Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

Hochschule Rosenheim
University of Applied Sciences

Eigenwerte

Fragen?

* **Eigenwerte und Eigenvektoren.**

a) Was bedeuten die Eigenwerte bzw. die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geometrisch?

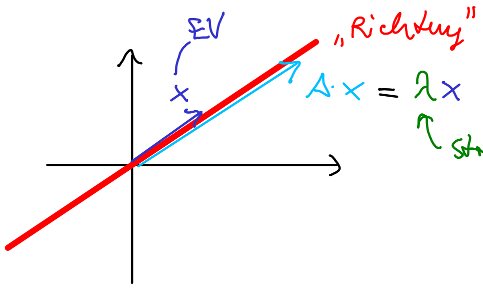
b) Wie berechnet man die Eigenwerte?

c) Wie berechnet man die Eigenvektoren?

Lösung.

a) Falls es EW/EV gibt, so gibt es Richtungen, die bei Matrixmultiplikation erhalten bleiben, d.h. ein Vektor in dieser Richtung wird nur gestreckt!

$n = 2$:



b) EW sind NST des sog. **charakteristischen Polynoms** $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$

Polynom vom Grad n

Beweis. λ EW mit EV $x \neq 0$ von A $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: Ax = \lambda x$

$\Longleftrightarrow$ —"— : $\underbrace{Ax - \lambda x}_{(A-\lambda E_n)x} = 0$ ← homogenes LGS!

$\Longleftrightarrow$ LGS $(A - \lambda E_n)x = 0$ besitzt eine Lösung $x \neq 0$
d.h. nicht eindeutig lösbar!

$\overset{\text{Kriterium}}{\underset{\text{inv. Matrizen}}{\Longleftrightarrow}}$ $\underbrace{\det(A - \lambda E_n)}_{\chi_A(\lambda)} = 0$ $\square$

c) Zu einem festen EW λ berechnet man die dazugehörigen EVen als Lösung des homogenen LGS $(A - \lambda E_n)x = 0$.

Gauß-Alg: $(A - \lambda E_n \mid 0) \sim \ldots$

Eigener Lösungsversuch.

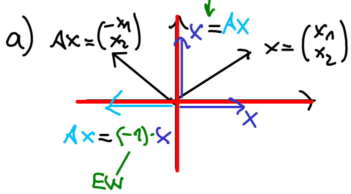
Geometrische Deutung und Berechnung. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A geometrisch und rechnerisch.

a) **Spiegelung.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Spiegelung an x_2-Achse

b) **Streckung.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ ← Streckungsfaktor 3 in x_1-Achse; ← Streckungsfaktor 2 in x_2-Achse

c) **Drehung.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix um } 90^\circ} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung.

a) 

Richtung Spiegelachse (x_2-Achse) bleibt gleich: $Ax = 1 \cdot x$ ← EV zu $\lambda = 1$, d.h. EW 1

Richtung x_1-Achse wird senkrecht gespiegelt: $Ax = (-1)\, x$ ← EV zu $\lambda = -1$

Merke: auf Diagonale „$-\lambda$"

Berechnung: (1.) EW: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(1-\lambda) \overset{!}{\underset{\text{NST}}{=}} 0$

NST sind EW: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

(2.) EV:

$\lambda_1 = -1$: $(A - \lambda_1 E_2 | 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \text{II} \\ \text{I} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

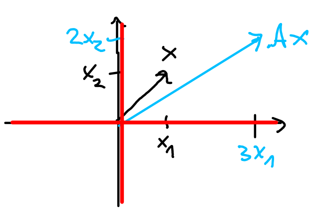
$x_1 = \alpha$ frei

EV zu $\lambda_1 = -1$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_1-Achse

$\lambda_2 = 1$: $(A - 1 \cdot E_2 | 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad -2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = \alpha$ frei

EV zu $\lambda_2 = 1$: $x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ x_2-Achse

b) 

x_1-Achse wird um Faktor $\lambda = 3$ gestreckt: $Ax = 3x$

x_2-Achse — " — $\lambda = 2$ — " — : $Ax = 2x$

Berechnung:

(1.) EW: $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$

Lösung - Fortsetzung.

2. EV:

$\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \begin{array}{c} II \\ I \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\quad -1x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

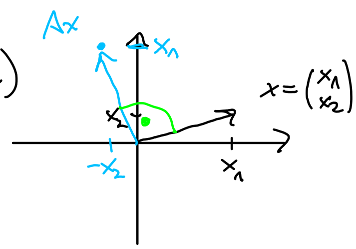
$x_1 = \alpha$

EV: $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_1-Achse wird um EW $\lambda_1 = 3$ gestreckt!

$\lambda_2 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 3-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\quad x_1 = 0$ $\quad$ EV: $x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ x_2-Achse

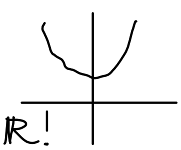
$x_2 = \alpha$

c)



Bei der Drehung um 90° wird keine Richtung erhalten, d.h. keine EW/EV!

Berechnung: 1. EW: $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\underbrace{0-\lambda}_{-\lambda})^2 - 1\cdot(-1) = \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0$



keine NST in $\mathbb{R}$!

(in $\mathbb{C}$ schon: $\pm i$, wird nicht in VL behandelt!)

d.h. keine EW, also auch keine EV!

$\boxed{\text{Im 3-Dim.} \curvearrowright \text{Folien}}$

Eigener Lösungsversuch.