MA4402 - Simulación Estocástica: Teoría y Laboratorio Primavera 2021
Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Bruno Hernández, Pablo Araya

Laboratorio 2: Reducción de varianza y cadenas de Markov

Problema 1: Reducción de varianza

Considere la cantidad
$$\alpha = \mathbb{E}[e^{bZ}\mathbf{1}_{Z>0}], \tag{1}$$
donde Z es una variable normal estándar y $b \in \mathbb{R}$ es una constante. Supondremos para este problema que la normal estándar es la única variable eficientemente simulable. Se desea aproximar α mediante un algoritmo de Monte Carlo con baja varianza.

1. Proponga un método de muestreo preferencial.
2. Sabiendo que $\mathbb{E}\exp(bZ) = \exp(b^2/2)$, proponga un método de variable de control.
3. Mejore el método del ítem anterior usando una variable antitética.

Disponemos entonces de cuatro métodos de Monte Carlo para aproximar α: usando (1) directamente, y los tres métodos anteriores propuestos por usted. En lo que sigue, trabaje con $b = 2$.

4. Aproxime numéricamente la raíz de la varianza de la variable aleatoria que da lugar a cada uno de los cuatro métodos, para distintos tamaños de muestras, y grafique. Obtenga una estimación de la raíz de la varianza en cada caso.
5. Usando la estimación de la raíz de la varianza del punto previo y aproximando con el TCL, calcule el tamaño de muestra necesario para cada método de modo de que el error obtenido sea inferior a $\varepsilon = 0{,}02$ con probabilidad de $95\,\%$. Comente.
6. Sea $N_{\max}$ el tamaño de muestra máximo entre los calculados en el ítem anterior para los tres métodos propuestos por usted (es decir, excluyendo el método que usa (1) directamente). Para distintos tamaños de muestra crecientes hasta $N_{\max}$, obtenga la estimación de α de cada uno de los cuatro métodos y grafique.
7. En base a lo obtenido en los puntos previos, ¿cuál método es el mejor y cuál el peor? Obtenga el valor exacto de α usando una herramienta adecuada (por ejemplo: `www.wolframalpha.com`), y compare con el valor entregado por los cuatro métodos, usando el mismo $N_{\max}$ para todos. Comente.

Problema 2: Simulación de cadenas de Markov y flujos Markovianos.

Sea E un conjunto finito que supondremos sin perder generalidad igual a $\{1, \dots, N\}$, donde $N \in \mathbb{N}$ está fijo. Sea $f : E \times [0,1] \to E$ una función, X_0 una v.a. con ley μ y $(U_n)_{n\geq 1}$ una colección de v.a.'s i.i.d. uniformes en $[0,1]$, independientes de X_0. Para $n \geq 0$ se define por recurrencia la sucesión aleatoria
$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}).$$
Se sabe del curso que $(X_n)_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov homogénea.

1. Sea P una matriz estocástica indexada por E. Si f es tal que $\mathbb{P}(f(x,U)=y)=P_{xy}$ para todo $x,y\in E$, diremos que es una *función de transición* asociada a la matriz P. Muestre que $f(x,u):=\inf\{y\in E:\sum_{z=1}^{y}P_{xz}\geq u\}$ cumple esa condición, y que la cadena $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así construida tiene entonces matriz de transición P.

   Note que dada **una** v.a. uniforme U en $[0,1]$, $\Phi:=f(\cdot,U):E\to E$ es una función aleatoria, que entrega transiciones de la cadena desde un estado x cualquiera, a algún estado $y=\Phi(x)=f(x,U)$.

2. Programe una función `Trans(x,u,P)` que tiene como parámetros un valor `u` en $[0,1]$ y una matriz estocástica `P` indexada por $\{1,\ldots N\}$, y entrega **para cada** `x` el valor correspondiente de la función de transición asociada a `P` con el parámetro `u` dado. Puede usar para ello una función ya programada en el Laboratorio 1 si lo desea.

   En base a lo anterior, construya también un método `CM(mu,P,n)` que simule `n` pasos de la cadena de Markov homogénea con matriz de transición `P` y distribución inicial `mu`.

3. Notar ahora que dadas realizaciones $(U_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. uniformes en $[0,1]$, disponemos de una sucesión de funciones (aleatorias) $\Phi_n:=f(\cdot,U_n):E\to E$, con $n\geq 1$, que entregan transiciones de la cadena desde un estado x cualquiera en el tiempo $n-1$, a algún estado $y=\Phi_n(x)=f(x,U_n)$ en el tiempo n.

   Más aun, disponemos de un **flujo aleatorio** $(\Phi_{n,m}:E\to E)_{n\geq 0,m>n}$ dado por $\Phi_{n,m}(x)=\Phi_m\circ\cdots\circ\Phi_n(x)$, que puede entregar las transiciones de la cadena desde cualquier estado x en el tiempo $n-1$, a algún estado $y=\Phi_{n,m}(x)$ en el tiempo m.

   En base a la función construida en la parte 1), construya ahora una función `Flujo(x,n,m,u,P)` que toma como parámetros un vector `u` de $m-n+1$ valores en $[0,1]$ y una matriz estocástica P, y entrega **para cualquier** `x` , el estado en el tiempo m de una cadena que se encuentra en `x` en el tiempo $n-1$ obtenido al hacer $m-n+1$ transiciones sucesivas con la función de transición asociada a `P`.

4. Usando las funciones antes construidas, y utilizando (solo) $n=100$ v.a. uniformes, simule y grafique $n=100$ pasos de $K=10$ trayectorias de un paseo aleatorio en el conjunto $\{1,\ldots,N\}$ para $N=10$, donde cada trayectoria parte de un estado distinto. En los extremos $x=1,10$ el paseo aleatorio se queda en el estado actual con probabilidad $1-p$ y salta con probabilidad p. Realice esto en cada uno de los 3 casos siguientes: $p=1/2$, $p=1/3$, $p=2/3$.

Problema 3: Aplicación a un modelo de colas

Considere una cola a tiempo discreto a la que, en cada instante $n\in\mathbb{N}$ llega un cliente con probabilidad $p\in(0,1)$ y no llegan clientes con probabilidad $1-p$. Durante cada intervalo de tiempo en que hay al menos un cliente en la cola, un cliente es atendido y sale de la cola con probabilidad $q\in(0,1)$ y no se va ningún cliente con probabilidad $1-q$. Denote por X_n la cantidad de clientes en la cola en el instante n.

1. Escriba X_n como $X_n=F(X_{n-1},Y_n,Z_n)$ explícitamente en términos de v.a.'s (Y_n) Bernoulli(p) y (Z_n) Bernoulli(q) independientes. Justifique que (X_n) es irreducible. Se puede probar que para $p>q$, la cadena (X_n) diverge c.s. Además, en el caso $p=q$ la medida $(1-p,1,1,\ldots)$ es invariante, y para $p<q$ lo es la medida
$$\pi_0=\frac{q-p}{q},\qquad \pi_x=\left(\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\right)^x\frac{q-p}{q(1-q)},\quad x\geq 1.$$

   Explicite el rango de parámetros para los que (X_n) es recurrente positiva, recurrente nula o transiente.

2. En lo que sigue se considerá una versión “truncada” (y simulable) de la cadena. Para ello, se fijará N un número máximo de clientes que la cola permite, y se modifica la matriz de transición con la convención de que si ya hay N clientes, un nuevo cliente simplemente no se queda, pero la dinámica de los que ya están es la misma de antes. Simule y grafique trayectorias de (X_n) hasta $n = 1000$ para 3 pares de valores representativos de (p, q), fijando en cada caso valores convenientes de N que deberá determinar.

3. Para un par p, q tal que $p < q$ y un valor N fijos que usted determine, compare las siguientes 3 estrategias para estimar numéricamente la distribución invariante π^N asociada:

   - Simular K (grande) CM independientes en un tiempo T (grande) y obtener el histograma correspondiente a la *medida empírica* para las K trayectorias en ese tiempo.
   - Simular una CM por un tiempo T (grande) y obtener el histograma de las *medias ergódicas*

   $$\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{1}_{\{X_k=i\}}, \quad i \in \{0, ..., N\}.$$

   En todos los casos, puede fijar K y/o T en términos de la cantidad de uniformes a simular o según un cierto error. Compare los métodos en distancia en variación total a π, y haga un análisis completo de las distintas estrategias.