

## 4. Cálculo proposicional. Derivações à Beth

Os seguintes exercícios e problemas são adaptados a partir do livro *Lógica e Aritmética*, de Augusto Franco de Oliveira, 3ª edição, Gradiva.

1. (I) Construa derivações à Beth das seguintes leis, algumas das quais anteriormente estabelecidas no sistema DN:

- (a)  $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$ ;
- (b)  $\phi \vee \neg\phi$ ;
- (c)  $\phi \rightarrow \psi \rightarrow \phi \wedge \psi$ ;
- (d)  $\neg\phi \vee \neg\psi \vee (\phi \wedge \psi)$ ;
- (e)  $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$ ;
- (f)  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \phi \rightarrow \theta$ ;
- (g)  $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi$ ;
- (h)  $\phi \rightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ ;
- (i)  $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\phi$ ;
- (j)  $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \phi \rightarrow \theta$ ;
- (k)  $\phi \vee (\psi \wedge \theta) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta)$ ;
- (l)  $(\phi \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow \phi \vee \psi \rightarrow \theta$ ;
- (m)  $\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$ ;
- (n)  $\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$ .

2. Construa refutações à Beth das seguintes fórmulas:

- (a)  $\phi \wedge \neg\phi$ ;
- (b)  $\phi \vee \neg\phi \rightarrow \phi \wedge \neg\phi$ ;
- (c)  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\psi \rightarrow \phi) \wedge (\psi \rightarrow \neg\phi)$ ;
- (d)  $\neg\phi \wedge \neg\psi \wedge (\phi \vee \psi)$ ;
- (e)  $(\neg\phi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\phi)$ .