Producto Interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

  se llama producto interno en V
- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:
  1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
  2. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
  3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
  4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ $(\in \mathbb{R})$
  5. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

Producto Interno

propiedades inmediatas

$\langle , \rangle$ producto interno sobre $\mathbb{K}$, entonces

1. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
2. $\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$
3. $\langle \vec{0}, u \rangle = \langle u, \vec{0} \rangle = 0$

Producto Interno

producto usual de $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

se llama producto usual en $\mathbb{R}^n$

- verificar que es un producto interno

producto usual en $\mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

se llama producto usual en $\mathbb{C}^n$

Producto Interno

producto interno de funciones reales

$V = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ un producto interno en V es

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

producto interno de funciones complejas

$V = C_{\mathbb{C}}[0,1]$ un producto interno en V es

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Producto Interno

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$ y definamos en él la operación para vectores arbitrarios $p(x) = a_0 + a_1x$ y $q(x) = b_0 + b_1x$ dada por:

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1\,.$$

Veamos que es un producto interno: para todo $p(x) = a_0+a_1x$, $q(x) = b_0+b_1x$, $t(x) = c_0 + c_1x \in \mathbb{P}_1$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 = b_0a_0 + 2b_1a_1 = \langle q, p \rangle$.

2. $\langle \alpha\, p, q \rangle = \alpha\,(a_0b_0 + 2a_1b_1) = (\alpha\, a_0)b_0 + 2(\alpha\, a_1)b_1 = \langle \alpha\, p, q \rangle$; del mismo modo se prueba la otra igualdad: $\alpha\,\langle p, q \rangle = \langle p, \alpha\, q \rangle$.

3. $\langle p + q, t \rangle = (a_0 + b_0)c_0 + 2(a_1 + b_1)c_1 = a_0c_0 + b_0c_0 + 2a_1c_1 + 2b_1c_1 = (a_0c_0 + 2a_1c_1) + (b_0c_0 + 2b_1c_1) = \langle p, t \rangle + \langle q, t \rangle$.

4. $\langle p, p \rangle = a_0^2 + 2a_1^2 \geqslant 0$ y además $\langle p, q \rangle = 0 \iff a_0^2 + 2a_1^2 = 0 \iff a_1 = a_2 = 0 \iff p(x) = 0$.

Por tanto es un producto interno.

Norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función
$$\|.\| : V \to [0, \infty)$$
se llama norma en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:
  1. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
  2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
  3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad triangular)
- cuando V tiene una norma, V se llama espacio normado

Norma

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- cuando $p = 2$, se llama norma usual en $\mathbb{R}^n$
- cuando $p \neq 2$ la desigualdad triangular no es sencilla de probar
- también define norma en $V = \mathbb{C}^n$

norma ℓ^∞ en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \ldots, |u_n|\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- también define norma en $\mathbb{C}^n$

Norma

norma $L^p[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos las normas:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

- para $p > 2$, la desigualdad triangular no es sencilla de probar

norma $L^\infty[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos también la norma:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

Norma

Ejemplo

Consideremos de nuevo el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$ y el producto interno:

$$\langle a_0 + a_1 x,\ b_0 + b_1 x\rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 .$$

Vamos a calcular la distancia entre los polinomios $p_1(x) = 1$ y $p_2(x) = 1 + 2x$. Como $p_1(x) - p_2(x) = -2x$,

$$d(p_1, p_2) = \|p_1 - p_2\| = \| - 2x\| = \sqrt{0^2 + 2 \cdot (-2)^2} = \sqrt{8} .$$

Obviamente,

$$d(p_2, p_1) = \|p_2 - p_1\| = \|2x\| = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 2^2} = \sqrt{8} .$$

Si además consideramos el vector $p_3(x) = 2-3x$, podemos comprobar que se verifica la desigualdad triangular. En efecto:

$$\begin{aligned} d(p_2, p_3) &= \|p_2(x) - p_3(x)\| = \| - 1 + 5x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2 \cdot 5^2} = \sqrt{51} , \\ d(p_1, p_3) &= \|p_1(x) - p_3(x)\| = \| - 1 + 3x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2 \cdot 3^2} = \sqrt{19} \end{aligned}$$

y claramente

$$\sqrt{19} \leqslant \sqrt{8} + \sqrt{51} .$$

Norma

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$
- $\Rightarrow$ V espacio normado con norma:
- $$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Norma

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno
- para que eso pase se tiene que cumplir:
- $$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\|v\|^2+2\|w\|^2$$
- regla del paralelogramo

Norma

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a,b]$), sólo

- $\|.\|_2$ (norma de ℓ^2) y
- $\|.\|_2$ (norma de $L^2[a,b]$)

son normas que provienen de un producto interno:

- $\langle x, y\rangle_2 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
- $\langle f, g\rangle_2 = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$

Norma

teorema (Cauchy-Schwartz)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $\|.\|$ norma proveniente de $\langle , \rangle$
- para todo $u, v \in V$:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

  (desigualdad de Cauchy-Schwartz)
- la igualdad vale $\Leftrightarrow u \| v$

Norma

corolario (desigualdad triangular)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Norma

Ejemplo

Consideremos una vez más el espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$ y el producto interno:

$$\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \rangle = a_0 b_0 + 2 a_1 b_1 \,.$$

Vamos a calcular ahora el ángulo entre los polinomios $p_1(x) = 1$ y $p_2(x) = 1 + 2x$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|p_1\| &= \sqrt{1^2 + 2 \cdot 0^2} = 1 \,, \\ \|p_2\| &= \sqrt{1^2 + 2 \cdot 2^2} = 3 \,, \\ \langle p_1, p_2 \rangle &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 = 1 \,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0 \,.$$

Obviamente, no son ortogonales según el producto interno dado.

Norma

9. Ejercicio (identidad de paralelogramo). Demuestre que la norma inducida por un producto interno satisface la siguiente propiedad (*identidad de paralelogramo*):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in V.$$

10. Ejercicio (identidades de polarización en el caso real). Sean V un EV real con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $\| \cdot \|$ la norma inducida por este producto interno. Demuestre las siguientes igualdades:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

11. Proposición (identidad de polarización en el caso complejo). Sea V un espacio vectorial complejo con un producto interno. Entonces el producto interno se puede expresar a través de la norma inducida por este producto interno mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| \mathrm{i}^k x + y\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathrm{i}\,x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 - \mathrm{i}\,\|-\mathrm{i}\,x+y\|^2\Big).\end{aligned}$$

12. Ejercicio. Demuestre la identidad de polarización en el caso complejo.

13. Ejemplo. La función $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ es una norma en $\mathbb{C}^2$. Demostremos que esta norma no se puede inducir por ningún producto interno. Construyamos un contraejemplo para la identidad de paralelogramo:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 8, \quad 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 4.$$

Proyeccion

Proyección ortogonal sobre un vector

Como hemos visto, la noción de producto interno permite medir ángulos y, en particular, decidir si dos vectores son o no ortogonales. Para ello, basta con comprobar que su producto interno es cero, ya que en tal caso, el ángulo que formen será de $\frac{\pi}{2}$.

Con frecuencia es necesario obtener (en un cierto espacio vectorial con producto interno) la "proyección ortogonal" de un vector sobre otro. En $\mathbb{R}^2$, esta idea es muy intuitiva. Consideremos dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, representados geométricamente como en la figura

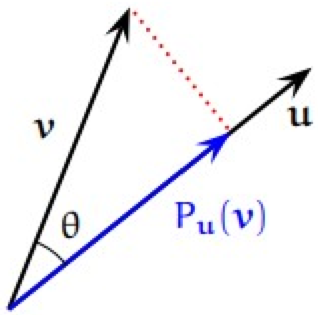

Figura Proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$.

Proyeccion

La proyección ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$ es otro *vector* que representaremos por $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$. En la figura está representado en azul y es perpendicular al segmento punteado rojo.

Utilizando el concepto de producto interno, la longitud de dicha proyección se puede calcular fácilmente mediante

$$\|P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\| = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Puesto que la proyección tiene la misma dirección que $\mathbf{u}$, podemos escribir

$$\boxed{P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u}.}$$

Ejemplo

Vamos a encontrar ahora la proyección del vector $p_1(x) = 1$ sobre el vector $p_2(x) = 1 + 2x$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_1$ con el producto interno utilizado anteriormente. Tenemos que

$$P_{p_2}(p_1) = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} p_2(x) = \frac{1}{9}(1 + 2x)\ .$$