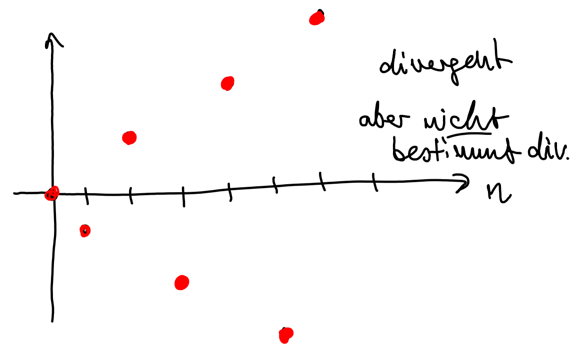
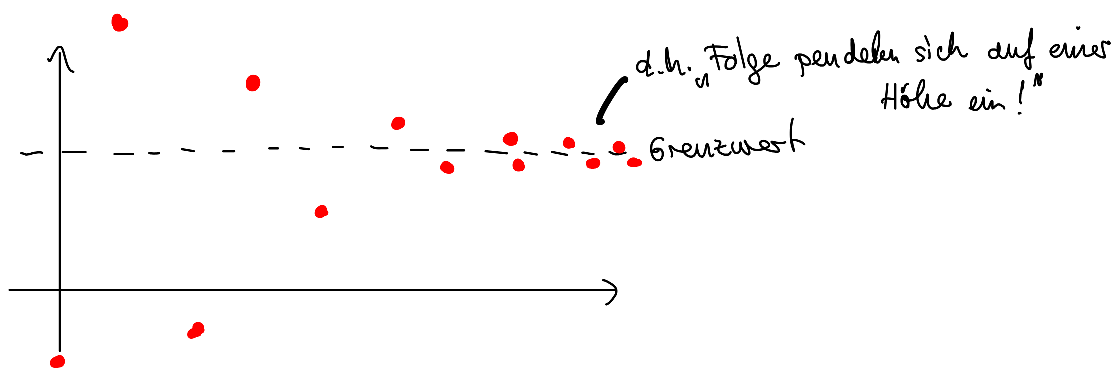
Folgen

Fragen?

Divergenz vs. bestimmte Divergenz: $a_n = (-1)^n \cdot n$



Konvergenz:



* **Folgen.** Für folgende Folgen machen Sie bitte das Folgende:

- Zeichnen Sie die Folgen in einem Graphen.
- Sind die Folgen beschränkt?
- Sind die Folgen monoton wachsend oder monoton fallend?
- Sind die Folgen konvergent (Grenzwert?), divergent oder bestimmt divergent?

a) $a_n = n!,\ n \in \mathbb{N}_0$ $\qquad n! := \prod_{i=1}^{n} i \qquad 0! = \prod_{i=1}^{0} i := 1$ ← leeres Produkt

b) $a_n = \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

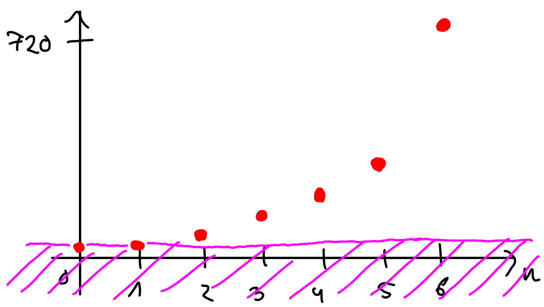
c) $a_n = (-1)^n\ ,\ n \in \mathbb{N}_0$

Lösung.

a) Fakultät:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
a_n	$0!=1$	$1!=1$	$2!=2\cdot 1$	$3!=3\cdot\underbrace{2!}_{2}$	$4!=4\cdot\underbrace{3!}_{6}$	120	720	...

$\cdot 3 \qquad \cdot 4 \qquad \cdot 5 \qquad \cdot 6$; 24



mo wa (nicht streng, da $a_0 = 1 = a_1$):

$$a_{n+1} = (n+1)! = \underbrace{(n+1)}_{\geq 1}\cdot n! \geq n! = a_n$$

nicht beschränkt, nur nach unten beschränkt:

$$a_n = n! \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

untere Schranke

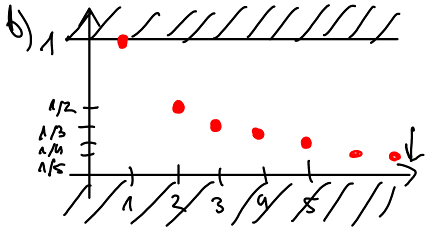
konvergent? Nein, da nicht beschränkt. D.h. divergent. Hier sogar bestimmt divergent gegen $+\infty$.

In Zeichen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ / $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(da nach oben unbeschränkt & ab $n \geq 1$ streng mo wa)

Bitte nicht: ~~$\lim a_n \to \infty$~~ ⚠ ~~$a_n = \dots = \lim a_n$~~

b)



nach oben beschränkt $a_n \leq 1$

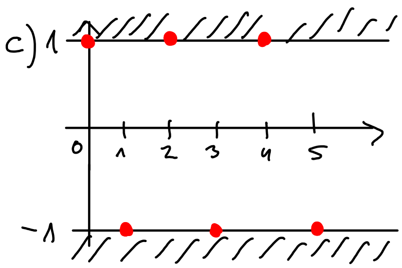
streng mo fa

konvergent gegen 0: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

nach unten beschränkt $a_n > 0$

→ beschränkt

c)



$a_n \leq 1$ nach oben beschränkt

nicht monoton

nicht konvergent, d.h. divergent (nicht bestimmt)

$a_n \geq -1$ nach unten beschränkt

→ beschränkt

Eigener Lösungsversuch.

Zinseszins. Sie legen auf ein Tagesgeldkonto ein Kapital $K_0 = 1000$ € zu einem Zinssatz von 2% p.a. an. Wie viel Kapital haben Sie nach n Jahren? Überlegen Sie sich eine Folge K_n, wobei K_n das Kapital im Jahre n ist.

Lösung.

nach 0 Jahren (Jetzt!) : $K_0 = 1000€$

nach 1 Jahr : $K_1 = K_0 + \underbrace{0{,}02 \cdot K_0}_{\text{Zins}} = 1{,}02 \cdot K_0$

nach 2 Jahren : $K_2 = K_1 + 0{,}02 \cdot K_1 = 1{,}02 \cdot K_1 = 1{,}02^2 \cdot K_0$

$\vdots$

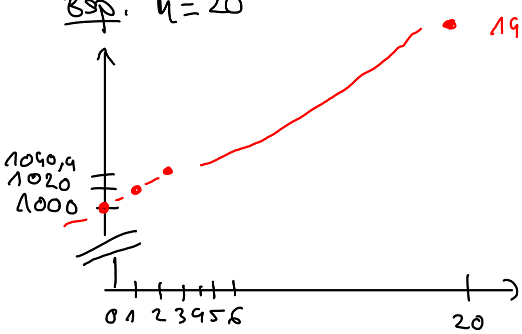
nach n Jahren : $K_n = K_{n-1} + 0{,}02 \cdot K_{n-1} = \underbrace{1{,}02 \cdot K_{n-1}}_{\text{rekursiv (Excel)}} = \underbrace{1{,}02^n \cdot K_0}_{\text{explizite Formel (Exponentialfkt. in n)}}$

$\cdot 1{,}02$

exponentiell

$\cdot 1{,}02$

Bsp. $n = 20$



$1985{,}94€ = 1{,}02^{20} \cdot 1000€$

- nach unten beschränkt
- str. mo. wa.
- bestimmt divergent $\to \infty$

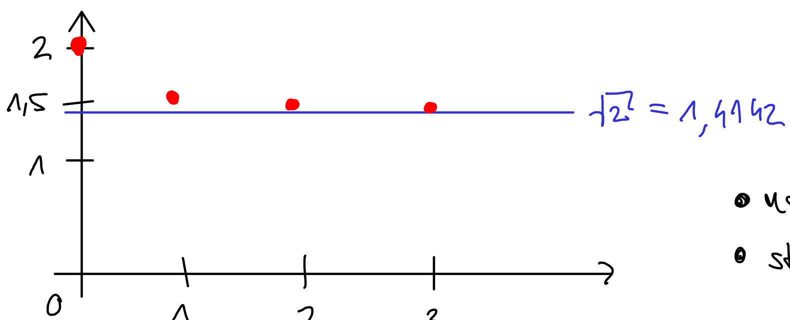
Eigener Lösungsversuch.

Wurzelberechnung nach Heron. $a_0 = 2$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ für $n > 0$. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert. Implementieren Sie diese rekursive Folge als Funktion in Java.

Lösung.

n	0	1	2	3
a_n	2	$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + \frac{2}{a_0}) = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$a_2 = \frac{1}{2}(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}) = \frac{17}{12} \approx 1{,}41667\ldots$	$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}4142\ldots$

Ahh: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$



- nach unten beschränkt (z.B. $a_n \geq 0$)
- streng mo. fa. (ohne Beweis)

$\Rightarrow$ konvergent! (gegen was?)

Sei a der Grenzwert, d.h. $a_n \to a$:

$$\underbrace{a_n}_{a} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{a_{n-1}}_{a} + \frac{2}{\underbrace{a_{n-1}}_{a}}\right) \xrightarrow{n \to \infty} a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a}$$

$$\overset{-\frac{1}{2}a}{\Rightarrow} \frac{1}{2}a = \frac{1}{a} \overset{\cdot 2a}{\Rightarrow} a^2 = 2$$

$$\overset{a \geq 0}{\Rightarrow} \underline{\underline{a = \sqrt{2}}}$$

Eigener Lösungsversuch.

Grenzwerte. Berechnen Sie folgende Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) $a_n = \dfrac{4n^2 - 5}{n^2 + n + 1}$

b) $a_n = \dfrac{3n^2 + 2}{n^3 + 2n + 1}$,

c) $a_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{2n^2 + e^{-n}}$

Lösung.

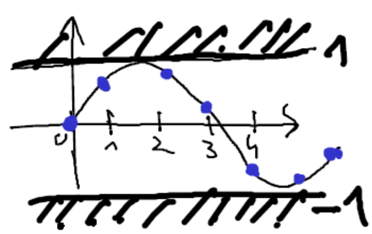
a) Höchste Potenz ausklammern: $a_n = \dfrac{\cancel{n^2}\left(4 - \overbrace{\frac{5}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow{n \to \infty} \dfrac{4}{1} = 4$

b) $a_n = \dfrac{n^2\left(3 + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{3 + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}_{\to 0}}}_{\to \frac{3}{1} = 3} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \cdot 3 = 0$

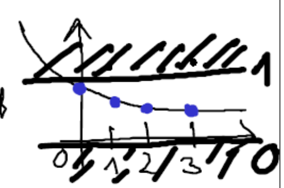
c) $a_n = \dfrac{\cancel{n^2}\left(1 + \overbrace{\frac{\sin(n)}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(2 + \underbrace{\frac{e^{-n}}{n^2}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Wdh:} \quad \dfrac{\overbrace{a_n}^{\text{beschränkt}}}{\underbrace{b_n}_{\to \infty}} \longrightarrow 0}$$

$\sin(n)$ beschränkt



e^{-n} beschränkt



Eigener Lösungsversuch.