

Simulación de la propagación del voltaje eléctrico en el corazón ♥

Sebastián Cobaise^{1‡}, Arturo Lazcano^{1†}, Benjamín Tardy D.^{1◇}

¹Universidad de Chile

[‡]scobaise@dim.uchile.cl, [†] alazcano@dim.uchile.cl, [◇] benjamin.tardy@dim.uchile.cl

Introducción

La simulación de la propagación de voltaje en el corazón es útil ya que representan la actividad eléctrica de un órgano vital para el ser humano, esto permite variados usos en el área de la medicina principalmente.

Se considera el espacio $[0, 1] \times [0, 1]$ como el corazón, con voltaje inicial generado por el nodo sinusal en el lado izquierdo, se simula un corazón sano, con una conductividad contante y el comportamiento del voltaje en un corazón con un sector de tejido muerto con menor conductividad. El primer modelo considerado es la ecuación biestable, se simula el movimiento de iones con una ecuación de calor, considerando una función que facilita el aumento de iones en zonas con voltaje sobre un umbral, debido a la activación de procesos químicos.

El segundo modelo es el sistema de Fitzhugh-Nagumo el cual añade una nueva variable al modelo anterior para considerar el efecto de repolarización.

Por último, el modelo de bidominio considera un espacio intracelular y extracelular en el corazón, donde el voltaje en la membrana se debe a la diferencia de cargas entre ambos espacios.

Modelo Biestable

Ecuación biestable:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \text{div}(\sigma(x)\nabla u(t, x)) = f(u) & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Con $f(u) = a(x)u(1 - u)(u - \alpha(x))$

Luego, la ecuación discretizada explícita en dos dimensiones es:

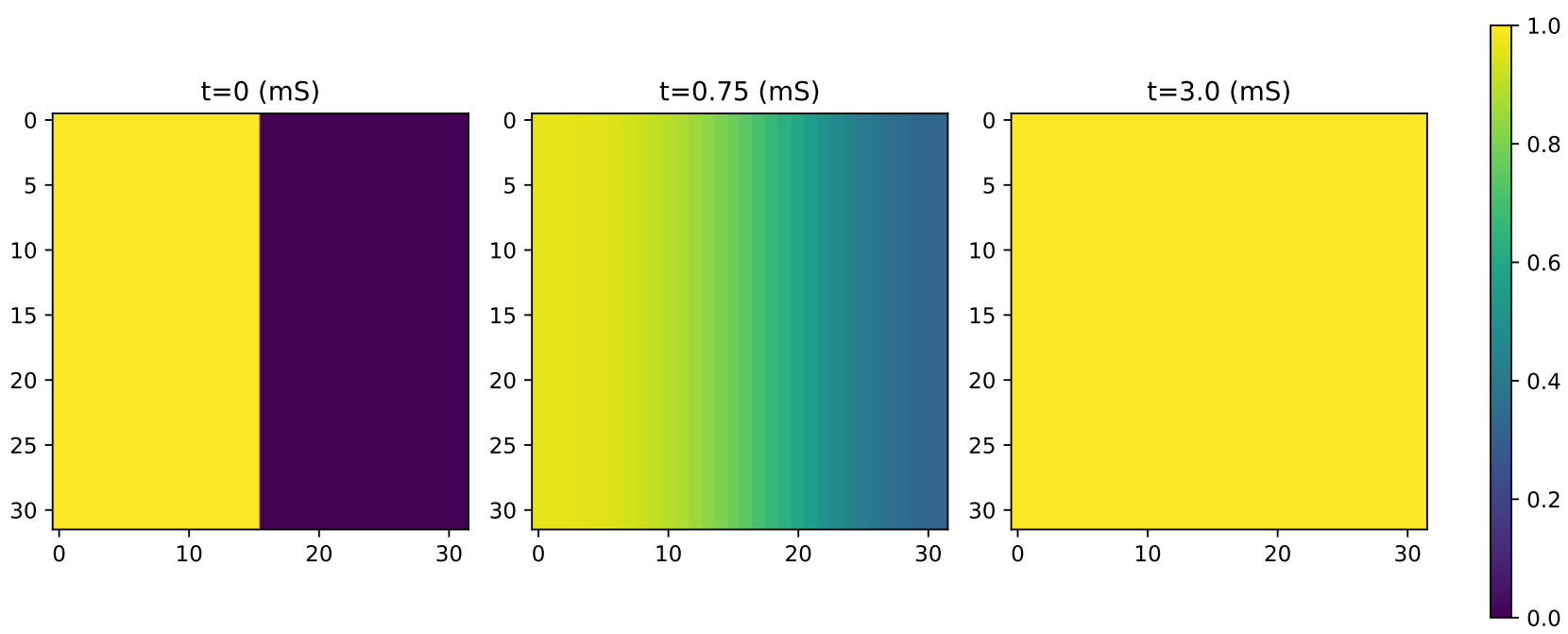
$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[\frac{\sigma_{i,j}}{h^2} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n) + a u_{i,j}^n (1 - u_{i,j}^n)(u_{i,j}^n - \alpha) \right]$$

Donde σ es constante por pedazos. Los subíndices son espaciales y los superíndices temporales.

La condición inicial se define como $u_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$ Así, la propagación de voltaje

en el corazón utilizando este modelo se puede ver en las siguientes imágenes:

Simulación del voltaje en corazón con modelo biestable



Modelo Fitzhugh-Nagumo

Un modelo que simula de mejor manera la propagación de voltaje en el corazón es el sistema de Fitzhugh-Nagumo (FN):

$$\begin{aligned} u_t(t, x) - \sigma(x)\Delta u &= f(u) - v \\ v_t &= u - cv \end{aligned}$$

En donde se incorpora una nueva variable v al modelo, para así simular la repolarización de iones lo cual es un comportamiento más realista que la ecuación biestable.

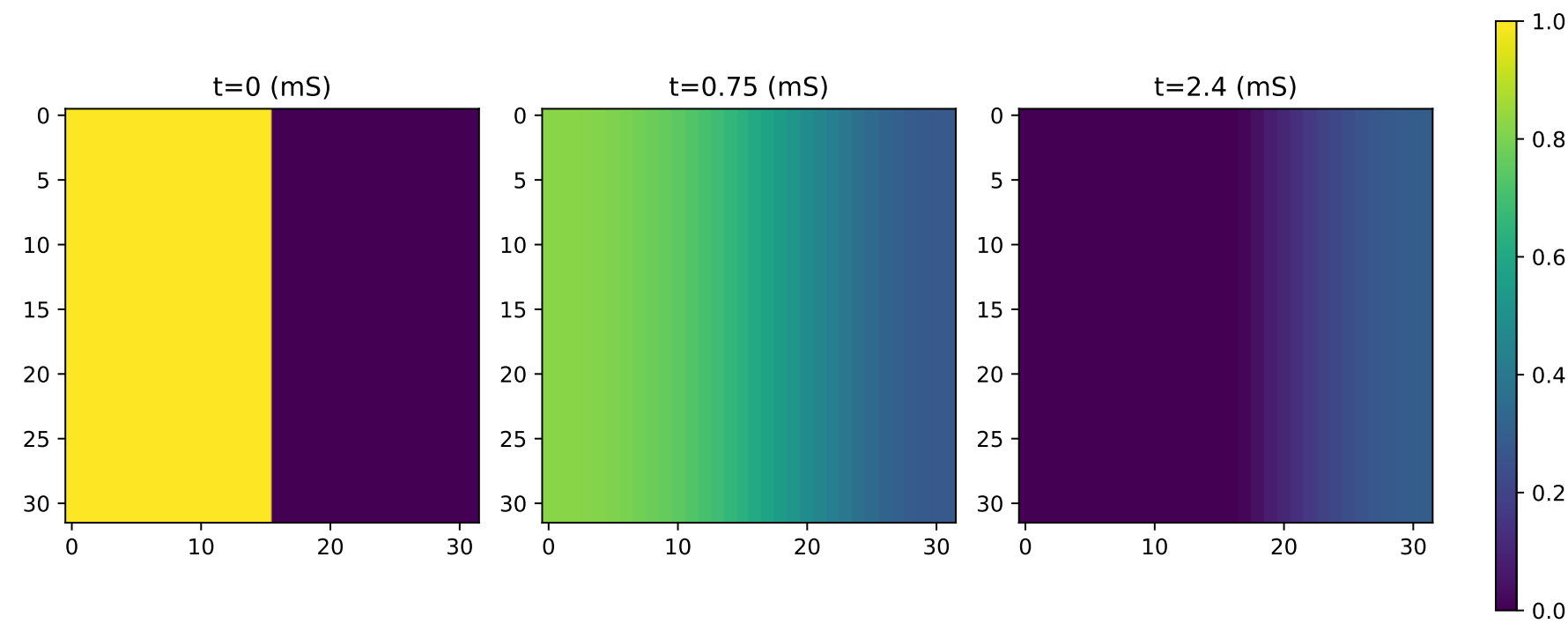
La discretización explícita del sistema anterior es la siguiente:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[\sigma_{i,j} \left[\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n}{h^2} \right] + f(u_{i,j}^n) - v_{i,j}^n \right]$$

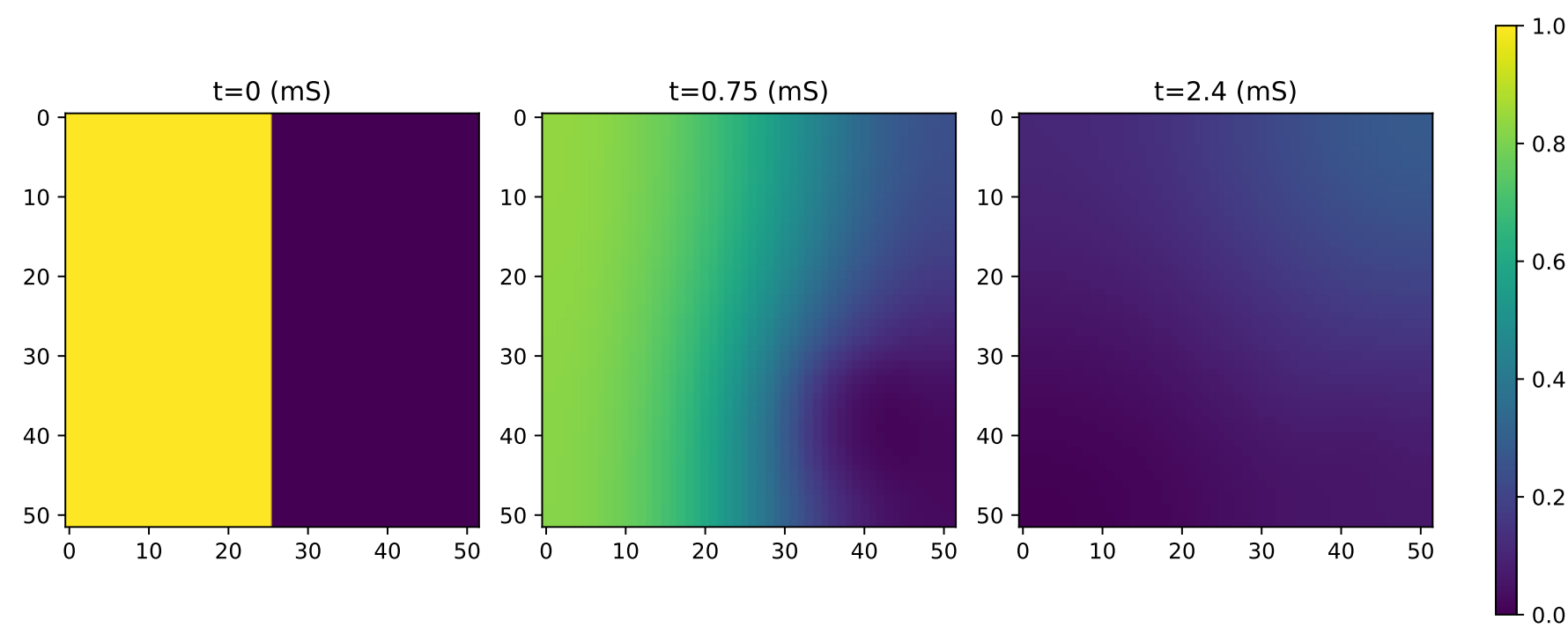
$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t (u_{i,j}^n - c v_{i,j}^n)$$

Con condiciones iniciales $u_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in [0, 1/2) \\ 1 & \text{para } x \in [1/2, 1] \end{cases}$ y $v_0(x, y) = 0$

Simulación del voltaje en corazón con modelo Fitzhugh-Nagumo



Simulación del voltaje en corazón infartado con modelo Fitzhugh-Nagumo



Modelo de Bidominio

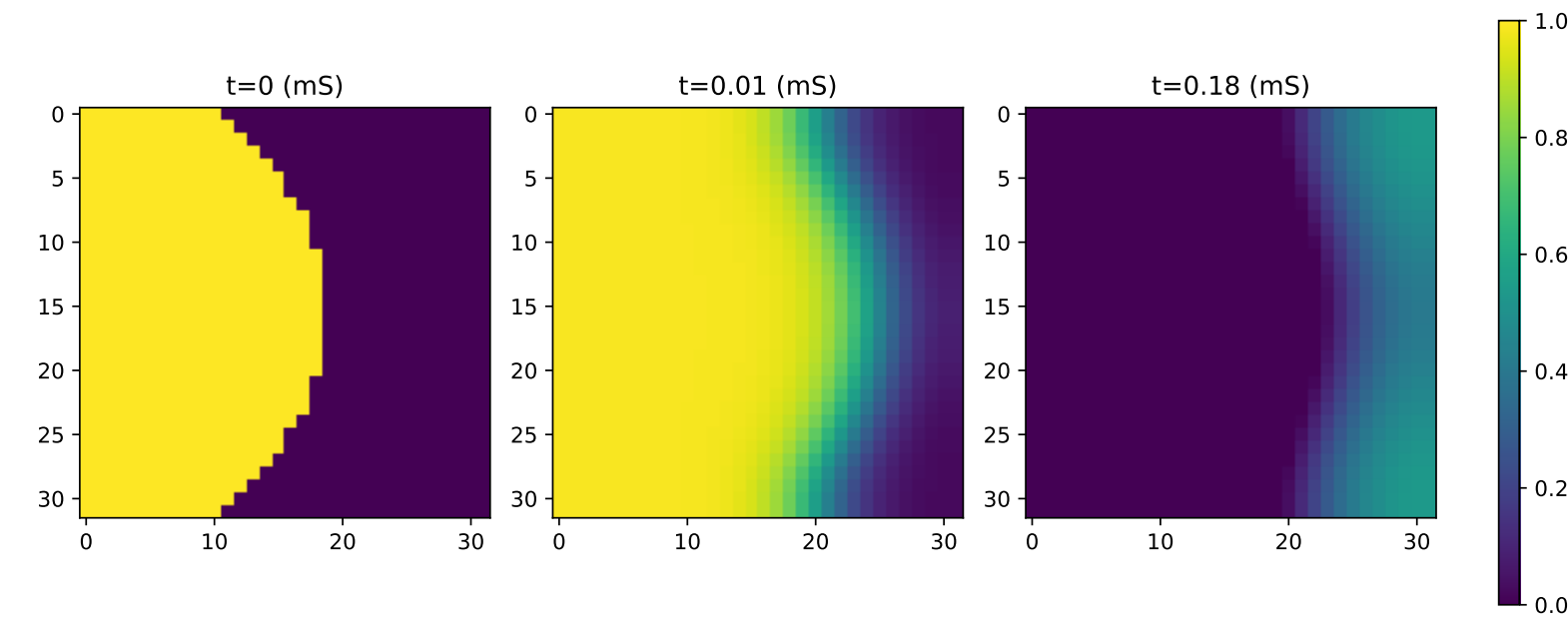
$$\begin{cases} A_m \left(C_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + I_{ion}(V_m, w) \right) - \text{div}(\sigma_i \nabla V_m) - \text{div}(\sigma_i \nabla u_e) = 0 & \text{en } \Omega_H \\ -\text{div}((\sigma_i + \sigma_e) \nabla u_e) - \text{div}(\sigma_i \nabla V_m) = 0 & \text{en } \Omega_H \\ \frac{\partial w}{\partial t} + g(V_m, w) = 0 & \text{en } \Omega_H \end{cases}$$

Donde g e I_{ion} están dadas por las siguientes fórmulas respectivamente:

$$g(V_m, w) = -V_m + c \cdot w$$

$$I_{ion}(V_m, w) = -a \cdot V_m \cdot (1 - V_m) \cdot (V_m - \alpha) + w$$

Simulación del voltaje en corazón con modelo bidominio



Simulación del voltaje en corazón infartado con modelo bidominio

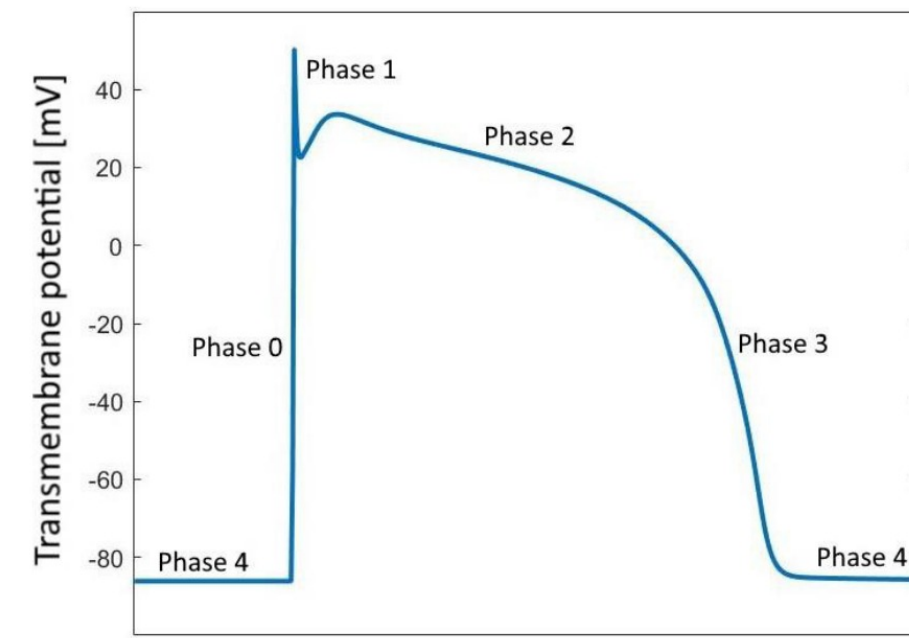
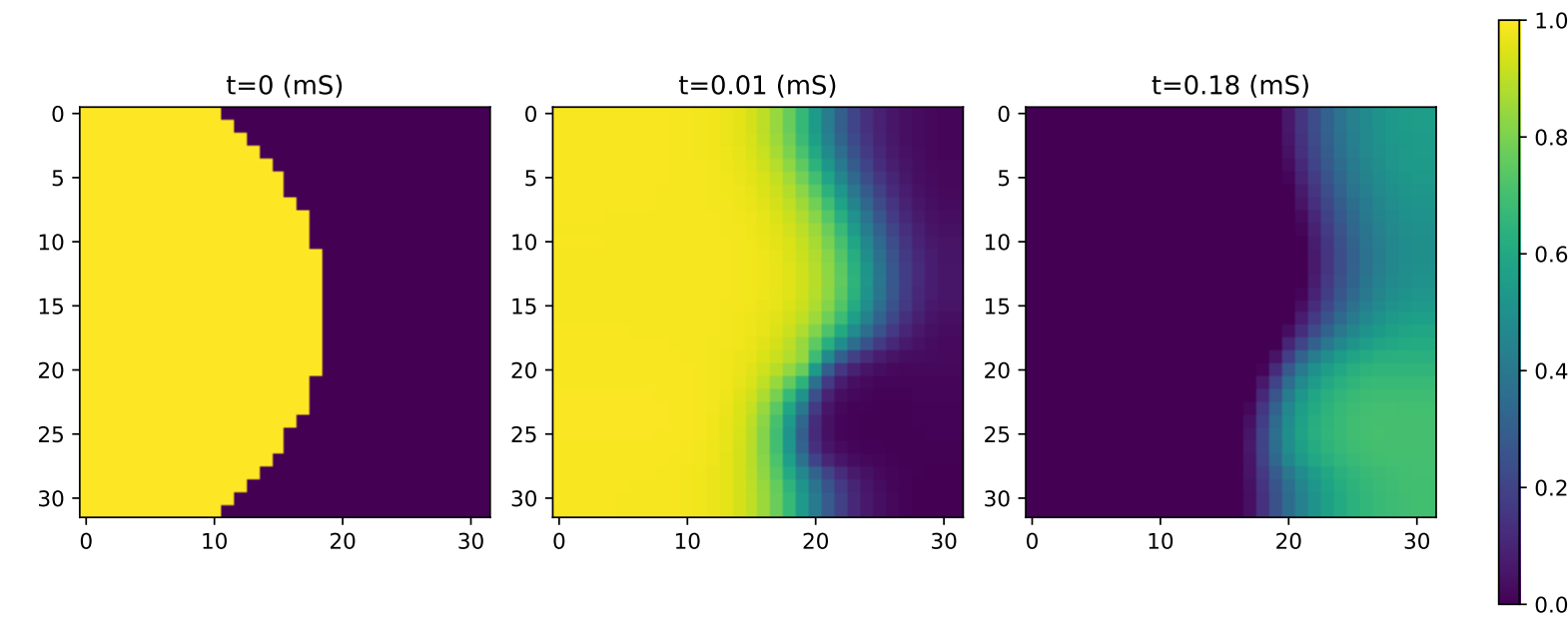


Figure 1. Potencial de acción teórico de célula cardíaca [4]

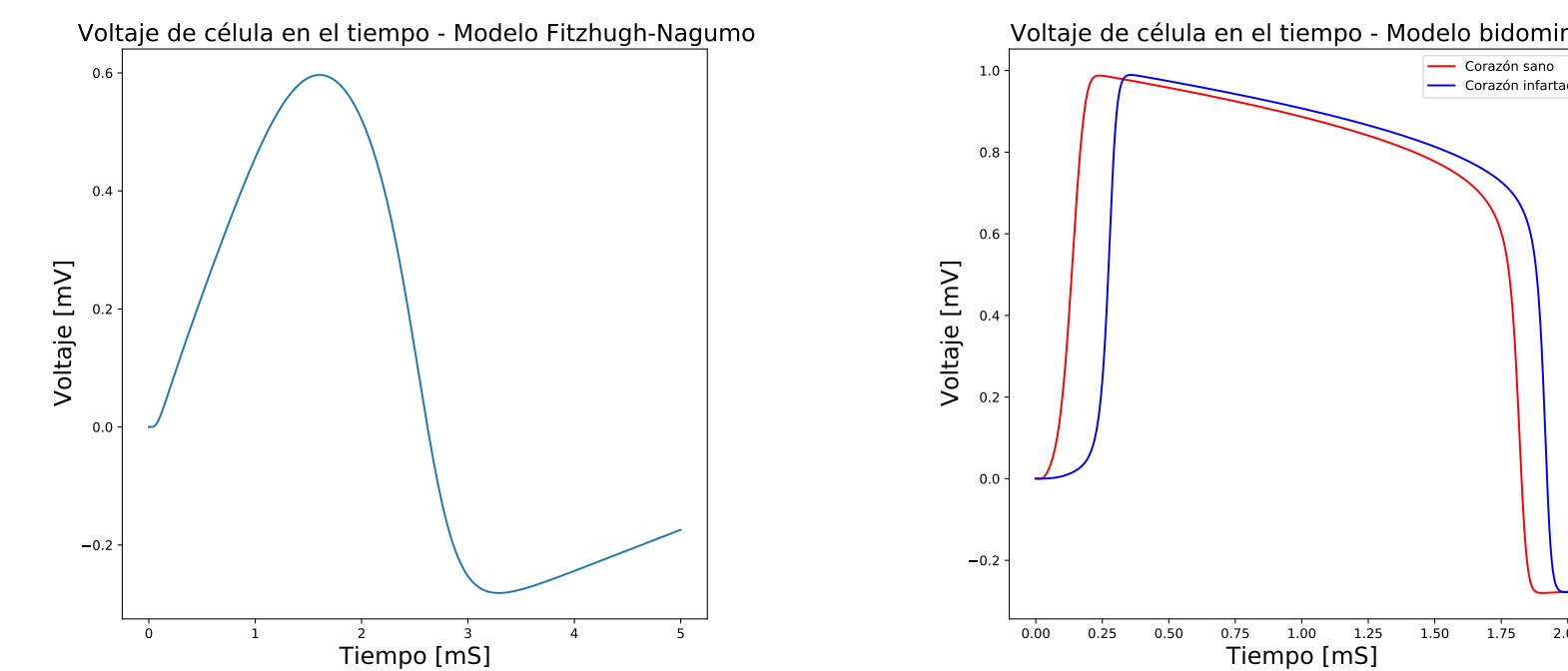


Figure 2. Potencial de acción obtenido por cada modelo

Referencias

- [1] Xin, Front propagation in heterogeneous media, SIAM Review, 42(2), (2000) 161–230.
- [2] J.P Keener, J. Sneyd, Mathematical Physiology, Springer, New York. (1998)
- [3] M. Boulakia, et. al. Mathematical Modeling of Electrocardiograms: A Numerical Study. Annals of Biomedical Engineering, Springer Verlag. (2010)
- [4] A.C. Bantle, Mathematically modeling the electrical activity of a wedge of left ventricular heart tissue, Aalborg University. (2019)