2018-2019 微积分 III-1 期中考试参考答案

(一) 解答下列各题 (共 30 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$.

解.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2+\sin x}}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

□

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n},\quad (a>b>c>0)$.

解. 我们有 $\sqrt[n]{a^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}<\sqrt[n]{3\cdot a^n}$. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, 由从而原极限为 a. □

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求参数 a 和 b.

解. 因为 $\lim\limits_{x\to 2}x^2-x-2=0$, 由条件知 $\lim\limits_{x\to 2}x^2+ax+b=4+2a+b=0$. 将 $b=-4-2a$ 代人原极限, 有

$$2=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-4-2a}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{a+4}{3},$$

解得 $a=2$. 从而 $b=-4-2a=-8$. □

(二) 解答下列各题 (共 20 分)

1. 令 $f(x)$ 是一个可导函数, 求 $y=\mathrm{e}^{f(\sin^2 x)}$ 的导数.

解. 由复合函数求导法则,

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{f(\sin^2 x)}(f(\sin^2 x))' = \mathrm{e}^{f(\sin^2 x)} f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' \\ &= 2\mathrm{e}^{f(\sin^2 x)} f'(\sin^2 x)\sin x\cos x. \end{aligned}$$

□

2. 令 $y=\begin{cases}\cos x, & x<0;\\ \ln(1+x^2), & x\geq 0.\end{cases}$ 求 y'.

解. 当 $x<0$ 时, $y'=-\sin x$; 而当 $x>0$ 时 $y'=\frac{2x}{1+x^2}$.
在分段点 $x=0$ 处,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-\ln 1}{x-0}=\infty,$$

而

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)-\ln 1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=0.$$

因此 y 在 $x=0$ 处不可导, 从而

$$y'=\begin{cases}-\sin x, & x<0;\\ \frac{2x}{1+x^2}, & x>0.\end{cases}$$

□

(三) (共 10 分) 设 $x_1>0$, 且定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\big(x_n+\dfrac{1}{x_n}\big)(n=1,2,\cdots)$, 证明：$\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

解. 由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\geq 1$. 从而

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_n}-x_n)=\frac{1}{2}\frac{1-x_n^2}{x_n}\leq 0.$$

故 $\{x_n\}$ 是一个单减序列且有下界，因此极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{1}{A})$，由此解得 $A=1$. □

(四) (共 10 分) 求出下面函数的间断点并判断其类型.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x}, & x<0;\\ \\ \ln(1+x)+\sin\frac{1}{1-x^2}, & x\geq 0.\end{cases} \tag{0.1}$$

解. 函数的间断点为 $x=0,1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin\pi x}{x}=\pi$, 而 $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln(1+x)+\sin\frac{1}{1-x^2}\right)=\sin 1$，因此 $x=0$ 是第一类跳跃间断点. 又因为极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(1+x)+\sin\frac{1}{1-x^2}\right)$ 不存在，故 $x=1$ 是第二类 (震荡) 间断点. □

(五) (共 10 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$f'(0)$ 存在，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)+\cos x)}{x}=7,$$

求 $f'(0)$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x)+\cos x]}{x}$ 极限存在知 $f(0)=0$. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x)+\cos x]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(f(x)+\cos x-1)]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\cos x-1}{x}=7,$$

从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=7.$$

□

(六) (共 10 分) 求过点 $(0,5)$ 的一条直线, 使它与曲线 $y=\dfrac{1}{2x}$ 相切.

解. 显然 $(0,5)$ 不在曲线上. 假设直线与曲线相切于点 (a,b). 由于 $y'=-\frac{2}{x^2}$, 则切线的斜率为 $y'|_{x=a}=-\frac{2}{a^2}$, 从而直线方程为

$$y-b=-\frac{2}{a^2}(x-a).$$

代入点 $(0,5)$ 得

$$5-b=\frac{2}{a}.$$

另一方面, 由于点 (a,b) 在曲线上, 我们有 $b=\frac{1}{2a}$. 由以上两式可解得 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, 从而直线方程为 $y-1=-8(x-\frac{1}{2})$, 即 $-8x-y+5=0$. □

(七) (共 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在且大于零，而极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且小于零. 证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内至少有一个零点.

证明. 记 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A > 0$. 根据极限的保号性，存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $x \in (a, a+\delta)$ 有 $f(x) > 0$. 类似的，记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B < 0$，同理可知存在 $X > 0$，使得对任意的 $x > X$ 有 $f(x) < 0$. 由于函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，从而在区间 $[a+\frac{\delta}{2}, X+1]$ 上连续. 又 $f(a+\frac{\delta}{2}) > 0$ 且 $f(X+1) < 0$，根据连续函数的零点定理知，在区间 $[a+\frac{\delta}{2}, X+1]$(从而在区间 $[a,+\infty)$) 内至少存在一个零点. $\square$