



LOGIK UND MENGEN

* **Aussagen.** Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von P : „Hans spielt Tennis“ und Q : „Hans läuft gern“:

1. Wenn Hans Tennis spielt, dann läuft er gern.
2. Hans läuft weder gern noch spielt er Tennis.
3. Hans läuft nicht gern aber er spielt Tennis.
4. Wenn Hans nicht gern läuft, dann spielt er auch nicht Tennis.
5. Hans läuft nicht gern oder er spielt nicht Tennis.

Lösung.

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\neg P \wedge \neg Q$
3. $P \wedge \neg Q$
4. $\neg Q \Rightarrow \neg P$
5. $\neg P \vee \neg Q$ / $\neg P \oplus \neg Q$ ↙ Alltags-Oder

Eigener Lösungsversuch.

* **Quantoren.** Formalisieren und negieren Sie folgende Aussagen:

1. Es gibt einen Mitarbeiter, der C++ kann.
2. Es gibt eine reelle Zahl $C > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \leq C$. (Bemerkung: Die Funktion f heißt in diesem Fall *nach oben beschränkt*)

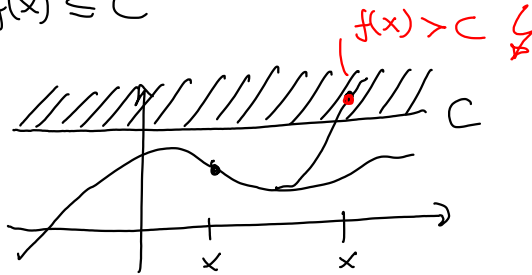
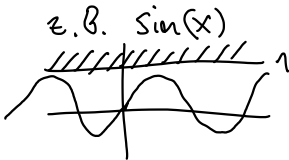
Lösung.

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} M : \text{Menge aller Mitarbeiter} \\ P(x) : x \text{ kann C++} \end{array} \right\} \quad \exists x \in M : P(x)$$

Negation: $\forall x \in M : \neg P(x)$ „kein MA kann C++.“

$$2. \quad \exists C > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq C$$

$$C \in \mathbb{R}^+ =]0, \infty[$$



~~Eigener Lösungsversuch.~~

Negation: f nicht nach oben beschränkt: $\forall C > 0 \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > C$

Teilbarkeitsaussagen. Gilt \Rightarrow , \Leftarrow oder sogar \Leftrightarrow ? Setzen Sie ein:

1. x durch 4 teilbar \Rightarrow x durch 2 teilbar.
2. x gerade Zahl \Leftrightarrow $x+1$ ungerade Zahl.
- } $\forall x \in \mathbb{Z}$

Lösung.

1. \Rightarrow : x durch 4 teilbar: $\exists k \in \mathbb{Z} : x = 4 \cdot k = 2 \cdot (2k)$, d.h. 2 teilt x .

~~\Leftarrow~~ : $x=2$ ist durch 2 teilbar, aber nicht durch 4.
 $(\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q)$

2. \Rightarrow : x gerade Zahl, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k \xrightarrow{+1} x+1 = 2k+1$
d.h. ungerade Zahl.

\Leftarrow : $x+1$ ungerade Zahl, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} : x+1 = 2k+1 \xrightarrow{-1} x = 2k$,
d.h. gerade Zahl.

Eigener Lösungsversuch.

Party-Implikation. Aussage P : „Ich bestehe die Prüfung.“; Aussage Q : „Ich feiere.“
 Für mich gilt: $P \Rightarrow Q$, also, wenn ich die Prüfung bestehe, dann feiere ich. Was lässt sich daraus über mein Feierverhalten sagen, wenn ich die Prüfung nicht bestehe?

Lösung.

Beides ist möglich (feiern oder nicht), da durch die Implikation keine Aussage darüber getroffen wird, wenn P falsch ist (ex falso quodlibet):

	P	Q	$P \Rightarrow Q$	
„zu Hause bleiben“	0	0	1	} Beides widerspricht $P \Rightarrow Q$ nicht!
	0	1	1	
„Frustsaufen“	1	0	0	
	1	1	1	

Eigener Lösungsversuch.

Tautologien und Wahrheitstafeln.

* 1. Welche der beiden Aussagen sind Tautologien?

- $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow \neg R)) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$

2. Man plaziere an der mit ? gekennzeichneten Stelle in

$$(P \Rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((? \wedge P) \Rightarrow R)$$

1. \neg
2. \wedge
3. \vee
4. \Rightarrow
5. \Leftrightarrow

eine der Aussagen $P, Q, R, \neg P, \neg Q, \neg R$, so daß sich eine Tautologie ergibt, und weise diese dann mittels einer Wahrheitstafel nach.

Lösung.

1.

P	Q	R	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$A \wedge B$	$P \Rightarrow Q$	$D \Rightarrow C$	$\neg R$	$Q \Rightarrow \neg R$	$A \wedge E$	$\neg Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$G \Rightarrow F$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

keine Tautologie!

Tautologie!

2. Mit der Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ kann man umformen:

$$LS: P \Rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \vee R)$$

$$RS: ((?) \wedge P) \Rightarrow R \Leftrightarrow \neg (?) \vee R \stackrel{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} \neg (?) \vee \neg P \vee R$$

$$\Rightarrow \neg (?) = Q \text{ d.h. } ? = \neg Q$$

Eigener Lösungsversuch

Mit Wahrheitstafel:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow Q \vee R$	$(?) \wedge P$	$(?) \wedge P \Rightarrow R$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	?	$?\Rightarrow 0$ (I)
1	0	1	1	1	?	$?\Rightarrow 1$ (II)
1	1	0	1	1	?	$?\Rightarrow 0$ (III)
1	1	1	1	1	?	$?\Rightarrow 1$ (IV)

$$P \Leftrightarrow 0$$

P	(?)	$(?) \wedge P$
0	0	0
0	1	0

$$P \Leftrightarrow 1$$

P	(?)	$(?) \wedge P$
1	0	0
1	1	1



Hier probieren mit $P, Q, R, \neg P, \neg Q, \neg R$:

(I) $P: 1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \checkmark$
 $Q: 0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 \times$
 $R: 0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 \times$
 $\neg P: 0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 \times$
 $\neg Q: 1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \checkmark$
 $\neg R: 1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \checkmark$

(II) $P: 1 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1 \checkmark$
 $\neg Q: 1 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1 \checkmark$
 $\neg R: 0 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1 \checkmark$

(III) $P: 1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \times$
 $\neg Q: 0 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 \checkmark$
 $\neg R: 1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \times$

(IV) $\neg Q: 0 \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1 \checkmark$

$$\Rightarrow \underline{(?) = \neg Q}$$

Regeln für XOR. Tautologie oder nicht?

- * 1. $(P \oplus Q) \vee R \iff (P \vee R) \oplus (Q \vee R)$ (keine Tautologie)
- 2. $(P \oplus Q) \wedge R \iff (P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$
- 3. $(P \oplus Q) \vee (Q \oplus R) \iff (P \oplus R) \vee (Q \oplus R)$

Lösung.

1.

P	Q	R	$P \oplus Q$	$P \oplus Q \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \oplus (Q \vee R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0

\nleftrightarrow

2.

P	Q	R	$P \oplus Q$	$P \oplus Q \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0

\iff

3.

P	Q	R	$P \oplus Q$	$Q \oplus R$	$P \oplus Q \vee Q \oplus R$	$P \oplus R$	$Q \oplus R$	$P \oplus R \vee Q \oplus R$
0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	0	1	
0	1	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	1	1	0	1	
1	1	0	0	1	1	1	1	
1	1	1	0	0	0	0	0	

\iff

Eigener Lösungsversuch.

Binäre logische Verknüpfungen und DNF. Wir betrachten alle möglichen Verknüpfungen $P \circ_i Q$ ($0 \leq i \leq 15$) von zwei Aussagen P, Q , gegeben durch folgende Tabelle:

P	Q	\circ_0	\circ_1	\circ_2	\circ_3	\circ_4	\circ_5	\oplus	\circ_7	\circ_8	\wedge	\Leftrightarrow	\circ_{10}	\Rightarrow	\circ_{12}	\circ_{13}	\vee	\circ_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- * 1. Identifizieren Sie Ihnen bekannte Verknüpfungen aus der Vorlesung und berechnen Sie die DNF. Entwerfen Sie eine Schaltung für diese Verknüpfungen.
2. Bestimmen Sie für \circ_1, \circ_3 die DNF. Entwerfen Sie eine Schaltung für diese Verknüpfungen.

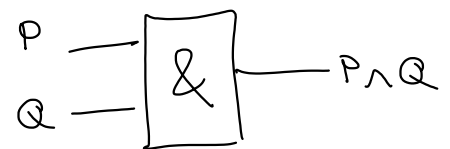
Lösung.

1. $\wedge = \circ_8$, $\vee = \circ_{14}$, $\oplus = \circ_6$, $\Rightarrow = \circ_{11}$, $\Leftrightarrow = \circ_9$

$P \wedge Q$:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

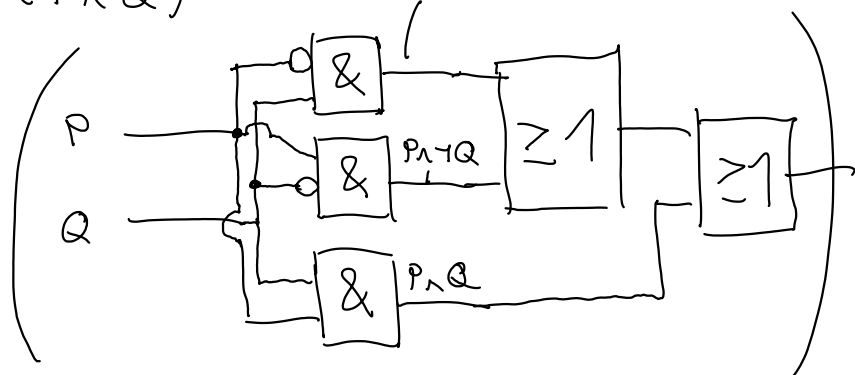
 $P \wedge Q \Leftrightarrow$ $\left. \begin{array}{l} (0 \wedge \neg P \wedge \neg Q) \vee \\ (0 \wedge \neg P \wedge Q) \vee \\ (0 \wedge P \wedge \neg Q) \vee \\ (1 \wedge P \wedge Q) \end{array} \right\} \Leftrightarrow P \wedge Q$



$P \vee Q$:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

 $P \vee Q \Leftrightarrow$ $\left. \begin{array}{l} (\neg P \wedge \neg Q) \vee \\ (P \wedge \neg Q) \vee \\ (P \wedge Q) \end{array} \right\} \Leftrightarrow P \vee Q$



$P \oplus Q$ → Vorlesung!

Eigener Lösungsversuch.

$P \Rightarrow Q$:

P	Q	\Rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ DNF

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

Distrib.

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q)$$

Distrib.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \vee P)}_1 \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

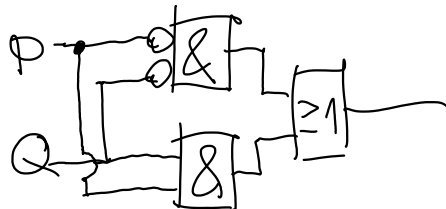
Logic gate diagram for $\neg P \vee Q$:

$P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	\Leftrightarrow
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow$ DNF

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$



2. $P \odot_1 Q$:

P	Q	\odot_1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$P \odot_1 Q \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ DNF

Logic gate diagram for $P \odot_1 Q$:

$P \odot_3 Q$:

P	Q	\odot_3
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$P \odot_3 Q \Leftrightarrow$ DNF

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

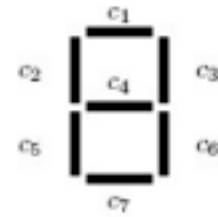
Distrib.

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee Q) \Leftrightarrow \neg P$$

Logic gate diagram for $P \odot_3 Q$:

LCD-Anzeige Eine einstellige LCD Anzeige kann durch die sieben Variablen c_1, \dots, c_7 dargestellt werden.

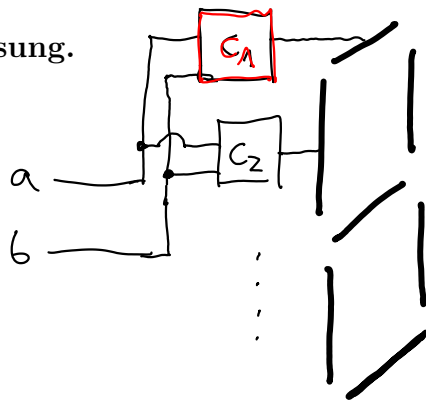
Überlegen Sie zuerst, welche Balken c_j aufleuchten müssen um die Zahlen 0, 1, 2, 3 darzustellen. Dabei bedeutet $c_j = 1$, dass der zugehörige Balken leuchtet.



Geben Sie dann c_1, \dots, c_7 in Abhängigkeit von a und b (mögliche Werte 0,1) an, wobei $(ab)_2$ die zugehörige Dualdarstellung der anzuzeigenden Zahl ist, d.h. $0 = (00)_2$, $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$.

Hinweis: Machen Sie eine Wertetabelle und geben Sie die DNF der c_i an.

Lösung.

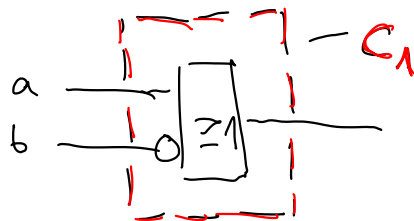


Zahl	a	b	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	0	1	1

DNF von c_1 : $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$ ← DNF

$$\stackrel{\text{Distr.}}{\Rightarrow} (\underbrace{\neg a \vee a}_1) \wedge \neg b \vee (a \wedge b)$$

$$\Rightarrow \neg b \vee (a \wedge b) \stackrel{\text{Distr.}}{\Leftrightarrow} (\neg b \vee a) \wedge \underbrace{(\neg b \vee b)}_1 \Leftrightarrow \neg b \vee a$$



c_2, \dots, c_7 analog!

Eigener Lösungsversuch.

IF-Verzweigung. Entwerfen Sie eine Schaltung für eine IF-Verzweigung $\text{if}(t, a, b)$, die den Wert von a zurückliefert, falls $t = 1$, und den Wert von b falls $t = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die DNF in drei Variablen.

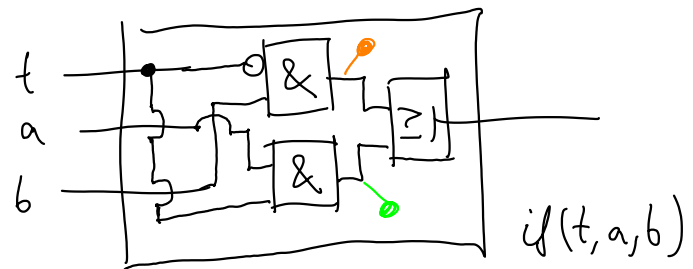
Lösung.

DNF

t	a	b	$\text{if}(t, a, b)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & (\neg t \wedge \neg a \wedge b) \vee \\ & (\neg t \wedge a \wedge b) \vee \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\neg t \wedge b) \wedge (\neg a \vee a) \\
 & \left. \begin{aligned} & (t \wedge a \wedge \neg b) \vee \\ & (t \wedge a \wedge b) \vee \end{aligned} \right\} \Rightarrow (t \wedge a) \wedge (\neg b \vee b)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\neg t \wedge b) \vee (t \wedge a)$$



Eigener Lösungsversuch.

* **Gleichheit von Mengen, Teil 1.** Wann sind zwei Mengen gleich (Definition)?
Entscheiden Sie anhand der Definition ob A und B gleich sind oder nicht.

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 3, 1\}$

2. $A = \{1, -1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$

Lösung.

Wdh: $A = B \iff \underbrace{\forall x \in A: x \in B}_{A \subseteq B} \wedge \underbrace{\forall x \in B: x \in A}_{B \subseteq A}$

1. $\forall x \in A = \{1, 2, 3, 4\}: x \in B = \{2, 4, 3, 1\} \quad \checkmark \Rightarrow A \subseteq B$
 $\forall x \in B = \{2, 4, 3, 1\}: x \in A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \checkmark \Rightarrow B \subseteq A$ } $A = B$

2. $\forall x \in A = \{1, -1, 2, 3\}: x \in B = \{1, 2, 3\} \quad \times \quad -1 \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B$
 $\Rightarrow \underline{A \neq B}$

Eigener Lösungsversuch. (Es gilt $B \subseteq A$)

Gleichheit von Mengen, Teil 2. Gilt folgende Gleichheit? Beweisen Sie das mit der Definition der Mengen & Mengenoperationen!

$$\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup [1, 2]) =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup [2, \infty[$$

Zeichnen Sie die Mengen auf und beweisen Sie die Gleichheit mit der Definition von Mengengleichheit und den Mengenoperationen.

$\forall x$:

Lösung.

$$x \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup [1, 2]) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \neg (x \in \{0\} \cup [1, 2])$$

\downarrow
Def. $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
 $x \in \{0\} \vee x \in [1, 2]$

De Morgan

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge (x \notin \{0\} \wedge x \notin [1, 2])$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge (x \neq 0 \wedge (x < 1 \vee x \geq 2))$$

Distr.

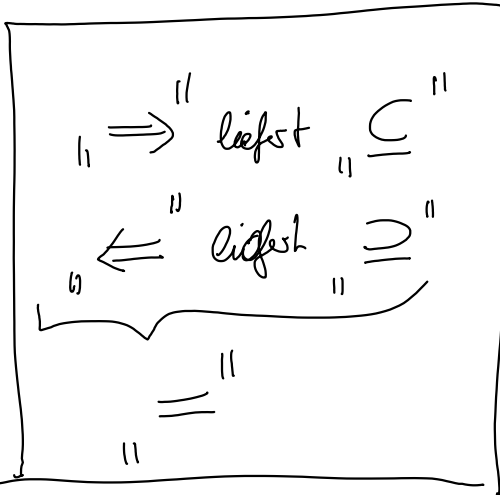
$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge ((x \neq 0 \wedge x < 1) \vee (x \neq 0 \wedge x \geq 2))$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge (x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\vee x \in]0, 1[\vee x \in [2, \infty[$$

Def. \cup

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup [2, \infty[$$



$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$

Eigener Lösungsversuch.