2. Cálculo proposicional. Definições indutivas. Valorações

Os seguintes exercícios e problemas são adaptados a partir do livro *Lógica e Aritmética*, de Augusto Franco de Oliveira, 3ª edição, Gradiva.

1. Uma **construção formativa** de uma expressçao σ é uma sequência finita de expressões $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, $(n \geq 1)$ tal que $\sigma_n = \sigma$ e para cada $i = 1, \ldots, n$, σ_i é uma letra proposicional, ou existe $j < i$ tal que $\sigma_i = \neg\sigma_j$, ou existem $j, k < i$ tais que $\sigma = (\sigma_j \diamond \sigma_k)$, onde $\diamond$ é $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$. O inteiro positivo n é o *comprimento* da construção formativa $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Por exemplo, $p, \neg p, q, (q \wedge \neg p)$ é uma construção formativa de $(q \wedge \neg p)$ de comprimento 4 e $p, \neg p, r, q, (q \wedge \neg p)$ é outra, de comprimento 5. As fórmulas que antecedem a fórmula ϕ numa construção formativa de ϕ [ver (a) e (b) adiante] de comprimento mínimo são as **subfórmulas próprias** de ϕ. Denota-se F_* o conjunto das expressões que possuem construções formativas.
   (a) Dê um exemplo de uma construção formativa para cada uma das fórmulas:
      i. $\neg(p \rightarrow q)$;
      ii. $(\neg p \rightarrow q)$;
      iii. $\big(s \rightarrow (\neg p \wedge q)\big)$.
   (b) Prove, por indução na complexidade das fórmulas, que $\mathrm{Prop}(P) \subseteq F_*$, isto é, toda a fórmula possui, pelo menos, uma construção formativa.
   (c) Mostre, por indução completa no comprimento das construções formativas das expressões, que $F_* \subseteq \mathrm{Prop}(P)$, e conclua que $F^* = F_* = \mathrm{Prop}(P)$.

2. **(I)** Demonstre, por indução na complexidade das fórmulas, as seguintes propriedades:
   (a) Lema do Equilíbrio.
   (b) Para toda a fórmula ϕ e toda a valoração booleana v, $v(\phi)$ só depende dos valores $v(p_i)$ atribuídos às letras proposicionais p_i que ocorrem em ϕ. [Sugestão: para quaisquer valorações v e v', tais que $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda a letra proposicional p_i que ocorre em ϕ, tem-se $v(\phi) = v'(\phi)$.]

3. **(I)** A *Propriedade de Extensão das Valorações* é um caso particular de um princípio mais geral de *definição de funções por recorrência*. O contexto adequado para enunciar e demonstrar este princípio, na sua máxima generalidade, é a teoria dos conjuntos. Não pretendemos aqui embarcar nessa generalidade, mas fornecemos as indicações suficientes para demonstrar a referida propriedade.

   Sejam $u_\neg$, $u_\wedge$, $u_\vee$ e $u_\rightarrow$ as funções booleanas correspondentes aos conectivos proposicionais. Dada uma valoração $v : \mathrm{Prop}(P) \rightarrow \{0, 1\}$, pretende-se provar que existe uma única valoração booleana $\hat{v}$ tal que
   (i) $\hat{v}(p) = v(p)$ para todo p em P,
   (ii) para qualquer fórmula ϕ, $\hat{v}(\neg\phi) = u_\neg\big(\hat{v}(\phi)\big)$ e
   (iii) para quaisquer fórmulas ϕ, ψ, $\hat{v}(\phi \diamond \psi) = u_\diamond\big(\hat{v}(\phi), \hat{v}(\psi)\big)$, onde $\diamond$ é $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, respectivamente.

   (a) Dê uma definição indutiva de $\hat{v}$, como conjunto de pares ordenados $(\phi, \boldsymbol{i})$, com ϕ em $\mathrm{Prop}(P)$ e $\boldsymbol{i}$ em $\{0, 1\}$;
   (b) Enuncie e demonstre para $\hat{v}$ um princípio de indução;
   (c) Prove que $\hat{v}$ é uma função definida em $\mathrm{Prop}(P)$;
   (d) Prove que $\hat{v}$ é a única função definida em $\mathrm{Prop}(P)$ tal que (i), (ii) e (iii).

4. **(I)** Efectue todas as deduções que foram indicadas no texto, explicitando as dependências de hipóteses.
   (a) $\phi \wedge \psi \vdash \phi$;

(b) $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$;

(c) $\phi, \phi \to (\psi \to \theta), \phi \to \psi \vdash \theta$;

(d) $\neg\neg\phi \vdash \phi$;

(e) $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$;

(f) $\phi, \phi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \theta$;

(g) $\phi \wedge \phi \vdash \phi$;

(h) $\phi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi$:

(i) $\phi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \phi \to \theta$;

(j) $\phi \vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$;

(k) $\phi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\phi$;

(l) $\phi \to \psi \vdash (\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta)$;

(m) $\vdash (\phi \to \psi) \to (\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta)$;

(n) $\phi \vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$;

(o) $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \vdash (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$;

(p) $(\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta) \vdash (\phi \wedge \psi) \vee \theta$;

(q) $(\phi \vee \psi) \wedge \theta \vdash (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$;

(r) $(\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta) \vdash (\phi \vee \psi) \wedge \theta$.