

3. Zufallsvariablen (ZV)

Lernziele:

- Sie haben eine Vorstellung von dem Begriff Zufallsvariable.
- Sie kennen die Eigenschaften und Unterschiede diskreter und stetiger Verteilungsfunktionen von ZVs.
- Sie können zu einer Dichtefunktion die Verteilungsfunktion einer ZV bestimmen und umgekehrt.
- Sie können mit Hilfe der Verteilungsfunktion Wahrscheinlichkeiten berechnen.
- Sie kennen die Bedeutung von Erwartungswert und Varianz einer ZV, auch in Zusammenhang mit der Chebyshev-Ungleichung.
- Sie verstehen die Bedeutung der Unabhängigkeit von ZVs.
- Sie wenden die Eigenschaften von Erwartungswerten und Varianzen auf transformierte ZVs und Summen von ZVs richtig an.

Literatur:

- Teschl Band 2, Kap. 27
- Arens et al., Kap 38.1 - 38.3
- Zucchini, Kap. 4

3.1 Zufallsvariable

Abbildung des "abstrakten" Ergebnisraums Ω auf \mathbb{R} .

Definition Zufallsvariable:

Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega) = x$ heißt Zufallsvariable (ZV).
 $x \in \mathbb{R}$ heißt Realisation der ZV X .

- **Diskrete ZV:** $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$)
z. B. X = "Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln"
- **Stetige ZV:** $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$
z. B. X = "Körpergröße eines Menschen"
- **Eindimensionale ZV:** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- **Mehrdimensionale ZV:** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$
z. B. $(X_1, X_2) =$ ("Anzahl der Jungen", "Anzahl der Mädchen")

3.2 Verteilungsfunktion

Die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ für ein Ereignis B in \mathbb{R} wird zurückgeführt auf die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Ereignisse in Ω :

$$P(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$$

Definition Verteilungsfunktion:

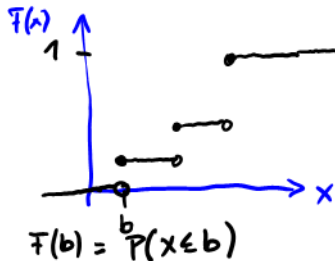
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ einer ZV X definiert durch

$$F(x) = P(X \leq x)$$

kumulierte
Wahrscheinlichkeiten

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{x \rightarrow b+} F(x) = F(b)$
- monoton wachsend
- $P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

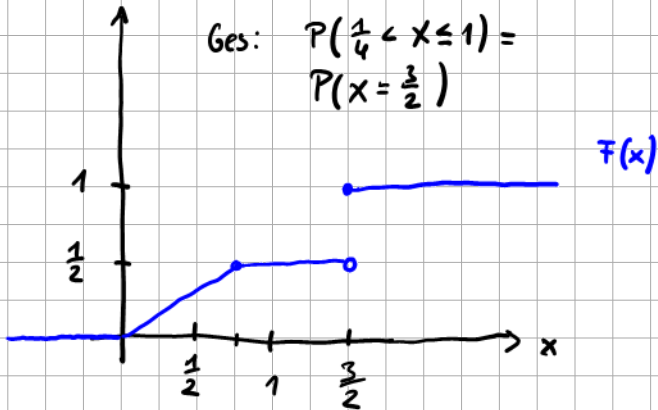


Beispiel:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{2}{3}x & , 0 \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & , \frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & , x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

rechtsseitig
stetig ✓

Ges: $P\left(\frac{1}{4} < X \leq 1\right) =$
 $P\left(X = \frac{3}{2}\right)$



Berechnen Sie $P(\frac{1}{4} < X \leq 1)$ und $P(X = \frac{3}{2})$

$$P(\frac{1}{4} < X \leq 1) = F(1) - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P(X = \frac{3}{2}) &= P(X \leq \frac{3}{2}) - P(X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} F(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Sprunghöhe}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = \frac{1}{2}) &= \underbrace{P(X \leq \frac{1}{2})}_{\substack{\approx \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} F(x) \\ \text{rechtsseitig stetig}}} - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} F(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \\ &\quad (\text{stetiger Übergang}) \end{aligned}$$

3.2.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Für eine diskrete ZV X mit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (n endlich oder abzählbar unendlich) ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{falls } x = x_i \in X(\Omega) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

- $0 \leq p(x) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

Es gilt:

- $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- $F(x)$ ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprüngen bei den Realisationen x_i .

Beispiele:

(1) X : "Anzahl der Richtigen im Lotto 6 aus 49"

Realisationen $x_i = i$ mit $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$

$$|\Omega| = \binom{49}{6}$$

$$p(0) = \frac{\binom{43}{6} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{49}{6}}, \text{ allgemein: } p(i) = \frac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

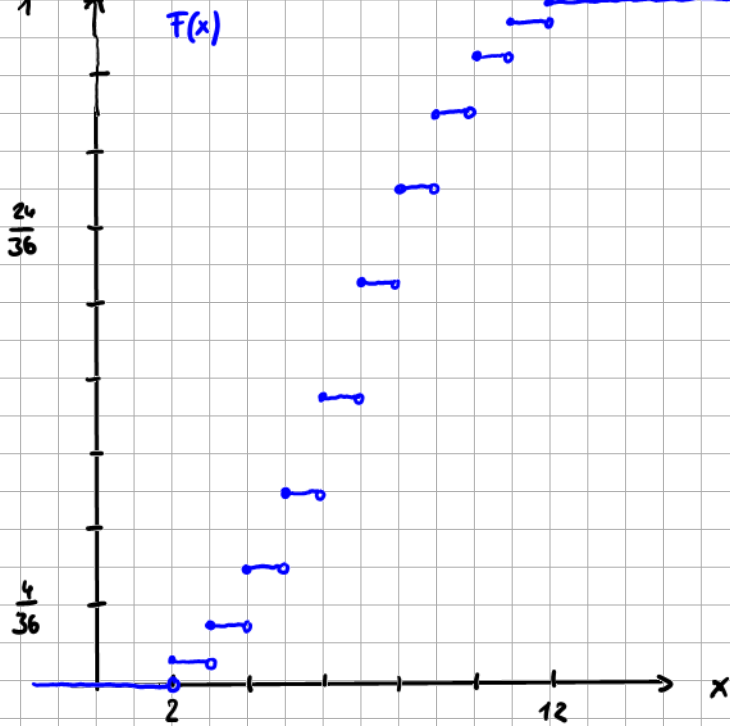
$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}, & \text{für } i \in \{0, 1, \dots, 6\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne Wahrscheinlichkeit "mindestens 3 Richtige",
mit Verteilungsfunktion "höchstens 2 Richtige"

(2) X : "Augensumme beim Würfeln mit 2 Würfeln"

Realisationen $x_i \in \{2, 3, \dots, 12\}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , \text{ für } x=2 \vee x=12 \\ \frac{2}{36} & , \text{ für } x=3 \vee x=11 \\ \frac{3}{36} & , \text{ für } x=4 \vee x=10 \\ \frac{4}{36} & , \text{ für } x=5 \vee x=9 \\ \frac{5}{36} & , \text{ für } x=6 \vee x=8 \\ \frac{6}{36} & , \text{ für } x=7 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$



3.2.2 Stetige Zufallsvariablen

Definition Wahrscheinlichkeitsdichte:

Für eine stetige ZV X ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ definiert durch

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Verteilungsfunktion

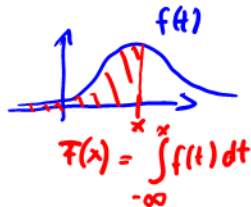
Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

sicheres Ereignis

Es gilt:

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ und $F'(x) = f(x)$



- $F(x)$ ist stetig und

! $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

Beispiel 3.2.2:

An einer Bushaltestelle fahren die Busse im 10 Minutentakt.

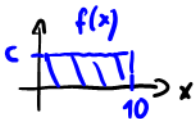
Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss eine Person, die zu einem zufälligen Zeitpunkt an die Bushaltestelle kommt $x \in [0, 10[$ Minuten auf den nächsten Bus warten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person zwischen 3 und 5 Minuten warten muss?

X : "Wartezeit an der Haltestelle"

Dichtefunktion $f(t) = \begin{cases} c, & \text{für } t \in [0; 10[\\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad t: \text{Zeit}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 = \int_0^{10} c \, dt = [c \cdot t]_0^{10} = 10 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{10}$$



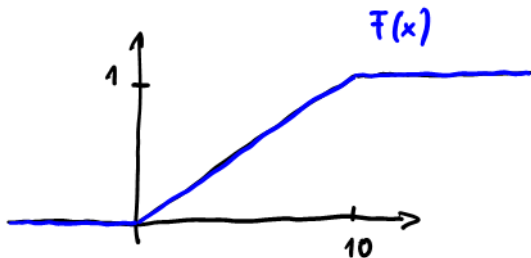
$$\text{Ges.: } P(3 < x < 5) = \int_3^5 \frac{1}{10} dt = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Verteilungsfunktion:

$$P(3 < x < 5) = F(5) - F(3) \\ = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{10} dt = \left[\frac{1}{10} t \right]_0^x = \frac{1}{10} x & , 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

Merke: Die Verteilungsfunktion einer stetigen ZV ist immer stetig!



Bsp.: 3.2.3

Geg.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfkt. $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -1 \\ \int_{-1}^x \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{2} t \right]_{-1}^x = \frac{1}{2} x - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Bsp. 3.2.4:

Geg.: Dichtefkt. $f(x) = \begin{cases} c(x^2-4), & -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

einer stetigen ZV.

a) Für welches c handelt es sich um eine Dichtefunktion?

$$\begin{aligned} \text{Bed.: } 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_{-2}^2 (x^2-4) dx = c \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{-2}^2 \\ &= c \left(\underbrace{\frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right)}_{-\frac{32}{3}} \right) \Rightarrow c = -\frac{3}{32} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ -\frac{3}{32} \int_{-2}^x (t^2 - 4) dt = -\frac{3}{32} \left(\frac{1}{3} x^3 - 4x \right) + \frac{1}{2} & , \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \star \quad -\frac{3}{32} \left[\frac{1}{3} t^3 - 4t \right]_{-2}^x &= -\frac{3}{32} \left(\frac{1}{3} x^3 - 4x \right) - \underbrace{\left(-\frac{3}{32} \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) \right)}_{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{3}{32} \left(\frac{1}{3} x^3 - 4x \right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Was unterscheidet diskrete und stetige Zufallsvariablen?

Diskrete ZV

- Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(x) = \begin{cases} P(X=x_i), & \text{für Realisation } x_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

- Verteilungsfkt. $F(x)$ ist rechtsseitig stetige Treppenfkt.

Sprunghöhen:

$$P(X=x_i) = F(x_i) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) \neq 0$$

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
i.a.
 $\neq P(a \leq X \leq b)$ bzw. $P(a < X < b)$
bzw. $P(a \leq X < b)$

Stetige ZV

- Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

- Verteilungsfkt. $F(x)$ ist stetig mit $F'(x) = f(x)$

$$P(X=x_i) = 0 \quad (\text{wegen Stetigkeit})$$

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
 $= P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
 $= P(a \leq X < b)$

3.3 Erwartungswert

Definition Erwartungswert:

Der Erwartungswert $E[X] = \mu$ einer ZV X ist der Schwerpunkt ihrer Verteilung. *durchschnittlich zu erwartender Wert*

Für diskrete ZV:
$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$$

Für stetige ZV:
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Beispiele 3.3:

- (1) Bei einem Gewinnspiel mit 2 Würfeln, entspricht der Gewinn der maximal gewürfelten Augenzahl ^{von den 2 Würfeln}. Jeder Spieler muss einen Einsatz d zahlen. Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist, d.h. der Einsatz dem zu erwartenden Gewinn entspricht?

$$X \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad E[X] = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot p(x_i)$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & , x=1 \\ \frac{3}{36} & , x=2 \\ \frac{5}{36} & , x=3 \\ \vdots & \\ \frac{11}{36} & , x=6 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 6 \cdot \frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36} \approx 4,5 \end{aligned}$$

Beispiele 3.3:

- (2) Wie groß ist die durchschnittliche Wartezeit auf einen Bus, der im 10 Minutentakt fährt?

Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{10} = 5$$

Satz 3.1:

Sei $Y = g(X)$ eine Funktion der ZV X . Dann gilt

- für diskrete ZV: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p(x_i)$
- für stetige ZV: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$

Eigenschaften des Erwartungswerts:

- $E[b] = b$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$ verschiebt Erwartungswert
- $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$ "Linearität"

Beispiele 3.3:

- (3) X sei die Ausfallzeit eines Rechners in einem Rechnernetz mit Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Wie hoch sind die durchschnittlich zu erwartenden Kosten $g(X) = X^3$ (in Hundert Euro) für einen Rechnerausfall? Ges: $E[g(X)]$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \\ (\hat{=} 25 \text{ Euro})$$

Beispiele 3.3:

- (4) Auf 20 verschiedene Prozessoren, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden, sollen $k = 10$ Stapelaufträge verteilt werden. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl verschiedener Prozessoren in der Auswahl.

Dabei ist die Anzahl Y verschiedener Prozessoren

$$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i \quad \text{mit } X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Prozessor } i \text{ mind. einmal ausgewählt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

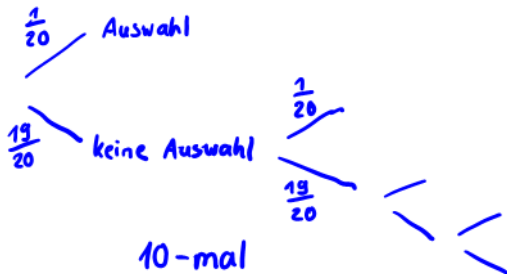
↑
Indikatorvariable

$$p(x_i) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{10}, & x_i = 1 \\ \left(\frac{19}{20}\right)^{10}, & x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X_i] = 1 \cdot p(1) + 0 \cdot p(0)$$

$$\begin{aligned} \text{Ges.: } E[Y] &= E\left[\sum_{i=1}^{20} X_i\right] \stackrel{\text{Formel}}{=} \sum_{i=1}^{20} E[X_i] = 20 \cdot E[X_i] \\ &= 20 \cdot \left(1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right) \approx 8 \end{aligned}$$

Prozessor i



3.4 Varianz und Kovarianz

Definition Varianz:

Die Varianz einer ZV X mit Erwartungswert μ ist ein quadratisches Streuungsmaß und ist definiert durch

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2].$$

Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$ hat im Gegensatz zur Varianz die gleiche Dimension wie die ZV X .

Satz 3.2: Verschiebungssatz

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Beweis: $\text{Var}[X] \stackrel{\text{Def.}}{=} E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$

$$= E[X^2] + E[-2\mu X] + E[\mu^2] = E[X^2] - 2\mu \cdot E[X] + \mu^2$$

$\mu = E[X]$ *konstant*

$$= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

Eigenschaften der Varianz:

- $\text{Var}[b] = 0$
- $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X] \quad (*) \quad \text{Var}[aX+b] = a \cdot b$
- $\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = ?$

Z-Transformation, Standardisierung:

Sei X eine ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann ist

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} (X - \mu) = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

die sog. standardisierte ZV mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

$$\text{Beweis: } E[Z] = E\left[\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[X] - \frac{\mu}{\sigma} \stackrel{\mu = E[X]}{=} \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}\left[\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right] \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}[X] \stackrel{\sigma^2 = \text{Var}[X]}{=} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

nicht
prüfungsrelevant

Definition gemeinsame Verteilungsfunktion:

Die gemeinsame Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ zweier ZV (X, Y) ist definiert durch $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Es gilt:

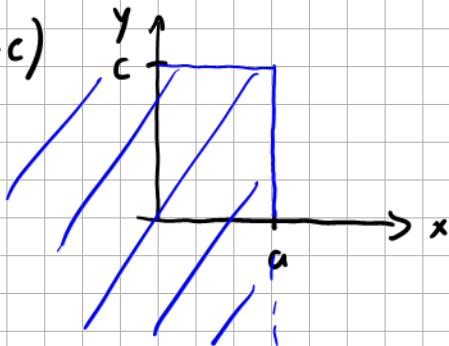
- $F(a, c) = P(X \leq a, Y \leq c) = P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq c\})$
- $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$
- Randverteilungen F_X bzw. F_Y der ZV X bzw. Y :
 $F_X(a) = P(X \leq a) = P(X \leq a, Y < \infty)$
 $F_Y(c) = P(Y \leq c) = P(X < \infty, Y \leq c)$

Definition gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier **diskreter** ZV (X, Y) ist definiert durch $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

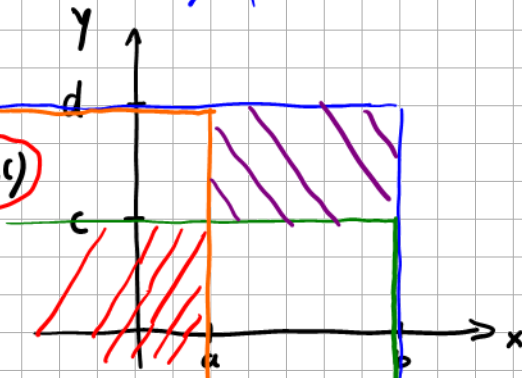
Es gilt: $F(a, c) = P(X \leq a, Y \leq c) = \sum_{x_i \leq a} \sum_{y_j \leq c} p(x_i, y_j)$

$$F(a, c) = P(X \leq a, Y \leq c)$$



$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$$

$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$



nicht prüfungsrelevant

Definition Kovarianz:

Die Kovarianz zweier ZV (X, Y) ist definiert durch

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Die Kovarianz beschreibt die Abhängigkeit zweier ZV X und Y . Je stärker diese korrelieren, desto (betragsmäßig) größer ist die Kovarianz.

X, Y (stochastisch) unabhängig $\implies \text{Cov}[X, Y] = 0$

prüfungsrelevant

Satz 3.3: Verschiebungssatz Kovarianz

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

Eigenschaften der Kovarianz:

- $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$
- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$
- $\text{Cov}[aX, Y] = a \text{Cov}[X, Y]$

Für die Varianz einer Summe von ZV gilt:

- $$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[X_i, X_j]$$

$$\text{Var}[X_1 + X_2] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + 2\text{Cov}[X_1, X_2] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \text{Cov}(X_i, X_j)$$

- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig:

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$$

prüfung relevant

$$= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_1) + \text{Cov}(X_2, X_2)$$

Beispiel 3.4:

(stochastisch)

Ein Kommunikationssystem besteht aus 10 Komponenten, die unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ funktionieren. Bestimmen Sie die Varianz der ZV $Y =$ "Anzahl der funktionsfähigen Komponenten":

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad \text{mit } X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Komponente } i \text{ funktioniert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] \stackrel{\substack{\text{stochastisch} \\ \text{unabh.}}}{=} \sum_{i=1}^{10} \text{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^{10} \left(E[X_i^2] - (E[X_i])^2\right) \\ &= 10 \cdot \left(\overbrace{E[X_i^2]}^{0.1} - \left(\overbrace{E[X_i]}^{0.01}\right)^2\right) = 10 \cdot 0.09 = 0.9 \end{aligned}$$

$$E[X_i] = \sum_{i=0}^1 x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.1 = 0.1$$

$$E[X_i^2] = \sum_{i=0}^1 x_i^2 \cdot p(x_i) = 0^2 \cdot 0.9 + 1^2 \cdot 0.1 = 0.1$$

Übersicht: Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$

(Falls X_1, X_2 unabhängig:)

$$E[X_1 X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2]$$

Varianz

- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

- Falls X_i, X_j paarweise unabhängig:

$$Var[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n Var[X_i]$$



3.5 Quantile

Definition p -Quantil:

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $0 < p < 1$.

Dann ist das p -Quantil definiert als der kleinste Wert $x_p \in \mathbb{R}$ für den gilt:

$$F(x_p) \geq p.$$

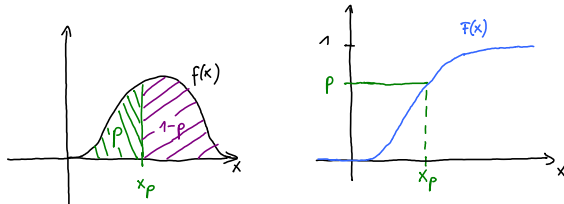


Abbildung: p -Quantil einer stetigen ZV mit **streng** monoton wachsendem $F(x)$:

$$x_p = F^{-1}(p)$$

Beispiel 3.5:

Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x, & 0 \leq x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$



Bestimmen Sie das 1., 2. und 3. Quartil.

$x_{0.25}$: $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$ Für welches x nimmt $F(x)$ den Wert $\frac{1}{4}$ an? (bei stetigem F)

$x_{0.5}$: $x_{0.5} = \frac{3}{4}$ (kleinster x -Wert mit $F(x) = 0.5$)

$x_{0.75}$: $x_{0.75} = \frac{3}{2}$ (kleinster x -Wert mit $F(x) \geq 0.75$)

3.6 Chebyshev-Ungl., schwaches Gesetz der großen Zahlen

nicht prüfungsrelevant

Satz 3.4: Chebyshev-Ungleichung

Sei X eine ZV mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt für eine beliebige reelle Zahl $k > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Es folgt mit der Chebyshev-Ungleichung und

$$E[X_i] = \mu, \text{Var}[X_i] = \sigma^2 \implies E[\bar{X}] = \mu, \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Satz 3.5: Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und Varianz $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$.

Dann gilt für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$:

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

d.h. der MW \bar{X} konvergiert stochastisch gegen den EW μ .

Vor.: $E[X_i] = \mu$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$

X_i stochastisch unabhängig

Zu zeigen: $E[\bar{X}] = \mu$, $\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$

$$E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n} (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{stoch. unabh.}}}{=} \frac{1}{n^2} (\text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$$