2018-2019 微积分(1)-1 期末试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\sqrt{3}$； 2. 3； 3. $\dfrac{2}{\pi}$； 4. 收敛； 5. 0 ； 6. e.

二、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+\dfrac{x^2}{2}}{\sin^3 x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ ……………………….4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}.$ …………………………………….………….8 分

2.求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+2x+\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$=\arctan x+\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)+\int\arctan x\,\mathrm{d}\arctan x$ ……………6 分

$=\arctan x+\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$ ……………8 分

3.计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3\sqrt{1+x^6}+\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

解 由奇偶性，原式 $=2\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (令 $x=\sin t$)

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t$ …………………4 分

$=2I_3=\dfrac{4}{3}$ …………………8 分

4.设方程 $y=1+\displaystyle\int_0^{xy}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 可确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ 的值.

解 由题意易知，当 $x=0$ 时， $y=1$. 方程两边同时对 x 求导，$\dfrac{dy}{dx}=e^{x^2y^2}\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)$，

解之得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{x^2y^2}}{1-xe^{x^2y^2}}$. 故 …………………6 分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{ye^{x^2y^2}}{1-xe^{x^2y^2}}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=1.$$ …………………8 分

5.设常数 $a\in(0,2]$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax$, $x\in[0,a]$, 试求 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上的最小值.

解 令 $f'(x)=x^2-a=0$，解之得 $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ （舍去）.

当 $0<a<1$ 时，$\sqrt{a}>a$，则 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单减，故

$$\min_{x\in[0,a]}f(x)=f(a)=\frac{1}{3}a^3-a^2.$$ …………………6 分

当 $1\le a\le 2$ 时，$0<\sqrt{a}\le a$，则 $f(x)$ 在 $[0,\sqrt{a}]$ 上单减，在 $[\sqrt{a},a]$ 上单增，故

$$\min_{x\in[0,a]}f(x)=f(\sqrt{a})=-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$ …………………8 分

三、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.设有两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$，（1）求 L_1 与 L_2 的夹角；（2）求经过 L_1 且平行 L_2 的平面方程；（3）求 L_1 与 L_2 之间的最短距离.

解 （1）直线 L_1 与 L_2 的方向矢量分别为 $\vec{l_1}(1,-1,1)$, $\vec{l_2}(1,1,2)$, 所以

$$\cos\theta=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{\sqrt{2}}{3},\ \theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}.$$ …………………3 分

（2）设平面上任意点 $M(x,y,z)$, 则 $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$, 整理得平面方程为

$$3x+y-2z+3=0.$$ …………………7 分

（3）设 $M_1(0,1,2)$, $M_2(1,2,0)$, L_1 与 L_2 之间的最短距离为

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{l_1},\vec{l_2}]|}{|\vec{l_1}\times\vec{l_2}|}=\frac{8}{\sqrt{14}}.$$ …………………10 分

2.设平面内曲线 $y=\sqrt{2x}$ 和直线 $y=x-4$ 及 x 轴围成的图形为 D，(1) 求 D 的面积；(2) 求 D 绕 x 轴

旋转一周所成立体的体积.

解 (1) 由$\begin{cases} y=\sqrt{2x} \\ y=x-4 \end{cases}$，得交点 $A(8,4)$. 故

$$S(D)=\int_0^4 (4+y-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y=[4y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3]_0^4=\frac{40}{3}.$$ …………………5 分

(2) 直线 $y=x-4$ 与 x 轴的交点为$(4,0)$，故D绕 x 轴旋转一周所成立体的体积

$$V=\pi\int_0^8(\sqrt{2x})^2\mathrm{d}x-\pi\int_4^8(x-4)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{3}.$$ …………………10 分

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\ge 0$，试证明

$$2\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \ge (a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设$g(x)=2\int_a^x t f(t)\mathrm{d}t-(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$g(a)=0$，且

$$g'(x)=2xf(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(a+x)f(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)(a\le\xi\le x)(\text{中值定理})$$

$$=(x-a)(f(x)-f(\xi))$$

又 $f'(x)\ge 0$， $f(x)$ 单增，所以 $f(x)\ge f(\xi)$，因此$g'(x)\ge 0$，从而 $g(x)$ 单增，故 $g(b)\ge 0$，原不等式成立. ……………………..……8 分

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(x)$ 不恒为 0，若 $f(\frac{1}{n})=0(n=1,2,\cdots)$

证明： $(1)\ f(0)=0$； $(2)\ f'_+(0)=0$ (

证明 (1) 由连续性， $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=0.$ ……………………..……3 分

(2) 在区间$[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$上，由罗尔中值定理知，存在$\xi_n\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$，使得 $f'(\xi_n)=0(n=1,2,\cdots,)$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$. 又由导函数的连续性， $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+0}f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0.$ ……..……8 分