3. Cálculo proposicional. Semântica e metateoria

Os seguintes exercícios e problemas são adaptados a partir do livro *Lógica e Aritmética*, de Augusto Franco de Oliveira, 3ª edição, Gradiva.

1. **(I)** Três indivíduos, aqui designados por A, B e C, suspeitos de um crime, fazem os seguintes depoimentos, respectivamente:

   ϕ : – B é culpado, mas C é inocente;
   ψ : – Se A é culpado, então C é culpado;
   θ : – Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

   (a) Os três depoimentos são compatíveis?
   (b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
   (c) Construa deduções correspondentes à alínea anterior.
   (d) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
   (e) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?
   (f) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentiram, quem é inocente e quem é culpado?

2. **(I)**

   (a) Mostre que um conjunto

   $$\Sigma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n, \neg\psi\}$$

   é incompatível se e só se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ (ou, equivalentemente, que o conjunto Σ é compatível sse $\phi_1, \ldots, \phi_n \nvDash \psi$). Mais geralmente, para qualquer conjunto Γ e qualquer fórmula ϕ,

   $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é incompatível se e só se $\Gamma \vDash \phi$.

   (b) Prove que, se Γ é incompatível, então para qualquer ϕ, $\Gamma \vDash \phi$.

3. **(I)** Mostre que:

   (a) um conjunto Γ é contraditório se e só se é trivial, no sentido: para toda a fórmula ϕ,

   $$\Gamma \vdash \phi;$$

   (b) se Γ é consistente, então, para qualquer fórmula ϕ, um dos conjuntos $\Gamma \cup \{\phi\}$, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente.

4. **(I)** Mostre que o conjunto

   $$\Gamma = \{p,\ (\neg p \vee q) \wedge r,\ \neg q \vee \neg r\}$$

   é inconsistente, derivando uma contradição com hipóteses em Γ, no sistema **DN**.

5. **(I)** Enuncie e demonstre propriedades análogas às do exercício 2 substituindo em toda a parte "$\vDash$" por "$\vdash_{\mathbf{DN}}$", "compatível" por "consistente" e "incompatível" por "contraditório", respectivamente.

6. **(I)**

   (a) Demonstre, utilizando $(\mathbf{MV}_G)$, a propriedade seguinte, que é outra versão da referida propriedade:
   $(\mathbf{MV}_G)$ Para todo o conjunto Γ de fórmulas, se Γ é compatível, então Γ é consistente.

   (b) Demonstre, utilizando a propriedade de completude semântica generalizada, que se Γ é consistente, então Γ é compatível. [Sugestão: 2 (b).]

   (c) Prove que para qualquer conjunto Γ e qualquer fórmula ϕ, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente se e só se $\Gamma \nvdash \phi$ (equivalentemente, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é inconsistente sse $\Gamma \vdash \phi$).

   (d) Prove, utilizando apenas noções semânticas, que para qualquer conjunto Γ e qualquer fórmula ϕ, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é compatível se e só se $\Gamma \nvDash \phi$ (equivalentemente, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é incompatível sse $\Gamma \vDash \phi$).

7. **(I)** Discuta a possibilidade de definir alguns dos conectivos à custa de outros, economizando, assim, na lista dos símbolos primitivos

de $\mathcal{L}^0$, nomeadamente nos casos indicados a seguir:

(a) Definir $\wedge$, $\rightarrow$ à custa de $\neg$, $\vee$;

(b) definir $\vee$, $\rightarrow$ à custa de $\neg$, $\wedge$;

(c) definir $\vee$, $\wedge$ à custa de $\neg$, $\rightarrow$;

(d) definir o conectivo de disjunção exclusiva $\dot{\vee}$ à custa dos conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

[Por exemplo, pode-se definir

$$\phi \wedge \psi = \neg(\neg\phi \vee \neg\psi),$$

pois as fórmulas $\phi \wedge \psi$ e $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ são lógica e dedutivamente equivalentes.]

8. **(I)**

(a) Quantas funções booleanas n-árias ($n \geq 0$) existem? E quantos conectivos generalizados n-ários?

(b) Determine todos os conectivos generalizados binários (além dos já conhecidos).

(c) Mostre que os conjuntos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, são funcionalmente completos (exercício 6).

(d) Mostre que $\{\wedge, \vee\}$ não é funcionalmente completo. [Sugestão: fórmulas construídas só com $\wedge$, $\vee$ são sempre verdadeiras para todas as valorações que atribuem o valor 1 a todos os p_i's.]

(e) Os **conectivos de Sheffer** são os conectivos binários de rejeição $\downarrow$ ["nem-nem", $\phi \downarrow \psi = \neg(\phi \vee \psi)$] e de incompatibilidade $\uparrow$ ["negação conjunta", $\phi \uparrow \psi = \neg(\phi \wedge \psi)$]. Mostre que os conjuntos $\{\downarrow\}$, $\{\uparrow\}$ são funcionalmente completos, mas $\{\dot{\vee}\}$ não é funcionalmente completo.

(f) Mostre que os únicos conectivos binários Π tais que $\{\Pi\}$ é funcionalmente completo são os conectivos de Sheffer.

9. (a) **(I)** Obtenha fórmulas logicamente equivalentes a

i. $p \leftrightarrow q$;

ii. $p \rightarrow \neg q \vee r$;

iii. $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$;

iv. $p \wedge (\neg q \vee r)$;

v. $p \vee \big(q \neg(r \wedge s)\big)$,

respectivamente, nas formas normal conjuntiva e disjuntiva.

(b) **(I)** Determine equivalentes mais simples para as fórmulas

i. $(p \rightarrow q) \wedge p$;

ii. $(p \rightarrow q) \vee \neg p$;

iii. $(p \rightarrow q) \rightarrow q$;

iv. $p \rightarrow (p \wedge q)$;

v. $(p \wedge q) \vee p$.