2017-2018 微积分(1)-1 期末试题参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $[-1,1]$； 2. $\dfrac{1}{2}$； 3. $\dfrac{\pi}{2}$； 4. $2eC_{2018}^{2}$； 5. $-\dfrac{4}{\pi}$； 6. 2.

二、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1.计算不定积分 $\int[\dfrac{\ln x}{x}+x(x-1)^{2018}]\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int x(x-1)^{2018}\mathrm{d}x$

$$=\int\ln x\,\mathrm{d}\ln x+\int(x-1+1)(x-1)^{2018}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x+\int[(x-1)^{2019}+(x-1)^{2018}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{1}{2020}(x-1)^{2020}+\frac{1}{2019}(x-1)^{2019}+C.$$

注：两个不定积分每个分别 4 分.

2.设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=7$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$

$$=[\frac{1}{2}xf'(2x)]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{2}-[\frac{1}{4}f(2x)]_0^1=1.$$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(e^x-1)\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

4.已知函数 $f(u)$ 可导，$f(0)=0$，且由方程 $f(x^2y)+e^{x+y}=e-x$ 可确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

解 由题意易知，当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两边同时对 x 求导，

$$f'(x^2y)(2xy+x^2\frac{dy}{dx})+e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})=-1$$

解之得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{f'(x^2y)\cdot 2xy+e^{x+y}+1}{f'(x^2y)\cdot x^2+e^{x+y}}$. 故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{f'(x^2y)\cdot 2xy+e^{x+y}+1}{f'(x^2y)\cdot x^2+e^{x+y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{e+1}{e}$.

注 可以不解 y' 而直接得到答案.

5.将函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $f^{(2017)}(0)$.

解 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n$$

$$f^{(2017)}(0)=a_{2017}\cdot 2017!=\frac{2}{2017}\cdot 2017! = 2\cdot 2016!$$

注 前一问 6 分，后一问 2 分.

6.判断无穷限广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 1 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}(x^2+1)=\lim\limits_{t\to+\infty}[\frac{-1}{x^2+1}]_0^t=1$

故无穷限广义积分收敛.

解 2 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$

而 $\int_0^1\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x\le\int_0^1 2\mathrm{d}x=2$，$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x\le\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x=1$，

故原无穷限广义积分也收敛.

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设两曲线为 $l_1: y=x^2, l_2: x+y=2$.

(1) 求 l_1 在点 $x=0$ 处的曲率；

(2) 求 l_1 与 l_2 所围成图形的面积；

(3) l_1 与 l_2 围成的图形绕 x 轴旋转一周，求旋转体的体积.

解 (1) $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}|_{x=0}=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}|_{x=0}=2.$

(2) 由 $\begin{cases} y=x^2 \\ x+y=2 \end{cases}$，得交点 $(-2,4),(1,1)$. 故 l_1 与 l_2 所围成图形的面积

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x=[2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

(3) l_1 与 l_2 围成的图形绕 x 轴旋转一周，旋转体的体积.

$$V=\pi\int_{-2}^{1}((2-x)^2-x^4)\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{1}(4-4x+x^2-x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\pi[4x-2x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5]_{-2}^{1}=\frac{72}{5}\pi$$

注 分值为 2, 3, 3.

2.讨论方程 $k-e^{-x}x^2=0$ (其中 k 为参数) 有几个实根，并说明理由.

解 设 $f(x)=e^{-x}x^2$，令 $f'(x)=-e^{-x}x^2+2xe^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}=0$，得 $x=0,2$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$，函数单增；当 $x\in(0,2)$ 时， $f'(x)<0$，函数单减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，函数单增.

故 $f(0)=0$ 为极小值； $f(2)=4e^{-2}$ 为极大值.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty，\lim_{x\to+\infty}f(x)=0，$$

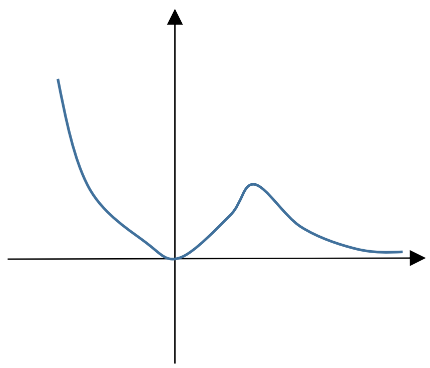
从而当 $k<0$ 时，方程无根；

当 $k=0$ 时，方程有一个根；

当 $0<k<4e^{-2}$ 时，方程有三个根；

当 $k=4e^{-2}$ 时，方程有两个根；

当 $k>4e^{-2}$ 时，方程有一个根.



四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1.证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ 收敛.

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2}{\frac{1}{n}}}=e^{-\frac{1}{2}}<1$$

由比值审敛法知，该数项级数收敛.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $|f''(x)|\geq 1$，又 $f(0)=f(1)=0$，(1) 设 $|f(x_0)|=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$，证明 $x_0\in(0,1)$；(2) 证明 $|f(x_0)|\geq\frac{1}{8}$.

证明 (1)由于 $|f''(x)|\geq 1$，故 $f(x)$ 不可能为常量，所以 $|f(x_0)|$ 一定大于零，而 $f(0)=f(1)=0$，从而 $x_0\in(0,1)$.

(2) 由(1)知，x_0 为极值点，所以 $f'(x_0)=0$. 将函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处展开，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

故$0=f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2$，得$|f(x_0)|=|\frac{f''(\xi_1)}{2}|x_0^2\geq\frac{x_0^2}{2}$ (1)

$0=f(1)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$，得$|f(x_0)|=|\frac{f''(\xi_2)}{2}|(1-x_0)^2\geq\frac{(1-x_0)^2}{2}$ (2) 由 (1)(2)

$|f(x_0)|\geq\frac{x_0^2+(1-x_0)^2}{2}\geq\frac{1}{2}$.

注：第一问 3 分，第二问 4 分.