



Elaborato di
Calcolo Numerico
Anno Accademico 2019/2020

Niccolò *Piazzesi* - 6335623 - *niccolo.piazzesi@stud.unifi.it*
Pietro *Bernabei* - 6291312 - *pietro.bernabei@stud.unifi.it*

Contents

1	Capitolo 1	4
1.1	Esercizio 1	4
1.2	Esercizio 2	4
1.3	Esercizio 3	4
2	Capitolo 2	5
2.1	Esercizio 4	5
2.2	Esercizio 5	5
2.3	Esercizio 6	8
2.4	Esercizio 7	9
3	Capitolo 3	11
3.1	Esercizio 8	11
3.2	Esercizio 11	11
3.3	Esercizio 12	12
4	Capitolo 4	13
5	Capitolo 5	14
5.1	Esercizio 21	14
5.2	Esercizio 22	14

List of Figures

1	iterazioni richieste	8
---	--------------------------------	---

List of Tables

1	valori approssimati	8
---	-------------------------------	---

1 Capitolo 1

1.1 Esercizio 1

Sia $f(x)$ una funzione sufficientemente regolare e sia $h > 0$ una quantità abbastanza "piccola". Possiamo sviluppare i termini $f(x-h)$ e $f(x+h)$ mediante il polinomio di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

Sostituiamo i termini nell'espressione iniziale:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \\ = & \frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) - 2f(x) + f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)}{h^2} = \\ = & \frac{h^2f''(x) + O(h^4)}{h^2} = f''(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Eseguendo lo script si ottiene $u = 1.1102e - 16 = \frac{\epsilon}{2}$, dove ϵ è la precisione di macchina. ϵ è il più piccolo valore di macchina per il quale $a + \epsilon \neq a$ per un qualsiasi numero a . Quando u assume valore $\frac{\epsilon}{2}$ il controllo interno $1 + u == 1$, che corrisponde alla condizione di uscita, risulta vero, perchè u è minore di ϵ .

1.3 Esercizio 3

Quando si esegue $a - a + b$ il risultato è 100 mentre quando si esegue $a + b - a$ si ottiene 0. La differenza dei risultati è dovuta al fenomeno della cancellazione numerica:

- nel primo caso la sottrazione avviene sullo stesso numero $a = 1e20$. Sottrarre un numero da se stesso ha sempre risultato esatto 0.
- nel secondo caso la sottrazione avviene tra i termini $a + b = 1e20 + 100$ e $a = 100$. Poichè $1e20$ è molto più grande di 100, $a+b$ è "quasi uguale" ad a . La sottrazione amplifica gli errori di approssimazione causati dalla rappresentazione in aritmetica finita dei numeri coinvolti. A causa di questi errori il calcolatore approssima la differenza con 0.

2 Capitolo 2

2.1 Esercizio 4

```
1 function x1=radn(x, n)
2 %
3 % x1=radn(n,x)
4 % funzione Matlab che implementa il metodo di newton per il calcolo della
5 % radice n-esima di un numero positivo x
6 %
7 format long e
8 imax=1000;
9 tol=eps;
10 if x<=0
11     error('valore in ingresso errato');
12 end
13 x1=x/2;
14 for i=1:imax
15     x0=x1;
16     fx=x0^n-x;
17     fx1=(n)*x0^(n-1);
18     x1=x0-fx/fx1;
19     if abs(x1-x0)<=tol
20         break
21     end
22 end
23 if abs(x1-x0)>tol
24     error('metodo non converge')
25 end
26 end
```

2.2 Esercizio 5

- Metodo di bisezione

```
1 function [x,i] = bisezione(f,a,b,tol)
2 %bisez
3 %[x,i]=bisezione(f, a, b, tol, maxit)
4 %Pre: f continua in [a,b]
5 % Applica il metodo di bisezione per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % a, b    - estremi dell'intervallo
9 %
10 % tol     -tolleranza
11 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
12 % VEDI ANCHE: newton, corde, secanti, aiten, newtonmod
13     format long e
14     fa = feval(f,a);
15     fb = feval(f,b);
16     if(fa * fb > 0 )
17         error('gli estremi hanno lo stesso segno');
18     end
19     x0=a;
20     imax = ceil(log2(b-a) - log2(tol));
21     for i = 1:imax
22         x = (a+b)/2;
23         fx = feval(f,x);
```

```

24         if abs(x-x0) <= tol*(1+abs(x0))
25             break
26         end
27         x0=x;
28         if fa*fx<0
29             b = x;
30             fb = fx;
31         else
32             a = x;
33             fa = fx;
34         end
35     end
36
37 end

```

- Metodo di Newton

```

1 function [x,i] = newton( f, f1, x0, tol, maxit )
2 %newton
3 %[x,i]=newton(f,f1, x0, tol, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di newton per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      --funzione
8 % f1     --derivata di f
9 % x0     --approssimazione iniziale
10 % tol    --tolleranza
11 % maxit  --numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod
14
15     format long e
16     if nargin<4
17         error('numero argomenti insufficienti');
18     elseif nargin==4
19         maxit = 100;
20     end
21     if tol<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     x = x0;
25     for i = 1:maxit
26         fx = feval( f, x );
27         f1x = feval( f1, x );
28         x = x - fx/f1x;
29         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
30             break;
31         else
32             x0 = x;
33         end
34     end
35     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
36         error('metodo non converge');
37     end
38 end

```

- Metodo delle secanti

```

1 function [x, i]=secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
2 %secanti
3 %[x,i]=secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
4 %
5 % Applica il metodo delle secanti per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % x0     -approssimazione iniziale
9 % x1     -seconda approssimazione iniziale
10 % tolx   -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, corde, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4
19     maxit = 100;
20 end
21 i=0;
22 f0=feval(f,x0);
23 for i=1:maxit
24     f1=feval(f,x1);
25     df1=(f1-f0)/(x1-x0);
26     x=x1-(f1/df1);
27     if abs(x1-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
28         break;
29     end
30     x0=x1;
31     x1=x;
32     f0=f1;
33
34 end
35 if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
36     error('metodo non converge');
37 end
38 end

```

- Metodo delle corde

```

1 function [x,i] = corde( f, f1, x0, tolx, maxit )
2 %corde
3 %[x,i]=corde(f,f1, x0, tolx, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo delle corde per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % tolx   -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4

```

```

19         maxit = 100;
20     end
21     if tol<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     f1x = feval(f1, x0);
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         if fx==0
29             break;
30         end
31         x = x - fx/f1x;
32         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
33             break;
34         else
35             x0 = x;
36         end
37     end
38     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
39         error('metodo non converge');
40     end
41 end

```

2.3 Esercizio 6

Eseguendo lo script es6.m si ottengono i risultati contenuti nella tabella 1 e nella figura 1. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

Metodo	tolleranza= 10^{-3}	tolleranza= 10^{-6}	tolleranza= 10^{-9}	tolleranza= 10^{-12}
bisezione	0.739257812500000	0.739085197448730	0.739085133187473	0.739085133215667
newton	0.739085133385284	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161
corde	0.739567202212256	0.739084549575213	0.739085132739254	0.739085133215737
secanti	0.739085133215001	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161

Table 1: valori approssimati

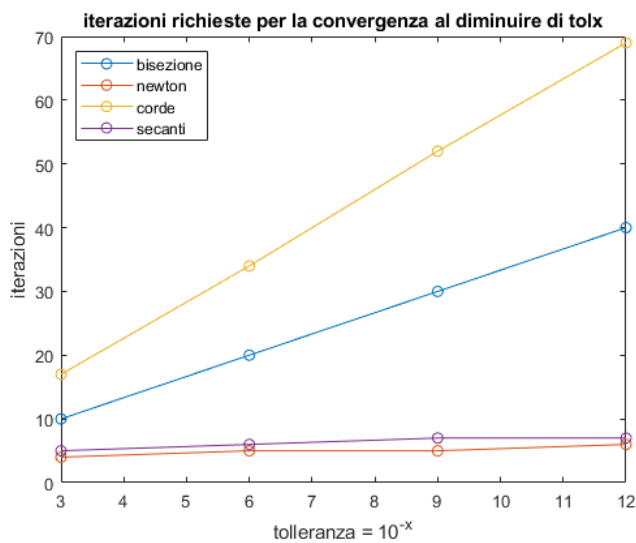


Figure 1: iterazioni richieste

2.4 Esercizio 7

Le nuove funzioni utilizzate in questo esercizio sono:

- Metodo di Newton modificato

```
1 function [x, i] = newtonmod( f, f1, x0, m, tolX, maxit )
2 %NEWTONMOLT
3 %[x,i]=Newtonmolt(f,f1,x0,m,tolX,maxit)
4 % Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di Newton per il calcolo della
6 % radice (di molteplicita' nota r) dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % m      -molteplicita' della radice
11 % tolX   -tolleranza
12 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
13 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
14 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, aitken
15
16     format long e
17     if nargin<5
18         error('numero argomenti insufficienti');
19     elseif nargin==5
20         maxit = 100;
21     end
22     if tolX<eps
23         error('tolleranza non idonea');
24     end
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         f1x = feval( f1, x );
29         if fx==0
30             break;
31         end
32         x = x - m*(fx/f1x);
33         if abs(x-x0)<=tolX*(1+abs(x0))
34             break;
35         else
36             x0 = x;
37         end
38     end
39
40 end
```

- Metodo delle accelerazioni di Aitken

```
1 function [x, i] = aitken( f, f1, x0, tolX, maxit )
2 %aitken
3 %[x,i]=aitken(f,f1, x0, tolX, maxit)
4 % Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di accelerazione di aitken per il calcolo della
6 % radice (di molteplicita' incognita) dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % tolX   -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
```

```

12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, newtonmod
14     format long e
15     if nargin<4
16         error('numero argomenti insufficienti');
17     elseif nargin==4
18         maxit = 100;
19     end
20     if tol<eps
21         error('tolleranza non idonea');
22     end
23     x = x0;
24     for i = 1:maxit
25         x0 = x;
26         fx = feval( f, x0 );
27         flx = feval( f1, x0 );
28         x1 = x0 - fx/flx;
29         fx = feval( f, x1 );
30         flx = feval( f1, x1 );
31         x = x1 - fx/flx;
32         x = (x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
33         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
34             break;
35         end
36     end
37     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
38         disp('metodo non converge');
39     end
40 end

```

La radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \tan(x)$ ha molteplicità $m = 3$, in quanto 0 annulla due volte il termine x^2 e $\tan(0) = 0$.

3 Capitolo 3

3.1 Esercizio 8

```
1 function [LU,p]=palu(A)
2 % [LU,p]=palu(A)
3 % funzione Matlab che dato in input matrice A restituisce matrice fattorizzata LU
4 % e il relativo vettore p di permutazione di LU con pivoting parziale di A
5
6 [n,m]=size(A);
7 if(n~=m)
8     error(matrice A non quadrata);
9 end
10 LU=A;
11 p=[1:n];
12 for i=1:n-1
13     [mi,ki]=max(abs(LU(i:n,i)));
14     if mi==0
15         error('La matrice e'' non singolare')
16     end
17     ki=ki+i-1;
18     if ki>i
19         LU([i ki],:);
20         p([i ki])=p([ki i]);
21     end
22     LU(i+1:n,1)=LU(i+1:n,i)/LU(i,i);
23     LU(i+1:n,i+1:n)=LU(i+1:n,i+1:n)-LU(i+1:n,i)*LU(i,i+1:n);
24 end
```

3.2 Esercizio 11

```
1 function QR = myqr(A)
2 %QR = myqr(A)
3 % calcola la fattorizzazione QR di Householder della matrice A
4
5 [m,n] = size(A);
6 if n > m
7     error('Dimensioni errate');
8 end
9 QR = A;
10 for i = 1:n
11     alfa = norm(QR(i:m,i));
12     if alfa == 0
13         error('la matrice non ha rango massimo');
14     end
15     if QR(i,i) >= 0
16         alfa = -alfa;
17     end
18     v1 = QR(i,i) - alfa;
19     QR(i,i) = alfa;
20     QR(i+1:m,i) = QR(i+1:m,i)/v1;
21     beta = -v1/alfa;
22     v = [1; QR(i+1:m,i)];
23     QR(i:m,i+1:n) = QR(i:m,i+1:n) - (beta * v) * (v' * QR(i:m,i+1:n));
24 end
25 end
```

3.3 Esercizio 12

```
1 function x = qrsolve(QR, b)
2 %
3 %
4 % x = qrSolve(QR, b)
5 % risolve il sistema  $QR \cdot x = b$  nel senso dei minimi quadrati
6 %
7 [m,n] = size(QR);
8 k = length(b);
9 if k ~= m
10     error('Dati inconsistenti');
11 end
12 x=b(:);
13 for i = 1:n
14     v=[1; QR(i+1:m,i)];
15     beta = 2/(v'* v);
16     x(i:m) = x(i:m) - (beta*(v'*x(i:m))*v);
17 end
18 x=x(1:n);
19 for j = n:-1:1
20     if QR(j,j)==0
21         error('Matrice singolare');
22     end
23     x(j) = x(j) / QR(j,j);
24     x(1:j-1) = x(1:j-1) - QR(1:j-1,j)*x(j);
25 end
26 return
27 end
```

4 Capitolo 4

5 Capitolo 5

5.1 Esercizio 21

```
1 function c = ncweights(n)
2 %
3 %
4 % c = nc-weights(n)
5 % calcola i pesi della formula di newton cotes di grado n;
6 %
7 if n<=0
8     error('grado della formula non positivo');
9 end
10 c=zeros(1,floor(n / 2 + 1));
11 for j = 1:(ceil((n+1)/2))
12     temp = (0:n);
13     vj = temp(j);
14     temp(j)=[];
15     f = @(x)(prod(x-temp) /prod(vj-temp));
16     c(j) = integral(f, 0, n, 'ArrayValued', true);
17 end
18
19 c = [c flip(c)];
20 if mod(n,2)==0
21     c(n/2+1) = [];
22 end
23 return
24 end
```

5.2 Esercizio 22

Sappiamo che $k = (b - a)$ e $k_n = (b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$. Il rapporto sarà dunque dato da:

$$\frac{k_n}{k} = \frac{(b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|}{b - a} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$$

Calcolando il rapporto per $n = 1, \dots, 50$ si ottiene:

