



Elaborato di
Calcolo Numerico
Anno Accademico 2019/2020

Niccolò *Piazzesi* - 6335623 - niccolo.piazzesi@stud.unifi.it
Pietro *Bernabei* - 6291312 - pietro.bernabei@stud.unifi.it

Contents

1	Capitolo 1	4
1.1	Esercizio 1	4
1.2	Esercizio 2	4
1.3	Esercizio 3	4
2	Capitolo 2	5
2.1	Esercizio 4	5
2.2	Esercizio 5	5
2.3	Esercizio 6	8
2.4	Esercizio 7	9
3	Capitolo 3	12
3.1	Esercizio 8	12
3.2	Esercizio 9	12
3.3	Esercizio 10	13
3.4	Esercizio 11	13
3.5	Esercizio 12	14
3.6	Esercizio 13	14
3.7	Esercizio 14	15
4	Capitolo 4	16
4.1	Esercizio 15	16
4.2	Esercizio 16	17
4.3	Esercizio 17	17
4.4	Esercizio 18	18
4.5	Esercizio 19	18
4.6	Esercizio 20	18
5	Capitolo 5	20
5.1	Esercizio 21	20
5.2	Esercizio 22	21
5.3	Esercizio 23	22
5.4	Esercizio 24	22
5.5	Esercizio 25	23
6	Codici ausiliari	26
6.1	Esercizio 6	26
6.2	Esercizio 7	26
6.3	Esercizio 15	27
6.4	Esercizio 16	27
6.5	Esercizio 18	27
6.6	Esercizio 19	28
6.7	Esercizio 20	28
6.8	Esercizio 21	29
6.9	Esercizio 22	29
6.10	Esercizio 23	29
6.11	Esercizio 24	29
6.12	Esercizio 25	30

List of Figures

1	iterazioni richieste	8
2	risultati interpolazione	16
3	risultati interpolazione hermite	17

List of Tables

1	valori approssimati	8
2	valori approssimati	13
3	valori approssimati	15
4	pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado	20
5	risultati di es24.m	23
6	risultati di es25.m	25

1 Capitolo 1

1.1 Esercizio 1

Sia $f(x)$ una funzione sufficientemente regolare e sia $h > 0$ una quantità abbastanza "piccola". Possiamo sviluppare i termini $f(x-h)$ e $f(x+h)$ mediante il polinomio di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

Sostituiamo i termini nell'espressione iniziale:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \\ = & \frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) - 2f(x) + f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)}{h^2} = \\ = & \frac{h^2f''(x) + O(h^4)}{h^2} = f''(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Eseguendo lo script si ottiene $u = 1.1102 \cdot 10^{-16} = \frac{\epsilon}{2}$, dove ϵ è la precisione di macchina. Il controllo interno ci dice che si esce dal ciclo solamente quando u diventa talmente piccolo che la somma $1+u$ viene percepita dal calcolatore come uguale a 1. Questo avviene se $u < \epsilon$, e la prima iterazione in cui il controllo risulta vero è proprio quando $u = \frac{\epsilon}{2}$. Il codice può quindi essere utilizzato per calcolare la precisione di macchina di un calcolatore, moltiplicando per 2 il valore di u restituito.

1.3 Esercizio 3

Quando si esegue $a - a + b$ il risultato è 100 mentre quando si esegue $a + b - a$ si ottiene 0. La differenza dei risultati è dovuta al fenomeno della cancellazione numerica:

- nel primo caso la sottrazione avviene sullo stesso numero $a = 10^{20}$. Sottrarre un numero da se stesso ha sempre risultato esatto 0 e quindi il risultato finale è corretto
- nel secondo caso la sottrazione avviene tra i termini $a+b = 10^{20} + 100$ e $a = 10^{20}$. $a+b$ ha le prime 18 cifre in comune con a e, a causa degli errori di approssimazione, le ultime tre cifre vengono cancellate dalla sottrazione, dando 0 come risultato finale.

2 Capitolo 2

2.1 Esercizio 4

```
1 function x1=radn(x, n)
2 %
3 % x1=radn(n,x)
4 % funzione Matlab che implementa il metodo di newton per il calcolo della
5 % radice n-esima di un numero positivo x
6 %
7 format long e
8 imax=1000;
9 tol=eps;
10 if x<=0
11     error('valore in ingresso errato');
12 end
13 x1=x/2;
14 for i=1:imax
15     x0=x1;
16     fx=x0^n-x;
17     fx1=(n)*x0^(n-1);
18     x1=x0-fx/fx1;
19     if abs(x1-x0)<=tol
20         break
21     end
22 end
23 if abs(x1-x0)>tol
24     error('metodo non converge')
25 end
26 end
```

2.2 Esercizio 5

- Metodo di bisezione

```
1 function [x,i] = bisezione(f,a,b,tol)
2 %bisez
3 %[x,i]=bisezione(f, a, b, tol, maxit)
4 %Pre: f continua in [a,b]
5 % Applica il metodo di bisezione per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % a, b    - estremi dell'intervallo
9 %
10 % tol     -tolleranza
11 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
12 % VEDI ANCHE: newton, corde, secanti, aiten, newtonmod
13     format long e
14     fa = feval(f,a);
15     fb = feval(f,b);
16     if(fa * fb > 0 )
17         error('gli estremi hanno lo stesso segno');
18     end
19     x0=a;
20     imax = ceil(log2(b-a) - log2(tol));
21     for i = 1:imax
22         x = (a+b)/2;
23         fx = feval(f,x);
```

```

24         if abs(x-x0) <= tol*(1+abs(x0))
25             break
26         end
27         x0=x;
28         if fa*fx<0
29             b = x;
30             fb = fx;
31         else
32             a = x;
33             fa = fx;
34         end
35     end
36
37 end

```

- Metodo di Newton

```

1 function [x,i] = newton( f, f1, x0, tol, maxit )
2 %newton
3 %[x,i]=newton(f,f1, x0, tol, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di newton per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % tol    -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, corde, secanti, aiken, newtonmod
14
15     format long e
16     if nargin<4
17         error('numero argomenti insufficienti');
18     elseif nargin==4
19         maxit = 100;
20     end
21     if tol<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     x = x0;
25     for i = 1:maxit
26         fx = feval( f, x );
27         f1x = feval( f1, x );
28         x = x - fx/f1x;
29         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
30             break;
31         else
32             x0 = x;
33         end
34     end
35     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
36         error('metodo non converge');
37     end
38 end

```

- Metodo delle secanti

```

1 function [x, i]=secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
2 %secanti
3 %[x,i]=secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
4 %
5 % Applica il metodo delle secanti per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % x0     -approssimazione iniziale
9 % x1     -seconda approssimazione iniziale
10 % tolx   -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, corde, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4
19     maxit = 100;
20 end
21 i=0;
22 f0=feval(f,x0);
23 for i=1:maxit
24     f1=feval(f,x1);
25     df1=(f1-f0)/(x1-x0);
26     x=x1-(f1/df1);
27     if abs(x1-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
28         break;
29     end
30     x0=x1;
31     x1=x;
32     f0=f1;
33
34 end
35 if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
36     error('metodo non converge');
37 end
38 end

```

- Metodo delle corde

```

1 function [x,i] = corde( f, f1, x0, tolx, maxit )
2 %corde
3 %[x,i]=corde(f,f1, x0, tolx, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo delle corde per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % tolx   -tolleranza
11 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4

```

```

19         maxit = 100;
20     end
21     if tol<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     f1x = feval(f1, x0);
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         if fx==0
29             break;
30         end
31         x = x - fx/f1x;
32         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
33             break;
34         else
35             x0 = x;
36         end
37     end
38     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
39         error('metodo non converge');
40     end
41 end

```

2.3 Esercizio 6

Eseguendo lo script es6.msi ottengono i risultati contenuti nella tabella 2 e nella figura 1. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

Metodo	tolleranza= 10^{-3}	tolleranza= 10^{-6}	tolleranza= 10^{-9}	tolleranza= 10^{-12}
bisezione	0.739257812500000	0.739085197448730	0.739085133187473	0.739085133215667
newton	0.739085133385284	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161
corde	0.739567202212256	0.739084549575213	0.739085132739254	0.739085133215737
secanti	0.739085133215001	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161

Table 1: valori approssimati

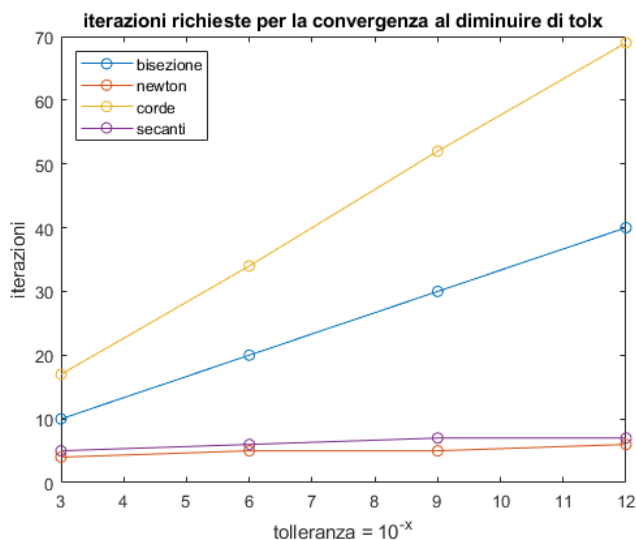


Figure 1: iterazioni richieste

2.4 Esercizio 7

Le nuove funzioni utilizzate in questo esercizio sono:

- Metodo di Newton modificato

```
1 function [x, i] = newtonmod( f, f1, x0, m, tolX, maxit )
2 %NEWTONMOLT
3 %[x,i]=Newtonmolt(f,f1,x0,m,tolX,maxit)
4 % Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di Newton per il calcolo della
6 % radice (di molteplicita' nota r) dell'equazione f(x)=0
7 % f      -funzione
8 % f1     -derivata di f
9 % x0     -approssimazione iniziale
10 % m      -molteplicita' della radice
11 % tolX   -tolleranza
12 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
13 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
14 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, aitken
15
16     format long e
17     if nargin<5
18         error('numero argomenti insufficienti');
19     elseif nargin==5
20         maxit = 100;
21     end
22     if tolX<eps
23         error('tolleranza non idonea');
24     end
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         f1x = feval( f1, x );
29         if fx==0
30             break;
31         end
32         x = x - m*(fx/f1x);
33         if abs(x-x0)<=tolX*(1+abs(x0))
34             break;
35         else
36             x0 = x;
37         end
38     end
39
40 end
```

- Metodo delle accelerazioni di Aitken

```
1 <<<<<< HEAD
2 function [x,i]=aitken(f,f1,x0,tolX, itmax)
3     %Metodo di accelerazione di Aitken
4     %
5     % [x,i]=aitken(f,f1,x0,itmax,tolX,rtolX)
6     %
7     %Questo metodo prende in input:
8     % f: la funzione di cui si vuol trovare uno zero
9     % f1: la derivata della funzione
10    % x0: valore di x di partenza
11    % imax: numero massimo di iterazioni consentite
```

```

12 % tolx: tolleranza assoluta sul valore dello zero
13 %Questo metodo restituisce:
14 % x: zero della funzione
15 % i: numero di iterazioni fatte
16 i=0;
17 fx = feval(f,x0);
18 if fx==0
19     x=x0;
20     return
21 end
22 flx = feval(f1,x0);
23 if flx==0
24     error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile
           continuare!')
25 end
26 x= x0-fx/flx;
27 go = 1;
28 while (i<itmax) && go
29     i = i+1;
30     x0 = x;
31     fx = feval(f,x0);
32     flx = feval(f1,x0);
33     if flx==0
34         %In questo caso non possiamo andare avanti, rimane solo da
           controllare
35         %se per caso abbiamo trovato una soluzione esatta o almeno nella
           tolleranza %richiesta
36         if fx == 0
37             %Abbiamo trovato una soluzione esatta
38             return
39         elseif (abs(x-x0)<=(tolx*(1 + abs(x0))))
40             %Abbiamo trovato una soluzione nella tolleranza richiesta
41             return
42         end
43         %Evitiamo una divisione per zero.
44         error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile
           continuare!')
45     end
46     x1 = x0-fx/flx;
47     fx = feval(f,x1); flx = feval(f1,x1);
48     if flx==0
49         if fx == 0
50             return
51         elseif (abs(x-x0)<=(tolx*(1 + abs(x0))))
52             return
53         end
54         error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile
           continuare!')
55     end
56     x = x1 - fx/flx;
57     t = ((x-2*x1)+x0);
58
59     if t == 0
60         if feval(f,x) == 0
61             return
62         end
63         error('Impossibile determinare la radice nella tolleranza
           desiderata')

```

```

64         end
65         x = (x*x0-x1^2)/t;
66         go = (abs(x-x0)>(tolx*(1 + abs(x0))));
67     end
68     if go, disp('Il metodo non converge.'), end
69 =====
70 function [x, i] = aitken( f, f1, x0, tolx, maxit )
71 %aitken
72 %[x,i]=aitken(f,f1, x0, tolx, maxit)
73 % Pre: f derivabile
74 % Applica il metodo di accelerazione di aitken per il calcolo della
75 % radice (di molteplicita' incognita) dell'equazione f(x)=0
76 % f      -funzione
77 % f1     -derivata di f
78 % x0     -approssimazione iniziale
79 % tolx   -tolleranza
80 % maxit  -numero massimo di iterazioni(default=100)
81 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
82 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, newtonmod
83 format long e
84 if nargin<4
85     error('numero argomenti insufficienti');
86 elseif nargin==4
87     maxit = 100;
88 end
89 if tolx<eps
90     error('tolleranza non idonea');
91 end
92 x = x0;
93 for i = 1:maxit
94     fx = feval( f, x0 );
95     f1x = feval( f1, x0 );
96     if f1x==0
97         break;
98     end
99     x1 = x0 - fx/f1x;
100    fx = feval( f, x1 );
101    f1x = feval( f1, x1 );
102    if f1x==0
103        break;
104    end
105    x = x1 -fx/f1x;
106    x = (x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
107    if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
108        break;
109    else
110        x0 = x;
111    end
112 end
113 if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
114     error('metodo non converge');
115 end
116 end
117 >>>>>> 5cd1ff828560c11c9f921316a0662e417fff06e4

```

La radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \tan(x)$ ha molteplicita $m = 3$, in quanto 0 annulla due volte il termine x^2 e $\tan(0) = 0$.

3 Capitolo 3

3.1 Esercizio 8

```
1 function [LU,p]=palu(A)
2 % [LU,p]=palu(A)
3 % funzione che dato in input matrice A restituisce matrice fattorizzata LU
4 % e il relativo vettore p di permutazione di LU con pivoting parziale di A
5 % input:
6 %   A= matrice di cui si vuole calcolare la fattorizzazione lu con pivoting
7 %   parziale
8 % output:
9 %   LU=matrice quadrata di dimensioni n*n, composta dalla matrice
10 %   triangolare superiore U e la matrice triangolare inferiore a diagonale
11 %   unitaria L
12 %   p= vettore di permutazione di dimensione n, generato dalla
13 %   fattorizzazione di A con pivoting parziale
14 %
15
16 [n,m]=size(A);
17 if(n~=m)
18     error(matrice A non quadrata);
19 end
20 LU=A;
21 p=[1:n];
22 for i=1:n-1
23     [mi,ki]=max(abs(LU(i:n,i)));
24     if mi==0
25         error('La matrice e'' non singolare')
26     end
27     ki=ki+i-1;
28     if ki>i
29         p([i ki])=p([ki i]);
30         LU([i ki],:)= LU([ki i],:);
31     end
32     LU(i+1:n,i)=LU(i+1:n,i)/LU(i,i);
33     LU(i+1:n,i+1:n)=LU(i+1:n,i+1:n)-LU(i+1:n,i)*LU(i,i+1:n);
34 end
35 return
36 end
```

3.2 Esercizio 9

```
1 function x=LUsolve(LU,p,b)
2 %
3 % funzione che risolve il sistema lineare LUx=b(p):
4 %input:
5 %   LU=matrice quadrata (n*n) fattorizzata LU, ottenuta attrarso la
6 %   fattorizzazione con pivoting parziale
7 %   p= vettore di permutazione per b, di dimensione n, con valori da (1 a
8 %   n)
9 %   b=vettore dei termini noti
10 %output:
11 %   x=vettore delle incognite calcolate
12 %
13 %
14 [m,n]=size(LU);
```

```

15     if(m~=n || n~=length(b)) error('dati inconsistenti')
16     else if(min(abs(diag(LU)))==0)
17         error(fattorizzazione errata);
18     end
19 end
20 x=b(p);
21 for i=1:n-1
22     x(i+1:n)=x(i+1:n)-(LU(i+1:n,i)*x(i));
23 end
24 x(n)=x(n)/LU(n,n);
25 for i=n-1:-1:1
26     x(1:i)=x(1:i)-(LU(1:i,i+1)*x(i+1));
27     x(i)=x(i)/LU(i,i);
28 end
29 return
30 end

```

3.3 Esercizio 10

i	Sigma	Norma
1	10^{-1}	8.9839e-15
2	10^1	1.4865e-14
3	10^3	1.3712e-12
4	10^5	1.2948e-10
5	10^7	5.3084e-09
6	10^9	1.0058e-06
7	10^{11}	8.5643e-05
8	10^{13}	0.0107
9	10^{15}	0.9814
10	10^{17}	4.1004e+03

Table 2: valori approssimati

Tabella che composta: i=indice dell'iterazione; Sigma=valore calcolato e usato dalla funzione linsis(), per introdurre un errore nella matrice generata A e nel suo vettore dei termini noti b, che cresce al crescere dell'iterazione. Norma= valore della distanza tra il vettore x, soluzione del sistema lineare $LU \cdot x = b$, il quale è affetto da errore, e il vettore xref, soluzione corretta del sistema. Da questa tabella quindi si può notare come all'incremento della iterazione, e quindi della sigma, l'errore nelle soluzioni cresce, quasi proporzionalmente come sigma, con un fattore di 10^2 ;

3.4 Esercizio 11

```

1 function QR = myqr(A)
2 %   QR = myqr(A)
3 %   calcola la fattorizzazione QR di Householder della matrice A
4 %   Input:
5 %       A= matrice quadrata da fattorizzare
6 %
7 %   Output:
8 %       QR=matrice contenente le informazioni sui fattori Q e R della
9 %       fattorizzazione QR di A
10 %
11 [m,n] = size(A);
12 if n > m
13     error('Dimensioni errate');
14 end
15 QR = A;

```

```

16   for i = 1:n
17       alfa = norm(QR(i:m,i));
18       if alfa == 0
19           error('la matrice non ha rango massimo');
20       end
21       if QR(i,i) >= 0
22           alfa = -alfa;
23       end
24       v1 = QR(i,i) - alfa;
25       QR(i,i) = alfa;
26       QR(i+1:m,i) = QR(i+1:m,i)/v1;
27       beta = -v1/alfa;
28       v = [1; QR(i+1:m,i)];
29       QR(i:m,i+1:n) = QR(i:m,i+1:n) - (beta * v) * (v' * QR(i:m,i+1:n));
30   end
31 end

```

3.5 Esercizio 12

```

1  function x = qrsolve(QR, b)
2  %
3  %
4  %   x = qrSolve(QR, b)
5  %   risolve il sistema QR*x=b nel senso dei minimi quadrati.
6  %   Input:
7  %       QR=matrice contenente le informazioni Q e R della
8  %       fattorizzazione di una matrice quadrata A
9  %       b=termine noto del sistema lineare
10 %   Output:
11 %       x=vettore delle soluzioni del sistema lineare
12 %
13 [m,n] = size(QR);
14 k = length(b);
15 if k ~= m
16     error('Dati inconsistenti');
17 end
18 x=b(:);
19 for i = 1:n
20     v=[1; QR(i+1:m,i)];
21     beta = 2/(v'* v);
22     x(i:m) = x(i:m) - beta*(v'*x(i:m))*v;
23 end
24 x=x(1:n);
25 for j = n:-1:1
26     if QR(j,j)==0
27         error('Matrice singolare');
28     end
29     x(j) = x(j) / QR(j,j);
30     x(1:j-1) = x(1:j-1) - QR(1:j-1,j)*x(j);
31 end
32 return
33 end

```

3.6 Esercizio 13

```

1  A= [1, 2, 3; 1 2 4; 3 4 5; 3 4 6; 5 6 7];

```

```

2 b=[14 17 26 29 38];
3 QR=myqr(A);
4 ris=qr.solve(QR,b);
5 disp(ris);

```

Il risultato finale è $ris = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.7 Esercizio 14

A\b	(A'*A)\(A'*b)
1.0000	3.5759
2.0000	-3.4624
3.0000	9.5151
4.0000	-1.2974
5.0000	7.9574
6.0000	4.9125
7.0000	7.2378
8.0000	7.9765

Table 3: valori approssimati

L'espressione $A \backslash b$ risolve in matlab, il sistema di equazioni lineari nella forma matriciale $A \cdot x = b$ per X .

L'espressione $(A' \cdot A) \backslash (A' \cdot b)$ impiega lo stesso operatore \backslash , quindi risolve il sistema delle equazioni lineari delle due parentesi. La Matrice A viene calcolata usando la funzione `vander()` che genera una matrice di tipo Vandermonde, la quale è mal condizionata. Usando la funzione `cond()` sulla matrice A si ottiene un condizionamento pari a: $1.5428e+09$. Eseguendo poi la moltiplicazione della prima parentesi tonda, il condizionamento è pari a: $4.4897e+18$. Andando così ad eseguire una divisione tra una matrice mal condizionata e un vettore, il risultato presenta degli errori.

4 Capitolo 4

4.1 Esercizio 15

Eseguendo il codice es15.m si ottengono i seguenti risultati:

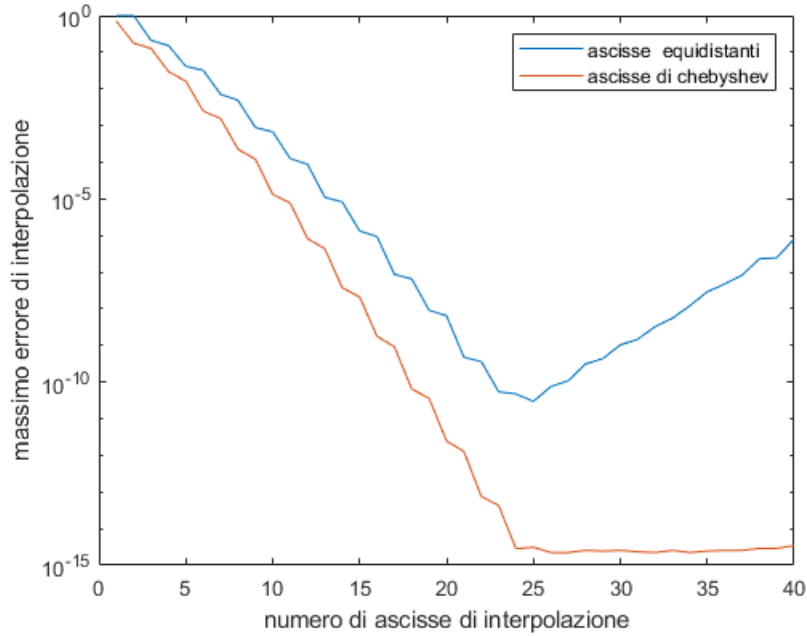


Figure 2: risultati interpolazione

Per le ascisse di chebyshev, si ha una decrescita esponenziale dell'errore massimo per $n \leq 25$ per poi assestarsi a circa $2 \cdot 10^{-15}$ per n successivi. Per quanto riguarda le ascisse equidistanti invece, si può notare come l'errore massimo torni a crescere esponenzialmente per $n > 25$. I risultati confermano il mal condizionamento del problema di interpolazione polinomiale quando vengono usate ascisse d'interpolazione equidistanti,

4.2 Esercizio 16

Eseguendo es16.m si ottiene:

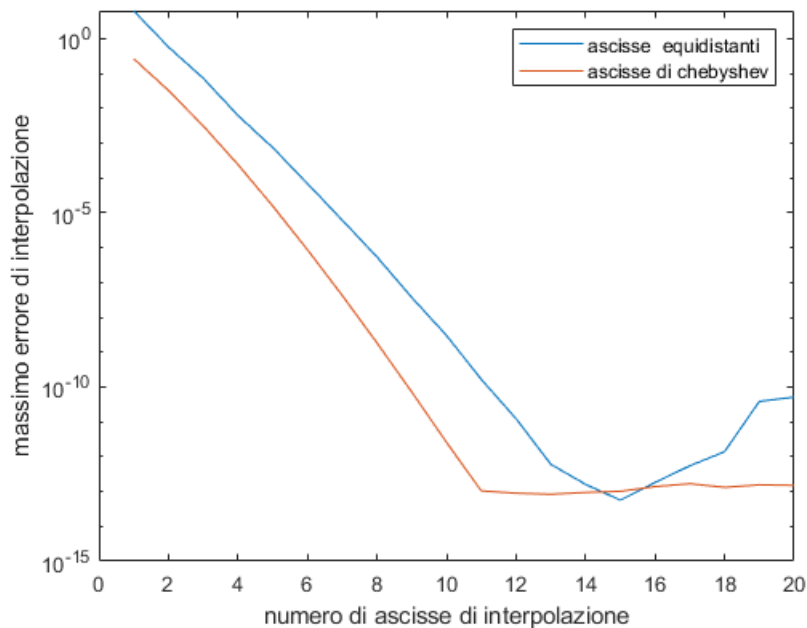


Figure 3: risultati interpolazione hermite

Si può notare come, rispetto all'interpolazione classica, l'errore decresca più rapidamente per $n \leq 15$. Anche in questo caso l'errore commesso usando le ascisse di chebyshev è migliore in confronto al caso delle ascisse equidistanti (eccetto per $n = 15$).

4.3 Esercizio 17

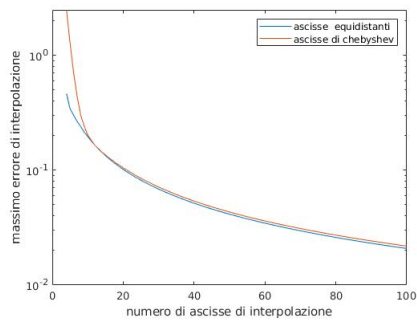
```
1 function output=splinenat(x,y,xq)
2 %
3 % output=splinenat(x,y,xq)
4 %funzione che calcola la spline cubica naturale.
5 %Input:
6 % x=vettore delle ascisse su cui calcolare la spline
7 % y=vettore dei valori di f(x), con x ascissa
8 % xq= insieme delle ascisse di cui si vuole sapere il valore della spline
9 %Output:
10 % output=vettore delle approssimazioni sulle ascisse xq
11 %
12 n=length(x);
13 l=length(xq);
14 if(length(y)~=n), error('dati in input con dimensioni differenti');end
15 [x1,i]=sort(x);
16 y1=y(i);
17 m=spline0(x1,y1);
18 h=diff(x1);
19 df = diff(y1)./h;
20 r=y(1:(n-1))-((h(1:n-1).^2)/6)*m(2:n);
21 q=df(1:n-1)-h(1:n-1)*(m(2:n)-m(1:n-1));
22 output=zeros(l,1);
23 for i=1:l
24     indg=find(xq(i)<=x1(2:n),1)+1;
```

```

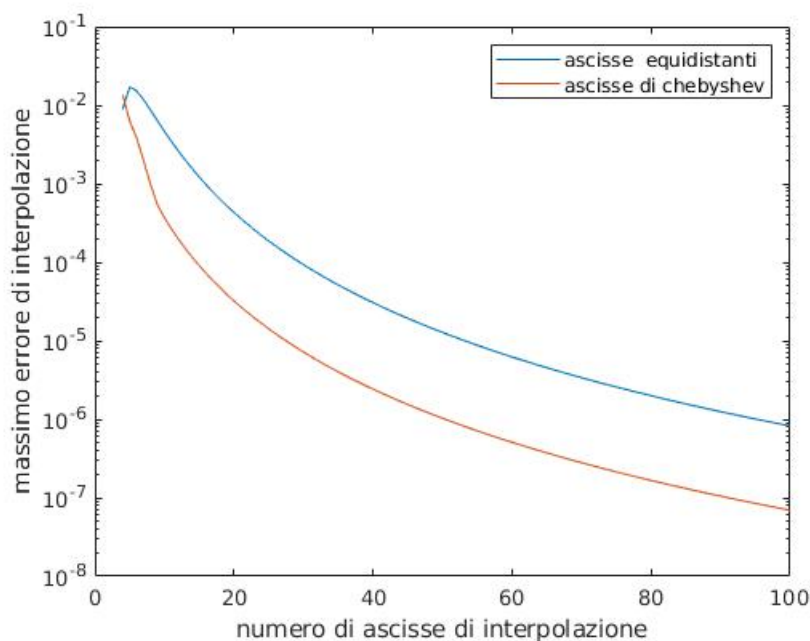
25 indp=find(xq(i)>=x1(1:n-1),1,'last');
26 output(i)=(((xq(i)-x1(indp)).^3).*m(indg)+((x1(indg)-xq(i))^3).*m(indp))/(6*h(indp))+q(
    indp).*(xq(i)-x1(indp))+r(indp);
27 end
28 return
29 end

```

4.4 Esercizio 18



4.5 Esercizio 19



4.6 Esercizio 20

```

1 function y = minimiquadrati(xi, fi, m)
2 %
3 %
4 % y = minimiquadrati(xi, fi, m)
5 % calcola il valore del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado m
6 % sulle ascisse xi. fi contiene i valori approssimati di una funzione f valutata su xi
7 if length(unique(xi)) < m+1
8     error('ascisse distinte non sufficienti');
9 end
10 fi = fi(:);
11 V = fliplr(vander(xi));

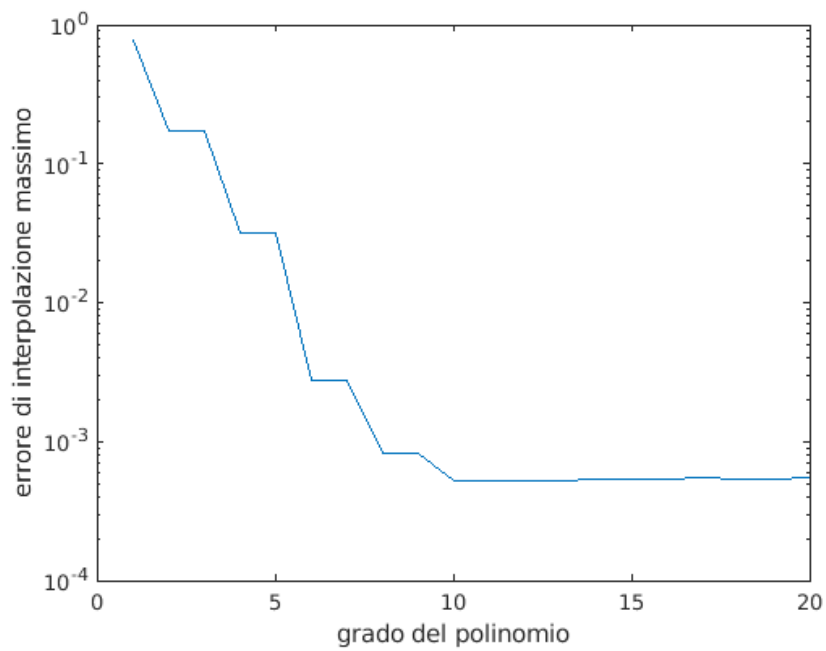
```

```

12 V = V(1:end, 1:m+1);
13 QR = myqr(V);
14 p = qrsolve(QR, fi);
15 y = p(m+1)*ones(size(xi));
16 for i = 0:m-1
17     y = y.*xi+p(m-i);
18 end
19 end

```

Eseguendo es20.m si ottiene:



Si nota una decrescita dell'errore esponenziale fino a $m = 10$, dove si assesta tra 10^{-3} e 10^{-4} .

5 Capitolo 5

5.1 Esercizio 21

```

1 function c = ncweights(n)
2 %
3 %
4 % c = nc-weights(n)
5 % calcola i pesi della formula di newton cotes di grado n;
6 %
7 if n<=0
8     error('grado della formula non positivo');
9 end
10 c=zeros(1,floor(n / 2 + 1));
11 for j = 1:(ceil((n+1)/2))
12     temp = (0:n);
13     vj = temp(j);
14     temp(j)=[];
15     f = @(x)(prod(x-temp) /prod(vj-temp));
16     c(j) = integral(f, 0, n, 'ArrayValued', true);
17 end
18 c = [c flip(c)]; %sfrutto la simmetria dei pesi
19 if mod(n,2)==0
20     %elimino la copia del valore centrale prodotta da flip(c) e che risulta di troppo per
        n pari
21     c(n/2+1) = [];
22 end
23 return
24 end

```

Eseguendo lo script es21.m si ottiene:

$n \setminus c_{in}$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$					
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$				
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$			
5	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$		
6	$\frac{41}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{68}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{41}{140}$	
7	$\frac{108}{355}$	$\frac{810}{559}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{649}{536}$	$\frac{649}{536}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{810}{559}$	$\frac{108}{355}$

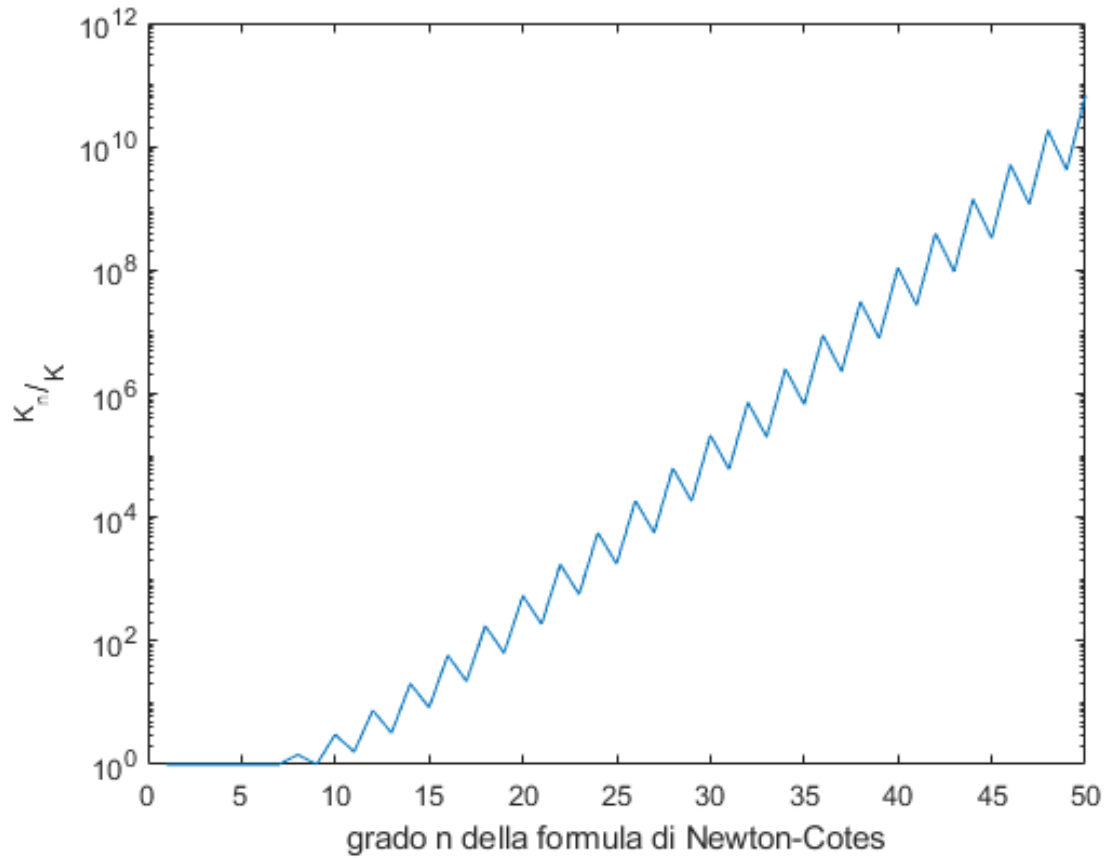
Table 4: pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado

5.2 Esercizio 22

Sappiamo che $k = (b - a)$ e $k_n = (b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$. Il rapporto sarà dunque dato da:

$$\frac{k_n}{k} = \frac{(b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|}{b - a} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$$

Calcolando $\frac{k_n}{k}$ per $n = 1, \dots, 50$ (es22.m) si ottiene:



5.3 Esercizio 23

```
1 function y = newtoncotes(f,a, b, n)
2 %
3 % y= newtoncotes(f,a,b, n)
4 % calcola l'approssimazione dell'integrale definito per la funzione f sull'intervallo [a,
   b],
5 % utilizzando la formula di newton cotes di grado n.
6 %
7
8 if a > b || n < 0
9     error('dati inconsistenti');
10 end
11 xi = linspace(a, b, n+1);
12 fi = feval(f, xi);
13 h = (b-a) / n;
14 c = ncweights(n);
15 y = h*sum(fi.*c);
16 return
17 end
```

RISULTATI PER N DA 1 A 9(es23.m):

grado della formula	valore integrale	errore
1	$4,28 \cdot 10^{-1}$	$2,53 \cdot 10^{-1}$
2	$2,13 \cdot 10^{-1}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$
3	$1,96 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$
4	$1,80 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-3}$
5	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-3}$
6	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$
7	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$
8	$1,75 \cdot 10^{-1}$	0
9	$1,75 \cdot 10^{-1}$	0

5.4 Esercizio 24

```
1 function I = trapecomp(f, a, b, n)
2 %
3 %
4 % I = trapecomp(f, a, b)
5 %
6 % Approssimazione dell'integrale definito di f(x) con estremi a e b,
7 % mediante la formula composta dei trapezi su n+1 ascisse equidistanti
8 if a==b
9     I=0;
10 elseif n < 1 || n~=fix(n)
11     error('numero di ascisse non valido');
12 else
13     h=(b-a)/n;
14     x=linspace(a, b, n+1);
15     f = feval(f, x);
16     I = h*(f(1)/2 + sum(f(2:n)) + f(n+1)/2);
17 end
18 return
19 end
```

```

1 function I = simpcomp(f, a, b, n)
2     %myFun - Description
3     %
4     % I = simpcomp(f, a, b)
5     %
6     % Approssimazione dell'integrale definito di f(x) con estremi a e b,
7     % mediante la formula composta di Simpson su n+1 ascisse equidistanti(n pari)
8     if a==b
9         I=0;
10    elseif n < 2 || n/2 ~= fix(n/2)
11        error('numero di ascisse non valido');
12    else
13        h=(b-a)/n;
14        x=linspace(a, b, n+1);
15        f = feval(f, x);
16        I = (h/3) * (f(1) + f(n+1) + 4*sum(f(2:2:n)) + 2*sum(f(3:2:n-1)));
17    end
18    return
19    end

```

Approssimando $\int_{-1}^{1.1} \tan(x)dx$ con le due formule si ottiene:

intervalli\formula	trapezi composta	simpson composta
2	0.266403558406035	0.266403558406035
4	0.203432804450016	0.182442553131343
6	0.188498346613972	0.177333443886033
8	0.182789408875225	0.175908277016961
10	0.180034803521960	0.175392868382289
12	0.178504015707472	0.175172572071972
14	0.177568218195411	0.175066546519247
16	0.176955413111201	0.175010747856527
18	0.176532709616469	0.174979254439942
20	0.176229037552030	0.174960448895386

Table 5: risultati di es24.m

La formula composta di simpson converge più rapidamente ed è più precisa rispetto alla formula dei trapezi

5.5 Esercizio 25

```

1 function [I2, points] = adaptrap(f, a, b, tol, fa, fb)
2 %
3 %
4 % Syntax: [I2, points] = adaptrap(f, a, b, tol, fa, fb)
5 %
6 %
7 global points
8 delta = 0.5;
9 if nargin<=4
10     fa = feval(f, a );
11     fb = feval(f, b );
12     if nargin==2
13         points = [a fa; b fb];
14     else
15         points = [];
16     end

```

```

17 end
18 h = b-a;
19 x1 = (a+b)/2;
20 f1 = feval(f, x1);
21 if ~isempty(points)
22     points = [points; [x1 f1]];
23 end
24 I1 = .5*h*(fa+fb);
25 I2 = .5*(I1+h*f1);
26 e = abs(I2-I1)/3;
27 if e>tol || abs(b-a) > delta
28     I2 = adaptrap(f, a, x1, tol/2, fa, f1) + adaptrap(f, x1, b, tol/2, f1, fb);
29 end
30 return
31 end

```

```

1 function [I2, points] = adapsim(f, a, b, tol, fa, f1, fb)
2 % [I2, points] = adapsim(f, a, b, tol, fa, f1, fb)
3 % Approssimazione dell'integrale definito di f(x) con estremi a e b,
4 % mediante la formula adattiva di simpson
5 global points
6 delta = 0.5;
7 x1 = (a+b)/2;
8 if nargin<=4
9     fa = feval(f, a );
10    fb = feval(f, b );
11    f1 = feval(f, x1);
12    if nargin==2
13        points = [a fa;x1 f1; b fb];
14    else
15        points = [];
16    end
17 end
18 h = (b-a)/6;
19 x2 = (a+x1)/2;
20 x3 = (x1+b)/2;
21 f2 = feval(f, x2);
22 f3 = feval(f, x3);
23 if ~isempty(points)
24     points = [points; [x2 f2; x3 f3]];
25 end
26 I1 = h*(fa+fb+4*f1);
27 I2 = .5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb);
28 e = abs(I2-I1)/15;
29 if e>tol || abs(b-a) > delta
30     I2 = adapsim(f, a, x1, tol/2, fa, f2, f1) + adapsim(f, x1, b, tol/2, f1, f3, fb);
31 end
32 return
33 end

```


Approssimando $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+10^2 x^2} dx$ con le due formule si ottiene:

tolleranza\formula	trapezi adattiva	simpson adattiva
10^{-2}	0.295559711784128, punti = 21	0.281297643062670, punti = 17
10^{-3}	0.294585368185034 , punti = 93	0.281297643062670, punti = 17
10^{-4}	0.294274200873635, punti = 277	0.294259338419631, punti = 41
10^{-5}	0.294230142164878, punti = 793	0.294227809768005, punti = 81
10^{-6}	0.294226019603178, punti = 2692	0.294225764620384 , punti = 145

Table 6: risultati di es25.m

Per ciascuna formula, l'operazione che comporta maggior costo computazionale ad ogni chiamata è la valutazione funzionale dei punti di un sottointervallo. Poichè ogni punto viene valutato una sola volta, possiamo confrontare il costo delle due formule andando a vedere quanti punti aggiuntivi sono stati utilizzati. Osservando i dati riportati nella tabella 6, è palese come la formula di simpson adattiva convergà più rapidamente rispetto alla formula dei trapezi adattiva.

6 Codici ausiliari

6.1 Esercizio 6

Listing 1: es6.m

```
1 f = @(x)(x-cos(x));
2 f1 = @(x)(1+sin(x));
3
4 x0 = 0;
5 x1 = 1;
6 x=zeros(4,4);
7 y= zeros(4, 4);
8 for i=3:3:12
9
10     [x(1, i/3), y(1, i/3)] = bisezione(f, x0, x1, 10^(-i));
11     [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
12     [x(3, i/3), y(3, i/3)] = corde(f, f1, x0, 10^(-i));
13     [x(4,i/3), y(4, i/3)] = secanti(f, x0, x1, 10^(-i), 100);
14 end
15 row_names = {'bisezione', 'newton', 'corde', 'secanti'};
16 colnames = {'10^-3', '10^-6', '10^-9', '10^-12'};
17 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
18 disp(values)
19 figure
20 plot([3, 6, 9, 12], y, 'o-')
21 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
22 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
23 ylabel('iterazioni')
24 legend({'bisezione', 'newton', 'corde', 'secanti'}, 'Location', 'northwest')
```

6.2 Esercizio 7

Listing 2: es7.m

```
1 f = @(x)(x^2*tan(x));
2 f1 = @(x)(2*x*tan(x) +(x^2)/(cos(x)^2));
3 m = 3;
4 x0 = 1;
5 y= zeros(3, 4);
6 x=-1*ones(3,4);
7 for i=3:3:12
8     [x(1, i/3), y(1, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
9     [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newtonmod(f, f1, x0, m, 10^(-i));
10    [x(3, i/3), y(3, i/3)] = aitken(f, f1, x0, 10^(-i));
11 end
12 disp(x);
13 disp(y);
14 row_names = {'newton', 'newton modificato', 'aitken'};
15 colnames = {'10^-3', '10^-6', '10^-9', '10^-12'};
16 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
17
18 format
19 iterations = array2table(y, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
20 plot([3, 6, 9, 12], y, '-')
21 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
22 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
23 ylabel('iterazioni')
```

```
24 legend({'newton', 'newtonmod', 'aitken'}, 'Location', 'northwest')
```

6.3 Esercizio 15

Listing 3: es15.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 1:40
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     ylin = lagrange(xlin,f(xlin),x);
9     ycheby = lagrange(xcheby,f(xcheby),x);
10    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
11    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
12 end
13 semilogy(linerrors);
14 hold on;
15 semilogy(chebyerrors);
16 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
17 ylabel('massimo errore di interpolazione');
18 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

6.4 Esercizio 16

Listing 4: es16.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 f1 = @(x)(-pi*x.*sin((pi*x.^2)/2));
3 x = linspace(-1, 1, 100001);
4 linerrors = zeros(1, 20);
5 chebyerrors = zeros(1, 20);
6 for n = 1:20
7     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
8     xcheby = chebyshev(-1,1, n+1);
9     ylin = hermite(xlin,f(xlin),f1(xlin),x);
10    ycheby = hermite(xcheby,f(xcheby),f1(xcheby),x);
11    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
12    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
13 end
14 semilogy(linerrors);
15 hold on;
16 semilogy(chebyerrors);
17 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
18 ylabel('massimo errore di interpolazione');
19 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

6.5 Esercizio 18

Listing 5: es18.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
```

```

4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 4:100
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     xcheby(1)=-1;
9     xcheby(n+1)=1;
10    ylin = splinenat(xlin,f(xlin),x);
11    ycheby = splinenat(xcheby,f(xcheby),x);
12    ylin=ylin';
13    ycheby=ycheby';
14    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
15    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
16 end
17 semilogy(linerrors);
18 hold on;
19 semilogy(chebyerrors);
20 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
21 ylabel('massimo errore di interpolazione');
22 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

6.6 Esercizio 19

Listing 6: es19.m

```

1 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 4:100
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     ylin = spline(xlin,f(xlin),x);
9     ycheby = spline(xcheby,f(xcheby),x);
10    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
11    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
12 end
13 semilogy(linerrors);
14 hold on;
15 semilogy(chebyerrors);
16 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
17 ylabel('massimo errore di interpolazione');
18 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

6.7 Esercizio 20

Listing 7: es20.m

```

1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 fp = @(x)(f(x) + 10^(-3)*rand(size(x)));
3 xi = -1 + 2*(0:10^4)/10^4;
4 fi = f(xi);
5 fpi = fp(xi);
6 errors=zeros(1, 20);
7 for m = 1:20
8     y = minimiquadrati(xi, fpi, m);
9     errors(m) = norm(abs(y-fi), inf);
10 end

```

```

11 semilogy(errors);
12 xlabel('grado del polinomio');
13 ylabel('errore di interpolazione massimo');

```

6.8 Esercizio 21

Listing 8: es21.m

```

1 for i = 1:7
2     weights= rats(ncweights(i))
3 end

```

6.9 Esercizio 22

Listing 9: es22.m

```

1 rapp = zeros(1, 50);
2 for i = 1:50
3     rapp(i) = sum(abs(ncweights(i)))/i;
4 end
5 semilogy(rapp);
6 xlabel('grado n della formula di Newton-Cotes');
7 ylabel('^{\mathcal{K}_n}/_{\mathcal{K}}');

```

6.10 Esercizio 23

Listing 10: es23.m

```

1 value = log(cos(1)/cos(1.1));
2 x = zeros(1,9);
3 errors=zeros(1, 9);
4 for i = 1:9
5     x(i) = newtoncotes(@tan, -1,1.1, i);
6     errors(i) = abs(value-x(i));
7 end

```

6.11 Esercizio 24

Listing 11: es24.m

```

1 a = -1;
2 b = 1.1;
3 n = 10;
4 itrap = zeros(1, n);
5 isimp = zeros(1, n);
6 for i = 1:n
7     itrap(i) = trapecomp(@tan, a, b, i*2);
8     isimp(i) = simpcomp(@tan, a, b, i*2);
9 end
10 integrali = [itrap; isimp];
11 row_names = {'trapezi composta', 'simpson composta'};
12 colnames = {'2', '4', '6', '8', '10', '12', '14', '16', '18', '20'};
13 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
14 disp(values);

```

6.12 Esercizio 25

Listing 12: es25.m

```
1 format long e
2 f = @(x)(1/(1+100*x.^2));
3 a = -1;
4 b = 1;
5 itrap = zeros(1, 5);
6 trap_points = zeros(1, 5);
7 isimp = zeros(1, 5);
8 simp_points = zeros(1, 5);
9 for i = 1:5
10     [itrap(i), points] = adaptrap(f, a, b, 10^(-i-1));
11     trap_points(i) = length(points);
12     [isimp(i), points] = adapsim(f, a, b, 10^(-i-1));
13     simp_points(i) = length(points);
14 end
15 integrali = [itrap; isimp];
16 npoints = [trap_points; simp_points];
17 row_names = {'trapezi adattiva', 'simpson adattiva'};
18 colnames = {'10^-2', '10^-3', '10^-4', '10^-5', '10^-6'};
19 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
20 npoints = array2table(npoints, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
21 disp(values);
22 format
23 disp(npoints);
```