11c
Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen. Eulersche Identität. Polardarstellung. Additionstheoreme. Vollständige Faktorisierung von Polynomen

Jörn Loviscach

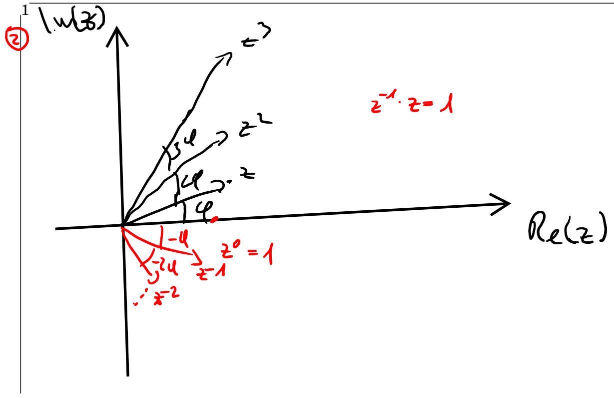
Versionsstand: 21. September 2013, 15:58

Die nummerierten Felder sind absichtlich leer, zum Ausfüllen beim Ansehen der Videos:
http://www.j3L7h.de/videos.html

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist

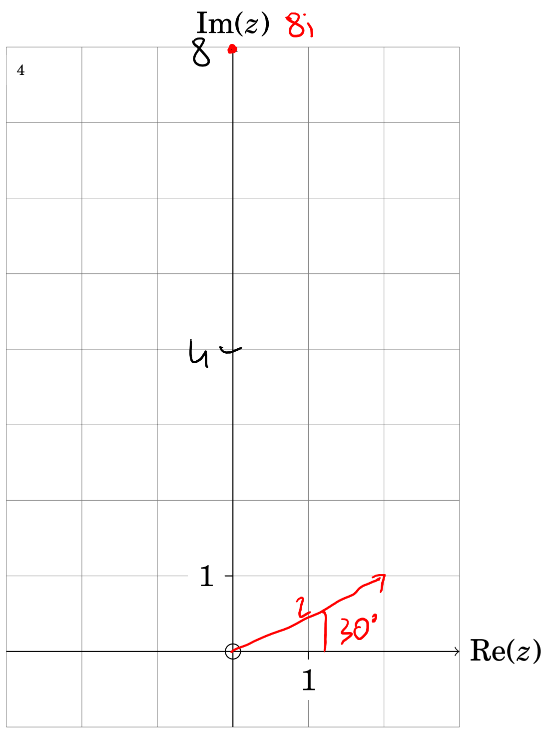
1 Ganzzahlige Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen werden die Längen multipliziert und die Winkel addiert. Damit kann man sofort sagen, was bei der zweiten, dritten, vierten usw. Potenz passiert:

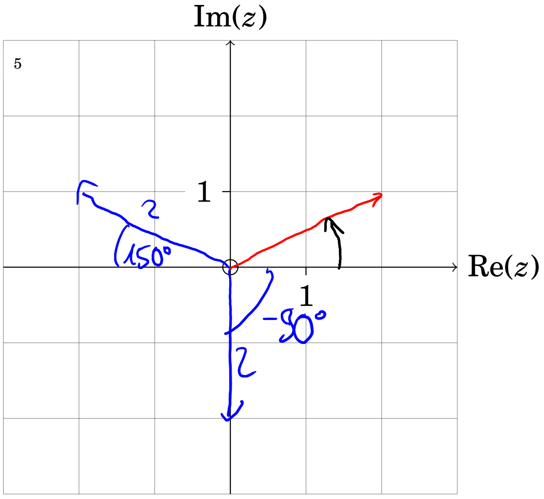


Wegen $z^n z^{-n} = 1$ passiert bei negativen Exponenten das Umgekehrte:

Entsprechend kann man sich überlegen, wie Wurzeln komplexer Zahlen funktionieren müssen. Gesucht ist beispielsweise eine (bewusst steht hier „eine“, nicht „die“) dritte Wurzel von $8i$, also eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 8i$. Dafür gibt es eine offensichtliche Möglichkeit:



Und zwei weitere, nicht so offensichtliche Möglichkeiten:



Analog hat man für eine 42-ste Wurzel einer komplexen Zahl $\neq 0$ satte 42 Möglichkeiten zur Auswahl. Eine davon ist schöner als die anderen, weil sie dichter an der positiven reellen Achse liegt (oder sogar *darauf*) liegt. Diese sozusagen schönste Wurzel heißt der „Hauptwert“ [principal value]. Aber rechnerisch ist sie nicht besser als die anderen. Viele, aber nicht alle Autoren nehmen als Hauptwert diejenige Wurzel, die *gegen den Uhrzeigersinn* am dichtesten an der positiven reellen Achse liegt.

Demo mit Wolfram Alpha: `z^12 = 13+42i`. Achtung: Schon für `cube root -8` liefert Wolfram Alpha den – zunächst überraschenden – komplexen Hauptwert statt des schulmäßigen -2.

Achtung: Weil die Wurzeln im Komplexen nicht eindeutig sind, muss man beim Umformen von Gleichungen extrem vorsichtig sein. Am besten verwenden Sie im Komplexen *nie* das Wurzelsymbol oder gebrochenzahlige Exponenten, sondern drücken alles mit ganzzahligen Potenzen aus. Also lieber $z^{13} = \text{bla}$ schreiben statt $z = \sqrt[13]{\text{bla}}$, denn diese letztere Gleichung sieht so aus, als ob es scheinbar nur ein z gäbe.

Der Ärger fängt schon mit der imaginären Einheit i selbst an: Man darf im Prinzip $i = \sqrt{-1}$ mit der Wurzel schreiben. Aber dann ist Vorsicht beim Umformen angesagt:

6

$$z = -i$$
$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$
$$z^2 = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$z = \pm\sqrt{-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$z = \pm i$$

2 Eulersche Identität

Dass bei der Multiplikation komplexer Zahlen die Winkel addiert werden, erinnert sehr an den Logarithmus:

7

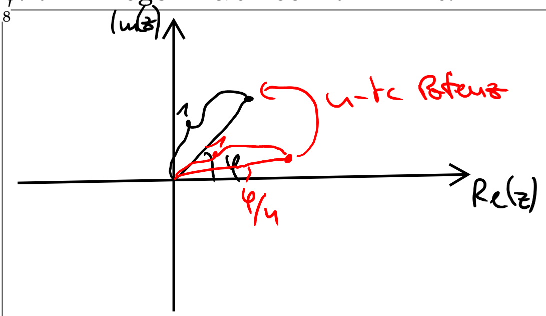
$$\mathrm{Winkel}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Winkel}(z_1) \cdot \mathrm{Winkel}(z_2) + \ldots 360^\circ$$

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) \cdot \log(x_2)$$

Das kommt nicht von ungefähr und führt auf eine überraschende und äußerst nützliche Eigenschaft komplexer Zahlen: die Eulersche Identität.

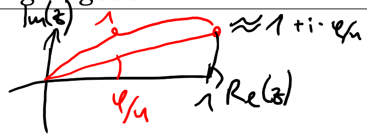
Betrachten wir eine komplexe Zahl der Länge 1 mit dem Winkel ϕ im Bogenmaß. Die muss entstehen, wenn man eine komplexe Zahl der Länge 1 mit dem Winkel ϕ/n im Bogenmaß hoch n nimmt:

8



Eine komplexe Zahl der Länge 1 mit dem Winkel ϕ/n lässt sich aber in guter Näherung angeben:

9



Wenn man diese Idee mathematisch sauber formuliert, kann man zeigen:

10

Komplexe Zahl mit Länge 1 und Winkel φ

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n}$$

zur Erinnerung

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

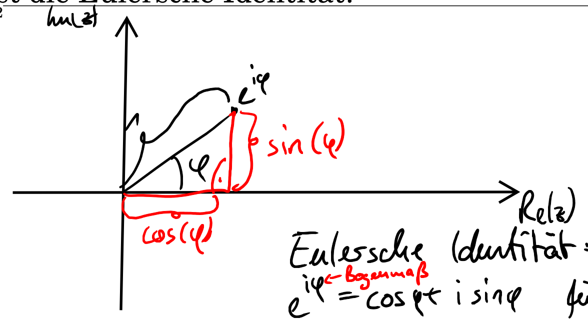
Das ist die schon bekannte Formel für die Exponentialfunktion, aber nun mit einem komplexen Exponenten. Also sagt man sinnvollerweise:

11 $=: e^{i\varphi} = \exp(i\varphi)$

Man überlegt sich also nicht direkt, was e eine imaginäre Anzahl von Malen mit sich selbst sein multipliziert soll, sondern findet umgekehrt überraschenderweise hier die Formel wieder, mit der man e^x für reelle Zahlen x bestimmt hat.

Aus der Skizze sieht man sofort, dass man nun auch Sinus und Cosinus weiß. Dies ist die Eulersche Identität:

12



Eulersche Identität:

$e^{i\varphi \leftarrow \text{Bogenmaß}} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

Statt mit Sinus und Cosinus zu rechnen, darf man also mit der Exponentialfunktion rechnen. Das ist wesentlich eleganter und wird deshalb fast überall gemacht, wo Schwingungen zu untersuchen sind.

Mit Hilfe der Potenzrechengesetze – die gelten netterweise weiter – ist nun auch klar, wass die Eulersche Zahl e hoch eine beliebige komplexe Zahl ist:

13

$$e^{12,34+56,78i} = e^{12,34} \cdot \underbrace{e^{56,78i}}_{\substack{\cos(56,78)\\ +i\sin(56,78)}} = 228661,55\ldots \cdot (0,9733618\ldots + i \cdot 0,229274\ldots) = \ldots$$

3 Potenzreihen und Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Wie für reelle Zahlen vorgeführt, lässt sich der Grenzwert des Produkts in eine unendliche Summe (Potenzreihe) umwandeln. Also gibt ebenfalls:

14

$$e^{i\varphi} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

Vergleicht man dies mit der Eulerschen Identität, erhält man Formeln für Sinus und Cosinus (im Bogenmaß!):

15

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{i\varphi^3}{3!}\ \frac{\varphi^4}{4!}\ \dots$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + - \dots$$

Wie elegant die Eulersche Identität ist, sieht man schon bei den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus. Setzen wir die Summe $\alpha + \beta$ zweier beliebiger Winkel ein:

16

$$e^{i(\alpha+\beta)} \overset{\text{Euler}}{=} \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$\|$ Potenzgesetz

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \overset{\text{Euler}}{=} (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \boxed{i\cos\alpha\sin\beta} + \boxed{i\sin\alpha\cos\beta} - \boxed{\sin\alpha\sin\beta}$$

Dann kann man ablesen:

17

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Es lohnt sich aber gar nicht mehr, diese Additionstheoreme auswendig zu lernen: In die Exponentialfunktion sind sie als Potenzrechengesetz eingebaut.

4 Polardarstellung komplexer Zahlen

18

Wenn also $e^{i\varphi}$ eine komplexe Zahl mit Länge 1 und Winkel ϕ ist, lässt sich jede komplexe Zahl z so schreiben:

19

z Länge r, Winkel φ

$\hookrightarrow \boxed{r\cdot e^{i\varphi}}$

Dies heißt „Polardarstellung“. Für $z = 0$ ist der Winkel beliebig; ansonsten ist er bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt.

In der Polardarstellung sind Multiplikation und Division keine Überraschung angesichts der Potenzrechengesetze:

20

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2})$$
$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \underbrace{e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}}_{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

$$z_1 / z_2 = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \underbrace{e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2}}_{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

$z_2 \neq 0$

Die n-te Potenz ($n \in \mathbb{Z}$) fällt ebenfalls leicht:

21

$$z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n$$
$$= r^n e^{in\varphi}$$

Wie die n-ten Wurzeln:

22

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\,\underbrace{\sqrt[n]{e^{i\varphi}}}_{e^{i\frac{\varphi\cdot k2\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{\frac{2\pi k i}{n}}} \qquad \sqrt[5]{3^{10}} = 3^{\frac{10}{5}} = 3^2$$

n-Möglichkeiten!

mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$n = 3$ $\quad e^{\frac{2\pi i k}{3}}$

$k = 0, 1, 2$

5 Vollständige Faktorisierung von Polynomen

Wo die pq-Formel bisher bei quadratischen Gleichungen versagt, weil etwas Negatives unter der Wurzel steht, kann man mit komplexen Zahlen weiterrechnen: $z^2 + 6z + 13 = 0 \Longleftrightarrow$

23

$z = -3 \pm \sqrt{9-13}$
$= -3 \pm \sqrt{-4}$
$= -3 \pm 2i$

Weil das $\pm$ vor der Wurzel die Mehrdeutigkeit anzeigt, ist es in diesem Fall ungefährlich, ein Wurzelsymbol zu schreiben.

Im Regelfall hat eine quadratische Gleichung also nun zwei Lösungen. In Ausnahmefällen sind diese beiden Lösungen gleich (und zwar, wenn 0 unter der Wurzel in der pq-Formel steht). Das geht entsprechend mit Gleichungen höheren Grades:

$$z^4 + z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = 0$$

hat *vier* verschiedene komplexe Zahlen z als Lösung, es sei denn, davon stimmen zufällig welche überein. Das Verhalten ist also viel einfacher als mit reellen Zahlen. (Wie ist es da?)

In komplexen Zahlen hat jedes Polynom mindestens eine Nullstelle. Man kann also immer weiter Linearfaktoren abspalten, so dass sich jedes Polynom in komplexen Zahlen komplett in Linearfaktoren zerlegen lässt (Fundamentalsatz der Algebra).

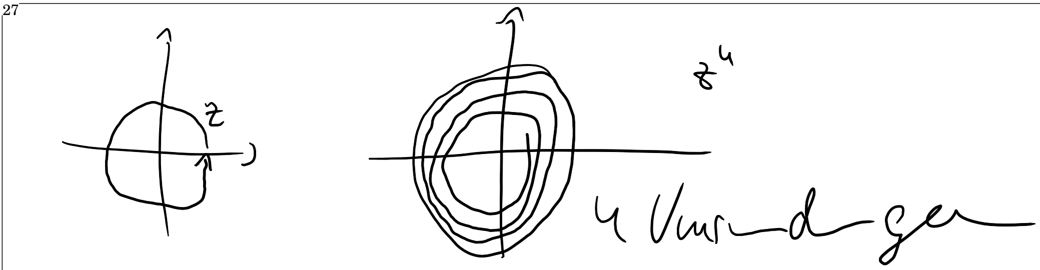
Der strenge Beweis dafür ist haarig, aber man kann sich relativ leicht klar machen, dass jedes Polynom n-ten Grades n komplexe Nullstellen haben muss (die gegebenenfalls untereinander gleich sind).

Beispiel: wieder das Polynom $z^4 + z^3 - 4z^2 + 5z - 2$. Wir setzen für z alle komplexe Zahlen der Form $z = re^{i\phi}$ für alle Winkel ϕ von 0 bis 2π, aber mit fester Länge r ein – also eine komplette Kreislinie mit Radius r. Wenn r dicht bei null ist, gewinnt der Term 24 $+5z - 2$ und es passiert Folgendes:

25

Wenn r sehr groß ist, gewinnt der Term 26 z^4 und es passiert Folgendes:

27



Wenn man also r kontinuierlich von 0 bis unendlich wachsen lässt (Demo am Rechner), müssen sich irgendwann vier Schleifen bilden und nach außen durch den Ursprung wandern – nacheinander oder seltener auch gleichzeitig. Sobald eine Schleife den Ursprung berührt, haben wir eine Nullstelle gefunden, nämlich die jeweilige Zahl $z = r\,e^{i\phi}$. Das *muss* passieren, also gibt es immer eine Nullstelle – zumindest in den komplexen Zahlen.