Fiche méthode : Calculs d'incertitude

1. Valeur vraie et valeur mesurée

Valeur vraie d'une grandeur : mesure réelle, exacte d'une grandeur, qui n'est **jamais accessible**.
Valeur mesurée d'une grandeur : valeur accessible d'une grandeur ; elle n'est qu'une estimation (valeur approchée) de la valeur vraie.
Incertitude élargie : permet d'obtenir un l'intervalle de valeurs dans laquelle la valeur vraie se trouve avec une très forte probabilité

2. Validité d'une mesure

A. Incertitude absolue

L'incertitude absolue permet de juger la validité d'un résultat de mesure.
Si x est la mesure effectuée, alors l'incertitude absolue est notée Δx.
L'incertitude absolue et la mesure elle-même sont deux grandeurs homogènes : elles s'expriment dans la même unité.
La valeur vraie de x est comprise dans l'intervalle [x – Δx ; x + Δx]

B. Incertitude relative

L'incertitude relative donne la précision de la mesure effectuée et s'exprime en pourcentage.
L'incertitude relative s'écrit $\frac{\Delta x}{x}$, avec x la mesure effectuée et Δx son incertitude absolue.

Pour obtenir l'incertitude relative en pourcentage : $p = \frac{\Delta x}{x} \times 100$

La valeur vraie de x est x à ± p % près

3. Calcul d'incertitude

A. Erreur systématique :

Erreur qui se répète identique à elle-même lors de la **mesure répétée** d'une grandeur, due à la qualité de l'instrument de mesure lui-même, au protocole de mesure, à expérimentateur lorsqu'il réalise la mesure de la même façon, etc…

Exemple : erreur due à la précision de l'instrument de mesure :
La précision de l'instrument correspond à la valeur de sa plus petite graduation. La mesure est donc connue à ±δ (précision de la mesure)

Calcul de l'incertitude-type u (loi de probabilité) :

Lecture d'un cadran, règle, … : δ correspond à la plus petite graduation	$u = \frac{\delta}{2\sqrt{3}} = \frac{\delta}{\sqrt{12}}$
Classe d'un instrument, indication du constructeur : ±δ	$u = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Imprécision due à l'estimation d'une mesure : $\delta = \frac{d_{max} - d_{min}}{2}$ (ex : largueur de la tache de diffraction)	$u = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$

Calcul de l'incertitude « élargie » : $\Delta x = 2u$ **et *x* = (*x*$_{\text{mesurée}}$ ± Δ*x*)**
Dans ces conditions, la théorie statistique annonce que la valeur vraie *x* a 95% de chance de se trouver dans l'intervalle $\left[\bar{x} - 2u ; \bar{x} + 2u\right]$**.** On parle « d'intervalle de confiance de 95% ».

Exemple : on mesure la longueur d'un objet à la règle graduée. La valeur vraie de l'objet est *L*. La valeur mesurée est $L_{mesurée}$ = 35,0mm lue sur la règle graduée au demi millimètre.

Avec δ = 0,5mm, $u = \frac{0{,}5}{\sqrt{12}} \approx 0{,}14$

D'où l'incertitude élargie $\Delta L = 2u = 0{,}28$ et *L* = (35,0 ± 0,3) mm

La valeur vraie a 95% de chance d'être comprise en 37,7 et 35,3 mm.

B. Erreur statistique ou aléatoire :

Erreur qui apparaît lorsque l'expérimentateur réalise **plusieurs fois la même mesure** dans les mêmes conditions d'évaluation.

La valeur de la mesure est affectée aléatoirement dans un sens ou dans un autre par rapport à une valeur moyenne.

Pour un échantillon de n mesures réalisées de la même grandeur x, on évalue statistiquement l'incertitude de façon suivante :

Calcul de la valeur moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

Calcul de l'écart-type moyen : $\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Calcul de l'incertitude-type : $u = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

Calcul de l'incertitude « élargie » : $\Delta x = 2u$ **et** $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$

La théorie statistique annonce que la valeur vraie *x* a 95% de chance de se trouver dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta x ; \bar{x} + \Delta x]$

4. Composition d'incertitudes

Soit m la grandeur calculée à partir des grandeurs mesurées x, y, z….

Relation	Incertitude type
$m = x + y + z + \ldots$	$u(m)^2 = u(x)^2 + u(y)^2 + u(z)^2 + \ldots$
$m = \frac{x \times y}{z}$	$\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 = \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2$
$m = x^n$	$\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 = n^2 \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2$
$m = a \times x + b$ a et b constantes sans incertitudes	$u(m) = a \times u(x)$
Composition des incertitudes systématiques et statistiques	$u = \sqrt{u_{syst}^2 + u_{stat}^2}$