



GGT UND KGV

Fragen?

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid a\} \\ x \in T(a) \cap T(b) & \stackrel{\text{Bef. von } \cap}{=} x \in T(a) \wedge x \in T(b) \quad // \\ & \Leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \mid a \wedge x \mid b, \text{ d.h. } x \in \mathbb{N} \text{ ist ein gT von } a \text{ \& } b. \end{aligned}$$

$$a = 4, \quad b = 6 \quad \text{kgV}(4, 6) = 12$$

$$T(a) = \{1, 2, 4\}$$

$$T(b) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$T(a) \cap T(b) = \{1, 2\}$$

↖ Menge ↗

$$a = 2, \quad b = 3$$

$$T(a) = \{1, 2\}$$

$$T(b) = \{1, 3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(a) = \{1, 2\} \\ T(b) = \{1, 3\} \end{array} \right\} \Rightarrow T(a) \cap T(b) = \{1\}$$

↖ Menge ↗

ggT und kgV. Bestimmen Sie:

* 1. ggT(120, 3500)

2. ggT(720, 100)

* 3. kgV(120, 3500)

4. kgV(720, 100)

5. $\frac{120}{3500}$ kürzen! mit ggT! $\frac{120}{3500} = \frac{6 \cdot 20}{175 \cdot 20} = \frac{6}{175}$ vollständig gekürzt
↓

6. $\frac{1}{720} + \frac{1}{100}$ kleinster gemeinsamer Nenner! = kgV(720, 100) = 3600 $\frac{1}{720} + \frac{1}{100} = \frac{5 + 36}{3600} = \dots$

Lösung.

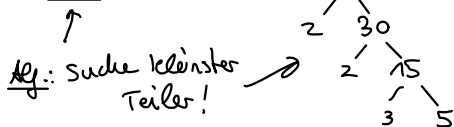
Wdh: ggT bestimmen über

• PFZ

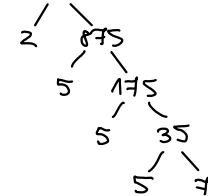
• Definition ggT: Maximum über Schnitt der Teilmengen
 $\underbrace{\quad}_g \quad \underbrace{\quad}_{g^T}$

• Euklidischer Alg. (später)

1. PFZ: $120 = 2 \cdot 60 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^1 \cdot 7^0$



$3500 = 2 \cdot 1750 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \cdot 3^0$



$\Rightarrow \text{ggT}(120, 3500) = 2^{\min(3,2)} \cdot 3^{\min(1,0)} \cdot 5^{\min(1,3)} \cdot 7^{\min(0,1)} = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 4 \cdot 5 = \underline{20}$

2. Def: $\text{ggT}(720, 100) = \max(T(a) \cap T(b)) = \underline{20}$

$T(720) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720\}$

$T(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

Schneller: Nimmere kleinere Zahl und prüfe mit deren Teiler von groß nach klein, ob diese die größere Zahl teilen

3. Wdh: kgV über

• PFZ

• Def: Minimum vom Schnitt der Vielfachenmengen
 $\underbrace{\quad}_k \quad \underbrace{\quad}_{gV}$

• Formel: $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$

PFZ: s.o.: $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0$
 $3500 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 7^1$ $\Rightarrow \text{kgV}(120, 3500) = 2^{\max(3,2)} \cdot 3^{\max(1,0)} \cdot 5^{\max(1,3)} \cdot 7^{\max(0,1)} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1 = 21.000$
max der Exponenten

4. Formel: $\text{kgV}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggT}(a, b)} = \frac{720 \cdot 100}{20} = \underline{3600}$

Def: $V(720) = \{720, 1440, 2160, 2880, \underline{3600}, \dots\}$ $V(100) = \{100, 200, 300, \dots, 3500, \underline{3600}, \dots\}$

Eigener Lösungsversuch.

* Algorithmus PFZ.

1. Was besagt der "Satz vom kleinsten Teiler"?

2. Beschreiben Sie den Algorithmus

$$72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot (2 \cdot 18) = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 9)) = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (3 \cdot 3)))$$

allgemein. *Hinweis*: siehe 1.

3. Implementieren Sie den Algorithmus von 2. in C.

(
n suche kleinster Teiler $d=3$,
iteriere mit $n/d = 3/3 = 1$

↑
hier fertig!
letzte Zahl n
war Primzahl!

Lösung.

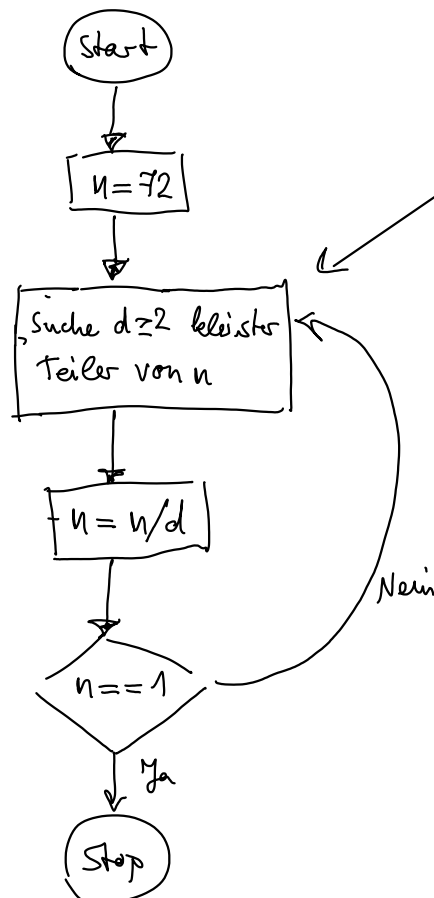
1. Sei $n \geq 2$. Dann ist der kleinste Teiler $d \geq 2$ von n eine Primzahl.

2. Suche kleinster Teiler $d|n$, iteriere auf n/d ...

z.B.

$$2|72$$

$$72/2 = 36 \dots$$



Kann optimiert werden,
nur bis \sqrt{n} testen, dann
automatisch $d=n$ prim!

Eigener Lösungsversuch.