Elaborato di

**Calcolo Numerico**

Anno Accademico 2019/2020

Niccolò *Piazzesi* - 6335623 - *niccolo.piazzesi@stud.unifi.it*
Pietro *Bernabei* - 6291312 - *pietro.bernabei@stud.unifi.it*

# Contents

**1 Capitolo 1** **4**
1.1 Esercizio 1 . . . . . . . . . . 4
1.2 Esercizio 2 . . . . . . . . . . 4
1.3 Esercizio 3 . . . . . . . . . . 4

**2 Capitolo 2** **5**
2.1 Esercizio 4 . . . . . . . . . . 5
2.2 Esercizio 5 . . . . . . . . . . 5
2.3 Esercizio 6 . . . . . . . . . . 8
2.4 Esercizio 7 . . . . . . . . . . 8

**3 Capitolo 3** **13**
3.1 Esercizio 8 . . . . . . . . . . 13
3.2 Esercizio 9 . . . . . . . . . . 13
3.3 Esercizio 10 . . . . . . . . . . 14
3.4 Esercizio 11 . . . . . . . . . . 14
3.5 Esercizio 12 . . . . . . . . . . 15
3.6 Esercizio 13 . . . . . . . . . . 15
3.7 Esercizio 14 . . . . . . . . . . 16

**4 Capitolo 4** **17**
4.1 Esercizio 15 . . . . . . . . . . 17
4.2 Esercizio 16 . . . . . . . . . . 17
4.3 Esercizio 17 . . . . . . . . . . 18
4.4 Esercizio 18 . . . . . . . . . . 18
4.5 Esercizio 19 . . . . . . . . . . 19
4.6 Esercizio 20 . . . . . . . . . . 19

**5 Capitolo 5** **21**
5.1 Esercizio 21 . . . . . . . . . . 21
5.2 Esercizio 22 . . . . . . . . . . 22
5.3 Esercizio 23 . . . . . . . . . . 23
5.4 Esercizio 24 . . . . . . . . . . 23
5.5 Esercizio 25 . . . . . . . . . . 23

**6 Codici ausiliari** **24**
6.1 Esercizio 6 . . . . . . . . . . 24
6.2 Esercizio 7 . . . . . . . . . . 24
6.3 Esercizio 15 . . . . . . . . . . 25
6.4 Esercizio 16 . . . . . . . . . . 25
6.5 Esercizio 18 . . . . . . . . . . 25
6.6 Esercizio 19 . . . . . . . . . . 26
6.7 Esercizio 20 . . . . . . . . . . 26
6.8 Esercizio 21 . . . . . . . . . . 27
6.9 Esercizio 22 . . . . . . . . . . 27
6.10 Esercizio 23 . . . . . . . . . . 27
6.11 Esercizio 24 . . . . . . . . . . 27
6.12 Esercizio 25 . . . . . . . . . . 28

## List of Figures


1 iterazioni richieste . . . . . . . . . . 9


## List of Tables


1 valori approssimati . . . . . . . . . . 8
2 valori approssimati . . . . . . . . . . 14
3 valori approssimati . . . . . . . . . . 16
4 pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado . . . . . . . . . . 21

# 1 Capitolo 1

## 1.1 Esercizio 1

Sia $f(x)$ una funzione sufficientemente regolare e sia $h > 0$ una quantità abbastanza "piccola". Possiamo sviluppare i termini $f(x-h)$ e $f(x+h)$ mediante il polinomio di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

Sostituiamo i termini nell'espressione iniziale:

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) - 2f(x) + f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)}{h^2} =$$

$$= \frac{h^2 f''(x) + O(h^4)}{h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

## 1.2 Esercizio 2

Eseguendo lo script si ottiene $u = 1.1102 \cdot 10^{-16} = \frac{\epsilon}{2}$, dove $\epsilon$ è la precisione di macchina. Il controllo interno ci dice che si esce dal ciclo solamente quando u diventa talmente piccolo che la somma $1 + u$ viene percepita dal calcolatore come uguale a 1. Questo avviene se $u < \epsilon$, e la prima iterazione in cui il controllo risulta vero è proprio quando $u == \frac{\epsilon}{2}$ . Il codice può quindi essere utilizzato per calcolare la precisione di macchina di un calcolatore, moltiplicando per 2 il valore di u restituito.

## 1.3 Esercizio 3

Quando si esegue $a - a + b$ il risultato è 100 mentre quando si esegue $a + b - a$ si ottiene 0. La differenza dei risultati è dovuta al fenomeno della cancellazione numerica:

- nel primo caso la sottrazione avviene sullo stesso numero $a = 10^{20}$. Sottrare un numero da se stesso ha sempre risultato esatto 0 e quindi il risultato finale è corretto
- nel secondo caso la sottrazione avviente tra i termini $a+b = 10^{20} + 100$ e $a = 10^{20}$. a+b ha le prime 18 cifre in comune con a e , a causa degli errori di approssimazione, le ultime tre cifre vengono cancellate dalla sottrazione, dando 0 come risultato finale.

## 2 Capitolo 2

### 2.1 Esercizio 4

```
function x1=radn(x, n)
%
% x1=radn(n.x)
% funzione Matlab che implementa il metodo di newton per il calcolo della
% radice n-esima di un numero positivo x
%
format long e
imax=1000;
tolx=eps;
if x<=0
    error('valore in ingresso errato');
end
x1=x/2;
for i=1:imax
   x0=x1;
   fx=x0^n-x;
   fx1=(n)*x0^(n-1);
   x1=x0-fx/fx1;
   if abs(x1-x0)<=tolx
       break
   end

end
if abs(x1-x0)>tolx
    error('metodo non converge')
end
```

### 2.2 Esercizio 5

- Metodo di bisezione

```
function [x,i] = bisezione(f,a,b,tolx)
%bisez
%[x,i]=bisezione(f, a, b,  tolx, maxit)
%Pre: f continua in [a,b]
%  Applica il metodo di bisezione per il calcolo della
%  radice dell'equazione f(x)=0
%  f         -funzione
%  a, b      - estremi dell'intervallo
%
% tolx       -tolleranza
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di
  iterazioni
% VEDI ANCHE: newton, corde, secanti, aitken, newtonmod
    format long e
    fa = feval(f,a);
    fb = feval(f,b);
    if(fa * fb > 0 )
        error('gli estremi  hanno lo stesso segno');
    end
    x0=a;
    imax =  ceil(log2(b-a) - log2(tolx));
    for i = 1:imax
        x = (a+b)/2;
```

```
        fx = feval(f,x);
        if abs(x-x0) <= tolx*(1+abs(x0))
            break
        end
        x0=x;
        if fa*fx<0
            b = x;
            fb = fx;
        else
            a = x;
            fa = fx;
        end
    end

end
```

- Metodo di Newton

```
function [x,i] = newton( f, f1, x0, tolx, maxit )
%newton
%[x,i]=newton(f,f1, x0, tolx, maxit)
%Pre: f derivabile
%  Applica il metodo di newton per il calcolo della
%  radice dell'equazione f(x)=0
%  f           -funzione
%  f1          -derivata di f
%  x0          -approssimazione iniziale
% tolx         -tolleranza
% maxit        -numero massimo di iterazioni(default=100)
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di
    iterazioni
% VEDI ANCHE: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod

       format long e
       if nargin<4
               error('numero argomenti insufficienti');
       elseif nargin==4
                maxit = 100;
       end
       if tolx<eps
               error('tolleranza non idonea');
       end
       x = x0;
       for i = 1:maxit
               fx = feval( f, x );
               f1x = feval( f1, x );
               x = x - fx/f1x;
               if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
                       break;
               else
                       x0 = x;
               end
       end
       if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
               error('metodo non converge');
       end
end
```

- Metodo delle secanti

```
function [x, i]=secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
%secanti
%[x,i]=secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
%
%  Applica il metodo delle secanti per il calcolo della
%  radice dell'equazione f(x)=0
%  f           -funzione
%  x0          -approssimazione iniziale
%  x1          -seconda approssimazione iniziale
% tolx         -tolleranza
% maxit        -numero massimo di iterazioni(default=100)
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di
   iterazioni
% VEDI ANCHE: bisezione, newton, corde, aitken, newtonmod

  format long e
  if nargin<4
    error('numero argomenti insufficienti');
  elseif nargin==4
    maxit = 100;
  end
  i=0;
  f0=feval(f,x0);
  for i=1:maxit
      f1=feval(f,x1);
      df1=(f1-f0)/(x1-x0);
      x=x1-(f1/df1);
      if abs(x1-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
        break;
      end
      x0=x1;
      x1=x;
      f0=f1;

  end
  if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
    error('metodo non converge');
  end
end
```

- Metodo delle corde

```
function [x,i] = corde( f, f1, x0, tolx, maxit )
%corde
%[x,i]=corde(f,f1, x0, tolx, maxit)
%Pre: f derivabile
%  Applica il metodo delle corde per il calcolo della
%  radice dell'equazione f(x)=0
%  f           -funzione
%  f1          -derivata di f
%  x0          -approssimazione iniziale
% tolx         -tolleranza
% maxit        -numero massimo di iterazioni(default=100)
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di
   iterazioni
% VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, aitken, newtonmod

```

```
    format long e
    if nargin<4
           error('numero argomenti insufficienti');
    elseif nargin==4
            maxit = 100;
    end
    if tolx<eps
           error('tolleranza non idonea');
    end
    f1x = feval(f1, x0);
    x = x0;
    for i = 1:maxit
           fx = feval( f, x );
           if fx==0
                  break;
           end
           x = x - fx/f1x;
           if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
                  break;
           else
                  x0 = x;
           end
    end
    if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
       error('metodo non converge');
     end
end
```

### 2.3 Esercizio 6

Eseguendo lo script es6.msi ottengono i risultati contenuti nella tabella 3 e nella figura 1. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

| Metodo | tolleranza= $10^{-3}$ | tolleranza= $10^{-6}$ | tolleranza= $10^{-9}$ | tolleranza= $10^{-12}$ |
|---|---|---|---|---|
| bisezione | 0.739257812500000 | 0.739085197448730 | 0.739085133187473 | 0.739085133215667 |
| newton | 0.739085133385284 | 0.739085133215161 | 0.739085133215161 | 0.739085133215161 |
| corde | 0.739567202212256 | 0.739084549575213 | 0.739085132739254 | 0.739085133215737 |
| secanti | 0.739085133215001 | 0.739085133215161 | 0.739085133215161 | 0.739085133215161 |

Table 1: valori approssimati

### 2.4 Esercizio 7

Le nuove funzioni utilizzate in questo esercizio sono:

- Metodo di Newton modificato

```
function [x, i] = newtonmod( f, f1,  x0, m, tolx, maxit )
%NEWTONMOLT
%[x,i]=Newtonmolt(f,f1,x0,m,tolx,maxit)
%  Pre: f derivabile
%  Applica il metodo di Newton per il calcolo della
%  radice (di molteplicita' nota r) dell'equazione f(x)=0
%  f          -funzione
%  f1         -derivata di f
%  x0         -approssimazione iniziale
%  m          -molteplicita' della radice
```

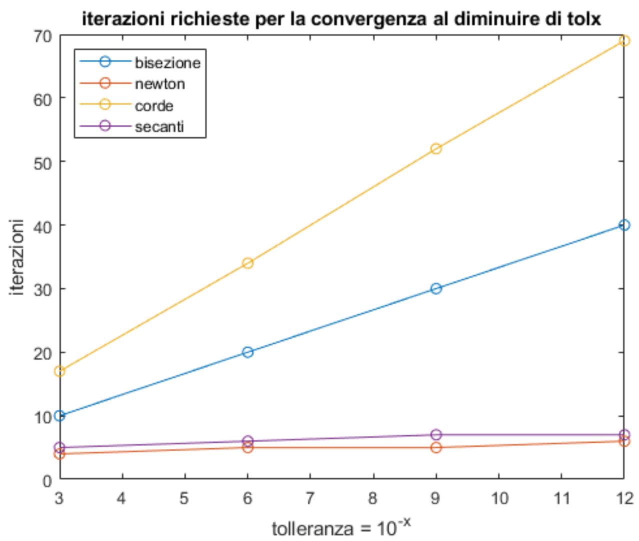



Figure 1: iterazioni richieste

```
% tolx        -tolleranza
% maxit       -numero massimo di iterazioni(default=100)
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di
    iterazioni
% VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, aitken

    format long e
    if nargin<5
            error('numero argomenti insufficienti');
    elseif nargin==5
             maxit = 100;
    end
    if tolx<eps
            error('tolleranza non idonea');
    end
    x = x0;
    for i = 1:maxit
            fx = feval( f, x );
            f1x = feval( f1, x );
            if fx==0
                    break;
            end
            x = x - m*(fx/f1x);
            if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
                    break;
            else
                    x0 = x;
            end
    end

end
```

- Metodo delle accelerazioni di Aitken

```
<<<<<<< HEAD
function [x,i]=aitken(f,f1,x0,tolx, itmax)
        %Metodo di accelerazione di Aitken
        %
```

```
% [x,i]=aitken(f,f1,x0,itmax,tolx,rtolx)
%
%Questo metodo prende in input:
% f: la funzione di cui si vuol trovare uno zero
% f1: la derivata della funzione
% x0: valore di x di partenza
% imax: numero massimo di iterazioni consentite
% tolx: tolleranza assoluta sul valore dello zero
%Questo metodo restituisce:
% x: zero della funzione
% i: numero di iterazioni fatte
    i=0;
    fx = feval(f,x0);
    if fx==0
        x=x0;
        return
    end
    f1x = feval(f1,x0);
    if f1x==0
        error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare!')
    end
    x= x0-fx/f1x;
    go = 1;
    while (i<itmax) && go
        i = i+1;
        x0 = x;
        fx = feval(f,x0);
        f1x = feval(f1,x0);
        if f1x==0
            %In questo caso non possiamo andare avanti, rimane solo da controllare
            %se per caso abbiamo trovato una soluzione esatta o almeno nella tolleranza %richiesta
            if fx == 0
                %Abbimo trovato una soluzione esatta
                return
            elseif (abs(x-x0)<=(tolx*(1 + abs(x0))))
                %Abbiamo trovato una soluzione nella tolleranza richiesta
                return
            end
            %Evitiamo una divisione per zero.
            error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare!')
        end
        x1 = x0-fx/f1x;
        fx = feval(f,x1); f1x = feval(f1,x1);
        if f1x==0
            if fx == 0
                return
            elseif (abs(x-x0)<=(tolx*(1 + abs(x0))))
                return
            end
            error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare!')
        end
        x = x1 - fx/f1x;
```

```
                t = ((x-2*x1)+x0);

                if t == 0
                    if feval(f,x) == 0
                        return
                    end
                    error('Impossibile determinare la radice nella tolleranza desiderata')
                end
                x = (x*x0-x1^2)/t;
                go = (abs(x-x0)>(tolx*(1 + abs(x0))));
            end
            if go, disp('Il metodo non converge.'), end
========
function [x, i] = aitken( f, f1, x0, tolx, maxit )
%aitken
%[x,i]=aitken(f,f1, x0, tolx, maxit)
%  Pre: f derivabile
%  Applica il metodo di  accelerazione di aitken per il calcolo della
%  radice (di molteplicita' incognita) dell'equazione f(x)=0
%  f          -funzione
%  f1         -derivata di f
%  x0         -approssimazione iniziale
% tolx        -tolleranza
% maxit       -numero massimo di iterazioni(default=100)
% restituisce in x l'approssimazione della radice e in i il numero di iterazioni
% VEDI ANCHE: bisezione, newton, secanti, corde, newtonmod
format long e
if nargin<4
       error('numero argomenti insufficienti');
elseif nargin==4
        maxit = 100;
end
if tolx<eps
       error('tolleranza non idonea');
end
x = x0;
for i = 1:maxit
       fx = feval( f, x0 );
       f1x = feval( f1, x0 );
       if f1x==0
              break;
       end
       x1 = x0 - fx/f1x;
       fx = feval( f, x1 );
       f1x = feval( f1, x1 );
       if f1x==0
              break;
       end
       x = x1 -fx/f1x;
       x = (x*x0-x1^2)/(x-2*x1+x0);
       if abs(x-x0)<=tolx*(1+abs(x0))
              break;
       else
              x0 = x;
       end
end
```

```
if abs(x-x0) > tolx*(1+abs(x0))
        error('metodo non converge');
end
end
>>>>>>> 5cd1ff828560c11c9f921316a0662e417fff06e4
```

La radice nulla della funzione $f(x) = x^2 tan(x)$ ha molteciplita m = 3, in quanto 0 annulla due volte il termine $x^2$ e $tan(0) = 0$.

# 3 Capitolo 3

## 3.1 Esercizio 8

```
function [LU,p]=palu(A)
% [LU,p]=palu(A)
% funzione che dato in input matrice A restituisce matrice fattorizzata LU
% e il relativo vettore p di permutazione di LU con pivoting parziale di A
% input:
%   A= matrice di cui si vuole calcolare la fattorizzazione lu con pivoting
%   parziale
% output:
%   LU=matrice quadrata di dimensioni n*n, composta dalla matrice
%   triangolare superiore U e la matrice triangolare inferiore a diagonale
%   unitaria L
%   p= vettore di permutazione di dimensione n, generato dalla
%   fattorizzazione di A con pivoting parziale
%

[n,m]=size(A);
if(n~=m)
    error(matrice A non quadrata);
end
LU=A;
p=[1:n];
for i=1:n-1
    [mi,ki]=max(abs(LU(i:n,i)));
    if mi==0
        error('La matrice e'' non singolare')
    end
    ki=ki+i-1;
    if ki>i
        p([i ki])=p([ki i]);
       LU([i ki],:)= LU([ki i],:);
    end
    LU(i+1:n,i)=LU(i+1:n,i)/LU(i,i);
    LU(i+1:n,i+1:n)=LU(i+1:n,i+1:n)-LU(i+1:n,i)*LU(i,i+1:n);
end
return
end
```

## 3.2 Esercizio 9

```
function x=LUsolve(LU,p,b)
%
% funzione che risolve il sistema lineare LUx=b(p):
%input:
%   LU=matrice quadrata (n*n) fattorizzata LU, ottenuta attrarso la
%   fattorizzazione con pivoting parziale
%   p= vettore di permutazione per b, di dimensione n, con valori da (1 a
%   n)
%   b=vettore dei termini noti
%output:
%   x=vettore delle incognite calcolate
%
%
   [m,n]=size(LU);
```

```
    if(m~=n  ||  n~=length(b))  error('dati  incosistenti')
    else  if(min(abs(diag(LU)))==0)
            error(fattorizzazione errata);
        end
    end
     x=b(p);
     for  i=1:n-1
         x(i+1:n)=x(i+1:n)-(LU(i+1:n,i)*x(i));
     end
        x(n)=x(n)/LU(n,n);
        for  i=n-1:-1:1
            x(1:i)=x(1:i)-(LU(1:i,i+1)*x(i+1));
            x(i)=x(i)/LU(i,i);
        end
     return
end
```

### 3.3 Esercizio 10

| i | Sigma | Norma |
|---|---|---|
| 1 | $10^{-1}$ | 8.9839e-15 |
| 2 | $10^{1}$ | 1.4865e-14 |
| 3 | $10^{3}$ | 1.3712e-12 |
| 4 | $10^{5}$ | 1.2948e-10 |
| 5 | $10^{7}$ | 5.3084e-09 |
| 6 | $10^{9}$ | 1.0058e-06 |
| 7 | $10^{11}$ | 8.5643e-05 |
| 8 | $10^{13}$ | 0.0107 |
| 9 | $10^{15}$ | 0.9814 |
| 10 | $10^{17}$ | 4.1004e+03 |

Table 2: valori approssimati

Tabella che composta: i=indice dell'iterazione; Sigma=valore calcolato e usato dalla funzione linsis(), per introdurre un errore nella matrice generata A e nel suo vettore dei termini noti b, che cresce al crescere dell'interazione. Norma= valore della distanza tra il vettore x, soluzione del sistema lineare LU*x=b, il quale è affetto da errore, e il vettore xref, soluzione corretta del sistema. Da questa tabella quindi si può notare come all'incremento della interazione, e quindi della sigma, l'errore nelle soluzioni cresce, quasi proporzionalmente come sigma, con un fattore di $10^2$;

### 3.4 Esercizio 11

```
function  QR  =  myqr(A)
%    QR  =  myqr(A)
%    calcola  la  fattorizzazione  QR  di  Householder  della  matrice  A
%    Input:
%              A=  matrice  quadrata  da  fattorizzare
%
%    Output:
%              QR=matrice  contenente  le  informazioni  sui  fattori  Q  e  R  della
%              fattorizzazione  QR  di  A
%
     [m,n]  =  size(A);
     if   n  >  m
         error('Dimensioni  errate');
     end
     QR  =  A;
```

```
    for i = 1:n
        alfa = norm(QR(i:m,i));
        if alfa == 0
            error('la matrice non ha rango massimo');
        end
        if QR(i,i) >= 0
            alfa = -alfa;
        end
        v1 = QR(i,i) -alfa;
        QR(i,i) = alfa;
        QR(i+1:m,i) = QR(i+1:m,i)/v1;
        beta = -v1/alfa;
        v = [1; QR(i+1:m,i)];
        QR(i:m,i+1:n) = QR(i:m,i+1:n) - (beta * v) * (v' * QR(i:m,i+1:n));
    end
end
```

### 3.5 Esercizio 12

```
function x = qrsolve(QR, b)
%
%
%   x = qrSolve(QR, b)
%   risolve il sistema QR*x=b nel senso dei minimi quadrati.
%   Input:
%           QR=matrice contenente le informazioni Q e R della
%           fattorizzazione di una matrice quadrata A
%           b=termine noto del sistema lineare
%   Output:
%           x=vettore delle soluzioni del sistema lineare
%
[m,n] = size(QR);
k = length(b);
if k ~= m
    error('Dati inconsistenti');
end
x=b(:);
for i = 1:n
    v=[1; QR(i+1:m,i)];
    beta = 2/(v'* v);
    x(i:m) = x(i:m) - beta*(v'*x(i:m))*v;
end
x=x(1:n);
for  j = n:-1:1
    if QR(j,j)==0
        error('Matrice singolare');
    end
    x(j) = x(j) / QR(j,j);
    x(1:j-1) = x(1:j-1) - QR(1:j-1,j)*x(j);
end
return
end
```

### 3.6 Esercizio 13

```
A= [1, 2, 3; 1 2 4; 3 4 5; 3 4 6; 5 6 7];
```

```
b=[14  17  26  29  38];
QR=myqr(A);
ris=qrsolve(QR,b);
disp(ris);
```

Il risultato finale è $ris = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

### 3.7 Esercizio 14

| A}b | (A'*A)}(A'*b) |
|---|---|
| 1.0000 | 3.5759 |
| 2.0000 | -3.4624 |
| 3.0000 | 9.5151 |
| 4.0000 | -1.2974 |
| 5.0000 | 7.9574 |
| 6.0000 | 4.9125 |
| 7.0000 | 7.2378 |
| 8.0000 | 7.9765 |

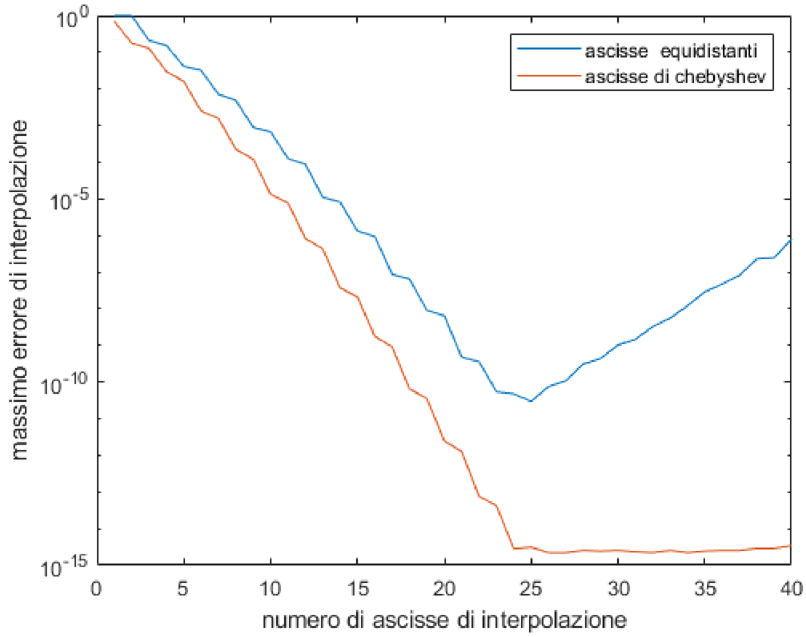
Table 3: valori approssimati

L'espressione Arisolve in matlab, il sistema di equazioni lineari nella forma matriciale A*x=b per X. L'espressione (A'*A)  (A'*b) impiega lo stesso operatore  quindi risolve il sistema delle equazioni lineare delle due parentesi. La Matrice A viene calcolata usando la funzione vander() che genera una matrice di tipo Vandermond, la quale è molto mal condizionata. Usando la funzione cond() sulla matrice A si ottiene una condizionamento pari a: 1.5428e+09. Eseguendo poi la moltiplicazione della prima parentesi tonda, il condizionamento è pari a: 4.4897e+18. Andando cosi ad eseguire una divisione tra una matrice mal condizionata e un vettore, il risultato presenta degli errori.

# 4 Capitolo 4

## 4.1 Esercizio 15

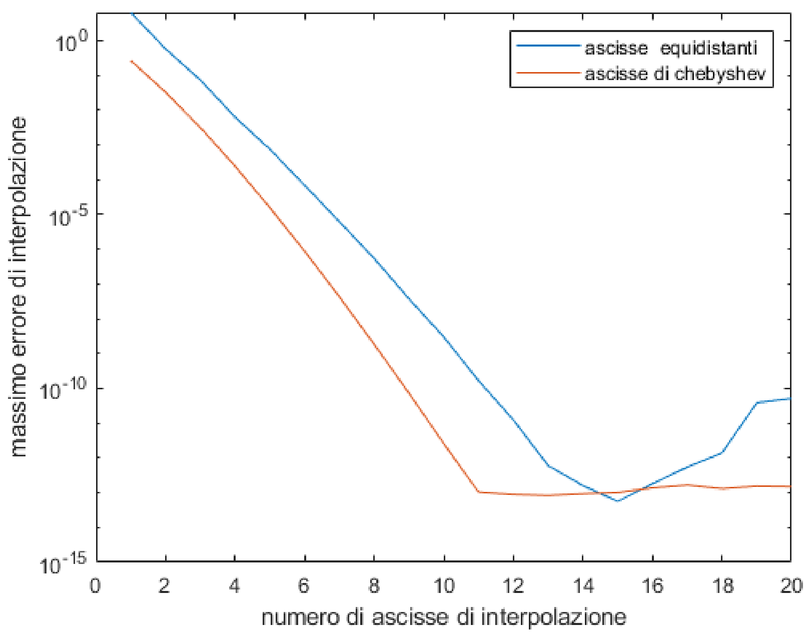
Eseguendo il codice es15.m si ottengono i seguenti risultati:




Per le ascisse di chebyshev, si ha una decrescita esponenziale dell'errore massimo per $n \leq 25$ per poi assestarsi a circa $2 \cdot 10^{-15}$ per n successivi. Per quanto riguarda le ascisse equidistanti invece, si può notare come l'errore massimo torni a crescere esponenzialmente per $n > 25$. I risultati confermano il mal condizionamento del problema di interpolazione polinomiale quando vengono usate ascisse d'interpolazione equidistanti,

## 4.2 Esercizio 16

Eseguendo es16.m si ottiene:

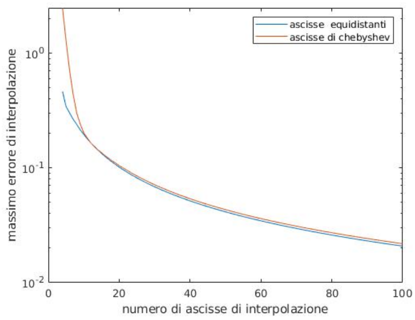



Si può notare come, rispetto all'interpolazione classica, l'errore decresca più rapidamente per $n \leq 15$. Anche in questo caso l'errore commesso usando le ascisse di chebyshev è migliore in confronto al caso delle ascisse equidistanti(eccetto per $n = 15$).

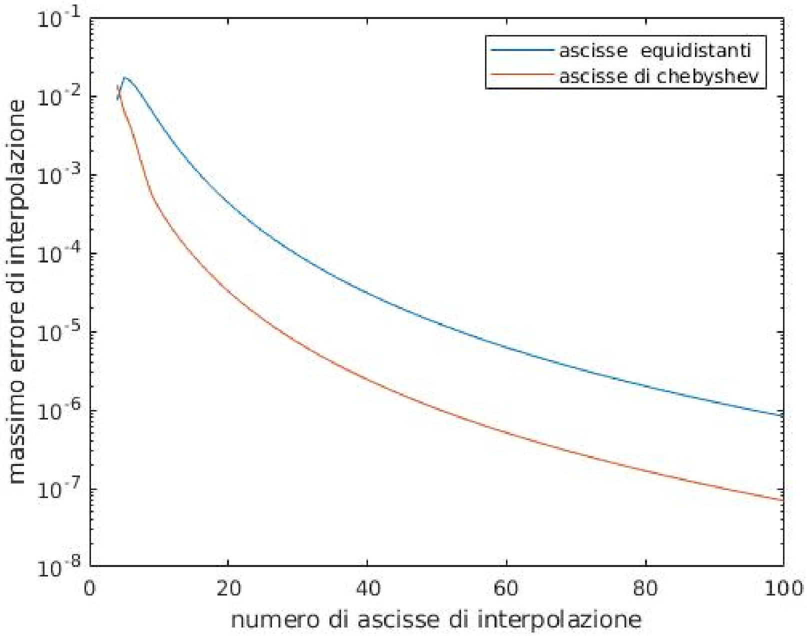
### 4.3 Esercizio 17

```
function output=splinenat(x,y,xq)
%
% output=splinenat(x,y,xq)
%funzione che calcola la spline cubica naturale.
%Input:
%   x=vettore delle ascisse su cui calcolare la spline
%   y=vettore dei valori di f(x), con x ascissa
%   xq= insieme delle ascisse di cui si vuole sapere il valore della spline
%Output:
%   output=vettore delle approssimazioni sulle ascisse xq
%
n=length(x);
l=length(xq);
if(length(y)~=n), error(dati in input con dimensioni differenti);end
[x1,i]=sort(x);
y1=y(i);
m=spline0(x1,y1);
h=diff(x1);
df = diff(y1)./h;
r=y(1 :(n-1))-((h(1:n-1).^2)/6)*m(2:n);
q=df(1:n-1)-h(1:n-1)*(m(2:n)-m(1:n-1));
output=zeros(l,1);
for i=1:l
   indg=find(xq(i)<=x1(2:n),1)+1;
   indp=find(xq(i)>=x1(1:n-1),1,'last');
   output(i)=(((xq(i)-x1(indp)).^3).*m(indg)+((x1(indg)-xq(i))^3).*m(indp))
       /(6*h(indp))+q(indp).*(xq(i)-x1(indp))+r(indp);
end
return
end
```

### 4.4 Esercizio 18



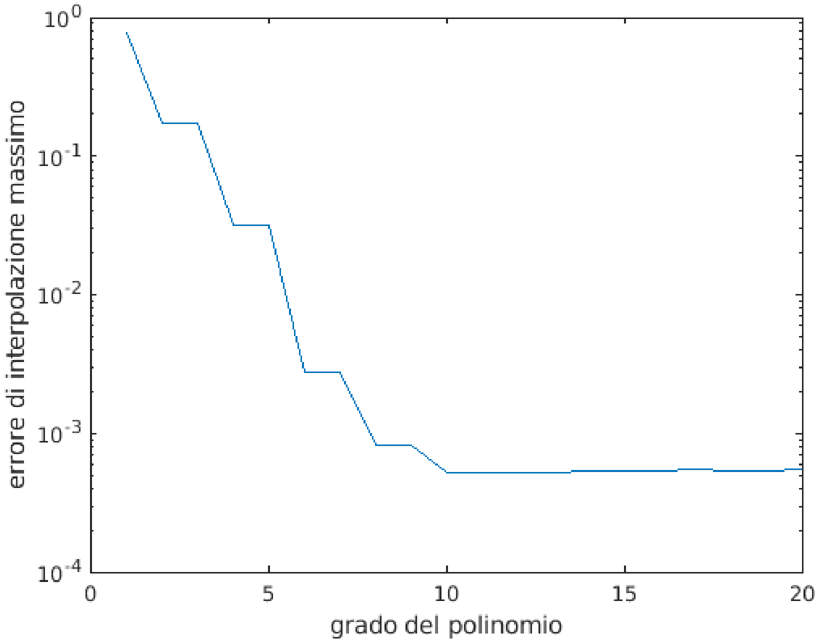
### 4.5 Esercizio 19




### 4.6 Esercizio 20

```
function y = minimiquadrati(xi, fi, m)
%
%
% y = minimiquadrati(xi, fi, m)
% calcola il valore del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado m
% sulle ascisse xi. fi contiene i valori approssimati di una funzione f valutata su xi
if length(unique(xi)) < m+1
    error('ascisse distinte non sufficienti');
end
fi = fi(:);
V = fliplr(vander(xi));
V = V(1:end, 1:m+1);
QR = myqr(V);
p = qrsolve(QR, fi);
y = p(m+1)*ones(size(xi));
for i = 0:m-1
    y = y.*xi+p(m-i);
end
end
```

Eseguendo es20.m si ottiene:




Si nota una decrescita delll'errore esponenziale fino a $m = 10$, dove si assesta tra $10^{-3}$ e $10^{-4}$.

# 5 Capitolo 5

## 5.1 Esercizio 21

```
function c = ncweights(n)
%
%
% c = nc-weights(n)
% calcola i pesi della formula di newton cotes di grado n;
%
if n<=0
    error('grado della formula non positivo');
end
c=zeros(1,floor(n / 2 + 1));
for j = 1:(ceil((n+1)/2))
    temp = (0:n);
    vj = temp(j);
    temp(j)=[];
    f = @(x)(prod(x-temp) /prod(vj-temp));
    c(j) = integral(f, 0, n, 'ArrayValued', true);
end
c = [c flip(c)]; %sfrutto la simmetria dei pesi
if mod(n,2)==0
    %elimino la copia del valore centrale prodotta da flip(c) e che risulta di troppo per n pari
    c(n/2+1) = [];
end
return
end
```

Eseguendo lo script es21.m si ottiene:

| n \ $c_{in}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | | | | | |
| 3 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | | | | |
| 4 | $\frac{14}{45}$ | $\frac{64}{45}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{64}{45}$ | $\frac{14}{45}$ | | | |
| 5 | $\frac{95}{288}$ | $\frac{95}{288}$ | $\frac{95}{288}$ | $\frac{95}{288}$ | $\frac{95}{288}$ | $\frac{95}{288}$ | | |
| 6 | $\frac{41}{140}$ | $\frac{54}{35}$ | $\frac{27}{140}$ | $\frac{68}{35}$ | $\frac{27}{140}$ | $\frac{54}{35}$ | $\frac{41}{140}$ | |
| 7 | $\frac{108}{355}$ | $\frac{810}{559}$ | $\frac{343}{640}$ | $\frac{649}{536}$ | $\frac{649}{536}$ | $\frac{343}{640}$ | $\frac{810}{559}$ | $\frac{108}{355}$ |

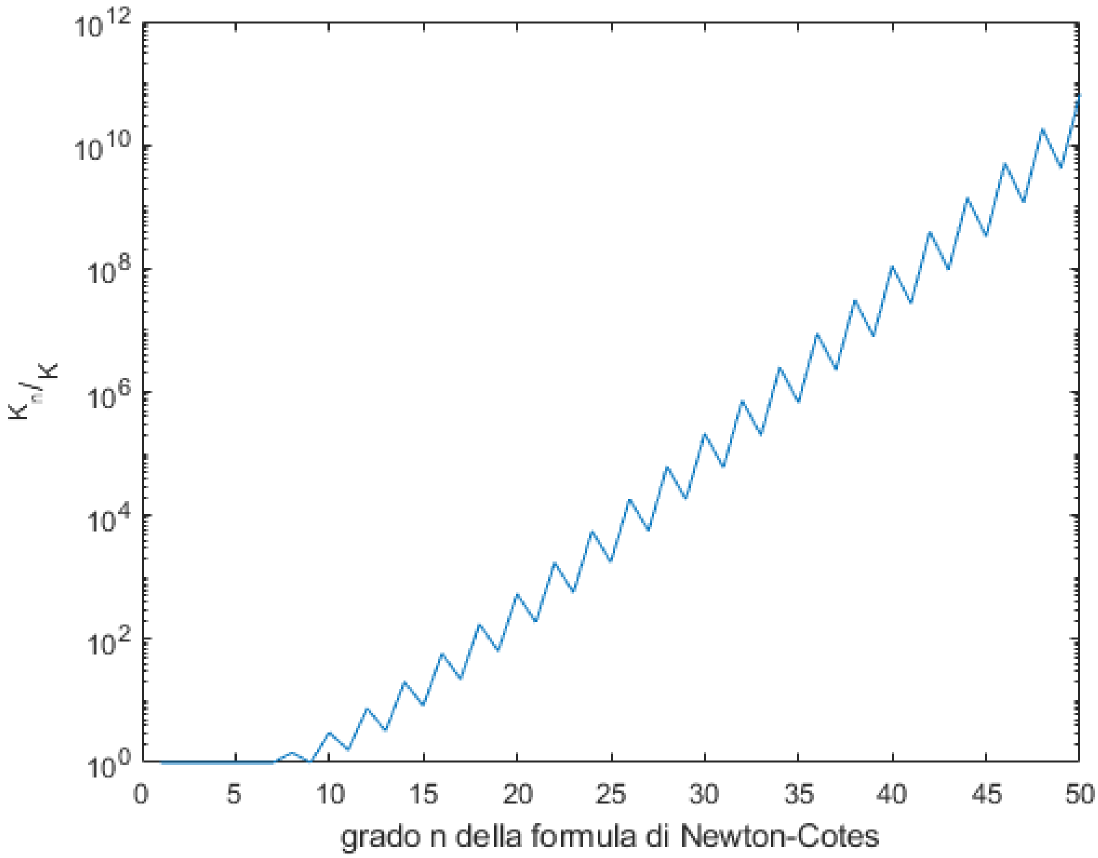
Table 4: pesi della formula di Newton-Cotes fino al settimo grado

### 5.2 Esercizio 22

Sappiamo che $k = (b-a)$ e $k_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|c_{in}|$. Il rapporto sarà dunque dato da:

$$\frac{k_n}{k} = \frac{(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|c_{in}|}{b-a} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}|c_{in}|$$

Calcolando $\frac{k_n}{k}$ per $n = 1, ....., 50$(es22.m) si ottiene:



## 5.3 Esercizio 23

```
function y = newtoncotes(f,a, b, n)
%
% y= newtoncotes(f,a,b, n)
% calcola l'approssimazione dell'integrale definito per la funzione f sull'
    intervallo [a, b],
% utilizzando la formula di newton cotes di grado n.
%

if a > b || n < 0
    error('dati inconsistenti');
end
xi = linspace(a, b, n+1);
fi = feval(f, xi);
h = (b-a) / n;
c = ncweights(n);
y = h*sum(fi.*c);
return
end
```

RISULTATI PER N DA 1 A 9(es23.m):

| grado della formula | valore integrale | errore |
|---|---|---|
| 1 | 0.428 | 0.253 |
| 2 | 0.213 | 0.038 |
| 3 | 0.196 | 0.021 |
| 4 | 0.180 | 0.005 |
| 5 | 0.179 | 0.004 |
| 6 | 0.176 | 0.001 |
| 7 | 0.176 | 0.001 |
| 8 | 0.175 | 0.000 |
| 9 | 0.175 | 0.000 |

## 5.4 Esercizio 24

| intervalli\formula | trapezi composta | simpson composta |
|---|---|---|
| 2 | 0.266403558406035 | 0.266403558406035 |
| 4 | 0.203432804450016 | 0.182442553131343 |
| 6 | 0.188498346613972 | 0.177333443886033 |
| 8 | 0.182789408875225 | 0.175908277016961 |
| 10 | 0.180034803521960 | 0.175392868382289 |
| 12 | 0.178504015707472 | 0.175172572071972 |
| 14 | 0.177568218195411 | 0.175066546519247 |
| 16 | 0.176955413111201 | 0.175010747856527 |
| 18 | 0.176532709616469 | 0.174979254439942 |
| 20 | 0.176229037552030 | 0.174960448895386 |

## 5.5 Esercizio 25

| tolleranza\formula | trapezi adattiva | simpson adattiva |
|---|---|---|
| $10^{-2}$ | 0.295559711784128 | 0.281297643062670 |
| $10^{-3}$ | 0.294585368185034 | 0.281297643062670 |
| $10^{-4}$ | 0.294274200873635 | 0.294259338419631 |
| $10^{-5}$ | 0.294230142164878 | 0.294227809768005 |
| $10^{-6}$ | 0.294226019603178 | 0.294225764620384 |

# 6 Codici ausiliari

## 6.1 Esercizio 6

Listing 1: es6.m

```
f = @(x)(x-cos(x));
f1 = @(x)(1+sin(x));

x0 = 0;
x1 = 1;
x=zeros(4,4);
y= zeros(4, 4);
for i=3:3:12

    [x(1, i/3), y(1, i/3)] = bisezione(f, x0, x1, 10^(-i));
    [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
    [x(3, i/3), y(3, i/3)] = corde(f, f1, x0, 10^(-i));
    [x(4,i/3), y(4, i/3)] = secanti(f, x0, x1, 10^(-i), 100);
end
row_names = {'bisezione', 'newton', 'corde', 'secanti'};
colnames = {'10^-3','10^-6','10^-9','10^-12'};
values = array2table(x,'RowNames',row_names,'VariableNames',colnames);
disp(values)
figure
plot([3, 6, 9, 12], y','o-')
title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tolx')
xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
ylabel('iterazioni')
legend({'bisezione','newton','corde','secanti'},'Location','northwest')
```

## 6.2 Esercizio 7

Listing 2: es7.m

```
f = @(x)(x^2*tan(x));
f1 = @(x)(2*x*tan(x) +(x^2)/(cos(x)^2));
m = 3;
x0 = 1;
y= zeros(3, 4);
x=-1*ones(3,4);
for i=3:3:12
   [x(1, i/3), y(1, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
   [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newtonmod(f, f1, x0, m, 10^(-i));
   [x(3, i/3), y(3, i/3)] = aitken1(f, f1, x0, 10^(-i));
end
disp(x);
disp(y);
row_names = {'newton', 'newton modificato', 'aitken'};
colnames = {'10^-3','10^-6','10^-9','10^-12'};
values = array2table(x,'RowNames',row_names,'VariableNames',colnames)

format
iterations = array2table(y,'RowNames',row_names,'VariableNames',colnames)
plot([3, 6, 9, 12], y','-')
title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tolx')
xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
ylabel('iterazioni')
```

```
legend({'newton','newtonmod','aitken'},'Location','northwest')
```

## 6.3 Esercizio 15

Listing 3: es15.m

```
f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
x = linspace(-1, 1, 100001);
linerrors = zeros(1, 40);
chebyerrors = zeros(1, 40);
for n = 1:40
    xlin = linspace(-1, 1, n+1);
    xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
    ylin = lagrange(xlin,f(xlin),x);
    ycheby = lagrange(xcheby,f(xcheby),x);
    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
end
semilogy(linerrors);
hold on;
semilogy(chebyerrors);
xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
ylabel('massimo errore di interpolazione');
legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'},'Location','
    northeast');
```

## 6.4 Esercizio 16

Listing 4: es16.m

```
f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
f1 = @(x)(-pi*x.*sin((pi*x.^2)/2));
x = linspace(-1, 1, 100001);
linerrors = zeros(1, 20);
chebyerrors = zeros(1, 20);
for n = 1:20
    xlin = linspace(-1, 1, n+1);
    xcheby = chebyshev(-1,1, n+1);
    ylin = hermite(xlin,f(xlin),f1(xlin),x);
    ycheby = hermite(xcheby,f(xcheby),f1(xcheby),x);
    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
end
semilogy(linerrors);
hold on;
semilogy(chebyerrors);
xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
ylabel('massimo errore di interpolazione');
legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'},'Location','
    northeast');
```

## 6.5 Esercizio 18

Listing 5: es18.m

```
f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
```

```
x = linspace(-1, 1, 100001);
linerrors = zeros(1, 40);
chebyerrors = zeros(1, 40);
for n = 4:100
    xlin = linspace(-1, 1, n+1);
    xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
    xcheby(1)=-1;
    xcheby(n+1)=1;
    ylin = splinenat(xlin,f(xlin),x);
    ycheby = splinenat(xcheby,f(xcheby),x);
    ylin=ylin';
    ycheby=ycheby';
    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
end
semilogy(linerrors);
hold on;
semilogy(chebyerrors);
xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
ylabel('massimo errore di interpolazione');
legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'},'Location','
    northeast');
```

## 6.6 Esercizio 19

Listing 6: es19.m

```
f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
x = linspace(-1, 1, 100001);
linerrors = zeros(1, 40);
chebyerrors = zeros(1, 40);
for n = 4:100
    xlin = linspace(-1, 1, n+1);
    xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
    ylin = spline(xlin,f(xlin),x);
    ycheby = spline(xcheby,f(xcheby),x);
    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
end
semilogy(linerrors);
hold on;
semilogy(chebyerrors);
xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
ylabel('massimo errore di interpolazione');
legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'},'Location','
    northeast');
```

## 6.7 Esercizio 20

Listing 7: es20.m

```
f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
fp = @(x)(f(x) + 10^(-3)*rand(size(x)));
xi = -1 + 2*(0:10^4)/10^4;
fi = f(xi);
fpi = fp(xi);
errors=zeros(1, 20);
```

```
for m = 1:20
    y = minimiquadrati(xi, fpi, m);
    errors(m) = norm(abs(y-fi), inf);
end
semilogy(errors);
xlabel('grado del polinomio');
ylabel('errore di interpolazione massimo');
```

## 6.8 Esercizio 21

Listing 8: es21.m

```
for i = 1:7
    weights= rats(ncweights(i))
end
```

## 6.9 Esercizio 22

Listing 9: es22.m

```
rapp = zeros(1, 50);
for i = 1:50
    rapp(i) = sum(abs(ncweights(i)))/i;
end
semilogy(rapp);
xlabel('grado n della formula di Newton-Cotes');
ylabel('^{K_n}/_{K}');
```

## 6.10 Esercizio 23

Listing 10: es23.m

```
value = log(cos(1)/cos(1.1));
x = zeros(1,9);
errors=zeros(1, 9);
for i = 1:9
    x(i) = newtoncotes(@tan, -1,1.1, i);
    errors(i) = abs(value-x(i));
end
```

## 6.11 Esercizio 24

Listing 11: es24.m

```
a = -1;
b = 1.1;
n = 10;
itrap = zeros(1, n);
isimp = zeros(1, n);
for i = 1:n
    itrap(i) = trapecomp(@tan, a, b, i*2);
    isimp(i) = simpcomp(@tan, a, b, i*2);
end
integrali = [itrap; isimp];
row_names = {'trapezi composta', 'simpson composta'};
colnames = {'2','4','6','8','10','12','14','16','18','20'};
```

```
values = array2table(integrali,'RowNames',row_names,'VariableNames',
    colnames);
disp(values);
```

### 6.12 Esercizio 25

Listing 12: es25.m

```
format long e
f = @(x)(1/(1+100*x.^2));
a = -1;
b = 1;
itrap = zeros(1, 5);
isimp = zeros(1, 5);
for i = 1:5
    itrap(i) = adaptrap(f, a, b, 10^(-i-1));
    isimp(i) = adapsim(f, a, b, 10^(-i-1));
end
integrali = [itrap; isimp];
row_names = {'trapezi adattiva', 'simpson adattiva'};
colnames = {'10^-2','10^-3','10^-4','10^-5','10^-6'};
values = array2table(integrali,'RowNames',row_names,'VariableNames',
    colnames);
disp(values);
```