Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Integrationsregeln

Fragen?

Partielle Integration. Wiederholung der Formel (Siehe dazu DorFuchs auf YouTube, erste Minute):

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad \text{oder}$$

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx \quad \text{mit } F' = f$$

Anwendung: Integration eines ________________ und g wird durch ________________
Berechnen Sie folgende Integrale:

* a) $\int x\cos(x)\,dx$
* b) $\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$
* c) $\int x\ln(x)\,dx$
* d) $\int \ln(x)\,dx$
* e) $\int \cos(x)\sin(x)\,dx$
* f) $\int x^2 \cdot e^x\,dx$

g) $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

Lösung. Siehe zu a)-f) DorFuchs Mathe-Song auf YouTube zur partiellen Integration:

a.) $\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} dx = [\underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}] - \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} = x\sin(x) + \cos(x) + C$

b.) $\int_0^{\pi} \ldots dx = [x\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi} = (\pi \sin(\pi) + \cos(\pi)) - (0\sin(0) + \cos(0))$

c) $\int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$

d.) $\int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{1} dx = x\ln x - x + C$

Eigener Lösungsversuch.

e) $\int \underset{f'(x)}{\cos(x)}\, \underset{g(x)}{\sin(x)} = \underset{f(x)}{\sin x} \cdot \underset{g(x)}{\sin x} - \int \underset{f(x)}{\sin(x)}\, \underset{g'(x)}{\cos(x)}\,dx \quad | + \int$

$\Leftrightarrow 2\int \cos(x)\sin(x) = \sin^2 x \quad | : 2$

$\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

f.) $\int \underset{g(x)}{x^2}\,\underset{f'(x)}{e^x}\,dx = \underset{f(x)}{e^x}\,\underset{g(x)}{x^2} - \int \underset{\substack{f(x)\\ f'(x)}}{e^x} \cdot \underset{\substack{g'(x)\\ g(x)}}{2x}\,dx = e^x x^2 - e^x \cdot 2x + \underbrace{\int 2e^x}_{2e^x + c}$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

g.) $\int \underset{f'(x)}{e^x}\,\underset{g(x)}{\cos x}\,dx = e^x \cos x - \int e^x \cdot -\sin x = e^x \cos x + e^x \cdot \sin x + \int e^x \cdot \cos(x)$

$| \cdot \int \quad \Leftrightarrow 2\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \cdot \sin(x) + c$

$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$

Substitutionsregel. Wiederholung der Formel:

$$\int f'(u(x))u'(x)dx = f(u(x)) + C \overset{z=u(x)}{=} f(z) + C = \int f'(z)\,dz \quad \text{oder}$$

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \overset{z=u(x)}{=} F(z) + C = \int f'(z)\,dz \quad \text{mit } F' = f$$

Anwendung: Integration eines Produktes und innere Funktion u ist abgeleitet ein ??

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{5x+12}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \cos^3(x) \cdot \sin(x)\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\arctan(z)}{1+z^2}\,dz$

g) $\displaystyle\int \frac{2x+6}{x^2+6x-12}\,dx$

Lösung.

Eigener Lösungsversuch.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+2}$$

* **Partialbruchzerlegung.** Integrieren Sie folgende rationale Funktionen:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - x^2 - 5x + 9}{x^2 + x - 2}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-2x^2 + x + 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$

Lösung. Siehe dazu DorFuchs Mathe-Song auf YouTube zur PBZ:

Eigener Lösungsversuch.