Geometrie și trigonometrie

Formule trigonometrice

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \mathbf{fct}(\frac{k\pi}{2} \pm x) = \begin{cases} \pm\, \mathbf{fct} x & k \text{ e par} \\ \pm\, \mathbf{cofct} x & k \text{ e impar} \end{cases}$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \qquad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \qquad \sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \qquad \cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} \qquad \sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1] \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Ecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice elementare:

$$\begin{aligned} \sin x = a &\implies x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \\ \cos x = a &\implies x = \pm \arccos a + 2k\pi \\ \operatorname{tg} x = a &\implies x = \operatorname{arctg} a + k\pi \end{aligned}$$

pentru $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru a, b, c date avem **ecuații trigonometrice liniare** de forma:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

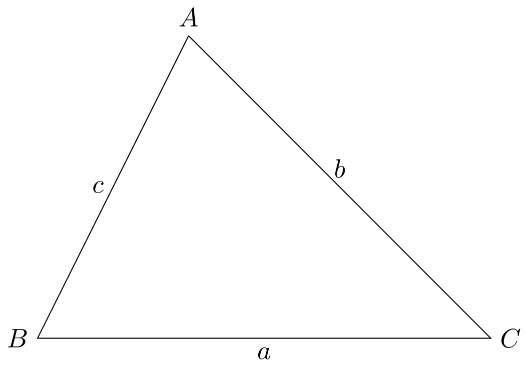
care se rezolvă astfel:

1. Dacă $(a, b) \in \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm\sqrt{3}), (\pm\sqrt{3}, 1)\}$, atunci se folosește metoda unghiului auxiliar.
2. Altfel, verificăm dacă $x = \pi$ este sau nu soluție.
   - Dacă da, atunci $x = \pi + 2k\pi$ sunt soluții, pentru $k \in \mathbb{Z}$.
3. După aceea, putem folosi formulele:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

   Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, și avem o ecuație de gradul II în t pe care o rezolvăm. Apoi rezolvăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Formule în triunghi



- **Semiperimetru**: $p = \frac{a+b+c}{2}$
- **Suprafață**: $S = \frac{\textbf{bază} \cdot \textbf{înălțime}}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- **Raza cercului înscris în triunghi**: $r = \frac{S}{p}$
- **Raza cercului circumscris triunghiului**: $R = \frac{abc}{4S}$
- **Teorema sinusurilor**: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- **Teorema cosinusului**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$
- $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p)(p-a)}{bc}}$

Vectori

Un vector $\overrightarrow{AB}$ are:

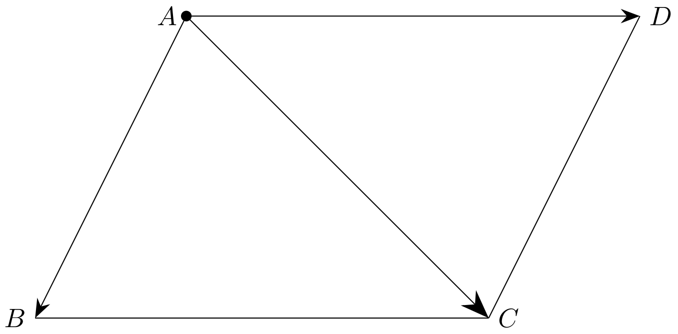
- **Direcție**: dreapta AB, sau orice paralelă la aceasta.
- **Sens**: de la A la B.
- **Mărime**: lungimea segmentului $[AB]$. Este, de asemena, **modulul** vectorului.

Atunci când vectorul nu este cuplat într-un sistem de axe de coordonate, vorbim despre un **vector liber**, altfel vorbim despre un **vector legat**.

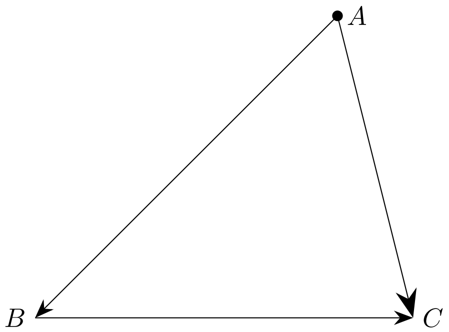
Vectori liberi

Următoarele aspecte se pot aplica atât vectorilor liberi, cât și celor legați:

- **Vectori egali**: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dacă $AB \parallel CD$, $[AB] \equiv [CD]$ și dacă au același sens.
- **Adunarea vectoilor**:

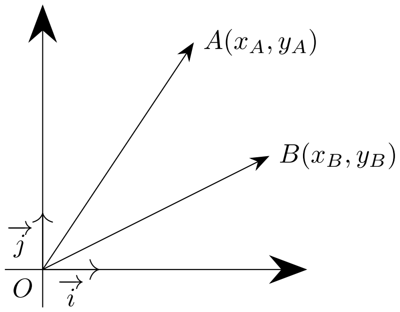


  - **Regula paralelogramului**: În $ABCD$ paralelogram, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



  - **Regula triunghiului**: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
  - Pentru 2 vectori oarecare $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, se alege un punct O, apoi avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}$, iar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ON}$.
- **Înmulțirea cu un număr**: $k \cdot \overrightarrow{AB}$. Rezultă un vector cu $|k \cdot \overrightarrow{AB}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, direcția păstrată, iar sensul inversat dacă $k < 0$.
- **Produsul scalar**: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.
  - Grijă la semnul cosinusului! Unghiul se măsoară ducând în același punct originile vectorilor. Dacă cei doi vectori par să *meargă în sensuri opuse*, semnul este de regulă minus!
- În $\triangle ABC$, cu $P \in (BC)$, $\frac{BP}{PC} = k$ avem $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.
  - În $\triangle ABC$, cu P mijlocul lui $[BC]$, avem $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.
- A, B, C sunt **coliniare** $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.
  - $AB \parallel CD$ sau $AB = CD$ (dreptele sunt identice) $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.
- $ABCD$ este **paralelogram** $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \exists O \in \textit{plan}$ a.î. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
- Dacă $ABCD$ este paralelogram cu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$, atunci $ABCD$ este **dreptunghi**.
- G este **centru de greutate** în $\triangle ABC$ dacă, pentru un punct O, $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.
- **Inegalitate triunghiulară**: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|$.

Vectori legați



- **Versori**: $\vec{i}$ (abscise), $\vec{j}$ (ordonate). $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.
- **Vector de poziție**: $\vec{r_A} = \overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Avem $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_A + x_B)\vec{i} + (y_A + y_B)\vec{j}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j}$.

Avem $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j}$ vectori legați:

- **Produsul scalar**: $\vec{u} \times \vec{v} = ap + bq$.
- $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **coliniare** $\iff \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.
- $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **perpendiculare** $\iff \vec{u} \times \vec{v} = ap + bq = 0$.
- **Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz pentru vectori**: $\vec{u} \times \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Geometrie analitică

Puncte

Pentru $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ avem:

- **Lungimea segmentului** $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
- **Mijlocul segmentului**: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

Drepte

- **Ecuația dreptei** d: $ax + by + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ (a și b să nu fie simultan 0).
  - $A \in d \iff ax_A + by_A + c = 0$.
  - **Ecuația carteziană**: $y = mx + n$, unde m este **panta**, sau $\text{tg}(\widehat{Ox, d})$.
- **Ecuația dreptei ce trece prin 2 puncte** A, B: $AB: \frac{y - y_A}{y - y_B} = \frac{x - x_A}{x - x_B}$, sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_b & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.
- **Ecuația dreptei ce trece prin** A, **cu pantă** m **dată**: $y - y_A = m(x - x_A)$.
- **Ecuația tangentei în** $(a, f(a))$ **la graficul lui** f **dat**: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
- **Distanța de la punctul** A **la dreapta** d: $\text{dist}(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Pentru 2 drepte $d_1 : ax + by + c = 0$, $d_2 : px + qy + r = 0$ avem:

- **Paralelitate**: $d_1 \parallel d_2 \iff \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.
- **Perpendicularitate**: $d_1 \perp d_2 \iff ms = -1$ (produsul pantelor e egal cu -1).
- **Punctul de intersecție a dreptelor**: are coordonatele date de soluția sistemului de ecuații determinat de ecuațiile dreptelor.

Alte figuri geometrice

- **Aria** $\triangle ABC = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right\|$.
- **Ecuația cercului de rază** r **cu centrul în origine**: $\mathcal{C}(O, r) : x^2 + y^2 = r^2$.