Prof. Dr. M. Helbig
Mathematik – Übung

# Taylorpolynome und Potenzreihen

**Fragen?**

*** Bedeutung Taylorpolynom.**

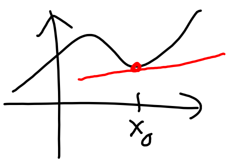
a) Was ist das Taylorpolynom 1. Grades einer Funktion an der Stelle $x_0$?

b) Was ist das Taylorpolynom 2. Grades einer Funktion an der Stelle $x_0$?

c) Wie lautet die Formel für das Taylorpolynom $n$-ten Grades einer Funktion an der Stelle $x_0$?

**Lösung.**

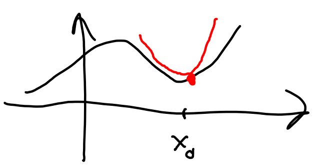
a) Tangente an $x_0$ (lineare Approximation von $f$):




$$T_1(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

- geht durch $(x_0, f(x_0))$: $T_1(x_0) = f(x_0)$
- gleiche Steigung wie $f$: $T_1'(x_0) = f'(x_0)$

b) Schmiegeparabel an $x_0$ (quadrat. Approx. von $f$):




$$T_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

- geht durch $(x_0, f(x_0))$: $T_2(x_0) = f(x_0)$
- gleiche Steigung wie $f$: $T_2'(x_0) = f'(x_0)$
- gleiche Krümmung wie $f$: $T_2''(x_0) = f''(x_0)$

c)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{k=0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{k=1}}_{T_1(x)\ \text{Tangente}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{k=2}}_{T_2(x)\ \text{Schmiegeparabel}} + \underbrace{\frac{f'''}{3!}(x-x_0)^3}_{k=3} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n}_{k=n}$$

**Eigener Lösungsversuch.**

* **Taylorpolynome Sinus.** Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grade $n = 1,\ 3\ ,5\ ,7$. (siehe dazu Bild auf Homepage)
Vergleichen Sie dann $T_1(0,5), T_3(0,5), T_5(0,5), T_7(0,5)$ mit $f(0,5)$.

**Lösung.**

$$T_7(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5 + \frac{f^{(6)}(x_0)}{6!}(x-x_0)^6 + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}(x-x_0)^7$$

$$= \underbrace{\sin(0)}_{0} + \underbrace{\cos(0)}_{1}(x-0) + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{2}}_{0}(x-0)^2 + \underbrace{\frac{-\cos(0)}{3!}}_{-\frac{1}{3!}}(x-0)^3 + \underbrace{\frac{\sin(0)}{4!}}_{0}(x-0)^4 + \underbrace{\frac{\cos(0)}{5!}}_{\frac{1}{5!}}(x-0)^5 + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{6!}}_{0}(x-0)^6 + \underbrace{\frac{-\cos(0)}{7!}}_{-\frac{1}{7!}}(x-0)^7$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$$

$$T_5(x)$$

$$T_7(x)$$

(↝ Bild HP!)

$$f(0,5) = \sin(0,5) \overset{TR}{=} 0,4794255386042\ldots$$

$$T_1(0,5) = \quad = 0,5$$

$$T_3(0,5) = 0,5 - \frac{1}{3!}0,5^3 = 0,4791\overline{6}$$

$$T_5(0,5) = T_3(0,5) + \frac{1}{5!}0,5^5 = 0,4794270\overline{83}$$

$$T_7(0,5) = T_5(0,5) - \frac{1}{7!}0,5^7 = 0,4794255332\ldots$$

$$\downarrow \text{Grad } n \to \infty$$

$$f(0,5)$$

**Eigener Lösungsversuch.**

**Taylorpolynome Cosinus.** Berechnen Sie die Taylorpolynome von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ vom Grad $n = 0$ ,2 ,4. (siehe dazu Bild auf Homepage)

**Lösung.**

$$T_4(x) = \cos(0) + \underbrace{\frac{-\sin(0)}{1}}_{0}(x-0) + \frac{-\cos(0)}{2}(x-0)^2 + \underbrace{\frac{\sin(0)}{3!}}_{0}(x-0)^3 + \frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{T_0(x)=1} - \frac{1}{2}x^2}_{T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{4!}x^4}_{T_4(x)}$$

($\rightsquigarrow$ Bild HP)

**Eigener Lösungsversuch.**

**Taylorpolynome Logarithmus.** Berechnen Sie $T_1, T_2, T_3$ von $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$. (siehe dazu Bild auf Homepage)

**Lösung.**

$$T_3(x) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + \frac{\frac{1}{1}}{1!}(x-1) + \frac{-\frac{1}{1^2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{2\frac{1}{1^3}}{3!}(x-1)^3$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)}_{T_1(x)} - \frac{1}{2}(x-1)^2}_{T_2(x)} + \frac{1}{3}(x-1)^3}_{T_3(x)}$$

( $\curvearrowright$ Bild HP )

**Eigener Lösungsversuch.**

*** Konvergenzradius einer Potenzreihe.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ?

**Lösung.**

**Eigener Lösungsversuch.**

**Taylorreihe.** Geben Sie die Taylorreihe von folgenden Funktionen an und bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe konvergiert (vgl. Bilder auf Homepage):

a) $f(x) = \sin(x)$ , $x_0 = 0$

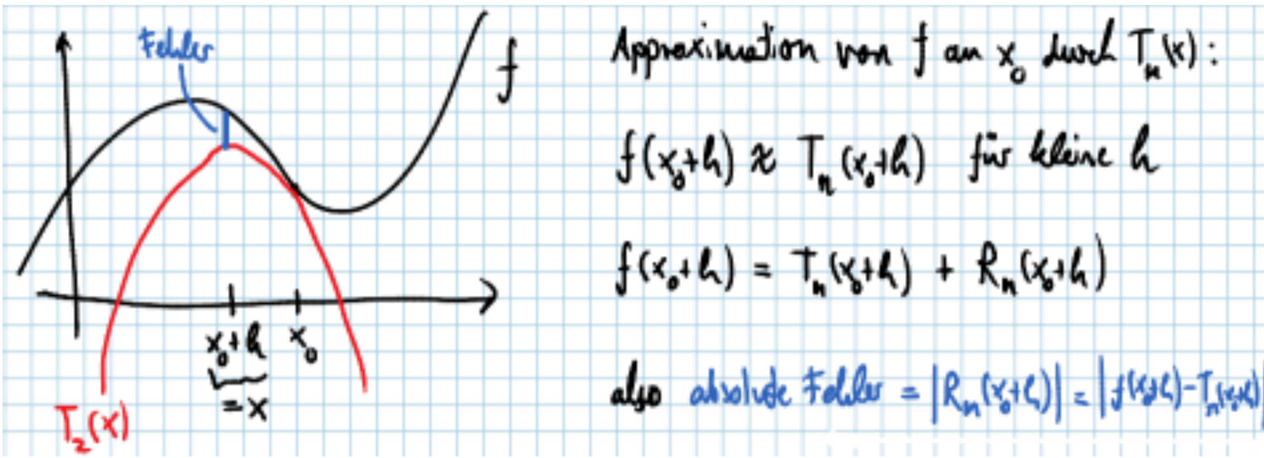
b) $f(x) = \cos(x)$ , $x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln(x)$ , $x_0 = 1$

**Lösung.**

**Eigener Lösungsversuch.**

## Restglied und absoluter Fehler




## Restgliedabschätzung

Diesen absoluten Fehler kann man nach oben abschätzen:

$|R_n(x)| \leq C \cdot \underline{\qquad\qquad}$ mit $C$ ist obere Schranke von $\underline{\qquad\quad}$ in $\underline{\qquad\quad}$

**Taschenrechner-Algorithmus.** Was ist $\sin(0,5)$?

a) Approximieren Sie dies durch das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Schätzen Sie den Fehler ab (Restgliedabschätzung).

**Lösung.**

**Eigener Lösungsversuch.**