

# Proyecto final: Flujo de capital en tiempo y espacio

Arturo Lazcano  
Sebastián Cobaise  
Sebastián Toloza

MA4703 – Control Óptimo: Teoría y Laboratorio

1 de diciembre de 2022

## Introducción

Desde un enfoque económico, es razonable pensar que la presencia de capital en una zona incrementa el nivel de producción, por lo que los sectores más ricos tienen una mayor tasa de crecimiento. Por otro lado, el capital se desplaza a los sectores más rentables, esto se traduce en que habrá un movimiento de dinero desde sectores de mayor concentración a sectores con menor concentración de capital. Este comportamiento se puede simular con un modelo simple y plantearse como un problema de control óptimo.

## Objetivos

Los objetivos de este proyecto son estudiar el flujo de capital físico, en el cual un planificador central maximiza la utilidad descontada de sus habitantes en horizonte de tiempo infinito y realizar simulaciones para analizar su comportamiento, utilizando herramientas teóricas y numéricas de control óptimo.

## Modelo

Se considera una población uniformemente distribuida en la circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{R}^2$ . El trabajo afecta positivamente la tasa de acumulación de capital a través de una función de producción  $F(k) = A \cdot k$  y el consumo lo afecta negativamente  $(-c(t, \theta))$ .

## Interpretación económica

Los capitalistas buscan instalar su capital donde sea más rentable, por ende la balanza comercial  $\tau$  puede afectar positiva o negativamente dependiendo de si está entrando o saliendo capital y debe cumplir:

$$\int_{\zeta} \tau(t, \theta) d\theta = - \left( \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, b) - \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, a) \right), \quad \zeta \text{ arco entre } a \text{ y } b \subset [0, 2\pi]$$

Así, se puede deducir que el problema de maximizar el funcional de utilidad descontada  $J$  dada la dinámica del capital en tiempo y espacio es:

$$\sup_{c(\cdot, \cdot)} J(k_0, c(\cdot, \cdot)) := \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( \int \frac{(c(t, \theta))^{1-\sigma}}{1-\sigma} d\theta \right) dt$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \theta) + A \cdot k(t, \theta) - c(t, \theta) \\ k(t, 0) = k(t, 2\pi) \quad \forall t \geq 0 \\ k(0, \theta) = k_0(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \\ c(t, \theta), k(t, \theta) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Ahora, ¿de dónde vienen estas ecuaciones?

La balanza comercial o balanza de mercancías  $\tau$  es el registro económico de un país donde se recogen las importaciones y exportaciones de mercancías, es decir, son los ingresos menos los pagos del comercio de mercancías de un país.

Luego, como tenemos una población distribuida en el disco unitario, entonces la balanza comercial en un arco  $\zeta$  arbitrario entre  $a$  y  $b$  (s.p.g  $a < b$ , en coordenadas polares) corresponde simplemente a lo que se exporta menos lo que se importa, en donde estas cantidades se relacionan directamente con  $\frac{\partial k}{\partial \theta}$  (flujo de capital en el espacio), así, esta diferencia se puede entender como la diferencia entre los flujos de capital que ingresan por  $a$  con los flujos que salen por  $b$ , luego se tiene que [1]

$$\int_{\zeta} \tau(t, \theta) d\theta = - \left( \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, b) - \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, a) \right) \quad (1)$$

Ahora, definimos  $c(t, \theta)$  como la tasa de consumo de la población en tiempo  $t$  en la posición  $\theta$ , el cual corresponderá al control dentro de la dinámica del sistema. Luego, dentro de los supuestos generales del modelo se cumple que:

- Población uniformemente distribuida en el disco
- No hay migración en la población
- Hay un único bien homogéneo en la economía
- La población consume y produce
- Las preferencias son simétricas en el espacio, es decir, tanto la utilidad intertemporal como la utilidad instantánea como la tasa de preferencia temporal son idénticas e independientes del tiempo

En donde la preferencia temporal se define como la valoración relativa actual que se otorga al recibir un bien o algo de efectivo (dinero) en una fecha anterior en comparación con recibirlo en una fecha posterior (en otras palabras, es la valoración que se otorga de recibirlo ahora en vez de

recibirlo después), luego la tasa de preferencia temporal la identificamos como  $\rho$ .

Y para la función de utilidad agregada (descontada a tasa  $\rho$ ), debido a que tenemos que considerar tanto el efecto temporal como el espacial, en este caso corresponde a

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \int_D u(c(t, \theta)) d\theta dt$$

en donde  $u(\cdot)$  corresponde a la función de utilidad instantánea, que se asume creciente, cóncava y que satisface las condiciones de Inada:

- $u'(\cdot) > 0$
- $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = +\infty$
- $u''(\cdot) < 0$
- $\lim_{c \rightarrow +\infty} u'(c) = 0$

Y un caso particular para  $u$  corresponde a la función de utilidad CRRA (o utilidad isoelástica)

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

En donde el parámetro  $\sigma > 0$  ( $\neq 1$ ) mide el grado de aversión al riesgo relativo, que está implícito en la función de utilidad, en donde la aversión al riesgo es la preferencia de un inversor por evitar incertidumbre en sus inversiones financieras (por ejemplo, si  $\sigma = 0$  entonces hay neutralidad al riesgo), o bien, en otras palabras, es la actitud de rechazo que experimenta un inversor ante el riesgo financiero, en concreto ante la posibilidad de sufrir pérdidas en el valor de sus activos.

Luego, tenemos que el capital  $k(t, x)$  evoluciona de la forma

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, \theta) = A \cdot k(t, \theta) - c(t, \theta) - \tau(t, \theta)$$

En donde  $A$  representa en este caso el nivel de tecnología, que se puede asumir constante sobre el espacio y tiempo, así, podemos entender que la variación de capital en el tiempo corresponde a la diferencia entre la producción ( $A \cdot k$ ) y el consumo junto con la balanza comercial neta.

Ahora, para obtener la EDP mencionada, basta con notar que por TVM se tiene que para algún  $\xi \in [a, b]$

$$\int_\xi^b \tau(t, \theta) d\theta = \int_a^b \tau(t, \theta) d\theta - \left( \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, b) - \frac{\partial k}{\partial \theta}(t, a) \right) = -(b - a) \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \xi)$$

Por lo que tomando límite cuando  $b$  tiende a  $a$  obtenemos que

$$\tau(t, \theta) = -\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \theta)$$

De modo que tenemos finalmente la ecuación

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \theta) + A \cdot k(t, \theta) - c(t, \theta),$$

para la cual nos interesa estudiar su controlabilidad y poder definir su ecuación de HJB equivalente.

## Controlabilidad

Se estudia la controlabilidad para la dinámica a estudiar, es decir, la capacidad del sistema de ir desde una condición inicial a cualquier estado usando el control durante un tiempo  $T$ .

Notamos que el capital tiene una cota superior para su valor en función del tiempo según la condición inicial, esto debido a que se impone que el consumo sea positivo.

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \theta) + A \cdot k(t, \theta) - c(t, \theta) \leq \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}(t, \theta) + A \cdot k(t, \theta)$$

Sea la función  $M(t) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} k(t, \theta)$ , esta función tiene una dinámica superiormente acotada:

$$\frac{dM}{dt}(t) \leq A \cdot M(t)$$

Esto pues el consumo  $c(t, \theta)$  es positivo y la función  $k(t, \theta)$  presenta su máximo en un punto localmente cóncavo.

Así, por desigualdad de Grönwall,

$$M(t) \leq e^{At} M(0).$$

Con esta cota se puede concluir que el sistema no es controlable.

Si  $Acc(k_0, T)$  es el conjunto de las funciones alcanzables desde una distribución de capital inicial  $k_0$  en un tiempo  $T$  y  $B(0, r)$  es la bola de centro 0 y radio  $r$  según la norma  $\| \cdot \|_\infty$ , se concluye que

$$Acc(k_0, T) \subseteq B(0, e^{AT} \|k_0\|_\infty)$$

## Ecuaciones HJB

Ahora, como estamos trabajando en un espacio de dimensión infinita ( $L^2(\mathbb{T})$ ), con  $\mathbb{T}$  el disco unitario y dotado del producto usual  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta$ , necesitamos introducir notación y operadores antes de definir la ecuación respectiva. En primer lugar, dado que estamos trabajando con funciones en  $L^2(\mathbb{T})$ , necesitamos también que las primeras y segundas derivadas estén dentro, el cual se denota como  $H^2(\mathbb{T})$ , y así, definimos el operador  $G$  en  $L^2(\mathbb{T})$  como

$$G(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Por lo que en el espacio anteriormente definido se satisface que para  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $G(f) \in L^2(\mathbb{T})$ , que es justamente lo querido para poder seguir trabajando en el contexto ya introducido.

Luego, se define la expresión  $e^{tG}$  en base a su aplicación sobre una distribución de capital inicial  $k_0 \in L^2(\mathbb{T})$ , en donde  $e^{tG}k_0$  denota a la única solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} = G(k(t, \theta)) \\ k(t, 0) = k(t, 2\pi) \\ k(0, \theta) = k_0(\theta), \forall \theta \in \mathbb{T}, \end{cases}$$

calculada en tiempo  $t$ , es decir, para un tiempo  $t$  fijo,  $e^{tG}k_0$  es una función del espacio  $(\theta)$  y

satisface que  $e^{tG}k_0(\theta) = k(t, \theta)$ , por lo cual pertenece a  $L^2(\mathbb{T})$ . Así, como tenemos al operador  $G$  identificado con la segunda derivada espacial, y  $\dot{k}$  denota a la derivada temporal, entonces la ecuación que queremos resolver la podemos reescribir como

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = Gk(t) + Ak(t) - c(t) \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

En donde  $k(t) \in L^2(\mathbb{T})$ , es decir, es una función de  $\theta$ , por lo que podemos escribirla como  $k(t)(\theta) (= k(t, \theta))$ , y lo misma definición se tiene para  $c(t)$ , y, por otro lado, como estamos trabajando en el disco unitario  $\mathbb{T}$ , entonces 0 y  $2\pi$  representan el mismo punto, por lo que ya está considerada en esta ecuación la condición de borde para el capital, y así notamos que pudimos reescribir el problema como si fuera una dinámica en una dimensión, lo cual nos permitirá caracterizar las ecuaciones de HJB asociada al problema. Dicho esto, el conjunto de controles admisibles corresponde a

$$U_{k_0} := \{c \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{T})) : c(t)(\theta) \geq 0, k(t)(\theta) \geq 0, \forall (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}\}$$

Lo cual es razonable de suponer, dado que como estamos trabajando con capital y consumo (queriendo controlar este último), se necesita que ambos sean positivos dados los supuestos que existen dentro del modelo económico presente (no puede haber consumo ni capital negativo, en otras palabras), y, dicho esto, podemos reescribir la función valor del problema como

$$V(k_0) = \sup_{c(\cdot) \in U_{k_0}} J(k_0, c(\cdot)),$$

queriendo maximizar lo anterior debido a que la función de utilidad es una función cóncava.

Definimos también, por efectos de conveniencia de notación, la función constante igual a 1 en el espacio  $1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1(\theta) \equiv 1$ , lo cual permite reescribir por ejemplo,

$$J(k_0, c(\cdot, \cdot)) := \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( \int \frac{(c(t, x))^{1-\sigma}}{1-\sigma} dx \right) dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \langle 1, U(c(t)) \rangle dt, \quad (2)$$

siendo  $U$  la función de utilidad CRRA, de modo que  $\langle 1, U(c(t)) \rangle$  representaría nuestro " $l(t, x, u)$ " en el caso finito dimensional.

Ya descrito el contexto de trabajo, las ecuaciones HJB, para una función  $\nu$  (a priori no es la función valor, sino que se demostrará que la solución a estas ecuaciones corresponde con la función valor del problema), a la cual le podemos calcular su gradiente  $\nabla \nu(k)$ , en el caso infinito dimensional, se definen como (dado que queremos maximizar)

$$\lambda \nu(k) = \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} H(k, c, \nabla \nu(k)),$$

En donde  $\lambda = \rho$ , y

$$H(x, u, p) = l(x, u) + \langle p, f(x, u) \rangle$$

Pero, como reescribimos la EDP original a

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = Gk(t) + Ak(t) - c(t) \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

Entonces

$$f(x, u) = Gx + Ax - u; \quad l(x, u) = \langle 1, U(u) \rangle$$

Y, como  $G$  es autoadjunto y el producto interno es simétrico, la ecuación se escribe como

$$\begin{aligned} \rho\nu(k) &= \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} H(k, c, \nabla\nu(k)) \\ &= \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ \langle 1, U(c) \rangle + \langle \nabla\nu(k), Gk + Ak - c \rangle \} \\ &= \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ \langle 1, U(c) \rangle + \langle Gk + Ak - c, \nabla\nu(k) \rangle \} \\ &= \langle Gk, \nabla\nu(k) \rangle + \langle Ak, \nabla\nu(k) \rangle + \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ \langle 1, U(c) \rangle - \langle c, \nabla\nu(k) \rangle \} \\ &= \langle k, G\nabla\nu(k) \rangle + A\langle k, \nabla\nu(k) \rangle + \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ -\langle c, \nabla\nu(k) \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} \end{aligned}$$

Es decir, la ecuación HJB corresponde a

$$\rho\nu(k) = \langle k, G\nabla\nu(k) \rangle + A\langle k, \nabla\nu(k) \rangle + \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ -\langle c, \nabla\nu(k) \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \}$$

Sin embargo, notemos que la ecuación anterior está definida en un espacio de dimensión infinita, y cuya solución es una función  $\nu : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo que queda mostrar que su solución es efectivamente la función valor del problema.

En efecto, primero necesitamos que la solución de esta ecuación se satisfaga en el conjunto abierto

$$\Omega := \{k \in L^2(\mathbb{T}) : \langle k, 1 \rangle > 0\},$$

puesto que queremos que el respectivo control óptimo tenga asociado capital no negativo. Luego, debido a los operadores presentes en la ecuación, necesitamos también que se cumpla que  $\nabla\nu(k) \in H^2(\mathbb{T})$  y que  $G\nabla\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$  sea continua  $\forall k \in \Omega$ .

Dicho esto, proponemos una solución de la forma  $\nu(k) = \alpha\langle k, 1 \rangle^{1-\sigma}$ , con  $\alpha$  por determinar, por lo que reemplazando esto en la ecuación obtenemos que (notando que bajo esta propuesta  $\nabla\nu(k) = \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma}$

$$\begin{aligned} \rho\alpha\langle k, 1 \rangle^{1-\sigma} &= \langle k, G\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + A\langle k, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \sup_{c \in L^2} \{ -\langle c, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} \\ &= \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \langle k, G1 \rangle + A\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \langle k, 1 \rangle + \sup_{c \in L^2} \{ -\langle c, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} \\ &= A\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \langle k, 1 \rangle + \sup_{c \in L^2} \{ -\langle c, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} \end{aligned}$$

En donde usamos que  $G1 = 0$ , luego nos queda calcular el valor del supremo, pero, si derivamos con respecto a  $c$  e igualamos a 0 obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= -\langle 1, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \left\langle 1, \frac{dU}{dc}(c) \right\rangle \\
&= -\langle 1, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \langle 1, c^{-\sigma} \rangle \\
&= \langle 1, -\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} + c^{-\sigma} \rangle,
\end{aligned}$$

lo cual se cumple sí y solamente sí el lado derecho es cero, es decir,

$$c^{-\sigma} = \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \iff c^* = (\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ -\langle c, \alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} &= \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \{ -\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma}\langle c, 1 \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \} \\
&= -\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma}\langle c^*, 1 \rangle + \langle 1, U(c^*) \rangle,
\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
-\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma}\langle c^*, 1 \rangle &= -\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \int_0^{2\pi} (\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle d\theta \\
&= -\alpha(1-\sigma)\langle k, 1 \rangle^{-\sigma} \cdot 2\pi(\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle \\
&= -2\pi(\alpha(1-\sigma))^{1-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle^{1-\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, U(c^*) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{\left( (\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle \right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} d\theta \\
&= 2\pi \frac{\left( (\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma}\langle k, 1 \rangle \right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}
\end{aligned}$$

Y reemplazando y factorizando por  $\langle k, 1 \rangle^{1-\sigma}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
\rho\alpha &= A\alpha(1-\sigma) - 2\pi(\alpha(1-\sigma))^{1-1/\sigma} + 2\pi \frac{(\alpha(1-\sigma))^{1-1/\sigma}}{1-\sigma} \\
&= A\alpha(1-\sigma) + 2\pi\alpha^{1-1/\sigma}(1-\sigma)^{1-1/\sigma} \left( -1 + \frac{1}{1-\sigma} \right) \\
&= A\alpha(1-\sigma) + 2\pi\sigma\alpha^{1-1/\sigma}(1-\sigma)^{-1/\sigma}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\alpha(\rho - A(1-\sigma)) = 2\pi\sigma\alpha^{1-1/\sigma}(1-\sigma)^{-1/\sigma}$$

Finalmente, multiplicando por  $\alpha^{1/\sigma-1}$  y dividiendo por  $\rho - A(1-\sigma)$  se obtiene que

$$\alpha^{1/\sigma} = \frac{2\pi\sigma}{\rho - A(1-\sigma)}(1-\sigma)^{-1/\sigma} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1-\sigma} \left( \frac{2\pi\sigma}{\rho - A(1-\sigma)} \right)^\sigma = \frac{1}{1-\sigma} \left( \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma} \right)^{-\sigma}$$

Lo cual nos entrega así el control en forma de feedback (a priori no óptimo)

$$c(t, \theta) = (\alpha(1-\sigma))^{-1/\sigma} \langle k^*(t), 1 \rangle = \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma} \int_0^{2\pi} k(t, \phi) d\phi$$

En donde lo anterior está bien definido si  $A(1-\sigma) < \rho$ , y, de aquí podemos destacar que de esta definición del control se tiene que este es constante en el espacio (variable  $\theta$ ), por lo que solamente depende del tiempo, luego, la trayectoria óptima asociada resuelve (por definición) la ecuación integral (implícita)

$$\begin{aligned} k(t) &= e^{tA} e^{Gt} k_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} e^{(t-s)G} c(s) ds \\ &= e^{tA} e^{Gt} k_0 - \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma} \int_0^t e^{(t-s)A} e^{(t-s)G} \langle k(s), 1 \rangle ds \end{aligned}$$

Sin embargo, se puede demostrar que la ecuación anterior tiene solución única  $k^*(t)$  [2], luego, dado que por hipótesis  $k^*(t)(\theta)$  se mantiene positivo, entonces  $c^*(t) := \phi(k^*(t))$  (con  $\phi$  dada por la definición del control feedback) se mantiene positivo, por lo que el control encontrado anteriormente es admisible, por lo que queda probar que es efectivamente óptimo y que por ende la solución de la ecuación HJB es efectivamente la función valor del problema.

En efecto, recordemos que  $c^*(\cdot)$  es óptimo si para cualquier otro control admisible  $\tilde{c}(\cdot)$  se cumple que  $J(k_0, c^*(\cdot)) \geq J(k_0, \tilde{c}(\cdot))$ , luego, sea  $\tilde{k}(\cdot)$  la trayectoria relacionada a dicho control, entonces, definiendo la función  $w : \mathbb{R} \times L^2\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$w(t, k) := e^{-\rho t} \nu(k)$$

Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} \nu(k_0) - w(T, \tilde{k}(T)) &= w(t, \tilde{k}(0)) - w(T, \tilde{k}(T)) \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} w(t, \tilde{k}(t)) dt \\ &= \int_0^T e^{-\rho t} \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \\ &= \int_0^T e^{-\rho t} \left( \rho \nu(\tilde{k}(t)) - \langle G\tilde{k}(t) + A\tilde{k}(t) - \tilde{c}(t), \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle \right) dt \end{aligned}$$

Y, por propiedades regularizadoras del semigrupo de calor se puede probar que  $\tilde{k}(t) \in H^2(\mathbb{T})$ ,  $\forall t > 0$ , luego, tomando límite cuando  $T \rightarrow +\infty$  se tiene que

$$\nu(k_0) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left( \rho \nu(\tilde{k}(t)) - \langle G\tilde{k}(t) + A\tilde{k}(t) - \tilde{c}(t), \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle \right) dt$$

Por lo que



$$\begin{aligned}\nu(k_0) - J(k_0, \tilde{c}(\cdot)) &= \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ \left( \rho \nu(\tilde{k}(t)) - \langle G\tilde{k}(t) + A\tilde{k}(t) - \tilde{c}(t), \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \langle \tilde{c}(t), \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle - \langle 1, U(\tilde{c}(t)) \rangle \right) \right] dt\end{aligned}$$

Lo cual es igual a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ \left( \sup_{c \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^+)} \left\{ -\langle c, \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle + \langle 1, U(c) \rangle \right\} \right) - (-\langle \tilde{c}(t), \nabla \nu(\tilde{k}(t)) \rangle + \langle 1, U(\tilde{c}(t)) \rangle) \right] dt \geq 0$$

En donde se usó que  $\nu$  es solución de la ecuación HJB, y es no negativo debido a que estamos restando el supremo de una función con la misma función, así, hemos mostrado que

$$\nu(k_0) - J(k_0, \tilde{c}(\cdot)) \geq 0$$

Pero, si en la misma definición de esta diferencia tomamos  $c^*(t)$  dado en la forma de feedback, entonces se obtiene la igualdad entre los términos que se restan, es decir

$$\nu(k_0) - J(k_0, c^*(\cdot)) = 0$$

Por lo tanto, como  $\tilde{c}(\cdot)$  era admisible, entonces

$$\nu(k_0) - J(k_0, \tilde{c}(\cdot)) \geq 0 = \nu(k_0) - J(k_0, c^*(\cdot)) \Rightarrow J(k_0, \tilde{c}(\cdot)) \leq J(k_0, c^*(\cdot))$$

Con lo que se tiene que el control  $c^*$  es efectivamente óptimo, y, más aún, como también se deduce de lo anterior que  $\nu(k_0) = J(k_0, c^*(\cdot))$  y el control asociado a la igualdad es óptimo, entonces  $\nu(k_0)$  es la función valor en  $k_0$ . Finalmente, la unicidad del control proviene de consideraciones generales de convexidad.

Así, hemos demostrado el siguiente resultado:

**Proposición 1:** Supongamos que  $A(1 - \sigma) < \rho$  y consideremos una distribución inicial de capital  $k_0 \in L^2(\mathbb{T})$ , luego, se tiene que si la trayectoria  $k^*(t, \theta)$  asociada al control óptimo

$$c^*(t, \theta) = \frac{\rho - A(1 - \sigma)}{2\pi\sigma} \int_0^{2\pi} k^*(t, \phi) d\phi$$

se mantiene positiva, entonces  $c^*$  es el único control óptimo del problema, y la función valor del problema es finita y viene dada de forma explícita por

$$V(k_0) = \frac{1}{1 - \sigma} \left( \frac{\rho - A(1 - \sigma)}{2\pi\sigma} \right)^{-\sigma} \left( \int_0^{2\pi} k_0(\theta) d\theta \right)^{1-\sigma}$$

Para finalizar esta sección, dado que conocemos el control óptimo (y por ende la trayectoria óptima asociada), nos interesa estudiar la evolución del capital acumulado  $K$  (su concentración), es decir

$$K(t) := \int_0^{2\pi} k(t, \theta) d\theta$$

Y el resultado que se mostrará es el siguiente:

**Proposición 2:** Bajo las mismas hipótesis que la proposición anterior, se tiene que

$$K(t) = K(0)e^{\beta t},$$

en donde

$$\beta := \frac{A - \rho}{\sigma}, \quad \text{y} \quad K(0) := \int_0^{2\pi} k_0(\theta) d\theta$$

Y para demostrarlo, recordemos que la trayectoria óptima resuelve la ecuación

$$k^*(t) = e^{tA} e^{Gt} k_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} e^{(t-s)G} \eta \langle k(s), 1 \rangle ds,$$

con  $\eta := \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma}$ . Luego, como ambos elementos (en cada lado de la igualdad) pertenecen a  $L^2(\mathbb{T})$ , entonces tomamos producto interno con  $1 \in L^2(\mathbb{T})$ , por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} K^*(t) &= \langle k^*(t), 1 \rangle \\ &= e^{At} \langle k_0, e^{tG} 1 \rangle - \int_0^t e^{(t-s)A} \langle \eta \langle k^*(s), 1 \rangle 1, e^{(t-s)G} 1 \rangle ds, \end{aligned}$$

en donde se usó linealidad del producto interno con la integral y que el operador  $e^{tG}$  es autoadjunto, y, también se puede probar que  $e^{tG} 1 = 1$ , por lo que lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} K^*(t) &= e^{tA} K(0) - \int_0^t e^{(t-s)A} K^*(s) \left[ 2\pi \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma} \right] ds \\ &= e^{tA} K(0) - \int_0^t e^{(t-s)A} \frac{\rho - A(1-\sigma)}{\sigma} K^*(s) ds, \end{aligned}$$

en donde se usó que  $\langle 1, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$ . Finalmente, se tiene que lo anterior corresponde a una ecuación diferencial para  $K^*(t)$  en forma integral, y cuya única solución viene dada por

$$K^*(t) = K(0)e^{\beta t}, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{A - \rho}{\sigma}$$

De modo que el capital acumulado evoluciona de forma exponencial en el tiempo, el cual puede crecer o disminuir según la relación que cumplan los parámetros  $A, \rho$  y  $\sigma$ .

## Simulaciones

Con el objetivo de implementar el modelo AK, se hace uso de Python y 2 métodos a utilizar: Diferencias finitas y Resolución de edos.

En ambos métodos se prueban dos condiciones iniciales distintas definidas como sigue,

$$k_0^1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, +\infty) \\ 100, & x \in (2, 4) \\ 50, & x \in [0, 2] \cup [4, 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

$$k_0^2(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, +\infty) \\ 20 & x \in [0, 2] \\ 10 & x \in [2, 2\pi] \end{cases} \quad (4)$$

$$k_0^3(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, +\infty) \\ 15 & x \in [0, \pi/3] \\ 5 & x \in (\pi/3, 2\pi/3] \\ 50 & x \in (2\pi/3, \pi] \\ 25 & x \in (\pi, 4\pi/3] \\ 40 & x \in (4\pi/3, 5\pi/3] \\ 20 & x \in (5\pi/3, 2\pi] \end{cases} \quad (5)$$

Estas condiciones iniciales se ven en la siguiente figura. Notar que se trabaja con  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

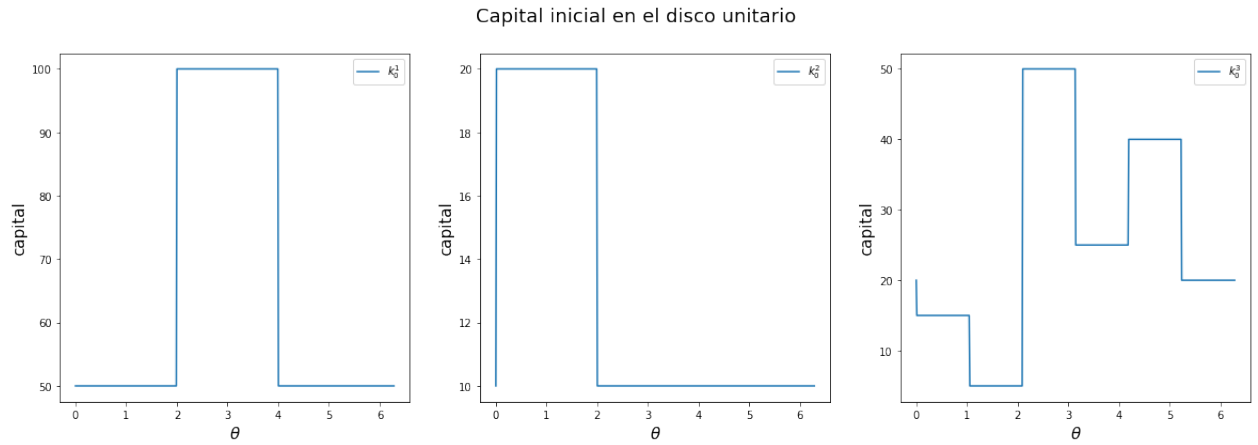


Figura 1: Condiciones iniciales.

Así, se implementa primero el método de diferencias finitas para la ecuación (??). Con respecto al tiempo, se usa una diferencia progresiva (adelantada), mientras que para el espacio se usa una diferencia central. Con esto la ecuación discretizada resulta:

$$k_i^{n+1} = k_i^n + \frac{k_{i+1}^n + k_{i-1}^n - 2k_i^n}{dx^2} dt + Ak_i^n dt - c(k_i^n, N) dt \quad (6)$$

Donde  $N$  es la cantidad de puntos interiores de la malla.

Para  $i = 0$ , la iteración se resuelve a mano y se impone la condición que el primer punto debe ser igual al último (esto pues estamos en un círculo pero visto en 1 dimensión).

El segundo método implementado es escribir el término  $\Delta k$  como diferencias finitas centradas y definir el sistema como una edo con respecto al tiempo y así hacer uso de la función `solve_ivp` de `scipy`.

Al hacer esto, el sistema viene dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{dx^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_N^n \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_N^n \end{pmatrix} - c_i(n) \quad (7)$$

Donde la matriz cuadrada representa al laplaciano y  $k_i^n$  es el vector de  $k$  en tiempo  $n$  con sus componentes desde  $i = 1, \dots, N$ .

Con esto, se definen los parámetros del sistema obtenidos de [3] como

	Diferencias Finitas	Método de Edo
$\rho$	0.07	0.07
$A$	1/3	1/3
$\sigma$	0.8	0.8
$N$	20	202
$T$	0.5	0.5

Tabla 1: Parámetros para la simulación.

En el caso del método de diferencias finitas, se pierde estabilidad para  $N$  más grandes y el tiempo de ejecución aumenta drásticamente, es por esto la diferencia en ese parámetro.

A continuación se pueden ver los resultados de cada método en las dos condiciones iniciales definidas anteriormente:

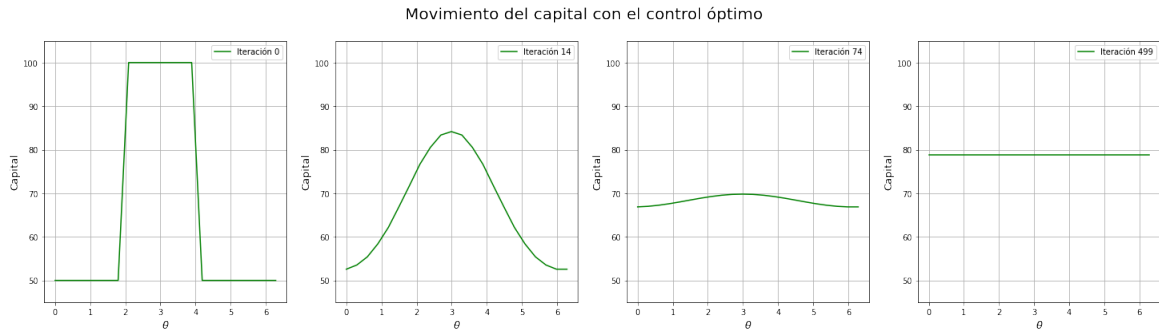


Figura 2: Diferencias finitas con  $k_0^1$ .

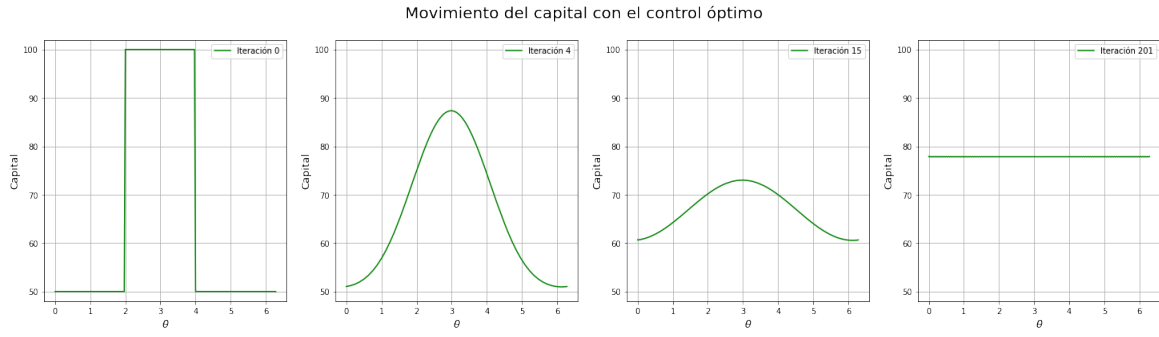


Figura 3: Método de edo con  $k_0^1$ .

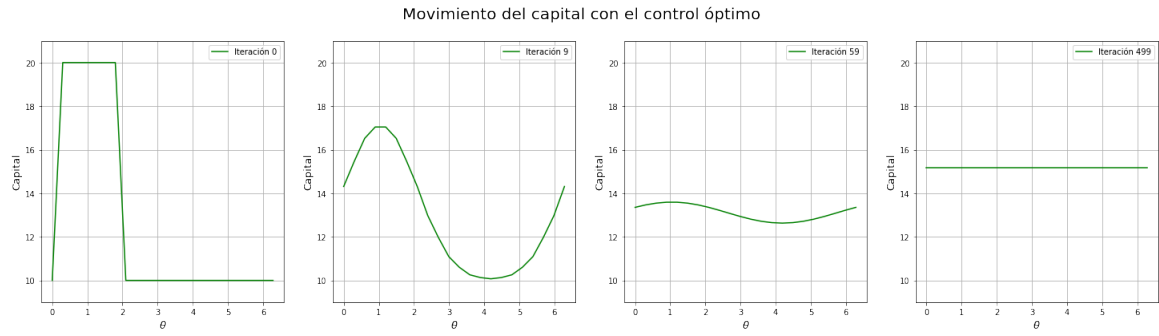


Figura 4: Diferencias finitas con  $k_0^2$ .

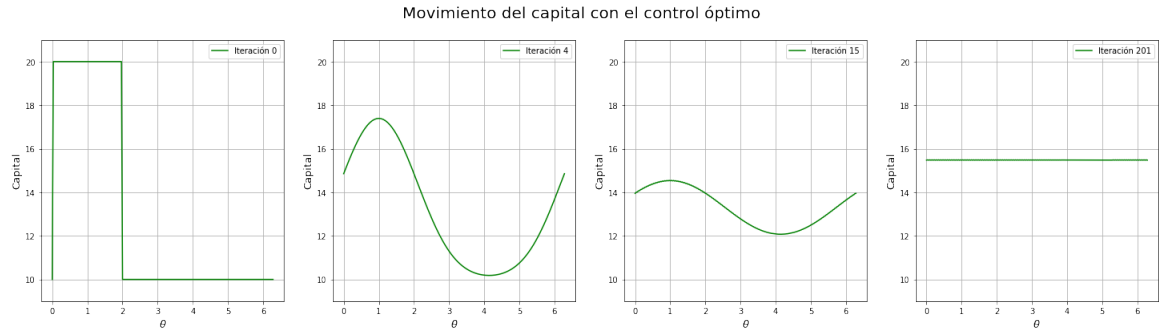


Figura 5: Método de edo con  $k_0^2$ .

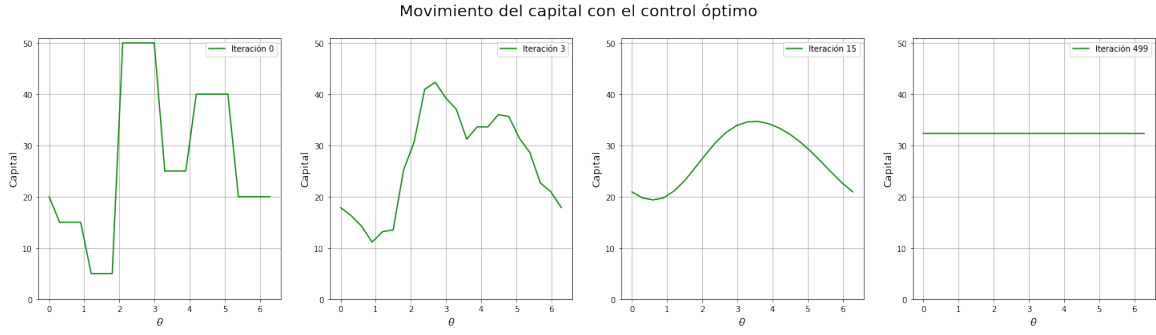


Figura 6: Diferencias finitas con  $k_0^3$ .

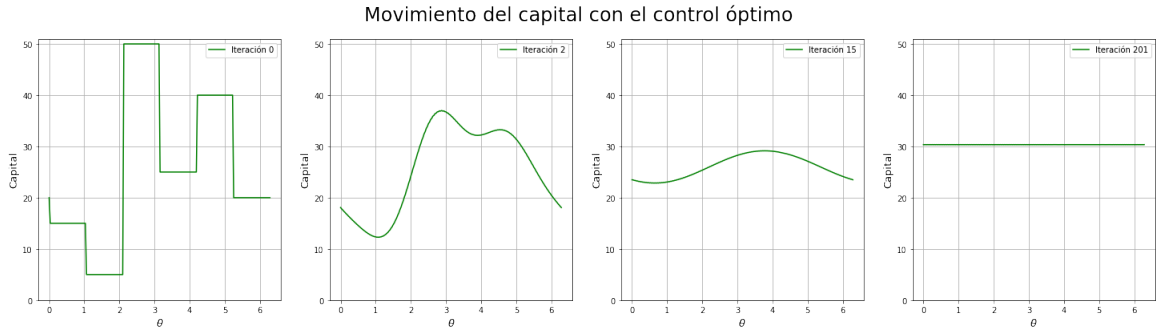


Figura 7: Método de edo con  $k_0^3$ .

Por último, se muestran dos tablas que muestran el tiempo de ejecución por cada método utilizado con ambas condiciones iniciales.

	Diferencias Finitas	Método de Edo
N=20	108 (s)	0.15 (s)
N=50	-	1.64 (s)
N=202	-	121.5 (s)

Tabla 2:  $T = 0.5$  con condición inicial  $k_0^1$

	Diferencias Finitas	Método de Edo
N=20	77 (s)	0.15 (s)
N=50	-	1.66 (s)
N=202	-	104.92 (s)

Tabla 3:  $T = 0.5$  con condición inicial  $k_0^2$

	Diferencias Finitas	Método de Edo
N=20	49.7 (s)	0.28 (s)
N=50	-	1.65 (s)
N=202	-	104.92 (s)

Tabla 4:  $T = 0.5$  con condición inicial  $k_0^3$

Para el método de diferencias finitas, para  $N$  y  $T$  grandes, este pierde estabilidad y el código no se ejecuta correctamente. Esto es lo que sucede para  $N = 20, 50$  y  $T = 0.5$ , sin embargo, el método de edo no tiene este problema y es bastante más eficaz que el método de DF en términos de tiempos de ejecución pero también en términos de la solución encontrada.

## Conclusiones

Como se pudo ver al inicio de este trabajo, se logró interpretar económicamente el modelo y como se llegó a este junto con sus hipótesis correspondientes. Por otro lado, se logró estudiar la controlabilidad del problema concluyendo así que este no es controlable lo cual tiene sentido pues sino, desde cualquier condición inicial se debería poder llegar a cualquier capital, lo cual carece de sentido práctico.

En términos teóricos, se demostró la ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema junto con el consumo óptimo que debería imponer el planificador central.

Con respecto a las simulaciones, se concluye que el uso de diferencias finitas en este problema es un recurso ineficaz comparado a expresar el problema como una EDO. Sin embargo, independiente del método usado, la solución es la misma, en donde esta parte desde una condición inicial, distribuyéndose en el espacio hasta ser constante y aumentando su valor.

Para maximizar la utilidad de la población, el planificador central debe imponer un control sobre el consumo independiente del espacio, se puede apreciar en las simulaciones realizadas que el capital se vuelve constante y crece conforme avanza el tiempo.

Si bien estos resultados son posibles en la teoría, las limitaciones del modelo son que se considera una distribución homogénea de población, que solamente trabaja y consume, y el nivel de tecnología (en la producción) es constante en todo el espacio, por lo que los resultados observados se pueden escapar de la realidad, por lo que para mejorar el modelo es necesario complejizarlo, por ejemplo, considerando una población y tecnología no homogéneas y aumentando la dimensión del dominio.

## Referencias

- [1] Brito, P., “The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogeneous world,” Instituto Superior de Economia e Gestão - DE Working papers n° 14-2004/DE/UECE, 2004.
- [2] Bensoussan, A., Da Prato, G., Delfour, M., y Mitter, S., Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, vol. I. 2007, [doi:10.1007/978-1-4612-2750-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2750-2).
- [3] Boucekine, R., Camacho, C., y Fabbri, G., “Spatial dynamics and convergence: The spatial ak model,” Journal of Economic Theory, vol. 148, 2010, [doi:10.1016/j.jet.2013.09.013](https://doi.org/10.1016/j.jet.2013.09.013).