# III. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE

Cursul urmărește studiul algoritmelor matematice cu ajutorul cărora pot fi rezolvate numeric probleme matematice uzuale. Unele limbaje de programare au deja funcții create, ce au la bază asemenea algoritme. Acest lucru nu constituie obiectul cursului deoarece aceste funcţii sunt deja create fără a le putea modifica. Ideea este de a stăpâni principiile pentru a putea crea funcții adaptate oricăror situații.

- Exemplu: pentru rezolvarea unei ecuaţii polinomiale se poate utiliza funcția 'roots', de exemplu: $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$

  $P = [1 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 3]$

  roots(p)⟶soluţia

  Verificare polyval(p,s).

<u>Identificarea intervalelor în care se găsesc soluţiile unei ecuaţii.</u>

Majoritatea metodelor de rezolvare a ecuațiilor fac apel la pornirea calculului de la un interval de unde se presupune că se găseşte soluţia.
Există metode de determinare a acestui interval, dar suplimentar, dacă ecuaţia reprezintă o funcție ce urmărește un fenomen fizic, realitatea poate şi ea conduce la identificarea intervalului.

Exemplu: $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$
$\Rightarrow a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

- <u>Regula lui Descartes</u>:

Pentru $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$; 1 schimbare
↓
1 soluție>0

$f(-x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$; 2 schimbări
↓
2 soluţii<0

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) = \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_2}{a_0}$$
$$= \frac{a_1^2 - 2 \cdot a_0 \cdot a_2}{a_0^2}$$

Soluţie) $x_1^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{a_1^2 - 2a_0 \cdot a_2}{a_0^2}$

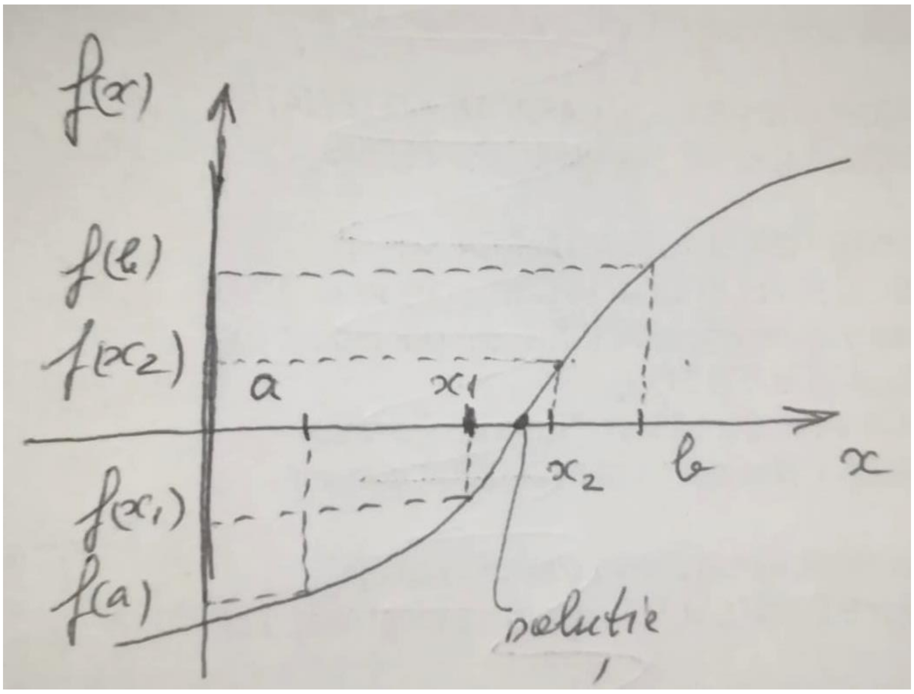
$$x_1 \in \left[-\frac{\sqrt{a_1^2 - 2 \cdot a_0 \cdot a_2}}{a_0}, +\frac{\sqrt{a_1^2 - 2 \cdot a_0 \cdot a_2}}{a_0}\right]$$

Fie $x_1$ soluția pozitivă $\Rightarrow x_1 \in \left[0, +\frac{\sqrt{a_1^2 - 2a_0 \cdot a_2}}{a_0}\right]$

$\Rightarrow x_1 \in \left[0, +\frac{\sqrt{21}}{2}\right]$

## III.1. Metoda înjumătățirii intervalului (metoda bisecției).

$Fie\ o\ funcție\ f: R$ →R; pentru identificarea unei soluţii în intervalul $[a, b]$, din R, trebuie ca funcţia să fie continuă cel puţin pe acest interval. Pentru ca în interval să se găsească cel puţin o soluţie este nevoie ca $f(a) \cdot f(b) < 0$ .




Algoritmul de căutare a soluţiei este foarte simplu şi anume: se determină jumătatea intervalului $[a, b]$.
Fie $f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, fie un interval$[a, b]$ în care se găsește o soluție a ecuației f(x)=0.
Jumătatea intervalului este $x_1 = \frac{a+b}{2}$
Se determină valoarea funcției $f(x_1)$ şi se verifică dacă $f(x_1) \cdot f(a) < 0 \xrightarrow{Da}$ soluția $\in [a, x_1]$, iar dacă $\xrightarrow{Nu} f(b) \cdot f(x_1) < 0 \Longrightarrow soluția \in [x, b]$.
În urmă acestei prime verificări, intervalul [a,b] s-a înjumătățit. De exemplu, conform figurii, intervalul rămas este $[x_1, b]$. În acesta se va căuta în continuare soluția.

Se înjumătăţeşte şi acest interval determinându-se $x_2$: $x_2 = \frac{x_1+b}{2}$ şi se verifică $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$,stabilindu-se dacă soluția este în intervalul $[x_1, x_2]$ sau $[x_2, b]$. Conform figurii prezente soluția se găsește în $[x_1, x_2]$.

Procesul se continuă prin înjumătățiri succesive, până când diferența dintre capetele de interval va scădea sub o eroare acceptată stabilită iniţial. În acel moment soluţia poate fi considerată fie unul dintre capetele de interval ultim găsit, fie jumătatea acestuia.

.

**III.2. Metoda poziției false**

**a) Metoda punctului fix.**

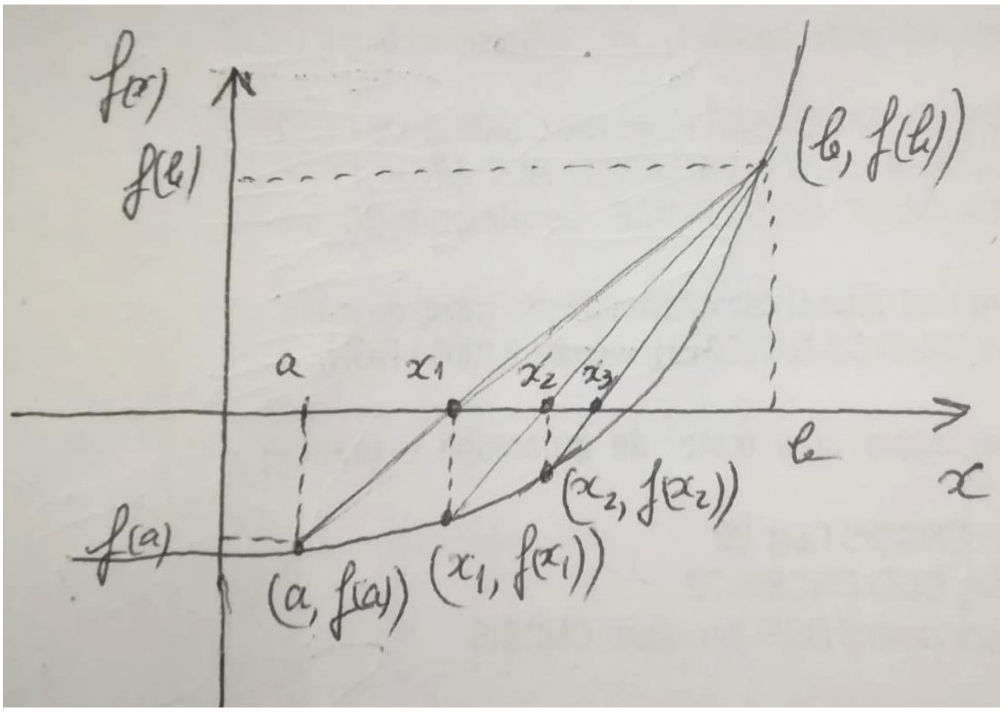
Fie funcţia f:R→R pentru care se caută soluţia ecuaţiei f(x)=0 în intervalul [a,b],funcția fiind continuă în acest interval.

Fie punctul $\big(b, f(b)\big)$ punct fix, se construiește dreapta care trece prin punctul fix și punctul $\big(a, f(a)\big)$. Punct de intersecție al acestei drepte cu axa OX îl notăm cu $x_1$, iar acestei valori, în corespunde la nivelul funcției punctul $(x_1, f(x_1))$.

Procedeul se repetă, dar de data aceasta, punctul fix $\big(b, f(b)\big)$ se unește printr-o dreaptă cu noul punct $\big(x_1 , f(x_1)\big)$ . Prin intersecția acestei noi drepte cu axa OX se determină $x_2$ , căruia îi corespunde la nivelul funcției punctul $\big(x_2, f(x_2)\big)$ .

Din nou se unește punctul fix $\big(b, f(b)\big)$ cu $\big(x_2, f(x_2)\big)$ , iar prin intersecția cu axa OX, se determină $x_3$ , căruia îi corespunde la nivelul funcției $\big(x_3, f(x_3)\big)$ ..........................

Procedeul se continuă cu $x_4, x_5, \dots . x_k,$ până când diferența în valoare absolută dintre două valori succesive $x_k$ și $x_{k+1}$ este mai mică decât o eroare acceptată.




Procesul este mai rapid decât în cazul înjumătățirii intervalului.
Prezentarea de mai sus a metodei a fost grafică / vizuală. Care sunt însă relațiile matematice care stau la baza metodei? Acestea sunt: ecuația unei drepte care trece prin două puncte date și intersecția unei drepte cu axa OX, care înseamnă de fapt că pentru ecuația dreptei, y = 0, pentru intersecția cu OX

- **Observație:** o dreaptă care trece prin două puncte date $(x_1, y_1)$ și $(x_2, y_2)$ este dată de relația: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

  - în cazul nostru pentru: $(a, f(a)), (b, f(b))$, avem $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \Longrightarrow y - f(a) = (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

pentru intersecție cu axa OX $\Longrightarrow y = 0$ avem: $-f(a) = (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$(x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a) = 0$$

$$x \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{a \cdot f(b) + a \cdot f(a) + b \cdot f(a) - a \cdot f(a)}{b-a}$$

$$x \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{b-a}$$

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \xRightarrow{\text{dacă punctul fix este } b} x_{k+1} = \frac{x_k \cdot f(b) - b \cdot f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}$$

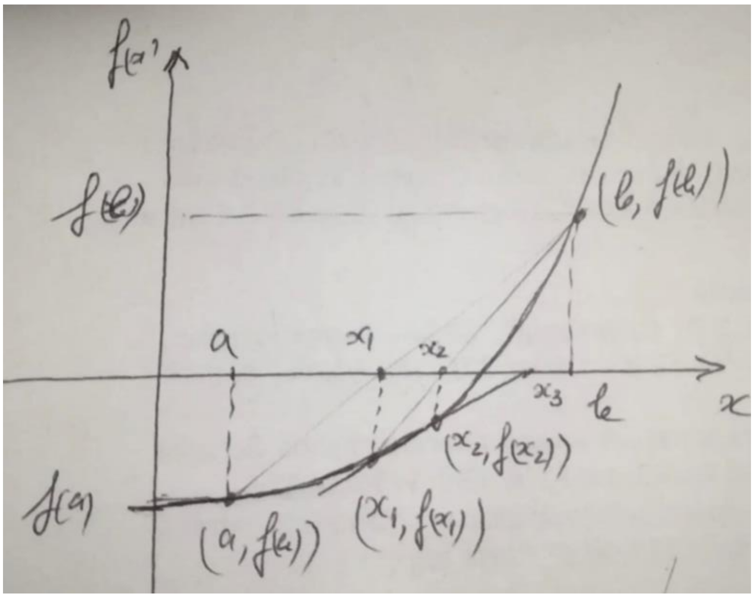
metoda punctului fix $\rightarrow |x_{k+1} - x_k| < eroare.$

**b) Metoda secantei .**

- Metoda secantei este similară metodei punctului fix, numai că nu se mai păstrează punctul fix, ci se operează mereu cu ultimele două puncte determinate, pentru definirea celui de al treilea.

Se construiește secanta care unește $(a \cdot f(a))$ cu $(b \cdot f(b))$, determinându-se $x_1$ ca intersecție cu OX, după care se unește $(x_1 \cdot f(x_1))$ cu $(b \cdot f(b))$, determinându-se $x_2$ ca intersecție cu OX , după care se unește $(x_1 \cdot f(x_1))$ cu $x_2 \cdot f(x_2)$ determinându-se astfel $x_3$. Și așa mai departe, procedeul se continuă cu $x_4, x_5, \ldots . x_k$, până când diferența în valoare absolută dintre două valori succesive $x_k$ și $x_{k+1}$ este mai mică decât o eroare acceptată.

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \xRightarrow{succesiv} x_{k+1} = \frac{x_k \cdot f(x_{k-1}) - x_{k-1} \cdot f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$$



**c)Metoda tangentei**

Constă în mod similar din operații succesive:

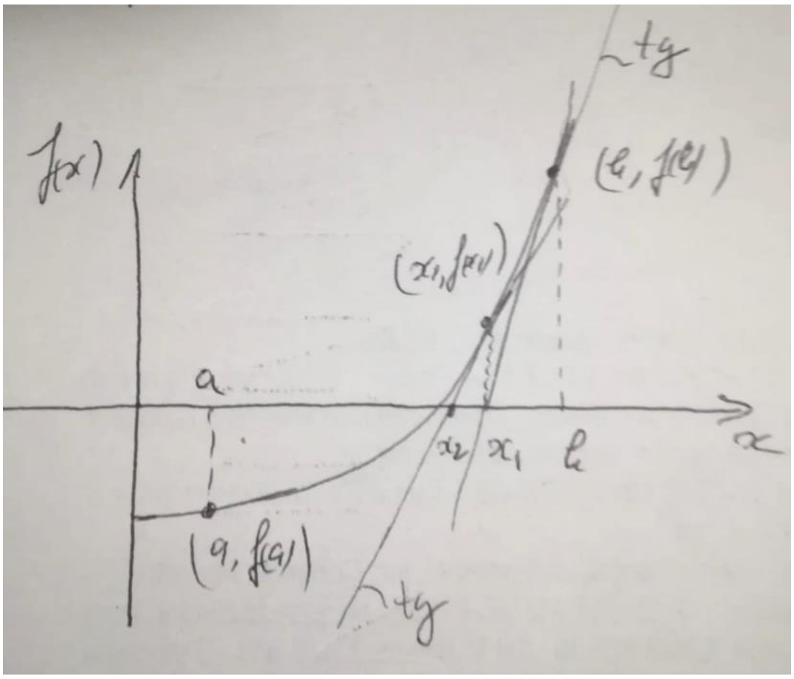
- se construiește tangenta la graficul funcției într-un punct cunoscut $\left(x_b \cdot f(x_b)\right)$ și intersecția acesteia cu axa OX, determinând punctul $x_1$. Acestuia îi corespunde la nivelul funcției punctul $\left(x_1 \cdot f(x_1)\right)$

- se construiește tangenta la graficul funcției în punctul $\left(x_1 \cdot f(x_1)\right)$ și intersecția acesteia cu axa OX, determinând punctul $x_2$. Acestuia îi corespunde la nivelul funcției punctul $\left(x_2 \cdot f(x_2)\right)$

....

- se continuă operațiunea prin determinarea $x_3, x_4, x_5, \ldots . x_k$, până când diferența în valoare absolută dintre două valori succesive $x_k$ și $x_{k+1}$ este mai mică decât o eroare acceptată.

*(ca observație, asemănarea cu metoda secantei poate fi gândită și în felul următor: secanta construită între două puncte foarte apropiate tinde spre tangentă când punctele se suprapun)*




Modalitatea de a găsi tangenta într-un punct și intersecția ei cu axa OX este următoarea:

- Dreapta care trece prin două puncte date $(x_0, y_0)$ și $(x_1, y_1)$ este dată de relația
  $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$, unde $y_0$=f($x_0$) și $y_1$=f($x_1$)
- Când cele două puncte le „apropii”, $x_1$ tinde către $x_0$, obținându-se ecuația tangentei într-un punct la de pe grafic:

  Astfel: $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

  $\downarrow$ $f'(x_0)$ când $x_1$ tinde către $x_0$

  $f(x)$-$f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'(x_0)$

- La intersecția tangentei cu axa OX pentru că $f(x) = 0 \Rightarrow -f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'^{(x_0)} \Rightarrow x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$relația\ generală\ este: x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

## III.3. METODA APROXIMĂRILOR SUCCESIVE.

Metoda aproximărilor succesive este o metodă simplă, dar nu întotdeauna eficientă de rezolvare a ecuațiilor.

Potrivit acesteia, ecuația $f(x) = 0$ se rescrie sub forma $x = g(x)$, se alege o valoare de pornire $x_1$ și se construiește șirul iterativ $x_{k+1} = g(x_k)$, cu k = 1,2,3,....... Alegerea valorii inițiale ține cont de intervalul de căutare, iar în cazul unor fenomene fizice și de intervalul fizic în care se dorește identificarea soluției.

***Dacă*** șirul este convergent el va tinde către soluția $\propto$ a ecuației, pornind de la o valoare inițială stabilită în intervalul $(a, b)$. După cum s-a menționat anterior, identificarea intervalului $(a, b)$ se realizează prin metode de separare sau prin limitări impuse de fenomenul fizic descris din ecuații.

Convergența șirului este asigurată dacă $|g'(x)| < 1, x \in (a, b)$.

Eroarea în cazul acestei metode este : $e = |x_n - \alpha|$ .

Observație: Procesul iterativ se oprește de regulă când $|x_n - x_{n-1}| < eroarea\ acceptată$.

- <u>Exemplu de aplicație:</u>

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3, \qquad x_0 = 1;$$

(a)

$x^2 = 2 \cdot x + 3 \Rightarrow x = \sqrt{2 \cdot x + 3}; pentru\ x_0 = 1 \Rightarrow$

1; 2.2361; 2.7335; 2.9098; 2.9698; 2.9899; 2.9966; 2.9989; 2.9996; 2.9999; 3.0000;

(b) $2 \cdot x = x^2 - 3$

$x = \underbrace{\frac{x^2-3}{2}}_{g(x)} \Rightarrow nu\ este\ convergent\ pentru\ că\ are\ x^2;$

aici trebuie făcută o analiză: pentru $x_0 = 1 \Rightarrow -1, -1, -1$, salt direct în soluția -1, însă dacă s-ar porni din $x = 4, rezultă\ șirul\ 6.5; 19.625; 19.07 \Rightarrow nu\ este\ convergent.$

(c) $x \cdot (x - 2) - 3 = 0$

$$x - 2 = \frac{3}{x}$$

$$x = \underbrace{\frac{3}{x} + 2}_{g(x)}$$

$x = 1 \Rightarrow 5.26; 3.15;\ 2.95;\ 3.0165; 2.9945; 3.0018;\ 2.9994;\ 3.0002;\ 2.9999;\ 3.0000.$

Observație:

obținerea funcției g, poate porni de la: $f(x) = 0; \underbrace{f(x) + x}_{g(x)} = x$. Însă nu este singura variantă.

## RELAȚIA AITKEN

Dacă se dorește îmbunătățirea rapidității procesului iterativ se poate folosi o relație de calcul numită **RELAȚIA AITKEN** $\Longrightarrow$ se bazează pe cunoașterea a cel puțin trei termeni consecutivi **determinați** în procesul iterativ, după care prin aplicarea ei, ce nu mai depinde de $g(x)$, ci doar de cele 3 valori. Astfel este accelerată convergența către soluție. Metoda se recomandă mai ales pentru expresii mari, complexe, ale funcției f inițiale și evident ale lui g. Fie $funcția\ g(x)$ dezvoltată în serie Taylor în jurul punctului $\alpha$ .

$$g(x) = g(\alpha) + (x - \alpha) \cdot g'(x) + (x - \alpha)^2 \cdot g''(x)$$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$
$$x_{k+2} = g(x_{k+1})$$

$$g(x_k) = g(\alpha) + (x_k - \alpha) \cdot g'(x_k)$$
$$g(x_{k+1}) = g(\alpha) + (x_{k+1} - \alpha) \cdot g'(x_{k+1})$$

$$x_{k+1} = \alpha + (x_k - \alpha) \cdot g'(x_k)$$
$$x_{k+2} = \alpha + (x_{k+1} - \alpha) \cdot g'(x_{k+1})$$

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) \cdot g'(x_k)$$
$$x_{k+2} - \alpha = (x_{k+1} - \alpha) \cdot g'(x_{k+1})$$

- Observație: Dacă cele două relații se împart una la cealaltă și $g'(x_{k+1})$ se consideră apropiat de $g'(x_k)$ se obține : $\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_{k+2}-\alpha} = \frac{x_k-\alpha}{x_{k+1}-\alpha} \Longrightarrow (x_{k+1} - \alpha)^2 = (x_{k+2} - \alpha) \cdot (x_k - \alpha) \Longrightarrow x_{k+1}^2 - 2 \cdot x_{k+1} \cdot \alpha + \alpha^2 = x_{k+2} \cdot x_k - x_{k+2} \cdot \alpha - x_k \cdot \alpha + \alpha^2 \Longrightarrow x_{k+1}^2 - 2 \cdot x_{k+1} \cdot \alpha = x_{k+2} \cdot x_k - x_{k+2} \cdot \alpha - x_k \cdot \alpha$

- trecem termenii în stânga: $\propto \cdot (x_{k+2} - 2 \cdot x_{k+1} + x_k) + x_{k+1}^2 - x_{k+2} \cdot x_k = 0$

$$\alpha = \frac{x_{k+2} \cdot x_k - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2 \cdot x_{k+1} + x_k}$$

$notăm\ \alpha = x_{k+3} \Longrightarrow x_{k+3} = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2 \cdot x_{k+1} + x_k}$ $\rightarrow$ **Relația lui Aitken.**

Exemplu de aplicație:

$$f(x) = 0.5 - x + 0.2 \cdot \sin(x)$$
$$soluție\text{:}\ x_0\ ales\ = 1$$
$$scriem\ f(x\ )\ sub\ forma\ x = 0.5 + 0.2 \cdot \sin(x)$$
$$x_1 = 0.5 + 0.2 \cdot sin(x_0) = 0.6683;$$
$$x_2 = 0.5 + 0.2 \cdot \sin(x_1) = 0.6239;$$
$$x_3 = 0.5 + 0.2 \cdot sin(x_2) = 0.6168;$$
$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_3 - 2 \cdot x_2 + x_1} = 0.6615$$
$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_4 - 2 \cdot x_3 + x_2} = 0.6152$$
$x_6 = 0.6151$,
$x_7 = 0.6150$,
$x_8 = 0.6150$.