Laboratorio 2

Controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad

Integrantes:	Sebastián Cobaise
	Arturo Lazcano
Profesor:	Héctor Ramírez
Auxiliares:	Javier Madariaga
	Pablo Araya

Fecha de entrega: 20 de septiembre de 2022

1. Ejercicio 1

Del sistema planteado con las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} \text{ y } G(\overrightarrow{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{G_1(x_1,x_3)}{m(t)} \\ 0 \\ -\frac{G_2(x_1,x_3)}{m(t)} \end{pmatrix}$$

Se concluye que las coordenadas del vector $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, son tal que (x_1, x_3) es la posición del barco y (x_2, x_4) su velocidad.

2. Ejercicio 2

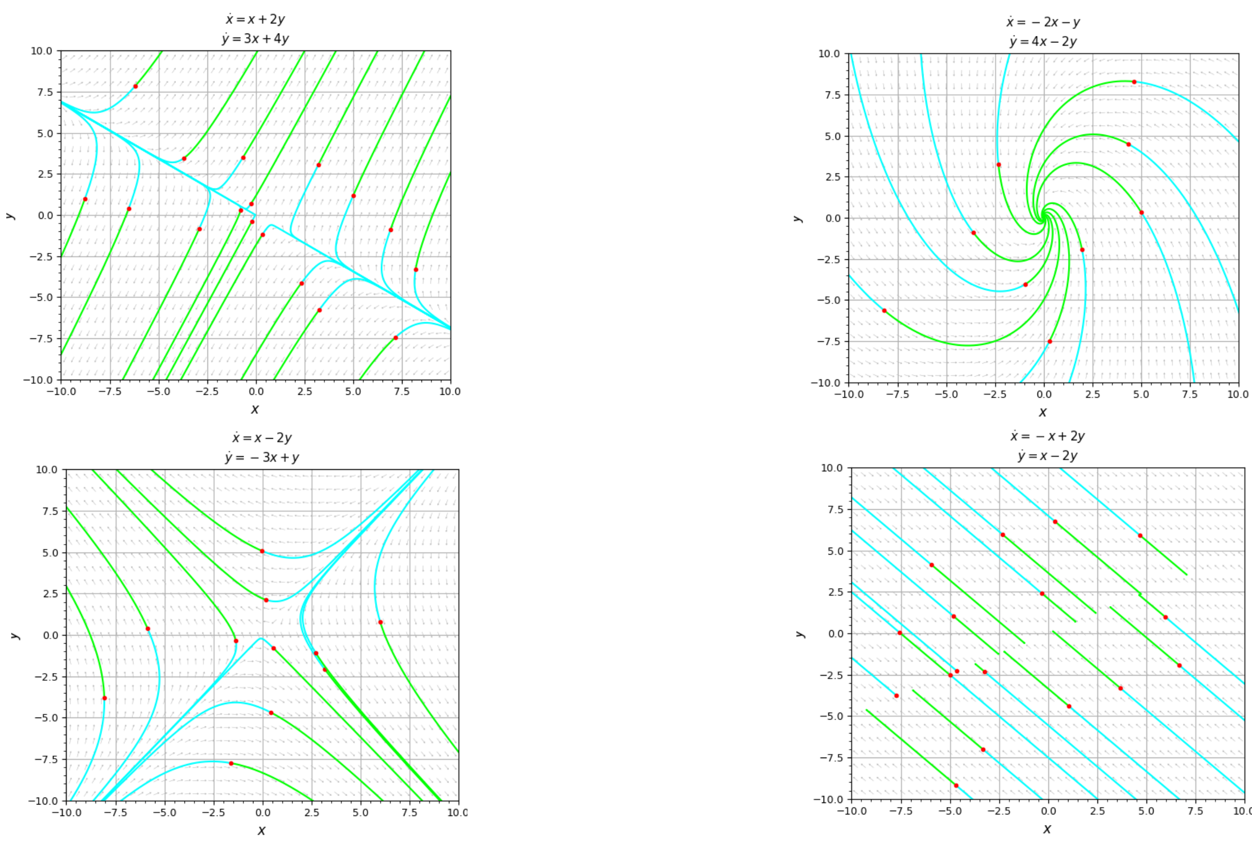

Figura 1: mareas para distintos valores de a,b,c y d.
Los puntos rojos son condiciones iniciales y los segmentos verdes son el comportamiento posterior de la EDO asociada.

En la figura (1) se encuentran los diagramas de fase asociados a distintas mareas, cambiando los coeficientes a, b, c, d. Ahora considerando G como una corriente lineal, el sistema a resolver resulta de la forma:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{m(t)} & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & \frac{b}{m(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{m(t)} & 0 & \frac{d}{m(t)} & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} \vec{X}$$

Posteriormente, se considera un control relacionado al manejo del barco, que afecta su aceleración, teniéndose el sistema:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{m(t)} & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & \frac{b}{m(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{m(t)} & 0 & \frac{d}{m(t)} & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

3. Ejercicio 3

De ahora en adelante, se crean dos matrices A dependiendo de los valores a, b, c, d.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran las simulaciones de trayectorias del sistema usando condiciones iniciales distintas $x_{01} = (2, 3, 4, 1)$ y $x_{02} = (-1, -2, 5, -3)$. Sumado a lo anterior, se prueban cuatro tipos de controles distintos:

- $U_1(t) = (0.2 \quad 0.2)$
- $U_2(t) = (sin(t) \quad sin(t))$
- $U_3(t) = CX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ X
- $U_4(t) = \begin{cases} (0 \quad 0) & t < 5 \\ (1 \quad 1) & t \geq 5 \end{cases}$

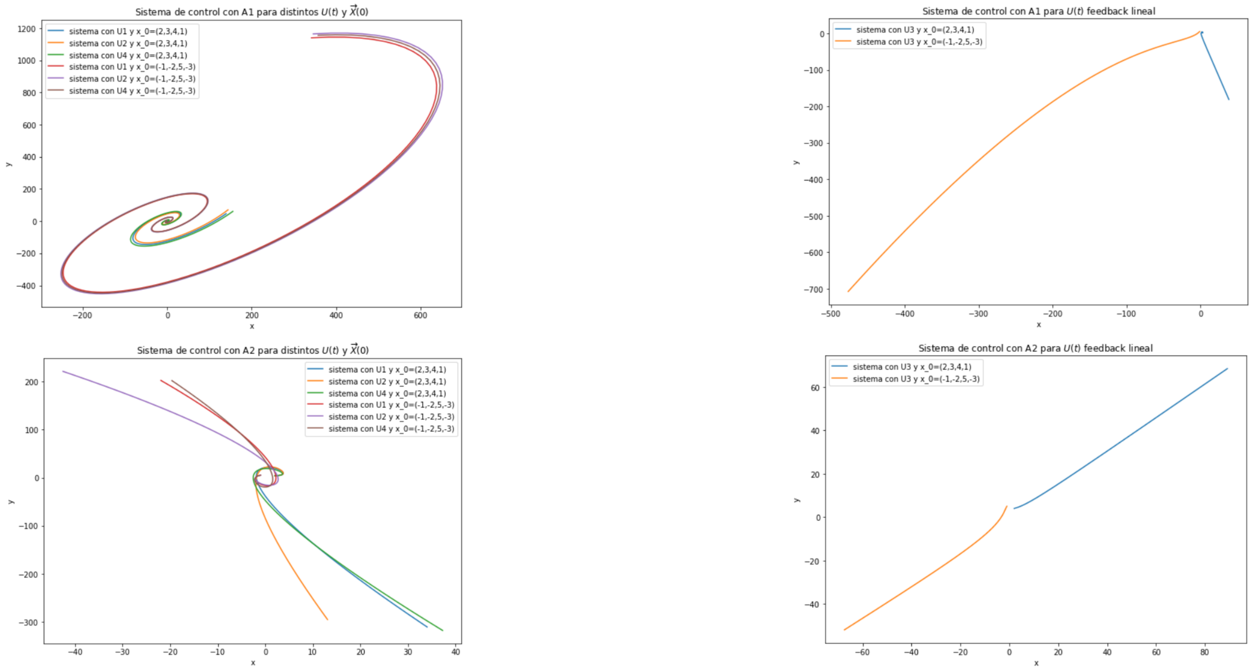

Figura 2: Simulación de trayectorias para distintos controles y condiciones iniciales.

A modo de tener una mejor observación para el caso de la matriz A_2 y controles constantes, sinusoidales y Bang-Bang, se usa un tiempo mayor y se grafica a continuación:

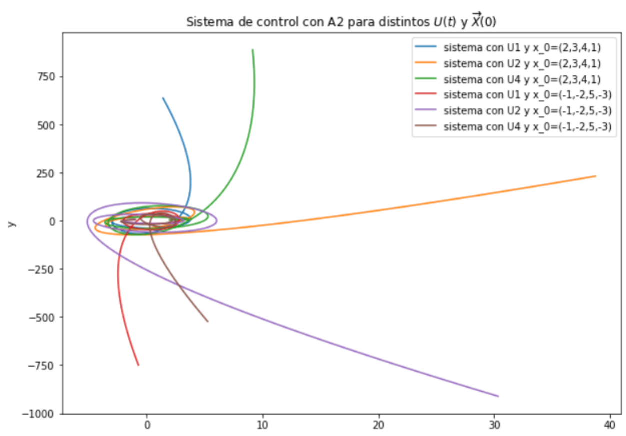

Figura 3: Trayectoria con A_2 y mayor tiempo.

Como se puede apreciar en las figuras anteriores, dependiendo de la matriz A, es decir, sus valores a, b, c, d el comportamiento de las trayectorias puede cambiar. Por ejemplo, en el caso de A_1, independiente del control y dada una condición inicial fija, todas las trayectorias tienden a parecerse, mientras que en el caso de A_2 este no es el caso. Notar que para controles tipo feedback lineal, lo dicho anteriormente no se cumple, es decir, depende tambien de la matriz C definida.
Por último, como se puede notar, mientras más tiempo pasa en el caso de A_2, las trayectorias tienden aún más a no parecerse.

4. Ejercicio 4

Sea C_1 matriz de controlabilidad de A_1 y C_2 la de A_2, las cuales se calculan en python y con el toolbox Control:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que se concluye que ambos sistemas son controlables, las primeras 4 columnas de cada matriz son una base canónica de $\mathbb{R}^4$, así que son de rango completo.

5. Ejercicio 5

Ahora se calculan $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$, matrices de observabilidad de los sistemas asociados a A_1 y A_2 respectivamente:

$$\mathcal{O}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teniéndose ambos sistemas observables, pues las primeras 4 filas de cada matriz son base canónica de $\mathbb{R}^4$.

6. Ejercicio 6

Al calcular el Grammiano de ambos sistemas con el comando **gram**, no se obtiene resultado y se informa que ambos sistemas son inestables, esto significa que las matrices A_1 y A_2 tienen valore propios con parte real positiva, lo que significa que hay una dirección (vector propio asociado) donde las soluciones tienen a diverger.

7. Ejercicio 7

Para cada matriz A_i ($i \in \{1,2\}$), se genera la matriz K_i con el comando **place** tal que $A_i - BK_i$ tenga todos sus valores propios con parte real negativa (dados). Luego se utiliza el comando **lqr** para obtener un K_i que haga a $A_i - BK_i$ estable (se observa que todos sus valores propios tienen parte real negativa). Luego se simula el sistema asociado a $A_1 - BK_1$ (con K_1 encontrado con **place**) y se observa en la figura (4) que efectivamente tiende a cero (La velocidad también se tiene a cero, o si no la posición no se podría mover asintóticamente a 0):

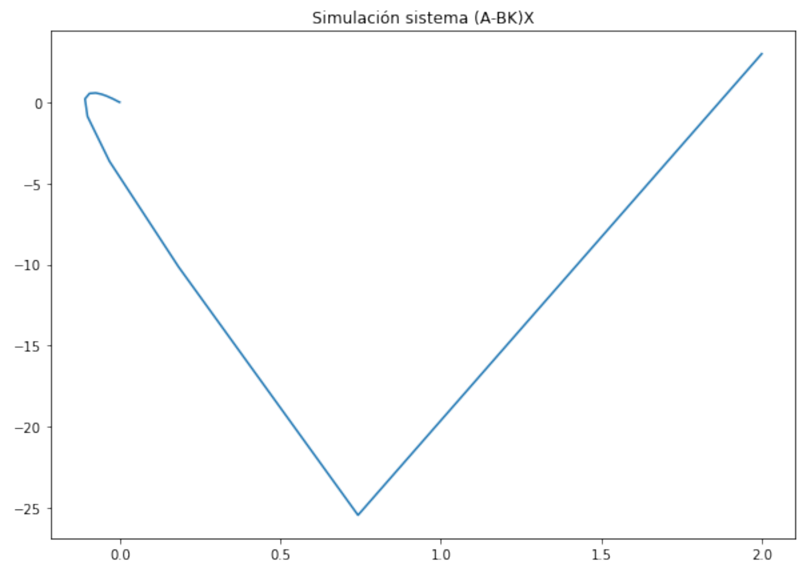

Figura 4: Trayectoria del sistema $A_1 - BK_1$. Aquí (x, y) es la posición del barco, el cambio abrupto de dirección se debe a que un valor propio es mucho más grande en módulo que los otros

8. Ejercicio 8

Ahora se considera un sistema donde se puede observar solamente la posición del barco, con esta información, consideramos la posición del barco como (x_1, x_3) y la ecuación:

$$\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C\overrightarrow{X}$$

Luego, para las simulaciones de esta sección, se usa la matriz A_1 junto con una matriz L_1 que se calcula de forma similar a K_1 del ejercicio 7.
El sistema considerado cambia pues, ahora, se requiere una variable que acople a $\overrightarrow{X}$ junto con su estimación $\hat{\overrightarrow{X}}$ por lo que se requiere definir una nueva matriz $\hat{A}$ por bloques usando las ecuaciones de $\overrightarrow{X}$ y $\hat{\overrightarrow{X}}$, es decir, las matrices A, K_1, B, C, y L_1.
Para la simulación, se usa la condición inicial $x_0 = (2, 3, 4, 1, -1, -4, 2, 9)$. En las siguientes figuras se grafican $\overrightarrow{X}$ junto con su estimación $\hat{\overrightarrow{X}}$ para distintos controles.

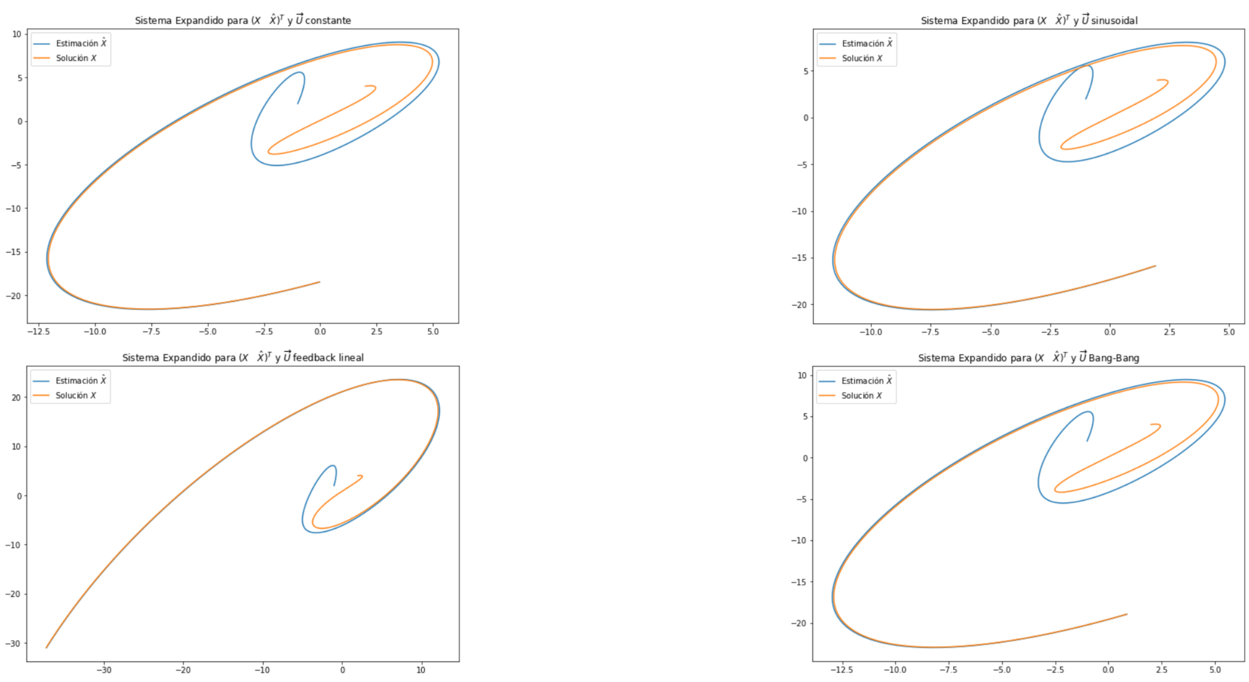

Figura 5: Simulación de trayectorias para distintos controles y condiciones iniciales.

Con esto, se puede observar como a mayor tiempo, la trayectoria $\overrightarrow{X}$ y su estimación se parecen más independiente del control usado.
Por otro lado, se quiere usar un control tipo feedback lineal pero esta vez con una matriz especifica, es decir, $U(t) = -K_1 X$ donde K_1 es la encontrada en el ejercicio 7. Este resultado se comparará con un control $U(t) = DX$ con D matriz cualquiera (en este caso la usada en el ejercicio 3).

Figura 6: Simulación de trayectorias para distintos controles y condiciones iniciales.

En la Figura 6 se puede notar como para el control que involucra a la matriz K_1, las trayectorias se van a cero, mientras que para una matriz D cualquiera este puede no ser el caso. Obteniendo así una mala estimación de la trayectoria $\overrightarrow{X}$.

9. Ejercicio 9

En este último ejercicio, se usa un control $U(t) = -KX$ con K encontrado previamente en el ejercicio 7 y se considera un estimador $\hat{X}$ con L encontrado en el ejercicio 8. A partir de los sistemas para $\hat{X}$ y el error $\overrightarrow{e}$, se obtiene el sistema definido por bloques:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\hat{X}} \\ \hat{e} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A - BK & LC \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\hat{X}} \\ \hat{e} \end{pmatrix}$$

Dado que tenemos K y L tales que $A - BK$ y $A - LC$ son sistemas estables, la matriz del sistema acoplado también lo será, dado que es una matriz triangular superior cuando se observa su definición por bloques, por lo que sus valores propios son los valores propios de las matrices que se encuentran en la diagonal, las figuras (7) y (8) son los resultados de la simulación para el sistema A_1.

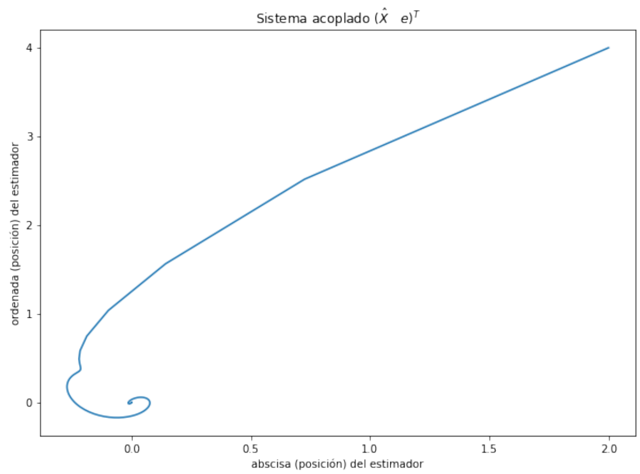

Figura 7: Simulación del sistema acoplado $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\hat{X}} \\ \hat{e} \end{pmatrix}'$, se observa que la posición del estimador tiende a 0, esto por el K elegido.

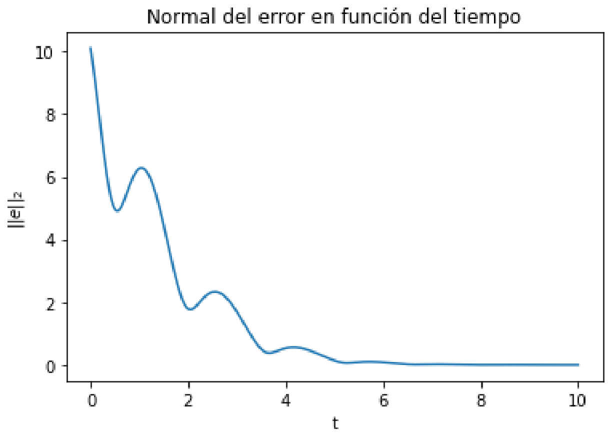

Figura 8: Se observa que el error tiende a 0, debido a la elección de L.