MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2022
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Javier Madariaga R.

Laboratorio #1

Uso de `Python` - `BOCOP`

Fecha de entrega: Viernes 02 de Septiembre

Descripción: El objetivo de esta primera sesión es probar los sofware `Python` y `BOCOP`. Puede realizar consultas vía U-cursos.

Parte A. Uso de `Python`

Ejercicio 1 (Ecuaciones diferenciales ordinarias) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - xy, \\ \dot{y} = -y + \cos(y), \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_0 = 1$ e $y_0 = 5$.

a) Encuentre la solución general del sistema sin considerar condiciones iniciales en `Python` (use `dsolve` de `sympy`).

b) Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 5]$ en `Python` mediante `solve_ivp` de `scipy`. Grafique las soluciones.

c) Utilice el applet `pyplane` (disponible en https://github.com/TUD-RST/pyplane) para dibujar los diagramas de fase del sistema para distintas condiciones iniciales. En particular muestre el mismo punto inicial utilizado antes.

Ejercicio 2 Considere el sistema de control en $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales $x_0 = (0, 0)'$. Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ en `Python` mediante `solve_ivp` para los siguientes controles de lazo abierto (*open loop*):

$$u(t) = 0{,}2; \quad u(t) = e^t; \quad u(t) = e^{-t}\cos(t).$$

Grafique las soluciones.

Ejercicio 3 (Optimización lineal) Resuelva con `Python` el siguiente problema de programación lineal (PL). Utilice para ello `linprog` de `scipy` y explore los distintos métodos disponibles.

$$\min f(x, y, z) = -8x - y - 3z$$

s. a.

$$\begin{cases} -x + y + z \leq 13, \\ 3x + 5y + 5z \leq 10, \\ 9x - 5y \leq 20, \\ x, y, z \geq 0\ . \end{cases}$$

Ejercicio 4 (Optimización no lineal) Un paquete postal (en forma de paralelepípedo rectangular) debe satisfacer que su altura más el perímetro de su base no puede exceder los 53 cm. Se pretende diseñar un paquete tal que cumpla con esta restricción y que además posea un volumen máximo. Escriba un modelo matemático para este problema y resuélvalo utilizando el comando `minimize` de `scipy`.

Ejercicio 5 Encuentre los puntos de intersección (x, y) de las siguientes cónicas:

- $2x^2 + y = 1$,
- $(x - \frac{1}{2})^2 - 2(y - \frac{1}{4})^2 = 1$.

Para esto, utilice el comando `fsolve` de `scipy` y grafique.

Parte B. Control Óptimo : Uso de `BOCOP`

`BOCOP` es un programa *open-source* diseñado para resolver problemas de control óptimo tipo Mayer a tiempo final fijo o libre y con restricciones de control y estado. Para instalar el solver de control óptimo `BOCOP` ver el archivo "bocop.pdf". Encontrará un manual más detallado en www.bocop.org. `BOCOP` puede resolver problemas de la forma siguiente

$$(\mathrm{M}) \begin{cases} \min\limits_{u(\cdot)} \; J(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) & (Criterio) \\ \quad \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Dinamica) \\ \quad \Phi_l \leqslant \Phi(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) \leqslant \Phi_u & (Condicion\ de\ borde) \\ \quad y_l \leqslant y(t) \leqslant y_u \quad u_l \leqslant u(t) \leqslant u_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Cotas) \\ \quad g_l \leqslant g(y(t), u(t)) \leqslant g_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (Restricciones\ mixtas) \end{cases}$$

donde $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ el control. En particular, note que la función objetivo solo depende del tiempo inicial y final y de los estados iniciales y finales.

Ejercicio 6 Consideremos en este ejercicio el problema de Jackson, que modela las reacciones químicas de tres componentes A, B, C,

$$\mathrm{A} \xrightleftharpoons{1} \mathrm{B} \xrightarrow{2} \mathrm{C}$$

Las variables de estado son a, b, c, representando las fracciones molares de A, B, C, y k_1, k_2, k_3 son las constantes de velocidad de las reacciones químicas. Aquí el control $u(t) \in [0, 1]$ es la fracción de catalizador que establece el equilibrio entre las reacciones 1 y 2. El objetivo es el de maximizar la producción del componente C.

El problema de control óptimo es el siguiente:

$$(G) \begin{cases} \max\limits_{u(\cdot)} \quad c(t_f) \\ \qquad \dot{a}(t) = -u(t)(k_1 a(t) - k_2 b(t)), \quad a(0) = 1, \\ \qquad \dot{b}(t) = u(t)(k_1 a(t) - k_2 b(t)) - (1 - u(t))k_3 b(t), \quad b(0) = 0 \\ \qquad \dot{c}(t) = (1 - u(t))k_3 b(t), \quad c(0) = 1 \\ \qquad u(t) \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, t_f] \end{cases}$$

Este problema ya está programado y es uno de los ejemplos que viene con `BOCOP`, el cual se puede encontrar en la carpeta "examples/jackson_basic".

1. Escriba este problema en la forma (M) e identifique las funciones J, f, Φ y g y las cotas Φ_l, Φ_u, g_l, g_u, y_l, y_u, u_l y u_u.

2. Haga las modificaciones necesarias para resolver el problema de obtener fracciones molares iguales a: $a(t_f)$ =0.7, 0.9, con $t_f \in \{5, 7, 10\}$. Grafique la solución y el control óptimo.

3. Ahora estamos interesados en maximizar la producción de C pero con cantidades molares, al final del tiempo para A y B, por encima de 0,8 y 0,05 respectivamente, para cada uno de los t_f del item anterior. Haga las modificaciones necesarias para resolver este nuevo problema. Grafique la solución y el control óptimo.

Ejercicio 7 Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} u(t)^2\, dt; \qquad y^{(3)}(t) = u(t); \qquad y(t) \geq 0,$$

con $t_f = 10$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -2$, $\ddot{y}(0) = 0$, $y(t_f) = 0$, $\dot{y}(t_f) = 0$ y $\ddot{y}(t_f) = 0$. Note que el criterio depende del control entonces se debe modificar el problema para resolverlo con `BOCOP`.

Se recomienda revisar una variante de este problema que ya está programado y es uno de los ejemplos que viene con BOCOP, el cual se puede encontrar en la carpeta “examples/robbins”.

1. Primeramente indentifique el sistema que modela este problema y luego introduzca una nueva variable de estado z tal que $z(t_f) = \int_0^{t_f} u(t)^2\, dt$. ¿Cuál es la dinámica y la condición inicial de z?

2. Usando esta variable adicional, escribe un problema de Mayer (M) que es equivalente al problema (B). Identifique las funciones J, f, Φ y g.

3. Resuelva este problema considerando $y(t) \leq 1{,}5$ en cada instante de tiempo y $\ddot{y}(t_f) = 3, 5, 7$. Grafique los resultados encontrados.

4. Considere ahora que se quiere incluir en la función objetivo el termino $\alpha \cdot y$ con $\alpha = 3$. Resuelva el problema para los mismos valores del item anterior.