MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2022
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Javier Madariaga R. **Ayudante:** Pablo Araya Z.

Laboratorio #2

Controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad

Descripción: El objetivo de este laboratorio es estudiar la controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad de un sistema lineal controlado. Para esto, se pide verificar los respectivos criterios de manera directa y usando el paquete `control` de Python. También se estudian conceptos relacionados como la matriz Gramiana y la forma canónica de Brunovski.

Parte A. Modelamiento y simulación

Ejercicio 1 Un barco carguero debe llevar su cargamento hasta el puerto de Guangzhou ubicado en el sur de China, atravesando el Océano Pacífico. El objetivo de este primer ejercicio es modelar el movimiento del barco como un sistema no-lineal no autónomo:

$$\vec{X}'(t) = F(t, \vec{X}(t)), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Para esto, asuma lo siguiente:

- El par $(x(t), y(t))$ es el vector (abscisa, ordenada) que indica la posición del barco en el océano en un tiempo t.
- El barco se mueve con rapidez constante igual a V.
- El mar posee corrientes marinas que dependen sólo de la posición del barco $(x(t), y(t))$ y que influyen en su movimiento actuando como una fuerza externa, denotada por $\vec{G}(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))^\top$.
- La masa del barco disminuye a medida que este consume combustible. Por simplicidad, se supone que esta disminución de masa es conocida y depende sólo del tiempo t, obteniendo así una función denotada $m(t)$.
- Los efectos del roce o viscosidad son despreciables.
- La posición del puerto Guangzhou se encuentra en el origen.

Denotemos por $\nu(t)$ el ángulo de inclinación del vector velocidad $\vec{V}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ del barco, con respecto al eje de las abscisas. Utilice las relaciones que satisfacen $\dot{x}$ e $\dot{y}$ y escriba un modelo de la forma (1) a partir de la segunda ley de Newton $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$, donde $\vec{P}(t) = m(t)\vec{V}(t)$ es el momentum del barco y $\vec{F}_{\text{ext}}(t)$ corresponde a las fuerzas externas que actúan sobre él (en este caso, las corrientes marinas), donde el lado derecho viene dado (salvo reordenamiento de las variables) por

$$F(t, \vec{X}) = A(t)\vec{X} + \tilde{G}(\vec{X})$$

con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{G}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{G_1(x_1,x_3)}{m(t)} \\ 0 \\ \frac{G_2(x_1,x_3)}{m(t)} \end{pmatrix}.$$

Identifique cada componente de $\vec{X}$.

Ejercicio 2 Por simplicidad, suponga que las corrientes marinas vienen dadas por una función G lineal. En este caso estas corrientes se ven como giros, tal como se aprecia en la Figura 1.

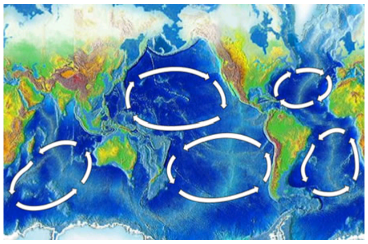

Figure 1: Corrientes marinas: G lineal

(a) Utilice `pyplane` para dibujar los diagramas de fase que representan estas corrientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t), \\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t), \end{aligned}$$

con distintas configuraciones paramétricas. Reescriba un modelo de la forma (1) pero donde el lado derecho ahora sea una función lineal no homogénea $F(t, \vec{X}) = \tilde{A}(t)\vec{X}$.

(b) Para maniobrar el barco se introduce un motor que produce cambios de aceleración horizontales y verticales, dados por u y v, respectivamente. A partir del modelo de la parte anterior, describa el movimiento del barco como un sistema lineal (no homogéneo) controlado de la forma $\vec{X}'(t) = \tilde{A}(t)\vec{X}(t) + B\vec{U}(t)$, donde $\vec{U}(t) = (u(t), v(t))$.

Parte B. Controlabilidad, observabilidad y estabilidad

En el resto de las preguntas supondremos que la masa es constante, es decir, $m(t) = m > 0$ para todo $t \geq 0$, además consideraremos las siguientes configuraciones de parámetros $a = -1, b = -2, c = 4, d = -5$ y $a = -1, b = 0, c = 4, d = -1$.

Ejercicio 3 Utilizando `solve_ivp` simule trayectorias del sistema para diferentes controles (constante, sinusoidales, feedbacks, bang-bang, etc) y distintas condiciones iniciales. Comente lo observado en cada situación.

Ejercicio 4 Utilizando `python` (sin el toolbox de Control), calcule la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B],$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, para los distintos valores a, b, c y d dados. Compare el resultado con el obtenido usando el comando `ctrb` del toolbox de `control` de `python`. ¿Es el sistema controlable?

Ejercicio 5 Suponga ahora que podemos observar la evolución del sistema según el modelo $\vec{Y} = C\vec{X}$, con C de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con lo anterior, nuestro sistema queda de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{X}' &= A\vec{X} + B\vec{U} \qquad (2) \\ \vec{Y} &= C\vec{X} \qquad (3) \end{aligned}$$

Utilizando `python` (sin el toolbox de Control), calcule la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = [C; CA; CA^2; \ldots; CA^{n-1}],$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, para los sistemas de los ejercicios precedentes. Compare el resultado con el obtenido usando el comando `obsv` del toolbox de `control` de `python`. ¿Es el sistema observable?

Ejercicio 6 Utilizando el comando `gram` calcule el Grammiano para los sistemas de los ejercicios precedentes. Investigue y comente los resultados obtenidos.

Parte C. Reguladores y estabilizadores

Ejercicio 7 Considerando $\vec{U} = -K\vec{X}$ para una matriz K apropiada, el sistema (2) se puede escribir como sigue

$$\vec{X}' = (A - BK)\vec{X}. \qquad (4)$$

Utilice el comando `place` para obtener una matriz de ganancia K tal que $A - BK$ sea asintóticamente estable, luego utilice el comando `lqr` para obtener una matriz de ganancia K tal que $A - BK$ sea estable y verifique usando el comando `eig` que la matriz $A - BK$ es asintóticamente estable. Compare los resultados obtenidos al utilizar ambos comandos. Simule las trayectorias obtenidas por estos controles para distintas condiciones iniciales, y comente los resultados encontrados.

Ejercicio 8 Usualmente es difícil conocer completamente las variables de estado ya que sólo podemos obtener observaciones imprecisas de estas. Por ejemplo, si estamos controlando nuestro barco desde Chile, vía satélite, no podemos saber siempre su velocidad exacta y sólo podemos estimarla, por ejemplo, usando dispositivos GPS. Por esto, en lo que sigue, supondremos que solamente observamos la posición del barco (x_1, x_3) pero no su velocidad. Esto nos lleva a considerar un observador de la forma:

$$\vec{Y} = C\vec{X}. \qquad (5)$$

- Identifique C e $\vec{Y}$.
- Definamos el estimador $\hat{\vec{X}}$ como la solución del siguiente sistema:

  $$\hat{\vec{X}}'(t) = A\hat{\vec{X}}(t) + B\vec{U}(t) + L(\vec{Y}(t) - C\hat{\vec{X}}), \qquad (6)$$

  donde el estado inicial $\hat{\vec{X}}(0) = \hat{\vec{X}}_0$ es conocido y dado por usted y la matriz L representa la ganancia de la diferencia entre la observación y la estimación del estado. Utilizando los comandos del Ejercicios 8, encuentre matrices L tales que el estimador $\hat{\vec{X}}$ converja asintóticamente a $\vec{X}$, o en otras palabras, que el error de estimación $\vec{e}(t) := \vec{X}(t) - \hat{\vec{X}}(t)$ converja a cero cuando $t \to +\infty$.
- Simule el estimador obtenido para los controles utilizados en el Ejercicio 3 y 7 con las respectivas condiciones iniciales.

Ejercicio 9 Utilizando un control regulador feedback lineal, asumiendo que usted sólo tiene acceso al estimador de $\vec{X}$, y suponiendo que $\vec{Y} = C\vec{X}$, deduzca de las ecuaciones (6) y $\vec{e}\,'(t) = (A - LC)\vec{e}(t)$, un sistema de la forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\vec{X}} \\ \vec{e} \end{bmatrix}' = \hat{A}(A, B, C, K, L) \begin{bmatrix} \hat{\vec{X}} \\ \vec{e} \end{bmatrix} \tag{7}$$

encuentre matrices K y L que hagan estables a la matrices $A - BK$ y $A - LC$ y por lo tanto a la matriz $\hat{A}(B, C, K, L)$ (¿Por qué?). Finalmente simule lo obtenido.