



Elaborato di
Calcolo Numerico
Anno Accademico 2019/2020

Niccolò *Piazzesi* - 6335623 - niccolo.piazzesi@stud.unifi.it
Pietro *Bernabei* - 6291312 - pietro.bernabei@stud.unifi.it

Contents

1	Capitolo 1	4
1.1	Esercizio 1	4
1.2	Esercizio 2	4
1.3	Esercizio 3	4
2	Capitolo 2	5
2.1	Esercizio 4	5
2.2	Esercizio 5	5
2.3	Esercizio 6	8
2.4	Esercizio 7	9
3	Capitolo 3	11
3.1	Esercizio 8	11
3.2	Esercizio 9	11
3.3	Esercizio 10	12
3.4	Esercizio 11	12
3.5	Esercizio 12	13
3.6	Esercizio 13	13
3.7	Esercizio 14	13
4	Capitolo 4	14
4.1	Esercizio 15	14
4.2	Esercizio 16	14
4.3	Esercizio 17	15
4.4	Esercizio 18	15
4.5	Esercizio 19	16
4.6	Esercizio 20	16
5	Capitolo 5	18
5.1	Esercizio 21	18
5.2	Esercizio 22	19
5.3	Esercizio 23	20
5.4	Esercizio 24	20
5.5	Esercizio 25	20
6	Codici ausiliari	21
6.1	Esercizio 6	21
6.2	Esercizio 7	21
6.3	Esercizio 15	22
6.4	Esercizio 16	22
6.5	Esercizio 18	22
6.6	Esercizio 19	23
6.7	Esercizio 20	23
6.8	Esercizio 21	24
6.9	Esercizio 22	24
6.10	Esercizio 23	24
6.11	Esercizio 24	24
6.12	Esercizio 25	25

List of Figures

1	iterazioni richieste	8
---	--------------------------------	---

List of Tables

1	valori approssimati	8
2	valori approssimati	12
3	pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado	18

1 Capitolo 1

1.1 Esercizio 1

Sia $f(x)$ una funzione sufficientemente regolare e sia $h > 0$ una quantità abbastanza "piccola". Possiamo sviluppare i termini $f(x-h)$ e $f(x+h)$ mediante il polinomio di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

Sostituiamo i termini nell'espressione iniziale:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \\ = & \frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) - 2f(x) + f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)}{h^2} = \\ = & \frac{h^2f''(x) + O(h^4)}{h^2} = f''(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Eseguendo lo script si ottiene $u = 1.1102 \cdot 10^{-16} = \frac{\epsilon}{2}$, dove ϵ è la precisione di macchina. Il controllo interno ci dice che si esce dal ciclo solamente quando u diventa talmente piccolo che la somma $1+u$ viene percepita dal calcolatore come uguale a 1. Questo avviene se $u < \epsilon$, e la prima iterazione in cui il controllo risulta vero è proprio quando $u = \frac{\epsilon}{2}$. Il codice può quindi essere utilizzato per calcolare la precisione di macchina di un calcolatore, moltiplicando per 2 il valore di u restituito.

1.3 Esercizio 3

Quando si esegue $a - a + b$ il risultato è 100 mentre quando si esegue $a + b - a$ si ottiene 0. La differenza dei risultati è dovuta al fenomeno della cancellazione numerica:

- nel primo caso la sottrazione avviene sullo stesso numero $a = 10^{20}$. Sottrarre un numero da se stesso ha sempre risultato esatto 0 e quindi il risultato finale è corretto
- nel secondo caso la sottrazione avviene tra i termini $a+b = 10^{20} + 100$ e $a = 10^{20}$. $a+b$ ha le prime 18 cifre in comune con a e, a causa degli errori di approssimazione, le ultime tre cifre vengono cancellate dalla sottrazione, dando 0 come risultato finale.

2 Capitolo 2

2.1 Esercizio 4

```
1 function x1=radn(x, n)
2 %
3 % x1=radn(n,x)
4 % funzione Matlab che implementa il metodo di newton per il calcolo della
5 % radice n-esima di un numero positivo x
6 %
7 format long e
8 imax=1000;
9 tol=eps;
10 if x<=0
11     error('valore in ingresso errato');
12 end
13 x1=x/2;
14 for i=1:imax
15     x0=x1;
16     fx=x0^n-x;
17     fx1=(n)*x0^(n-1);
18     x1=x0-fx/fx1;
19     if abs(x1-x0)<=tol
20         break
21     end
22 end
23 if abs(x1-x0)>tol
24     error('metodo non converge')
25 end
26 end
```

2.2 Esercizio 5

- Metodo di bisezione

```
1 function [x,i] = bisezione(f,a,b,tol)
2 %bisez
3 %[x,i]=bisezione(f, a, b, tol, maxit)
4 %Pre: f continua in [a,b]
5 % Applica il metodo di bisezione per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      —funzione
8 % a, b    — estremi dell'intervallo
9 %
10 % tol     —tolleranza
11 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
12 % VEDI ANCHE: newton, corde, secanti, aiten, newtonmod
13     format long e
14     fa = feval(f,a);
15     fb = feval(f,b);
16     if(fa * fb > 0 )
17         error('gli estremi hanno lo stesso segno');
18     end
19     x0=a;
20     imax = ceil(log2(b-a) - log2(tol));
21     for i = 1:imax
22         x = (a+b)/2;
23         fx = feval(f,x);
```

```

24         if abs(x-x0) <= tol*(1+abs(x0))
25             break
26         end
27         x0=x;
28         if fa*fx<0
29             b = x;
30             fb = fx;
31         else
32             a = x;
33             fa = fx;
34         end
35     end
36
37 end

```

- Metodo di Newton

```

1 function [x,i] = newton( f, f1, x0, tol, maxit )
2 %newton
3 %[x,i]=newton(f,f1, x0, tol, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di newton per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      —funzione
8 % f1     —derivata di f
9 % x0     —approssimazione iniziale
10 % tol    —tolleranza
11 % maxit  —numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod
14
15     format long e
16     if nargin<4
17         error('numero argomenti insufficienti');
18     elseif nargin==4
19         maxit = 100;
20     end
21     if tol<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     x = x0;
25     for i = 1:maxit
26         fx = feval( f, x );
27         f1x = feval( f1, x );
28         x = x - fx/f1x;
29         if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
30             break;
31         else
32             x0 = x;
33         end
34     end
35     if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
36         error('metodo non converge');
37     end
38 end

```

- Metodo delle secanti

```

1 function [x, i]=secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
2 %secanti
3 %[x,i]=secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
4 %
5 % Applica il metodo delle secanti per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      —funzione
8 % x0     —approssimazione iniziale
9 % x1     —seconda approssimazione iniziale
10 % tolx   —tolleranza
11 % maxit  —numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, corde, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4
19     maxit = 100;
20 end
21 i=0;
22 f0=feval(f,x0);
23 for i=1:maxit
24     f1=feval(f,x1);
25     df1=(f1-f0)/(x1-x0);
26     x=x1-(f1/df1);
27     if abs(x1-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
28         break;
29     end
30     x0=x1;
31     x1=x;
32     f0=f1;
33
34 end
35 if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
36     error('metodo non converge');
37 end
38 end

```

- Metodo delle corde

```

1 function [x,i] = corde( f, f1, x0, tolx, maxit )
2 %corde
3 %[x,i]=corde(f,f1, x0, tolx, maxit)
4 %Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo delle corde per il calcolo della
6 % radice dell'equazione f(x)=0
7 % f      —funzione
8 % f1     —derivata di f
9 % x0     —approssimazione iniziale
10 % tolx   —tolleranza
11 % maxit  —numero massimo di iterazioni(default=100)
12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, aitken, newtonmod
14
15 format long e
16 if nargin<4
17     error('numero argomenti insufficienti');
18 elseif nargin==4

```

```

19         maxit = 100;
20     end
21     if tolx<eps
22         error('tolleranza non idonea');
23     end
24     flx = feval(f1, x0);
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         if fx==0
29             break;
30         end
31         x = x - fx/flx;
32         if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
33             break;
34         else
35             x0 = x;
36         end
37     end
38     if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
39         error('metodo non converge');
40     end
41 end

```

2.3 Esercizio 6

Eseguendo lo script es6.msi ottengono i risultati contenuti nella tabella 2 e nella figura 1. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

Metodo	tolleranza= 10^{-3}	tolleranza= 10^{-6}	tolleranza= 10^{-9}	tolleranza= 10^{-12}
bisezione	0.739257812500000	0.739085197448730	0.739085133187473	0.739085133215667
newton	0.739085133385284	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161
corde	0.739567202212256	0.739084549575213	0.739085132739254	0.739085133215737
secanti	0.739085133215001	0.739085133215161	0.739085133215161	0.739085133215161

Table 1: valori approssimati

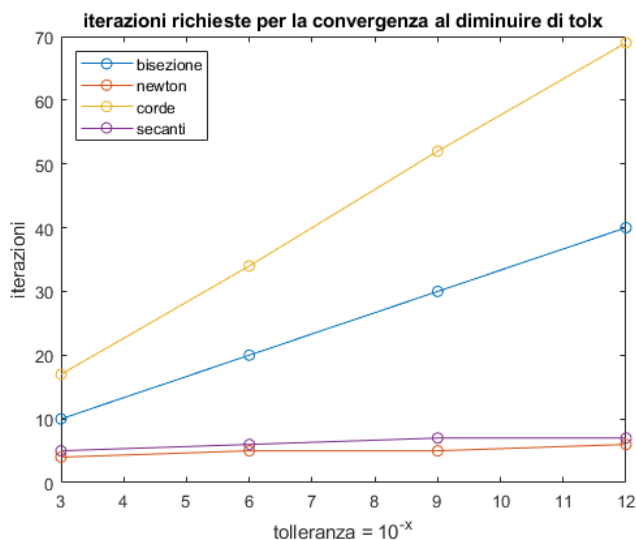


Figure 1: iterazioni richieste

2.4 Esercizio 7

Le nuove funzioni utilizzate in questo esercizio sono:

- Metodo di Newton modificato

```
1 function [x, i] = newtonmod( f, f1, x0, m, tolX, maxit )
2 %NEWTONMOLT
3 %[x,i]=Newtonmolt(f,f1,x0,m,tolX,maxit)
4 % Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di Newton per il calcolo della
6 % radice (di molteplicita' nota r) dell'equazione f(x)=0
7 % f      --funzione
8 % f1     --derivata di f
9 % x0     --approssimazione iniziale
10 % m      --molteplicita' della radice
11 % tolX   --tolleranza
12 % maxit  --numero massimo di iterazioni(default=100)
13 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
14 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, aitken
15
16     format long e
17     if nargin<5
18         error('numero argomenti insufficienti');
19     elseif nargin==5
20         maxit = 100;
21     end
22     if tolX<eps
23         error('tolleranza non idonea');
24     end
25     x = x0;
26     for i = 1:maxit
27         fx = feval( f, x );
28         f1x = feval( f1, x );
29         if fx==0
30             break;
31         end
32         x = x - m*(fx/f1x);
33         if abs(x-x0)<=tolX*(1+abs(x0))
34             break;
35         else
36             x0 = x;
37         end
38     end
39
40 end
```

- Metodo delle accelerazioni di Aitken

```
1 function [x, i] = aitken( f, f1, x0, tolX, maxit )
2 %aitken
3 %[x,i]=aitken(f,f1, x0, tolX, maxit)
4 % Pre: f derivabile
5 % Applica il metodo di accelerazione di aitken per il calcolo della
6 % radice (di molteplicita' incognita) dell'equazione f(x)=0
7 % f      --funzione
8 % f1     --derivata di f
9 % x0     --approssimazione iniziale
10 % tolX   --tolleranza
11 % maxit  --numero massimo di iterazioni(default=100)
```

```

12 % restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
13 % VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, newtonmod
14 format long e
15 if nargin<4
16     error('numero argomenti insufficienti');
17 elseif nargin==4
18     maxit = 100;
19 end
20 if tol<eps
21     error('tolleranza non idonea');
22 end
23 x = x0;
24 for i = 1:maxit
25     fx = feval( f, x0 );
26     flx = feval( f1, x0 );
27     if flx==0
28         break;
29     end
30     x1 = x0 - fx/flx;
31     fx = feval( f, x1 );
32     flx = feval( f1, x1 );
33     if flx==0
34         break;
35     end
36     x = x1 - fx/flx;
37     x = (x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
38     if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
39         break;
40     else
41         x0 = x;
42     end
43 end
44 if abs(x-x0) > tol*(1+abs(x0))
45     error('metodo non converge');
46 end
47 end

```

La radice nulla della funzione $f(x) = x^2 \tan(x)$ ha molteplicità $m = 3$, in quanto 0 annulla due volte il termine x^2 e $\tan(0) = 0$.

3 Capitolo 3

3.1 Esercizio 8

```
1 function [LU,p]=palu(A)
2 % [LU,p]=palu(A)
3 % funzione che dato in input matrice A restituisce matrice fattorizzata LU
4 % e il relativo vettore p di permutazione di LU con pivoting parziale di A
5 % input:
6 %   A= matrice di cui si vuole calcolare la fattorizzazione lu con pivoting
7 %   parziale
8 % output:
9 %   LU=matrice quadrata di dimensioni n*n, composta dalla matrice
10 %   triangolare superiore U e la matrice triangolare inferiore a diagonale
11 %   unitaria L
12 %   p= vettore di permutazione di dimensione n, generato dalla
13 %   fattorizzazione di A con pivoting parziale
14 %
15
16 [n,m]=size(A);
17 if(n~=m)
18     error(matrice A non quadrata);
19 end
20 LU=A;
21 p=[1:n];
22 for i=1:n-1
23     [mi,ki]=max(abs(LU(i:n,i)));
24     if mi==0
25         error('La matrice e'' non singolare')
26     end
27     ki=ki+i-1;
28     if ki>i
29         p([i ki])=p([ki i]);
30         LU([i ki],:)= LU([ki i],:);
31     end
32     LU(i+1:n,i)=LU(i+1:n,i)/LU(i,i);
33     LU(i+1:n,i+1:n)=LU(i+1:n,i+1:n)-LU(i+1:n,i)*LU(i,i+1:n);
34 end
35 return
36 end
```

3.2 Esercizio 9

```
1 function x=LUsolve(LU,p,b)
2 %
3 % funzione che risolve il sistema lineare LUx=b(p):
4 %input:
5 %   LU=matrice quadrata (n*n) fattorizzata LU, ottenuta attrarso la
6 %   fattorizzazione con pivoting parziale
7 %   p= vettore di permutazione per b, di dimensione n, con valori da (1 a
8 %   n)
9 %   b=vettore dei termini noti
10 %output:
11 %   x=vettore delle incognite calcolate
12 %
13 %
14 [m,n]=size(LU);
```

```

15     if(m~=n || n~=length(b)) error('dati inconsistenti')
16     else if(min(abs(diag(LU)))==0)
17         error(fattorizzazione errata);
18     end
19 end
20 x=b(p);
21 for i=1:n-1
22     x(i+1:n)=x(i+1:n)-(LU(i+1:n,i)*x(i));
23 end
24 x(n)=x(n)/LU(n,n);
25 for i=n-1:-1:1
26     x(1:i)=x(1:i)-(LU(1:i,i+1)*x(i+1));
27     x(i)=x(i)/LU(i,i);
28 end
29 return
30 end

```

3.3 Esercizio 10

Si nota da questa tabella, che sigma e la norma euclidea, tra la differenza di x e xref, sono direttamente proporzionali

Sigma	Norma
10^{-1}	8.9839e-15
10^1	1.4865e-14
10^3	1.3712e-12
10^5	1.2948e-10
10^7	5.3084e-09
10^9	1.0058e-06
10^{11}	8.5643e-05
10^{13}	0.0107
10^{15}	0.9814
10^{17}	4.1004e+03

Table 2: valori approssimati

3.4 Esercizio 11

```

1 function QR = myqr(A)
2 %QR = myqr(A)
3 % calcola la fattorizzazione QR di Householder della matrice A
4
5 [m,n] = size(A);
6 if n > m
7     error('Dimensioni errate');
8 end
9 QR = A;
10 for i = 1:n
11     alfa = norm(QR(i:m,i));
12     if alfa == 0
13         error('la matrice non ha rango massimo');
14     end
15     if QR(i,i) >= 0
16         alfa = -alfa;
17     end
18     v1 = QR(i,i) - alfa;
19     QR(i,i) = alfa;

```

```

20     QR(i+1:m,i) = QR(i+1:m,i)/v1;
21     beta = -v1/alfa;
22     v = [1; QR(i+1:m,i)];
23     QR(i:m,i+1:n) = QR(i:m,i+1:n) - (beta * v) * (v' * QR(i:m,i+1:n));
24 end
25 end

```

3.5 Esercizio 12

```

1 function x = qrsolve(QR, b)
2 %
3 %
4 % x = qrSolve(QR, b)
5 % risolve il sistema QR*x=b nel senso dei minimi quadrati
6 %
7 [m,n] = size(QR);
8 k = length(b);
9 if k ~= m
10     error('Dati inconsistenti');
11 end
12 x=b(:);
13 for i = 1:n
14     v=[1; QR(i+1:m,i)];
15     beta = 2/(v'* v);
16     x(i:m) = x(i:m) - beta*(v'*x(i:m))*v;
17 end
18 x=x(1:n);
19 for j = n:-1:1
20     if QR(j,j)==0
21         error('Matrice singolare');
22     end
23     x(j) = x(j) / QR(j,j);
24     x(1:j-1) = x(1:j-1) - QR(1:j-1,j)*x(j);
25 end
26 return
27 end

```

3.6 Esercizio 13

```

1 A= [1, 2, 3; 1 2 4; 3 4 5; 3 4 6; 5 6 7];
2 b=[14 17 26 29 38];
3 QR=myqr(A);
4 ris=qrsolve(QR,b);
5 disp(ris);

```

Il risultato finale è $ris = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

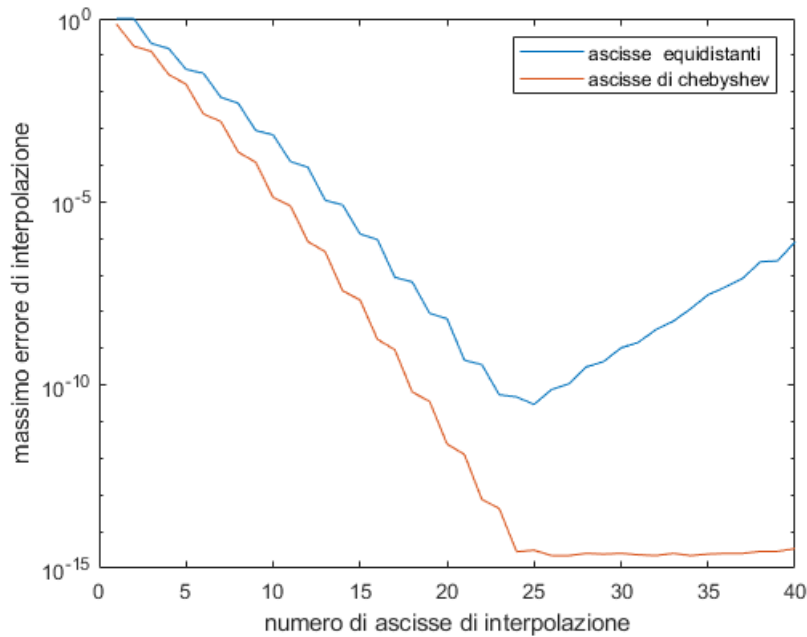
3.7 Esercizio 14

l'espressione `Arisolve` in matlab, il sistema di equazioni lineari nella forma matriciale $A*x=b$ per X l'espressione $(A'*A) (A'*b)$ impiega lo stesso operatore quindi risolve il sistema delle equazioni lineare delle due parentesi. Le due espressioni sono equivalenti dal punto di vista matematico, ma in Matlab non danno lo stesso risultato, siccome nella seconda espressioni un overflow nel calcolo della moltiplicazione all'interno delle due parentesi che porta a porre una serie di valori a 0, questo fa si che non si ottiene lo stesso risultato

4 Capitolo 4

4.1 Esercizio 15

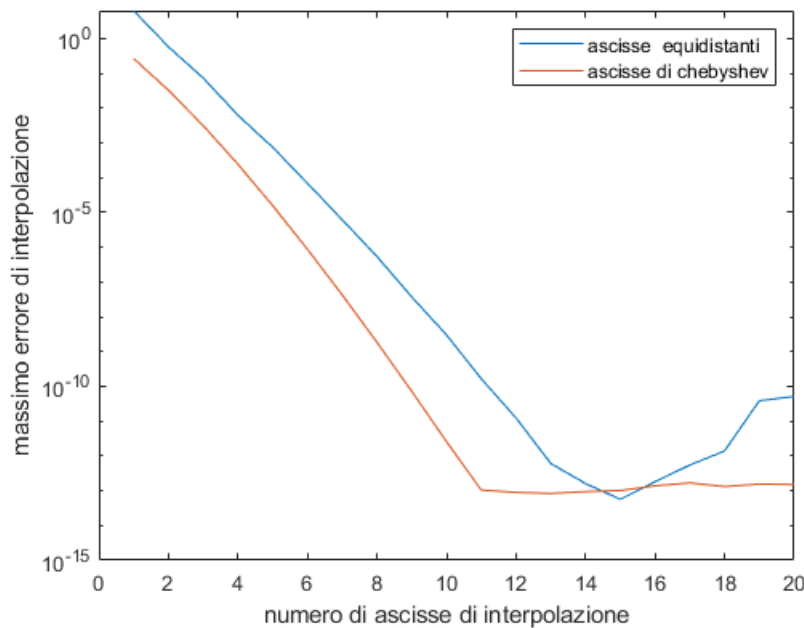
Eseguendo il codice es15.m si ottengono i seguenti risultati:



Per le ascisse di chebyshev, si ha una decrescita esponenziale dell'errore massimo per $n \leq 25$ per poi assestarsi a circa $2 \cdot 10^{-15}$ per n successivi. Per quanto riguarda le ascisse equidistanti invece, si può notare come l'errore massimo torni a crescere esponenzialmente per $n > 25$. I risultati confermano il mal condizionamento del problema di interpolazione polinomiale quando vengono usate ascisse d'interpolazione equidistanti,

4.2 Esercizio 16

Eseguendo es16.m si ottiene:



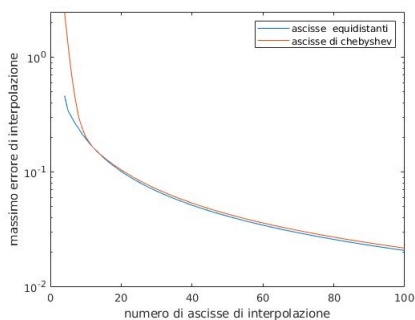
Si può notare come, rispetto all'interpolazione classica, l'errore decresca più rapidamente per $n \leq 15$. Anche in questo caso l'errore commesso usando le ascisse di chebyshev è minore in confronto al caso delle ascisse equidistanti (eccetto

per $n = 15$), dove eventualmente torna a crescere.

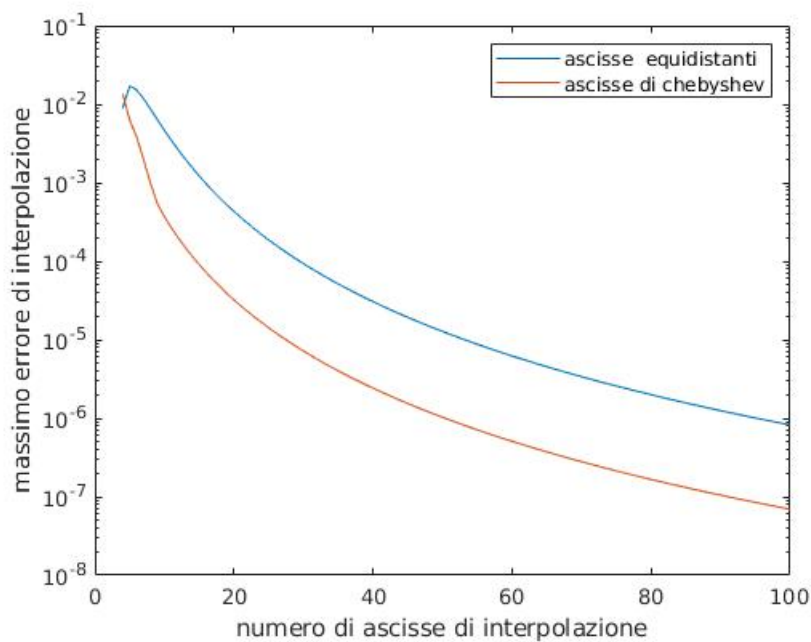
4.3 Esercizio 17

```
1 function output=splinenat(x,y,xq)
2 %
3 % output=splinenat(x,y,xq)
4 %funzione che calcola la spline cubica naturale.
5 %Input:
6 % x=vettore delle ascisse su cui calcolare la spline
7 % y=vettore dei valori di f(x), con x ascissa
8 % xq= insieme delle ascisse di cui si vuole sapere il valore della spline
9 %Output:
10 % output=vettore delle approssimazioni sulle ascisse xq
11 %
12 n=length(x);
13 l=length(xq);
14 if(length(y)~=n), error(dati in input con dimensioni differenti);end
15 [x1,i]=sort(x);
16 y1=y(i);
17 m=spline0(x1,y1);
18 h=diff(x1);
19 df = diff(y1)./h;
20 r=y(1:(n-1))-(h(1:n-1).^2)/6*m(2:n);
21 q=df(1:n-1)-h(1:n-1)*(m(2:n)-m(1:n-1));
22 output=zeros(l,1);
23 for i=1:l
24     indg=find(xq(i)<=x1(2:n),1)+1;
25     indp=find(xq(i)>=x1(1:n-1),1,'last');
26     output(i)=(((xq(i)-x1(indp)).^3).*m(indg)+((x1(indg)-xq(i))^3).*m(indp))/(6*h(indp))+q(
        indp).*(xq(i)-x1(indp))+r(indp);
27 end
28 return
29 end
```

4.4 Esercizio 18



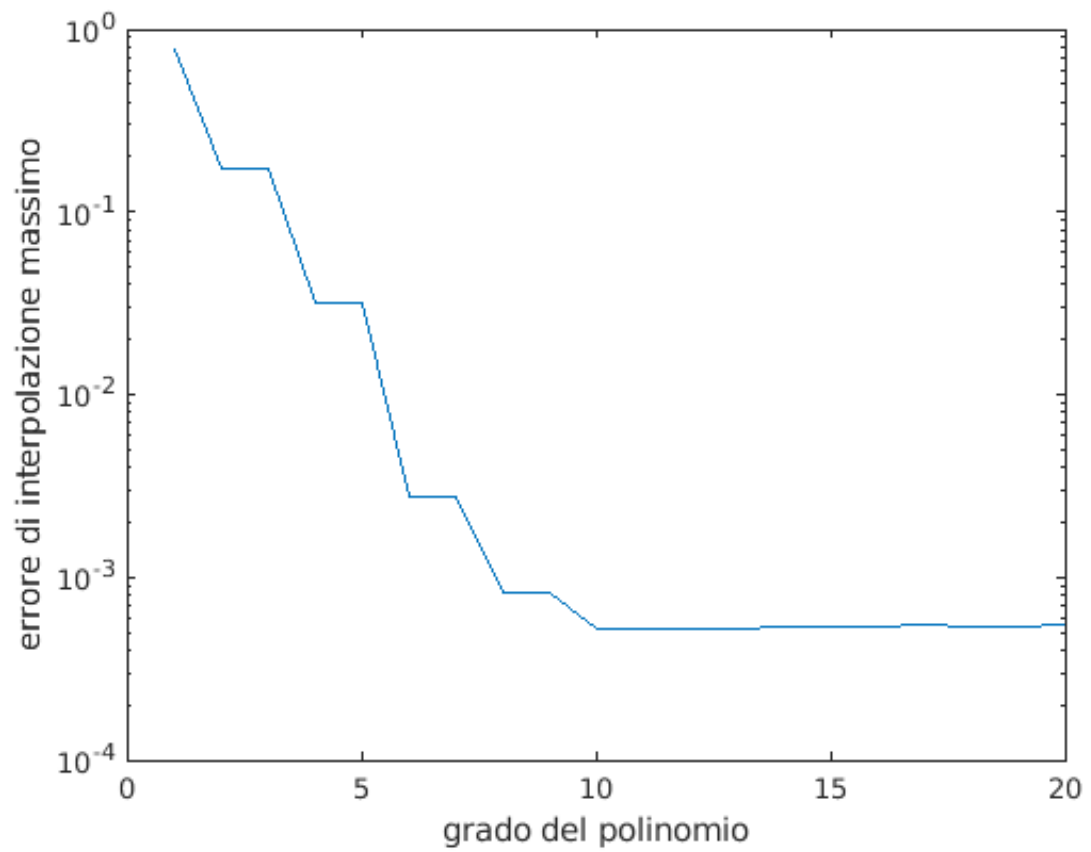
4.5 Esercizio 19



4.6 Esercizio 20

```
1 function y = minimiquadrati(xi, fi, m)
2 %
3 %
4 % y = minimiquadrati(xi, fi, m)
5 % calcola il valore del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado m
6 % sulle ascisse xi. fi contiene i valori approssimati di una funzione f valutata su xi
7 if length(unique(xi)) < m+1
8     error('ascisse distinte non sufficienti');
9 end
10 fi = fi(:);
11 V = fliplr(vander(xi));
12 V = V(1:end, 1:m+1);
13 QR = myqr(V);
14 p = qrsolve(QR, fi);
15 y = p(m+1)*ones(size(xi));
16 for i = 0:m-1
17     y = y.*xi+p(m-i);
18 end
19 end
```

Eseguendo es20.m si ottiene:



Si nota una decrescita dell'errore esponenziale fino a $m = 10$, dove si assesta tra 10^{-3} e 10^{-4} .

5 Capitolo 5

5.1 Esercizio 21

```

1 function c = ncweights(n)
2 %
3 %
4 % c = nc-weights(n)
5 % calcola i pesi della formula di newton cotes di grado n;
6 %
7 if n<=0
8     error('grado della formula non positivo');
9 end
10 c=zeros(1,floor(n / 2 + 1));
11 for j = 1:(ceil((n+1)/2))
12     temp = (0:n);
13     vj = temp(j);
14     temp(j)=[];
15     f = @(x)(prod(x-temp) /prod(vj-temp));
16     c(j) = integral(f, 0, n, 'ArrayValued', true);
17 end
18 c = [c flip(c)]; %sfrutto la simmetria dei pesi
19 if mod(n,2)==0
20     %elimino la copia del valore centrale prodotta da flip(c) e che risulta di troppo per
        n pari
21     c(n/2+1) = [];
22 end
23 return
24 end

```

Eseguendo lo script es21.m si ottiene:

$n \setminus c_{in}$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$					
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$				
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$			
5	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{95}{288}$		
6	$\frac{41}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{68}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{41}{140}$	
7	$\frac{108}{355}$	$\frac{810}{559}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{649}{536}$	$\frac{649}{536}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{810}{559}$	$\frac{108}{355}$

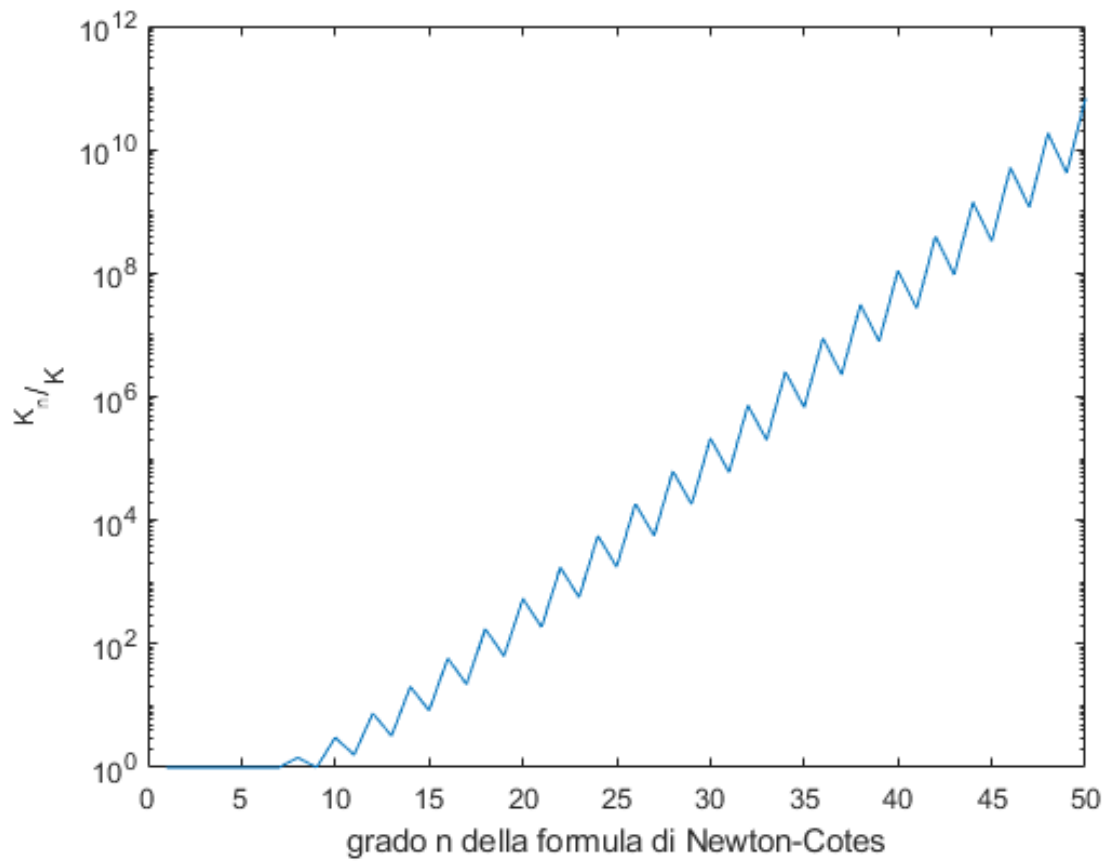
Table 3: pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado

5.2 Esercizio 22

Sappiamo che $k = (b - a)$ e $k_n = (b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$. Il rapporto sarà dunque dato da:

$$\frac{k_n}{k} = \frac{(b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|}{b - a} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |c_{in}|$$

Calcolando $\frac{k_n}{k}$ per $n = 1, \dots, 50$ (es22.m) si ottiene:



5.3 Esercizio 23

```

1 function y = newtoncotes(f,a, b, n)
2 %
3 % y= newtoncotes(f,a,b, n)
4 % calcola l'approssimazione dell'integrale definito per la funzione f sull'intervallo [a,
   b],
5 % utilizzando la formula di newton cotes di grado n.
6 %
7
8 if a > b || n < 0
9     error('dati inconsistenti');
10 end
11 xi = linspace(a, b, n+1);
12 fi = feval(f, xi);
13 h = (b-a) / n;
14 c = ncweights(n);
15 y = h*sum(fi.*c);
16 return
17 end

```

RISULTATI PER N DA 1 A 9(es23.m):

grado della formula	valore integrale	errore
1	0.428	0.253
2	0.213	0.038
3	0.196	0.021
4	0.180	0.005
5	0.179	0.004
6	0.176	0.001
7	0.176	0.001
8	0.175	0.000
9	0.175	0.000

5.4 Esercizio 24

intervalli\formula	trapezi composta	simpson composta
2	0.266403558406035	0.266403558406035
4	0.203432804450016	0.182442553131343
6	0.188498346613972	0.177333443886033
8	0.182789408875225	0.175908277016961
10	0.180034803521960	0.175392868382289
12	0.178504015707472	0.175172572071972
14	0.177568218195411	0.175066546519247
16	0.176955413111201	0.175010747856527
18	0.176532709616469	0.174979254439942
20	0.176229037552030	0.174960448895386

5.5 Esercizio 25

tolleranza\formula	trapezi adattiva	simpson adattiva
10^{-2}	0.295559711784128	0.281297643062670
10^{-3}	0.294585368185034	0.281297643062670
10^{-4}	0.294274200873635	0.294259338419631
10^{-5}	0.294230142164878	0.294227809768005
10^{-6}	0.294226019603178	0.294225764620384

6 Codici ausiliari

6.1 Esercizio 6

Listing 1: es6.m

```
1 f = @(x)(x-cos(x));
2 f1 = @(x)(1+sin(x));
3
4 x0 = 0;
5 x1 = 1;
6 x=zeros(4,4);
7 y= zeros(4, 4);
8 for i=3:3:12
9
10     [x(1, i/3), y(1, i/3)] = bisezione(f, x0, x1, 10^(-i));
11     [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
12     [x(3, i/3), y(3, i/3)] = corde(f, f1, x0, 10^(-i));
13     [x(4,i/3), y(4, i/3)] = secanti(f, x0, x1, 10^(-i), 100);
14 end
15 row_names = {'bisezione', 'newton', 'corde', 'secanti'};
16 colnames = {'10^-3', '10^-6', '10^-9', '10^-12'};
17 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
18 disp(values)
19 figure
20 plot([3, 6, 9, 12], y, 'o-')
21 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
22 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
23 ylabel('iterazioni')
24 legend({'bisezione', 'newton', 'corde', 'secanti'}, 'Location', 'northwest')
```

6.2 Esercizio 7

Listing 2: es7.m

```
1 f = @(x)(x^2*tan(x));
2 f1 = @(x)(2*x*tan(x) +(x^2)/(cos(x)^2));
3 m = 3;
4 x0 = 1;
5 y= zeros(3, 4);
6 x=-1*ones(3,4);
7 for i=3:3:12
8     [x(1, i/3), y(1, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
9     [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newtonmod(f, f1, x0, m, 10^(-i));
10    [x(3, i/3), y(3, i/3)] = aitken(f, f1, x0, 10^(-i));
11 end
12 disp(x);
13 disp(y);
14 row_names = {'newton', 'newton modificato', 'aitken'};
15 colnames = {'10^-3', '10^-6', '10^-9', '10^-12'};
16 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
17
18 format
19 iterations = array2table(y, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
20 plot([3, 6, 9, 12], y, '-')
21 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
22 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
23 ylabel('iterazioni')
```

```
24 legend({'newton', 'newtonmod', 'aitken'}, 'Location', 'northwest')
```

6.3 Esercizio 15

Listing 3: es15.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 1:40
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     ylin = lagrange(xlin,f(xlin),x);
9     ycheby = lagrange(xcheby,f(xcheby),x);
10    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
11    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
12 end
13 semilogy(linerrors);
14 hold on;
15 semilogy(chebyerrors);
16 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
17 ylabel('massimo errore di interpolazione');
18 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

6.4 Esercizio 16

Listing 4: es16.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 f1 = @(x)(-pi*x.*sin((pi*x.^2)/2));
3 x = linspace(-1, 1, 100001);
4 linerrors = zeros(1, 20);
5 chebyerrors = zeros(1, 20);
6 for n = 1:20
7     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
8     xcheby = chebyshev(-1,1, n+1);
9     ylin = hermite(xlin,f(xlin),f1(xlin),x);
10    ycheby = hermite(xcheby,f(xcheby),f1(xcheby),x);
11    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
12    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
13 end
14 semilogy(linerrors);
15 hold on;
16 semilogy(chebyerrors);
17 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
18 ylabel('massimo errore di interpolazione');
19 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

6.5 Esercizio 18

Listing 5: es18.m

```
1 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
```

```

4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 4:100
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     xcheby(1)=-1;
9     xcheby(n+1)=1;
10    ylin = splinenat(xlin,f(xlin),x);
11    ycheby = splinenat(xcheby,f(xcheby),x);
12    ylin=ylin';
13    ycheby=ycheby';
14    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
15    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
16 end
17 semilogy(linerrors);
18 hold on;
19 semilogy(chebyerrors);
20 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
21 ylabel('massimo errore di interpolazione');
22 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

6.6 Esercizio 19

Listing 6: es19.m

```

1 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
2 x = linspace(-1, 1, 100001);
3 linerrors = zeros(1, 40);
4 chebyerrors = zeros(1, 40);
5 for n = 4:100
6     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
7     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
8     ylin = spline(xlin,f(xlin),x);
9     ycheby = spline(xcheby,f(xcheby),x);
10    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
11    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
12 end
13 semilogy(linerrors);
14 hold on;
15 semilogy(chebyerrors);
16 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
17 ylabel('massimo errore di interpolazione');
18 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

6.7 Esercizio 20

Listing 7: es20.m

```

1 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
2 fp = @(x)(f(x) + 10^(-3)*rand(size(x)));
3 xi = -1 + 2*(0:10^4)/10^4;
4 fi = f(xi);
5 fpi = fp(xi);
6 errors=zeros(1, 20);
7 for m = 1:20
8     y = minimiquadrati(xi, fpi, m);
9     errors(m) = norm(abs(y-fi), inf);
10 end

```

```

11 semilogy(errors);
12 xlabel('grado del polinomio');
13 ylabel('errore di interpolazione massimo');

```

6.8 Esercizio 21

Listing 8: es21.m

```

1 for i = 1:7
2     weights= rats(ncweights(i))
3 end

```

6.9 Esercizio 22

Listing 9: es22.m

```

1 rapp = zeros(1, 50);
2 for i = 1:50
3     rapp(i) = sum(abs(ncweights(i)))/i;
4 end
5 semilogy(rapp);
6 xlabel('grado n della formula di Newton-Cotes');
7 ylabel('^{\mathcal{K}_n}/_{\mathcal{K}}');

```

6.10 Esercizio 23

Listing 10: es23.m

```

1 value = log(cos(1)/cos(1.1));
2 x = zeros(1,9);
3 errors=zeros(1, 9);
4 for i = 1:9
5     x(i) = newtoncotes(@tan, -1,1.1, i);
6     errors(i) = abs(value-x(i));
7 end

```

6.11 Esercizio 24

Listing 11: es24.m

```

1 a = -1;
2 b = 1.1;
3 n = 10;
4 itrap = zeros(1, n);
5 isimp = zeros(1, n);
6 for i = 1:n
7     itrap(i) = trapecomp(@tan, a, b, i*2);
8     isimp(i) = simpcomp(@tan, a, b, i*2);
9 end
10 integrali = [itrap; isimp];
11 row_names = {'trapezi composta', 'simpson composta'};
12 colnames = {'2', '4', '6', '8', '10', '12', '14', '16', '18', '20'};
13 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
14 disp(values);

```


6.12 Esercizio 25

Listing 12: es25.m

```
1 format long e
2 f = @(x)(1/(1+100*x.^2));
3 a = -1;
4 b = 1;
5 itrap = zeros(1, 5);
6 isimp = zeros(1, 5);
7 for i = 1:5
8     itrap(i) = adaptrap(f, a, b, 10^(-i-1));
9     isimp(i) = adapsim(f, a, b, 10^(-i-1));
10 end
11 integrali = [itrap; isimp];
12 row_names = {'trapezi adattiva', 'simpson adattiva'};
13 colnames = {'10^-2', '10^-3', '10^-4', '10^-5', '10^-6'};
14 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
15 disp(values);
```