Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Tarea 2: Preparación Teórica, Laboratorio 3
Análisis Numérico de EDP: Teoría y Laboratorio MA5307

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliar: Emir Chacra
Integrantes: Sebastián Cobaise, Arturo Lazcano, Benjamín Tardy D.

1. Problema modelo

Sean $\alpha, \beta, u_\alpha, u_\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\Omega = (\alpha, \beta)$, $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $b \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Considere la siguiente ecuación de difusión-advección-reacción dada por

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + au' + bu &= f \qquad \text{sobre } \Omega \\ u(\alpha) &= u_\alpha \\ u(\beta) &= u_\beta \end{aligned} \tag{P}$$

Asuma que existe $\delta \geq 0$ tal que $b - \dfrac{1}{2}a' \geq \delta$ sobre Ω.
Un primer paso es analizar el problema con condiciones de frontera nulas, es decir, $u_A = u_B = 0$.
La formulación variacional de (P) es la siguiente: encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\forall v \in H_0^1(\Omega)\right) \quad B(u, v) = F(v) \tag{FV}$$

donde $B(u, v) = \varepsilon \displaystyle\int_\alpha^\beta u'v'\, dx + \int_\alpha^\beta au'v\, dx + \int_\alpha^\beta buv\, dx$ y $F(v) = \displaystyle\int_\alpha^\beta fv\, dx$.

Problema 1. Demuestre que la formulación variacional posee solución única aplicando el Lema de Lax-Milgram. Para ello, siga los siguientes pasos.

a. Verifique que (FV) es la formulación variacional del problema.
Partimos multiplicando la ecuación sobre Ω del problema (P) por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ que cumpla con las condiciones de borde (ie, $v(\beta) = v(\alpha) = 0$, ya que asumimos $u_\alpha = u_\beta = 0$):
$-\varepsilon u'' + au' + bu = f / \cdot v \iff -\varepsilon u''v + au'v + buv = fv$
Integramos en el dominio $\Omega = (\alpha, \beta)$:

$$\int_\alpha^\beta -\varepsilon u''v \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta buv \cdot dx = \int_\alpha^\beta fv \cdot dx \tag{1}$$

Utilizamos integración por partes en el término de más a la izquierda y notamos que:
$\int_\alpha^\beta u''v \cdot dx = u'v|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u'v' \cdot dx$
Por propiedades de v:
$u'(\beta)v(\beta) - u'(\alpha)v(\alpha) = u'(\beta) * 0 - u'(\alpha) * 0 = 0 - 0 = 0$
Con lo anterior:
$\int_\alpha^\beta u''v \cdot dx = -\int_\alpha^\beta u'v' \cdot dx$
Por tanto:
$\int_\alpha^\beta -\varepsilon u''v dx = \varepsilon \int_\alpha^\beta u'v' \cdot dx$
Reemplazando este valor en la expresión en (1) se obtiene:

$\varepsilon \int_\alpha^\beta u'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta buv \cdot dx = \int_\alpha^\beta fv \cdot dx$

Lo que equivale, por definición de los funcionales, a:

$B(u, v) = F(v)$

b. Verifique que B es bilineal y continua en $H_0^1(\Omega)$.

Partiremos verificando linealidad en la primera componente:

Sean $u_1, u_2 \in H_0^1$ y $c \in \mathbb{R}$:

$B(cu_1 + u_2, v) = \varepsilon \int_\alpha^\beta (cu_1 + u_2)'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta a(cu_1 + u_2)'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta b(cu_1 + u_2)v \cdot dx$

$= \varepsilon \int_\alpha^\beta (cu_1' + u_2')v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta a(cu_1 + u_2)'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta b(cu_1 + u_2)v \cdot dx$

$= \varepsilon \int_\alpha^\beta cu_1'v' + u_2'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta acu_1'v + u_2'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta bcu_1v + bu_2v \cdot dx$

$= \varepsilon c \int_\alpha^\beta u_1'v' \cdot dx + \varepsilon \int_\alpha^\beta u_2'v' \cdot dx + c\int_\alpha^\beta au_1'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta u_2'v \cdot dx + c\int_\alpha^\beta bu_1v \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu_2v \cdot dx$

$= c\varepsilon \int_\alpha^\beta u_1'v' \cdot dx + c\int_\alpha^\beta au_1'v \cdot dx + c\int_\alpha^\beta bu_1v \cdot dx + \varepsilon \int_\alpha^\beta u_2'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta u_2'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu_2v \cdot dx$

$= c(\varepsilon \int_\alpha^\beta u_1'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au_1'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu_1v \cdot dx) + \varepsilon \int_\alpha^\beta u_2'v' \cdot dx + \int_\alpha^\beta u_2'v \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu_2v \cdot dx$

$= cB(u_1, v) + B(u_2, v)$

Procedemos a realizar el cálculo con la segunda componente:

Sean $v_1, v_2 \in H_0^1$ y $c \in \mathbb{R}$:

$B(u, cv_1 + v_2) = \varepsilon \int_\alpha^\beta u'(cv_1 + v_2)' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'(cv_1 + v_2) \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu(cv_1 + v_2) \cdot dx$

$= \varepsilon \int_\alpha^\beta u'cv_1' + u'v_2' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'cv_1 + au'v_2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta bucv_1 + buv_2 \cdot dx$

$= \varepsilon \int_\alpha^\beta u'cv_1' \cdot dx + \varepsilon \int_\alpha^\beta u'v_2' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'cv_1 \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v_2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta bucv_1 \cdot + \int_\alpha^\beta buv_2 \cdot dx$

$= c\varepsilon \int_\alpha^\beta u'v_1' \cdot dx + \varepsilon \int_\alpha^\beta u'v_2' \cdot dx + c\int_\alpha^\beta au'v_1 \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v_2 \cdot dx + c\int_\alpha^\beta buv_1 \cdot + \int_\alpha^\beta buv_2 \cdot dx$

$= c(\varepsilon \int_\alpha^\beta u'v_1' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v_1 \cdot dx + \int_\alpha^\beta buv_1 \cdot) + \varepsilon \int_\alpha^\beta u'v_2' \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'v_2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta buv_2 \cdot dx$

$= cB(u, v_1) + B(u, v_2)$

Teniendo así que B(u,v) es lineal en ambas componentes (ie, es bilineal).

Se procede a verificar la continuidad:

$B(u, v) = \varepsilon \int_\alpha^\beta u'v'dx + \int^\beta -\alpha au'vdx + \int_\alpha^\beta buvdx$

$|B(u, v)| = |\varepsilon \int_\alpha^\beta u'v'dx + \int^\beta -\alpha au'vdx + \int_\alpha^\beta buvdx|$

$\leq |\varepsilon \int_\alpha^\beta u'v'dx| + |\int^\beta -\alpha au'vdx| + |\int_\alpha^\beta buvdx|$

$\leq |\varepsilon| \int_\alpha^\beta |u'v'|dx + \int^\beta -\alpha |au'v|dx + \int_\alpha^\beta |buv|dx$

Por hipótesis:

$a \in W^{1,\infty} \subset L^\infty; b \in L^\infty \Rightarrow ||a||_\infty = C_1 < \infty; ||b||_\infty = C_2 < \infty$

Por tanto:

$|B(u, v)| \leq \varepsilon \int_\alpha^\beta |u'v'|dx + C_1 \int_\alpha^\beta |u'v|dx + \int_\alpha^\beta |uv|dx$

Se define: K=máxε, C_1, C_2 Así:

$|B(u, v)| \leq K(\int_\alpha^\beta |u'v'|dx + \int_\alpha^\beta |u'v|dx + \int_\alpha^\beta |uv|dx)$

$= K(||u'v'||_1 + ||u'v||_1 + ||uv||_1)$

Como u,v $\in H_0^1$, se tiene, por definición, que $u', v' \in L_2$. Por lo anterior, es posible utilizar la desigualdad de Hölder en cada una de las normas presentes en la igualdad anterior. Así:

$|B(u, v)| \leq K(||u'||_2||v'||_2 + ||u'||_2||v||_2 + ||u||_2||v||_2)$

$= K(||u'||_2(||v'||_2 + ||v||_2) + ||u||_2||v||_2)$

$\leq K(||u'||_2(||v'||_2 + ||v||_2) + ||u||_2(||v'||_2 + ||v||_2))$

$= K(||u'||_2(||v'||_2 + ||v||_2) + ||u||_2(||v'||_2 + ||v||_2)$

$= K((||u'||_2 + ||u||_2)(||v'||_2 + ||v||_2))$

Por definición: $||u||_{H_0^1} = ||u'||_2 + ||u||_2$ En consecuencia:

$|B(u, v)| \leq K||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}$

Por lo tanto, B es continua en ambas variables con respecto a $||.||_{H_0^1}$ con constante de continuidad K=máxε, C_1, C_2

c. Verifique que B es coerciva.

Indicación: Considere la identidad $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(au^2\right) = \frac{1}{2}a'u^2 + au'u$. En el caso en que $\delta = 0$, aplique la desigualdad de Friedrichs-Poincaré convenientemente.

Partimos evaluando:
$B(u,u) = \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'u \cdot dx + \int_\alpha^\beta bu^2 \cdot dx$
Hacemos uso de la desigualdad con $\delta = 0$:
$b - a'/2 \geq 0 \Rightarrow b \geq a'/2$
De esta forma:

$$B(u,u) \geq \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta au'u \cdot dx + \int_\alpha^\beta \frac{a'}{2}u^2 \cdot dx \tag{2}$$

Considerando la igualdad de la indicación:
$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(au^2) = \frac{1}{2}a'u^2 + au'u \iff au'u = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(au^2) - \frac{1}{2}a'u^2$
Reemplazando en (2):
$B(u,u) \geq \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(au^2) \cdot dx - \int_\alpha^\beta \frac{a'}{2}a'u^2 \cdot dx + \int_\alpha^\beta \frac{a'}{2}u^2 \cdot dx$
$= \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + +\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}(au^2) \cdot dx$
$= \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + +\frac{1}{2}(a(\beta)u_\beta^2 - a(\alpha)u_\alpha^2)$
$= \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + +\frac{1}{2}(a(\beta) * 0^2 - a(\alpha) * 0^2)$
$= \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx + +\frac{1}{2}0$
$= \varepsilon\int_\alpha^\beta (u')^2 \cdot dx$
$= \varepsilon||u||_{H_0^1}^2$
Concluyendo así que B(u,v) es coerciva con constante de coercividad ε

d. Verifique que F es continua y concluya.

$|F(v)| = |\int_\alpha^\beta fvdx| \leq \int_\alpha^\beta |fv|dx = ||fv||_1$
Por hipótesis f,v $\in L_2$. Se procede usando la desigualdad de Hölder:
$|F(v)| \leq ||f||_2||v||_2$
Se define K = $||f||_2$: Así:
$|F(v)| \leq K||v||_2 \leq K(||v'||_2 + ||v||_2) = K||v||_{H_0^1}$
Con lo anterior, se verifica que F es continua con la norma $||.||_{H_0^1}$
Habiendo verificado todo lo anterior, es posible notar que se tienen las hipótesis necesarias para hacer uso del teorema de Lax-Milgram:
Considerando $H_0^1 \subset L_2$ espacio de Hilbert y al funcional B: $H_0^1 X H_0^1 \to \mathbb{R}$ bilineal, continuo y coercivo se tiene que todo $f: H_0^1 \to R$ (en particular F(v), que es lineal por linealidad de la integral) lineal y continuo tiene un único $u_0 \in H_0^1$ que lo representa. Esto último quiere decir que: $\exists! u_0 \in H_0^1 : B(u_0, v) = F(v), \forall v \in H_0^1$. En otras palabras, existe una única función u $\in H_0^1$ que satisface la ecuación B(u,v) = F(v).

El análisis del caso con condiciones de frontera no nulas requiere de una solución particular, lo cual cambia el funcional F. Sin embargo, determinar un esquema para este caso es mucho más simple desde una perspectiva práctica. Además, para simplificar el modelo, se asumirá que a y b son constantes, no así f.

2. Un esquema discretizado con polinomios de grado 1

Considere $N \in \mathbb{N}$ y los **nodos** $\{x_i\}_{i=0}^{N+1} \subseteq \Omega$ como una discretización de dicho dominio tal que $x_{i+1} > x_i$. Además, se definen los **elementos** $T_j = [x_j, x_{j+1}]$ para $j \in \{0, \ldots, N\}$, que juntos forman la **malla de discretización** $\mathcal{T}_h = \{T_j\}_{j=0}^{N}$. Por último, si tomamos $h_j = x_{j+1} - x_j$, se define el **nivel de discretización** como $h = \max\limits_{1 \leq j \leq N} h_j$.

Si separamos el dominio en sus elementos, la formulación variacional anterior (FV) puede escribirse como

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} \varepsilon u'v' + au'v + buv \, dx = \sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} fv \, dx$$

Buscaremos una solución numérica para el problema modelo en el espacio de dimensión finita V_h de funciones continuas y polinomiales a trozos de grado a lo más 1, es decir:

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}(\Omega) \mid (\forall j \in \{1, \ldots, N\}) \quad v|_{T_j} \in \mathbb{P}_1(T_j) \right\}$$

donde $\mathbb{P}_1(T_j)$ es el espacio de polinomios de grado a lo más 1 con dominio en T_j.

Ello define el siguiente problema discretizado a resolver: hallar $u_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h$ tal que

$$\left(\forall v_h \in H_0^1(\Omega) \cap V_h\right) \quad B(u_h, v_h) = F(v_h) \tag{FVD}$$

Problema 2. Verifique que esta formulación posee solución única.
Indicación: Observe que $H_0^1(\Omega) \cap V_h$ es un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$.

Por indicación, notamos que $H_0^1 \cap V_h$ es un subespacio de dimensión finita en H_0^1.
En efecto, $H_0^1 \cap V_h \subset H_0^1$, $H_0^1 \cap V_h \subset V_h$ y V_h tiene dimensión finita.
Con esto, sabemos que toda función en $H_0^1 \cap V_h$ tiene representación única con elementos de una base v_{i0}^N.
Supongamos que existen 2 soluciones u_1, u_2 de la formulación variacional discreta (FVD). En otras palabras:

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} \varepsilon u_1'v' + au'^1 v + bu_1 v \, dx = \sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} fv \, dx = \sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} \varepsilon u_2'v' + au_2'v + bu_2 v \, dx$$

En donde u_1, u_2, v tienen una representación única en la la base arbitraria v_{i0}^N.
Escribiendo a cada función como su representación en la base v_{i0}^N se tiene:

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} \varepsilon(\alpha_{j_1}^{u_1'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_1'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) + a(\alpha_{j_1}^{u_1'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_1'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) + b(\alpha_{j_1}^{u_1'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_1'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) \, dx =$$

$$\textstyle\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} f(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) \, dx$$

(3)

De manera análoga:

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} \varepsilon(\alpha_{j_1}^{u_2'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_2'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) + a(\alpha_{j_1}^{u_2'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_2'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) + b(\alpha_{j_1}^{u_2'} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{u_2'} v_{j_2})(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) \, dx =$$

$$\textstyle\sum_{j=0}^{N} \int_{T_j} f(\alpha_{j_1}^{v} v_{j_1} + \alpha_{j_2}^{v} v_{j_2}) \, dx$$

(4)

Recalcar que al tratarse de polinomios de grado 1, están formados por una base de 2 elementos y por eso aparecen 2 coeficientes formando a cada función en cada intervalo T_j. Por lo anterior, la base de las soluciones tiene (N+1)*2 elementos. Al tener en cuenta que u_1 y u_2 son soluciones de (FVD), se tiene la igualdad $\forall v \in H_0^1$, en particular para los v_{j_1}, v_{j_2} de la base. Tomando un $v \in H_0^1$ tal que $\alpha_{0_1}^{v} = \alpha_{0_2}^{v} = 1$ y todos los demás $\alpha_{0_1}^{v} = \alpha_{0_2}^{v} = 0$ se puede notar que:

$$\int_{T_0} \varepsilon(\alpha_{0_1}^{u_1'} v_{0_1} + \alpha_{0}^{u_1'} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + a(\alpha_{0_1}^{u_1'} v_{0_1} + \alpha_{0_2}^{u_1'} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + b(\alpha_{0_1}^{u_1} v_{0_1} + \alpha_{0_2}^{u_1} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2})\, dx =$$

$\int_{T_0} f(v_{0_1} + v_{0_2})\, dx$

De igual manera:

$\int_{T_0} \varepsilon(\alpha_{0_1}^{u_2'} v_{0_1} + \alpha_{0}^{u_2'} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + a(\alpha_{0_1}^{u_2'} v_{0_1} + \alpha_{0_2}^{u_2'} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + (\alpha_{0_1}^{u_2} v_{0_1} + \alpha_{0_2}^{u_2} v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2})\, dx =$

$\int_{T_0} f(v_{0_1} + v_{0_2})\, dx$

Realizando la resta entre ambas expresiones se obtiene:

$\int_{T_0} \varepsilon\, ((\alpha_{0_1}^{u_1'} - \alpha_{0_1}^{u_2'}) v_{0_1} + (\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + a((\alpha_{0_1}^{u_1'} - \alpha_{0_1}^{u_2'}) v_{0_1} + (\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) + b((\alpha_{0_1}^{u_1} - \alpha_{0_1}^{u_2}) v_{0_1} + (\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) v_{0_2})(v_{0_1} + v_{0_2}) dx = 0$

(5)

Tomando la base canónica $v_{j1} = 1, v_{j2} = x, \forall j \in 0, ..., N$ es posible realizar las siguientes apreciaciones: $u_i' = \alpha_1^{u_i}$, en donde $\alpha_1^{u_i}$ corresponde al coeficiente que multiplica al elemento x de la base canónica y que forma a $u_i = \alpha_0^{u_i} + \alpha_1^{u_i} x\ i \in 1, 2$.

Por lo anterior, es posible escribir (5) de la siguiente forma:

$$\int_{T_0} \varepsilon\, ((\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) x (1 + x) + a((\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) x)(1 + x) + b((\alpha_{0_1}^{u_1} - \alpha_{0_1}^{u_2}) 1 + (\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) x)(1 + x) dx = 0$$

Pues $\alpha_0^{u_1'} = \alpha_0^{u_2'} = 0$

Factorizando:

$$\int_{T_0} (1 + x)(\varepsilon\, ((\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) x + a((\alpha_{0_2}^{u_1'} - \alpha_{0_2}^{u_2'}) x) + b((\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) x))) dx = 0$$

Sabemos que $\varepsilon > 0$ y que además $\alpha_{0_2}^{u_i'} = \alpha_{0_2}^{u_i}$, por tanto la expresión queda:

$$\int_{T_0} (1 + x)\, (\varepsilon(\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) x + a((\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) x) + b((\alpha_{0_1}^{u_1} - \alpha_{0_1}^{u_2}) 1 + (\alpha_{0_2}^{u_1} - \alpha_{0_2}^{u_2}) x)) dx = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{0_1}^{u^1} - \alpha_{0_1}^{u^2} = 0 \wedge \alpha_{0_2}^{u^1} - \alpha_{0_2}^{u^2} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_{0_1}^{u^1} = \alpha_{0_1}^{u^2} \wedge \alpha_{0_2}^{u^1} = \alpha_{0_2}^{u^2}$$

Haciendo el procedimiento análogo en cada intervalo T_j es posible concluir que: $\forall j \in 0, ..., N, i \in 1, 2, \alpha_{j_i}^{u^1} = \alpha_{j_i}^{u^2}$

Con lo anterior, es posible conlcuir que las funciones $u_{i]}$ soluciones de (FVD) son tienen los mismos coeficientes y por tanto son iguales. En otra palabras, la solución es única.

La base más simple que permite caracterizar V_h está dada por $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N+1}$, donde

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_0}(x_1 - x) & \text{si } x \in T_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_N}(x - x_N) & \text{si } x \in T_N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(\forall j \in \{1, \ldots, N\}) \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{j-1}}(x - x_{j-1}) & \text{si } x \in T_{j-1} \\ \dfrac{1}{h_j}(x_{j+1} - x) & \text{si } x \in T_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que $\operatorname{sop}(\varphi_j) = T_{j-1} \cup T_j$, con la clara excepción del caso $j = 0$ y $j = N+1$. Si $u_h^j = u_h(x_j)$ y $v_h^k = v_h(x_k)$, entonces

$$u_h = \sum_{j=0}^{N+1} u_h^j \varphi_j \qquad v_h = \sum_{k=0}^{N+1} v_h^k \varphi_k$$

Problema 3. Sea $j \in \{0, \ldots, N+1\}$. Se denota $\bar{x}_j$ como el punto medio de T_j. Pruebe que

a. $\varphi_j(x_j) = 1$ y que $\varphi_j(x_k) = 0$ para $k \neq j$.

b. $\varphi_j(\bar{x}_j) = \varphi_{j+1}(\bar{x}_j) = \dfrac{1}{2}$.

Para la parte a, se partiran estudiando los casos ”bordes”(cuando $j, k \in 0, N+1$):
Partimos con el caso j = 0, k = N+1:
$\varphi_j(x_j) = \varphi_0(x_0) = \frac{x_1 - x_0}{h_0} = \frac{h_0}{h_0} = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_0(x_{N+1}) = 0$ [Por definición,$x_{N+1} \notin T_0$]
Seguimos con el caso j = 0, k $\in$ 1,...,N:
$\varphi_j(x_j) = \varphi_0(x_0) = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_0(x_k) = \frac{x_1 - x_1}{h_0} = \frac{0}{h_0} = 0$, si k = 1
$\varphi_j(x_k) = \varphi_0(x_k) = 0$, si k $\neq$ 1
Seguimos con los casos j = N+1:
Si k = N:
$\varphi_j(x_j) = \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = \frac{x_{N+1} - x_N}{h_N} = \frac{h_N}{h_N} = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_{N+1}(x_N) = \frac{x_N - x_N}{h_N} = \frac{0}{h_N} = 0$
Cuando $k \in 0, ...N-1$:
$\varphi_j(x_j) = \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = \frac{x_{N+1} - x_N}{h_N} = \frac{h_N}{h_N} = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_{N+1}(x_k) = 0$ [$x_k \in T_k$, por definición de los T_j se tiene que $x_k \in T_k \cap T_{k+1}$ y en ningún otro T_j]
Tenemos que: $j \neq k$
Puede ser que: j = k+1 $\vee$ j = k-1 $\vee$ j = k+n, $n \in \mathbb{Z}\ 0$
Habiendo analizado los casos bordes ya es posible concluir que en el resto de casos se cumple que:
j = k+1:
$\varphi_j(x_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} = \frac{h_j}{h_j} = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_{k+1}(x_k) = \frac{x_k - x_k}{h_k} = \frac{0}{h_j} = 0$
j = k-1:
$\varphi_j(x_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} = \frac{h_j}{h_j} = 1$
$\varphi_j(x_k) = \varphi_{k-1}(x_k) = 0$; [$x_k \notin T_{k-1}$]
En el resto de casos:
$\varphi_j(x_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} = \frac{h_j}{h_j} = 1$
$\varphi_j(x_k) = 0$; [$x_k \notin T_j$, $\forall j \notin k, k-1$]
Concluyendo así la parte a.
Para la parte b, vemos que por definición:
$\bar{x_j} = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}$

Al igual que antes, partiremos analizando los casos borde:
Cuando j = 0:
$\varphi_j(\bar{x_j}) = \varphi_0(\bar{x_0}) = \frac{x_1 - \frac{x_1+x_0}{2}}{h_0} = \frac{2x_1 - x_1 + x_0}{2h_0} = \frac{x_1 - x_0}{2h_0} = \frac{h_0}{2h_0} = \frac{1}{2}$
$\varphi_{j+1}(\bar{x_j}) = \varphi_1(\bar{x_0}) = \frac{\bar{x_0} - x_0}{h_0} = \frac{\frac{x_0+x_1}{2} - x_0}{h_0} = \frac{x_0 + x_1 - 2x_0}{2h_0} = \frac{x_1 - x_0}{2h(0)} = \frac{h_0}{2h_0} = \frac{1}{2}$
Cuando j = N:
$\varphi_j(\bar{x_j}) = \varphi_N(\bar{x_N}) == \frac{x_{N+1} - \bar{x_j}}{h_N} = \frac{x_{N+1} - \frac{x_N + x_{N+1}}{2}}{h_0} = \frac{2x_{N+1} - x_N - x_{N+1}}{2h_N} = \frac{x_{N+1} - x_N}{2h_N} = \frac{h_N}{2h_N} = \frac{1}{2}$
$\varphi_{j+1}(\bar{x_j}) = \varphi_{N+1}(\bar{x_N}) = \frac{\bar{x_N} - x_N}{h_N} = \frac{\frac{x_{N+1}+x_N}{2} - x_N}{h_N} = \frac{x_{N+1} + x_N - 2x_N}{2h_0} = \frac{x_{N+1} - x_N}{2h(N)} = \frac{h_N}{2h_N} = \frac{1}{2}$
Para el resto de casos:
$\varphi_j(\bar{x_j}) = \frac{x_{j+1} - \bar{x_j}}{h_N} = \frac{x_{j+1} - \frac{x_j + x_{j+1}}{2}}{h_j} = \frac{2x_{j+1} - x_j - x_{j+1}}{2h_j} = \frac{x_{j+1} - x_j}{2h_j} = \frac{h_j}{2h_j} = \frac{1}{2}$
$\varphi_{j+1}(\bar{x_j}) = \frac{\bar{x_j} - x_j}{h_j} = \frac{\frac{x_{j+1}+x_j}{2} - x_j}{h_j} = \frac{x_{j+1} + x_j - 2x_j}{2h_0} = \frac{x_{j+1} - x_j}{2h(j)} = \frac{h_j}{2h_j} = \frac{1}{2}$
Concluyendo así la igualdad.

3. Método de ensamble

La siguiente es una forma práctica de implementar este esquema, el cual se conoce como **método de ensamble**. Este método consiste en analizar cada una de las integrales del esquema discreto en cada uno de los elementos.
Si denotamos $\boldsymbol{u}_h = \left(u_h^k\right)_{k=0}^{N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$ y $\boldsymbol{v}_h = \left(v_h^k\right)_{k=0}^{N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$, entonces, para $j \in \{0, ..., N\}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{T_j} \varepsilon u' v' \, dx &= \varepsilon \int_{T_j} \left(u_h^j \varphi_j' + u_h^{j+1} \varphi_{j+1}'\right)\left(v_h^j \varphi_j' + v_h^{j+1} \varphi_{j+1}'\right) \, dx = \boldsymbol{v}_h^T \left(\varepsilon \boldsymbol{A}_j\right) \boldsymbol{u}_h \\
\int_{T_j} a u' v \, dx &= a \int_{T_j} \left(u_h^j \varphi_j' + u_h^{j+1} \varphi_{j+1}'\right)\left(v_h^j \varphi_j + v_h^{j+1} \varphi_{j+1}\right) \, dx = \boldsymbol{v}_h^T \left(a \boldsymbol{B}_j\right) \boldsymbol{u}_h \\
\int_{T_j} b u v \, dx &= b \int_{T_j} \left(u_h^j \varphi_j + u_h^{j+1} \varphi_{j+1}\right)\left(v_h^j \varphi_j + v_h^{j+1} \varphi_{j+1}\right) \, dx = \boldsymbol{v}_h^T \left(b \boldsymbol{C}_j\right) \boldsymbol{u}_h \\
\int_{T_j} f v dx &= \int_{T_j} f \left(v_h^j \varphi_j + v_h^{j+1} \varphi_{j+1}\right) \, dx = \boldsymbol{v}_h^T \boldsymbol{f}_j
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j, \boldsymbol{C}_j \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$ son matrices dispersas, al igual que el vector $\boldsymbol{f}_j \in \mathbb{R}^{N+2}$. Si

$$
\boldsymbol{A}^h = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon \boldsymbol{A}_j + a \boldsymbol{B}_j + b \boldsymbol{C}_j \qquad \boldsymbol{f}_h = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{f}_j
$$

entonces, se cumple que

$$
\left(\forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{R}^{N+2}\right) \quad \boldsymbol{v}_h^T \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u}_h = B\left(u_h, v_h\right) = F\left(v_h\right) = \boldsymbol{v}_h^T f_h
$$

En otras palabras, $\boldsymbol{u}_h$ es solución del sistema

$$
\boldsymbol{A}^h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}_h \tag{E}
$$

Las matrices $\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}_j$ y $\boldsymbol{C}_j$ se conocen como **matrices locales del elemento** T_j. En este caso particular, es posible escribir explícitamente todas las integrales involucradas. En efecto, se tiene que $\boldsymbol{A}_j = \left(a_{ik}^j\right)_{i,k}$, $\boldsymbol{B}_j = \left(b_{ik}^j\right)_{i,k}$ y $\boldsymbol{C}_j = \left(c_{ik}^j\right)_{i,k}$ son nulas, excepto cuando $i, k \in \{j, j+1\}$.
Por ejemplo, se tiene que

$$
\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix}
\langle \varphi_0', \varphi_0' \rangle_{T_0} & \langle \varphi_1', \varphi_0' \rangle_{T_0} & 0 & \cdots & 0 \\
\langle \varphi_0', \varphi_1' \rangle_{T_0} & \langle \varphi_1', \varphi_1' \rangle_{T_0} & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\quad
\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \langle \varphi_1', \varphi_1 \rangle_{T_1} & \langle \varphi_2', \varphi_1 \rangle_{T_1} & & & \vdots \\
\vdots & \langle \varphi_1', \varphi_2 \rangle_{T_1} & \langle \varphi_2', \varphi_2 \rangle_{T_1} & & & \vdots \\
\vdots & & & 0 & & \vdots \\
& & & & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{f}_N = \begin{pmatrix}
0 \\
\vdots \\
0 \\
\langle f, \varphi_N \rangle_{T_N} \\
\langle f, \varphi_{N+1} \rangle_{T_N}
\end{pmatrix}
$$

Por lo tanto, la construcción de estas matrices y vectores se reduce a calcular algunas integrales sencillas.

Problema 4. Demuestre que, para todo $j \in \{0, \ldots, N\}$

a. $\left\langle \varphi_j', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \dfrac{1}{h_j}$ y $\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = -\dfrac{1}{h_j}$

b. $\left\langle \varphi_j', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = -\dfrac{1}{2}$ y $\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \dfrac{1}{2}$

c. $\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_{T_j} = \langle \varphi_{j+1}, \varphi_{j+1} \rangle_{T_j} = \dfrac{h_j}{3}$ y $\langle \varphi_j, \varphi_{j+1} \rangle_{T_j} = \langle \varphi_{j+1}, \varphi_j \rangle_{T_j} = \dfrac{h_j}{6}$

Partimos calculando las derivadas de los diferentes φ_i:

$$.\quad \varphi_0'(x) = \{ \begin{array}{cc} \dfrac{-1}{h_0} & \text{si } x \in T_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array}$$

$$.\quad \varphi_{N+1}'(x) = \{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{h_N} & \text{si } x \in T_N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array}$$

$$(\forall j \in \{1, \ldots, N\}) \quad \varphi_j'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{j-1}} & \text{si } x \in T_{j-1} \\ \dfrac{-1}{h_j} & \text{si } x \in T_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora solo basta reemplazar dentro de las igualdades que se buscan demostrar. Al igual que antes, estudiaremos los 3 casos (j en los extremos y j entre 1 y N-1):
Para los desarrollos se tomaron en cuenta 2 propiedades del producto interno:
Sean u,v $\in H_0^1$ y a $\in \mathbb{R}$:
1.-$\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$
2.-$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
Parte a:
j=0:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_0', \varphi_0' \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{-1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{-1}{h_0} \cdot \frac{-1}{h_0} \cdot dx = \frac{1}{h_0^2} \int_{x_0}^{x_1} dx = \frac{x_1 - x_0}{h_0^2} = \frac{h_0}{h_0^2} = \frac{1}{h_0}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_1', \varphi_1' \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{1}{h_0}, \frac{1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = (-1) * (-1) \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{-1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{-1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{h_0}$
j = N:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_N', \varphi_N' \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{-1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{1}{h_N}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_{N+1}', \varphi_{N+1}' \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{1}{h_N}, \frac{1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = (-1) * (-1) \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{-1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{-1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{1}{h_N}$
j $\in 1, ..., N-1$:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{-1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{1}{h_j}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{1}{h_j}, \frac{1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = (-1)(-1) \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{-1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{-1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{1}{h_j}$
Para la otra igualdad:
j=0:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_0', \varphi_1' \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = -\left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{-1}{h_0} \right\rangle_{T_0} = -\frac{1}{h_0}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_0', \varphi_1' \rangle_{T_0} = \frac{-1}{h_0}$
j=N:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_N', \varphi_{N+1}' \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = -\left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{-1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = -\frac{1}{h_N}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_N', \varphi_{N+1}' \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{1}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{-1}{h_N}$
j $\in 1, ..., N-1$:

$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1}' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = -\left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{-1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = -\frac{1}{h_j}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j' \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{1}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{-1}{h_j}$
Parte b:
j=0:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_0', \varphi_0 \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{x_1-x}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{h_0^2} \cdot dx = \frac{-x_1 \int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{x_0}^{x_1} xdx}{h_0^2} = \frac{-x_1(x_1-x_0)+\frac{x_1^2-x_0^2}{2}}{h_0^2} = \frac{-x_1^2+x_1x_0-\frac{x_1^2-x_0^2}{2}}{h_0^2} = \frac{2x_0x_1-2x_1^2-x_1^2+x_0^2}{2h_0^2} = \frac{-x_1^2+2x_0x_1-x_0^2}{2h_0^2} = \frac{-1(x_1^2-2x_0x_1+x_1^2)}{2h_0^2} = \frac{-(x_1-x_0)^2}{2h_0^2} = \frac{-h_0^2}{2h_0^2} = \frac{-1}{2}$
$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_0', \varphi_1 \rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{x-x_0}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x_0-x}{h_0^2} = \frac{x_0 \int_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} xdx}{h_0^2} = \frac{x_0(x_1-x_0)-\frac{x_1^2-x_0^2}{2}}{h_0^2} = \frac{x_0x_1-x_0^2-\frac{x_1^2-x_0^2}{2}}{h_0^2} = \frac{2x_0x_1-2x_0^2-x_1^2+x_0^2}{2h_0^2} = \frac{-x_0^2+2x_0x_1-x_1^2}{2h_0^2} = \frac{-(x_1^2-x_0^2)^2}{2h_0^2} = \frac{-(x_1-x_0)^2}{2h_0^2} = \frac{-h_0^2}{2h_0^2} = \frac{-1}{2}$
j = N:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_N', \varphi_N \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{x_{N+1}-x}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{-1}{2}$
$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_N', \varphi_{N+1} \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{x-x_N}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{-1}{2}$
$j \in$ 1,...,N-1:
$\left\langle \varphi_j', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{x_{j+1}-x}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{-1}{2}$
$\left\langle \varphi_j', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{-1}{h_j}, \frac{x-x_j}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{-1}{2}$
Ahora con la otra desigualdad:
j = 0:
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_1', \varphi_0 \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{-1}{h_0}, \frac{x_1-x}{h_0} \right\rangle_{T_j} = -\left\langle -\frac{-1}{h_0}, \frac{x-x_1}{h_0} \right\rangle_{T_j} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_1', \varphi_1 \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{1}{h_0}, \frac{x-x_0}{h_0} \right\rangle_{T_0} = -\left\langle -\frac{-1}{h_0}, \frac{x-x_0}{h_0} \right\rangle_{T_0} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$
j = N:
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_{N+1}', \varphi_N \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{1}{h_N}, \frac{x-x_N}{h_N} \right\rangle_{T_N} = -\left\langle \frac{-1}{h_N}, \frac{x-x_N}{h_N} \right\rangle_{T_N} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \langle \varphi_{N+1}', \varphi_{N+1} \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{1}{h_N}, \frac{x-x_N}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{1}{2}$
$j \in$ 1,...,N-1:
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_j \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{1}{h_j}, \frac{x-x_j}{h_j} \right\rangle_{T_{Nj}} = \frac{1}{2}$
$\left\langle \varphi_{j+1}', \varphi_{j+1} \right\rangle_{T_j} = \left\langle \frac{1}{h_j}, \frac{x-x_j}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{1}{2}$
Parte c:
j = 0:
$\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_{T_j} = \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{x_1-x_0}{h0}, \frac{x_1-x}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{h_0}(x_1^2 \int_{x_0}^{x_1} dx - 2x_1 \int_{x_0}^{x_1} xdx + \int_{x_0}^{x_1} x^2dx) = \frac{1}{h_0^2}(x_1^2(x_1-x_0) - \frac{2x_1(x_2^1-x_0^2)}{2} + \frac{(x_1^3-x_0^3)}{3}) = \frac{1}{h_0^2}(x_1^3 - x_1^2x_0 - x^3 + x_1x_0^2 + \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}) = \frac{(x_1^3-3x_1^2x_0+3x_1x_0^2-x_0^3}{3h_0^2} = \frac{(x_1-x_0)^3}{3h_0^2} = \frac{h_0^3}{3h_0^2} = \frac{h_0}{3}$
$\langle \varphi_{j+1}, \varphi_{j+1} \rangle_{T_j} = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{T_0} = \left\langle \frac{x-x_0}{h_0}, \frac{x-x_0}{h_0} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{h_0^2}(\int_{x_0}^{x_1} x^2dx - 2x_0 \int_{x_0}^{x_1} xdx + x_0^2 \int_{x_0}^{x_1} dx) = \frac{1}{h_0^2}(\frac{(x_1^3-x_0^3}{3} - \frac{2x_0(x_1^2-x_0^2)}{2} + x_0^2(x_1-x_0) = \frac{1}{h_0^2}(\frac{x_1^3-x_0^3)}{3} - x_1^2x_0 + x_0^3 + x_1x_0^2 - x_0^3) = \frac{1}{3h_0^2}(x_1^3 - x_0^3 - 3x_1^2x_0 + 3x_1x_0) = \frac{h_0^3}{3h_0^2} = \frac{h_0}{3}$
j = N:
$\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_{T_j} = \langle \varphi_N, \varphi_N \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{x_{N+1}-x}{h_N}, fracx_{N+1} - xh_N \right\rangle_{T_N} = \frac{h_N}{3}$
$\langle \varphi_{j+1}, \varphi_{j+1} \rangle_{T_j} = \langle \varphi_{N+1}, \varphi_{N+1} \rangle_{T_N} = \left\langle \frac{x-x_N}{h_N}, \frac{x-x_N}{h_N} \right\rangle_{T_N} = \frac{h_N}{3}$
$j \in$ 1,...,N-1:
$\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle_{T_j} = \left\langle \frac{x_{j+1}-x}{h_j}, fracx_{j+1} - xh_j \right\rangle_{T_j} = \frac{h_j}{3}$
$\langle \varphi_{j+1}, \varphi_{j+1} \rangle_{T_j} = \left\langle \frac{x-x_j}{h_j}, \frac{x-x_j}{h_j} \right\rangle_{T_j} = \frac{h_j}{3}$
Finalizamos con la otra identidad:

j = 0:

$\langle\varphi_j,\varphi_{j+1}\rangle_{T_j}=\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle_{T_0}=\left\langle\frac{x_1-x}{h_0},\frac{(x-x_0)}{h_0}\right\rangle_{T_0}=\frac{1}{h_0^2}(x_1\int_{x_0}^{x_1}xdx-x_1x_0\int_{x_0}^{x_1}dx-\int_{x_0}^{x_1}x^2dx+x_0\int_{x_0}^{x_1}xdx)=\frac{1}{h_0^2}(x_1\frac{(x_1^2-x_0^2)}{2}-x_1x_0(x_1-x_0)-\frac{(x_1^3-x_0^3)}{3}+x_0\frac{(x_1^2-x_0^2)}{2}))=\frac{1}{h_0^2}(\frac{x_1^3-x_1x_0^2}{2}-x_1^2x_0+x_1x_0^2-\frac{x_1^3-x_0^3}{3}+\frac{x_1^2x_0-x_0^3}{2})=\frac{3x3_1-3x_1x_0^2-6x_1^2x_0+6x_1x_0^2-2x_1^3+2x_0^3+3x_1^2x_0-3}{6h_0^2}$
$\frac{x_1^3-3x_1^2+3x_1x_0^2-x_0^3}{6h_0^2}=\frac{(x_1-x_0)^3}{6h_0^2}=\frac{h_0^3}{6h_0^2}=\frac{h_0}{6}$

j = N:

$\langle\varphi_j,\varphi_{j+1}\rangle_{T_j}=\langle\varphi_N,\varphi_{N+1}\rangle_{T_N}=\left\langle\frac{x_{N+1}-x}{h_N},\frac{x-x_N}{h_N}\right\rangle_{T_N}=\frac{h_N}{6}$

j $\in$ 1,...,N-1:

$\langle\varphi_j,\varphi_{j+1}\rangle_{T_j}=\left\langle\frac{x_{j+1}-x}{h_j},\frac{x-x_j}{h_j}\right\rangle_{T_j}=\frac{h_j}{6}$

Notar que el desarrollo detallado se ve detallado solo en uno de los 3 casos que se estudiaron (cuando j=0). Esto ocurre porque al escribir el producto interno en los otros 2 casos es posible darse cuenta de que este tiene la misma forma que en los casos anteriores. Ocurrió de manera similar en las partes a y b. En otras palabras, se pudo haber hecho el desarrollo de un solo caso general (j $\in$ 0,..,N), sin embargo no se quizo hacer de esta forma porque las derivadas se definen aparte en los extremos y por tanto se prefirió estudiar estos casos a parte (aunque al hacer el desarrollo es posible darse cuenta de que las expresiones evaluadas en estas derivadas adoptan la misma forma que en el caso general en que j toma cualquier valor)

Entonces, usando el resultado de este problema, se tiene que

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}1/h_0 & -1/h_0 & 0 & \cdots & 0\\ -1/h_0 & 1/h_0 & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & -1/2 & 1/2 & & & \vdots\\ \vdots & -1/2 & 1/2 & & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & & \vdots\\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_N=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & 0 & & 0\\ \vdots & & & h_N/3 & h_N/6\\ 0 & \cdots & \cdots & h_N/6 & h_N/3\end{pmatrix}$$

Para calcular $\boldsymbol{f}$, se recurre a una aproximación usando la Regla de Simpson. Note que esta aproximación es exacta si f es un polinomio de grado menor o igual que 2. En tal caso, se tiene que

$$\langle f,\varphi_j\rangle_{T_j}=\frac{h_j}{6}\left(f\left(x_j\right)+2f\left(\bar{x}_j\right)\right)\qquad \langle f,\varphi_{j+1}\rangle_{T_j}=\frac{h_j}{6}\left(2f\left(\bar{x}_j\right)+f\left(x_{j+1}\right)\right)$$

Por lo tanto, sumando cada una de las matrices locales (lo cual se conoce como **ensamble**), se obtiene que

$$\boldsymbol{A}^h=\varepsilon\begin{pmatrix}1/h_0 & -1/h_0 & 0 & \cdots & & 0\\ -1/h_0 & 1/h_0+1/h_1 & -1/h_1 & & & \vdots\\ 0 & -1/h_1 & 1/h_1+1/h_2 & -1/h_2 & & \vdots\\ \vdots & & -1/h_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & 1/h_{N-1}+1/h_N & -1/h_N\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1/h_N & 1/h_N\end{pmatrix}$$

$$
+\,a\begin{pmatrix}
-1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0\\
-1/2 & 0 & 1/2 & \ddots & \vdots\\
0 & -1/2 & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/2\\
0 & \cdots & 0 & -1/2 & 1/2
\end{pmatrix}
$$

$$
+\,\frac{b}{6}\begin{pmatrix}
2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & & 0\\
h_0 & 2\left(h_0+h_1\right) & h_1 & & & \vdots\\
0 & h_1 & 2\left(h_1+h_2\right) & h_2 & & \vdots\\
\vdots & & h_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & \ddots & 2\left(h_{N-1}+h_N\right) & h_N\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & h_N & 2h_N
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{f}^h=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}
h_0\left(f\left(x_0\right)+2f\left(\bar{x}_0\right)\right)\\
h_1\left(f\left(x_1\right)+2f\left(\bar{x}_1\right)\right)+h_0\left(2f\left(\bar{x}_0\right)+f\left(x_1\right)\right)\\
h_2\left(f\left(x_2\right)+2f\left(\bar{x}_2\right)\right)+h_1\left(2f\left(\bar{x}_1\right)+f\left(x_2\right)\right)\\
\vdots\\
h_N\left(f\left(x_N\right)+2f\left(\bar{x}_N\right)\right)+h_{N-1}\left(2f\left(\bar{x}_{N-1}\right)+f\left(x_N\right)\right)\\
h_N\left(2f\left(\bar{x}_N\right)+f\left(x_{N+1}\right)\right)
\end{pmatrix}
$$

4. Implementando la condición de frontera

Si se observa con detención, en la ecuación (E) no existe una restricción para imponer las condiciones de frontera Dirichlet. En este caso, son conocidos los valores de $u_0^h = u_\alpha$ y $u_{N+1}^h = u_\beta$. Entonces, el problema de encontrar las demás aproximaciones discretas $\boldsymbol{w}^h = \left(u_j^h\right)_{j\in\{1,\dots,N\}}$ se puede representar por bloques de la siguiente forma

$$
\begin{pmatrix}
A_{00}^h & A_{01}^h & 0 & \cdots & 0\\
A_{10}^h & \ulcorner & & \urcorner & \vdots\\
0 & & \boldsymbol{A}_*^h & & 0\\
\vdots & \llcorner & & \lrcorner & A_{N,N+1}^h\\
0 & \cdots & 0 & A_{N+1,N}^h & A_{N+1,N+1}^h
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_\alpha\\
\ulcorner\urcorner\\
\boldsymbol{w}^h\\
\llcorner\lrcorner\\
u_\beta
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_0^h\\
\ulcorner\urcorner\\
\boldsymbol{f}_*^h\\
\llcorner\lrcorner\\
f_{N+1}^h
\end{pmatrix}
$$

Luego, se tiene el sistema

$$
\boldsymbol{A}_*^h\boldsymbol{w}^h=\boldsymbol{f}_*^h-\begin{pmatrix}
A_{10}^h u_\alpha\\
\boldsymbol{0}_{N-2}\\
A_{N,N+1}^h u_\beta
\end{pmatrix}
$$

el cual permite determinar la solución discretizada. Se puede demostrar que $\boldsymbol{A}_*^h$ es semidefinida positiva.