Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Reporte Laboratorio 4

Control Óptimo: Teoría y Laboratorio

Integrantes: Javiera Gutierrez
Arturo Lazcano
Profesor: Héctor Ramírez C.
Fecha de entrega: 18 de Octubre de 2022
Santiago de Chile

Parte A. Modelación Predador Presa

En este laboratorio se abordaran técnicas numéricas para resolver problemas de control óptimo lineal cuadrático.

En los bosques del sur una especie particular de polilla es la responsable de fuertes daños en los árboles de la zona, lo que impide su crecimiento e incluso amenaza con reducirlos fuertemente. Se sabe que existe un equilibrio entre la cantidad de polillas (denotadas por $y_1(t)$ para un t dado) y la cantidad de árboles (denotado por $y_2(t)$), cuando ambos son iguales a los valores Y_1 y Y_2, respectivamente. Por otro lado, el control experimental que se tiene es el ingreso de una especie particular de avispa que se come los huevos de estas polillas, esta se denotará por u. Dado estas hipótesis el modelo está dado por:

$$\dot{y}_1 = y_2 + Y_2 - u; \; \dot{y}_2 = Y_1 - y_1 \tag{1}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = Y_1$, $y_2(0) = Y_2 + c$. Dado un tiempo final fijo T se considera el problema de minimizar el funcional:

$$\min_{u()} y_1(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt \tag{2}$$

que intenta al mismo tiempo minimizar la cantidad de polillas al final de la interveción y cuidar los costos en los que se incurre al introducir avispas.

Ejercicio 1

El modelo escrito de forma matricial queda representado como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

Luego es posible notar que el funcional a minimizar tiene los términos $W = 0$, como matriz nula, $U = 1$ y que $g(x(T)) = -y_1^2(T)$, es decir, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
.

Entonces, notando que $-A^T = A$, se puede escribir el sistema adjunto dado por Pontryagin como:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

donde el gradiente de g es $\begin{pmatrix} 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, $-\frac{1}{2}\nabla g = \begin{pmatrix} -y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Luego, con el uso de Python se resuelve este sistema computacionalmente para así observar la dinámica de los estados y_1 e y_2 junto con el control u y el valor objetivo del problema.
A continuación se grafica la solución, donde las constantes Y_1, Y_2 y c son 1000, 700 y 50 respectivamente.

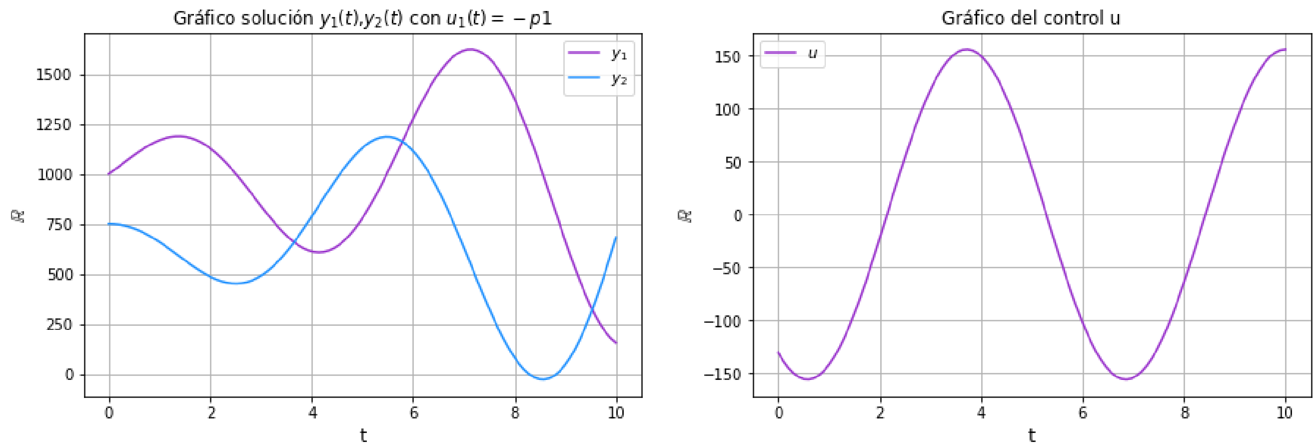

Figura 1: Tiempo final T=10.

El valor objetivo calculado resulta 151454 aproximadamente.

Luego, si se cambian los parámetros Y_1, Y_2 y c se puede ver el cambio de la dinámica de los estados y el control en las siguientes figuras:

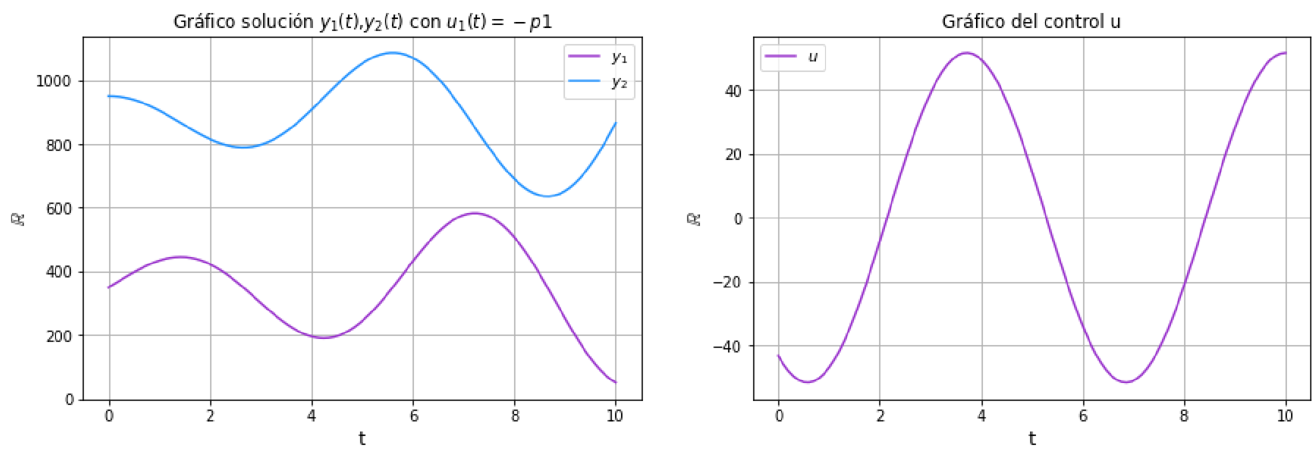

Figura 2: $Y_1 = 350$, $Y_2 = 900$, $c = 50$ y $T = 10$.

El valor objetivo al problema de la figura 2 es 16653.

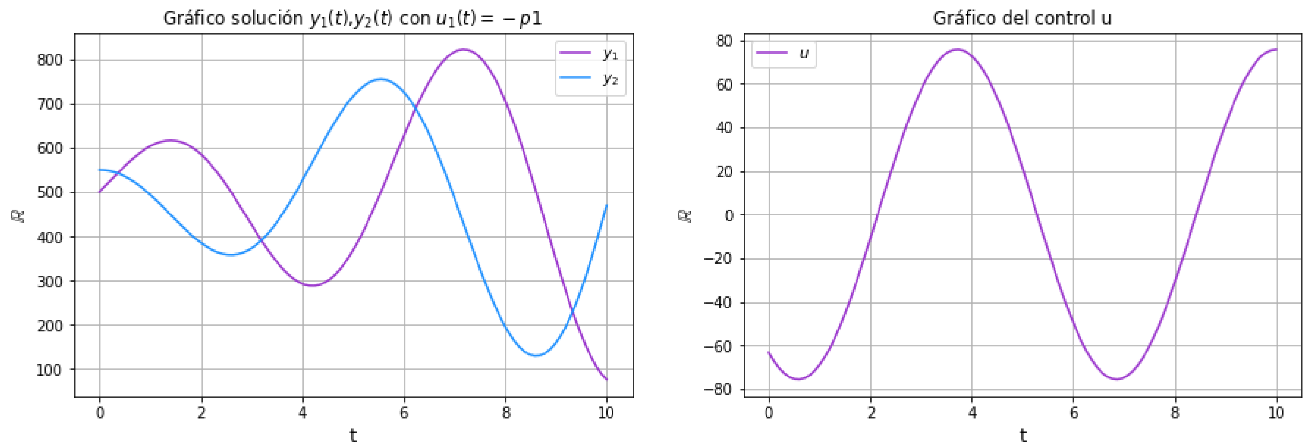

Figura 3: $Y_1 = 500$, $Y_2 = 500$, $c = 50$ y $T = 10$.

El valor objetivo al problema de la figura 3 es 35752.
En este informe se usará la primera configuración de parámetros, es decir, las que aparecen en la figura 1. A modo de comparación, en los gráficos anteriores se mantiene constante el tiempo final T. Es por esto que en la siguiente figura se usa un tiempo $T = 20$ donde Y_1, Y_2, c son 100, 700 y 50 respectivamente.

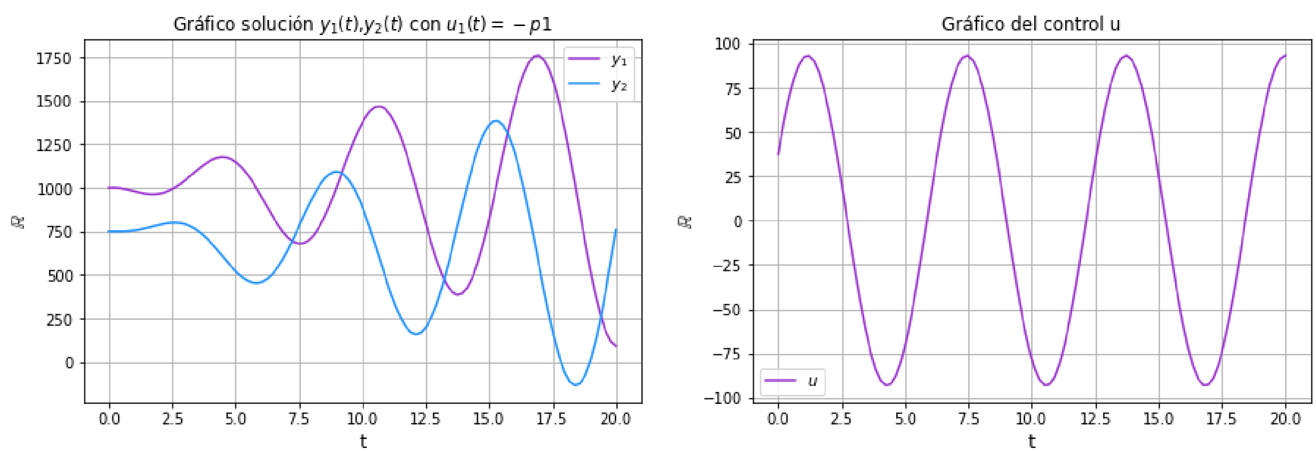

Figura 4: $Y_1 = 1000$, $Y_2 = 700$, $c = 50$ y $T = 20$.

Acá, el valor objetivo resulta ser 97.419, es decir, la función a minimizar depende del tiempo final como es esperado dado la dependencia que tiene en T.

Ejercicio 2

Para la utilización del comando `lqr` es necesario que el funcional $J(u)$ sea de la forma:

$$J(u) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u$$

Por lo que debemos encontrar a partir del funcional dado en el enunciado estas matrcies Q, R, N. Para ello es necesario incluir $y_1(T)^2$ a la integral, para eso se utiliza **TFC** y el funcional queda escrito como:

$$\begin{aligned} J(u) &= y_1(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt \\ &= \int_0^T (y_1\dot(t)^2) + u(t)^2 dt + y_1(0)^2 \\ &= \int_0^T (y_1\dot(t)^2) + u(t)^2 dt + Y_1^2 \\ &= \int_0^T 2y_1(t)\dot{y_1}(t) + u(t)^2 dt + Y_1^2 \end{aligned}$$

Dado que por enunciado se tiene la expresión de $\dot{y_1}(t)$ se reemplaza y queda el funcional como:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T 2y_1(t)(y_2(t) - Y_2 - u(t)) + u(t)^2 dt + Y_1^2 \\ &= \int_0^T 2y_1(t)y_2(t) - 2y_1(t)Y_2 + Y_1^2 - 2y_1(t)u(t) + u(t)^2 dt \end{aligned}$$

Dado que debemos encontrar una matriz tal que pueda formar el elemento $2y_1Y_2$ se crea una variable auxiliar, es decir, buscamos la matriz Q asociada al vector $y_{ext} = (y_1, y_2, 1)$. Esta matriz Q está asociada a la siguiente parte del funcional:

$$\begin{aligned} 2y_1y_2 - 2y_1Y_2 + Y_1^2 &= (y_2 - Y_2, -y_1, -y_1Y_2 + Y_1^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (y_1, y_2, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -Y_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -Y_2 & 0 & Y_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= y_{ext}^T \, Q \, y_{ext} \end{aligned}$$

Luego es posible encontrar las matrices R y N como:

$$\begin{aligned} R &= 1 \\ N &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego de generar las matrices se utiliza el comando `lqr`, pero este arroja un error, ya que no es posible encontrar una solución finita al problema.

Ejercicio 3

Luego utilizando la ecuación de Ricatti y resolviendola numéricamente se encuentra el control u en forma feedback. Se obtienen los siguientes gráficos utilizando las mismas condiciones iniciales que para el ejercicio 1.

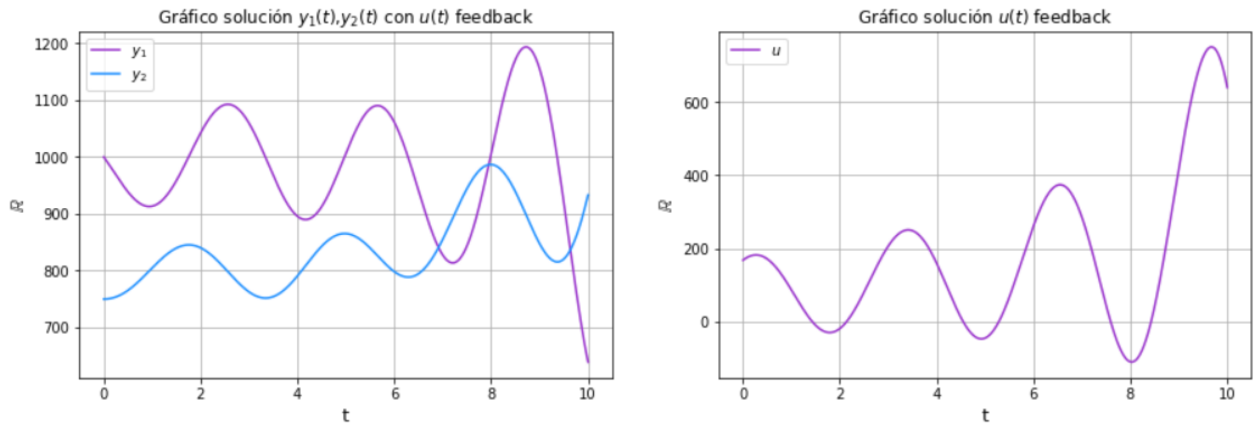

Figura 5: $Y_1 = 1000, Y_2 = 700, c = 50$ y $T = 10$

Es posible notar que existe una diferencia con los resultados del ejercicio 1 cuando se utilizan las mismas valores para Y_1 e Y_2, se diferencian tanto en la trayectoria de la solución como en el control, ya que este oscila más a diferencia del ejercicio anterior y también aumenta su valor cuando este está pronto al tiempo final, con esto podemos notar que, dado que el control aumenta, el cual representa a las avispas que controlan a la población de polillas, la solución de y_1, que representa a la cantidad de polillas, disminuye considerablemente.

En este caso el valor objetivo al problema de la figura anterior es de 743.612 un numero considerablemente mayor al valor objetivo encontrando en el ejercicio 1.

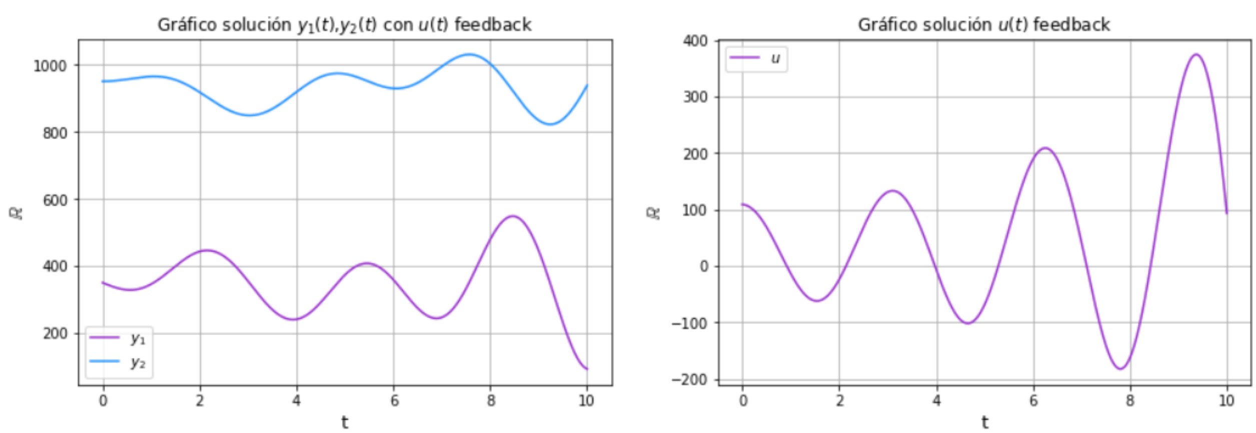

Figura 6: $Y_1 = 350, Y_2 = 900, c = 50$ y $T = 10$

En el caso de los resultados que se muestran en la Figura 6, también difieren de lo encontrado en el ejercicio 1, donde la diferencia se ve más en el control mas que en la trayectoria de la solución, pues estas ultimas contienen un poco de perturbación pero en escala es bien similar a lo encontrado en el ejercicio 1, a diferencia del gráfico del control, este oscila con mayor frecuencia.

Para esta elección de condiciones, el valor de la función objetivo es de 217.347 aproximadamente, el cual es mayor a lo encontrado en el ejercicio anterior.

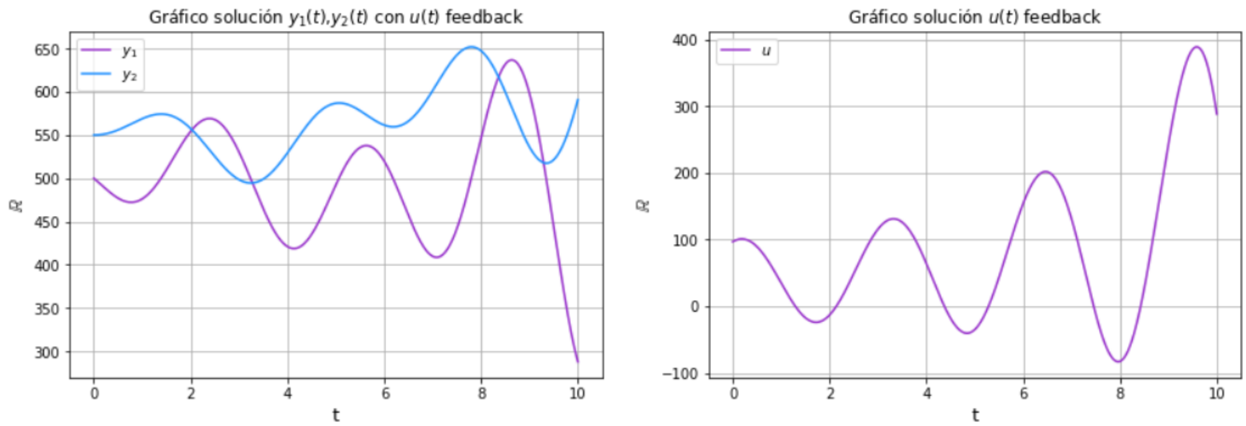

Figura 7: $Y_1 = 500, Y_2 = 500, c = 50$ y $T = 10$

Considerando los resultados expuestos en la Figura 7, nuevamente notamos una diferencia con los resultados en el ejercicio 1 con los mismos parámetros a utilizar, aquí nuevamente el gráfico que representa la solución de las trayectorias oscila mucho mas de lo expuesto en la Figura 3 y en el caso del control, éste está en una escala mayor de lo encontrado anteriormente.

En esta selección de parámetros el valor de la función objetivo es 284.784, la cual es mucho mayor a lo encontrado en el ejercicio 1.

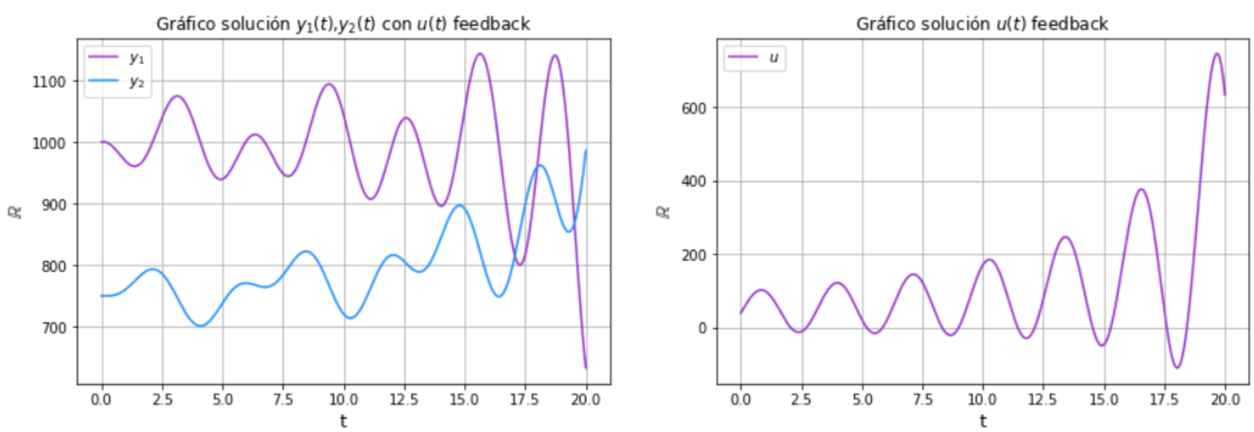

Figura 8: $Y_1 = 1000, Y_2 = 700, c = 50$ y $T = 20$

Y finalmente, el gráfico anterior representa la solución utilizando los mismo parámetros de la Figura 5, solo que ahora el tiempo final es 20. Comparándola con esta misma selección de parámetros y tiempo que en el ejercicio 1, podemos notar que la solución tanto como el control oscilan con mayor frecuencia y este ultimo aumenta de valor acercándose al tiempo final.

Además como es de esperarse el valor objetivo en este caso es 1178304, el cual es considerablemente mayor a lo encontrado en el ejercicio 1.

En conclusión el método de Ricatti hace oscilar de mayor manera la solución y entrega una con un valor de solución mayor, por lo que el método utilizado en el ejercicio 1 es mejor que este método.

Ejercicio 4

Recordando el problema inicial, se pueden identificar el funcional a minimizar, la dinámica del sistema, las condiciones iniciales y las constantes que actúan. Estas son como siguen:

$$J = y_1(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt$$

Como el control $u(\cdot)$ afecta el funcional J, se debe modificar esta expresión para poder resolverla con BOCOP. Así, se agrega un estado extra w al problema tal que la dinámica sea la siguiente:

$$\dot{y}_1 = y_2 + Y_2 - u;\ \dot{y}_2 = Y_1 - y_1;\ \dot{w} = u^2$$

Entonces, el funcional a minimizar resulta

$$J = y_1(T)^2 + w$$

Donde las condiciones iniciales son tal que:

$$y_1(0) = Y_1;\ y_2(0) = Y_2 + c;\ w(0) = 0$$

Con esta sintaxis, se puede resolver el problema en BOCOP sin problemas. Definiendo las constantes como $Y_1 = 1000$, $Y_2 = 700$ y $c = 50$, la solución es como muestra la siguiente figura.

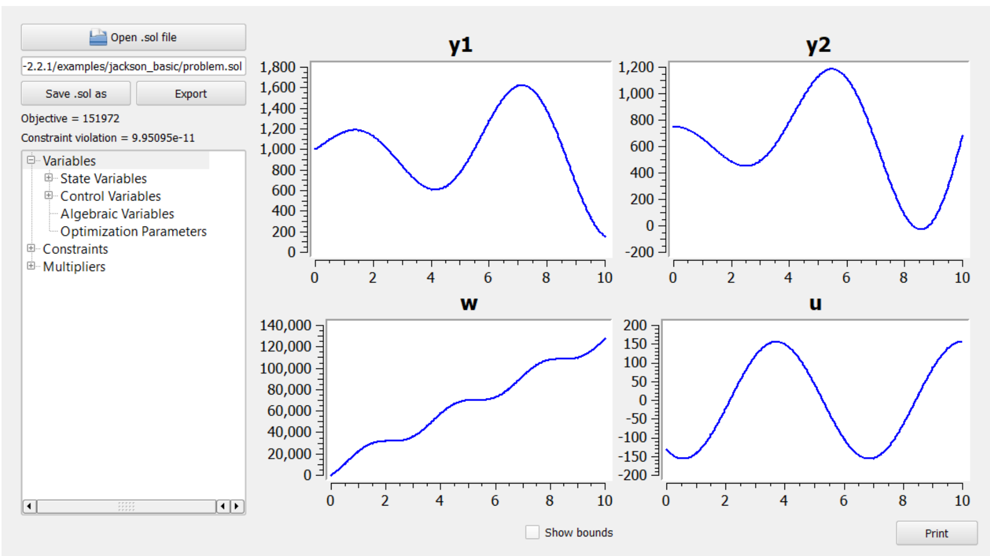

Figura 9: Tiempo final T=10.

En la figura 9 se puede observar que el valor objetivo (es decir, el mínimo de J) es de 151972. A modo de comparación, en el ejercicio 1, este problema con la misma configuración de parámetros resultó en un valor objetivo de 151453 aproximadamente. Así, el error asociado a resolver el sistema es de 500, lo cual es un valor aceptable para concluir que el resultado fue el mismo.
Este pequeño error puede deberse al método usado en BOCOP (Midpoint en este caso) o errores de cálculo en Python, por ejemplo, al calcular numéricamente la integral de u^2 en el funcional J.

A continuación se muestran los resultados para los parámetros usados en el ejercicio 1.

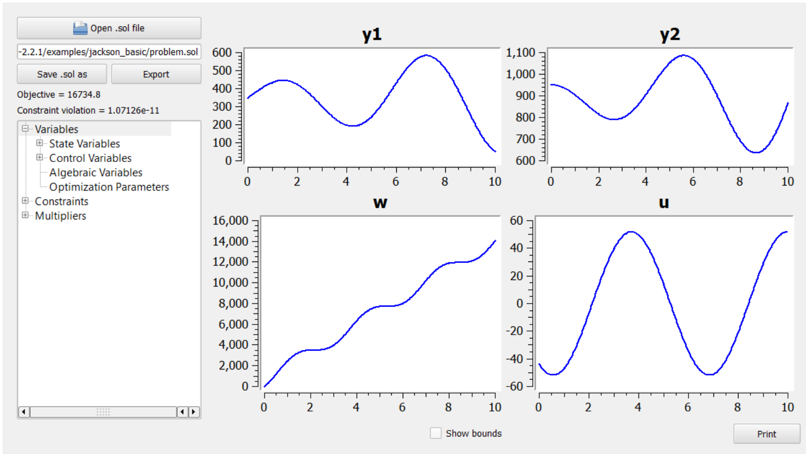

Figura 10: $Y_1 = 350$, $Y_2 = 900$, $c = 50$ y $T = 10$.

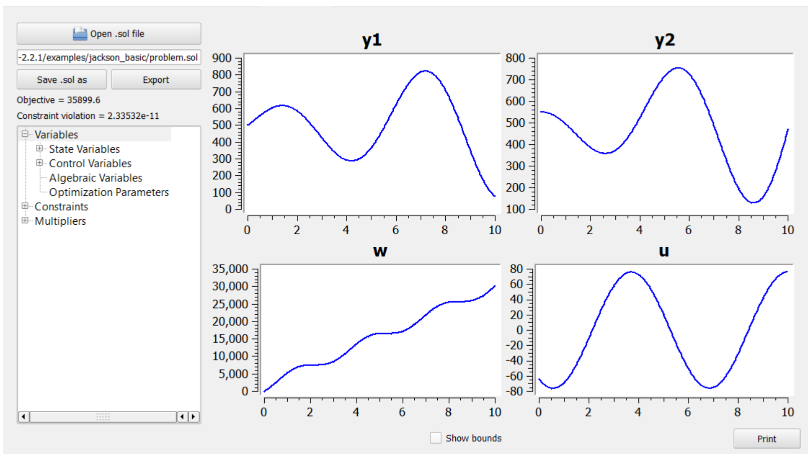

Figura 11: $Y_1 = 500$, $Y_2 = 500$, $c = 50$ y $T = 10$.

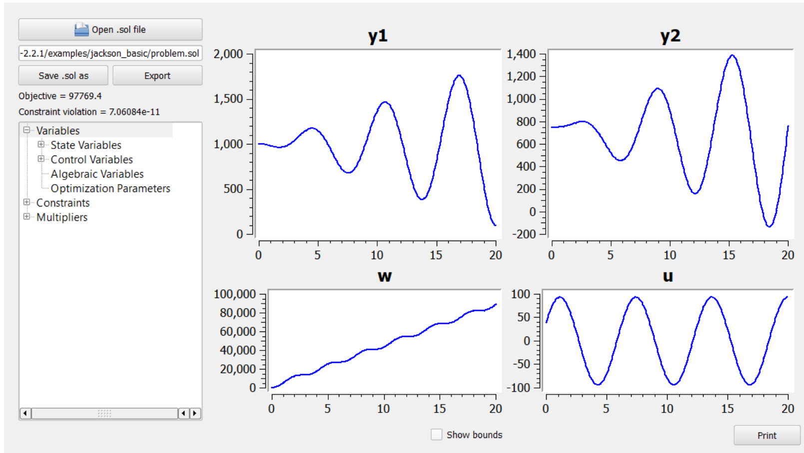

Figura 12: $Y_1 = 1000$, $Y_2 = 700$, $c = 50$ y $T = 20$.

Ejercicio 5

En esta pregunta se considera sólo minimizar la cantidad de polillas $y_1(t)$, es decir, ya no es necesario el estado extra w de la pregunta anterior pues el funcional es $J = y_1(T)^2$, con la dinámica inicial del problema y los mismos valores en las constantes la solución resulta:

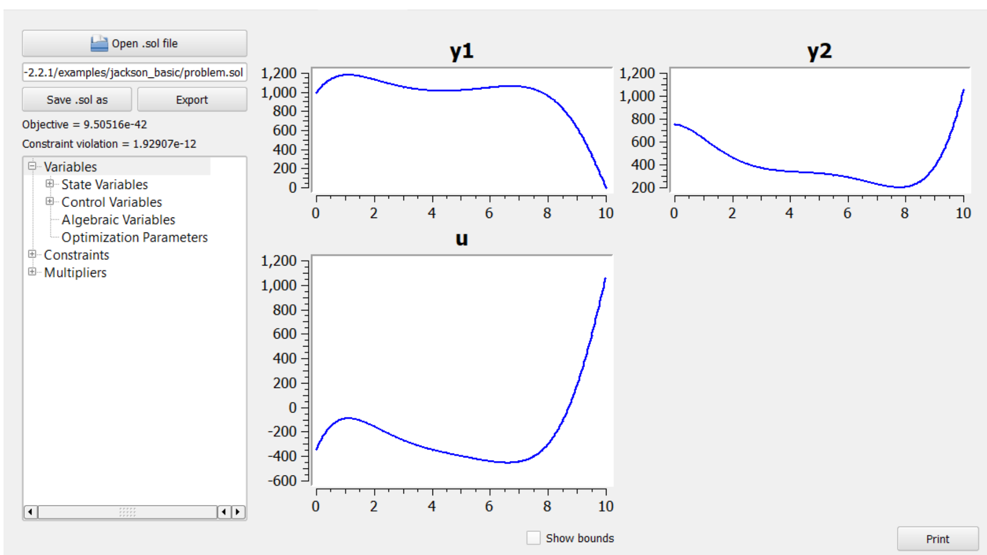

Figura 13: Tiempo final T=10.

Notar que acá, el valor objetivo es de 0 (computacionalmente hablando). Esto indica que, al minimizar la cantidad de polillas sin restricciones sobre el control, su población tiende a 0.