6. Übung

6.1 $X \sim U_{]a,b[}$, $E[X] = \frac{a+b}{2}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_a^b - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{1}{4}(a+b)^2$$

$$= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) = \frac{1}{12}(b^2+a^2-2ab) =$$

$(b^3-a^3):(b-a) = b^2+ab+a^2$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

$Var[Y+(-X)] = Var[Y] + Var[-X] = Var[Y] + (-1)^2 \cdot Var[X] = 0.02^2 + 0.01^2$

6.2

Geg.: Abfüllmenge $X \sim N_{1.01,\,0.01^2}$

Flaschenvolumen $Y \sim N_{1.06,\,0.02^2}$

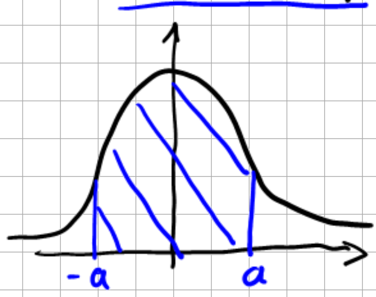
$\Longrightarrow Y - X \sim N_{0.05,\,0.0005}$

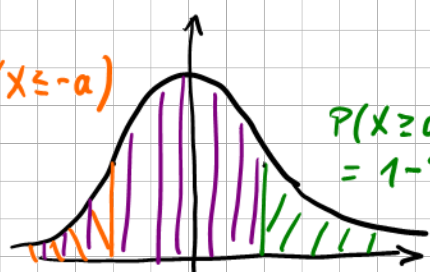
Ges.: $P(X > Y) = P(Y - X < 0) = \text{pnorm}(0, 0.05, \text{sqrt}(0.0005))$

$\approx 1.3\%$

alternativ: $\underbrace{P(X-Y>0)}_{1-P(X-Y\le 0)} = 1 - \text{pnorm}(0, -0.05, \text{sqrt}(0.0005))$

6.3 $P(-a \le X \le a)$





$$P(-a \le X \le a) = P(X \le a) - \underbrace{P(X \le -a)}_{P(X \ge a)} = P(X \le a) - \left(1 - P(X \le a)\right)$$

$$= 2\,P(X \le a) - 1$$

6. 4

$$X \sim N_{8.2,\,1.4^2}$$

a) Ges.: $P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \text{pnorm}(10, 8.2, 1.4) \approx 9.9\%$

$P(X \le 5) = \text{pnorm}(5, 8.2, 1.4) \approx 1.1\%$

$P(5 \le X \le 10) = 1 - P(X \le 5) - P(X > 10) \approx 89\%$

b) Ges.: $\left.\begin{array}{l} \text{qnorm}(0.1, 8.2, 1.4) \approx 6.4 \\ \text{qnorm}(0.9, 8.2, 1.4) \approx 10 \end{array}\right\}$ 80% der Bildschirme haben eine Lebensdauer zwischen 6.4 und 10 Jahren

c) Vergleiche

- $P(X > 8 \mid X > 3) = \dfrac{P(\{X > 8\} \cap \{X > 3\})}{P(X > 3)} = \dfrac{P(X > 8)}{P(X > 3)} = \dfrac{1 - \text{pnorm}(8, 8.2, 1.4)}{1 - \text{pnorm}(3, 8.2, 1.4)} \approx 56\%$
- $P(X > 5) = 1 - \text{pnorm}(5, 8.2, 1.4) \approx 99\%$

Es macht einen Unterschied, ob Bildschirm 3 Jahre alt oder neu ist!

$\Rightarrow$ NV ist nicht gedächtnislos.

6.5 Geg.: $\underbrace{\lambda = 10}_{\underbrace{n}_{3600} \cdot p}$ bezogen auf 1 h

$\Rightarrow \quad p = \frac{10}{3600} = \frac{1}{360}$ Trefferwahrscheinlichkeit für 1 Sekunde

Im Zeitraum t Sekunden gilt: $\lambda = \frac{t}{360}$

Ges.: Anzahl t (in Sekunden) mit

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{t}{360}\right)^0}{0!} \cdot e^{-\frac{t}{360}} = 0.9$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{360}} = 0.9 \quad | \ln()$$

$$-\frac{t}{360} = \ln 0.9$$

$$\Rightarrow \quad t = -360 \cdot \ln 0.9 \approx 38 \text{ [sek]}$$