6
Integral

Jörn Loviscach

Versionsstand: 21. September 2013, 15:56

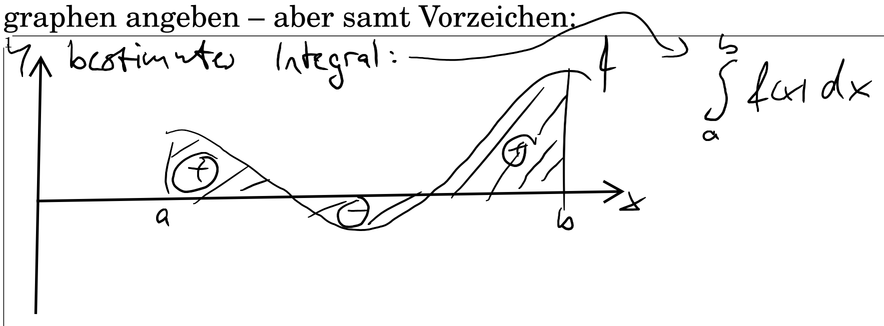
Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

1 Idee des Integrals

Gegeben eine Funktion f, die auf dem Intervall $[a,b]$ definiert ist, soll das „bestimmte Integral“ [definite integral] $\int_a^b f(x)\,dx$ die Fläche unter dem Funktionsgraphen angeben – aber samt Vorzeichen:

1



$f(x)$ heißt Integrand, a die untere, b die obere Integrationsgrenze, dx das Differential.

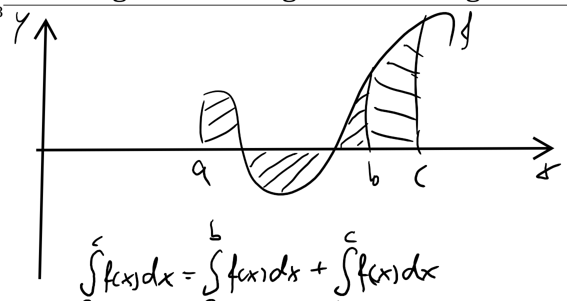
Dass man das Vorzeichen der Funktion mitnimmt, stört, wenn geometrische Flächen zu berechnen sind. Andererseits wird das Integral dadurch „linear“: Das Integral eines Vielfachen (auch eines negativen Vielfachen!) einer Funktion ist das Vielfache des Integrals der Funktion selbst. Und das Integral der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Integrale:

2 „Linearität“

- $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Das Integral ist bezüglich der Integrationsgrenzen additiv:

3



$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Das Integral mit vertauschen Grenzen ist deshalb sinnvollerweise mit negativem Vorzeichen definiert:

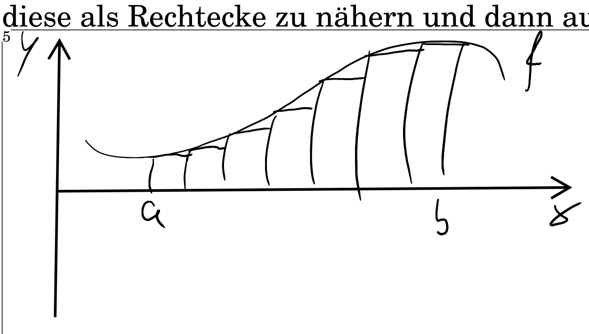
4

$$\underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{0} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Das Integralzeichen ist eigentlich ein langes „S“ für „Summe“, das Differential „dx“ gibt erstens die Variable an, über die integriert wird, (hier x) und steht formal für eine unendliche kleine x-Differenz. Eine einfache Art, sich das Integral vorzustellen, ist, die Fläche unter der Funktion in schmale Streifen zu schneiden, diese als Rechtecke zu nähern und dann aufzusummieren:

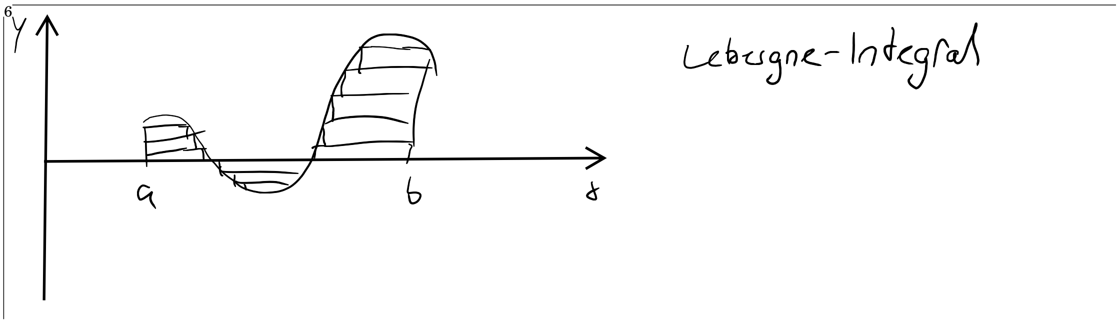
5



Riemann-Summen

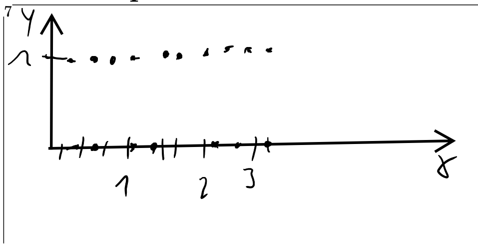
Wenn man dies („Riemann-Summen“) korrekt mit Grenzwerten formalisiert, wird daraus Riemanns Definition des Integrals. In der fortgeschrittenen Mathematik ist ist die Defition von Lebesgue (sprich: Löbeck, mit Betonung auf dem „e“) üblicher. Hier wird die Fläche unter der Funktion quasi längs in Streifen geschnitten und dann ein Grenzwert gebildet:

6



Diese Definition hat den Vorteil, auch viele pathologische Funktionen zu verdauen, zum Beispiel diese:

7



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

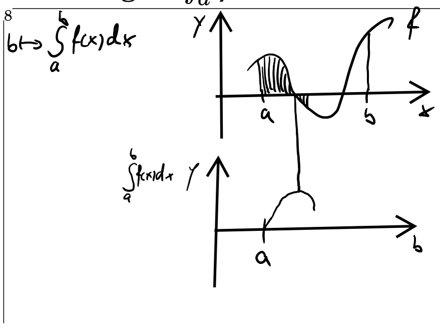
In der Praxis muss man sich nicht um die verschiedenen Definitionen des Integrals kümmern. Vielmehr lässt sich in der Praxis jede beschränkte Funktion sinnvoll über jeden endlichen Integrationsbereich integrieren. Ausnahmen dazu gibt es nur in bestimmten mathematischen Universen (Suchbegriff: Auswahlaxiom) und/oder in Integralen über drei oder mehr Dimensionen (Suchbegriff: Banach-Tarski-Paradoxon).

2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kann man als Funktion seiner oberen Grenze b auffassen:

8

$$b \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$



Was passiert, wenn man es nach b ableitet?

9

$$\frac{\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx}{h} = \frac{\int_b^{b+h} f(x)\,dx}{h} \approx \frac{h \cdot f(b)}{h}$$

Die Ableitung hebt also in gewisser Weise das Integral auf. Dies ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [fundamental theorem of calculus].

Das kann man benutzen, um Integrale auszurechnen. Beispiel: $\int_a^b x^3\,dx$. Dieses Integral muss in Abhängigkeit von der oberen Grenze b eine Funktion sein, deren Ableitung b^3 ergibt. Also:

10

$$\Rightarrow \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4}{4} + c$$

Konstante bzgl. b

Diese Gleichung muss auch stimmen, wenn man $b = a$ setzt. Also:

11

$$0 = \int_a^a x^3 dx = \frac{a^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{a^4}{4}$$

Damit ist das Integral gelöst.

Dieser Trick geht natürlich allgemein: Um das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen, suche zur Funktion f eine Stammfunktion [antiderivative] F, also eine Funktion F mit $F' = f$. (Davon gibt es unendlich viele, die sich alle durch eine additive Konstante unterscheiden!) Dann bilde:

12

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Für die Stammfunktion F schreibt man gerne auch ein „unbestimmtes Integral“, also eines ohne Grenzen:

13

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Vorsicht: Das unbestimmte Integral ist eine Funktion, die von der Integrationsvariable abhängt. Das bestimmte Integral ist eine Zahl – nämlich die Fläche mit Vorzeichen.

Um Stammfunktionen zu finden, stellt man eine Tabelle von Ableitungen auf und liest die rückwärts. Vorsicht: Dies sind Stammfunktionen zu $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x^2$ und zu $x \mapsto 1/x$:

14

$f(x)$	$F(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
e^x	$e^x + C$
x^2	$\frac{x^3}{3}+C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+C$

Leider hilft eine solche Tabelle nicht immer, siehe Abschnitt 4.

3 Uneigentliche Integrale

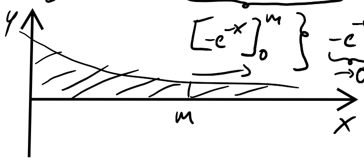
„Uneigentliche“ Integrale, also solche, die sich nach links, rechts, oben oder unten in Unendliche erstrecken, behandelt man oft mit Grenzwerten (wobei diese Grenzwerte ins Lebesgue-Integral schon eingebaut sind).

Beispiel: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

15

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underbrace{\lim_{m\to\infty}\int_0^m e^{-x}\,dx}$$

$$\left[-e^{-x}\right]_0^m \quad \Big\} \quad \underbrace{-e^{-m}}_{\to 0} - (-\underbrace{e^{-0}}_{1})$$



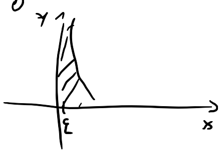
Beispiel: $\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

16

$$\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{13} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} = 2\sqrt{13}$$

$$\underbrace{\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^{13}}$$

$$2\sqrt{13} - \underbrace{2\sqrt{\varepsilon}}_{\downarrow\, 0}$$



Typischerweise sind solche Integrale aber problematisch, also im Zweifelsfall nicht definiert.

Beispiel: $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$

17

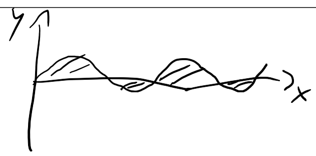
$$\cancel{\int_0^\infty \sin(x)\,dx}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \underbrace{\int_0^m \cancel{\sin(x)}\,dx}$$

$$\underbrace{\left[-\cos(x)\right]_0^m}$$

$$\underbrace{-\cos(m) - -\cos(0)}$$

$$-\cos(m) + 1$$



Beispiel: $\int_0^{13} \frac{1}{x}\, dx$

18

$$\int_0^{13} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \underbrace{\int_\varepsilon^{13} \frac{1}{x}\, dx}_{\underbrace{\ln(|x|)\Big]_\varepsilon^{13}}_{\ln(13) - \underbrace{\ln(\varepsilon)}_{-\infty}}}$$

4 Numerische Integration

Zu allen üblichen Funktionen lässt sich schnell mit Hilfe von Produktregel, Kettenregel und Co. die Rechenvorschrift der Ableitung hinschreiben. Mit Stammfunktionen ist das leider nicht so einfach. Viele gängige Funktionen haben keine Stammfunktion, die man wieder mit gängigen Funktionen hinschreiben kann. (Nochmal: Sie *haben* Stammfunktionen, nur kann man die nicht in simplen Formeln hinschreiben!) Ein einfaches Beispiel ist die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung allgegenwärtige Glockenfunktion $x \mapsto e^{-x^2}$.

Wenn keine Formel hat, sondern nur Reihen von Messdaten, kann man sowieso nicht per Stammfunktion integrieren. Ohne Stammfunktion bleibt eigentlich nur die „numerische Integration“: Man schätzt die Fläche unter der Kurve, indem man mehr oder minder viele Funktionswerte ausrechnet.

Das aber bitte nie so (Treppenstufen):

19

Denn mit dem gleichen Rechenaufwand lässt sich die Funktion auch durch Trapeze annähern (Trapezformel):

20

Mit (asymptotisch) immer noch dem gleichen Rechenaufwand kann man die Funktion sogar durch Stücke kubischer (nicht nur quadratischer!) Parabeln annähern und erhält die Simpson-Formel. Dabei werden immer zwei Streifen zusammengefasst:

21

Professionellerseits verwendet man gerne das Romberg-Verfahren: Man führt das Trapezverfahren für verschiedene Schrittweiten aus (alte Funktionswerte mehrfach benutzen!) und schließt aus dem Verlauf, was das Ergebnis für die – hypothetische – Schrittweite null sein müsste.