Éléments de géométrie projective application à la calibration de caméra

François Cabestaing

Master ASE et Informatique, spécialité "Image Vision Interaction"

Université Lille1 Sciences et Technologies

géométrie projective

définition

géométrie *a priori* non métrique qui a comme objectif d'étudier les propriétés des configurations d'ensembles de droites et de points affectés par des projections.

éléments géométriques de base :

- points
- lignes droites
- coniques, quadriques

point : passage de l'espace euclidien à l'espace projectif

Un point P d'un espace projectif est repéré par ses coordonnées *homogènes*.

Chaque point P' d'un espace euclidien peut être associé à un point P de l'espace projectif :

$$P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ P' \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{est associé à} \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},\ P \in \mathbb{P}^3$$

Les coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif ne sont pas uniques :

$$\text{si } w \neq 0, \text{ alors } w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} \text{ représentent le même point.}$$

point : passage de l'espace projectif à l'espace euclidien

Un point de l'espace projectif dont la dernière coordonnée homogène est non nulle peut être associé à un point de l'espace euclidien :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},\ P \in \mathbb{P}^3 \qquad \text{est associé à} \qquad P' = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix},\ P' \in \mathbb{R}^3$$

Un point de l'espace projectif dont la dernière coordonnée est nulle est appelé *point à l'infini*.

Un point à l'infini n'a pas d'équivalent dans l'espace euclidien.

dimension de l'espace projectif

espace projectif à deux dimensions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix} \text{ si } w \neq 0$$

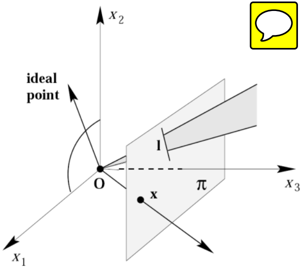
espace projectif à trois dimensions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix} \text{ si } w \neq 0$$

représentation d'un espace projectif

on peut facilement se représenter la structure de l'espace projectif $\mathbb{P}^2$ en utilisant l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$

- un point de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas à l'infini est équivalent à *une direction* de $\mathbb{R}^3$
- le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est équivalent aux points à l'infini de $\mathbb{P}^2$
- le plan $z = 1$ de $\mathbb{R}^3$ est équivalent aux points de $\mathbb{P}^2$ qui ne sont pas situés à l'infini



on peut également se représenter la structure de l'espace projectif $\mathbb{P}^2$ comme la surface d'une sphère de $\mathbb{R}^3$

droite d'un espace projectif 2D

Une équation implicite de droite dans un espace projectif est donnée par :

$$ax + by + c = axw + byw + cw = 0\ ,$$

où :

- $\mathbf{d} = (a\ b\ c)^T$ caractérise la droite
- $\mathbf{p} = (x\ y\ w)^T$ désigne les coordonnées d'un point de la droite

L'équation implicite de la droite indique que le produit scalaire de $\mathbf{d}$ et $\mathbf{p}$ est nul, ce qui peut s'écrire en notation matricielle :

$$\mathbf{d}^T\mathbf{p} = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbf{p}^T\mathbf{d} = 0$$

> cette notation souligne qu'il existe une *dualité* entre une droite et un point dans un espace projectif 2D

dualité dans un espace projectif

Dans un espace projectif 2D, tout point peut être associé à une droite unique, appelée *droite duale* du point

Inversement, toute droite peut être associée à un point unique, appelée *point dual* de la droite

Les mêmes propriétés existent en dimension supérieure à 2 :

- en dimension 3, points et plans duaux
- en dimension supérieure à 3, points et hyper-plans duaux

principe de dualité en géométrie projective 2D

- si un théorème mettant en évidence des relations entre des points et des droites est démontré, le théorème dual mettant en évidence des relations entre les droites duales et les points duaux est également vrai (et inversement).
- pour formuler le théorème dual, on interchange le rôle des points et des droites dans l'énoncé du théorème initial.

exemple de théorème dual

Un point **p** appartient à la droite **d** si leurs coordonnées respectives vérifient :

$$\mathbf{d}^T\mathbf{p} = 0$$

en utilisant la propriété de dualité, on démontre directement que :

Une droite **d** passe par le point **p** si leurs coordonnées respectives vérifient :

$$\mathbf{p}^T\mathbf{d} = 0$$

2 points $\longrightarrow$ droite, 2 droites $\longrightarrow$ point

Soient deux droites **d** et **d**′ du plan projectif. On cherche le point **p** qui appartient simultanément aux deux (intersection), c'est à dire :

$$\mathbf{d}^T\mathbf{p} = \mathbf{d}'^T\mathbf{p} = 0$$

on va utiliser l'identité du triple produit, qui concerne la combinaison d'un produit scalaire et d'un produit vectoriel sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

en prenant $a = \mathbf{d}$, $b = \mathbf{d}$ et $c = \mathbf{d}'$ on obtient :

$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{d}') = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d}' \times \mathbf{d}) = \mathbf{d}' \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{d})$$

le dernier terme étant nul.

2 points $\longrightarrow$ droite, 2 droites $\longrightarrow$ point

On démontre ainsi que :

le point d'intersection **p** de deux droites **d** et **d**′ est donné par :

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{d} \times \mathbf{d}' \equiv \mathbf{d}' \times \mathbf{d}$$

grâce au principe de dualité on démontre alors que :

la droite **d** qui passe par les deux points **p** et **p**′ est donnée par :

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{p}' \equiv \mathbf{p}' \times \mathbf{p}$$

intersection de deux droites parallèles

Deux droites **d** et **d**′ de l'espace projectif sont parallèles si :

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c' \end{pmatrix},$$

où c' est une constante réelle.

Quand on calcule le produit vectoriel des vecteurs caractéristiques de ces deux droites, on obtient un vecteur dont la troisième coordonnée est nulle :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} wa \\ wb \\ wc + c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(wc + c') - cwb \\ cwa - a(wc + c') \\ awb - bwa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc' \\ -ac' \\ 0 \end{pmatrix}$$

le point d'intersection est donc situé à l'infini, dans une direction qui dépend des deux premières coordonnées des droites.

transformation affine 2D

Dans un plan euclidien, une transformation *affine* est définie par :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{p} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}, \text{ où } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$$

Dans un espace euclidien, cette transformation est la transformation linéaire la plus générale.

De façon similaire on peut définir une transformation affine dans un plan projectif en utilisant les coordonnées homogènes :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}, \text{ où } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}^2$$

6 degrés de liberté permettent la définition d'une transformation affine.

cas particuliers

Similarité (conserve les angles) :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} s\mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}, \text{ où } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}^2$$

4 degrés de liberté permettent la définition d'une similarité.

Transformation euclidienne (conserve les angles et les distances) :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}, \text{ où } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}^2$$

3 degrés de liberté permettent la définition d'une transformation euclidienne.

homographie 2D

Transformation linéaire entre deux plans projectifs π_1 et π_2 :

$$\mathbf{q} = \mathcal{H}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \mathbf{p}, \text{ où } \mathbf{p} \in \pi_1 \equiv \mathbb{P}^2, \; \mathbf{q} \in \pi_2 \equiv \mathbb{P}^2$$

$\mathcal{H}$ est appelée *homographie*.

Si les deux plans projectifs sont identiques, il s'agit d'une transformation.

Sinon, on dit que l'homographie réalise un *transfert* d'un plan projectif vers l'autre.

8 degrés de liberté permettent la définition d'une homographie (définie à un facteur d'échelle près).

Englobe toutes les autres transformations linéaires.

homographie appliquée aux droites

Soit la droite $\mathbf{d}$ passant par les deux points $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ dans le plan projectif π_1, définie par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{p} \times \mathbf{p}'$$

Les transferts de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ vers le plan projectif π_2 par l'homographie $\mathcal{H}$ sont donnés par :

$$\mathbf{q} = \mathcal{H}\mathbf{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{q}' = \mathcal{H}\mathbf{p}'$$

On peut montrer que la droite passant par les points $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$ dans le plan projectif π_1 est définie par :

$$\mathbf{d}' = \mathcal{H}\mathbf{p} \times \mathcal{H}\mathbf{p}' = \mathcal{H}^{-T}(\mathbf{p} \times \mathbf{p}') = \mathcal{H}^{-T}\mathbf{d}$$

La matrice $\mathcal{H}^{-T}$, qui définit l'homographie appliquée aux droites, est appelée transpose/inverse de la matrice $\mathcal{H}$.

visualisation sur une image

image initiale dans π_1

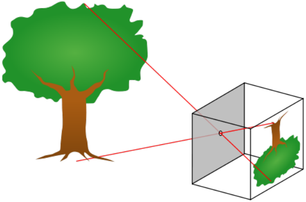
image transformée dans π_2

On vérifie bien que les droites de l'espace projectif π_1 sont transformées en droites de l'espace projectif π_2.

L'homographie préserve donc l'alignement, mais elle ne préserve ni les angles ni les distances.

modèle sténopé d'une caméra (pinhole)

La projection perspective qui modélise le processus de formation d'une image dans une caméra est décrite en utilisant des transformations projectives.



modèle sténopé d'une caméra (image wikipedia)

Dans cette modélisation, on différencie :

- les paramètres extrinsèques qui permettent de définir la l'orientation et la position de la caméra dans l'espace 3D
- les paramètres intrinsèques qui ne dépendent pas de l'orientation et de la position de la caméra : il sont relatifs à la configuration optique et aux caractéristiques du capteur d'image

paramètres extrinsèques

On considère en premier lieu la transformation euclidienne qui transfère un point du repère lié à la scène à celui lié à la caméra.

Cette tranformation fait intervenir 6 degrés de liberté : 3 pour la rotation et 3 pour la translation.

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Les paramètres extrinsèques de la caméra sont ces 6 degrés de liberté.

problème : comment retrouver la matrice de rotation à partir de 3 paramètres ?

paramétrisation de la matrice de rotation

Plusieurs paramétrisations sont possibles.

La plus connue, souvent utilisée en physique, est la paramétrisation d'Euler qui repose sur l'utilisation de trois angles (ϕ, θ, ρ) :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\phi)\mathcal{R}(\theta)\mathcal{R}(\rho)$$

En vision par ordinateur on utilise souvent la paramétrisation de Rodrigues, qui définit la rotation par son axe et un seul angle.

L'orientation de l'axe est codée par un vecteur unitaire $\mathbf{n}$, qui est ensuite multiplié par l'angle de rotation θ.

La matrice de rotation est donnée par :

$$\mathcal{R} = \cos\theta \; \mathbf{I}_{3\times 3} + (1 - \cos\theta) \; \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

projection perspective

Une fois qu'un point de la scène a été transféré dans le repère lié à la caméra, on modélise la projection perspective par une transformation projective.

La projection perspective est un transfert d'un espace projectif à trois dimensions vers un espace projectif à deux dimensions.

On considère en général le cas le plus simple (modèle direct) :

- le centre optique est situé à l'origine du repère
- le plan image π est situé à une distance f du centre optique
- le plan image est orthogonal à l'axe z

Dans ce cas, la matrice de projection est donnée par :

$$\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

transformation dans le plan image

Une fois le point projeté sur le plan image, on introduit une transformation projective 2D supplémentaire qui permet :

- de définir la position (u_0, v_0) du centre de l'image
- de choisir les facteurs d'échelle (k_u, k_v) sur chacun des deux axes de l'image
- de tenir compte éventuellement de la non-orthogonalité de ces axes (coefficient s_{uv})

La matrice de cette transformation 2D est donnée par :

$$\begin{pmatrix} k_u & s_{uv} & c_u \\ 0 & k_v & c_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand les axes définissant le plan image sont orthogonaux, le coefficient s_{uv} est nul.

matrice des paramètres intrinsèques

Pour obtenir une matrice unique définissant les paramètres intrinsèques de la caméra, on combine :

- la projection perspective, caractérisée par la distance f
- la transformation projective 2D dans le plan image

La *matrice intrinsèque* de la caméra est ainsi définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & s_{uv} f & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u & s_{uv} & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de 5 paramètres intrinsèques pour définir les propriétés d'une caméra avec un modèle sténopé.

Quand les axes définissant le plan image sont orthogonaux, le coefficient γ est nul.

transformation globale

Pour résumer, les 11 paramètres intrinsèques et extrinsèques de la caméra permettent de déterminer les coordonnées homogènes $(u\ v\ w)^T$ d'un point de l'image en fonction des coordonnées homogènes $(x\ y\ z\ 1)^T$ du point de la scène :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

calibration d'une caméra

Il s'agit maintenant de résoudre le problème inverse :

- on connaît les propriétés d'un ou plusieurs objets de la scène
- on dispose d'une ou plusieurs images de cet(ces) objet(s)
- on cherche les paramètres intrinsèques et/ou extrinsèques de la caméra

On distingue plusieurs situations :

- les paramètres intrinsèques sont connus et il s'agit d'estimer uniquement les paramètres extrinsèques : on parle alors *d'estimation de pose*
- seuls les paramètres intrinsèques doivent être estimés : on parle alors de *calibration intrinsèque*
- tous les paramètres doivent être estimés : on parle alors de *calibration*

méthode directe

On suppose que l'on connaît :

- les positions M_i de n points dans la scène
- les positions m_i de leurs projections dans le plan image

Il "suffit" de rechercher les paramètres qui minimisent le résidu :

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - \mathbf{A}(\mathcal{R}|\mathbf{t})M_i)^2$$

Le résidu est la somme des carrés des distances entre les points m_i repérés dans l'image et les projections des points M_i de la scène.

- il faut suffisamment de points et pas n'importe lesquels
- pas de solution analytique à ce problème de minimisation
- les méthodes numériques sont itératives et on doit partir d'une solution approchée

méthode de Tsai

Hypothèses :

- on connaît plusieurs paires (M_i, m_i) de points de la scène associés à leurs projections dans l'image
- ces points sont situés dans un plan unique, qui ne doit pas être parallèle au plan image
- k_u, k_v, c_u, et c_v doivent être connus et s_{uv} nul.

La méthode de Tsai permet de déterminer le paramètre intrinsèque manquant (f) et la pose de la caméra.

Elle permet également de déterminer les paramètres de distorsion de la caméra, quand le modèle sténopé n'est plus suffisant pour représenter les déformations.

1. détermination des paramètres extrinsèques, à part t_z
2. détermination de t_z, de f et des paramètres de distorsion

méthode de Zhang

Hypothèses :

- on connaît plusieurs points M_i de la scène
- ces points sont situés dans un plan unique
- on dispose de n_i images (au moins deux) de ces points, dans lesquelles les positions des projections m_i sont identifiées
- les différentes vues ne doivent pas résulter d'une translation pure de la caméra

Étapes :

1. pour chaque image, on détermine l'homographie entre les points de la scène et les points projetés, chaque homographie imposant deux contraintes sur les paramètres intrinsèques de la caméra
2. grâce aux $2n_i$ équations on détermine les paramètres intrinsèques de la caméra
3. on détermine les paramètres extrinsèques pour chaque image

bibliographie

Éléments de cours

- Site "optique pour l'ingénieur". http://www.optique-ingenieur.org/
- Peter Sturm, INRIA Grenoble, cours "Vision par ordinateur 3-D". http://perception.inrialpes.fr/people/Sturm/Lectures/Vision_3D/Index.html
- Cours de Sébastien Roy sur la vision 3D, Université de Montréal. http://www.iro.umontreal.ca/~roys/fr_ift6145H07.shtml

Articles de chercheurs

- R.Y. Tsai, *An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision*. Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Miami Beach, FL, pp. 364-374, 1986.
- Z. Zhang, *A flexible new technique for camera calibration*. IEEE Transactionson Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 22, No. 11, pp. 1330-1334, 2000.