参考答案

一、填空题：（每题3分，共21分）

1、曲面 $z=2x^y$上点$(1,0,2)$处的切平面方程为______.

解：$z_x(1,0)=0$，$z_y(1,0)=0$，故切平面方程为$z-2=0$.

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{20x^3+17y^3}{x^2+y^2}=$______.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{20x^3+17y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho\cdot(20\cos^3\theta+17\sin^3\theta)=0.$

3、设 Ω为$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$______.

解：原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}\pi.$

4、设L是$y=x^2-1$上从$(0,-1)$到$(2,3)$的有向曲线，则$\int\limits_L ydx+xdy=$__.

解：曲线积分与路径无关，选择折线$l:(0,-1)\longrightarrow(2,-1)\longrightarrow(2,3)$，

$\int\limits_l ydx+xdy=-\int_0^2 dx+\int_{-1}^3 2dy=-2+8=6.$

另解：直接代入曲线方程，$\int\limits_L ydx+xdy=\int_0^2(x^2-1+x\cdot 2x)dx=6.$

5、设区域D是由$y=x^2$与$y=x$围成的，则 $\iint\limits_D xydxdy=$ ___.

解：$\iint\limits_D xydxy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}xydy=\int_0^1\dfrac{1}{2}(x^3-x^5)dx=\dfrac{1}{24}.$

6、设曲线L的方程为$x^2+y^2=1$，则 $\oint\limits_L(x^2+7y^2)ds=$ ______.

解：由曲线L的对称性 $\oint\limits_L x^2ds=\oint\limits_L y^2ds$，

$\therefore\oint\limits_L(x^2+7y^2)ds=4\oint\limits_L(x^2+y^2)ds=4\oint\limits_L ds=8\pi.$

7、微分方程 $xy'+y=x^2$满足$y(3)=4$的特解为______.

解：$\because(xy)'=x^2$，$xy=\dfrac{1}{3}x^3+C$，由$y(3)=4$可得:

$12=9+C$，于是$C=3$，$\therefore y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{x}.$

二、计算题：（每题9分，共36分）

1、设曲面Σ为$z=\sqrt{x^2+y^2}$（$x^2+y^2\leqslant 1$），求$\iint\limits_{\Sigma}(20xy+17y^2)dS$.

解：由曲面Σ的对称性 $\iint\limits_{\Sigma}xydS=0$，$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS$，

$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(20xy+17y^2)dS=\dfrac{17}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\dfrac{17}{2}\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)dxdy$

$=\dfrac{17}{2}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\dfrac{17}{4}\sqrt{2}\pi.$

2、设曲面$\sum$为$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，方向规定为上侧，求$\iint\limits_{\sum}x^2dydz+y^2dzdx+5z^3dxdy$.

解：补充平面$z=0$，使得它们与曲面$\sum$围成封闭的立体Ω，曲面方向都指向外侧；显然在补充的平面上，曲面积分为零，于是由高斯公式可得

$$\iint\limits_{\sum}x^2dydz+y^2dzdx+5z^3dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+15z^2)dxdydz;$$

由立体Ω的对称性，

$$\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz=0;$$

用截面法计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}z^2dxdy=\int_0^1z^2\cdot\pi(1-z^2)=\frac{2}{15}\pi,$$

或者用球面坐标计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{15}\pi,$$

因此，$\iint\limits_{\sum}x^2dydz+y^2dzdx+5z^3dxdy=15\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=2\pi.$

3、求微分方程$y''+2y'+y=6xe^{-x}$的通解。

解：特征方程为 $r^2+2r+1=0$，$r=-1$是二重根，

于是对应齐次方程的通解为$(C_1x+C_2)e^{-x}$.

设$z=u(x)e^{-x}$是原方程的特解，代入并整理可得

$u''=6x$，于是可取$u'=3x^2$，$u=x^3$，$z=x^3e^{-x}$；

因此，原方程的通解为$(x^3+C_1x+C_2)e^{-x}$.

4、设$f(x,y)$的二阶偏导数都连续，$f(0,0)=0$，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$，$f''_{xx}(0,0)=2$，函数$z=z(x,y)$由$z=f(x+y,yz)$所确定，求$z'_x(0,0)$、$z'_y(0,0)$、$z''_{yx}(0,0)$.

解：$z'_x(x,y)=f'_1(x+y,yz)+yz'_x(x,y)f'_2(x+y,yz)$，

$z'_y(x,y)=f'_1(x+y,yz)+[z+yz'_y(x,y)]f'_2(x+y,yz)$；

代入$x=0$、$y=0$、$z(0,0)=0$可得：

$z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=f'_1(0,0)=f'_x(0,0)=1$.

由于$z'_y(x,0)=f'_1(x,0)+z(x,0)f'_2(x,0)$，再对$x$求导可得

$z''_{yx}(x,0)=f''_{11}(x,0)+z'_x(x,0)f'_2(x,0)+z(x,0)f''_{21}(x,0)$，

代入$x=0$、$z(0,0)=0$、$z'_x(0,0)=1$、$f'_2(x,0)=1$、$f''_{11}(0,0)=2$可得：$z''_{xy}(0,0)=3$.

三、综合题：（每题9分，共18分）

1、讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(2x^2+7y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在原点的下列性质：

（1）偏导数的存在性；（2）函数的连续性；（3）函数的可微性。

解：（1）$\because f(x,0)=0$，$\therefore f'_x(0,0)=\dfrac{d}{dx}f(x,0)|_{x=0}=0$；

$\because f(0,y)=0$，$\therefore f'_y(0,0)=\dfrac{d}{dy}f(0,y)|_{y=0}=0$；偏导数都存在。

（2）令$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，那么

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(2\cos^2\theta+7\sin^2\theta)^{3/2}}=0.$$

最后一步是因为$\dfrac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(2\cos^2\theta+7\sin^2\theta)^{3/2}}\leqslant\dfrac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{2\sqrt{2}}$是有界函数，因此函数连续。

（3）由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\Delta x\cdot f_x'(0,0)-\Delta y\cdot f_y'(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\
=&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[2(\Delta x)^2+7(\Delta y)^2]^2}\\
=&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{k^2}{(2+7k^2)^2}.
\end{aligned}$$

该极限与k有关，因此极限不存在，从而函数在原点不可微。

2、设$f'(x)$连续，$f(1)=2017$，当$x\neq 1$时$f(x)>0$，曲线积分$\int\limits_L\frac{ydx-xdy}{f(x)+2017y^2}$在不含原点的单连通区域上与路径无关，求：（1）$f(x)$的表达式；

（2）$\oint\limits_L\frac{ydx-xdy}{f(x)+2017y^2}$，$L$为$x^2+2017y^2=1$，方向为逆时针。

解：（1）既然$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{f(x)+2017y^2})=\frac{f(x)-2017y^2}{(f(x)+2017y^2)^2}$，

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-x}{f(x)+2017y^2})=-\frac{f(x)+2017y^2-xf'(x)}{(f(x)+2017y^2)^2}$，由题设可得

$xf'(x)=2f(x)$，于是$f(x)=Cx^2$；利用$f(1)=2017$可得$f(x)=2017x^2$；

（2）设l为半径充分小的圆$x^2+y^2=\epsilon^2$，方向为逆时针；

L与l之间的区域记为D，l围成的区域记为D'，那么由格林公式，

$$\begin{aligned}
\oint\limits_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}&=\oint\limits_{L-l}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+\oint\limits_l\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}\\
&=\iint\limits_D 0dxdy+\frac{1}{\epsilon^2}\oint\limits_l ydx-xdy\\
&=\frac{1}{\epsilon^2}\iint\limits_{D'}-2dxdy=-2\pi.
\end{aligned}$$

于是原式$=\oint\limits_L\frac{ydx-xdy}{2017x^2+2017y^2}=\frac{-2\pi}{2017}.$

四、应用题：（每题9分，共18分）

1、设曲面Σ是由yoz平面上的曲线$z=y^2$绕z轴旋转产生的，曲面Σ与平面$x+y+\frac{z}{2}=1$围成的立体记为Ω，求：（1）曲面Σ的方程；

（2）曲面Σ与平面$x+y+\dfrac{z}{2}=1$的交线在xoy平面上的投影曲线方程；

（3）计算立体Ω的体积(提示：利用$x+1=\rho\cos\theta$、$y+1=\rho\sin\theta$)。

解：（1）曲面Σ的方程为$z=x^2+y^2$；

（2）投影曲线为$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=1 \\ z=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

（3）$V=\iint\limits_{D_{xy}}(2-2x-2y-x^2-y^2)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(4-(x+1)^2-(y+1)^2)dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}(4-\rho^2)\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-\rho^3)d\rho=8\pi.$

2、在椭圆抛物面$\dfrac{z}{20}=x^2+\dfrac{y^2}{4}$与平面$z=20$围成的空间区域中内置一个长方体，假设该长方体的一个面位于平面$z=20$上，长方体的其它面都与某个坐标平面平行，求长方体的体积的最大值。

解：设第一象限中$\dfrac{z}{20}=x^2+\dfrac{y^2}{4}$上的点$(x,y,z)$是长方体的一个顶点

长方体的体积为$V=2x\cdot 2y\cdot(20-z)$，令$L=xy(20-z)+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z}{20})$

$$\begin{cases} L_x &= y(20-z)+2\lambda x=0 \\ L_y &= x(20-z)+2\lambda y/4=0 \\ L_z &= -xy-\lambda/20=0 \\ L_\lambda &= x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z}{20}=0 \end{cases}$$

解方程组可得：$x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$，$z=10$，于是$V_{max}=20.$

五、证明题：（7分）

设区域D为$x^2+y^2\leqslant 1$，$I=\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)^{5/2}dxdy$，求证：（1）$I=2\pi\int_0^1 t\sin t^5 dt$；（2）$I<\dfrac{2}{7}\pi$；（3）$I>\dfrac{\pi}{4}$。

证明：（1）$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\sin\rho^5 d\rho=2\pi\int_0^1\rho\sin\rho^5 d\rho=2\pi\int_0^1 t\sin t^5 dt$；

（2）当$x\geqslant 0$时，$\sin x\leqslant x$；并且当$x>0$时，$\sin x<x$；那么$I=2\pi\int_0^1 t\sin t^5 dt<2\pi\int_0^1 t^6 dt=\dfrac{2}{7}\pi.$

（3）容易证明$\sin x\geqslant x-\dfrac{x^3}{6}$，所以$\sin t^5\geqslant t^5-\dfrac{1}{6}t^{15}$，于是$I\geqslant 2\pi\int_0^1(t^6-\dfrac{1}{6}t^{16})dt=\dfrac{95}{357}\pi>\dfrac{\pi}{4}$。