Flujo de capital en tiempo y espacio

Sebastián Cobaise [$] Arturo Lazcano [$] Sebastián Toloza [$]

[$]Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

Introducción

Desde un enfoque económico, es razonable pensar que la presencia de capital en una zona incrementa el nivel de producción, por lo que los sectores más ricos tienen una mayor tasa de crecimiento.

Por otro lado, el capital se desplaza a los sectores más rentables, esto se traduce en que habrá un movimiento de dinero desde sectores de mayor concentración a sectores con menor concentración de capital. Este comportamiento se puede simular con un modelo simple y plantearse como un problema de control óptimo.

Objetivos

Los objetivos de este proyecto son estudiar el flujo de capital físico, en el cual un planificador central maximiza la utilidad descontada de sus habitantes en horizonte de tiempo infinito, y realizar simulaciones para analizar su comportamiento, utilizando herramientas teóricas y numéricas de control óptimo.

Modelo

Se considera una población uniformemente distribuida en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^2$. El trabajo afecta positivamente la tasa de acumulación de capital a través de una función de producción $F(k) = A \cdot k$ y el consumo lo afecta negativamente ($-c(t,\theta)$).

Interpretación económica

Los capitalistas buscan instalar su capital donde sea más rentable, por ende la balanza comercial τ puede afectar positiva o negativamente dependiendo de si está entrando o saliendo capital y debe cumplir:

$$\int_\zeta \tau(t,\theta)d\theta = -\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}(t,b) - \frac{\partial k}{\partial \theta}(t,a)\right), \quad \zeta \text{ arco entre } a \text{ y } b \subset [0,2\pi]$$

Así, se puede deducir que el problema de maximizar el funcional de utilidad descontada J dada la dinámica del capital en tiempo y espacio es:

$$\sup_{c(\cdot,\cdot)} J(k_0, c(\cdot,\cdot)) := \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\int \frac{(c(t,\theta))^{1-\sigma}}{1-\sigma} d\theta\right) dt$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial t}(t,\theta) = \dfrac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t,\theta) + A\cdot k(t,\theta) - c(t,\theta) \\ k(t,0) = k(t,2\pi) \quad \forall t \geq 0 \\ k(0,\theta) = k_0(\theta) \quad \forall \theta \in [0,2\pi]. \\ c(t,\theta), k(t,\theta) \geq 0, \quad \forall t\geq 0, \forall \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Donde,

- A representa el nivel de tecnología, que se puede asumir constante sobre el espacio y tiempo.
- σ mide el grado de aversión al riesgo relativo, que es la actitud de rechazo que experimenta un inversor ante el riesgo financiero.
- ρ representa la tasa de preferencia temporal, que es la valoración relativa actual que se otorga al recibir un bien en una fecha anterior en vez de recibirlo después.

Controlabilidad del Sistema

Al considerar el capital puntual máximo en función del tiempo $M(t) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} (k(t,\theta))$, se observa que su dinámica tiene la siguiente cota superior: $\frac{dM}{dt}(t) \leq A\cdot M(t)$, pues $c(t,\theta) \geq 0$ y el capital es una función cóncava en su punto máximo (es decir, posee una balanza comercial negativa en ese punto). Por desigualdad de Grönwall, esto implica que $M(t) \leq e^{At}M(0)$.

Se concluye que el sistema no es controlable, pues el conjunto de funciones alcanzables desde una distribución inicial de capital k_0 en un tiempo T está incluido en una bola según la norma $||\cdot||_\infty$.

$$Acc(k_0,T) \subseteq B(0, e^{AT}||k_0||_\infty)$$

Control Óptimo

Al suponer $A(1-\sigma) < \rho$ y considerar una distribución inicial de capital $k_0 \in L^2(\mathbb{T})$, se tiene que siempre y cuando la trayectoria $k^*(t,\theta)$ asociada al control

$$c^*(t,\theta) = \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma}\int_0^{2\pi} k^*(t,\phi)d\phi$$

se mantenga positiva, entonces c^* es el único control óptimo del problema (en forma de feedback), y la función valor del problema es finita, dada de forma explícita por:

$$V(k_0) = \frac{1}{1-\sigma}\left(\frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma}\right)^{-\sigma}\left(\int_0^{2\pi} k_0(\theta)d\theta\right)^{1-\sigma}$$

Simulación

Para implementar el modelo, se usa el método de diferencias finitas para discretizar el espacio y el sistema se plantea como una EDO. Se consideraron dos condiciones iniciales distintas. Notar que en los gráficos, la primera imagen corresponde a la condición inicial.

La dinámica para la simulación de cada punto $i \in \{0,\ldots,N+1\}$ del espacio discretizado es la siguiente:

$$\frac{dk_i}{dt}(t) = \frac{k_{i-1}(t) - 2k_i(t) + k_{i+1}(t)}{\Delta x^2} + Ak_i(t) - c_i(t)$$

Para efectos del código, se usan los parámetros $N = 200$ y $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. Los resultados obtenidos para 2 distribuciones iniciales k_0 distintas de capital fueron:

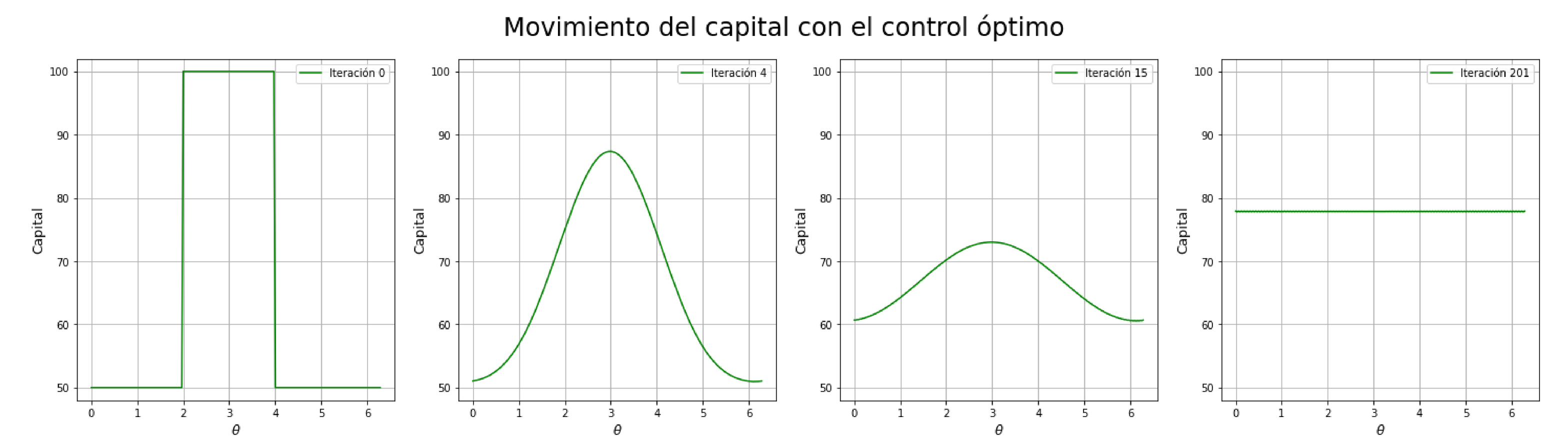

Figura 1. $\rho = 0.07;\ A = 1/3;\ \sigma = 0.8.$

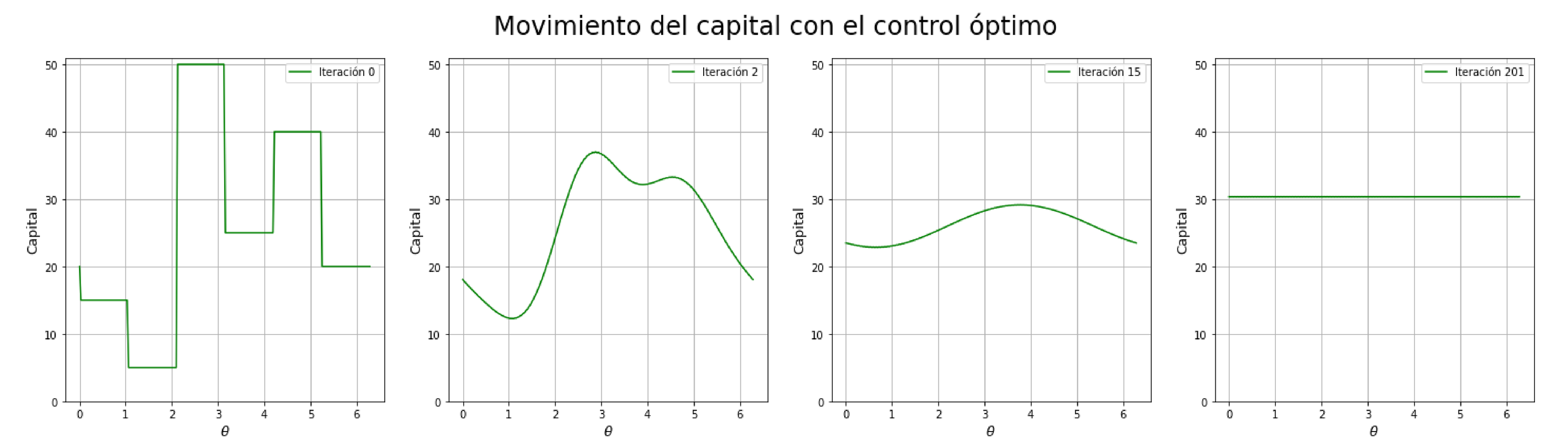

Figura 2. $\rho = 0.07;\ A = 1/3;\ \sigma = 0.8.$

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman

Se define la función valor del problema como

$$V(k_0) := \sup_{c\in L^2(\mathbb{T},\mathbb{R})} J(k_0, c(\cdot,\cdot)) = \sup_{c\in L^2(\mathbb{T},\mathbb{R})} \int_0^\infty e^{-\rho t} l(k(t),c(t))dt$$

Y la ecuación de HJB para este caso (en dimensión infinita) corresponde a

$$\rho\nu(k) = \langle k, G\nabla\nu(k)\rangle + A\langle k, \nabla\nu(k)\rangle + \sup_{c\in L^2(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)}\{-\langle c, \nabla\nu(k)\rangle + \langle 1, U(c)\rangle\}$$

En donde $\nu : L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno de L^2 y G corresponde al operador definido por $G(f) := \dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$, y se tiene que su única solución corresponde a la función valor del problema y el control óptimo descrito anteriormente maximiza el Hamiltoniano cuando se cumplen las respectivas hipótesis.

Conclusiones

Para maximizar la utilidad de la población, el planificador central debe imponer un control sobre el consumo independiente del espacio, se puede apreciar en las simulaciones realizadas que el capital se vuelve constante y crece conforme avanza el tiempo.

Si bien estos resultados son posibles en la teoría, las limitaciones del modelo son que se considera una distribución homogénea de población, que solamente trabaja y consume, y el nivel de tecnología (en la producción) es constante en todo el espacio, por lo que los resultados observados se pueden escapar de la realidad.

Tiene sentido que la dinámica no sea controlable, pues el consumo solo tiene la capacidad de disminuir el capital, luego, para mejorar el modelo es necesario complejizarlo, por ejemplo, considerando una población y tecnología no homogéneas y aumentando la dimensión del dominio.

Referencias

[1] R. Boucekkine, C. Camacho y G. Fabbri. Spatial dynamics and convergence: The spatial AK model. (2010).
[2] P. Brito. The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogeneous world. Instituto Superior de Economia e Gestão - DE Working papers nº 14-2004/DE/UECE (2004)
[3] A. Bensounsan, G. Da Prato, M.C. Delfour y S.K. Mitter. Representation and Control of Infinite Dimensional Systems. Segunda edición. Birkhäuser, Boston. (2007)

scobaise@dim.uchile.cl, alazcano@dim.uchile.cl, stoloza@dim.uchile.cl