Teoria grafurilor

Grafuri

Definiție: Se numește graf o mulțime finită de elemente V, alături de o mulțime U de relații definite între elemente din V.

$$G = (V, U) \qquad U \subseteq V \times V \qquad V - \text{finită}$$

Elementele mulțimii V = **Noduri**
Elementele mulțimii U = **Muchii**

Diverse

- **Buclă** = muchie ce are extremitatea inițială egală cu cea finală.
- **Muchii paralele** = două muchii ce au aceleași extremități.
- **Graf simplu** = graf fără muchii paralele, bucle.
- **Graf planar** = un graf ce poate fi reprezentat astfel încât muchiile să nu se intersecteze.
- **Graf vid** = un graf în care mulțimea de muchii este vidă.
- **Graf complet** = un graf în care există muchii de la oricare nod la oricare alt nod. Numărul de muchii într-un graf complet este de $\boxed{m = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$.
- **Subgraf** al unui graf dat = graf format doar din o parte din nodurile grafului initial și din muchiile incidente cu acestea.
- **Graf parțial** al unui graf dat = graf format din toate nodurile grafului inițial și doar o parte din muchii.
- **Nod izolat** = nod ce nu e legat de niciun alt nod al grafului.

Grafuri neorientate și orientate

- **Graf neorientat** = graf în care nu este definit un sens de parcurgere a muchiilor.
- **Graf orientat** = graf în care este definit un sens de parcurgere a muchiilor.
  - **Vârf** = nod într-un graf orientat.
  - **Arc** = muchie pe care s-a definit un sens de parcurgere.
  - Două arce cu aceleași extremități și sensuri de parcurgere diferite nu sunt paralele.

Grade

- **Gradul nodului** = numărul de muchii incidente nodului respectiv.
- Într-un graf orientat:
  - **Grad interior** = numărul de arce ce au nodul în cauză drept extremitate finală.
  - **Grad exterior** = numărul de arce ce au nodul în cauză drept extremitate inițială.

Lanțuri și drumuri

- **Lanț** = succesiune de muchii $U_1, U_2, ..., U_k, U_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,k}$ cu proprietatea că extremitatea finală a unei muchii coincide cu cea inițială a muchiei următoare; se notează $L_{x_0 x_k}$ **lanț de la** x_0 **la** x_k.
  - Într-un graf orientat, un lanț cu toate arcele la fel orientate se numește **drum**.
- Lanț **simplu** = lanț pe care nu se repetă muchii.
- Lanț **elementar** = lanț pe care nu se repetă noduri.
- **Lemă**: Dacă $\exists\ L_{xy},\ L_{yz}$, atunci $\exists\ L_{xz}$.

Cicluri

- **Ciclu** = lanț în care extremitaea inițială coincide cu cea finală.
- Orice ciclu neelementar poate fi descompus în cicluri elementare.
- **Ciclu hamiltonian** = ciclu ce trece o singură dată prin fiecare nod al grafului.
  - **Graf hamiltonian** = graf ce admite ciclu hamiltonian.
- **Ciclu eulerian** = ciclu ce trece o singură dată prin fiecare muchie a grafului.
  - **Graf eulerian** = graf ce conține un ciclu eulerian.
  - Condiția necesară și suficientă ca un graf să fie eulerian este ca fiecare nod al său să aibă grad par, nenul.

Conexitate

- **Graf conex** = graf în care există lanț între oricare două noduri ale sale.
- **Componentă conexă** = subgraf conex al grafului dat.
  - Orice graf neconex se poate descompune în componente conexe.
  - Un nod izolat este componentă conexă.

Arbori

- **Arbore** = graf conex fără cicluri.
- **Rădăcină** = nod de pornire, stabilit pentru parcurgerea arborelui.
- **Frunză** = nod de grad 1, exceptând eventual rădăcina.
- **Fiu** = descendent direct al unui nod, numit **tată**.
- **Frați** = doi fii ai aceluiași nod.
- **Înălțimea** arborelui = numărul de niveluri ale acestuia.
- **Teorema de caracterizare a unui arbore**: Despre un graf G următoarele afirmații sunt echivalente:
  - G este arbore.
  - G este conex și are $n-1$ muchii, unde n e numărul de noduri.
  - G este maximal aciclic.
  - G este minimal conex.
- **Pădure** = mulțime de arbori formați din câte o componentă conexă a unui graf dat.