Determinante

Fragen?

*** Determinanten-Formeln.** Wie lauten die Formeln zur Berechnung der Determinante folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

d) $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Lösung.

a) $\det\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = |a|$

b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = |a \cdot d - c \cdot b|$

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ (Sarrus)

d) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \, a_{1j} \det(A_{1j})$ & a.)

Vorzeichen mit „Schachbrett“

Streichungsmatrix $\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$
1. Zeile, j. Spalte gestrichen

Eigener Lösungsversuch.

a) $\det\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} =$

b) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

c) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

d) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} =$

Berechnen von Determinanten.

a) $\det(5) = 5$

b) $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -2$

c) $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix} = 13-8 = 5$

d) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 2 & -1\end{vmatrix} = -11$

e) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1&0&2&1\\3&1&0&1\\1&2&2&3\\3&1&0&1\end{vmatrix} = (-1)\cdot\left(2\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&3\\3&1&1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&1\\3&1&1\end{vmatrix}\right) = -\left(2\cdot\underbrace{(6+9+1-6-9-1)}_{0} + 2\underbrace{(4-4)}_{0}\right) = 0$

ODER 2 Zeile = 5 Zeile $\Rightarrow 0$

f) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7&8&9&10&11\\0&2&3&4&5\\0&0&2&1&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&5\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}7&8&9&10\\0&2&3&4\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix}7&8&9\\0&2&3\\0&0&2\end{vmatrix} = (-5)(28) = (-140)$

g) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 2 & 4 & 6\\ 7 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix} \underset{III-2\cdot I}{=} \begin{vmatrix}1&1&2&3\\4&5&6&7\\0&0&0&0\\7&3&1&2\end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 15 & 2\\ 3 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix} \underset{III-3\cdot I}{=} 0$

Eigener Lösungsversuch.

a) $\det\begin{pmatrix}5\end{pmatrix} =$

b) $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} =$

c) $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 2 & -1\end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$

f) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix} =$

g) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 2 & 4 & 6\\ 7 & 3 & 1 & 2\end{vmatrix} =$

h) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 15 & 2\\ 3 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix} =$

Determinante in Java. Programmieren Sie eine rekursive Funktion `public static double det(double[][] m)`, die die Determinante einer Matrix berechnet (Algorithmus "Entwicklung nach der ersten Zeile"). Schreiben Sie ggf. Hilfsmethoden für die Berechnung und Ausgabe auf die Konsole.

Lösung. siehe Java-Klasse bzw. Blog auf bigdev.de!