists x \in M: P(x)$

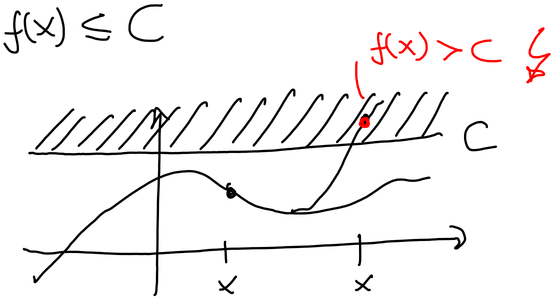
Negation: $\forall x \in M: \neg P(x)$ „Kein MA kann C++."

2. $\exists C > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq C$

$C \in \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$

z.B. $\sin(x)$






~~**Eigener Lösungsversuch.**~~

Negation: $f$ nicht nach oben beschränkt: $\forall C > 0 \ \exists x \in \mathbb{R}: f(x) > C$

**Teilbarkeitsaussagen.** Gilt $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ oder sogar $\Longleftrightarrow$? Setzen Sie ein:

1. $x$ durch 4 teilbar $\Longrightarrow$ $x$ durch 2 teilbar.
2. $x$ gerade Zahl $\Longleftrightarrow$ $x+1$ ungerade Zahl.

$\Big\} \; \forall x \in \mathbb{Z}$

**Lösung.**

1. „$\Rightarrow$": $x$ durch 4 teilbar: $\exists k \in \mathbb{Z}$: $x = 4 \cdot k = 2 \cdot (2k)$, d.h. 2 teilt $x$.

   „~~$\Leftarrow$~~": $x = 2$ ist durch 2 teilbar, aber nicht durch 4.

   $(\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q)$

2. „$\Rightarrow$": $x$ gerade Zahl, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}$: $x = 2k \overset{+1}{\Rightarrow} x+1 = 2k+1$
   d.h. ungerade Zahl.

   „$\Leftarrow$": $x+1$ ungerade Zahl, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}$: $x+1 = 2k+1 \overset{-1}{\Rightarrow} x = 2k$,
   d.h. gerade Zahl.

**Eigener Lösungsversuch.**

**Party-Implikation.** Aussage $P$: „Ich bestehe die Prüfung.“; Aussage $Q$: „Ich feiere.“ Für mich gilt: $P \implies Q$, also, wenn ich die Prüfung bestehe, dann feiere ich. Was lässt sich daraus über mein Feierverhalten sagen, wenn ich die Prüfung nicht bestehe?

**Lösung.**

Beides ist möglich (feiern oder nicht), da durch die Implikation keine Aussage darüber getroffen wird, wenn P falsch ist (ex falso quodlibet):

| | $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | |
|---|---|---|---|---|
| „zu Hause traurig sein“ | 0 | 0 | 1 | Beides widerspricht $P \Rightarrow Q$ nicht! |
| „Frustsaufen“ | 0 | 1 | 1 | |
| | 1 | 0 | 0 | |
| | 1 | 1 | 1 | |

**Eigener Lösungsversuch.**

**Tautologien und Wahrheitstafeln.**

* 1. Welche der beiden Aussagen sind Tautologien?

- $\big((P \Longrightarrow R) \land (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow Q)$
- $\big((P \Longrightarrow R) \land (Q \Longrightarrow \neg R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow \neg Q)$

2. Man plaziere an der mit ? gekennzeichneten Stelle in

Präzedenz

1. $\neg$
2. $\land$
3. $\lor$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$

$$(P \Longrightarrow (Q \lor R)) \iff ((\;?\; \land P) \Longrightarrow R)$$

eine der Aussagen $P$, $Q$, $R$, $\neg P$ ,$\neg Q$, $\neg R$, so daß sich eine Tautologie ergibt, und weise diese dann mittels einer Wahrheitstafel nach.

**Lösung.**

1.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\overbrace{P\Rightarrow R}^{A}$ | $\overbrace{Q\Rightarrow R}^{B}$ | $\overbrace{A\land B}^{D}$ | $\overbrace{P\Rightarrow Q}^{C}$ | $D\Rightarrow C$ | $\neg R$ | $\overbrace{Q\Rightarrow\neg R}^{E}$ | $\overbrace{A\land E}^{G}$ | $\neg Q$ | $\overbrace{P\Rightarrow\neg Q}^{F}$ | $G\Rightarrow F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

keine Tautologie!

Tautologie!

2. Mit der Tautologie $\boxed{(A \Rightarrow B) \overset{(*)}{\iff} (\neg A \lor B)}$ kann man umformen:

LS: $P \Rightarrow (Q \lor R) \overset{(*)}{\iff} \neg P \lor (Q \lor R)$

RS: $(?) \land P) \Rightarrow R \overset{(*)}{\iff} \neg(? \land P) \lor R \overset{\text{De Morgan}}{\iff} \neg ? \lor \neg P \lor R$

$\Longrightarrow \quad \neg ? = Q \quad$ d.h. $\quad \underline{\underline{? = \neg Q}}$

~~Eigener Lösungsversuch.~~

Mit Wahrheitstafel:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \Rightarrow Q \vee R$ | $? \wedge P$ | $? \wedge P \Rightarrow R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ? | $? \Rightarrow 0$ | (I) |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | ? | $? \Rightarrow 1$ | (II) |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ? | $? \Rightarrow 0$ | (III) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ? | $? \Rightarrow 1$ | (IV) |

$P \Leftrightarrow 0$

| $P$ | ? | $? \wedge P$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |

$P \Leftrightarrow 1$

| $P$ | ? | $? \wedge P$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Hier probieren mit $P, Q, R, \neg P, \neg Q, \neg R$:

(I)
- $P$: $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$ ✓
- $Q$: $0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$ ✗
- $R$: $0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$ ✗
- $\neg P$: $0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$ ✗
- $\neg Q$: $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$ ✓
- $\neg R$: $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$ ✓

(II)
- $P$: $1 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$ ✓
- $\neg Q$: $1 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$ ✓
- $\neg R$: $0 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$ ✓

(III)
- $P$: $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$ ✗
- $\neg Q$: $0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$ ✓
- $\neg R$: $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$ ✗

(IV)
- $\neg Q$: $0 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$ ✓

$$\Rightarrow \underline{? = \neg Q}$$

**Regeln für XOR.** Tautologie oder nicht?

* 1. $(P \oplus Q) \vee R \Longleftrightarrow (P \vee R) \oplus (Q \vee R)$

2. $(P \oplus Q) \wedge R \Longleftrightarrow (P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$ (Distributivgesetz mit $\oplus$ & $\wedge$)

3. $(P \oplus Q) \vee (Q \oplus R) \Longleftrightarrow (P \oplus R) \vee (Q \oplus R)$

**Lösung.**

1.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P\oplus Q$ | $(P\oplus Q)\vee R$ | $P\vee R$ | $Q\vee R$ | $(P\vee R)\oplus(Q\vee R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$\not\Longleftrightarrow$ d.h. keine Tautologie!

2.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P\oplus Q$ | $(P\oplus Q)\wedge R$ | $P\wedge R$ | $Q\wedge R$ | $(P\wedge R)\oplus(Q\wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

$\Longleftrightarrow$ d.h. Tautologie!

3.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P\oplus Q$ | $Q\oplus R$ | $(P\oplus Q)\vee(Q\oplus R)$ | $P\oplus R$ | $Q\oplus R$ | $(P\oplus R)\vee(Q\oplus R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$\Longleftrightarrow$ d.h. Tautologie

**Eigener Lösungsversuch.**

**Binäre logische Verknüpfungen und DNF.** Wir betrachten alle möglichen Verknüpfungen $P \circ_i Q$ $(0 \le i \le 15)$ von zwei Aussagen $P, Q$, gegeben durch folgende Tabelle:

| $P$ | $Q$ | $\circ_0$ | $\circ_1$ | $\circ_2$ | $\circ_3$ | $\circ_4$ | $\circ_5$ | $\overset{\oplus}{\circ_6}$ | $\circ_7$ | $\overset{\wedge}{\circ_8}$ | $\overset{\Leftrightarrow}{\circ_9}$ | $\circ_{10}$ | $\overset{\Rightarrow}{\circ_{11}}$ | $\circ_{12}$ | $\circ_{13}$ | $\overset{\vee}{\circ_{14}}$ | $\circ_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

* 1. Identifizieren Sie Ihnen bekannte Verknüpfungen aus der Vorlesung und berechnen Sie die DNF. Entwerfen Sie eine Schaltung für diese Verknüpfungen.

2. Bestimmen Sie für $\circ_1, \circ_3$ die DNF. Entwerfen Sie eine Schaltung für diese Verknüpfungen.

**Lösung.**

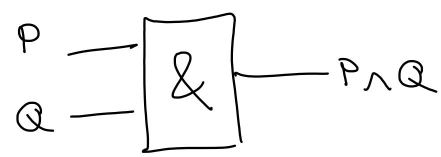
1. $\wedge = \circ_8$, $\quad \vee = \circ_{14}$, $\quad \oplus = \circ_6$, $\quad \Rightarrow = \circ_{11}$, $\quad \Leftrightarrow = \circ_9$

$P \wedge Q$ :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$0 \wedge \_ \Leftrightarrow 0$ DNF

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (0 \wedge \neg P \wedge \neg Q) \vee \\ (0 \wedge \neg P \wedge Q) \vee \\ (0 \wedge P \wedge \neg Q) \vee \\ (1 \wedge P \wedge Q) \end{array}\right\} \Leftrightarrow P \wedge Q$$

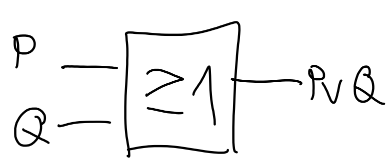


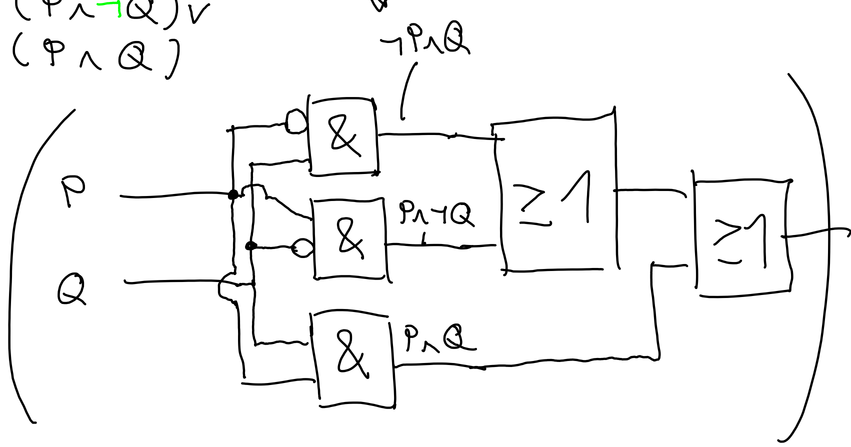

$P \vee Q$ :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

DNF

$$P \vee Q \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\neg P \wedge Q) \vee \\ (P \wedge \neg Q) \vee \\ (P \wedge Q) \end{array}$$



$P \oplus Q$ ↷ Vorlesung!

**~~Eigener Lösungsversuch~~.**

$P \Rightarrow Q$ :

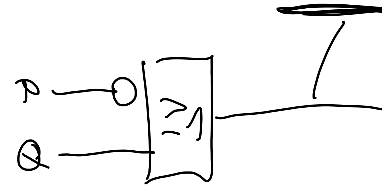
| P | Q | $\Rightarrow$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

DNF

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\overset{\text{Distrib.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\left(\neg P \wedge \underbrace{(\neg Q \vee Q)}_{1}\right)}_{\neg P} \vee (P \wedge Q) \overset{\text{Distr.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(\neg P \vee P)}_{1} \wedge (\neg P \vee Q)$$

$$\Rightarrow \underline{\neg P \vee Q}$$

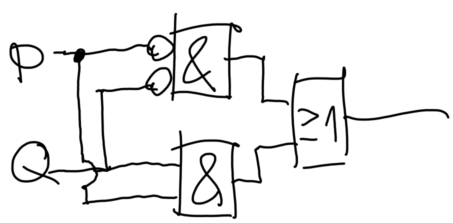



$P \Leftrightarrow Q$ :

| P | Q | $\Leftrightarrow$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

DNF

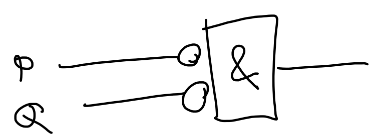



2. $P \circ_1 Q$ :

| P | Q | $\circ_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

$$P \circ_1 Q \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

DNF

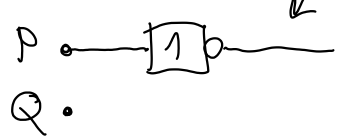



$P \circ_3 Q$ :

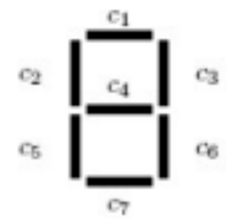
| P | Q | $\circ_3$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

DNF

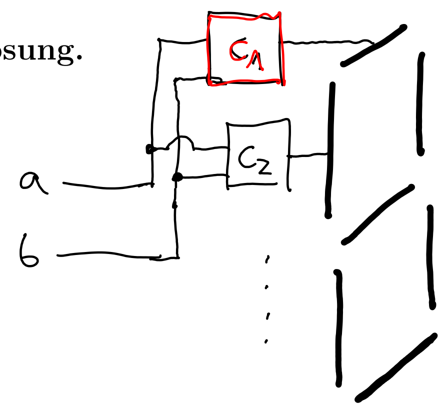
$$P \circ_3 Q \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(\neg P \wedge \neg Q) \vee \\ (\neg P \wedge Q)\end{matrix}\right\} \overset{\text{Distr.}}{\Longleftrightarrow} \neg P \wedge \underbrace{(\neg Q \vee Q)}_{1} \Leftrightarrow \neg P$$



**LCD-Anzeige** Eine einstellige LCD Anzeige kann durch die sieben Variablen $c_1, \dots, c_7$ dargestellt werden.
Überlegen Sie zuerst, welche Balken $c_j$ aufleuchten müssen um die Zahlen 0, 1, 2, 3 darzustellen. Dabei bedeutet $c_j = 1$, dass der zugehörige Balken leuchtet.
Geben Sie dann $c_1, \dots, c_7$ in Abhängigkeit von $a$ und $b$ (mögliche Werte 0,1) an, wobei $(ab)_2$ die zugehörige Dualdarstellung der anzuzeigenden Zahl ist, d.h. $0 = (00)_2$, $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$.
*Hinweis:* Machen Sie eine Wertetabelle und geben Sie die DNF der $c_i$ an.




**Lösung.**

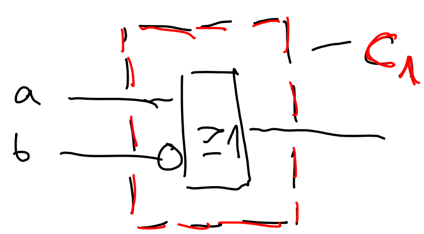



| Zahl | a | b | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

DNF von $c_1$: $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$ ← DNF

$\overset{\text{Distr.}}{\Leftrightarrow} (\underbrace{\neg a \vee a}_{1}) \wedge \neg b \quad \vee (a \wedge b)$

$\Leftrightarrow \quad \neg b \vee (a \wedge b) \overset{\text{Distr.}}{\Leftrightarrow} (\neg b \vee a) \wedge (\underbrace{\neg b \vee b}_{1}) \Leftrightarrow \neg b \vee a$




$c_2, \dots, c_7$ analog!

**Eigener Lösungsversuch.**

**IF-Verzweigung.** Entwerfen Sie eine Schaltung für eine IF-Verzweigung if$(t, a, b)$, die den Wert von $a$ zurückliefert, falls $t = 1$, und den Wert von $b$ falls $t = 0$.
*Hinweis*: Verwenden Sie die DNF in drei Variablen.

**Lösung.**

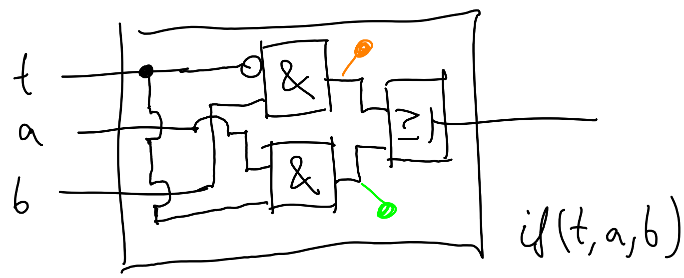
| | $t$ | $a$ | $b$ | $if(t,a,b)$ |
|---|---|---|---|---|
| $t=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $t=1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\Longleftrightarrow$ DNF

$$\left.\begin{array}{l}(\neg t \wedge \neg a \wedge b) \vee \\ (\neg t \wedge a \wedge b) \vee\end{array}\right\} \Longleftrightarrow (\neg t \wedge b) \wedge \underbrace{(\neg a \vee a)}_{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}(t \wedge a \wedge \neg b) \vee \\ (t \wedge a \wedge b)\end{array}\right\} \Longleftrightarrow (t \wedge a) \wedge \underbrace{(\neg b \vee b)}_{1}$$

$$\Longleftrightarrow (\neg t \wedge b) \vee (t \wedge a)$$




**Eigener Lösungsversuch.**

*** Gleichheit von Mengen, Teil 1.** Wann sind zwei Mengen gleich (Definition)? Entscheiden Sie anhand der Definition ob $A$ und $B$ gleich sind oder nicht.

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 3, 1\}$
2. $A = \{1, -1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$

**Lösung.**

Wdh: $A = B \;:\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}\; (\forall x:\; x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\Longleftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A) \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

1. Wir zeigen:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} 1 \in A \Rightarrow 1 \in B \checkmark \\ 2 \in A \Rightarrow 2 \in B \checkmark \\ 3 \in A \Rightarrow 3 \in B \checkmark \\ 4 \in A \Rightarrow 4 \in B \checkmark \end{array}\right\} \text{d.h. } \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \\ \left.\begin{array}{l} 2 \in B \Rightarrow 2 \in A \checkmark \\ 4 \in B \Rightarrow 4 \in A \checkmark \\ 3 \in B \Rightarrow 3 \in A \checkmark \\ 1 \in B \Rightarrow 1 \in A \checkmark \end{array}\right\} \text{d.h. } \forall x: x \in B \Rightarrow x \in A. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underline{A = B}.$$

2. $-1 \in A \; \underline{\wedge \; -1 \notin B}$, d.h. $\exists x: \; x \in A \wedge \neg(x \in B)$ (Negation von $\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B.$),

**Eigener Lösungsversuch.**

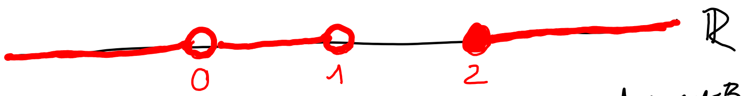
d.h. $\underline{A \neq B}$

**Gleichheit von Mengen, Teil 2.** Gilt folgende Gleichheit?

$$\mathbb{R}\backslash(\{0\} \cup [1,2[) \; = ]-\infty, 0[ \cup ]0,1[ \cup [2,\infty[$$

Zeichnen Sie die Mengen auf und beweisen Sie die Gleichheit mit der Definition von Mengengleichheit und den Mengenoperationen.

**Lösung.**




Def. $\backslash$ : $x \in A\backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B$

Def $\cup$ : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$$\forall x: \quad x \in \mathbb{R}\backslash(\{0\} \cup [1,2[) \iff x \in \mathbb{R} \wedge \neg\big(\underbrace{x \in (\{0\} \cup [1,2[)}_{x \in \{0\} \vee x \in [1,2[}\big)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{De Morgan}}{\iff} x \in \mathbb{R} \wedge (x \notin \{0\} \wedge x \notin [1,2[) \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge (x \neq 0 \wedge (x < 1 \vee x \geq 2)) \\
&\overset{\text{Distr.}}{\iff} x \in \mathbb{R} \wedge ((x \neq 0 \wedge x < 1) \vee (x \neq 0 \wedge x \geq 2)) \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge (x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x \geq 2) \\
&\overset{\text{Def. Intervall}}{\iff} x \in ]-\infty, 0[ \vee x \in ]0,1[ \vee x \in [2,\infty[ \\
&\overset{\text{Def} \cup}{\iff} x \in ]-\infty,0[ \cup ]0,1[ \cup [2,\infty[
\end{aligned}$$

$[a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \wedge x < b\}$

**Eigener Lösungsversuch.**