Universidad de Chile
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Laboratorio 4
Análisis Numérico de EDP: Teoría y Laboratorio MA5307

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Emir Chacra

El objetivo de este laboratorio es implementar a través de FEnics una ecuación elíptica y estudiar sus soluciones respecto a distintas constantes y condiciones de borde.

1. Introducción

Considere $\Omega_1 = [-1,1]^2$ y $\Omega_2 = B_r(a,b)$, para $(a,b) \in \Omega_1$ y $r > 0$ tales que $\bar{\Omega_2} \subseteq \Omega_1$. Se define $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega_2}$.
Para $\alpha > 0$ y $a_1, a_2 > 0$, considere los siguientes problemas:

(a)
$$(P_a)\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(a_1\nabla u) = & 0 & \text{en } \Omega \\ u = & \alpha(1-x^2) & \text{sobre } [-1,1]\times\{-1,1\} \\ u = & 0 & \text{sobre } \{-1,1\}\times[-1,1] \\ u = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega_2 \end{array}\right. \tag{1}$$

(b)
$$(P_b)\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(a_1\nabla u) = & 0 & \text{en } \Omega \\ u = & \alpha(1-x^2) & \text{sobre } [-1,1]\times\{-1,1\} \\ u = & 0 & \text{sobre } \{-1,1\}\times[-1,1] \\ \frac{\partial u}{\partial n} = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega_2 \end{array}\right. \tag{2}$$

(c)
$$(P_c)\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(a_1\nabla u) = & 0 & \text{en } \Omega \\ u = & \alpha(1-x^2) & \text{sobre } [-1,1]\times\{-1,1\} \\ u = & 0 & \text{sobre } \{-1,1\}\times[-1,1] \\ -\mathrm{div}(a_2\nabla v) = & 0 & \text{en } \Omega_2 \\ u = & v & \text{sobre } \partial\Omega_2 \\ a_1\frac{\partial u}{\partial n} = & a_2\frac{\partial v}{\partial n} & \text{sobre } \partial\Omega_2 \end{array}\right. \tag{3}$$

Para los dos primeros problemas tenemos la siguiente formulación variacional:

$$(\forall w \in \mathcal{H}) \qquad \int_\Omega a_1 \nabla u \nabla w = 0 \tag{4}$$

donde $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ para el caso de (P_a). En (P_b) tenemos $\mathcal{H} = H^1_{0,\partial\Omega_1}(\Omega)$ pues, como no conocemos u en $\partial\Omega_2$ no podemos tomar nuestro espacio de funciones test nulos en ese borde.
Para (P_c), es equivalente considerar una función $\mathbf{u}$ definida en **todo** Ω_1 tal que:

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(a(x,y)\nabla \mathbf{u}) = & 0 & \text{en } \Omega_1 \\ \mathbf{u} = & \alpha(1-x^2) & \text{sobre } [-1,1]\times\{-1,1\} \\ \mathbf{u} = & 0 & \text{sobre } \{-1,1\}\times[-1,1] \end{array}\right.$$

donde $a \in L^\infty(\Omega)$ está definida por:

$$a(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} a_1 & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ a_2 & \text{si } (x,y) \in \Omega_2 \end{array}\right.$$

y considerar una formulación variacional similar a la anterior.

2. Ejercicios

Los modelos anteriores pueden entenderse como estados estacionarios de temperatura en el dominio (imagínese el interior de un horno), donde las soluciones asociadas a cada problema corresponden a las distribuciones de temperatura. Los parámetros a_1 y a_2 cuantifican la facilidad del material dentro del dominio para transferir calor (mientras más bajo el valor, más fácil), mientras que α representará una cota superior para la temperatura del sistema.
De ahora en adelante, considere $\alpha = 200$. Utilizaremos elementos de Lagrange de grado 1 para implementar los solvers.

Ejercicio 1: Escriba un programa en Python que resuelva (P_a) utilizando FEniCS. Grafique su solución y la malla utilizada para $a_1 = 1$, $(a, b) = (0, 0)$ y $r = 0.5$. Comente.

Ejercicio 2:

a. Escriba un programa en Python que resuelva (P_b) utilizando FEniCS. (**Indicación:** por defecto, si usted NO asocia una condición a alguno de los bordes, FEniCS asociara a ese borde una condición de borde libre).

b. Grafique la solución de (P_b) para $(a, b) = (0, 0)$, $r = 0.5$ y $a_1 \in \{1, 10, 20, 100\}$. Comenten sus resultados.

c. Podemos entender $\partial\Omega_2$ como la sección transversal de un cilindro que está siendo calentado por el horno. La temperatura media del borde del cilindro se puede calcular como:

$$\frac{1}{|\partial\Omega_2|}\int_{\partial\Omega_2} udS$$

- Encuentre la solución del problema para $r = 0.4$ y $(a, b) \in \{(0, 0), (0, 0.4), (0.4, 0.4)\}$. Grafique las soluciones y comente sus resultados en función de la temperatura media del borde del cilindro.
- Encuentre la solución del problema para $(a, b) = (0.0)$ y $r \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$. Grafique las soluciones y comente sus resultados en función de la temperatura media del borde del cilindro.
- Encuentre la solución del problema para $(a, b) = (0, 0)$ y $r = 0.5$ con 3 mallas distintas (la idea es afinar la malla). Grafique las soluciones (junto con la malla) y comente sus resultados en función de la temperatura media del borde del cilindro.

Ejercicio 3:

a. Escriba un programa en Python que resuelva (P_c) a través de su problema equivalente (P) utilizando FEniCS. Grafique sus resultados para $(a, b) = (0, 0)$, $r = 0.5$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 10$. Comente.

b. El problema (P_c) se denomina “Problema de Transmisión”. Estudie numéricamente qué pasa cuando a_2 tiende a cero o tiende a infinito. Grafique sus resultados para 4 valores de a_2 a su elección en cada caso. Comente sus resultados en relación a las soluciones obtenidas en (P_a) y (P_b).