四川大学2015级高等数学(I)上期半期考试试题参考答案

1.利用数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n-1}=\frac{3}{4}$.

证明：对任意给定的正数ε，要使$\left|\frac{3n+1}{4n-1}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{7}{4(4n-1)}\right|<\varepsilon$，只要

$$n>\frac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}，\therefore 取 N=\left[\frac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}\right],$$

则对任意给定的$\varepsilon>0$，当$n>N$时，就有$\left|\frac{3n+1}{4n-1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+3n}{4n-1}=\frac{3}{4}$$

2. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq -1,0,1\\ 0, & x=\pm 1\end{cases}$，求函数$f(x)$的间断点，并判断其类型. 若为可去间断点，试补充或修改定义后使其为连续点.

解　因为$f(x)$在$x=0$处无定义，所以$x=0$是$f(x)$的间断点.

又因　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=-1.$

所以$x=0$为$f(x)$的第一类不可去间断点(跳跃间断点). $f(x)$在$x=1$处有定义，但是

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，所以$x=1$为$f(x)$的无穷间断点.

$f(x)$在$x=-1$处有定义，而且$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}$,但是$\lim\limits_{x\to -1}f(x)\neq f(-1)=0,$

故$x=-1$为$f(x)$的可去间断点，若令$f(-1)=1/2,$ 则$f(x)$在$x=-1$处连续.

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$；

解：　**(1)** $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{(e^x-1)\sim x}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$.

解： (2)令 $f(x)=(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}(\frac{\tan t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2t-\tan t}{2t^2\tan t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\sec^2t-\tan t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\sin t\cos t}{2t^3\cos^2t}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\frac{1}{2}\sin2t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1-\cos2t}{6t^2}}\overset{(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}}{=\!=}e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2t^2}{6t^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$

4．计算极限： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2})x^4+o(x^4)}{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2)))x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

5．已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geq0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数,试确定参数 a,b,c 的值.

解： $f(x)$在$x=0$处有二阶导数 $\quad\therefore f(x)$在$x=0$处连续，且$f'(x)$在$x=0$处连续

从而有 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0^-}(ax^2+bx+c)=0 \qquad \therefore c=0$

又 $f(x)$在$x=0$处可导 $\qquad \therefore f'_+(0)=f'_-(0)$

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^2+bx}{x}=b$

$\therefore b=1$，且 $f'_+(0)=f'_-(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2ax+1, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\\ 1\quad, & x=0\end{cases}$$

又 $f(x)$在$x=0$处二阶可导　　$\therefore f''_+(0)=f''_-(0)$

而 $f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(2ax+1)-1}{x}=2a$

$\therefore 2a=-1$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$

6．求方程$\sin y=\ln(x+y)$所确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

解: 方程两边同时对x求导,得　$\cos y\cdot y'=\dfrac{1}{x+y}(1+y')$

解得
$$y'=\frac{1}{(x+y)\cos y-1}$$

$$\therefore y''=-\frac{(1+y')\cos y+(x+y)(-\sin y)\cdot y'}{[(x+y)\cos y-1]^2}=-\frac{(x+y)\cos^2 y-(x+y)\sin y}{[(x+y)\cos y-1]^3}$$

7．求参数方程$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$所确定函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{t}{2})=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{t}{2})\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{1+t^2}{4t}$

8．求函数$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的n阶导数$y^{(n)}$．

解: $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore\quad y^{(n)}=(\dfrac{1}{x-2})^{(n)}-(\dfrac{1}{x-1})^{(n)}$

$$=(-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

9．已知 $f(x), g(x)$ 可导，写出 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ 的求导公式，并证明该公式.

证明：略

10．设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0, 1)内可导，且 $f(1)=0$. 求证：存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明：构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$

根据题意 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=1\cdot f(1)=0$，

$F(0)=0\cdot f(0)=0$，从而由罗尔中值定理得：存在 $\xi \in (0,1)$，使

$F'(\xi)=f'(\xi)\xi+f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.