



Elaborato di  
**Calcolo Numerico**  
Anno Accademico 2021/2022

*John Smith* - 1234567 - *john.smith@stud.unifi.it*  
*Nice Guy* - 9876543 - *nice.guy@stud.unifi.it*

June 29, 2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Capitolo 1</b>	<b>4</b>
1.1	Esercizio 1 . . . . .	4
1.2	Esercizio 2 . . . . .	4
1.3	Esercizio 3 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Capitolo 2</b>	<b>6</b>
2.1	Esercizio 4 . . . . .	6
2.2	Esercizio 5 . . . . .	7
2.3	Esercizio 6 . . . . .	10
2.4	Esercizio 7 . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Capitolo 3</b>	<b>12</b>
3.1	Esercizio 8 . . . . .	12
3.2	Esercizio 9 . . . . .	13
3.3	Esercizio 10 . . . . .	14
3.4	Esercizio 11 . . . . .	15
3.5	Esercizio 12 . . . . .	15
3.6	Esercizio 13 . . . . .	17
3.7	Esercizio 14 . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Capitolo 4</b>	<b>18</b>
4.1	Esercizio 15 . . . . .	18
4.2	Esercizio 16 . . . . .	18
4.3	Esercizio 17 . . . . .	18
4.4	Esercizio 18 . . . . .	18
4.5	Esercizio 19 . . . . .	18
4.6	Esercizio 20 . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Capitolo 5</b>	<b>19</b>
5.1	Esercizio 21 . . . . .	19
5.2	Esercizio 22 . . . . .	19
5.3	Esercizio 23 . . . . .	19
5.4	Esercizio 24 . . . . .	19
5.5	Esercizio 25 . . . . .	19
5.6	Esercizio 26 . . . . .	20
5.7	Esercizio 30 . . . . .	20
5.8	Esercizio 28 . . . . .	20
5.9	Esercizio 29 . . . . .	20
5.10	Esercizio 30 . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Codici ausiliari</b>	<b>21</b>
6.1	Esercizio 6 . . . . .	21
6.2	Esercizio 7 . . . . .	21
6.3	Esercizio 15 . . . . .	22
6.4	Esercizio 16 . . . . .	22
6.5	Esercizio 18 . . . . .	23
6.6	Esercizio 19 . . . . .	23
6.7	Esercizio 20 . . . . .	23
6.8	Esercizio 21 . . . . .	24
6.9	Esercizio 22 . . . . .	24
6.10	Esercizio 23 . . . . .	24
6.11	Esercizio 24 . . . . .	24
6.12	Esercizio 25 . . . . .	25

## List of Figures

1	iterazioni richieste . . . . .	10
2	iterazioni richieste . . . . .	11

## List of Tables

1	valori approssimati con i metodi di Newton, secanti e Steffensen . . . . .	10
2	valori approssimati con i metodi di Newton, secanti e Steffensen . . . . .	11

# 1 Capitolo 1

## 1.1 Esercizio 1

Verificare che,

$$\frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h) + O(h^4)}{12h} = f'(x) + O(h^4)$$

**Soluzione:**

Per verificare la equivalenza ci servirà applicare sviluppo di Taylor per tutti i funzioni. La funzione di Taylor definita così:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + O((x - x_0)^n)$$

Calcoliamo le sviluppi di Taylor per tutti funzioni che sono presenti in formula da verificare. A variabile  $x_0$  noi assumiamo il valore  $x$ , quindi  $x_0 = x$ . Allora:

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)(x+2h-x) + O(x+2h-x) = f(x) + 2hf'(x) + O(h)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(x+h-x) + O(x+h-x) = f(x) + hf'(x) + O(h)$$

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(x-h-x) + O(x-h-x) = f(x) - hf'(x) + O(h)$$

$$f(x-2h) = f(x) + f'(x)(x-2h-x) + O(x-2h-x) = f(x) - 2hf'(x) + O(h)$$

Se mettere tutto insieme otteniamo:

$$\begin{aligned} & \frac{-(f(x) + 2hf'(x)) + 8(f(x) + hf'(x)) - 8(f(x) - hf'(x)) + (f(x) - 2hf'(x)) + O(h^4)}{12h} = \\ & = \frac{-\cancel{f(x)} - 2hf'(x) + \cancel{8f(x)} + 8hf'(x) - \cancel{8f(x)} + 8hf'(x) + \cancel{f(x)} - 2hf'(x) + O(h^4)}{12h} = \\ & = \frac{12hf'(x) + O(h^4)}{12h} = f'(x) + O(h^4) \end{aligned}$$

## 1.2 Esercizio 2

Calcolare, motivandone i passaggi, la precisione di macchina della doppia precisione dello standard IEEE. Confrontare questa quantità con quanto ritornato dalla variabile `eps` di Matlab, commentando a riguardo.

**Soluzione:**

Dato un generico numero reale  $x \in I$ , con  $I$  sottoinsieme della retta reale, e dato  $\mathbf{M}$  come insieme dei numeri di macchina che appartengono a sottoinsieme della retta reale  $I$ , sappiamo dalla teoria che il numero di elementi di  $\mathbf{M}$  è finito. Pertanto è necessario definire una funzione  $fl : IV\mathbf{M}$ , se  $x \in I$  e  $x \neq 0$  con  $fl(x) = x(1 + \varepsilon_x)$ , dove  $\varepsilon_x$  è l'errore relativo della funzione tale che  $\varepsilon_x \leq u$ ,

$$u = \begin{cases} 2^{1-m}, & \text{per troncamento} \\ \frac{1}{2} * 2^{1-m}, & \text{per arrotondamento} \end{cases}$$

Poiché lo studio riguarda la doppia precisione, la mantissa  $m$  è uguale a 53. Per confrontare questi valori con l'`eps` di Matlab, è necessario eseguire il seguente codice. Le variabili `truncated` e `rounded` avranno rispettivamente i risultati del troncamento e dell'arrotondamento:

```
1 >> a=eps
2 a = 2.2204e-16
3 >> truncated = 2^(1-53)
4 truncated = 2.2204e-16
5 >> rounded = (1/2)*(2^(1-53))
6 rounded = 1.1102e-16
```

Dai precedenti valori, è chiaro che l'`epsilon` di macchina combacia con il valore della precisione usato per il troncamento, mentre è il doppio esatto di quello per l'arrotondamento.

### 1.3 Esercizio 3

Eseguire il seguente script Matlab:

```
1 format long e
2 (1+(1e-14-1))*1e14
```

Spiegare i risultati ottenuti.

**Soluzione:**

```
1 >> format long e
2 >> (1+(1e-14-1))*1e14
3 ans = 9.992007221626409e-01
```

Il risultato è dovuto alla cosiddetta **cancellazione numerica**: i due addendi sono rappresentati in macchina con piena accuratezza, a causa però del malcondizionamento del problema ( $k \gg 1$ ), il risultato non è corretto.

## 2 Capitolo 2

### 2.1 Esercizio 4

Scrivere una function Matlab, *radice(x)* che, avendo in ingresso un numero  $x$  non negativo, ne calcoli la radice quadrata utilizzando solo operazioni algebriche elementari, con la massima precisione possibile. Confrontare con la function *sqrt* di Matlab per 20 valori di  $s$ , equispaziati logaritmicamente nell'intervallo  $[1e-10, 1e10]$ , evidenziando che si è ottenuta la massima precisione possibile.

**Soluzione:**

```
1 function answer = radice(x)
2     % answer = radice(x)
3     % This method is called Babilons method
4     % It gets some value in input and apply the Babilons method
5     % until I needed precision, but we need maximum precision possible,
6     % so I apply this method until I get two equal values
7     % one before another and this will mean this method arrived at a point,
8     % in which value not changes, so it is a maximum precision.
9     % INPUT:  x      — Is a value of which we want to get square root
10    % OUTPUT: answer — This is the square root of the input
11    format long e;
12
13    if x < 0
14        error('Wrong value in input! Should be not less then zero!');
15    end
16
17    answer = x / 2;
18    guess = x;
19
20    while not(answer == guess)
21        guess = answer;
22        answer = (guess + (x / guess)) / 2;
23    end
24
25 end
26
27 for i = 1:0.5:10
28     s = 1e-10 + 1e10 * log10(i);
29     custom = radice(s);
30     native = sqrt(s);
31
32     if abs(custom - native) >= eps(abs(native))
33
34         if abs(custom - native) > eps(abs(native))
35             diff = abs(custom - native);
36             fprintf([ ...
37                 'result is not equal for %.' int2str(abs(int16(log10(eps(s)))) + 1)
38                 ...
39                 'd, with values custom=.' int2str(abs(int16(log10(eps(custom)))) +
40                 20) ...
41                 'd and native=.' int2str(abs(int16(log10(eps(native)))) + 20) ...
42                 'd, with diff=.' int2str(abs(int16(log10(eps(diff)))) + 20) 'd\n'
43                 ...
44                 ], s, custom, native, diff);
45         elseif abs(custom - native) == eps(abs(native))
46             fprintf([ ...
47                 'Difference between this numbers are equal to exponent ' ...
48                 'for this numbers, and equals to %.30d\n'...
```

```

46         ], eps(abs(native)));
47     end
48
49 end
50
51 fprintf([ ...
52     'custom=%. ' int2str(abs(int16(log10(eps(custom)))) + 1) ...
53     'd\nnative=%. ' int2str(abs(int16(log10(eps(native)))) + 1) ...
54     'd\n\n'
55     ], custom, native);
56
57 end

```

## 2.2 Esercizio 5

Scrivere function Matlab distinte che implementino efficientemente i seguenti metodi per la ricerca degli zeri di una funzione  $f(x)$ :

- il metodo di Newton;
- il metodo delle secanti;
- il metodo di Steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad n=0,1,\dots$$

Per tutti i metodi, utilizzare come criterio di arresto

$$|x_{n+1} - x_n| \leq tol * (1 + |x_n|)$$

essendo  $tol$  una opportuna tolleranza specificata in ingresso. Curare particolarmente la robustezza del codice.

**Soluzione:**

- Metodo di Newton

```

1 function [x, i] = newton(f, f1, x0, tolx, maxit)
2     % [x, i] = newton(f, f1, x0, tolx, maxit)
3     % Newton's method, used to calculate a root of the equation f(x)=0
4     % Input:  f      — function that we can derive
5             f1     — derived function of the 'f'
6             x0     — initial approximation
7             tolx   — tolerance
8             maxit  — maximum number of iterations (default = 100)
9     % Output: x      — the approximation of the root function
10            i       — number of iterations
11    % CHECK THIS: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod
12
13    format long e;
14
15    if nargin < 4
16        error('Number of arguments must be at least 4!');
17    elseif nargin == 4
18        maxit = 100;
19    end
20
21    if tolx < eps
22        error('Tolerance cannot be checked!');

```

```

23     end
24
25     x = x0;
26
27     for i = 1:maxit
28         x0 = x;
29
30         fx = feval(f, x);
31         flx = feval(f1, x);
32         x = x - (fx / flx);
33
34         if abs(x - x0) <= tolx * (1 + abs(x0))
35             break;
36         end
37
38     end
39
40     if abs(x - x0) > tolx * (1 + abs(x0))
41         warning('The method does not converge!');
42     end
43
44 end

```

- Metodo delle secanti

```

1 function [x, i] = secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
2     % [x, i] = secanti(f, x0, x1, tolx, maxit)
3     % Method of the secant, used to calculate a root of the equation f(x)=0
4     % Input:  f      — function that we can derive
5             x0      — initial approximation
6             x1      — second initial approximation
7             tolx    — tolerance
8             maxit   — maximum number of iterations (default = 100)
9     % Output: x      — the approximation of the root function
10            i       — number of iterations
11    % CHECK THIS: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod
12
13    format long e;
14
15    if nargin < 4
16        error('Number of arguments must be at least 4!');
17    elseif nargin == 4
18        maxit = 100;
19    end
20
21    i = 0;
22    f0 = feval(f, x0);
23
24    for i = 1:maxit
25        f1 = feval(f, x1);
26        df1 = (f1 - f0) / (x1 - x0);
27        x0 = x1;
28        x1 = x1 - (f1 / df1);
29        f0 = f1;
30
31        if abs(x1 - x0) <= tolx * (1 + abs(x0))
32            break;
33        end
34    end

```



```

35     end
36
37     if abs(x1 - x0) > tolx * (1 + abs(x0))
38         warning('The method does not converge!');
39     end
40
41     x = x1;
42 end

```

- Metodo di Steffensen

```

1  function [x, i] = steffensen(f, x0, tolx, maxit)
2      % [x, i] = steffensen(f, x0, tolx, maxit)
3      % Steffensen's method, used to calculate a root of the equation f(x)=0
4      % Input:  f      — a fixed point iteration function
5              x0      — initial guess to the fixed point
6              tolx     — tolerance
7              maxit    — maximum number of iterations (default = 100)
8      % Output: x      — the approximation of the root function
9              i        — number of iterations
10     % CHECK THIS: bisezione, corde, secanti, aitken, newtonmod
11
12     format long e;
13
14     if nargin < 3
15         error('Number of arguments must be at least 3!');
16     elseif nargin == 3
17         maxit = 100;
18     end
19
20     x = x0;
21
22     for i = 1:maxit
23         x0 = x;
24         % get ready to do a large, but finite, number of iterations.
25         % This is so that if the method fails to converge, we won't
26         % be stuck in an infinite loop.
27         fx = feval(f, x0); % calculate the next two guesses for the fixed point.
28         f_fx_x = feval(f, fx + x0);
29         x = x0 - (fx^2 / (f_fx_x - fx));
30         % use Aitken's delta squared method to
31         % find a better approximation to x0.
32         if abs(x - x0) <= tolx * (1 + abs(x0))
33             break; % if we are, stop the iterations, we have our answer.
34         end
35
36     end
37
38     if abs(x - x0) > tolx * (1 + abs(x0))
39         warning(['Failed to converge in ' maxit ' iterations!']);
40     end
41
42 end

```

## 2.3 Esercizio 6

Utilizzare le *function* del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione

$$f(x) = x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

per  $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ , partendo da  $x_0 = 1$  (e  $x_1 = 0.99$  per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare le iterazioni richieste da ciascun metodo. Commentare il relativo costo computazionale, in termini di valutazioni funzionali richieste.

**Soluzione:**

Eseguendo lo script es6.msi ottengono i risultati contenuti nella tabella 2 e nella figura 1. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

Metodo	tolleranza= $10^{-3}$	tolleranza= $10^{-6}$	tolleranza= $10^{-9}$	tolleranza= $10^{-12}$
newton	5.946116463605413e-01	5.946116440568356e-01	5.946116440568356e-01	5.946116440568356e-01
secanti	5.946184776717105e-01	5.946116440568420e-01	5.946116440568356e-01	5.946116440568356e-01
steffensen	5.946116811419248e-01	5.946116440568371e-01	5.946116440568356e-01	5.946116440568356e-01

Table 1: valori approssimati con i metodi di Newton, secanti e Steffensen

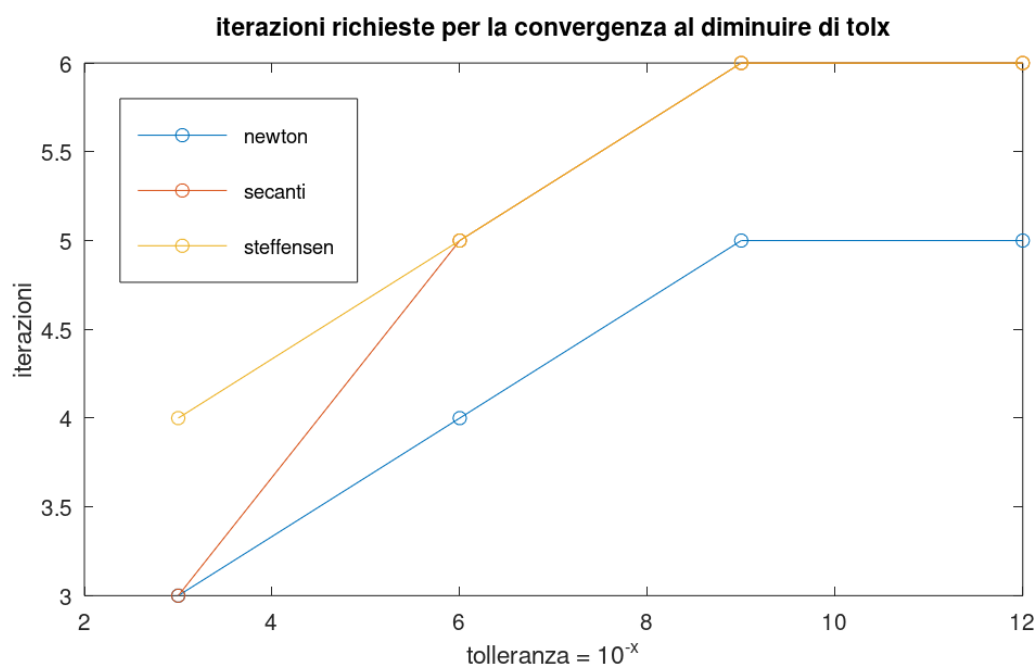


Figure 1: iterazioni richieste

## 2.4 Esercizio 7

Utilizzare le *function* del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione

$$f(x) = \left[ x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]^3,$$

per  $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ , partendo da  $x_0 = 1$  (e  $x_1 = 0.99$  per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare le iterazioni richieste da ciascun metodo. Commentare i risultati ottenuti.

**Soluzione:**

Eseguendo lo script es7.msi ottengono i risultati contenuti nella tabella ?? e nella figura 2. Come si può notare, il metodo di newton e il metodo delle secanti convergono molto più rapidamente del metodo di bisezione e del metodo delle corde.

Metodo	tolleranza= $10^{-3}$	tolleranza= $10^{-6}$	tolleranza= $10^{-9}$	tolleranza= $10^{-12}$
newton	5.94611646360541e-01	5.94611644056836e-01	5.94611644056836e-01	5.94611644056836e-01
secanti	5.94611646954077e-01	5.94611644056836e-01	5.94611644056836e-01	5.94611644056836e-01
steffensen	5.94611681141925e-01	5.94611644056837e-01	5.94611644056836e-01	5.94611644056836e-01

Table 2: valori approssimati con i metodi di Newton, secanti e Steffensen

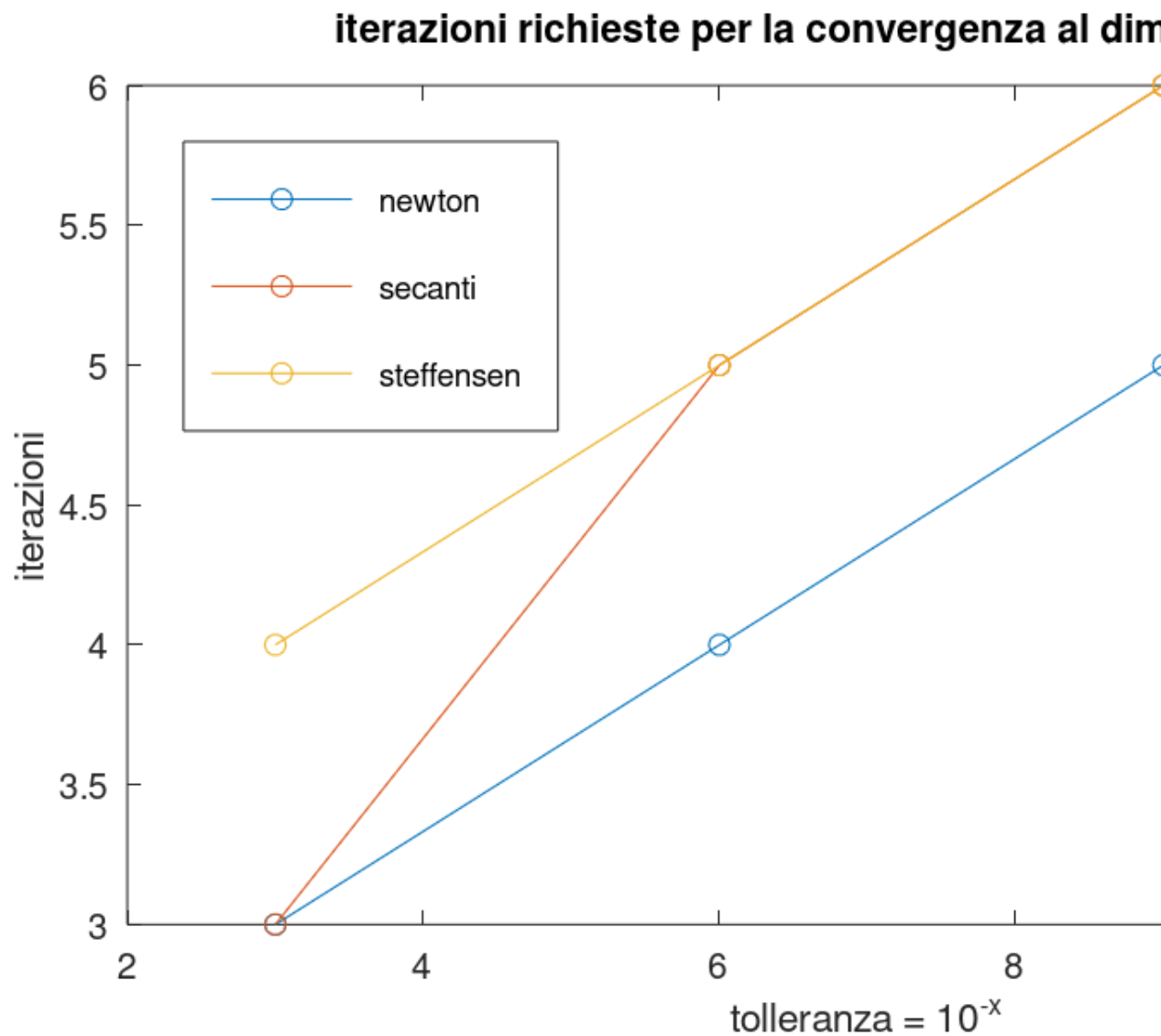


Figure 2: iterazioni richieste

## 3 Capitolo 3

### 3.1 Esercizio 8

Scrivere una function Matlab,

```
1 function x = mialu(A, b)
```

che, data in ingresso una matrice  $A$  ed un vettore  $b$ , calcoli la soluzione del sistema lineare  $Ax = b$  con il metodo di fattorizzazione  $LU$  con *pivoting* parziale. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

**Soluzione:**

```
1 function x = mialu(A, b)
2     % x = mialu(A, b)
3     % Method of the secant, used to calculate a root of the equation f(x)=0
4     % Input:  A    — a matrix representation of the equations with unknown variables
5     %         b    — result of unknown variables
6     % Output: x    — array to what equals unknown variables
7
8     % Calculate L and U matrixes
9     n = length(A);
10    L = zeros(n);
11    U = zeros(n);
12    % P = eye(n);
13
14    for k = 1:n
15        % find the entry in the left column with the largest abs value (pivot)
16        [~, r] = max(abs(A(k:end, k)));
17        r = n - (n - k + 1) + r;
18
19        A([k r], :) = A([r k], :);
20        % P([k r], :) = P([r k], :);
21        L([k r], :) = L([r k], :);
22        b([k r], :) = b([r k], :);
23
24        % from the pivot down divide by the pivot
25        L(k:n, k) = A(k:n, k) / A(k, k);
26
27        U(k, 1:n) = A(k, 1:n);
28        A(k + 1:n, 1:n) = A(k + 1:n, 1:n) - L(k + 1:n, k) * A(k, 1:n);
29
30    end
31
32    U(:, end) = A(:, end);
33
34    x = zeros(n, 1);
35    y = zeros(n, 1);
36
37    % calcolo delle soluzioni di Ly = b
38    for i = 1:1:n
39        alpha = 0;
40
41        for k = 1:1:i
42            alpha = alpha + L(i, k) * y(k);
43        end
44
45        y(i) = b(i) - alpha;
46    end
```

```

47
48 % calcolo delle soluzioni di  $Ux = y$ 
49 for i = n:-1:1
50     alpha = 0;
51
52     for k = i + 1:1:n
53         alpha = alpha + U(i, k) * x(k);
54     end
55
56     x(i) = (y(i) - alpha) / U(i, i);
57 end
58
59 end

```

### 3.2 Esercizio 9

Scrivere una function Matlab,

```

1 function x = mialdl(A, b)

```

che, dati in ingresso una matrice  $sdp$   $A$  ed un vettore  $b$ , calcoli la soluzione del corrispondente sistema lineare utilizzando la fattorizzazione  $LDL^T$ . Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

**Soluzione:**

```

1 function x = mialdl(A, b)
2     % x = mialdl(A, b)
3     % Method of the secant, used to calculate a root of the equation f(x)=0
4     % Input:  A      — a matrix representation of the equations with unknown variables
5     %         It is assumed that A is symmetric and positive definite.
6     %         b      — result of unknown variables
7     % Output: x      — array of what equals unknown variables
8
9     % Figure out the size of A.
10    n = size(A, 1);
11    % The main loop. See Golub and Van Loan for details.
12    L = zeros(n, n);
13
14    for j = 1:n,
15
16        if (j > 1),
17            v(1:j - 1) = L(j, 1:j - 1) .* d(1:j - 1);
18            v(j) = A(j, j) - L(j, 1:j - 1) * v(1:j - 1)';
19            d(j) = v(j);
20
21            if (j < n),
22                L(j + 1:n, j) = (A(j + 1:n, j) - L(j + 1:n, 1:j - 1) * v(1:j - 1)') / v(j);
23            end;
24
25        else
26            v(1) = A(1, 1);
27            d(1) = v(1);
28            L(2:n, 1) = A(2:n, 1) / v(1);
29        end;
30
31    end;
32

```

```

33 % Put d into a matrix.
34 D = diag(d);
35 % Put ones on the diagonal of L.
36 L = L + eye(n);
37
38 % n = size(A,1);
39 % L=zeros(n,n);
40 % for j=1:n,
41 %     if (j>1),
42 %         v(1:j-1)=L(j,1:j-1).*d(1:j-1);
43 %         v(j)=A(j,j)-L(j,1:j-1)*v(1:j-1)';
44 %         d(j)=v(j);
45 %         if(j<n),
46 %             L(j+1:n,j)=(A(j+1:n,j)-L(j+1:n,1:j-1)*v(1:j-1)')/v(j);
47 %         end;
48 %     else
49 %         v(1)=A(1,1);
50 %         d(1)=v(1);
51 %         L(2:n,1)=A(2:n,1)/v(1);
52 %     end;
53 % end;
54 % D=diag(d);
55 % L=L+eye(n);
56
57 U = D * L';
58 x = zeros(n, 1);
59 y = zeros(n, 1);
60
61 % calcolo delle soluzioni di Ly = b
62 for i = 1:1:n
63     alpha = 0;
64
65     for k = 1:1:i
66         alpha = alpha + L(i, k) * y(k);
67     end
68
69     y(i) = b(i) - alpha;
70 end
71
72 % calcolo delle soluzioni di Ux = y
73 for i = n:-1:1
74     alpha = 0;
75
76     for k = i + 1:1:n
77         alpha = alpha + U(i, k) * x(k);
78     end
79
80     x(i) = (y(i) - alpha) / U(i, i);
81 end
82
83 end

```

### 3.3 Esercizio 10

Data la function Matlab

```

1 function [A, b] = linsis(n, k, simme)
2 %

```

```

3  % [A,b] = linsis(n,k,simme) Crea una matrice A nxn ed un termine noto b,
4  % in modo che la soluzione del sistema lineare
5  % A*x=b sia x = [1,2,...,n]'.
6  % k `e un parametro ausiliario.
7  % simme, se specificato, crea una matrice
8  % simmetrica e definita positiva.
9  %
10 sigma = 10^(-2 * (1 - k)) / n;
11 rng(0);
12 [q1, r1] = qr(rand(n));
13
14 if nargin == 3
15     q2 = q1';
16 else
17     [q2, r1] = qr(rand(n));
18 end
19
20 A = q1 * diag([sigma 2 / n:1 / n:1]) * q2;
21 x = [1:n]';
22 b = A * x;
23 return

```

che crea sistemi lineari casuali con soluzione nota, risolvere, utilizzando la *function mialu*, i sistemi lineari generati da  $[A, b] = \text{linsis}(10, 1)$  e  $[A, b] = \text{linsis}(10, 10)$ . Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

**Soluzione:**

### 3.4 Esercizio 11

Risolvere, utilizzando la *function mialdlt*, i sistemi lineari generati da  $[A, b] = \text{linsis}(10, 1, 1)$  e  $[A, b] = \text{linsis}(10, 10, 1)$ . Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

**Soluzione:**

### 3.5 Esercizio 12

Scrivere una function Matlab,

```

1 function [x,nr] = miaqr(A, b)

```

che, data in ingresso la matrice  $A$   $m \times n$ , con  $m \geq n = \text{rank}(A)$ , ed un vettore  $b$  di lunghezza  $m$ , calcoli la soluzione del sistema lineare  $Ax = b$  nel senso dei minimi quadrati e, inoltre, la norma,  $nr$ , del corrispondente vettore residuo. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della *function*. Validare la *function miaqr* su due esempi non banali, generati casualmente, confrontando la soluzione ottenuta con quella calcolata con l'operatore Matlab.

**Soluzione:**

```

1 function [x, nr] = miaqr(A, b)
2     % QR = myqr(A)
3     % calcola la fattorizzazione QR di Householder della matrice A
4     % Input:
5     %     A= matrice quadrata da fattorizzare
6     %
7     % Output:
8     %     QR=matrice contenente le informazioni sui fattori Q e R della
9     %     fattorizzazione QR di A
10    %
11    [m, n] = size(A);

```

```

12
13     if n > m
14         error('Dimensioni errate');
15     end
16
17     if length(b) ~= m
18         error('Dati inconsistenti');
19     end
20
21     QR = A;
22
23     for i = 1:n
24         alfa = norm(QR(i:m, i));
25
26         if alfa == 0
27             error('la matrice non ha rango massimo');
28         end
29
30         if QR(i, i) >= 0
31             alfa = -alfa;
32         end
33
34         v1 = QR(i, i) - alfa;
35         QR(i, i) = alfa;
36         QR(i + 1:m, i) = QR(i + 1:m, i) / v1;
37         beta = -v1 / alfa;
38         v = [1; QR(i + 1:m, i)];
39         QR(i:m, i + 1:n) = QR(i:m, i + 1:n) - (beta * v) * (v' * QR(i:m, i + 1:n));
40     end
41
42     [m, n] = size(QR);
43     k = length(b);
44
45     if k ~= m
46         error('Dati inconsistenti');
47     end
48
49     x = b(:);
50
51     for i = 1:n
52         v = [1; QR(i + 1:m, i)];
53         beta = 2 / (v' * v);
54         x(i:m) = x(i:m) - beta * (v' * x(i:m)) * v;
55     end
56
57     x = x(1:n);
58
59     for j = n:-1:1
60
61         if QR(j, j) == 0
62             error('Matrice singolare');
63         end
64
65         x(j) = x(j) / QR(j, j);
66         x(1:j - 1) = x(1:j - 1) - QR(1:j - 1, j) * x(j);
67     end
68
69 end

```



```

70
71 %{
72
73 A = round (10 * rand (3))
74 b = round (10 * rand (3, 1))
75
76 %}

```

### 3.6 Esercizio 13

Utilizzare la *function miaqr* per risolvere, nel senso dei minimi quadrati, i sistemi lineari sovradeterminati

$$A x = b, \quad (D*A)x = (D*b)$$

definiti dai seguenti dati:

```

1 A = [ 1 3 2; 3 5 4; 5 7 6; 3 6 4; 1 4 2 ];
2 b = [ 15 28 41 33 22 ]';
3 D = diag(1:5);

```

Commentare i risultati ottenuti.

**Soluzione:**

```

1 %Codice esercizio 13
2
3 A= [1, 2, 3; 1 2 4; 3 4 5; 3 4 6; 5 6 7];
4 b=[14 17 26 29 38];
5 QR=myqr(A);
6 ris=qrsolve(QR,b);
7 disp(ris);

```

Il risultato finale è  $ris = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

### 3.7 Esercizio 14

Scrivere una function Matlab,

```

1 [x,nit] = newton(fun, jacobian, x0, tol, maxit)

```

che implementi efficientemente il metodo di Newton per risolvere sistemi di equazioni nonlineari. Curare particolarmente il criterio di arresto, che deve essere analogo a quello usato nel caso scalare. La seconda variabile, se specificata, ritorna il numero di iterazioni eseguite. Prevedere opportuni valori di *default* per gli ultimi due parametri di ingresso.

**Soluzione:**

## 4 Capitolo 4

### 4.1 Esercizio 15

Usare la *function* del precedente esercizio per risolvere, a partire dal vettore iniziale nullo, i seguenti sistemi nonlineari, utilizzando tolleranze  $tol = 1e-3, 1e-8, 1e-13$ :

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} (x_1^2 + 1)(x_2 - 2) \\ \exp(x_1 - 1) + \exp(x_2 - 2) - 2 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ \exp(x_1 + x_2 + x_3 - 3) - x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 \end{pmatrix}.$$

Tabulare i risultati ottenuti, commentandone l'accuratezza.

**Soluzione:**

### 4.2 Esercizio 16

Costruire una *function*, *lagrange.m*, avente la stessa sintassi della *function* *spline* di Matlab, che implementi, in modo vettoriale, la forma di Lagrange del polinomio interpolante una funzione.

**Soluzione:**

### 4.3 Esercizio 17

Costruire una *function*, *newton.m*, avente la stessa sintassi della *function* *spline* di Matlab, che implementi, in modo vettoriale, la forma di Newton del polinomio interpolante una funzione.

**Soluzione:**

### 4.4 Esercizio 18

Costruire una *function*, *hermite.m*, avente una sintassi analoga alla *function* *spline* di Matlab (in pratica, con un parametro di ingresso in più per i valori delle derivate), che implementi, in modo vettoriale, il polinomio interpolante di Hermite.

**Soluzione:**

### 4.5 Esercizio 19

Costruire una *function* Matlab che, specificato in ingresso il grado  $n$  del polinomio interpolante, e gli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , calcoli le corrispondenti ascisse di Chebyshev.

**Soluzione:**

### 4.6 Esercizio 20

Costruire una *function*, *spline0.m*, avente la stessa sintassi della *function* *spline* di Matlab, che implementi la spline cubica naturale interpolante una funzione.

**Soluzione:**

## 5 Capitolo 5

### 5.1 Esercizio 21

Costruire una tabella in cui viene riportato, al crescere di  $n$ , il massimo errore di interpolazione ottenuto approssimando la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

sulle ascisse  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ :

- equidistanti in  $[-2, 3]$ ,
- di Chebyshev per lo stesso intervallo,

utilizzando le function degli Esercizi 16-18 e 20, e la function *spline* di Matlab. Considerare  $n = 4, 8, 16, \dots, 40$  e stimare l'errore di interpolazione su 10001 punti equidistanti nell'intervallo  $[x_0, x_n]$ .

**Soluzione:**

### 5.2 Esercizio 22

Tabulare il massimo errore di approssimazione (stimato su 10001 punti equidistanti in  $[0, 1]$ ) ottenuto approssimando le funzioni

$$\sin(2\pi x) \quad e \quad \cos(2\pi x)$$

mediante le function *spline0* e *spline*, interpolanti su  $n+1$  punti equidistanti in  $[0, 1]$ , per  $n = 5, 10, 15, 20, \dots, 50$ . Commentare i risultati ottenuti.

**Soluzione:**

### 5.3 Esercizio 23

Sia assegnata la seguente perturbazione della funzione  $f(x) = \sin(\pi x^2)$ :

$$\tilde{f}(x) = f(x) + 10^{-1} \text{rand}(\text{size}(x)),$$

in cui *rand* è la function built-in di Matlab. Calcolare polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado  $m$ ,  $p(x)$ , sui dati  $(x_i, \tilde{f}(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ , con:

$$x_i = i/n, \quad n = 10^4.$$

Graficare (in formato *semilogy*) l'errore di approssimazione  $\|f - p\|$  (stimato come il massimo errore sui punti  $x_i$ ), relativo all'intervallo  $[0, 1]$ , rispetto ad  $m$ , per  $m = 1, 2, \dots, 15$ . Commentare i risultati ottenuti.

**Soluzione:**

### 5.4 Esercizio 24

Costruire una function Matlab che, dato in input  $n$ , restituisca i pesi della quadratura della formula di Newton-Cotes di grado  $n$ . Tabulare, quindi, i pesi delle formule di grado 1, 2,  $\dots$ , 7 e 9 (come numeri razionali).

**Soluzione:**

### 5.5 Esercizio 25

Utilizzare le formule tabulate nel precedente esercizio per calcolare le approssimazioni dell'integrale

$$I(f) = \int_0^1 e^{3x} dx,$$

tabulando (in modo significativo) il corrispondente errore di quadratura (risolvere a mano l'integrale).

**Soluzione:**

## 5.6 Esercizio 26

Scrivere una function Matlab,

$$[If, err, nfeval] = composita(fun, a, b, n, tol)$$

in cui

- *fun* è l'identificatore di una function che calcoli (in modo vettoriale) la funzione integranda,
- *a* e *b* sono gli estremi dell'intervallo di integrazione,
- *n* è il grado di una formula di Newton-Cotes base,
- *tol* è l'accuratezza richiesta,

che calcoli, fornendo la stima *err* dell'errore di quadratura, l'approssimazione *If* dell'integrale, raddoppiando il numero di punti ed usando la formula composita corrispondente per stimare l'errore di quadratura, fino a soddisfare il requisito di accuratezza richiesto. In uscita è anche il numero totale di valutazioni funzionali effettuate, *nfeval*.

N.B.: evitare di effettuare valutazioni di funzione ridondanti.

**Soluzione:**

## 5.7 Esercizio 30

Tabulare il numero di valutazioni di funzione richieste per calcolare, mediante la function del precedente esercizio, l'approssimazione dell'integrale

$$I(f) = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{0.1+x}\right) dx,$$

utilizzando le formule di Newton-Cotes di grado  $n = 1, \dots, 7$ , e  $9$ , e tolleranze  $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

**Soluzione:**

## 5.8 Esercizio 28

Scrivere una function che implementi la formula adattiva dei trapezi.

N.B.: evitare di effettuare valutazioni di funzione ridondanti.

**Soluzione:**

## 5.9 Esercizio 29

Scrivere una function che implementi la formula adattiva di Simpson.

N.B.: evitare di effettuare valutazioni di funzione ridondanti.

**Soluzione:**

## 5.10 Esercizio 30

Tabulare il numero di valutazioni di funzione richieste dalle function degli Esercizi 29 e 30 per approssimare l'integral

$$I(f) = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{0.01+x}\right) dx,$$

con tolleranze  $tol = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

**Soluzione:**

## 6 Codici ausiliari

### 6.1 Esercizio 6

Listing 1: es6.m

```
1 syms x;
2 f = @(x)(x - cos((pi / 2) * x));
3 f1 = matlabFunction(diff(f, x));
4
5 x0 = 1;
6 x1 = 9.9e-1;
7 x = zeros(3, 4);
8 y = zeros(3, 4);
9 colnames = {};
10
11 for i = 3:3:12
12     colnames{end + 1} = ['10^-' num2str(i)];
13     [x(1, i / 3), y(1, i / 3)] = es5_newton(f, f1, x0, 10^(-i));
14     [x(2, i / 3), y(2, i / 3)] = es5_secanti(f, x0, x1, 10^(-i));
15     [x(3, i / 3), y(3, i / 3)] = es5_steffensen(f, x0, 10^(-i));
16 end
17
18 row_names = {'newton', 'secanti', 'steffensen'};
19 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
20 disp(values)
21 figure
22 plot([3, 6, 9, 12], y, 'o-')
23 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
24 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
25 ylabel('iterazioni')
26 legend(row_names, 'Location', 'northwest')
```

### 6.2 Esercizio 7

Listing 2: es7.m

```
1 f = @(x)(x^2*tan(x));
2 f1 = @(x)(2*x*tan(x) +(x^2)/(cos(x)^2));
3 m = 3;
4 x0 = 1;
5 y= zeros(3, 4);
6 x=-1*ones(3,4);
7 for i=3:3:12
8     [x(1, i/3), y(1, i/3)] = newton(f, f1, x0, 10^(-i));
9     [x(2, i/3), y(2, i/3)] = newtonmod(f, f1, x0, m, 10^(-i));
10    [x(3, i/3), y(3, i/3)] = aitken(f, f1, x0, 10^(-i));
11 end
12 disp(x);
13 disp(y);
14 row_names = {'newton', 'newton modificato', 'aitken'};
15 colnames = {'10^{-3}', '10^{-6}', '10^{-9}', '10^{-12}'};
16 values = array2table(x, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
17
18 format
19 iterations = array2table(y, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames)
20 plot([3, 6, 9, 12], y(1,1:end)', '-o');
21 hold on;
```

```

22 plot([3, 6, 9, 12], y(2,1:end)', '-o');
23 plot([3, 6, 9, 12], y(3,1:end)', '—')
24 title('iterazioni richieste per la convergenza al diminuire di tol x')
25 xlabel('tolleranza = 10^{-x}')
26 ylabel('iterazioni')
27 legend({'newton', 'newtonmod', 'aitken'}, 'Location', 'northwest')

```

### 6.3 Esercizio 15

Listing 3: es15.m

```

1 %Codice esercizio 15
2
3 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
4 x = linspace(-1, 1, 100001);
5 linerrors = zeros(1, 40);
6 chebyerrors = zeros(1, 40);
7 for n = 1:40
8     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
9     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
10    ylin = lagrange(xlin,f(xlin),x);
11    ycheby = lagrange(xcheby,f(xcheby),x);
12    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
13    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
14 end
15 semilogy(linerrors);
16 hold on;
17 semilogy(chebyerrors);
18 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
19 ylabel('massimo errore di interpolazione');
20 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

### 6.4 Esercizio 16

Listing 4: es16.m

```

1 %Codice esercizio 16
2
3 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
4 f1 = @(x)(-pi*x.*sin((pi*x.^2)/2));
5 x = linspace(-1, 1, 100001);
6 linerrors = zeros(1, 20);
7 chebyerrors = zeros(1, 20);
8 for n = 1:20
9     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
10    xcheby = chebyshev(-1,1, n+1);
11    ylin = hermite(xlin,f(xlin),f1(xlin),x);
12    ycheby = hermite(xcheby,f(xcheby),f1(xcheby),x);
13    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
14    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
15 end
16 semilogy(linerrors);
17 hold on;
18 semilogy(chebyerrors);
19 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
20 ylabel('massimo errore di interpolazione');
21 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');

```

## 6.5 Esercizio 18

Listing 5: es18.m

```
1 %Codice esercizio 18
2 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
3 x = linspace(-1, 1, 100001);
4 linerrors = zeros(1, 40);
5 chebyerrors = zeros(1, 40);
6 for n = 4:100
7     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
8     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
9     %xcheby(1)=-1;
10    %xcheby(n+1)=1;
11    ylin = splinenat(xlin,f(xlin),x);
12    ycheby = splinenat(xcheby,f(xcheby),x);
13    ylin=ylin';
14    ycheby=ycheby';
15    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
16    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
17 end
18 semilogy(linerrors);
19 hold on;
20 semilogy(chebyerrors);
21 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
22 ylabel('massimo errore di interpolazione');
23 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

## 6.6 Esercizio 19

Listing 6: es19.m

```
1 %Codice esercizio 19
2 f = @(x)(cos((pi*(x.^2))/2));
3 x = linspace(-1, 1, 100001);
4 linerrors = zeros(1, 40);
5 chebyerrors = zeros(1, 40);
6 for n = 4:100
7     xlin = linspace(-1, 1, n+1);
8     xcheby = chebyshev(-1,1,n+1);
9     ylin = spline(xlin,f(xlin),x);
10    ycheby = spline(xcheby,f(xcheby),x);
11    linerrors(n) = norm(abs(f(x) - ylin), inf);
12    chebyerrors(n) = norm( abs(f(x) - ycheby), inf);
13 end
14 semilogy(linerrors);
15 hold on;
16 semilogy(chebyerrors);
17 xlabel('numero di ascisse di interpolazione');
18 ylabel('massimo errore di interpolazione');
19 legend({'ascisse equidistanti', 'ascisse di chebyshev'}, 'Location', 'northeast');
```

## 6.7 Esercizio 20

Listing 7: es20.m

```
1 %Codice esercizio 20
2
```

```

3 f = @(x)(cos((pi*x.^2)/2));
4 fp = @(x)(f(x) + 10^(-3)*rand(size(x)));
5 xi = -1 + 2*(0:10^4)/10^4;
6 fi = f(xi);
7 fpi = fp(xi);
8 errors=zeros(1, 20);
9 for m = 1:20
10     y = minimiquadrati(xi, fpi, m);
11     errors(m) = norm(abs(y-fi), inf);
12 end
13 semilogy(errors);
14 xlabel('grado del polinomio');
15 ylabel('errore di interpolazione massimo');

```

## 6.8 Esercizio 21

Listing 8: es21.m

```

1 %Codice esercizio 21
2
3 for i = 1:7
4     weights= rats(ncweights(i))
5 end

```

## 6.9 Esercizio 22

Listing 9: es22.m

```

1 %Codice esercizio 22
2
3 rapp = zeros(1, 50);
4 for i = 1:50
5     rapp(i) = sum(abs(ncweights(i)))/i;
6 end
7 semilogy(rapp);
8 xlabel('grado n della formula di Newton-Cotes');
9 ylabel('^{\K_n}/{_K}');

```

## 6.10 Esercizio 23

Listing 10: es23.m

```

1 %Codice esercizio 23
2
3 value = log(cos(1)/cos(1.1));
4 x = zeros(1,9);
5 errors=zeros(1, 9);
6 for i = 1:9
7     x(i) = newtoncotes(@tan, -1,1.1, i);
8     errors(i) = abs(value-x(i));
9 end

```

## 6.11 Esercizio 24



Listing 11: es24.m

```

1 %Codice esercizio 24
2
3 a = -1;
4 b = 1.1;
5 n = 10;
6 itrap = zeros(1, n);
7 isimp = zeros(1, n);
8 for i = 1:n
9     itrap(i) = trapecomp(@tan, a, b, i*2);
10    isimp(i) = simpcomp(@tan, a, b, i*2);
11 end
12 integrali = [itrap; isimp];
13 row_names = {'trapezi composta', 'simpson composta'};
14 colnames = {'2', '4', '6', '8', '10', '12', '14', '16', '18', '20'};
15 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
16 disp(values);

```

## 6.12 Esercizio 25

Listing 12: es25.m

```

1 %Codice esercizio 25
2
3 format long e
4 f = @(x)(1/(1+100*x.^2));
5 a = -1;
6 b = 1;
7 itrap = zeros(1, 5);
8 trap_points = zeros(1, 5);
9 isimp = zeros(1, 5);
10 simp_points = zeros(1, 5);
11 for i = 1:5
12     [itrap(i), points] = adaptrap(f, a, b, 10^(-i-1));
13     trap_points(i) = length(points);
14     [isimp(i), points] = adapsim(f, a, b, 10^(-i-1));
15     simp_points(i) = length(points);
16 end
17 integrali = [itrap; isimp];
18 npoints = [trap_points; simp_points];
19 row_names = {'trapezi adattiva', 'simpson adattiva'};
20 colnames = {'10^-2', '10^-3', '10^-4', '10^-5', '10^-6'};
21 values = array2table(integrali, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
22 npoints = array2table(npoints, 'RowNames', row_names, 'VariableNames', colnames);
23 disp(values);
24 format
25 disp(npoints);

```