Produto de matrizes

Cálculo do produto de duas matrizes (1)

$$A\ (p \times q) \quad \times \quad B\ (q \times r) \quad = \quad C\ (p \times r)$$

$$\begin{array}{cc} i & \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iq} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{qj} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$$

No cálculo de cada elemento de C, são efectuadas q multiplicações (escalares)

Produto de matrizes

Cálculo do produto de duas matrizes (2)

MATRIX-MULTIPLY(A[1..p, 1..q], B[1..q, 1..r])

```
let C[1..p,1..r] be a new matrix
for i <- 1 to p do
  for j <- 1 to r do
    C[i,j] <- 0
    for k <- 1 to q do
      C[i,j] <- C[i,j] + A[i,k] * B[k,j]
return C
```

Número de multiplicações

Se A e B são matrizes com dimensões $p \times q$ e $q \times r$, respectivamente, no cálculo de $C = AB$, o número de multiplicações efectuadas entre elementos das matrizes é

$$p \times q \times r$$

(C tem $p \times r$ elementos e são efectuadas q multiplicações para o cálculo de cada um)

Produto de matrizes

Cálculo do produto de uma sequência de matrizes (*Matrix-chain multiplication*)

Problema

Dada uma sequência de matrizes a multiplicar

$$A_1\, A_2\, \ldots\, A_n, \quad n > 0$$

com dimensões

$$p_0 \times p_1 \quad p_1 \times p_2 \quad \ldots \quad p_{n-1} \times p_n$$

por que ordem efectuar os produtos de modo a minimizar o número de multiplicações entre elementos das matrizes?

(NOTA: A matriz A_i tem dimensão $p_{i-1} \times p_i$)

Produto de matrizes

Exemplo

Sejam A_1, A_2 e A_3 matrizes com dimensões

$$10 \times 100,\ 100 \times 5 \text{ e } 5 \times 50$$

Ordens de avaliação possíveis para o produto $A_1 A_2 A_3$

$$(A_1 A_2) A_3$$
$$A_1 (A_2 A_3)$$

Número de multiplicações

$(A_1 A_2) A_3$

$$10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 5000 + 2500 = 7500$$

$A_1 (A_2 A_3)$

$$100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 25000 + 50000 = 75000$$

Produto de matrizes

Colocação de parêntesis

Formulação alternativa

Como colocar parêntesis no produto $A_1 A_2 \ldots A_n$ de modo a realizar o menor número de multiplicações possível?

Número de colocações de parêntesis distintas

$$\Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Produto de matrizes

Caracterização de uma solução óptima (1)

O produto $A_1 A_2 \dots A_n$ será calculado de uma das formas

$$
\begin{array}{l}
A_1\,(A_2 \dots A_n) \\
(A_1 A_2)\,(A_3 \dots A_n) \\
(A_1 \dots A_3)\,(A_4 \dots A_n) \\
\qquad\vdots \\
(A_1 \dots A_{n-2})\,(A_{n-1} A_n) \\
(A_1 \dots A_{n-1})\,A_n
\end{array}
$$

O número n-mult de multiplicações a efectuar para o cálculo de

$$(A_1 \dots A_k)\,(A_{k+1} \dots A_n)$$

para qualquer $1 \leq k < n$, será

$$\text{n-mult}(A_1 \dots A_k) + \text{n-mult}(A_{k+1} \dots A_n) + p_0\, p_k\, p_n$$

Produto de matrizes

Caracterização de uma solução óptima (2)

Procura-se o valor mínimo de

$$\text{n-mult}(A_1 \dots A_n)$$

que depende do valor mínimo de

$$\text{n-mult}(A_1 \dots A_k) \quad \text{e de} \quad \text{n-mult}(A_{k+1} \dots A_n)$$

para algum valor de k

O número mínimo m de multiplicações a efectuar será obtido para o valor de k que minimiza

$$m(A_1 \dots A_k) + m(A_{k+1} \dots A_n) + p_0\, p_k\, p_n$$

Produto de matrizes

Função recursiva

Sequência de matrizes a multiplicar

$$A_1\, A_2\, \ldots\, A_n, \quad n > 0$$

Dimensões das matrizes: $P = (p_0\, p_1 \ldots p_n)$

$m_P[1..n, 1..n]$: $m_P[i, j]$ é o menor número de multiplicações a fazer para o cálculo do produto $A_i \ldots A_j$

$$m_P[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{ m_P[i,k] + m_P[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{se} \quad i < j \end{cases}$$

Número mínimo de multiplicações (chamada inicial): $m_P[1, n]$

Produto de matrizes

Cálculo de $m[i,j]$

m

	1	2	3	4	5
1	0	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
2		0	m_{23}	m_{24}	m_{25}
3			0	m_{34}	m_{35}
4				0	m_{45}
5					0

Ordem de cálculo

1. Sequências de comprimento 1: m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}, m_{55} (Caso base)
2. Sequências de comprimento 2: m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{45}
3. Sequências de comprimento 3: m_{13}, m_{24}, m_{35}
4. Sequências de comprimento 4: m_{14}, m_{25}
5. Sequências de comprimento 5: m_{15}

Produto de matrizes

Cálculo iterativo de $m[1, n]$

MATRIX-CHAIN-ORDER(p)

```
n <- |p| - 1                   // p[0..n]
let m[1..n,1..n] be a new table
for i <- 1 to n do
     m[i, i] <- 0
for l <- 2 to n do             // l is the chain length
    for i <- 1 to n - l + 1 do
        j <- i + l - 1
        m[i, j] <- INFINITY
        for k <- i to j - 1 do
            q <- m[i, k] + m[k + 1, j] +
                 p[i - 1] * p[k] * p[j]
            if q < m[i, j] then
                m[i, j] <- q
return m[1, n]
```

Produto de matrizes

Complexidade de MATRIX-CHAIN-ORDER($p_0\ p_1\ \ldots\ p_n$)

Ciclo 3–4 é executado n vezes

Ciclo 5–12 é executado $n-1$ vezes (variável l)

Ciclo 6–12 é executado $n-l+1$ vezes (variável i)

Ciclo 9–12 é executado $l-1$ vezes (variável k)

$$\sum_{l=2}^{n} \sum_{i=1}^{n-l+1} \sum_{k=i}^{i+l-2} 1 = \sum_{l=2}^{n} \sum_{i=1}^{n-l+1} l-1 = \sum_{l=2}^{n} (n-(l-1))(l-1) = \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)l =$$

$$n\sum_{l=1}^{n-1} l - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 = n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3-n}{6} = \Theta(n^3)$$

Complexidade temporal $\Theta(n^3)$

Complexidade espacial $\Theta(n^2)$

Produto de matrizes

Construção da solução

MATRIX-CHAIN-ORDER(p)

```
n <- |p| - 1                 // p[0..n]
let m[1..n,1..n] and s[1..n-1,2..n] be new tables
for i <- 1 to n do
     m[i, i] <- 0
for l <- 2 to n do           // l is the chain length
    for i <- 1 to n - l + 1 do
        j <- i + l - 1
        m[i, j] <- INFINITY
        for k <- i to j - 1 do
            q <- m[i, k] + m[k + 1, j] +
                 p[i - 1] * p[k] * p[j]
            if q < m[i, j] then
                m[i, j] <- q
                s[i, j] <- k  // break at matrix k
return m and s
```

Produto de matrizes

Solução calculada

$$p = 10 \quad 100 \quad 5 \quad 50 \quad 3$$

Matriz m (multiplicações)

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	5000	7500	5250
2		0	25000	2250
3			0	750
4				0

Matriz s (separação)

	2	**3**	**4**
1	1	2	1
2		2	2
3			3

Número mínimo de multiplicações para calcular ...

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= 5000 \\ A_2 A_3 &= 25000 \\ A_1 A_2 A_3 &= 7500 \\ A_2 A_3 A_4 &= 2250 \\ A_1 A_2 A_3 A_4 &= 5250 \end{aligned}$$

Separação dos produtos

$$\begin{aligned} A_1 \ldots A_2 &= (A_1)(A_2) \\ A_1 \ldots A_3 &= (A_1 A_2)(A_3) \\ A_2 \ldots A_4 &= (A_2)(A_3 A_4) \\ A_1 \ldots A_4 &= (A_1)(A_2 \ldots A_4) \\ &= (A_1)(A_2(A_3 A_4)) \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Melhor colocação de parêntesis

$s[1..n-1, 2..n]$: $s[i,j]$ é a posição onde a sequência $A_i \ldots A_j$ é dividida: $(A_i \ldots A_{s[i,j]})(A_{s[i,j]+1} \ldots A_j)$

PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, i, j)

```
if i = j then
  print "A"_i
else
  print "("
  PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, i, s[i, j])
  PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, s[i, j] + 1, j)
  print ")"
```

Sequências e subsequências

Seja x a sequência

$$x_1\, x_2\, \ldots\, x_m, \quad m \geq 0$$

A sequência $z = z_1\, z_2 \ldots z_k$ é uma subsequência de x se

$$z_j = x_{i_j}, \quad j = 1, \ldots, k \quad \text{e} \quad i_j < i_{j+1}$$

Exemplo

$$x = \text{A B C B D A B}$$

São subsequências:

A   A B C   B B B   C B A

B C B A   A B C B D A B

Não são subsequências:

A A A   D C   E

Subsequências comuns

Sejam x e y as sequências

$$x_1\, x_2\, \ldots\, x_m \quad \text{e} \quad y_1\, y_2\, \ldots\, y_n, \quad m, n \geq 0$$

A sequência z é uma subsequência comum a x e y se

- z é uma subsequência de x e
- z é uma subsequência de y

Exemplo

$$x = \text{A B C B D A B}$$
$$y = \text{B D C A B A}$$

Subsequências comuns a x e a y

A   A B   C B A   ...

Maiores subsequências comuns a x e a y

B C A B   B C B A   B D A B

Maior subsequência comum

Longest common subsequence

Problema

Dadas duas sequências x e y

$$x_1\, x_2\, \ldots\, x_m \quad \text{e} \quad y_1\, y_2\, \ldots\, y_n, \quad m, n \geq 0$$

determinar uma maior subsequência comum a x e a y

Número de subsequências de uma sequência de comprimento m

$$2^m$$