

Tarea 1: Preparación Teórica, Laboratorio 1
Análisis Numérico de EDP: Teoría y Laboratorio MA5307

Profesor: Axel Osses A.
 Auxiliares: Emir Chacra
 Grupo 5
 Integrantes:
 -Sebastián Cobaise
 -Arturo Lazcano
 -Benjamin Tardy

1. Parte teórica Laboratorio 1

1.1. Ecuación del Calor en estado estacionario

Considere la ecuación del calor en estado estacionario dada por

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{sobre } \Omega &= [0, 1]^2 \\ u(0, y) &= u(1, y) = 0 & \text{para } y &\in [0, 1] \\ u(x, 0) &= 0 & \text{para } x &\in [0, 1] \\ u(x, 1) &= g(x) & \text{para } x &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

donde $g \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ es tal que $g(0) = g(1) = 0$.

Problema 1. Demuestre, utilizando el Método de Separación de Variables y $f \equiv 0$, que el problema (1) tiene solución.

Respuesta: Usando el Método de Separación de Variables asumimos que u es de la forma $u(x, y) = S(x)T(y)$, por lo que el problema se reescribe como

$$\begin{aligned} S_{xx}(x)T(y) + S(x)T_{yy}(y) &= 0 & \text{sobre } \Omega &= [0, 1]^2 \\ S(0)T(y) &= S(1)T(y) = 0 & \text{para } y &\in [0, 1] \\ S(x)T(0) &= 0 & \text{para } x &\in [0, 1] \\ S(x)T(1) &= g(x) & \text{para } x &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (2)$$

Si $g \equiv 0$, es claro que $u \equiv 0$ es solución del problema, por lo que asumimos $g \not\equiv 0$, entonces $S \not\equiv 0$ y $T(1) \neq 0$, por lo que $T(0) = 0$ y $S(0) = S(1) = 0$, por lo que el problema queda como

$$\begin{aligned} S_{xx}(x)T(y) + S(x)T_{yy}(y) &= 0 & \text{sobre } \Omega &= [0, 1]^2 \\ T(0) &= S(0) = S(1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Notemos que SPG $T(1) = 1$, ahora para encontrar $S(x)$ y $T(y)$, es posible reescribir la ecuación (3) de manera que $\frac{S_{xx}(x)}{S(x)} = \frac{-T_{yy}(y)}{T(y)}$ en (x, y) donde los denominadores no se anulen, como el lado izquierdo no depende de y y el derecho no depende de x , se tendrá que $\frac{S_{xx}(x)}{S(x)} = \frac{-T_{yy}(y)}{T(y)} = \lambda$ y nos colocamos en casos para λ :

Independiente del valor de λ , S debe tener la forma $S(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ y por las condiciones de borde se tiene que $A + B = 0$ y $e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}}$, notemos que necesariamente $\lambda \leq 0$, pues si $\lambda > 0$, $e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \implies \lambda = 0$.

Así que $\lambda = -\nu^2$ con $\nu > 0$, así que $S(x) = A\cos(\nu x) + B\sin(\nu x)$ y $T(y) = Ae^{\nu y} + Be^{-\nu y}$.

Ahora analizamos nuevamente las condiciones de borde, la condición $S(0)=0$, nos da que $S(x) = A\sin(\nu x)$, como $S(1) = 0$, $\sin(\nu) = 0 \implies \nu = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, por último $T(0) = 0$ así que $T(y) = A(e^{\nu y} - e^{-\nu y})$.

Consideramos como solución general a la suma de todas las soluciones que encontramos previamente, teniendo entonces que

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{A}_k \sin(k\pi x) (e^{k\pi y} - e^{-k\pi y}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y)$$

La única condición que queda por cumplir es que $u(x, 1) = g(x)$, por lo que $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi)$. Definiendo $C_k = A_k \sinh(k\pi)$, para que exista solución deben existir C_k tales que $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_k \sin(k\pi x)$, estos coeficientes existen pues esta serie corresponde a la serie de Fourier de la función g , por lo que los C_k existen y

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{C_k}{\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y)$$

Sea $N \in \mathbb{N}$, considere la aproximación del cuadrado unitario dado por la malla de puntos

$$\Omega_h = \{(x_j, y_k) \mid j \in \{0, 1, \dots, N+1\} \wedge k \in \{0, 1, \dots, N+1\}\}$$

donde $x_j = jh$, $y_k = kh$ y $h = \frac{1}{N+1}$.

Para aproximar el operador Laplaciano de la ecuación (1), se define el operador *Laplaciano Discretizado* por 5 puntos como:

$$\Delta_N u_{j,k} = \frac{1}{h^2} (u_{j+1,k} + u_{j-1,k} - 2u_{j,k}) + \frac{1}{h^2} (u_{j,k-1} + u_{j,k+1} - 2u_{j,k}) \quad (5)$$

$$= \frac{-4u_{j,k} + (u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1})}{h^2} \quad (6)$$

donde $u_{j,k}$ aproxima a $u(x_j, y_k)$.

Problema 2. Demuestre que, si $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$, entonces existe una constante C que solo depende de u y Ω tal que para todo $j \in \{1, \dots, N\}$ y todo $k \in \{1, \dots, N\}$

$$|\Delta_N u_{j,k} - \Delta u(x_j, y_k)| \leq Ch^2$$

Respuesta: Expresando 4 polinomios de Taylor de $u \in \mathcal{C}^4$ tenemos que

$$u_{j+1,k} = u_{j,k} + \frac{\partial u_{j,k}}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u_{j,k}}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u_{j,k}}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u_{j-1,k} = u_{j,k} - \frac{\partial u_{j,k}}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u_{j,k}}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u_{j,k}}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u_{j,k+1} = u_{j,k} + \frac{\partial u_{j,k}}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u_{j,k}}{\partial y^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u_{j,k}}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u_{j,k-1} = u_{j,k} - \frac{\partial u_{j,k}}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u_{j,k}}{\partial y^2} \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u_{j,k}}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + \mathcal{O}(h^5)$$

Al sumar las 4 ecuaciones se obtiene que

$$-4u_{j,k} + (u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1}) = \Delta u_{j,k} h^2 + \left(\frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial y^4} \right) \frac{h^4}{12} + \mathcal{O}(h^5)$$

Por lo que

$$|\Delta_N u_{j,k} - \Delta u(x_j, y_k)| = \left(\frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial y^4} \right) \frac{h^2}{12} + \mathcal{O}(h^3)$$

Como $u \in \mathcal{C}^4$, el término $\left(\frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_{j,k}}{\partial y^4} \right)$ se puede acotar por una constante C_1 correspondiente a su norma infinito en Ω , además el error $\mathcal{O}(h^3)$ se puede acotar tal que $\mathcal{O}(h^3) \leq C_2 h^2$, concluyendo así que $|\Delta_N u_{j,k} - \Delta u(x_j, y_k)| \leq \left(\frac{C_1}{12} + C_2 \right) h^2$

Problema 3. Dadas las condiciones de borde de tipo Dirichlet, las incógnitas del problema discreto son solo los N^2 puntos interiores. Si se enumeran dichos puntos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, entonces es posible listar sin ambigüedad los puntos antes mencionados mediante la regla

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h)_n &= u_h(x_j, y_k) \\ n &= (k-1)N + j \end{aligned}$$

Asimismo, se define \mathbf{u} como $(\mathbf{u})_n = u(x_j, y_k)$.

Reduzca el problema discreto a un sistema lineal de la forma

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h$$

donde $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ es una matriz definida por bloques y

$$\mathbf{A}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_4 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{L}_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{L}_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2} \quad \mathbf{L}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$\mathbf{b}_h = \mathbf{f}_h + \frac{1}{h^2} \mathbf{g}_h$$

donde $(\mathbf{f}_h)_n = f(x_j, y_k)$ y

$$\mathbf{g}_h(x_j, y_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq N+1 \\ g(x_j) & \text{si } k = N+1 \end{cases}$$

Respuesta: Resolver el problema discreto corresponde a resolver el sistema de ecuaciones del tipo

$$\frac{4u_{j,k} - (u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1})}{h^2} = f_{j,k} \text{ para } j, k = 1, \dots, N$$

Ahora, analizamos 3 casos, el primero es el de la primera fila (desde abajo hacia arriba, los de la forma $u_{1,k}$), donde se tiene que $u_{0,k} = u_{1,0} = u_{1,N+1} = 0$, por lo que las N ecuaciones correspondientes a la primera fila son

$$\frac{4u_{1,k} - (u_{2,k} + u_{1,k-1} + u_{1,k+1})}{h^2} = f_{1,k} \text{ para } k = 2, \dots, N-1$$

$$\frac{4u_{1,1} - (u_{2,1} + u_{1,2})}{h^2} = f_{1,1}$$

$$\frac{4u_{1,N} - (u_{2,N} + u_{1,N-1})}{h^2} = f_{1,N}$$

Que se representan en el sistema $\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_4 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \end{pmatrix}$, donde u_1 es el vector columna de correspondiente a los $u_{1,k}$, análogo para u_2 y f_1

Los otros dos casos son análogos, el segundo es el de las filas $2, \dots, N-1$, donde ahora $u_{j-1,k} \neq 0$, sino que corresponde a la fila de abajo y por lo tanto hay que agregarlo como variable, resultando en el sistema

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -I & L_4 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \end{pmatrix} \text{ para } j = 2, \dots, N-1$$

En el caso de la fila N se debe considerar $u_{N+1,k} = g_k$, por lo que

$$\frac{4u_{N,k} - (u_{N-1,k} + u_{N,k-1} + u_{N,k+1})}{h^2} = f_{N,k} + \frac{g_k}{h^2} \text{ para } k = 2, \dots, N-1$$

$$\frac{4u_{N,1} - (u_{N-1,1} + u_{N,2})}{h^2} = f_{N,1} + \frac{g_1}{h^2}$$

$$\frac{4u_{N,N} - (u_{N-1,N} + u_{N,N-1})}{h^2} = f_{N,N} + \frac{g_N}{h^2}$$

Lo que se expresa en el sistema

$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -I & L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N + \frac{1}{h^2} g \end{pmatrix}$, con g el vector columna de los g_k , concluyendo así la conversión del problema discreto a la forma deseada.

1.2. Dominio Perforado

En lo que sigue trabajaremos con el dominio de la Figura 2, donde la discretización queda definida por la grilla ilustrada.

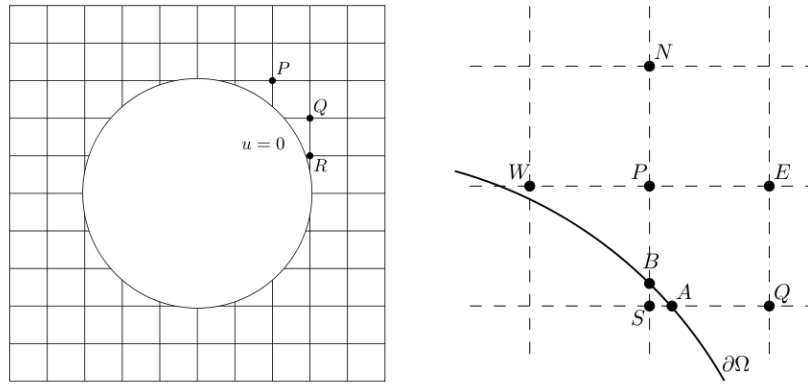


FIGURA 1.1: Dominio dado por $\Omega = [0, 1]^2 \setminus B((0, 5, 0, 5), 0, 3)$.

Queda claro que, en este caso, uno de los problemas fundamentales es definir los valores de $\Delta_N u$ en los puntos que quedan cercanos a la perforación circular. Para ejemplificar lo anterior consideremos el punto P , el cual tiene tres vecinos dentro del dominio: N , W y E . Lamentablemente S queda fuera de Ω y no es posible utilizar la discretización en 5 puntos pues, aunque u_{xx} queda correctamente definido, u_{yy} utiliza S y por ende no se puede calcular.

Para resolver el problema planteado se propone el siguiente esquema : encontrar una combinación lineal de $u(x_N, y_N)$, $u(x_P, y_P)$ y $u(x_B, y_B)$ que aproxime correctamente a $u_{yy}(x_P, y_P)$ con un error de orden $\mathcal{O}(h)$. Esto es, encontrar α, β, γ tales que

$$\alpha u(x_N, y_N) + \beta u(x_P, y_P) + \gamma u(x_B, y_B) = u_{yy}(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h) \quad (7)$$

Problema 4. Demuestre que encontrar las incógnitas de la ecuación (7) es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha h - \gamma |y_B - y_P| = 0 \\ \alpha \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{|y_B - y_P|^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Respuesta: Realizando expansiones de Taylor en la ecuación (7), específicamente a los términos $u(x_N, y_N) = u(x_P, y_P + h)$ y $u(x_P, y_P - \bar{h})$ resulta,

$$\begin{aligned} & \alpha[u(x_P, y_P) + hu'(x_P, y_P) + \frac{h^2}{2}u''(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h^3)] + \beta u(x_P, y_P) \\ & + \gamma[u(x_P, y_P) - \bar{h}u'(x_P, y_P) + \frac{\bar{h}^2}{2}u''(x_P, y_P) - \mathcal{O}(\bar{h}^3)] \\ & = u(x_P, y_P)(\alpha + \beta + \gamma) + u'(x_P, y_P)(\alpha h - \gamma \bar{h}) + u''(x_P, y_P)(\alpha \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{\bar{h}^2}{2}) + \alpha \mathcal{O}(h^3) - \gamma \mathcal{O}(\bar{h}^3) \end{aligned}$$

Donde \bar{h} es la distancia del punto P al punto B ($0 < \bar{h} < h$). Luego, como se quiere aproximar $u_{yy}(x_P, y_P)$, entonces los términos de $u(x_P, y_P)$ y de su derivada debiesen desaparecer de la aproximación. Para ello, imponemos 2 ecuaciones para no involucrar u ni u' , mientras que u'' es el término relevante para esta aproximación, por ello, se impone una ecuación sobre los parámetros (o incógnitas) α y γ para que este factor no desaparezca. Esto se traduce en la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha h - \gamma \bar{h} = 0 \\ \alpha \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{\bar{h}^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para analizar la parte del error en esta aproximación, se observa que, usando la segunda y tercera ecuación del sistema encontrado, se obtiene

$$\alpha = \frac{\gamma \bar{h}}{h} \quad \text{y por otro lado,}$$

$$\alpha = \frac{2}{h^2} - \gamma \frac{\bar{h}^2}{h^2}$$

Puediendo así despejar γ , esto resulta en

$$\gamma = \frac{2}{h\bar{h} + \bar{h}^2}$$

Con esto, podemos trabajar la expresión del error anteriormente obtenida quedando:

$$\alpha \mathcal{O}(h^3) - \gamma \mathcal{O}(\bar{h}^3) = \frac{2}{h^2} \mathcal{O}(h^3) - \frac{2}{h\bar{h} - \bar{h}^2} \mathcal{O}(h^3) - \frac{2}{h\bar{h} - \bar{h}^2} \mathcal{O}(\bar{h}^3)$$

Con esto y sabiendo que $\bar{h} < h$ podemos acotar lo anterior de forma que se obtenga

$$\leq 2\mathcal{O}(h) - \mathcal{O}(h) - \mathcal{O}(h)$$

Suponiendo que g_1, g_2, g_3 son las 3 funciones que representan al error y que son de clase $2\mathcal{O}(h), \mathcal{O}(h), \mathcal{O}(h)$ respectivamente, podemos ver que

$$g_1 - g_2 - g_3 \in \mathcal{O}(\max\{h, h, h\}) = \mathcal{O}(h)$$

Donde también podemos ignorar el 2 multiplicando gracias a las propiedades de \mathcal{O} , demostrando así la equivalencia del problema con el sistema de ecuaciones planteado.

Problema 5. Al igual que antes, puede notar que habrá puntos de la grilla en que no es posible calcular u_{xx} utilizando la discretización a 5 puntos ya que alguno quedará fuera del dominio.

Basándose en el mismo razonamiento anterior, plantee una forma de aproximar u_{xx} con un error de orden $\mathcal{O}(h)$ y encuentre el sistema que permita calcular las incógnitas.

Respuesta: Usando el mismo planteamiento del problema anterior, y asumiendo que falta el punto W de la figura (1.1), se quiere encontrar valores de λ, η, μ tales que:

$$\lambda u(x_E, y_E) + \eta u(x_P, y_P) + \mu u(x_{B'}, y_{B'}) = u_{xx}(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h) \quad (8)$$

Donde h sigue siendo el valor de un salto espacial en la grilla, mientras que B' cumple el mismo rol que B del problema anterior, es decir, $h = \overline{WB'} + \overline{B'P}$.

Por lo demostrado antes, es fácil ver usando expansión de Taylor, que la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned} & \lambda[u(x_P, y_P) + hu'(x_P, y_P) + \frac{h^2}{2}u''(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h^3)] + \eta u(x_P, y_P) \\ & + \mu[u(x_P, y_P) - \bar{h}u'(x_P, y_P) + \frac{\bar{h}^2}{2}u''(x_P, y_P) - \mathcal{O}(\bar{h}^3)] \\ & = u(x_P, y_P)(\lambda + \eta + \mu) + u'(x_P, y_P)(\lambda h - \mu\bar{h}) + u''(x_P, y_P)(\lambda \frac{h^2}{2} + \mu \frac{\bar{h}^2}{2}) \end{aligned}$$

Dando lugar a un sistema de ecuaciones análogo al anterior:

$$\begin{cases} \lambda + \eta + \mu = 0 \\ \lambda h - \mu\bar{h} = 0 \\ \lambda \frac{h^2}{2} + \mu \frac{\bar{h}^2}{2} = 1 \end{cases}$$

De manera completamente análoga, en caso que el punto E estuviera fuera de Ω , la ecuación a resolver sería

$$\lambda_2 u(x_W, y_W) + \eta_2 u(x_P, y_P) + \mu_2 u(x_{B'_2}, y_{B'_2}) = u_{xx}(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h) \quad (9)$$

Donde nuevamente, las incógnitas son λ_2, η_2 y μ_2 , mientras que B'_2 sería el punto ubicado en el borde de Ω . Así,

$$\begin{aligned} & \lambda_2[u(x_P, y_P) + hu'(x_P, y_P) + \frac{h^2}{2}u''(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h^3)] + \eta_2 u(x_P, y_P) \\ & + \mu_2[u(x_P, y_P) - \bar{h}u'(x_P, y_P) + \frac{\bar{h}^2}{2}u''(x_P, y_P) - \mathcal{O}(\bar{h}^3)] \\ & = u(x_P, y_P)(\lambda_2 + \eta_2 + \mu_2) + u'(x_P, y_P)(\lambda_2 h - \mu_2 \bar{h}) + u''(x_P, y_P)(\lambda_2 \frac{h^2}{2} + \mu_2 \frac{\bar{h}^2}{2}) \end{aligned}$$

Dando lugar al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda_2 + \eta_2 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 h - \mu_2 \bar{h} = 0 \\ \lambda_2 \frac{h^2}{2} + \mu_2 \frac{\bar{h}^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para expresar los errores y obtener el $\mathcal{O}(h)$ que se pide, el procedimiento es análogo al del problema 4 pero cambiando los parámetros de α, β, γ por los correspondientes dependiendo del caso. Al ser completamente idénticos y debido a su extensión no se agregarán en esta sección del problema (revisar desarrollo problema 4).

2. Aplicaciones del Laplaciano en grafos e imágenes

Problema 6. Investigue y encuentre bibliografía asociada a los tópicos siguientes:

- Aplicaciones del Laplaciano o métodos de Laplaciano en procesamiento de imágenes.

El operador Laplaciano permite conocer la "homogeneidad" de una función a lo largo de su dominio. Si el Laplaciano toma valores pequeños en un punto, quiere decir que el valor de la función en ese punto es similar a sus vecinos. Por otro lado, un valor alto del laplaciano significa que el punto en cuestión toma valores distintos y "más lejanos" que sus vecinos. En otras palabras, el Laplaciano corresponde al nivel de "diferenciación" que poseen los

puntos de una función en relación a los puntos más cercanos. Ahora bien, aplicando este operador en el contexto del procesamiento de imágenes es posible conocer el nivel de diferenciación existente entre los píxeles que conforman la imagen. Esto nos permite, por ejemplo, conocer los bordes presentes en la imagen. En este contexto, se le llama "borde."^a aquellas regiones de la imagen que presentan un mayor nivel de diferenciación con sus píxeles vecinos (es decir, un valor del laplaciano más alto que el promedio de sus vecinos). Resaltar los bordes de una imagen puede tener varias utilidades. Por ejemplo, es posible aumentar el detalle de una fotografía al identificar los bordes y resaltarlos (hacer que los puntos vecinos tengan un valor del laplaciano similar al de los puntos considerados en el borde) para destacar mejor estas perturbaciones en la imagen. Lo anterior se utiliza tanto en astronomía (para resaltar los cráteres o estructuras similares de otros cuerpos celestes) como en medicina (en las radiografías se hace esto para resaltar las estructuras óseas o en otros tipos de exámenes para resaltar los detalles de las partes del cuerpo que se quieren estudiar).

Al resaltar los bordes de una imagen, es posible también conocer las regiones de la imagen que presentan un color más constante (o un valor del laplaciano más uniforme en estas regiones) y de esta forma es también posible aumentar el nivel de nitidez de las imágenes. Lo anterior se hace aplicando haciendo un valor del laplaciano más uniforme, lo que se traduce en una imagen que gana claridad.^{en} estas áreas.

En ambos casos se aplica el filtro laplaciano de la misma manera. Escrito en forma de funciones, el uso del filtro tiene la siguiente forma:

$$g(x,y) = f(x,y) + c\Delta f(x,y)$$

En donde:

$g(x,y)$: corresponde a la imagen mejorada

$f(x,y)$: corresponde a la imagen original

c : corresponde al término central de la matriz que representa al filtro laplaciano. Para aplicar este filtro a una imagen se debe de digitalizar la imagen como un conjunto de píxeles de distinta intensidad (esta intensidad corresponde al color del pixel, cada color tiene un valor distinto) y posteriormente se crea la "máscara"(el filtro laplaciano) que recorrerá.^a la imagen (se convoluciona con la matriz correspondiente a la imagen digitalizada como conjunto de píxeles) con esta y a medida que esta avance irá modificando los valores de los píxeles según los valores que se entreguen a la matriz laplaciana (máscara).

La matriz correspondiente al filtro laplaciano debe de cumplir 2 características: 1.El coeficiente central debe tomar un valor distinto a sus vecinos. 2.La suma de los coeficientes de la matriz debe ser nula. Con estas 2 características es posible definir una forma general para el filtro de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{1+\alpha}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix} \quad (10)$$

En donde un valor de $\alpha \neq -1$ (Notar que la matriz no está definida cuando $\alpha = -1$) le da al coeficiente central un valor positivo, lo que aumenta el nivel de los bordes en la imagen final. Cuando el término central toma valores negativos se aprecia una diferenciación en los bordes acompañada de un "aclaramiento" de la imagen, es decir que la imagen tiende a tomar un color gris que resalta los bordes con un color blanco. Por otro lado, un valor positivo mantiene los colores originales de la foto (no agrega claridad) e igualmente destaca los bordes. Que tan recalcado.^{están} los bordes depende exclusivamente de la magnitud del término central, apreciándose una relación directamente proporcional.

Bibliografía: 1.The geometrical significance of the Laplacian Daniel F. Styer Department of Physics and Astronomy, Oberlin College, Oberlin, Ohio 44074 (Dated: 20 July 2015; accepted 22 October 2015)

2. Procesamiento Digital de Imágenes; Transformaciones de Intensidad y Filtrado Espacial. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), Universidad Nacional de Rosario (UNR)

b. Aplicaciones del Laplaciano o métodos de Laplaciano en grafos.

El Laplaciano se define en teoría espectral de grafos como:

$$G = D - A$$

En donde:

D, corresponde a la matriz diagonal. Esta matriz solo tiene términos en la diagonal y para construirla se debe anotar en cada espacio ii la cantidad de vértices a los que está conectado el grafo. A, corresponde a la matriz de adyacencia de un grafo. Para construirla se escribe un 1 en el espacio ij si es que existe una arista entre los vértices i y j . En caso de que no exista una arista entre el par de vértices se anota un 0. De esta forma, el laplaciano queda expresado como una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ (n : número de vértices). A simple vista no es evidente la relación entre la matriz G y el operador δ .

Para ver esta relación más claramente se procederá a escribir la ecuación de calor de forma matricial. Definimos el siguiente problema. Se tiene un sistema de vértices y se le asigna a cada vértice un valor a_{ij} que corresponde a la cantidad de calor que posee dicho vértice. A partir de esto se procede a calcular la cantidad de calor transferida de un vértice a otro. De esta forma, es posible anotar el problema de la siguiente forma:

$$\frac{d\phi}{dt} = -k \sum_{j=1}^n A_{ij}(\phi_i - \phi_j)$$

Desarrollando esta expresión¹ se llega al siguiente resultado:

$$\frac{d\phi}{dt} = -k(D - A) = -kG$$

Donde G corresponde a la matriz recién definida como "matriz laplaciana". Este desarrollo permite dar más sentido al nombre, pues se ve que la matriz cumple el mismo rol que δ en la ecuación de calor.

La matriz laplaciana es también conocida como matriz de admitancias de "Kirchoff". Esto último tiene sentido, pues esta matriz es usada en circuitos eléctricos para calcular la facilidad que tienen los distintos puntos de un circuito de pasar corriente (admitancia). Para esto se utiliza la matriz de laplaciana para multiplicarla por el vector que contiene las distintas intensidades del sistema y así obtener un sistema de ecuaciones que puede ser resuelto utilizando las leyes de Kirchoff. Notar que el problema anterior es similar al problema de conocer los flujos que recorren un grafo. Esta similitud nos permite utilizar la matriz laplaciana para problemas de corte mínimo.

Muchas propiedades del grafo que representa la matriz vienen dadas por el segundo valor propio no nulo de la matriz laplaciana². Entre estas, vale la pena mencionar que es posible conocer el diámetro y la conexidad del grafo [El Grafo es conexo si y solo si el segundo valor propio no nulo, en orden de magnitud (al que llamaremos λ_2), es distinto de cero (esto último equivale a decir que se tiene a lo menos 2 valores propios no nulos distintos)]. A medida que λ_2 se acerca a 0, la modularidad del grafo aumenta (es decir, disminuye el número de conexiones/aristas entre grafos). Las propiedades anteriores se cumplen en grafos de peso no negativo.

Bibliografía:

¹Yavari, R. ; Cole, KD; Rao, PK (2020). "Transferencia de calor computacional con teoría de gráfico espectral: verificación cuantitativa". J. Internacional de Ciencias Térmicas . 153 : 106383. doi : 10.1016 / j.ijthermalsci.2020.106383 .

²THE LAPLACIAN SPECTRUM OF GRAPHS, Graph Theory, Combinatorics, and Applications", Vol. 2, Ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk, Wiley, 1991, pp. 871898.