8. Übung – Lösung

8.1

Lebensmittelgewicht $X \sim N_{\mu,28}$ mit unbekanntem Erwartungswert μ

Stichprobe vom Umfang $n = 11$ mit Stichprobenmittel $\bar{x} = 150$ [g]

(a) Ges: Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$

Nach Vorlesung:

$$\left]\bar{x} - \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right[$$

$$\Longleftrightarrow \left]150 - \phi^{-1}(0.975) \cdot \sqrt{\frac{28}{11}}, \ 150 + \phi^{-1}(0.975) \cdot \sqrt{\frac{28}{11}}\right[$$

$$\Longleftrightarrow \left]150 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{28}{11}}, \ 150 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{28}{11}}\right[$$

Also: $]146.87, 153.13[$ ist das 95%-Konfidenzintervall für μ

(b) Ges.: n mit $150 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{28}{n}} \leq 152$

$$\Longleftrightarrow 1.96 \cdot \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{n}} \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \cdot \sqrt{28}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow n \geq \frac{1.96^2 \cdot 28}{4} = 1.96^2 \cdot 7 = 26.8912$$

$$\Longleftrightarrow n \geq 27$$

8.2

Abfüllmenge $X \sim N_{\mu,100}$ mit unbekanntem Erwartungswert μ

Stichprobenmittel $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 752.2$ $(n = 10)$

(a) Ges.: Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.99$

Mit $\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}(0.995) = 2.58$ und Vorlesung gilt:

$$\left]752.2 - 2.58 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}, \ 752.2 + 2.58 \cdot \sqrt{10}\right[$$

Also: $]744.04, 760.36[$ ist Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau 99%

(b) Gesamtlänge des Konfidenzintervalls ist $1\,[ml]$, d.h.

gesucht ist n mit $2.58 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \iff \sqrt{n} \geq 51.6$

$\iff n \geq 2663$

(c) Ges.: α mit $\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} \leq 0.5$

$$\iff \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\overset{\text{Anwendung von } \phi}{\iff} 1-\frac{\alpha}{2} \leq \phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\iff \alpha \geq 2\left(1-\phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = 2\left(1-\text{pnorm}\left(1/\text{sqrt}(10)\right)\right)$$

$$\iff \alpha \geq 75.2\,\%$$

Ein Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.248$ ist zu niedrig.

Es wäre zu unsicher, dass μ von dem sehr kurzen Konfidenzintervall überdeckt wird!