

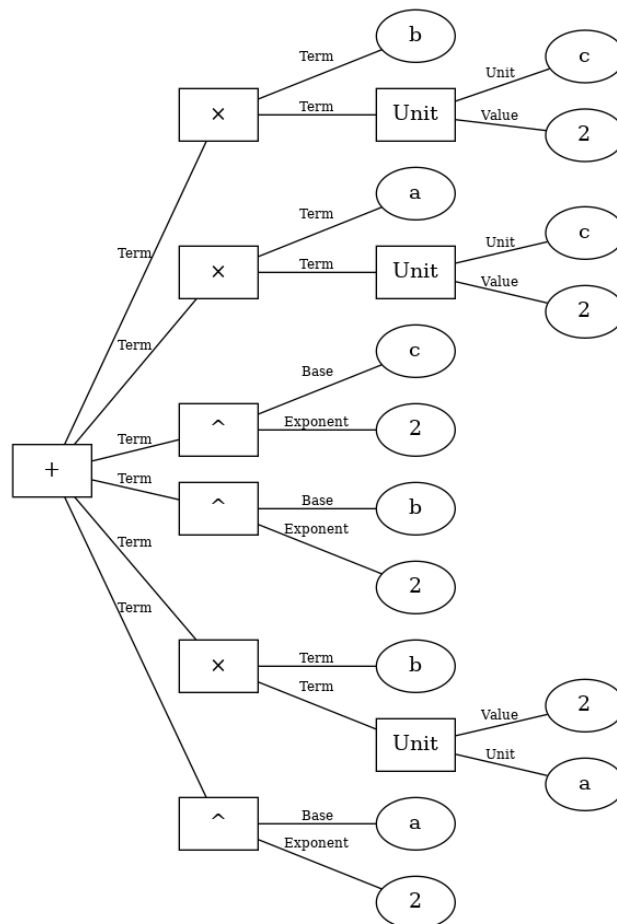
# Tolkning och förenkling av matematiska uttryck i form av en symbolhanterare

Matstoms, Axel

Janković, Luka

Matstoms, Ivar

27 april 2018



**Handledare:** Mikael Rydfalk  
**Medbedömare:** Thomas Lejdå

## **Abstract**

The purpose of this project is to look at some of the techniques used by sites such as WolframAlpha to simplify algebraic expressions and solve particular kinds of equations. To research this we wrote an application in Python with some of the features of such sites. We chose to work with Python due to its simplicity and due to the fact that everybody in the group knew it before the project even started. During the span of this project we were able to develop an application which is able to take input and construct an abstract syntax tree which is then simplified. The application is able to handle many of the goals that were set in the beginning of this project, including addition and multiplication of polynomials correctly, although not always fully simplified. The application is also able to solve polynomial equations up to and including the second degree. With time the application could easily be expanded to cover more aspects of what we set out to do such as polynomial division and solving polynomial equations of higher grades.

**Keywords:** Abstract syntax tree; Python; Algebraic Expressions

# Innehåll

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inledning</b>                                | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Teori</b>                                    | <b>5</b>  |
| 2.1      | Abstrakt syntaxträd . . . . .                   | 5         |
| 2.1.1    | Allmänt om träd . . . . .                       | 5         |
| 2.1.2    | Implementation av syntaxträd . . . . .          | 6         |
| 2.1.3    | Noder . . . . .                                 | 6         |
| 2.2      | Allmänt om förenkling . . . . .                 | 7         |
| 2.3      | Homogena noder . . . . .                        | 7         |
| 2.3.1    | Allmän förenkling av homogena noder . . . . .   | 7         |
| 2.3.2    | Additionsnod . . . . .                          | 8         |
| 2.3.3    | Multiplikationsnod . . . . .                    | 9         |
| 2.4      | Inhomogena noder . . . . .                      | 10        |
| 2.4.1    | Potensnod . . . . .                             | 11        |
| 2.4.2    | Subtraktionsnod . . . . .                       | 11        |
| 2.4.3    | Divisionsnod . . . . .                          | 11        |
| 2.4.4    | Ekvationsnod . . . . .                          | 12        |
| 2.5      | Ekvationslösning . . . . .                      | 13        |
| 2.5.1    | Ekvationsmetoder . . . . .                      | 13        |
| <b>3</b> | <b>Metod</b>                                    | <b>13</b> |
| 3.1      | Klasser och Objekt . . . . .                    | 13        |
| 3.1.1    | Objektorienterad programmering . . . . .        | 13        |
| 3.1.2    | Subklasser och arv . . . . .                    | 14        |
| 3.1.3    | Noder . . . . .                                 | 14        |
| 3.2      | Tolkning av inmatade ekvationer . . . . .       | 14        |
| 3.2.1    | Lexikalisk analys . . . . .                     | 15        |
| 3.2.2    | Parser . . . . .                                | 16        |
| 3.3      | Bilder på träd . . . . .                        | 16        |
| 3.4      | Källor . . . . .                                | 16        |
| 3.4.1    | Struktur . . . . .                              | 16        |
| 3.4.2    | Multinomial . . . . .                           | 17        |
| <b>4</b> | <b>Resultat</b>                                 | <b>17</b> |
| 4.1      | Vilka förmågor innefattar biblioteket . . . . . | 17        |
| 4.1.1    | Förenkling . . . . .                            | 17        |
| 4.1.2    | Ekvationslösning . . . . .                      | 18        |
| 4.2      | Arbetsprocess . . . . .                         | 18        |
| 4.2.1    | Python . . . . .                                | 18        |

|          |                                   |           |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| 4.2.2    | Github . . . . .                  | 18        |
| <b>5</b> | <b>Diskussion</b>                 | <b>18</b> |
| 5.1      | Komplexitet . . . . .             | 18        |
| 5.2      | Kodstruktur . . . . .             | 19        |
| 5.3      | Möjliga förbättringar . . . . .   | 19        |
| 5.4      | Lärdomar . . . . .                | 20        |
| 5.5      | Källkritik . . . . .              | 20        |
| 5.5.1    | KTH . . . . .                     | 20        |
| 5.5.2    | Encyclopædia Britannica . . . . . | 20        |
| 5.5.3    | Proofwiki . . . . .               | 20        |
| 5.5.4    | Python.org . . . . .              | 20        |

# 1 Inledning

Eftersom vi alla i gruppen delar en stor passion för programmering ville vi göra något som kombinerar programmering med ett naturvetenskapligt ämne. Vi övervägde flera olika idéer, bland annat en realtids fysikmotor, implementationer av matematiska funktioner (såsom sinus, exponenter) på hårdvarunära nivå samt idén som valdes: att skriva en symbolhanterare vid namn GAMLIP (Ga-Arbete Matematikbibliotek i Python). En symbolhanterare, eller CAS, Computer Algebra System, är ett datorprogram som kan tolka och lösa ekvationer, exempelvis  $5x + 10 = 20$ . En annan funktion som en symbolhanterare antar är förmågan att förenkla uttryck, exempelvis  $(x + 2)(x - 3) \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)$ . Skillnaden mellan en vanlig miniräknare och en symbolhanterare är att symbolhanterare förstår algebra samt att en symbolhanterare kan hantera variabler, inte bara värden.

Syftet med arbetet är att undersöka hur verktyg såsom WolframAlpha fungerar, dvs. hur inmatad data tolkas, hanteras och förenklas och utifrån det skriva ett bibliotek som kan hantera uttrycksförenkling och ekvationslösning. Arbetet har utgått från dessa frågeställningar:

- Hur inmatad data kan tolkas och representeras som en trädstruktur
- Hur uttryck kan förenklas m.h.a. dessa trädstrukturer
- Hur lösningar till ekvationer kan hittas

# 2 Teori

## 2.1 Abstrakt syntaxträd

Det är besvärligt för ett program att tolka ekvationer som är skrivna på vanlig form (e.x.  $5x + 10 = 15$ ). Därför är det viktigt att ekvationen först byggs upp på ett sätt som är mer hanterbart för ett datorprogram. Så kallade abstrakta syntaxträd används oftast inom datavetenskap för att strukturera programmeringskod så att en kompilator kan omvandla källkoden till ett exekverbart program. Men på grund av likheterna mellan programmeringsspråkens syntax och matematiska ekvationer användes abstrakta syntaxträd i detta arbete.

### 2.1.1 Allmänt om träd

Inom datavetenskap beskrivs träd som en form av datastruktur för att representera hierarkisk data. Ett träd inom matematiken består av noder som är sammansatta på så vis att varje nod kan innefatta ett eller flera barn, som

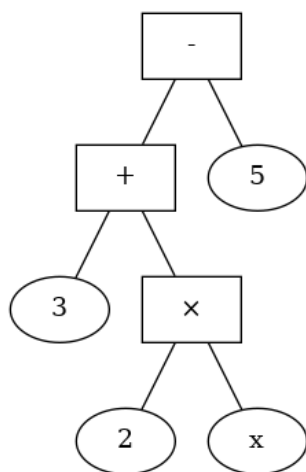
i sig också är noder. I det här dokumentet kallas barnen för subnoder. En subnods "förälder" kallas just så: förälder. Noder behöver dock ej innefatta några subnoder. Dessa noder kallas för löv. Varje nod behöver dock anta ett värde. Detta kan vara ett numeriskt värde (e.x. 5 eller 10), eller en operator (e.x. plus eller gånger). Om en nod inte har en förälder betyder det att denna nod är högst upp i trädet. Denna nod kallas för rotnod eller bara rot.

### 2.1.2 Implementation av syntaxträd

Trädet i sig utgår från en rotnod (eng. rootnode). Om trädet representerar en ekvation är denna nod alltid ett likhetstecken ( $=$ ), eftersom det är där ekvationen utgår ifrån. Annars kan rotnoden vara precis vilken slags nod som helst. Precis som t.ex. en inhomogen<sup>1</sup> operatörsnod kan rotnoden anta två subnoder (I detta fall måste två noder antas, en för VL och en för HL). Därefter kan leden byggas upp av olika sorters noder.

### 2.1.3 Noder

En nod måste anta ett värde. Detta kan uppnås genom att ge noden ett konkret värde (e.x. 5 eller 10), en konstant (e.x.  $\pi$ ,  $e$ ) eller operator (e.x.  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $\div$ ,  $\wedge$ ). Om noden är av sådan typ att den kräver argument, dvs. kräver ett eller flera värden för att själv få ett värde, kan noden själv anta noder (s.k. barnnoder, eng. child nodes) för att uppfylla sitt värde. Se Figur 1. Eftersom programmet ska kunna hantera ekvationslösning, måste den okända

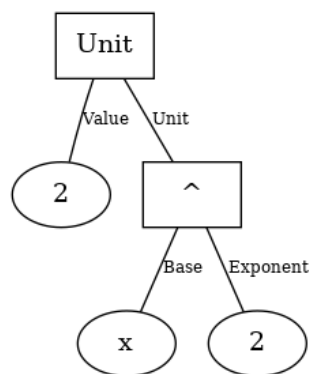


Figur 1: Visuell representation av  $(2x + 3) - 5$  som ett abstrakt syntaxträd.

---

<sup>1</sup>Se 2.4 Inhomogena noder

variabeln kunna representeras (e.x.  $5x + 10 = 20$ . Här är  $x$  den okända variabeln.) För att representera variabeln används en speciell typ av nod: en så kallad enhetsnod. Denna nod antar ett värde (för koefficienten) och en representation av den okända variabeln, en så kallad enhet. Denna enhet består av själva variabeln och vilken grad som den representeras i. Se Figur 2 för en visuell representation av  $2x^2$  som en enhetsnod.



Figur 2:  $2x^2$  representerat som en enhetsnod med enheten  $x^2$  och värdet 2.

## 2.2 Allmänt om förenkling

Operatörsnoder vars subnoder endast består av numeriska värden räknas helt enkelt ihop med den operatoren som noden representerar. Då kommer denna operatörsnod ersättas med en nummernod som antar det ihopräknade värdet.

## 2.3 Homogena noder

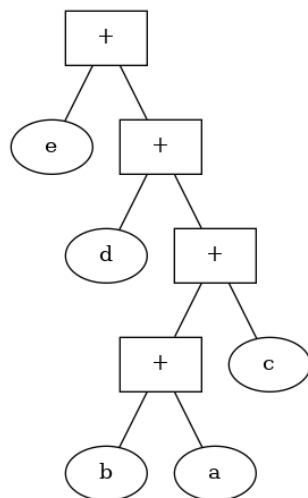
Homogena noder är de noder där ordningen av subnoder ej spelar någon roll, vilket gör att subnoderna kan lagras som en lista som ej är begränsade i kapacitet. Noden byggs homogena noder först upp av ett träd av noder med bara två subnoder<sup>2</sup> eftersom det är så programmet tolkar inmatningen, se Figur 3.

### 2.3.1 Allmän förenkling av homogena noder

Att förenkla noder som precis har tolkats av programmet (se Figur 3) är dock opraktiskt. Därför är det första steget i förenklingen att försumma staplade homogena noder av samma typ till en enda nod. Om noderna antar

---

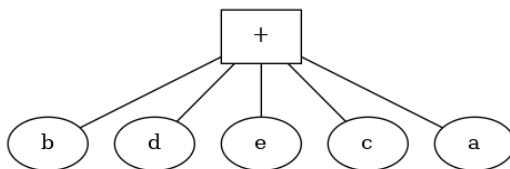
<sup>2</sup>Se 2.4 Inhomogena noder



Figur 3:  $(a + b + c + d + e)$  tolkat av programmet.

numeriska värden räknas de ihop till en subnod, medans variabler ( $x$ ) helt enkelt lämnas som en subnod. Efter det läggs elementen in i noden en efter en och varje element kontrolleras om den kan slås ihop med en annan subnod. Enhetsnoder<sup>3</sup> hanteras dock olika av varje typ av homogen nod. Därför förklaras detta i detalj i samband med varje typ av nod.

Additionen av två enhetsnoder med samma enhet kan förenklas genom att addera koefficienterna.



Figur 4:  $(a + b + c + d + e)$  efter första steget av förenkling av homogen nod

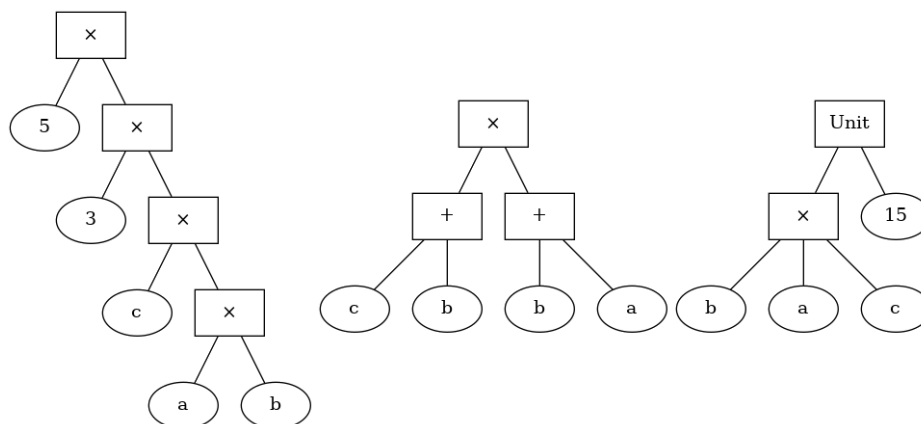
### 2.3.2 Additionsnod

Förenklingen av en additionsnod fungerar genom att alla värden som kan summeras, summeras. Oftast innebär detta alla noder med numeriska värden. Enhetsnoder summeras om möjligt (ex.  $5x + 3x = 8x$ ), se Figur 6, och behålls som subnoder för additionsnoden.

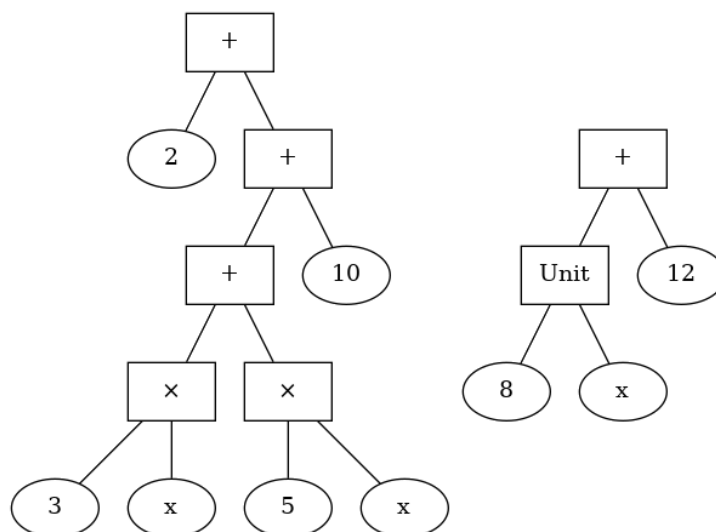
---

<sup>3</sup>Se 2.1.3 för förklaring av enhetsnod





Figur 5:  $(a \cdot b \cdot c \cdot 3 \cdot 5)$  förenklas i tre steg, a,b,c lyfts upp till samma nod och talen separeras till sin egen nod, tillslut räknas talen ihop.



Figur 6:  $5x + 3x + 10 + 2$  förenklas till  $8x + 12$

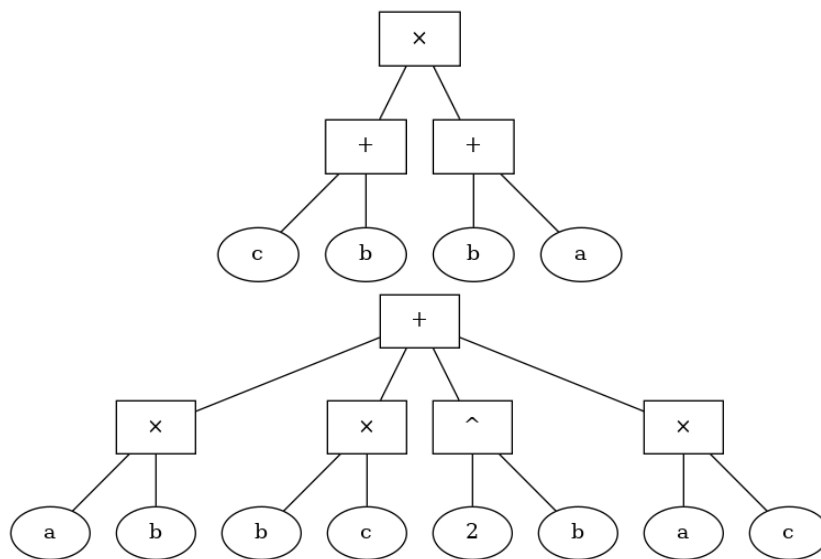
### 2.3.3 Multiplikationsnod

Efter de generella förenklingarna av homogena noder<sup>4</sup> separeras additionsnoder från övriga noder. Alla kombinationer av dessa separerade additionsnoders subnoder multipliceras med övriga noder och adderas ihop. Enhetsnoder kombineras genom att skapa en ny enhetsnod vars koefficient består av produkten av de ursprungliga enhetsnodernas koefficienter och vilken grad den nya enhetsnoden representeras av bestäms av hur många enhetsnoder det

<sup>4</sup>Se 2.3.1 Allmän förenkling av homogena noder

från början var. (e.x.  $5x \cdot 10x = 50x^2$ ). Enhetsnoder kan också kombineras med övriga noder genom att de övriga värdena multipliceras in i enhetsnodens koefficient<sup>5</sup>.

En potensnod kan slås ihop med en annan nod om basen på potensnoden är samma som den andra noden, isåfall skapas en ny potensnoden med exponenten ökad med ett.



Figur 7:  $(a + b) \cdot (c + b)$  förenklas till  $(a \cdot b) + (b \cdot c) + (b^2) + (a \cdot c)$

## 2.4 Inhomogena noder

Inhomogena noder genomför inhomogena operationer; dvs. operationer som där ordningen av subnoderna spelar roll. (e.x.  $a - b \neq b - a$ ). Därmed kan inhomogena noder ej kombineras rekursivt på samma sätt som homogena noder kan.<sup>6</sup> Allmän förenkling av homogena noder) Detta medger också att det inte finns ett allmänt sätt att förenkla inhomogena noder.

<sup>5</sup>Se 2.1.3 Noder

<sup>6</sup>Se 2.3.1

### 2.4.1 Potensnod

Potensnoder innehåller två barnnoder, basen och exponenten. En potensnod med en additionsnod i basen, exempelvis  $(a + b + c)^3$ . En potensnod med potens 0 kommer bytas ut mot en heltalsnod med värdet 1, en potensnod med värdet 1 kommer bytas ut mot basen. Potensnoder expanderas med hjälp av multinomialsatsen. Som man kan ana på namnet liknar multinomialsatsen binomialsatsen. Skillnaden är att multinomialsatsen är ett mer generaliserat sätt att beskriva utveckling av polynom, och är alltså ej begränsad till endast binom. Satsen lyder

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_m^{k_m}$$

Den behöver dock lite förklaring. Med  $\sum_{k_1 + \dots + k_m = n}$  menas alla möjliga kombinationer med återläggning av exponenter i  $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_m^{k_m}$  där  $\sum_{i=1}^m k_i = n$  uppfylls. Vidare behöver  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$  förklaras. Detta kallas för *multinomialtal* eller *multinomialkoefficient*, som i sig en generalisering av binomialkoefficienten  $\binom{n}{k}$ . Multinomialkoefficienten kan skrivas om på detta vis.

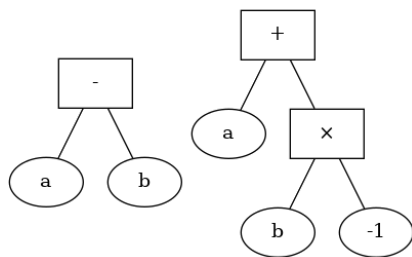
$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

### 2.4.2 Subtraktionsnod

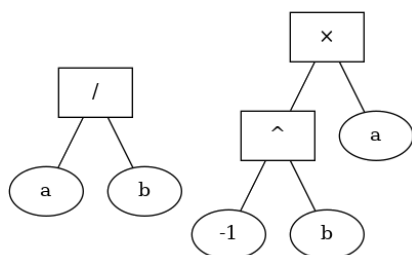
Subtraktionsnoden är ej en homogen nod då ordningen på termerna spelar roll,  $a - b \neq b - a$ , därmed måste subtraktionsnoden anta endast två barnnoder; en för vänster sida och en för höger sida. För att förenkla subtraktionsnoden implementeras inget nytt. Den använder sig istället av additionsnoden och multiplikationsnoden för att uppnå en minusoperation. Istället för att direkt räkna ut  $a - b$  så skrivs ekvationen om till  $a + ((-1) \cdot b)$ . Därmed kan samma resultat uppnås med bara addition och multiplikation.

### 2.4.3 Divisionsnod

På samma sätt som subtraktionsnoden skiver om ekvationen  $a - b \Rightarrow a + ((-1) \cdot b)$  så skriver divisionsnoden om ekvationen så att förenklingen istället kan hanteras av multiplikationsnoden.  $\frac{a}{b} \Rightarrow a \cdot (b^{-1})$



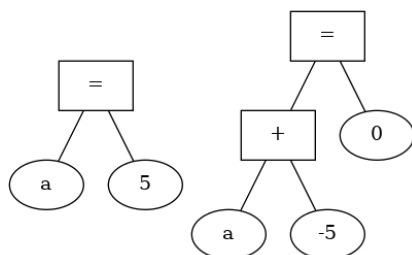
Figur 8:  $a - b$  före och efter förenkling. Minus noden transformeras till en additionsnod med  $b$  ersatt med  $b \cdot -1$



Figur 9:  $a/b$  förenklas till  $a \cdot (b^{-1})$

#### 2.4.4 Ekvationsnod

En ekvationsnod antar en nod för varje led (I vårt projekt kan en ekvationsnod endast anta två subnoder; en för VL och en för HL.) Målet med ekvationsnoden är att representera en ekvation som kan lösas ut och förenklas. Detta innebär att subtrahera ett led från båda leden, som på så sätt lämnar ett led tomt.



Figur 10:  $(x + 4) \cdot (2 + x) = 10$  förenklas till  $-2 - 10 = 0$

## 2.5 Ekvationslösning

Att lösa ekvationer med en okänd (dvs. lösa ut  $x$ ) innebär att först förenkla ekvationen så att en sida antar värdet 0. Därefter kommer olika regler appliceras på ekvationen beroende på vilken grad den är i. Vilken grad den är i bestäms av den högsta potensen.

När en ekvation löses förenklas den först så högerled är lika med 0. Sen går den igenom alla direkta subnoder nod för nod och kolla efter okända och potens. Programmet kan bara lösa ekvationer med en okänd. Den högsta exponenten på den okända är graden på ekvationen. Programmet har en samling av olika metoder för att lösa ekvationer och hittar den lämpligaste metoden och utför den. Vilka metoder som används beskrivs i 2.5.1.

### 2.5.1 Ekvationsmetoder

**Förstgradsekvationer**  $kx + m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-m}{k}$

**Andragradsekvationer**  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{(2a)^2} - \frac{c}{a}}$

**Enkla exponensialekvationer**  $a \cdot x^b + k = 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{-k}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$

## 3 Metod

### 3.1 Klasser och Objekt

En viktig del av struktureringen av noder <sup>7</sup> handlar om att en nod kan vara en utökad typ av en annan nod. Det vill säga, istället för att på nytt skapa varenda nod kan man istället skapa en generell nod för t.ex. operatörer, och sedan utöka den för varje sorts operation. Detta kallas för Objektorienterad Programmering (Object Oriented Programming, OOP).

#### 3.1.1 Objektorienterad programmering

I princip funkar objektorienterad programmering genom att man för varje föremål, struktur, etc. man vill beskriva i ett program har en s.k. klass. En klass är en abstrakt modellering av ett objekt; dvs. den innehåller definitioner för attributer och handlingar. (Kan liknas t.ex. en ritning; klassen innehåller information om strukturen, men är i sig inte en färdig produkt.). Sedan används klassen för att skapa objekt som kan fylla på med värden

---

<sup>7</sup>se 2.1.3, Noder

på attributerna och faktiskt utföra de beskrivna handlingarna. Ett exempel som är enkelt att förstå är att föreställa sig klassen Bil. I denna klass är det definierat att varje bil har t.ex. en färg, maxhastighet, osv. Den har också vissa handlingar (alt. metoder) beskrivna; man kan köra bilen, tanka den, osv. Detta är beskrivningen av klassen Bil, och det är väldigt viktigt att komma ihåg att klassen, dvs. definitionen av bilen i sig ej är en bil. Istället skapas en instans av klassen bil; alltså kan man säga att objektet är skapat med klassen som ritning. Vi återvänder till Bil-exemplet och skapar ett objekt; en bil med färgen blå och maxhastighet 200 km/h. Denna teoretiska bil kan nu köras, tankas osv.

### 3.1.2 Subklasser och arv

Ett användbart redskap inom objektorienterad programmering är arv. För att fortsätta med bil-exemplet<sup>8</sup> kan vi säga att klassen Bil är en subklass (dvs ärver från) klassen Fordon. Klassen Bil har då alla attributer och metoder som klassen Fordon har samt attributer och metoder som läggs till i definitionen av Bil. Klassen fordon kan exempelvis ha attributerna kan-flyga och bränsle-typ. Därmed kan en instans av klassen Bil anta värden för dessa attributer.

### 3.1.3 Noder

Alla noder är subklasser av klassen Nod. Nodklassen innehåller definitioner för metoder som används av och är gemensamma för alla subklasser. T.ex. så hanteras operationer av noder (e.x. addition, subtraktion) av denna klass (se tabell 1). Alla operatörsnoder är subklasser av klassen operatörsnod. Operatörsnoden har dock ingen funktion i sig, utan används för att enklare urskilja vilka noder som är operatörsnoder och vilka som inte är. Därefter grupperas additionsnodens och multiplikationsnodens klass som var sin subklass av klassen homongen operatörsnod. Detta gjordes eftersom både multiplikationsnoden och additionsnoden är homogena noder<sup>9</sup>.

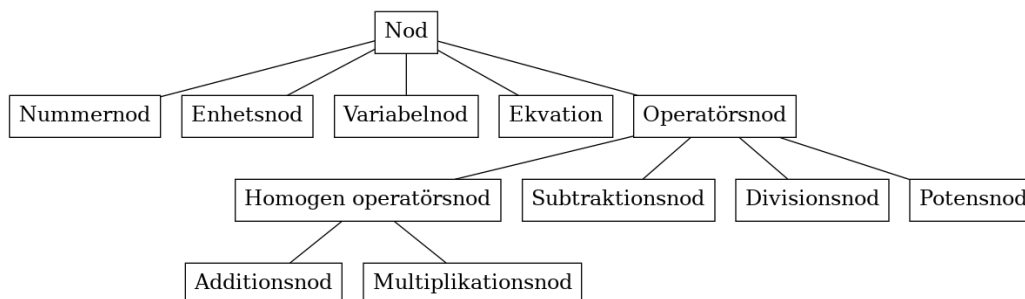
## 3.2 Tolkning av inmatade ekvationer

För att läsa in uttryck på normal form och för att enkelt omvandla de till abstrakta syntaxträd krävs en lexikalisk analys av den inmatade datan som sedan tolkas av en parser. Att hantera lexikalisk analys och att utveckla

---

<sup>8</sup>se 3.1 Klasser och Objekt

<sup>9</sup>Se 2.3 Homogena noder



Figur 11: Diagram av nodklassen samt dess alla subklasser.

| Namn          | Användning  |
|---------------|---|
| hash_node     | Returnerar ett unikt nummer för just denna nod som används för att identifiera den. |
| get_children  | Returnerar subnoder.  |
| get_int_value | Om noden går att räkna ut och resultatet är ett heltal returnera heltalet.          |
| latex         | Returnerar en latex representation.   |
| simplified    | Bygger upp en nod som är en förenkling av sig själv.                                |
| eval          | Räknar ut värdet på en nod.   |
| eq            | Jämför noder (samma struktur, variabler etc.)                                       |
| formatted     | Returnerar en text representation av noden.   |

Tabell 1: Funktioner och dess användning i basklassen nod.

en parser ligger utanför projektet. Därför användes biblioteket purplex, som utför denna lexikaliska analys och har en inbyggd parser.

### 3.2.1 Lexikalisk analys

En lexer separerar den inmatade datan till s.k. tokens baserat på fördefinierade mönster och bygger upp en array (lista) baserad på dessa tokens. Med andra ord letar en lexer efter ett sorts mönster i indatan och fyller på array-en med motsvarande tokens. Tokens känns igen med hjälp av mönstermatchningsspråket regex. Nedan visas en tabell över vilka mönster som letas efter och vad de ersätts med i listan i den lexikaliska analysen. Exempel:  $5x + 10 = 20 \Rightarrow$  ([värde, 5], [okänd,  $x$ ], [addition], [värde, 10], [likhetstecken], [värde, 20])

| Mönster            | Tokens                      |
|--------------------|-----------------------------|
| Nummer             | Nummernod                   |
| Bokstav            | enhetsnod med värdet 1      |
| Nummer och bokstav | Enhetsnod med värdet nummer |
| +                  | Additionsnod                |
| -                  | Subtraktionsnod             |
| *                  | Multiplikationsnod          |
| /                  | Divisionsnod                |
| ^                  | Potensnod                   |
| =                  | Ekvation                    |

Tabell 2: Vilka mönster som letas efter i indatan och vad de ersätts med i den lexikaliska analysen.

### 3.2.2 Parser

Parserns (svenska - tolk) uppgift i vårt projekt är att bygga upp ett syntax-träd av listan som skickades över från den lexikaliska analysen<sup>10</sup>. Eftersom det är då strukturen på ekvationen byggs upp är det viktigt att räknesätten prioriteras på rätt sätt. Ordningen på räknesätten är förutbestämt i regler som parsern följer. När tokens definieras anges också vilken ordning de ska prioriteras.

## 3.3 Bilder på träd

Bilderna på träden som används relativt ofta i denna rapport är också del av GAMLP, som har möjligheten att generera bilder av träd. Dessa genereras med hjälp av biblioteket *graphviz*. För varje träd går programmet igenom trädet uppifrån och ner och skapar listor med alla noder och kanter. Programmet beskriver sedan kod med dotsyntax, som sedan tolkas med programmet dot för att generera en bild på trädet.

## 3.4 Källor

### 3.4.1 Struktur

Strukturen av projektet baserades till viss del på ett examensarbete vid namn *Constructing a Computer Algebra System Capable of Generating Pedagogical Step-by-Step Solutions* skriven av Dimitrij Lioubartsev (KTH, 2016). Syftet

---

<sup>10</sup>Se 3.2.1 Lexikalisk analys



med detta examensarbete är att modifiera ett existerande bibliotek för symbolhantering, SymPy, så att det kan generera stegen som krävs för att kunna lösa en ekvation. Detta var givetvis ej syftet med vårt gymnasiearbete, men examensarbetet gick in i detalj hur en symbolhanterare kan fungera (kapitel 3). Denna text användes som källa då den kändes relevant till vårt arbete. Vi kunde använda källan för inspiration för hur arbetet skulle läggas samt som exempel på hur själva rapporten kunde se ut.

### 3.4.2 Multinomial

Förenkling av uttryck på formen  $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^m$  görs med multinomial-satsen. Då vi endast jobbat med ett specialfall av den här formen på uttryck, binomial, behövde vi hitta ett sätt att förenkla uttryck på den allmänna formen. Sidan om Multinomial Theorem på Proof Wiki var till stor hjälp och kunde även verifieras mot Encyclopædia Britannicas sida om samma ämne. Proof Wikis sida innehöll mer information och var till större nytta.

## 4 Resultat

### 4.1 Vilka förmågor innefattar biblioteket

#### 4.1.1 Förenkling

Programmet strävar efter att förenkla ekvationen så den blir omskriven på polynomform, vilket kan vara fördelaktigt i vissa situationer, dock inte alla.

| Uttryck             | Förenklas till                 |
|---------------------|--------------------------------|
| $\frac{ac+bc}{c}$   | Kan ej förenklas               |
| $a + a$             | $2a$                           |
| $a \cdot a$         | $a^2$                          |
| $a - a$             | 0                              |
| $(a + b)^2$         | $a^2 + 2ab + b^2$              |
| $\frac{a}{a}$       | Kan ej förenklas <sup>11</sup> |
| $(a + b + \dots)^k$ | Se 2.4.1                       |
| $ak + am$           | $a(k + m)$                     |
| $\frac{a+b}{c+d}$   | Programmer kraschar            |

Tabell 3: Uttryck och vad de förenklas till (om möjligt)

<sup>11</sup>Det triviala uttrycket  $\frac{a}{a}$  kan ej förenklas då biblioteket ej kan hantera  $a^{-1}$ . Se 2.4.3

### 4.1.2 Ekvationslösning

Programmet kan lösa relativt avancerade ekvationer. Programmet är i första hand utvecklat för att lösa polynomekvationer.

| Allmänt uttryck   | Löser programmet ekvationen? |
|---|------------------------------|
| $ax + b = 0$  | Ja                           |
| $\frac{x}{a} = b$   | Ja                           |
| $ax^2 + bx + c = 0$   | Ja                           |
| $\frac{a \cdot x^2}{b} + \frac{x \cdot c}{d} + \frac{e \cdot f}{g} = g$ | Ja                           |
| $(x + a)(x + b) = c$  | Ja                           |
| $\frac{(x+a) \cdot (x+b)}{c} + d = e$                                   | Ja                           |
| $x^a + b = c$   | Endast om $a > 0$            |
| $(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) = d$                               | Nej                          |

Tabell 4: Ekvationer och om de kan lösas

## 4.2 Arbetsprocess

### 4.2.1 Python

Vi valde att skriva programmet i programmeringsspråket Python då det är allmänt enkelt att förstå och att arbeta med. Dessutom hade vi alla kunskap inom språket innan vi började med projektet.

### 4.2.2 Github

Programmet sparades på GitHub, som är en service för versionshanteringsprogrammet git. GitHub underlättar programmeringsprocessen för projekt som innefattar flera deltagare. GitHub har också inbyggda funktioner för t.ex. problemhantering, då s.k. issues kan öppnas för att flagga upp utvecklarna att man har funnit ett eller flera problem i koden.

## 5 Diskussion

### 5.1 Komplexitet

En kods komplexitet definieras som gränsvärdet av tiden det tar för programmet att utföra sin uppgift när storleken på indatan går mot oändligheten. Att komplexiteten är ett gränsvärde har fördelen att den endast blir beroende av det största värdet, dvs. indatan. Till exempel: om det tar linjär tid att ta

indata och kvadratisk tid att behandla indatan blir komplexiteten kvadratisk tid då den linjära termen inte spelar någon roll när storleken på indatan blir hög/stor. Detta skrivs som  $O(n^2)$ . Med  $O$  menas juste gränsvärdet när  $n$  går mot oändligheten.

Även om projektet blev ett bibliotek som kan användas inuti andra program så fokuserade vi inte på att göra programmet så snabbt som möjligt. Det var viktigare för oss att få så många kärnfunktioner som möjligt att fungera bra så att biblioteket, m.h.a. ett program som är inkluderat i projektet, kan användas som en avancerad miniräknare. Eftersom sannolikheten att programmet kommer behöva hantera stora mängder indata är låg, är hastigheten på programmet inte direkt relevant vid dessa situationer.

## 5.2 Kodstruktur

Kodstruktur är essentiellt för större projekt för att underlätta vidareutveckling. Därför delade vi upp projektet exempelvis i klasser. Under arbetets gång hjälpte det oss att förstå varandras kod.

Strukturen var dock inte perfekt. Klasserna delades upp i varsin fil, och eftersom klasserna ofta behöver ha tillgång till andra klasser och dess metoder behöver dessa då importeras. Detta ledde till att om två klasser behövde tillgång till varandra (vilket hände i vårt fall) så skulle de importera varandra. Inom programmering kallas detta för circular import, och är allmänt dålig praxis, eftersom det ökar risken till att programmet helt enkelt inte funkar, eller att det t.ex. blir svårare att reorganisera projektet om det skulle behövas.

## 5.3 Möjliga förbättringar

Just nu kan biblioteket endast lösa ekvationer som är skrivna på polynomform, och endast upp till den andra graden. Dessvärre hanteras division på ett sätt som gör att vissa ekvationer (framförallt de som inkluderar division med en okänd variabel) ej går att lösas. Tyvärr inkluderar detta också trivialfallet  $\frac{x}{x} = 1$ . På grund av detta kan bibliotek ej heller utföra polynomdivision.

Även om fokuset på projektet ej låg på hastigheten (se 5.1) betyder det inte att det inte finns fördelar med att göra projektet snabbare, mer effektivt. Användningsområdet av biblioteket skulle utökas drastiskt, då det skulle kunna användas i applikationer som kräver förenkling av t.ex. polynom av någon hundratal grad.

Biblioteket har också problem med att utföra konjugatregeln. För det mesta gör biblioteket rätt men det har problem med att förenkla  $ab + (-1) \cdot ab$ .

## 5.4 Lärdomar

Vi har lärt oss essenserna av syntaxträd och hur man kan strukturera de, inklusive hur man kan specialisera olika noder så att de har olika funktioner. (Se 2.1.3) Vi lärde oss också hur man med hjälp av programmeringsspråkets implementation av klasser och arv kan implementera det i ett bibliotek.

Algoritmen för potensnoden krävde att vi skulle känna till multinomial-satsen; något som ingen av oss kände till innan projektet.

## 5.5 Källkritik

Det ligger i naturen hos mycket av den informationen vi använt oss av att den är väldigt lätt att verifiera. Antingen funkar en algoritm eller inte, det går inte att vinkla en algoritm.

### 5.5.1 KTH

Examensarbetet är skrivet år 2016 av Dimitrij Lioubartsev, student vid KTH. Examensarbetet kontrollerades av handledare och därför kan vi vara säkra på att källan är pålitlig. Dessutom är KTH ett väldigt välrespekterat universitet.

### 5.5.2 Encyclopædia Britannica

Encyclopædia Britannica är ett av om inte det mest respekterade uppslagsverken som finns. Informationen är skriven av experter och verifierad, det gör det till en bra källa.

### 5.5.3 Proofwiki

Proofwiki är en wiki för matematiska bevis. För att skriva och ändra krävs godkännande, medlemskap söks inte skapas. Den är fortfarande överifierad med eftersom informationen överensstämmer med britannica.

### 5.5.4 Python.org

Python.org är skrivit av Pythons utvecklare, och det gör informationen extremt trovärdig. Dessutom är även den här typen av information antingen fungerande eller inte.

## Referenser

- [1] <http://www.diva-portal.se/smash/get/diva2:945222/FULLTEXT01.pdf>  
Dmitrij Lioubartsev, *Constructing a Computer Algebra System Capable of Generating Pedagogical Step-by-Step Solutions*, KTH, 2016, [2017-10-21]
- [2] <https://www.britannica.com/science/multinomial-theorem> William L. Hosch, *Multinomial theorem*, Britannica, [2018-02-18]
- [3] <http://www.graphviz.org/pdf/dotguide.pdf> *Graphviz dot dokumentation*, [2018-02-10]
- [4] <https://docs.python.org/3/> *Python dokumentation*, Python Software Foundation , [2017-2018]