Relationen

$R \subseteq M \times M$

Fragen?

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ und die Relation R auf M mit $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. Kreuze alle wahren Aussagen an!

- [x] R ist symmetrisch.
- [ ] ~~R ist asymmetrisch.~~ da symmetrisch
- [x] R ist reflexiv.
- [x] R ist transitiv.

symmetrisch: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad (\forall a,b \in M)$ ✓

$(1,1) \in R \wedge (1,1) \in R$, also ✓

$(2,2) \in R \wedge (2,2) \in R$ ✓

$(3,3) \in R \wedge (3,3) \in R$ ✓

reflexiv: $\forall a \in M: (a,a) \in R$ ✓

$a = 1: (1,1) \in R$ ✓

$a = 2: (2,2) \in R$ ✓

$a = 3: (3,3) \in R$ ✓

transitiv: $\forall a,b,c \in M: \underbrace{(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R}_{} \Rightarrow (a,c) \in R$ ✓

wahr $\Longleftrightarrow a = b = c$, dann auch $(a,c) = (a,a) \in R$ ✓

sonst falsch, d.h. wegen „ex falso quodlibet" erfüllt! ✓

Quiz zu Relation.

Gegeben sei die Menge $M = \{1,2,3\}$ und die Relation R auf M mit $R = \{(1,2),(2,1),(2,3),(1,3)\}$. Kreuze alle wahren Aussagen an!

- [ ] R ist ~~asymmetrisch.~~
- [ ] ~~R ist antisymmetrisch.~~
- [ ] ~~R ist transitiv.~~
- [x] R ist irreflexiv.

Lösung überprüfen

$\underline{(a,b)\in R} \iff \underline{a\sim b} \iff \underline{aRb}$

Wdh Logik: $\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q$

Lösung.

asymm: $\forall a,b\in M: (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\notin R$

Negation: $\exists a,b\in M: (a,b)\in R \wedge (b,a)\in R$.

$\exists\, a=1, b=2: \quad (1,2)\in R \wedge (2,1)\in R$ ✗

antisymm: $\forall a,b\in M: (a,b)\in R \wedge (b,a)\in R \Rightarrow a=b$

$(1,2)\in R \wedge (2,1)\in R \wedge 1\neq 2$ ✗

transitiv: $\forall a,b,c\in M: (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$.

$(1,2)\in R \wedge (2,1)\in R \wedge (1,1)\notin R$ ✗

irrefl.: $\forall a\in M: (a,a)\notin R$

$$\left.\begin{array}{ll} a=1 & (1,1)\notin R \checkmark \\ a=2 & (2,2)\notin R \checkmark \\ a=3 & (3,3)\notin R \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow \text{irreflexiv} \checkmark$$

Eigener Lösungsversuch.

$0<1 \quad 0<5 \quad 1<3 \quad 0\not<0$

$R_< = \{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a<b\} = \{\dots,(0,1),(0,5),\dots,(1,3),\dots,\cancel{(0,0)},\dots\}$

$R\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

* **Relationen auf $\mathbb{Z}$.** Betrachten Sie die Relationen auf $\mathbb{Z}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle. Füllen Sie dann folgende Tabelle aus:

	reflexiv?	irrefl.?	symm.?	asymm.?	antisymm.?	trans.?	Äqu. Rel.?	Ordnung?
$<$	✗ $1\not<1$	✓ $\forall a\in\mathbb{Z}: a\not<a$	✗ $1<2$ aber $2\not<1$	✓ $\forall a,b\in\mathbb{Z}: a<b \Rightarrow b\not<a$	✓ $\underbrace{a<b \wedge b<a}_{0} \Rightarrow \dots$ ex falso qu.	✓ $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$	✗	✗
Prototyp einer Ordnung $\leq$	✓ $a\leq a$	✗ $1\leq 1$	✗ $1\leq 2$ aber $2\not\leq 1$	✗ $1\leq 1$ aber $1\leq 1$	✓ $a\leq b \wedge b\leq a \Rightarrow a=b$	✓ $a\leq b \wedge b\leq c \Rightarrow a\leq c$	✗	✓
Prototyp einer Äqu.Rel. $=$	✓ $a=a$	✗ $1=1$	✓ $a=b \Rightarrow b=a$	✗ $1=1$ aber $1=1$	✓ $a=b \wedge b=a \Rightarrow a=b$	✓ $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$	✓	✓
$\equiv$ (mod n)	✓ $a\equiv a$	✗ $1\equiv 1$	✓ $a\equiv b \Rightarrow b\equiv a$	✗ $1\equiv 1$ aber $1\equiv 1$	✗ $6\equiv 4 \wedge 4\equiv 6 \pmod 2$ aber $4\neq 6$	✓ $a\equiv b \wedge b\equiv c \Rightarrow a\equiv c$	✓	✗
„teilt" $\mid$	✓ $a\mid a$ ($a\cdot 1=a$)	✗ $1\mid 1$	✗ $2\mid 4$ aber $4\nmid 2$	✗ $2\mid -2$ aber $-2\mid 2$	✗ $2\mid -2 \wedge -2\mid 2$ aber $2\neq -2$	✓ $a\mid b \wedge b\mid c \Rightarrow a\mid c$	✗	✗

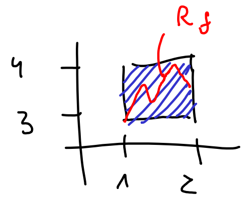
$a\cdot q=b \wedge b\cdot r=c \Rightarrow a\cdot(q\cdot r)=\underbrace{a\cdot q}_{b}\cdot r=c$

($R_| \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist antisymm! & Ordnung auf $\mathbb{N}$)

Eigener Lösungsversuch.

	reflexiv?	irrefl.?	symm.?	asymm.?	antisymm.?	trans.?	Äqu. Rel.?	Ordnung?
$<$								
$\leq$								
$=$								
$\equiv$								
$\mid$								

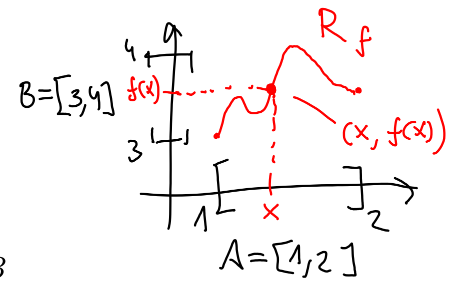
$[1,2] \times [3,4]$



Zusammenhang: Funktion und Relation

Von einer Funktion

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$



bildet der Graph

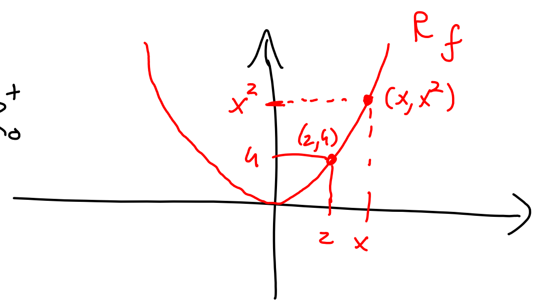
$$R_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

eine Relation, die sogenannte **von f induzierte Relation**. Beispiel:

Graph der Parabel als Relation. Geben Sie die von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ induzierte Relation an und skizzieren Sie diese.

Lösung.

$$R_f = \{ (x, \underbrace{f(x)}_{x^2}) \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$$

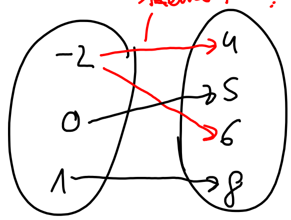


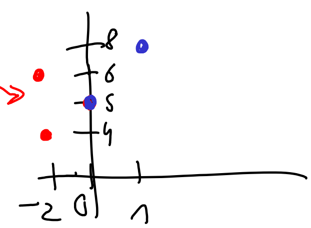
$$x \sim y \iff \underbrace{f(x)}_{x^2} = y$$

Dagegen kann man aus einer Relation i.A. keine Funktion konstruieren. Beispiel:

$$R = \{(-2, 4), (0, 5), (-2, 6), (1, 8)\} \subseteq \{-2, 0, 1\} \times \{4, 5, 6, 8\}$$

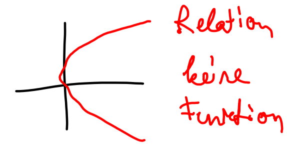
keine Fkt!





Ein weiteres Beispiel wird in den Übungen besprochen.

↝ Umkehrrelation von x^2



Anwendung: relationale Datenbanken. Eine Relation kann man als auch eine Tabelle interpretieren, also:

Relation = Tabelle (Menge aller Datentupel/Zeilen in Tabelle)

Beispiel: Tabellen `product` und `manuf` als Relationen

foreign key

id	name	price	id_manuf
1	iPhone	600.59	1
2	PC	499.0	2
3	Server AIX	9999.00	2
4	Drucker	95.0	3

Tupel

id	name	city
1	Apple	Cupertino
2	IBM	NY
3	HP	Palo Alto

Kartesisches Produkt

$\subseteq \mathbb{N} \times \text{String} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$

$\subseteq \mathbb{N} \times \text{String} \times \text{String}$

Verschiedene Operationen (→ relationale Algebra und SQL) liefern daraus neue Tabellen, z.B. ein `JOIN` der beiden Tabellen liefert eine neue Tabelle/Relation:

SQL: `SELECT * FROM product JOIN manuf ON product.id_manuf=manuf.id`

liefert das Ergebnis

product.id	name	price	id_manuf	manuf.id	name	city
1	iPhone	600.59	1	1	Apple	Cupertino
2	PC	499.0	2	2	IBM	NY
3	Server AIX	9999.00	2	2	IBM	NY
4	Drucker	95.0	3	3	HP	Palo Alto

$\subseteq \mathbb{N} \times \text{String} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \text{String} \times \text{String}$

also: Operationen auf Relationen/Tabellen liefern neue Relationen/Tabellen

Demo Datenbank-Skript. livesql.oracle.com

```
---------
-- DDL --
---------
CREATE TABLE manuf (
   id INTEGER NOT NULL,
   name varchar(45) DEFAULT NULL,
   city varchar(45) DEFAULT NULL,
   PRIMARY KEY (id)
 );
CREATE TABLE product (
  id INTEGER NOT NULL,
  name varchar(45) DEFAULT NULL,
  price float DEFAULT NULL,
  id_manuf INTEGER DEFAULT NULL,
  PRIMARY KEY (id),
  CONSTRAINT fk_manuf FOREIGN KEY (id_manuf) REFERENCES manuf (id)
);
----------
-- DATA --     DML
----------
INSERT INTO manuf (id,name,city) VALUES (1,'Apple','Cupertino');
INSERT INTO manuf (id,name,city) VALUES (2,'IBM','NY');
INSERT INTO manuf (id,name,city) VALUES (3,'HP','Palo Alto');
INSERT INTO product (id,name,price,id_manuf) VALUES (1,'iPhone',600,1);
INSERT INTO product (id,name,price,id_manuf) VALUES (2,'PC',500,2);
INSERT INTO product (id,name,price,id_manuf) VALUES (3,'Server',10000,2);
INSERT INTO product (id,name,price,id_manuf) VALUES (4,'Drucker',400,3);
COMMIT;
---------
-- SQL --
---------
SELECT * FROM product; -- Eine ganze Tabelle lesen
SELECT * FROM product WHERE price < 5000; -- Einen Teil einer Tabelle lesen
SELECT city FROM manuf; -- Projektion auf eine Spalte

-- JOIN zweier Tabellen:
SELECT * FROM product
    LEFT JOIN manuf
    ON product.id_manuf = manuf.id;

-- LEFT JOIN zweier Tabellen:
SELECT * FROM product
    LEFT JOIN manuf
    ON product.id_manuf = manuf.id;
```