

Tarea 1: Preparación Teórica, Laboratorio 2
Análisis Numérico de EDP: Teoría y Laboratorio MA5307

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Emir Chacra
Integrantes: Sebastián Cobaise
Arturo Lazcano
Benjamín Tardy D.

1. Ecuación de Advección

Sea un intervalo acotado $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$. Considere el problema de advección de primer orden dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

Problema 1. Demuestre que $u(t, x) = u_0(x - \alpha t)$ es una solución de la ecuación (1). ¿Qué representa α en la ecuación?

Respuesta: Probaremos que la función $u = u_0(x - \alpha t)$ cumple la ecuación (1) junto con su condición inicial. Por un lado,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} u_0(x - \alpha t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} u_0(x - \alpha t)$$

Donde por regla de la cadena podemos desarrollar la derivada, resultando así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x - \alpha t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} u_0(x - \alpha t) &= (u_0)_t(x - \alpha t) \frac{\partial}{\partial t} (x - \alpha t) + \alpha (u_0)_x(x - \alpha t) \frac{\partial}{\partial x} (x - \alpha t) \\ &= u_{0t}(x - \alpha t)(-\alpha) + \alpha u_{0x}(x - \alpha t) \end{aligned}$$

En esta última expresión, se puede notar que la función u_0 es una función de una sola variable (tal como se define en el enunciado). Es por esto que se puede concluir que ambas derivadas, u_{0x} y u_{0t} son la misma función. Así, renombrando este término como $u_{0t} = u_{0x} = u_{0y}$ para clarificar el trabajo en una sola variable resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x - \alpha t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} u_0(x - \alpha t) &= u_{0t}(x - \alpha t)(-\alpha) + \alpha u_{0x}(x - \alpha t) \\ &= -\alpha u_{0y}(x - \alpha t) + \alpha u_{0y}(x - \alpha t) & (2) \\ &= 0 & (3) \end{aligned}$$

Por otro lado, la condición inicial es evaluar $u(t, x)$ en $t = 0$, por lo que haciendo esto en nuestra función resulta:

$$u_0(x - \alpha t) \stackrel{t=0}{=} u_0(x) \quad \text{para } x \in \Omega$$

Cumpliendo así todas las condiciones para ser solución de la ecuación (1). Con respecto al parámetro α , este se puede interpretar como la velocidad de lo que se está modelando en esta ecuación de advección (transporte), es decir, en un tiempo t , la función ha avanzado hasta el punto αt .

Esto se puede ver mejor en las siguientes imágenes:

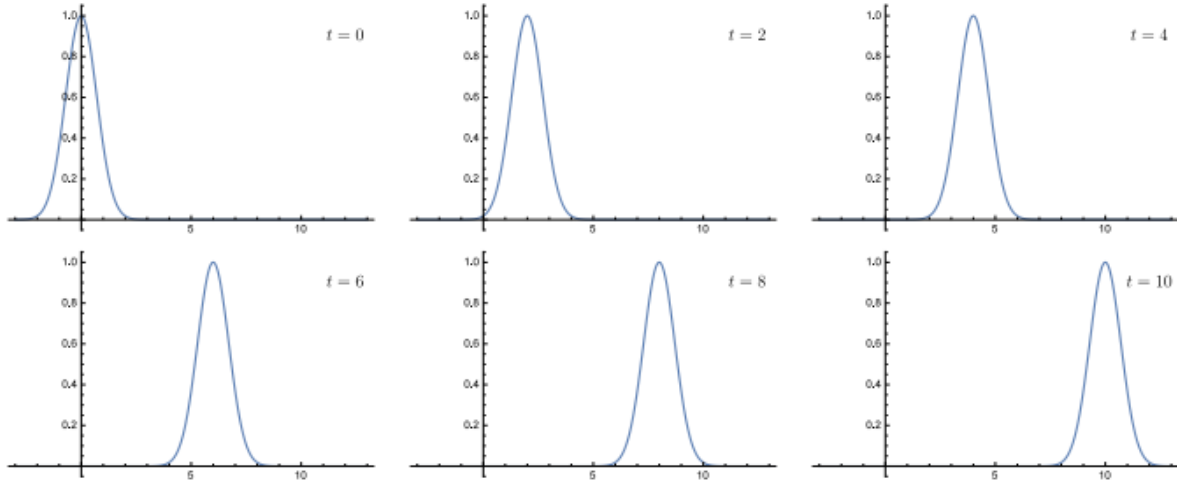


FIGURA 1.1: Evolución de la ecuación de transporte en el tiempo

Donde se puede apreciar que en cada unidad de tiempo, la onda avanza c unidades en el eje x . En el caso de la figura, $c = 1$.

Existen varios esquemas numéricos basados en diferencias finitas para analizar esta ecuación, pero tienen diversas particularidades. Elegir uno de ellos por sobre otro es una tarea difícil.

Sean $\Delta t > 0$ y $N \in \mathbb{N}$. Definiendo $t_n = n\Delta t$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Delta x = \frac{(b-a)}{N+1}$ y $x_j = a + j\Delta x$, para $j \in \{0, 1, \dots, N+1\}$, se denota u_j^n a $u(t_n, x_j)$.

Los esquemas de tipo Lax son algunos de los más usados para resolver este tipo de problemas, siendo los más simples los esquemas de Lax-Friedrichs y de Lax-Wendroff, dados por

a. Lax-Friedrichs

$$\frac{2u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{2\Delta t} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

b. Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \alpha^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$

Problema 2. Demuestre que el esquema de Lax-Wendroff es consistente y estable en la norma discreta L^2 si $0 \leq \lambda \leq 1$, donde $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Determine la ecuación equivalente a este esquema.

Respuesta: Primero estudiamos la consistencia del modelo, sea u una función que resuelve la EDP (1), luego escribiendo su expansión de Taylor en tiempo (Δt) resulta:

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + (\Delta t)u_t(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2}u_{tt}(t_n, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Luego, reemplazando las derivadas temporales por derivadas espaciales dadas por la ecuación de advección (1) queda:

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) - (\alpha \Delta t)u_x(t_n, x_j) + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2}u_{xx}(t_n, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Ahora, reemplazando las derivadas espaciales por una aproximación centrada, la expresión resulta:

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, x_j) = & u(t_n, x_j) - (\alpha \Delta t) \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1}))}{2h} \\ & + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2} \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3 + \Delta t(\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Reordenando la expresión anterior y dividiendo por Δt :

$$\left| \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + \alpha \frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2h} - \left(\frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \right) \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1}))}{h^2} \right|$$

$$= \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Donde el error de orden $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ viene arrastrado de la expansión de Taylor (recordando que se dividió por Δt) y el otro error asociado es por la aproximación de la derivada (centrada) de u_x . Notar que el tercer término también posee un error, sin embargo, este es ignorado ya que los otros términos poseen errores más grandes.

Así, si hacemos $(\Delta t, h) \rightarrow (0, 0)$ se puede ver como el error tiende a 0 uniformemente, concluyendo así la consistencia del esquema con un orden de $(2, 2)$.

Ahora estudiamos la estabilidad: Teniendo el esquema de Lax-Wendroff y despejando el término u_j^{n+1} queda:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \alpha^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} u_{j+1}^n + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} u_{j-1}^n + \frac{\lambda^2}{2} u_{j+1}^n - \lambda^2 u_j^n + \frac{\lambda^2}{2} u_{j-1}^n$$

Usando la transformada de Fourier:

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k) \left(1 - \lambda^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) e^{2\pi i k h} + \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) e^{-2\pi i k h} \right)$$

$$\Rightarrow a_k = 1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos(2\pi k h) - \lambda i \sin(2\pi k h)$$

$$\Rightarrow |a_k|^2 = (1 - \lambda^2)^2 + 2(1 - \lambda^2)\lambda^2 \cos(2\pi k h) + \lambda^4 \cos^2(2\pi k h) + \lambda^2 \sin^2(2\pi k h)$$

$$= 1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 2(1 - \lambda^2)\lambda^2 \cos(2\pi k h) + \lambda^4 \cos^2(2\pi k h) + \lambda^2 - \lambda^2 \cos^2(2\pi k h) \leq 1$$

Donde en la ecuación anterior se impone la condición de ser ≤ 1 para el cumplimiento de la estabilidad. Así, se puede seguir desarrollando la expresión resultando:

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - \lambda^2 + 2(1 - \lambda^2)\lambda^2 \cos(2\pi k h) + (\lambda^4 - \lambda^2) \cos^2(2\pi k h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(2\pi k h) + \lambda^2 \cos^2(2\pi k h)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)\lambda^2(1 - \cos(2\pi k h))^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \leq 0 \quad \text{ya que } \lambda^2 \text{ y } (1 - \cos(2\pi k h))^2 \text{ son términos positivos}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$$

Notar que en el desarrollo anterior se trabajó con $k \in \mathbb{Z}$, esto pues se está trabajando con la serie de Fourier de la función ya que por el teorema de Plancherel, basta ver que cada a_k con k entero sea menor o igual a 1.

2. Ecuación de Burgers aplicado al tráfico vehicular

Uno de los problemas más complicados en la ingeniería de transporte es modelar el funcionamiento de los semáforos. Un modelo continuo para el tráfico vehicular en una única pista, donde no se permite adelantar un automóvil, está dado por la ecuación de Burgers. Asuma que la velocidad máxima está dada por V y la densidad de vehículos por unidad de longitud está dada por $D > 0$. Si la velocidad v y la densidad ρ se relacionan mediante la ley

$$v = V \left(1 - \frac{\rho}{D} \right) \quad \text{para } \rho \in [0, D]$$

y se define $u = 1 - \frac{2\rho}{D}$, se puede probar que u cumple la ecuación de Burgers, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (4)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \Omega$$

donde $-1 \leq u \leq 1$. El valor $u = -1$ significa que los vehículos no se mueven, pues se llegó a la densidad máxima, mientras que el valor $u = 1$ representa que un vehículo que pase por la vía puede ir a la velocidad máxima permitida, puesto que la vía está totalmente vacía.

A diferencia de la ecuación de advección, no es posible obtener una forma explícita para la solución de la ecuación de Burgers, aunque puede probarse que

$$u(t, x) = u_0(x - u(t, x)t)$$

es una expresión implícita para la solución. Además, esta ecuación es no lineal, por lo que aplicar los mismos esquemas antes estudiados requiere un estudio más profundo.

Otra forma de escribir esta ecuación es

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} u^2 \right] &= 0 & \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{para } x \in \Omega \end{aligned}$$

la cual se conoce como forma conservativa de la ecuación de Burgers. Esta forma es sumamente útil para presentar los esquemas de Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff aplicados para esta ecuación. En general, dichos esquemas se presentan para ecuaciones de la forma $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] = 0$.

Definiendo $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ y $f_j^n = f(u_j^n)$, se presentan los esquemas de Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff en su forma conservativa

a. Lax-Friedrichs conservativo

a) Paso 1:

$$F_j^n = \frac{1}{2} (f_{j-1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2\lambda} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

b) Paso 2:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (F_{j+1}^n - F_j^n)$$

b. Lax-Wendroff conservativo (esquema de Richtmyer)

a) Paso 1:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^n &= \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1}^n - f_j^n) \\ u_{j-1/2}^n &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2} (f_j^n - f_{j-1}^n) \end{aligned}$$

b) Paso 2:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(f(u_{j+1/2}^n) - f(u_{j-1/2}^n) \right)$$

Es posible demostrar que estos esquemas son consistentes y convergentes, con los mismos órdenes que en el caso lineal.

Problema 3. Demuestre que, cuando $f(u) = \alpha u$, con $\alpha > 0$ constante, se recuperan los esquemas de Lax-Friedrichs y de Lax-Wendroff del caso lineal.

En primer lugar, veremos que se cumple lo pedido para Lax-Friedrichs conservativo. Partimos de la siguiente expresión:

$$F_j^n = \frac{1}{2} (f_{j-1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2\lambda} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Calculamos f_{j-1}^n y f_j^n :

$$f_{j-1}^n = \alpha u_{j-1}^n; f_j^n = \alpha u_j^n$$

Reemplazamos en la expresión de F_j^n :

$$F_j^n = \frac{\alpha}{2}(u_{j-1}^n + u_j^n) - \frac{1}{2\lambda}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

De la misma forma calculamos F_{j+1}^n :

$$F_{j+1}^n = \frac{\alpha}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{1}{2\lambda}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

Ya están calculados los elementos necesarios para llevar a cabo el Paso 2. Desarrollamos la expresión:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(F_{j+1}^n - F_j^n)$$

Reemplazando los valores obtenidos:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(\frac{\alpha}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{1}{2\lambda}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\alpha}{2}(u_{j-1}^n + u_j^n) + \frac{1}{2\lambda}(u_j^n - u_{j-1}^n)\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(\frac{\alpha}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{1}{2\lambda}(u_j^n - u_{j-1}^n + u_j^n - u_{j+1}^n)\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2\lambda}(2u_j^n - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n)\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(2u_j^n - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = -\frac{\lambda\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

Hacemos el reemplazo, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$:

$$u_j^{n+1} = -\frac{\Delta t\alpha}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

$$u_j^{n+1} + \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \frac{\Delta t\alpha}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0$$

Ponderamos por $\frac{1}{\Delta t}$:

$$\frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta t}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \frac{\alpha}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0$$

$$\frac{2u_j^{n+1} + (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{2\Delta t} + \frac{\alpha(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

Obteniendo así el esquema de Lax-Friedrichs del caso lineal.

A continuación realizaremos el mismo procedimiento con el esquema de Richtmyer. Partimos de las siguientes expresiones:

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1}^n - f_j^n); u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f_j^n - f_{j-1}^n)$$

Reemplazamos a las funciones $f_{j+1}^n, f_j^n, f_{j-1}^n$ en ambas expresiones:

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\lambda}{2}(\alpha u_{j+1}^n - \alpha u_j^n)$$

$$= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\lambda\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$\begin{aligned}
u_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(\alpha u_j^n - \alpha u_{j-1}^n) \\
&= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda\alpha}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

Reemplazamos ambos términos en las expresiones $f(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$ y $f(u_{j-\frac{1}{2}}^n)$:

$$\begin{aligned}
f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) &= \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\alpha^2\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\
f(u_{j-\frac{1}{2}}^n) &= \frac{\alpha}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{\alpha^2\lambda}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

Al comenzar el Paso 2 tomamos la siguiente expresión:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n))$$

Reemplazando los valores obtenidos:

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\left(\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{\alpha^2\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\alpha}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2\lambda}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)\right) \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\left(\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n - u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2\lambda}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n + u_j^n - u_{j+1}^n)\right) \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}(2u_j^n - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) \\
u_j^{n+1} - u_j^n + \lambda\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}(-u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n) &= 0 \\
u_j^{n+1} - u_j^n + \lambda\frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) &= 0
\end{aligned}$$

Recordamos que $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\alpha^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

Ponderamos por $\frac{1}{\Delta t}$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\alpha(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} - \frac{\alpha^2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{2\Delta x^2} = 0$$

La expresión anterior corresponde al esquema Lax-Wendroff del caso lineal.

Queda así demostrado que en ambos casos es posible obtener los esquemas para casos lineales cuando $f(u) = \alpha u$.