TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Tecnologico Nacional de México

Instituto Tecnologico de La Paz

Dinamica

Unidad 1. Cinematica de las particulas

Ingeneria CiviL, Grupo E, Cuarto Semestre

Alumno: Alvarez Silva Miguel Ángel

Maestro: Ing. Carlos Padilla Ramos

La Paz, BCS, 13 de Febrero de 2026

Indice

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Índice

1. Introducción – Cinemática de Partículas

La mecánica estudia el comportamiento de cuerpos sometidos a fuerzas. Se divide en estática (cuerpos en equilibrio) y dinámica (cuerpos en movimiento).

La dinámica se subdivide en:

- Cinemática: analiza el movimiento desde un enfoque geométrico, sin atender a sus causas.

- Cinética: estudia las fuerzas que generan el movimiento.

Aquí se explora la cinemática de partículas, considerándolas como cuerpos con masa pero dimensiones despreciables. Esta aproximación es válida cuando solo importa la trayectoria del centro de masa, como ocurre con automóviles, proyectiles o satélites.

Variables del movimiento

El movimiento de una partícula se describe por:

- Posición (o)

Ubica la partícula en relación a un sistema de referencia, de forma escalar o vectorial.

- Velocidad (o)

Mide el cambio de posición respecto al tiempo y su dirección.

- Aceleración (o)

Indica el cambio de velocidad respecto al tiempo.

Importancia en Ingeniería Civil

La cinemática permite analizar vehículos, proyectiles, sistemas mecánicos, maquinaria y vibraciones estructurales. Comprender posición, velocidad y aceleración facilita el modelado matemático de fenómenos reales para análisis dinámicos avanzados.

Enfoque matemático

Emplea cálculo diferencial, integral y análisis vectorial para relacionar posición, velocidad y aceleración mediante derivadas e integrales.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

1.2 Movimiento Rectilíneo

El movimiento rectilíneo es aquel en el que una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria en línea recta. En este tipo de movimiento, la posición de la partícula puede describirse mediante una sola coordenada (generalmente x), la cual depende del tiempo.

Matemáticamente, el movimiento rectilíneo se expresa como:

$$x = f(t)$$

A partir de esta función se pueden determinar las magnitudes fundamentales del movimiento:

- **Velocidad**, definida como la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

- **Aceleración**, definida como la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

El estudio del movimiento rectilíneo se divide en tres casos principales:

1.2.1 Movimiento rectilíneo (enfoque diferencial e integral)

Se analiza el movimiento cuando la posición, velocidad o aceleración se expresan como funciones del tiempo. Se emplea cálculo diferencial e integral para relacionar estas variables.

1.2.2 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Caso particular donde la aceleración es cero y la velocidad permanece constante.

1.2.3 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)

Caso en el que la aceleración es constante, lo que permite obtener ecuaciones cerradas del movimiento.

1.2.1 Movimiento Rectilíneo – Enfoque diferencial e integral

En este caso, el movimiento se describe mediante una función de posición $x(t)$. A partir de ella:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si se conoce la aceleración, se puede integrar para obtener la velocidad:

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

Y posteriormente integrar nuevamente para obtener la posición:

$$x(t) = \int v(t)\,dt$$

Este enfoque permite analizar movimientos con aceleración variable, que no pueden resolverse con las fórmulas simplificadas del MRUA.

EJEMPLOS DE EL CUADERNO DE APUNTES DE DINAMICA

Ejercicio 1. El movimiento de una partícula está definido por la relación $x(t) = 6t^2 - 8 + 40\cos(\pi t)$, donde x y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $t = 6\ s$

$posición;\quad x(t) = 6t^2 - 8 + 40\cos(\pi t)$

[Equation]

$aceleración;\quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 12 - 40\pi^2\cos(\pi t)$

Se evaluan las expresiones en $t = 6\ s$

[Equation]

$v(6) = 12(6) - 40\pi sen(6\pi) = 72 - 0 = 72\ \frac{pulg}{seg}$

$a(6) = 12 - 40\pi^2\cos(6\pi) = 12 - 394.78 = -382.78\ \frac{pulg}{seg^2}$

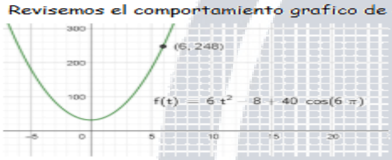
También se escriben, así, las unidades:

$x(6) = 248\ in$

$v(6) = 72\ \frac{in}{s}$

$a(6) = -382.78\ \frac{in}{s^2}$

Revisemos el comportamiento grafico de cada uno de los tres eventos.



La posición.

Ejercicio 2. El movimiento de una partícula está definido por la relación $x(t) = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $t = 4\ s$.

$posición;\quad x(t) = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$

$velocidad;\quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6t^3 - 60t + 5$

$aceleración;\quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 18t^2 - 60$

Se evaluan las expresiones en $t = 4\ s$;

$x(4) = x(t) = 1.5(4)^4 - 30(4)^2 + 5(4) + 10 = 384 - 480 + 20 + 10 = -66\ m$

$v(4) = 6(4)^3 - 60(4) + 5 = 384 - 240 + 5 = 149\ \frac{m}{seg}$

$a(4) = 18(4)^2 - 60 = 288 - 60 = 228\ \frac{m}{seg^2}$

Ejemplo 4. Partiendo del reposo, una partícula que se mueve en línea recta tiene una aceleración de $a = (2t - 6)\ m/s^2$ Donde t está dada en segundos. Cuál es la velocidad de la partícula cuando $t = 6$ *segundos* y cuál es su posición cuando $t = 11$ *segundos*

Para determinar la velocidad, a partir de la aceleración se tiene que;

$\frac{dv}{dt} = a \qquad dv = adt$

$\int dv = \int adt$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t (2t - 6)dt$

Pero como el evento parte del reposo, entonces $v_0 = 0$ por lo que se tiene;

$\int_0^{v} dv = \int_0^t (2t - 6)dt$

$v = t^2 - 6t$

Para determinar la velocidad en $t = 6$ se evalúa la expresión obtenida.

[Equation]

$v(6) = 36 - 36$

$v(6) = 0\ m/s$

Ahora, para determinar la posición en razón al tiempo, se tiene que;

$\frac{dx}{dt} = v \qquad dx = vdt$

$\int dx = \int vdt$

[Equation]

[Equation]

Para determinar la posición en $t = 11$ se evalúa la expresión obtenida.

$x(11) = \frac{11^3}{3} - 3(11)^2 = 443.67 - 353$

$x(11) = 80.67\ m$

Ejemplo 5. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta de modo que su aceleración es [Equation] , donde t está en segundos. Cuando $t = 0$ la partícula está 2 m a la izquierda del origen y cuando $t = 2\ s$ está 20 m a la izquierda del origen. Determine su posición cuando $t = 4\ s$

Para determinar la velocidad, a partir de la aceleración se tiene que;

$\frac{dv}{dt} = a \qquad dv = adt$

$\int dv = \int adt$

[Equation]

[Equation]

[Equation]

Para determinar la posición, a partir de la velocidad se tiene que;

$\frac{dx}{dt} = v \qquad dx = vdt$

[Equation]

$x(t) = \frac{4t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2$

Evaluamos en las condiciones iniciales, en $x(t)$ para obtener el valor de las constantes de integración; $x(0) = -2\ m$, $x(2) = -20\ m$

Primera condición.

$x(0) = \frac{4(0)^4}{12} - \frac{(0)^3}{3} + C_1(0) + C_2 = -2$

$C_2 = -2$

Segunda condición.

$x(t) = \frac{4t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + C_1 t - 2$

$x(2) = \frac{4(2)^4}{12} - \frac{(2)^3}{3} + C_1(2) - 2 = -20$

$C_1 = -\frac{29}{3}$

Por lo tanto la expresión de posición en relación con el tiempo queda;

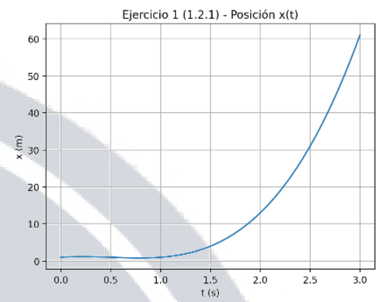
$x(t) = \frac{4t^4}{12} - \frac{t^3}{3} - \frac{29}{3}t - 2$

Ejercicio 1

El movimiento de una partícula está definido por:

$$x(t) = 4t^3 - 6t^2 + 2t + 1$$

donde $x$está en metros y $t$en segundos.



Determinar:

a) La velocidad
b) La aceleración
c) Los valores de x, vy $a$cuando $t = 2\ s$

Solución

Velocidad:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$
$$v(t) = 12t^2 - 12t + 2$$

Aceleración:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$
$$a(t) = 24t - 12$$

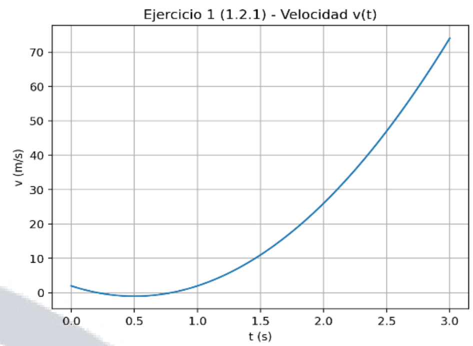
Evaluamos en $t = 2$:

Posición:

$$x(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 2(2) + 1$$
$$x(2) = 32 - 24 + 4 + 1 = 13\ m$$

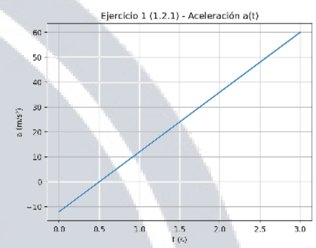
Velocidad:

$$v(2) = 12(2)^2 - 12(2) + 2$$
$$v(2) = 48 - 24 + 2 = 26\,m/s$$

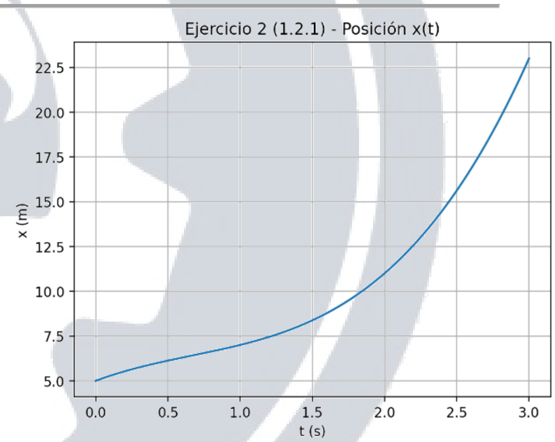


Aceleración:

$$a(2) = 24(2) - 12$$
$$a(2) = 48 - 12 = 36\,m/s^2$$



Ejercicio 2



La aceleración de una partícula está dada por:

$$a(t) = 6t - 4$$

Si la velocidad inicial es $v(0) = 3\,m/s$, determinar:

a) La expresión de la velocidad
b) La posición si $x(0) = 5\,m$

Solución

Integramos la aceleración:

$$v(t) = \int (6t - 4)\,dt$$
$$v(t) = 3t^2 - 4t + C_1$$

Usamos condición inicial:

$$v(0) = 3$$
$$3 = 0 - 0 + C_1$$
$$C_1 = 3$$

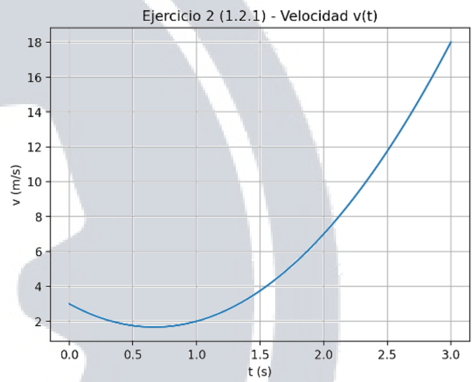
Entonces:

$$v(t) = 3t^2 - 4t + 3$$

Ahora integramos para posición:

$$x(t) = \int (3t^2 - 4t + 3)\, dt$$
$$x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + C_2$$

Usamos $x(0) = 5$:

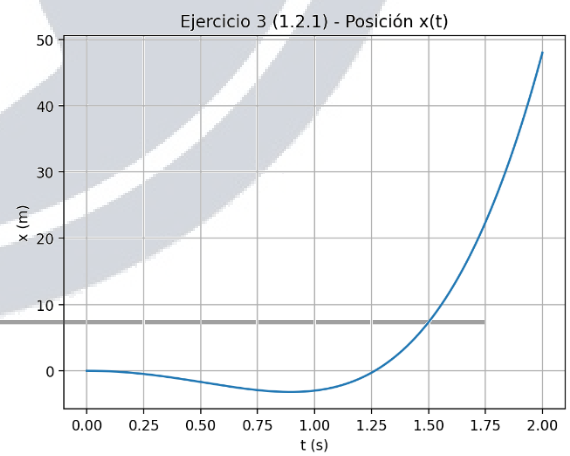


$$5 = 0 + 0 + 0 + C_2$$
$$C_2 = 5$$

Por lo tanto:

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 5$$

Ejercicio 3



Una partícula tiene la siguiente posición:

$$x(t) = 5t^4 - 8t^2$$

Determinar el instante en el que la aceleración es cero.

Solución

Velocidad:

$$v(t) = 20t^3 - 16t$$

Aceleración:

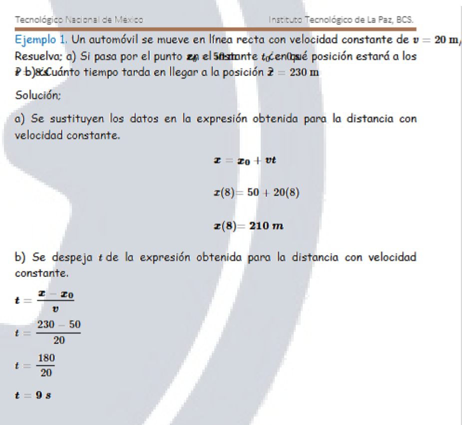
$$a(t) = 60t^2 - 16$$

Igualamos a cero:

$$60t^2 - 16 = 0$$
$$60t^2 = 16$$
$$t^2 = \frac{16}{60}$$
$$t = \pm 0.516\, s$$

1.2.2 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

El Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) es aquel en el que una partícula se desplaza en línea recta con velocidad constante, por lo que no existe aceleración. En este tipo de movimiento, la partícula recorre distancias proporcionales al tiempo transcurrido.



Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

Ejemplo 1. Un automóvil se mueve en línea recta con velocidad constante de $v = 20$ m/s. Resuelva: a) Si pasa por el punto $x_0 = 50$ m en el instante $t_0 = 0$ ¿en qué posición estará a los 8 s? b) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a la posición $x = 230$ m

Solución:

a) Se sustituyen los datos en la expresión obtenida para la distancia con velocidad constante.

$$x = x_0 + vt$$
$$x(8) = 50 + 20(8)$$
$$x(8) = 210\ m$$

b) Se despeja t de la expresión obtenida para la distancia con velocidad constante.

$$t = \frac{x - x_0}{v}$$
$$t = \frac{230 - 50}{20}$$
$$t = \frac{180}{20}$$
$$t = 9\ s$$

Condiciones del MRU

- Trayectoria rectilínea. Velocidad constante: $v = \text{cte}$
- Aceleración nula:

$$a = 0$$

Ecuación de posición

Si la partícula se encuentra inicialmente en $x_0$cuando $t = 0$, entonces su posición para cualquier instante $t$es:

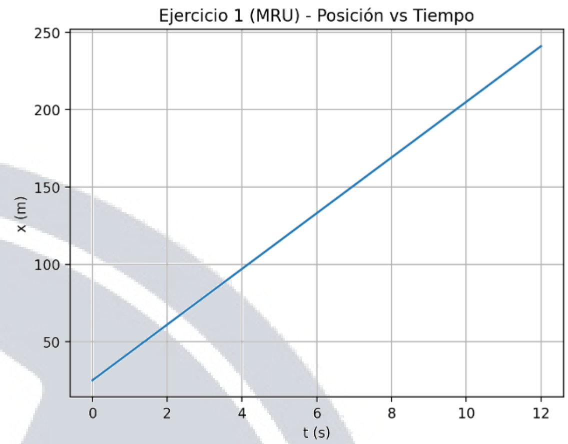
$$x(t) = x_0 + vt$$

Interpretación gráfica

- En una gráfica $x$vs t, el MRU produce una línea recta cuya pendiente es la velocidad v.
- En una gráfica $v$vs t, se obtiene una línea horizontal (velocidad constante).
- En una gráfica $a$vs t, se obtiene una línea sobre cero (aceleración nula).

Ejercicio 1

Un vehículo se mueve con velocidad constante de 18 m/s. Si en $t = 0$se encontraba en $x_0 = 25$ m, determina su posición después de 12 s.



Solución

Usamos:

$$x = x_0 + vt$$

Sustituyendo:

$$x = 25 + (18)(12) = 25 + 216 = 241 \text{ m}$$

Resultado:

$$x(12) = 241 \text{ m}$$

Ejercicio 2

Una partícula se desplaza en MRU y recorre 450 men 30 s. Determina su velocidad.

Solución

En MRU:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{450}{30} = 15 \text{ m/s}$$

Resultado:

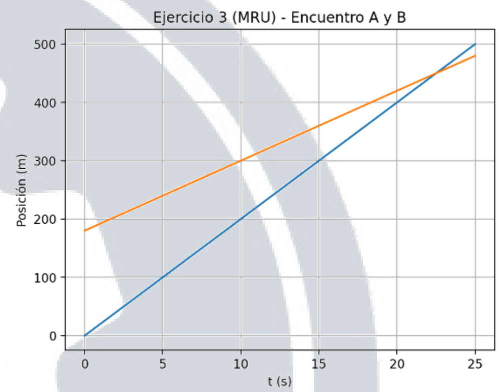
$$v = 15 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3

Dos autos se mueven en línea recta con MRU.

- Auto A parte desde $x_A(0) = 0$ mcon velocidad constante $v_A = 20$ m/s.
- Auto B parte desde $x_B(0) = 180$ mcon velocidad constante $v_B = 12$ m/sen el **mismo sentido**.

Determina:
a) ¿En qué instante A alcanza a B?
b) ¿En qué posición ocurre el alcance?



Solución

Ecuaciones de posición:

$$x_A(t) = 0 + 20t = 20t$$
$$x_B(t) = 180 + 12t$$

Al alcanzarse:

$$x_A(t) = x_B(t)$$
$$20t = 180 + 12t$$
$$8t = 180$$
$$t = 22.5 \text{ s}$$

Ahora la posición:

$$x = 20(22.5) = 450 \text{ m}$$

Resultados:

$$t = 22.5 \text{ s}, x = 450 \text{ m}$$

1.2.3 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)

El Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) ocurre cuando una partícula se desplaza en línea recta con aceleración constante. Esto implica que la velocidad cambia linealmente con el tiempo y la posición cambia de forma cuadrática con el tiempo.

Condiciones del MRUA

- Trayectoria rectilínea.
- Aceleración constante:

$$a = \text{cte}$$

Ecuaciones cinemáticas del MRUA

Si en $t = 0$la partícula tiene posición x_0y velocidad v_0, entonces:

1. **Velocidad en función del tiempo**

$$v = v_0 + at$$

2. **Posición en función del tiempo**

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

3. **Velocidad en función de la posición**

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Nota: el signo de $a$depende del sistema de referencia. Si la aceleración va en sentido contrario al movimiento, entonces $a$es negativa (desaceleración).

Ejemplos del cuaderno de apuntes de dinámica

Ejemplo 1. Un motociclista circula inicialmente a una velocidad de $v_0 = 12\,m/s$. A partir de cierto punto comienza a acelerar de manera constante con $a = 3\,m/s^2$. ¿Cuál será su velocidad después de $t = 5$ s

$v = v_0 + at$

$v = 12 + 3(5)$

$v = 12 + 15$

$$\boldsymbol{v = 27\ m/s}$$

Ejemplo 2. Un ciclista parte con una velocidad inicial de $v_0 = 5\,m/s$. Después de acelerar de manera constante, alcanza una velocidad de $v = 17\,m/s$. Si la aceleración es $a = 3\,m/s^2$. ¿Cuánto tiempo tardó en alcanzar esa velocidad?

$v = v_0 + at$

$t = \dfrac{v - v_0}{a}$

$t = \dfrac{17 - 5}{3}$

$t = \dfrac{12}{3}$

$\boldsymbol{t = 4\ seg}$

Ejemplo 3. Un automóvil parte desde una posición inicial de $x_0 = 20$ m con una velocidad inicial de $v_0 = 6$ m/s. A partir de ese instante acelera de manera constante con $a = 2\,m/s^2$. ¿En qué posición estará después de $t = 4$ s?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 20 + 6(4) + \frac{1}{2}(2)(4)^2$$

$$x = 20 + 24 + 16$$

$$x = 60\ m$$

Ejemplo 4. Un objeto parte desde la posición $x_0 = 10$ m con una velocidad inicial de $v_0 = 4$ m/s. Después de $t = 3$ s, se encuentra en la posición $x = 40$ m. ¿Cuál fue la aceleración del objeto?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = 2\left(\frac{x - x_0 - v_0 t}{t^2}\right)$$

$$a = 2\left(\frac{40 - 10 - 4(3)}{3^2}\right)$$

$$a = 2\left(\frac{40 - 10 - 4(3)}{3^2}\right)$$

$$a = 2\left(\frac{18}{9}\right)$$

$$a = 2(2)$$

$$a = 4\ m/s^2$$

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Ejercicio 1

Un automóvil parte del reposo y acelera de forma constante a $a = 2.5\ \text{m/s}^2$.
Determina:
a) la velocidad después de 8 s
b) la distancia recorrida en ese tiempo

Solución

Datos: $v_0 = 0$, $a = 2.5\ \text{m/s}^2$, $t = 8$ s, $x_0 = 0$.

a) Velocidad

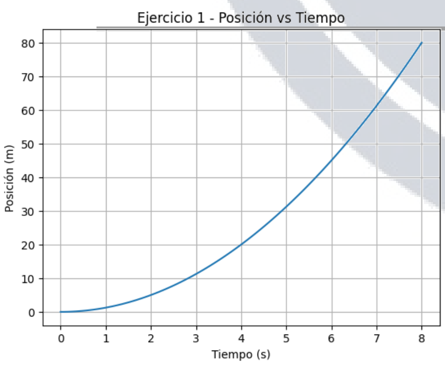
$$v = v_0 + at = 0 + (2.5)(8) = 20\ \text{m/s}$$

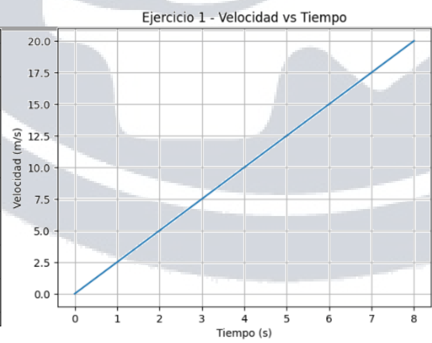
b) Posición

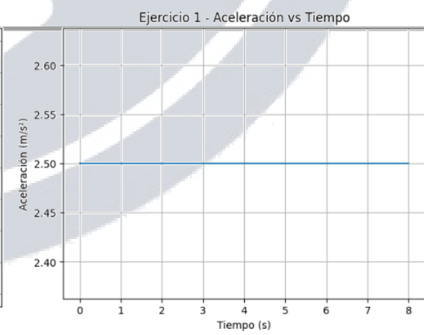
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}(2.5)(8^2) = 1.25(64) = 80\ \text{m}$$

Resultados:

$$v = 20\ \text{m/s}, x = 80\ \text{m}$$







Ejercicio 2

Un tren viaja a $v_0 = 22$ m/sy frena con aceleración constante de -1.8 m/s^2.
Determina:
a) el tiempo para detenerse
b) la distancia de frenado

Solución

Datos: $v_0 = 22$, $v = 0$, $a = -1.8$.

a) Tiempo para detenerse

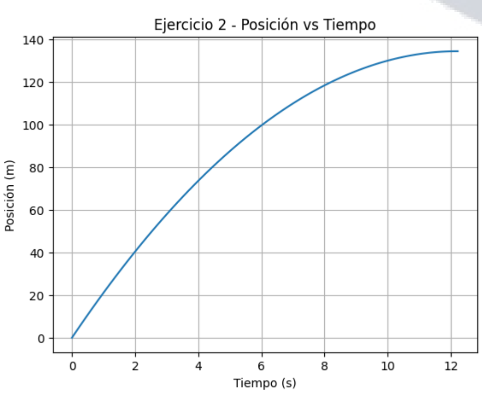
$$v = v_0 + at$$
$$0 = 22 - 1.8t$$
$$t = \frac{22}{1.8} = 12.22 \text{ s}$$

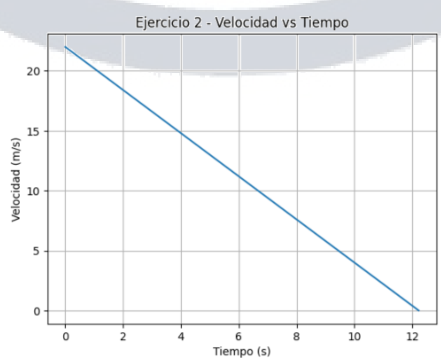
b) Distancia de frenado
Usamos:

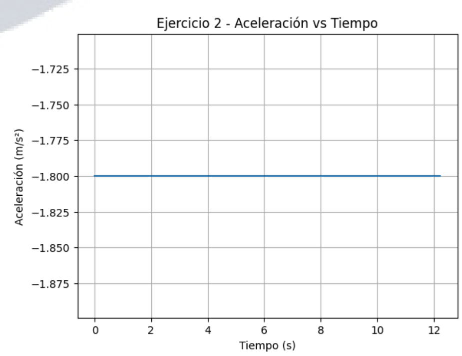
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$0 = 22^2 + 2(-1.8)\Delta x$$
$$0 = 484 - 3.6\Delta x$$
$$\Delta x = \frac{484}{3.6} = 134.44 \text{ m}$$

Resultados:

$$t = 12.22 \text{ s}, \Delta x = 134.44 \text{ m}$$







Ejercicio 3

Una partícula se mueve en línea recta. En $t = 0$está en $x_0 = 10$ mcon velocidad $v_0 = 4$ m/s. Su aceleración constante es $a = 3$ m/s^2.

Determina:
a) su posición cuando $t = 6$ s
b) su velocidad cuando $t = 6$ s

Solución

Datos: $x_0 = 10$, $v_0 = 4$, $a = 3$, $t = 6$.

a) Posición

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = 10 + (4)(6) + \frac{1}{2}(3)(36)$$

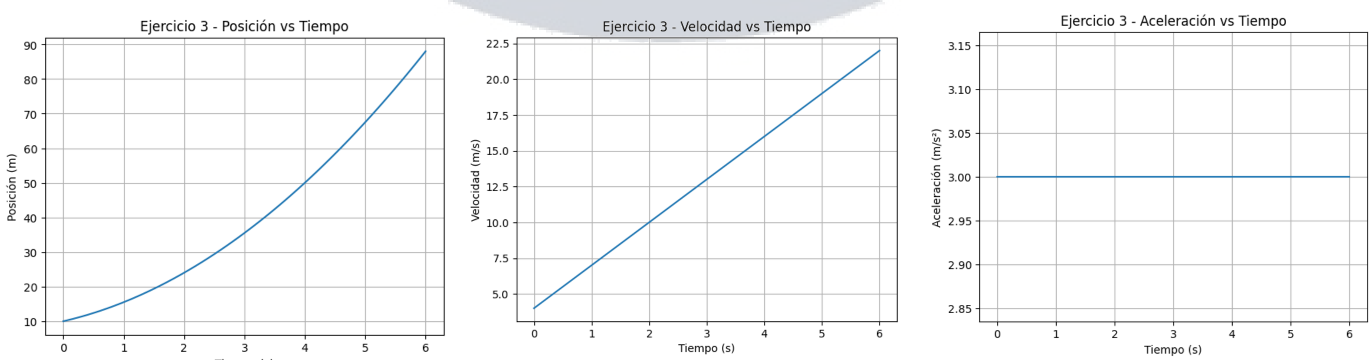
$$x = 10 + 24 + 54 = 88 \text{ m}$$

b) Velocidad

$$v = v_0 + at = 4 + (3)(6) = 22 \text{ m/s}$$

Resultados:

$$x(6) = 88 \text{ m}, v(6) = 22 \text{ m/s}$$



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

1.3 Movimiento de varias partículas

En muchos problemas de ingeniería no se analiza una sola partícula aislada, sino sistemas donde intervienen dos o más partículas cuyos movimientos están relacionados entre sí. En estos casos, el estudio del movimiento requiere considerar relaciones geométricas, dependencias físicas y sistemas de referencia distintos.

El análisis del movimiento de varias partículas es fundamental cuando:

- Se estudian vehículos que interactúan.
- Se analizan sistemas mecánicos con poleas y cuerdas.
- Se modelan mecanismos de transmisión.
- Se estudian movimientos relativos entre observadores.

A diferencia del movimiento rectilíneo simple, aquí el enfoque no solo consiste en aplicar derivadas o ecuaciones cinemáticas, sino en establecer relaciones entre variables de diferentes partículas.

1.3.1 Movimiento relativo de dos partículas

El movimiento relativo analiza cómo se mueve una partícula respecto a otra. Es especialmente útil cuando ambas partículas están en movimiento.

Si A y B son dos partículas, entonces:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

donde:

- $\vec{v}_A$ es la velocidad absoluta de A.
- $\vec{v}_B$ es la velocidad absoluta de B.
- $\vec{v}_{A/B}$ es la velocidad de A respecto a B.

Este concepto es fundamental en problemas de alcance, persecución y análisis de sistemas móviles.

Ejemplos del cuaderno de apuntes de dinámica

Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

Ejemplo 1. Los automóviles A y B viajan en carriles adyacentes de una carretera y en t=0 tienen las posiciones y velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el automóvil A tiene una aceleración constante de 1.8 ft/s² y que B tiene una desaceleración constante de 1.2 ft/s², determine;

a) cuándo y dónde A alcanzará a B,

b) la rapidez de cada automóvil en ese momento.

Solución.

Primero, se observa que se tiene un ejercicio de MRUA.

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = (v_0)^2 + 2a(x - x_0)$$

Por otra parte, las unidades proporcionadas no son consistentes, dado que las velocidades iniciales estan dadas en millas/hora y las de aceleración en ft/s², por lo que hay que homogenizarlas. Cambiaremos las velocidades a ft/s.

$$(v_A)_0 = 24\frac{mi}{h} \qquad (v_B)_0 = 36\frac{mi}{h}$$
$$1\ milla = 5{,}280\ ft$$
$$1\ hora = 3{,}600\ s$$
$$(v_A)_0 = 24\frac{mi}{h}\left(\frac{5{,}280\ ft}{1\ mi}\right)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 35.2\ ft/s$$
$$(v_B)_0 = 36\frac{mi}{h}\left(\frac{5{,}280\ ft}{1\ mi}\right)\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right) = 52.8\ ft/s$$

a) cuándo y dónde A alcanzará a B,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$x_A = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 35.2t + \frac{1}{2}(1.8)t^2$$
$$x_B = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 75 + (52.8)t + \frac{1}{2}(-1.2)t^2$$

Ing. Carlos Padilla Ramos — 64

Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

$$x_A = x_B$$
$$35.2t + \frac{1}{2}(1.8)t^2 = 75 + (52.8)t + \frac{1}{2}(-1.2)t^2$$
$$35.2t + \frac{1}{2}(1.8)t^2 - 75 - (52.8)t - \frac{1}{2}(-1.2)t^2 = 0$$
$$1.5t^2 - 1.76t - 75 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = -3.22\ s \\ t_2 = 15.06\ s \end{cases}$$

Con este valor de t, se obtiene la distancia con cualquiera de las dos expresiones igualadas para obtenerla. Tomaremos la del automovil A.

$$x_A = 0 + 35.2t + \frac{1}{2}(1.8)t^2$$
$$x_A = 35.2(15.06) + \frac{1}{2}(1.8)(15.06)^2$$
$$x_A = 734\ ft$$

b) la rapidez de cada automóvil en ese momento.

$$v = v_0 + at$$
$$v_A = 35.2 + 1.8(15.06) = 62.3\frac{ft}{s}$$
$$v_B = 52.8 - 1.2(15.06) = 34.7\frac{ft}{s}$$

Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

Ejemplo 3. El automóvil A viaja a una velocidad constante de 80 km/h al norte, mientras que el automóvil B viaja a una velocidad constante de 100 km/h al este.

Determine la velocidad del automóvil B con respecto al automóvil A.

Solución.

Se ha determinado anteriormente que,

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \rightarrow \quad v_B = v_A + v_{B/A}$$

Pero esto sucede cuando dos particulas se mueven a lo largo de una misma línea. Y en este caso no sucede. Por lo que el tratamiento para este problema es vectorial y no escalar, por lo que las velocidades de los moviles se pueden expresar como;

Magnitud de la velocidad relativa.

$$\vec{v}_A = 0i + 80j$$
$$\vec{v}_B = 100i + 0j$$
$$\vec{v}_{B/A} = (100i + 0j) - (0i + 80j)$$
$$\vec{v}_{B/A} = 100i - 80j$$
$$|\vec{v}_{B/A}| = \sqrt{(100i)^2 + (-80j)^2}$$
$$|\vec{v}_{B/A}| = 128\ km/h$$

Dirección de la velocidad relativa.

$$tan(\theta) = \frac{-80}{100}$$
$$\theta = Arctan(-0.8)$$
$$\theta = 38.7°$$

Ejercicio 1 (1D: alcance / persecución)

Dos partículas se mueven en una línea recta (mismo sentido):

- Partícula A: $x_A(0) = 0$ m, $v_A = 22$ m/s
- Partícula B: $x_B(0) = 180$ m, $v_B = 14$ m/s

Determina:
a) el tiempo en que A alcanza a B
b) la posición donde ocurre el alcance
c) la velocidad relativa $v_{A/B}$

Solución (resumen):

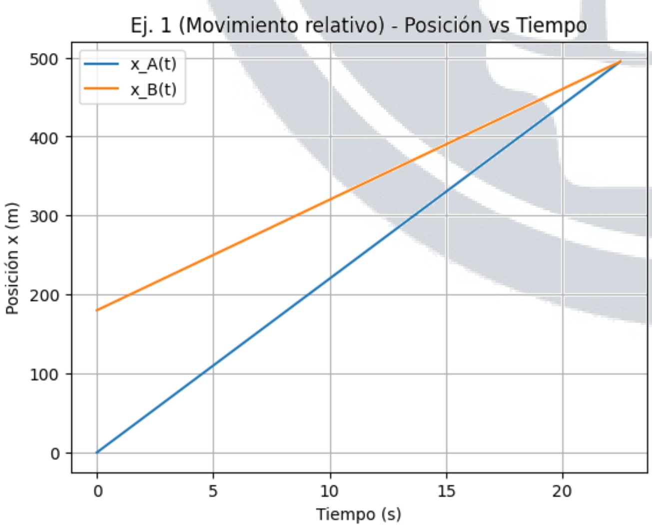
$$x_A = 22t, x_B = 180 + 14t$$

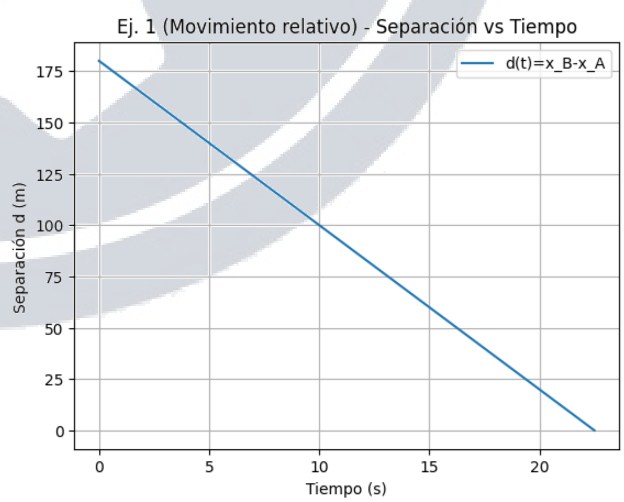
Al alcanzarse: $x_A = x_B$

$$22t = 180 + 14t \Rightarrow 8t = 180 \Rightarrow t = 22.5 \text{ s}$$
$$x = 22(22.5) = 495 \text{ m}$$

Velocidad relativa:

$$v_{A/B} = v_A - v_B = 22 - 14 = 8 \text{ m/s}$$





Ejercicio 2 (2D: lancha + corriente)

Una lancha navega con velocidad respecto al agua:

$$\vec{v}_{b/w} = 6 \text{ m/s hacia el norte}$$

La corriente del río es:

$$\vec{v}_w = 3 \text{ m/s hacia el este}$$

Determina:
a) la velocidad de la lancha respecto a tierra $\vec{v}_b$
b) su rapidez $|\vec{v}_b|$ y dirección
c) el desplazamiento en 60 s

Solución (resumen):

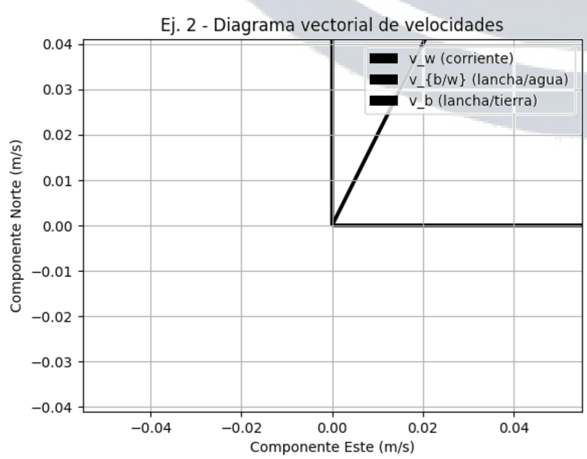
$$\vec{v}_b = \vec{v}_{b/w} + \vec{v}_w = (3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) \text{ m/s}$$
$$|\vec{v}_b| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6.708 \text{ m/s}$$

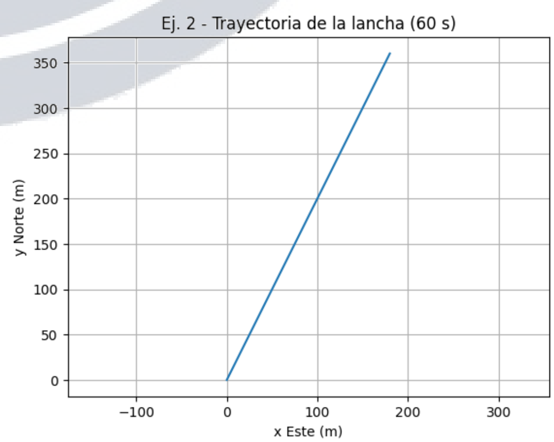
Dirección (desde el eje Este hacia Norte):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3}\right) = 63.43°$$

Desplazamiento en 60 s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_b\, t = (3{,}6)(60) = (180{,}360) \text{ m}$$





Ejercicio 3 (2D: avión + viento)

Un avión tiene velocidad respecto al aire:

$$|\vec{v}_{p/a}| = 220 \text{ m/s}, 35° \text{ al norte del este}$$

El viento sopla:

$$\vec{v}_{viento} = 40 \text{ m/s hacia el norte}$$

Determina:
a) la velocidad del avión respecto al suelo $\vec{v}_{p/g}$
b) la rapidez respecto al suelo y su ángulo de trayectoria
c) su desplazamiento en 300 s

Solución (resumen):
Componentes del avión respecto al aire:

$$\vec{v}_{p/a} = (220\cos\ 35°, 220\sin 35°) = (180.21, 126.19) \text{ m/s}$$

Sumando el viento:

$$\vec{v}_{p/g} = \vec{v}_{p/a} + \vec{v}_{viento} = (180.21, 166.19) \text{ m/s}$$

Rapidez respecto al suelo:

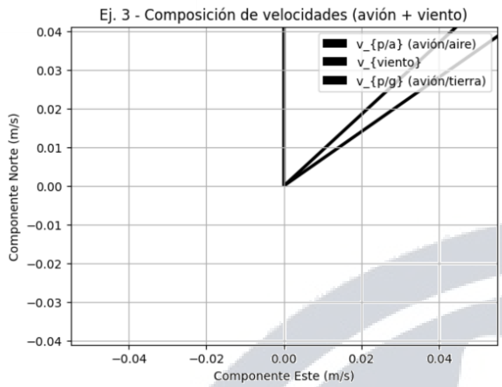
$$|\vec{v}_{p/g}| = \sqrt{180.21^2 + 166.19^2} \approx 245.1 \text{ m/s}$$

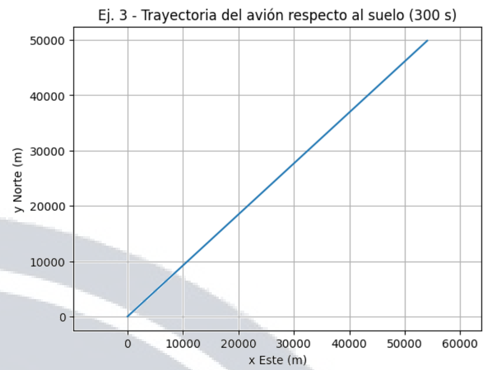
Ángulo de trayectoria:

$$\theta_g = \tan^{-1}\left(\frac{166.19}{180.21}\right) \approx 42.7°$$

Desplazamiento en 300 s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_{p/g}(300) \approx (54064, 49856) \text{ m}$$





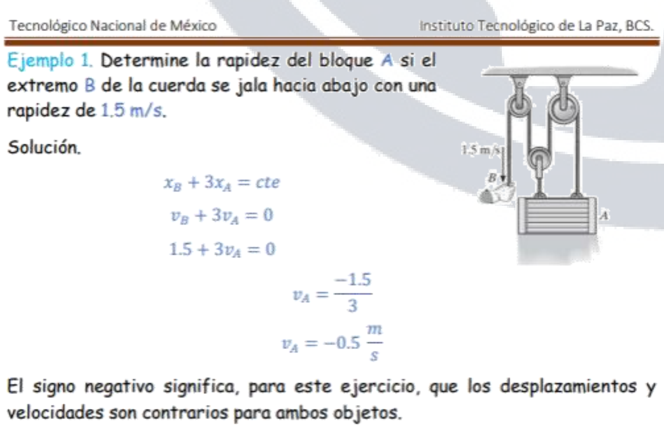
1.3.2 Movimientos dependientes

En este caso, el movimiento de una partícula está geométricamente restringido por el movimiento de otra. Esto ocurre típicamente en sistemas con:

- Poleas
- Cables
- Mecanismos articulados
- Sistemas con restricciones físicas

En estos problemas se establecen ecuaciones de restricción, generalmente derivadas de relaciones geométricas, para vincular las posiciones, velocidades y aceleraciones de las partículas involucradas.

Por ejemplo, si una cuerda es inextensible, la suma de las longitudes asociadas a cada partícula debe permanecer constante.


Tecnológico Nacional de México   Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

Ejemplo 1. Determine la rapidez del bloque A si el extremo B de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 1.5 m/s.

Solución.

$$x_B + 3x_A = cte$$
$$v_B + 3v_A = 0$$
$$1.5 + 3v_A = 0$$
$$v_A = \frac{-1.5}{3}$$
$$v_A = -0.5\,\frac{m}{s}$$

El signo negativo significa, para este ejercicio, que los desplazamientos y velocidades son contrarios para ambos objetos.

Ejemplo del cuaderno de apuntes de dinámica

Ejercicio 1 (Polea fija) — $\boldsymbol{y_A + y_B = L}$

Sistema: dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea fija.
Restricción:

$$y_A + y_B = L$$

Si el movimiento de A es:

$$y_A(t) = 0.5t^2 + 0.2t(m)$$

y $L = 3\ m$.

Determinar

a) $y_B(t)$
b) $v_A(t), v_B(t)$
c) $a_A(t), a_B(t)$
d) valores en $t = 2\ s$

Solución

$$y_B(t) = L - y_A(t) = 3 - (0.5t^2 + 0.2t)$$

Velocidades (derivando):

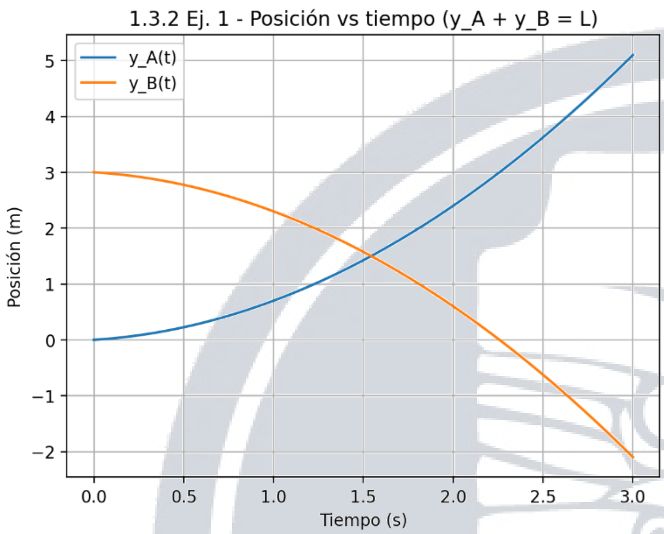
$$v_A = \frac{dy_A}{dt} = t + 0.2$$
$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = -v_A = -(t + 0.2)$$

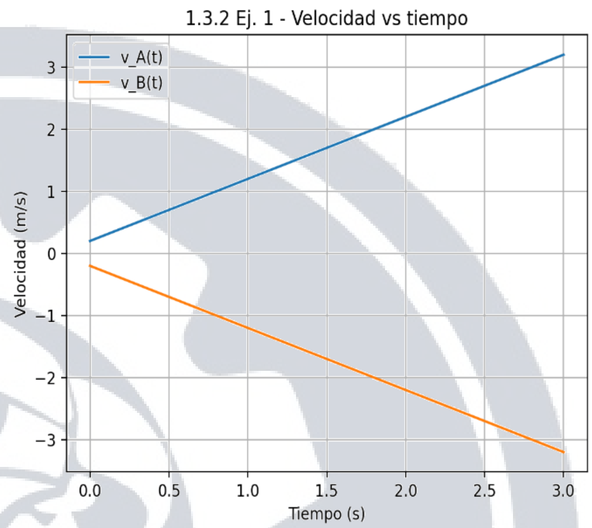
Aceleraciones:

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = 1$$
$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -1$$

Evaluación en $t = 2$:

$$y_A(2) = 0.5(4) + 0.2(2) = 2 + 0.4 = 2.4\ m$$
$$y_B(2) = 3 - 2.4 = 0.6\ m$$
$$v_A(2) = 2.2\ m/s, v_B(2) = -2.2\ m/s$$
$$a_A = 1\ ms^2, a_B = -1\ m/s^2$$





Ejercicio 2 (Polea móvil) — $\boldsymbol{y_A + 2y_B = L}$

Sistema: un extremo libre A y una polea móvil que sostiene al bloque B (dos ramales sostienen a B).
Restricción típica:

$$y_A + 2y_B = L$$

Datos: $L = 4\ m$.
La partícula A baja con rapidez constante $v_A = 0.6\ m/s$y $y_A(0) = 0$.

Determinar

a) $y_B(t)$
b) v_B
c) a_B

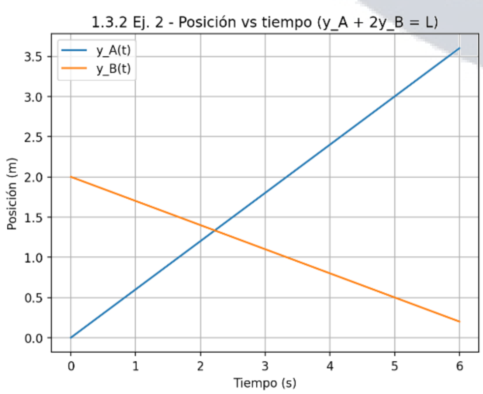
Solución

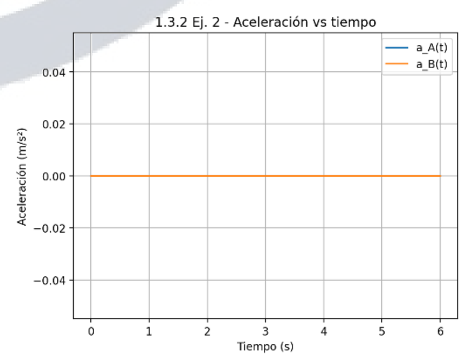
Como $v_A$es constante:

$$y_A(t) = 0.6t$$
$$y_B(t) = \frac{L - y_A(t)}{2} = \frac{4 - 0.6t}{2}$$

Derivando:

$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = -\frac{0.6}{2} = -0.3\ m/s$$
$$\boldsymbol{a_B = 0}$$





Ejercicio 3 (Tres ramales efectivos) — $\boldsymbol{y_A + 3y_B = L}$

Sistema: una configuración donde el bloque B está sostenido por tres segmentos de cuerda
Restricción:

$$y_A + 3y_B = L$$

Datos: $L = 5\ m$.
El extremo A se mueve según:

$$y_A(t) = 0.1t^3\ (m)$$

Determinar

a) $y_B(t)$
b) $v_B(t)$
c) $a_B(t)$
d) valores en $t = 3\ s$

Solución

$$y_B(t) = \frac{L - y_A(t)}{3} = \frac{5 - 0.1t^3}{3}$$

Velocidades:

$$v_A = \frac{dy_A}{dt} = 0.3t^2$$
$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = -\frac{v_A}{3} = -0.1t^2$$

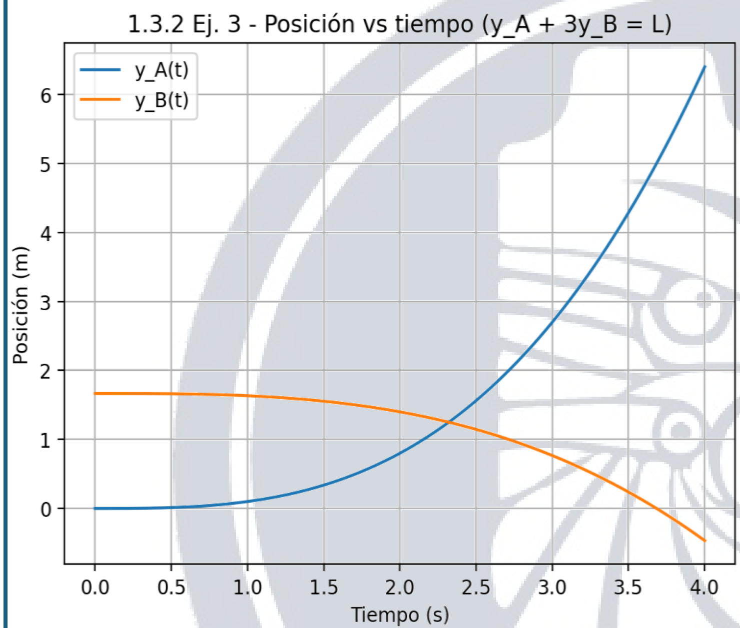
Aceleraciones:

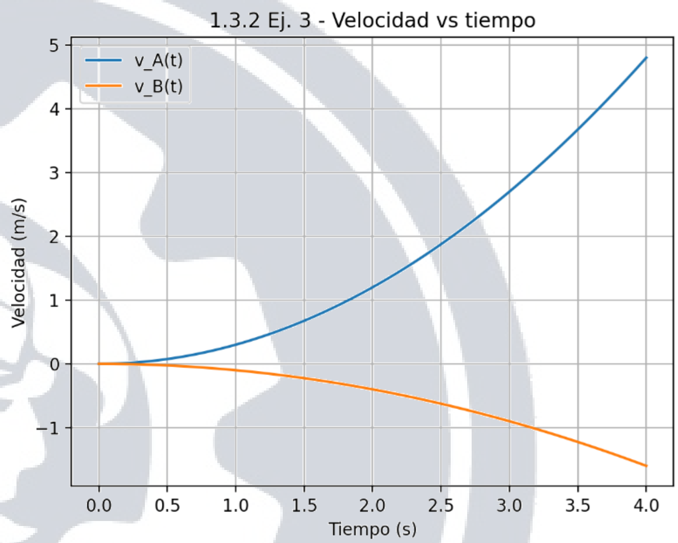
$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = 0.6t$$
$$a_B = \frac{da_B}{dt} = -\frac{a_A}{3} = -0.2t$$

Evaluación en $t = 3$:

$$y_A(3) = 0.1(27) = 2.7\ m$$

$$y_B(3) = \frac{5 - 2.7}{3} = 0.7667\ m$$
$$v_B(3) = -0.1(9) = -0.9\ m/s$$
$$a_B(3) = -0.2(3) = -0.6\ m/s^2$$





1.4 Movimiento curvilíneo

Hasta ahora se ha estudiado el movimiento rectilíneo, donde la partícula se desplaza a lo largo de una línea recta y su posición puede describirse con una sola coordenada.

Sin embargo, en la mayoría de los problemas reales de ingeniería, el movimiento ocurre en trayectorias curvas. Cuando una partícula sigue una trayectoria no recta, su movimiento debe analizarse en forma vectorial, ya que tanto la magnitud como la dirección cambian con el tiempo.

En el movimiento curvilíneo, la posición de la partícula se expresa mediante un vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

A partir de este vector se obtienen:

- Velocidad vectorial

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Aceleración vectorial

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

En este tipo de movimiento, la aceleración puede cambiar la rapidez, la dirección del movimiento o ambas.

El análisis del movimiento curvilíneo puede realizarse en distintos sistemas de coordenadas, siendo los más comunes:

- Componentes rectangulares (x, y, z)
- Coordenadas tangencial–normal
- Coordenadas polares

En esta unidad se abordará el análisis en componentes rectangulares, que constituye la base matemática para estudios posteriores más avanzados.

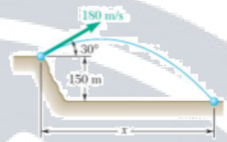
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

1.4.1 Vector posición, velocidad y aceleración

Se estudia el movimiento mediante funciones vectoriales del tiempo, utilizando derivación vectorial para obtener velocidad y aceleración.

Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

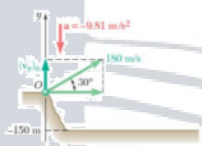
Ejemplo 1. Un proyectil se lanza desde el borde de un acantilado de 150 m con una velocidad inicial de 180 m/s a un ángulo de 30°con la horizontal. Si se ignora la resistencia del aire, encuentre:



a) la distancia horizontal desde el cañón hasta el punto en el que el proyectil golpea el suelo,

b) la elevación máxima sobre el suelo que alcanza el proyectil.

Solución. Los movimientos vertical y horizontal se tratarán por separado.



Movimiento vertical (MRUA).

$$(v_y)_o = 180\,sen(30) = 90\frac{m}{s}\uparrow$$

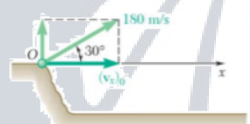
$$a = -9.81\frac{m}{s}$$

Sustituyendo en las ecuaciones del MRUA.

$$v_y = y_0 + a_y t \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v_y = 90 - 9.81t}$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 0 + 90t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2}$$

$$v^2 = (v_o)^2 + 2a(y - y_0) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v^2 = 90^2 + 2(-9.81)y}$$



Movimiento horizontal (MRU).

$$x = x_0 + vt \quad \rightarrow \quad x = 0 + 180\,cos(30)t$$

$$\boldsymbol{x = 155.9t}$$

a) la distancia horizontal desde el cañón hasta el punto en el que el proyectil golpea el suelo,

cuando el proyectil choca contra el suelo se tiene que $\boldsymbol{y = -150\ m}$, entonces;

$$-150 = 0 + 90t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$$

$$t^2 - 18.37t - 30.6 = 0 \qquad \begin{cases} t_1 = -1.54\ s \\ t_2 = 19.91\ s \end{cases}$$

Se sustituye este tiempo en MRU horizontal.

Ing. Carlos Padilla Ramos 77

Tecnológico Nacional de México — Instituto Tecnológico de La Paz, BCS.

$$x = 155.9(19.91)$$

$$\boldsymbol{x = 3,100\ m}$$

b) la elevación máxima sobre el suelo que alcanza el proyectil.

Cuando el proyectil alcanza su máxima altura, se tiene $v = 0\ m/s$ por lo que;

$$v^2 = 90^2 + 2(-9.81)y$$

$$0 = 8,100 - 19.62y$$

$$y = \frac{-8,100}{-19.62}$$

$$y = 413\ m$$

Esta altura es alcanzada desde el punto de lanzamiento y de ahí al suelo existen 150 metros adicionales. Entonces y_{max} sobre el suelo es;

$$y_{max} = 413 + 150$$

$$\boldsymbol{y_{max} = 563\ m}$$

Ejemplo del cuaderno de apuntes de dinamica

Ejercicio 1 (trayectoria parabólica)

Una partícula se mueve en el plano según:

$$\vec{r}(t) = (2t)\hat{\imath} + (t^2)\hat{\jmath}(0 \leq t \leq 4) \text{ s}$$

Determina:
a) $\vec{v}(t)$y $\vec{a}(t)$
b) $|\ \vec{v}\ |$en $t = 3$ s
c) $|\ \vec{a}\ |$

Solución

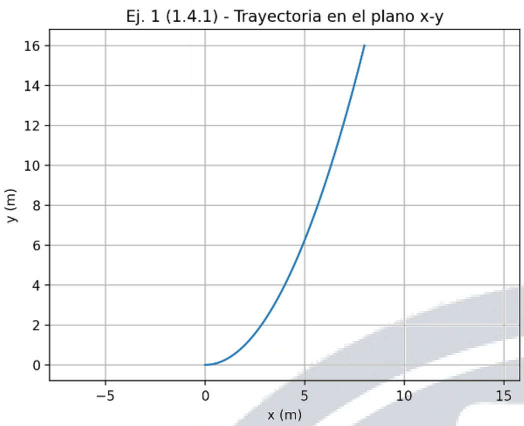
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2)\hat{\imath} + (2t)\hat{\jmath}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (0)\hat{\imath} + (2)\hat{\jmath}$$

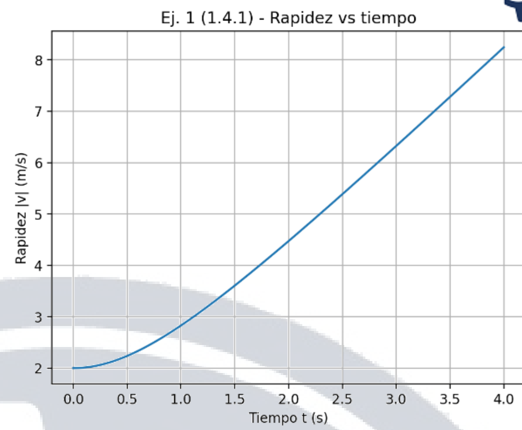
En $t = 3$:

$$\vec{v}(3) = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$
$$|\ \vec{v}(3)\ | = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 6.325 \text{ m/s}$$

Magnitud de la aceleración:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ m/s}^2$$





Ejercicio 2 (movimiento circular)

El movimiento de una partícula está dado por:

$$\vec{r}(t) = (4\cos\ t)\hat{\imath} + (4\sin\ t)\hat{\jmath}(0 \leq t \leq 2\pi)$$

Determina:
a) $\vec{v}(t)$y $\vec{a}(t)$
b) la rapidez | $\vec{v}$ |
c) la magnitud de la aceleración | $\vec{a}$ |

Solución

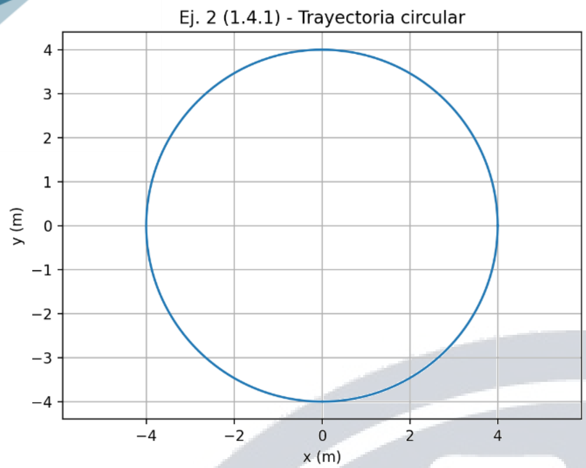
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-4\sin\ t)\hat{\imath} + (4\cos\ t)\hat{\jmath}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-4\cos\ t)\hat{\imath} + (-4\sin\ t)\hat{\jmath}$$

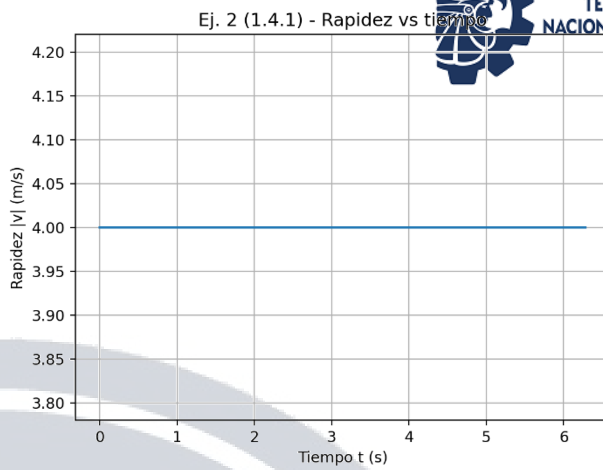
Rapidez:

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{(-4\sin\ t)^2 + (4\cos\ t)^2} = \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 4\ \text{m/s}$$

Aceleración:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{(-4\cos\ t)^2 + (-4\sin\ t)^2} = 4\ \text{m/s}^2$$





Ejercicio 3 (trayectoria ondulada)

Una partícula se mueve según:

$$\vec{r}(t) = (t)\hat{\imath} + (2\sin\ t)\hat{\jmath}(0 \leq t \leq 6)\ \text{s}$$

Determina:

a) $\vec{v}(t)$y $\vec{a}(t)$

b) los instantes cuando $v_y = 0$en el intervalo dado

Solución

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1)\hat{\imath} + (2\cos\ t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (0)\hat{\imath} + (-2\sin\ t)\hat{\jmath}$$

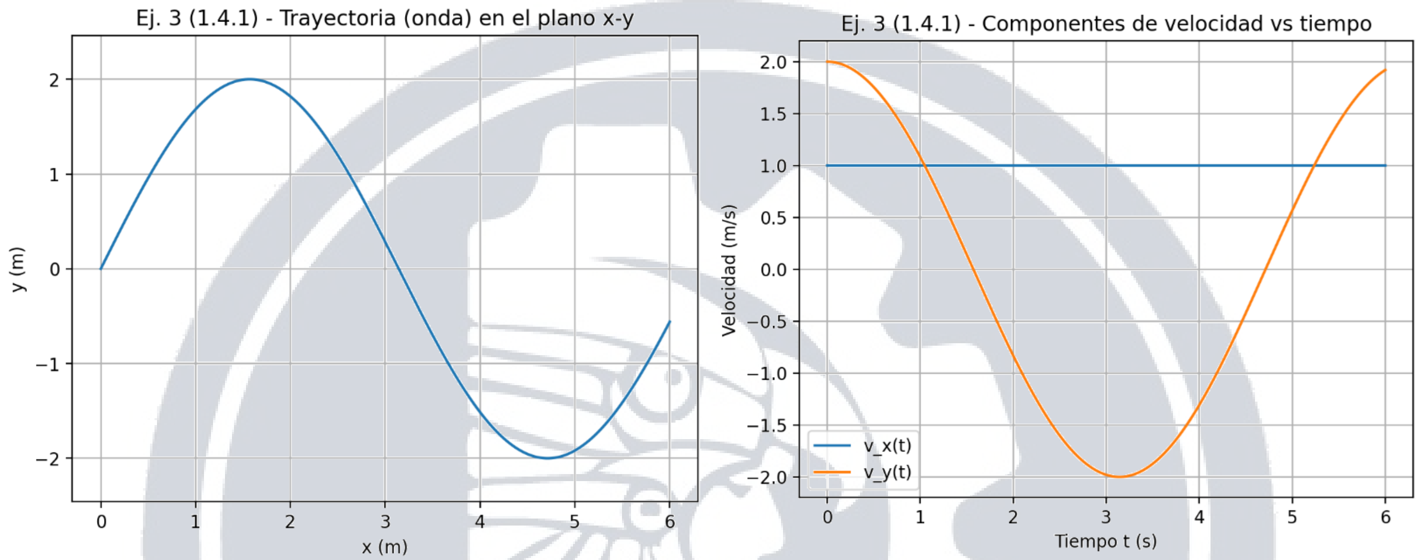
Para $v_y = 0$:

$$2\cos\ t = 0 \Rightarrow \cos\ t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\ \text{(si cae en } 0 \leq t \leq 6\text{)}$$

Aproximaciones:

$$t \approx 1.571,\ 4.712\ \text{s}$$

($5\pi/2 \approx 7.854$ queda fuera del intervalo)



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

1.4.2 Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

En el movimiento curvilíneo en el plano, la posición se expresa como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$$

La velocidad y la aceleración se obtienen derivando componente a componente:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

La rapidez y la dirección instantánea se calculan con:

$$|\,\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Ejercicio 1

Una partícula se mueve según:

$$x(t) = 3t^2 + 2t, y(t) = 4t - t^2$$

(x, yen m, $t$en s)

Determina:
a) v_x, v_y, a_x, a_y
b) $|\,\vec{v}\,|$y el ángulo θcuando $t = 2\ s$

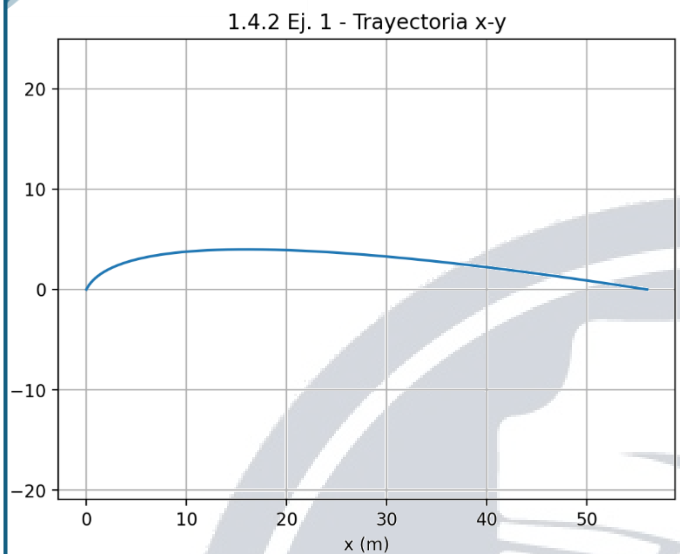
Solución

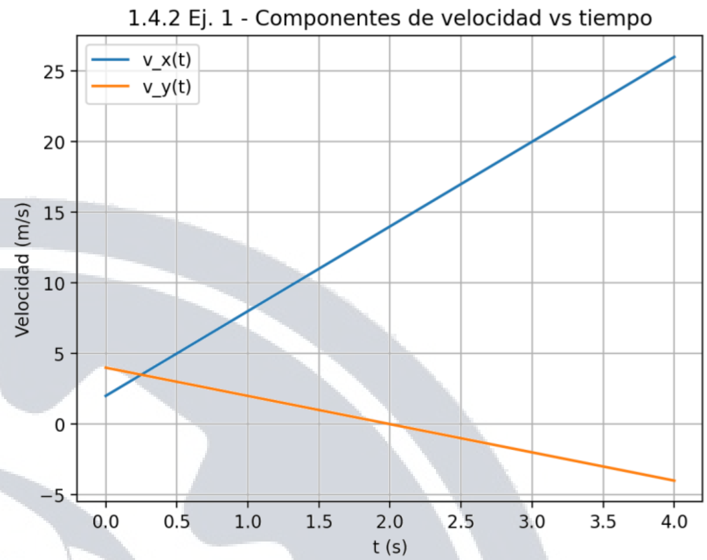
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t + 2, v_y = \frac{dy}{dt} = 4 - 2t$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6, a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2$$

En $t = 2$:

$$v_x(2) = 14, v_y(2) = 0$$
$$|\,\vec{v}(2)\,| = \sqrt{14^2 + 0^2} = 14 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}(0/14) = 0°$$





Ejercicio 2 (tipo proyectil)

El movimiento está descrito por:

$$x(t) = 10t, y(t) = 20t - 4.9t^2 (0 \leq t \leq 4)$$

Determina:

a) v_x, v_y

b) a_x, a_y

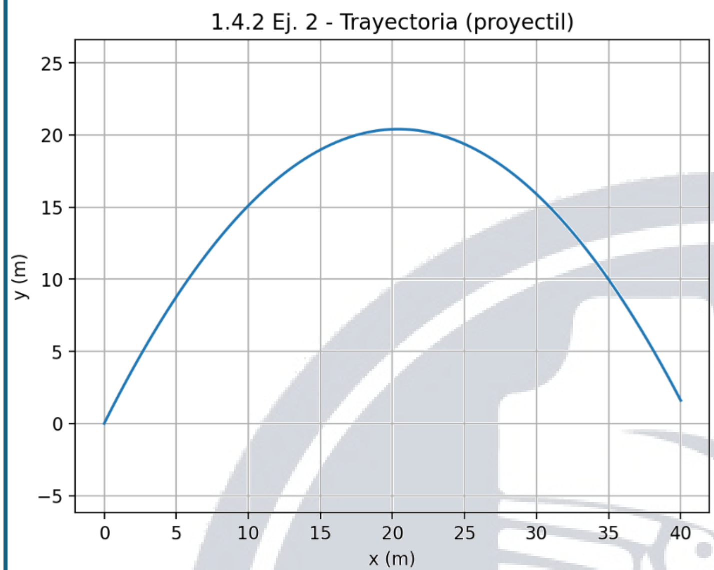
c) $|\ \vec{v}\ |$cuando $t = 1.5\ s$

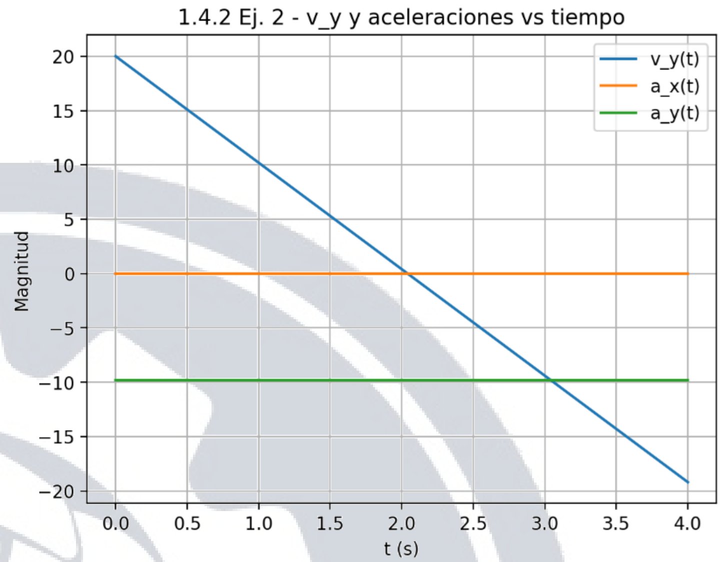
Solución

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10, v_y = \frac{dy}{dt} = 20 - 9.8t$$
$$a_x = 0, a_y = -9.8\ \text{m/s}^2$$

En $t = 1.5$:

$$v_x = 10, v_y = 20 - 9.8(1.5) = 5.3\ \text{m/s}$$
$$|\ \vec{v}\ |= \sqrt{10^2 + 5.3^2} = \sqrt{128.09} = 11.32\ \text{m/s}$$





Ejercicio 3

Se conoce que:

$$\boldsymbol{v_x(t) = 4t + 1, v_y(t) = 6 - 2t}$$

y las condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{x(0) = 2\ \mathrm{m}, y(0) = -1\ \mathrm{m}}$$

Determina:

a) $x(t)$y $y(t)$

b) a_x, a_y

c) $|\ \vec{v}\ |$y θcuando $t = 3\ s$

Solución

Integramos v_x y v_y:

$$x(t) = \int (4t + 1)\, dt = 2t^2 + t + C_1$$

Con $x(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$:

$$x(t) = 2t^2 + t + 2$$
$$y(t) = \int (6 - 2t)\, dt = 6t - t^2 + C_2$$

Con $y(0) = -1 \Rightarrow C_2 = -1$:

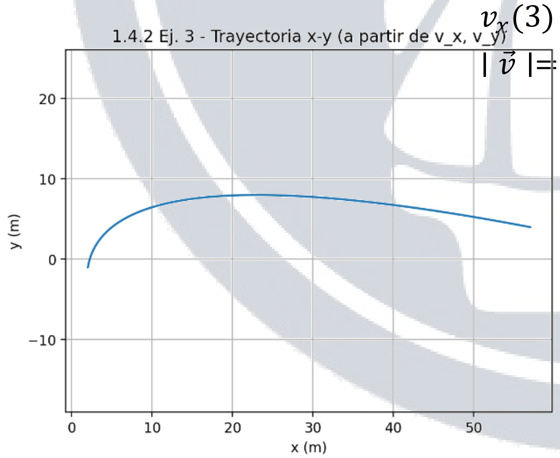
$$y(t) = 6t - t^2 - 1$$

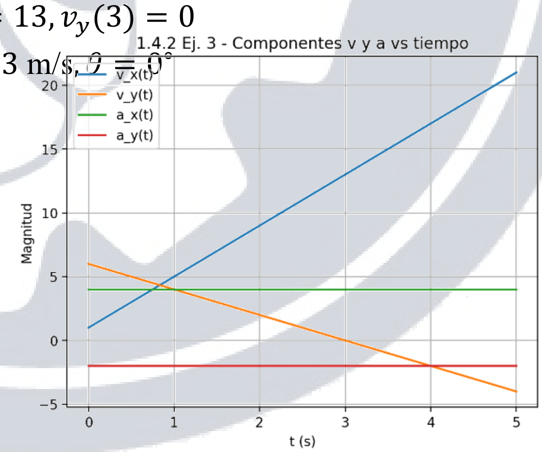
Aceleraciones:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4, a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2$$

En $t = 3$:

$$v_x(3) = 13, v_y(3) = 0$$
$$|\vec{v}| = 13 \text{ m/s}, \theta = 0°$$





Conclusión

En esta unidad se estudiaron los conceptos básicos de la dinámica, enfocándose en la cinemática de las partículas, lo que permitió entender cómo se describe el movimiento a través de la posición, la velocidad y la aceleración. Mediante el uso del cálculo diferencial e integral fue posible analizar distintos tipos de movimiento y comprender la relación que existe entre estas variables.

El desarrollo de ejercicios y el uso de gráficas ayudaron a reforzar la teoría y a visualizar mejor el comportamiento del movimiento en situaciones reales relacionadas con la Ingeniería Civil. En general, los conocimientos adquiridos en esta unidad representan una base importante para el estudio de temas más avanzados de la dinámica y su aplicación en problemas prácticos de la ingeniería.

Bibliografia

- 7.2 Dinámica Beer 9th
- 7.3 Dinámica 12va. Ed Hibbeler
- Dinámica, Primera unidad. Ing. Carlos Padilla Ram