ГЛАВА 1. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

1 МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Опр. Пусть $f(x)$ - заданная на отрезке $[a, b]$ функция. Будем называть ее *монотонно неубывающей* на $[a, b]$, если из $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует,что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ и – *монотонно невозрастающей*, если из $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Монотонно неубывающие и монотонно невозрастающие функции будем называть *монотонными функциями.*

Утверждение 1.1. *Всякая монотонная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, измерима и суммируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f – неубывающая функция. Заметим, что множество $E_a = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) > a\}$ представляет собой либо отрезок либо интервал либо пустое множество. Действительно, если $E_a \neq \emptyset$, то положив $c = \inf E_a$, имеем $f(x) > a$ для $x \in (c, b]$ и $f(x) < a$ для всех $x < c$. Следовательно $E_a = (c, b]$ либо $E_a = [c, b]$. Таким образом, множество E_a измеримо.

Так как $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ для всех $x \in [s, b]$, то функция f ограничена. Из ограниченности и измеримости в силу теоремы Лебега следует суммируемость f на $[a, b]$.

Утверждение доказано.

Утверждение 1.2. *Пусть функция f монотонна на $[a, b]$. Тогда существуют односторонние пределы*

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \quad \forall x_0 \in [a, b),$$
$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \forall x_0 \in (a, b].$$

Доказательство. Пусть f не убывает на $[a,b]$ и $x_0 \in [a,b)$. Положим $A = \inf\{f(x),\ x \in (x_0,b]$. По определению точной нижней грани

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,x' \in (x_0,b]: \quad A \leqslant f(x') < A + \varepsilon.$$

Следовательно

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x') - A| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x'),$$

то есть $A = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Аналогично $\sup\{f(x),\ x \in [a,x_0)\} = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Утверждение доказано.

Обозначим через $[f](x_0)$ *скачок функции* f в точке x_0 определенный формулой

$$[f](x_0) = \begin{cases} f(x_0+0) - f(x_0-0), \quad x_0 \in (a,b), \\ f(a+0) - f(a), \quad x_0 = a, \\ f(b) - f(b-0), \quad x_0 = b. \end{cases}$$

Замечание 1.1. *Если f непрерывна в точке x_0, то $[f](x_0) = 0$.*

Утверждение 1.3. *Всякая монотонная на отрезке $[a,b]$ функция имеет не более чем счетное множество точек разрыва.*

Доказательство. Пусть f – неубывающая функция. Если x_0 – точка разрыва, то $0 < [f](x_0) < b - a$. Обозначим через E множество точек разрыва. Ясно, что

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \tag{1.1}$$

где $E_k = \{x \in [a,b] \mid [f](x) > 1/k\}$.

Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ – точки разрыва функции f, принадлежащие E_k. Положим $x_{j-1/2} = (x_{j-1} + x_j)/2$, $2 \leqslant j \leqslant m$.

Заметим, что

$$
\begin{gathered}
f(b)-f(a)= \\
=f(b)-f(x_{N-1/2})+\sum_{j=1}^{N-1}[f(x_{j+1/2})-f(x_{j-1/2})]+f(x_{1/2})-f(a)\geqslant \\
\geqslant\sum_{j=1}^{N}[f](x_j)>N/k.
\end{gathered}
$$

Следовательно $N<k(f(b)-f(a))$, то есть множество E_k конечно. Из формулы (1.1) следует, что множество E не более чем счетно.

Утверждение доказано.

Функция скачков

Пусть на полусегменте $[a,b)$ задано конечное или счетное множество точек $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ и пусть каждой точке x_n сопоставлено число $h_n>0$ так, что $\sum\limits_n h_n<+\infty$. Определим *функцию скачков* $H(x)$ формулой

$$H(x)=\sum_{x_n<x}h_n.$$

Утверждение 1.4. *Функция H – неубывающая.*

Доказательство. Пусть $a\leqslant x'<x''\leqslant b$. Тогда

$$H(x')=\sum_{x_n<x'}h_n\leqslant\sum_{x_n<x''}h_n=H(x'').$$

Утверждение доказано.

Замечание 1.2. *Заметим, что $H(a)=0$, $H(b)=\sum\limits_n h_n$.*

Утверждение 1.5. *Функция H непрерывна слева во всех точках $x_0\in(a,b]$.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant x < x_0$. Заметим, что

$$H(x_0) - H(x) = \sum_{x_n < x_0} h_n - \sum_{x_n < x} h_n = \sum_{x \leqslant x_n < x_0} h_n \to 0 \ \text{ при } \ x \to x_0 - 0.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 1.6. *Множество точек разрыва функции H совпадает с множеством $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$.*

Доказательство. Пусть $x = x_k$ для некоторого $k \geqslant 1$. Тогда

$$[H](x_k) = \lim_{x' \to x_k + 0} H(x') - H(x_k) = \lim_{x' \to x_k + 0} \sum_{x_k \leqslant x_n < x'} h_n =$$

$$= h_k + \lim_{x' \to x_k + 0} \sum_{x_k < x_n < x'} h_n = h_k.$$

Если $x \notin \{x_n\}_{n \geqslant 1}$, $x \neq b$ то

$$[H](x) = \lim_{x' \to x + 0} H(x') - H(x) = \lim_{x' \to x + 0} \sum_{x < x_n < x'} h_n = 0.$$

Утверждение доказано.

Пример функции разрывной во всех рациональных точках и непрерывной во всех иррациональных точках.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность рациональных точек из полусегмента $[a, b)$, а $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n < \infty$. Тогда соответствующая функция скачков H разрывна во всех рациональных точках из полусегмента $[a, b)$ и непрерывна во всех иррациональных точках из $[a, b)$.

Простейший пример функции скачков дает неубывающая кусочно постоянная функция, непрерывная в точках разрыва слева.

Теорема 1.1. *Всякую неубывающую на отрезке $[a, b]$ и непрерывную слева функцию f можно представить в виде суммы*

$$f(x) = H(x) + \varphi(x),$$

где H – функция скачков, φ – непрерывная неубывающая функция.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – множество точек разрыва функции f. Положим $h_n = [f](x_n)$, $n \geqslant 1$ и пусть H – соответствующая функция скачков.

Положим $\varphi(x) = f(x) - H(x)$. Функция φ непрерывна, так как

$$[\varphi](x) = [f](x) - [H](x) = 0 \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Покажем, что функция φ неубывающая. Пусть $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$. Тогда

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = f(x'') - f(x') - \sum_{x' \leqslant x_n < x''} [f](x_n).$$

Для каждой конечной суммы

$$\sum_{x' \leqslant x_n < x'',\ 1 \leqslant n \leqslant N} [f](x_n) \leqslant f(x'') - f(x').$$

Поэтому $\varphi(x'') - \varphi(x') \geqslant 0$.

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Каждая неубывающая на отрезке $[a, b]$ функция f для почти всех $x \in [a, b]$ имеет конечную производную. Эта производная интегрируема по Лебегу и*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leqslant f(b) - f(a).$$

2 ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Опр. Заданная на отрезке $[a, b]$ функция f называется *функцией ограниченной вариации* (или *функцией с ограниченным изменением*), если существует такая постоянная $C > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ (где n - произвольно) выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C.$$

Опр. Пусть f - функция ограниченной вариации на $[a, b]$. *Полной вариацией* (или *полным изменением*) функции f на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f = \sup_{a=x_0<x_1<...<x_n=b} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Для полной вариации используются также обозначения: $\bigvee_a^b f$ и $\bigvee\limits_a^b f$. Далее будем обозначать множество функций ограниченной вариации на $[a, b]$ через $BV[a, b]$ или $V[a, b]$.

Замечание 2.1. *Очевидно, что для монотонной на отрезке* $[a, b]$ *функции* $\mathrm{var}_{[a,b]} f = |f(b) - f(a)|$.

Замечание 2.2. *Очевидно, что* $C^1[a, b] \subset BV[a, b]$ *и*

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|(b - a) \quad \forall\, f \in C^1[a, b].$$

Замечание 2.3. *Ясно, что* $Lip[a, b] \subset BV[a, b]$ *и*

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f \leqslant L(b - a) \quad \forall\, f \in Lip[a, b],$$

где L – постоянная Липшица.

Замечание 2.4. *Заметим, что непрерывная на отрезке функция не обязана быть функцией ограниченной вариации. Рассмотрим, например, функцию*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Положим $x_n = \dfrac{1}{\pi n + \pi/2}$, $1 \leqslant n \leqslant N$. *Заметим, что*

$$\sum_{n=1}^{N-1} |f(x_n) - f(x_{n+1})| = \sum_{n=1}^{N-1} (x_{n+1} + x_n) \geqslant \sum_{n=1}^{N-1} x_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\pi n + \pi/2} \geqslant \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\pi(n+1)} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Утверждение 2.1. *Всякая функция ограниченной вариации ограничена.*

Доказательство.

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant |f(a)| + \mathrm{var}_{[a,b]} f.$$

Утверждение 2.2. *Пусть* $f \in BV[a,b]$. *Тогда* $\alpha f \in BV[a,b]$ *и*

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f = |\alpha| \, \mathrm{var}_{[a,b]} f.$$

Утверждение 2.3. *Пусть* $f, g \in BV[a,b]$. *Тогда* $f \pm g \in BV[a,b]$ *и*

$$\mathrm{var}_{[a,b]}(f+g) \leqslant \mathrm{var}_{[a,b]} f + \mathrm{var}_{[a,b]} g.$$

Следствие 2.1. $BV[a,b]$ – *линейное пространство.*

Заметим, что пространство $BV[a,b]$ становится нормированным, если определить в нем норму как

$$\|f\|_{BV[a,b]} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| + \mathrm{var}_{[a,b]} f$$

или

$$\|f\|_{BV[a,b]} = |f(a)| + \mathrm{var}_{[a,b]} f.$$

Теорема 2.1. *Пространство $BV[a,b]$ банахово.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную в $BV[a,b]$ последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Она такова, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\|f_n - f_m\|_{BV[a,b]} < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon).$$

Как следствие,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \quad \forall\, x \in [a,b], \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{K} |(f_n(x_k) - f_m(x_k)) - (f_n(x_{k-1}) - f_m(x_{k-1})| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \tag{2.2}$$

для всякого разбиения $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_K = b$.

Из (2.1) следует, что для каждого $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поэтому определена функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (2.1), (2.2), имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in [a,b],$$

$$\sum_{k=1}^{K} |(f_n(x_k) - f(x_k)) - (f_n(x_{k-1}) - f(x_{k-1})| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Как следствие

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \mathrm{var}_{[a,b]}(f_n - f) \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Таким образом, $f_n - f \in BV[a,b]$ и $f = f_n - (f_n - f) \in BV[a,b]$. Кроме того,

$$\|f_n - f\|_{BV[a,b]} \leqslant 2\varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Значит, $f_n \to f$ в $BV[a,b]$.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть функция f определена на $[a,b]$ и $c \in (a,b)$. В этом случае $f \in BV[a,b]$ тогда и только тогда, когда $f \in BV[a,c]$ и $f \in BV[c,b]$. При этом*

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f = \mathrm{var}_{[a,c]} f + \mathrm{var}_{[c,b]} f$$

Доказательство. Пусть $f \in BV[a,b]$ и

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = c < x_{n+1} < \dots < x_N = b.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=n}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \mathrm{var}_{[a,b]} f.$$

Отсюда

$$\mathrm{var}_{[a,c]} f + \mathrm{var}_{[c,b]} f \leqslant \mathrm{var}_{[a,b]} f.$$

Пусть теперь $f \in BV[a,c]$ и $f \in BV[c,b]$. Рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Существует n такое, что $x_n \leqslant c \leqslant x_{n+1}$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_n)| +$$

$$+ |f(x_{n+1}) - f(c)| + \sum_{k=n}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \mathrm{var}_{[a,c]} f + \mathrm{var}_{[c,b]} f.$$

Следовательно

$$\mathrm{var}_{[a,b]} f \leqslant \mathrm{var}_{[a,c]} f + \mathrm{var}_{[c,b]} f$$

Теорема доказана.

Утверждение 2.4. *Пусть $f \in BV[a,b]$, Тогда функция*

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ \mathrm{var}_{[a,x]} f, & a < x \leqslant b \end{cases}$$

неубывающая.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 из $x_1 < x_2$ следует, что

$$v(x_2) - v(x_1) = \mathrm{var}_{[x_1,x_2]} f \geqslant 0.$$

Теорема 2.3. *Пусть $f \in BV[a,b]$ и функция f непрерывна слева (справа) в точке $x = c \in [a,b]$. Тогда функция v непрерывна слева (справа) в точке $x = c$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна в точке c слева. Тогда существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (c - \delta(\varepsilon), c).$$

Так как

$$v(c) = \sup_{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

то существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > v(c) - \varepsilon. \tag{2.3}$$

Мы можем считать, что точка $x_* = x_{n-1} \in (c - \delta(\varepsilon), c)$. Если это не так, добавим ее в разбиение. При этом неравенство (2.3) сохранится. Из $|f(c) - f(x_*)| < \varepsilon$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{n-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > v(c) - 2\varepsilon.$$

Следовательно

$$v(x_*) > v(c) - 2\varepsilon.$$

В силу монотонности v имеем

$$v(x) > v(c) - 2\varepsilon \quad \forall\, x \in (x_*, c).$$

Значит, v непрерывна слева в точке c.

Пусть теперь f непрерывна справа в точке c. Существует разбиение $c = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ такое,

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > \operatorname*{var}_{[c,b]} f - \varepsilon.$$

Так как сумма только возрастает при добавлении новых точек, то можно считать, что $x_* = x_1 \in (c, c + \delta(\varepsilon))$. Но тогда

$$\operatorname*{var}_{[x_*,b]} f + |f(x_1) - f(x_0)| > \operatorname*{var}_{[c,b]} f - \varepsilon.$$

Отсюда

$$v(b) - v(x_*) > v(b) - v(c) - 2\varepsilon,$$

то есть

$$v(x_*) - v(c) < 2\varepsilon.$$

Тогда

$$v(x) - v(c) \leqslant v(x_*) - v(c) < 2\varepsilon \quad \forall\, x \in (c, x_*).$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть $f, g \in BV[a,b]$. Тогда $fg \in BV[a,b]$, причем*

$$\|fg\|_{BV[a,b]} \leqslant \|f\|_{BV[a,b]} \|g\|_{BV[a,b]}. \tag{2.4}$$

Если дополнительно $|g(x)| \geqslant c_0 > 0$ для всех $x \in [a,b]$, то $1/g, f/g \in BV[a,b]$, причем

$$\operatorname{var}_{[a,b]}(1/g) \leqslant \frac{1}{c_0^2} \operatorname{var}_{[a,b]} g,$$
$$\|f/g\|_{BV[a,b]} \leqslant \|f\|_{BV[a,b]} \|1/g\|_{BV[a,b]}.$$

Доказательство.

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j)g(x_j) - f(x_{j-1})g(x_{j-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |(f(x_j) - f(x_{j-1}))g(x_j) + f(x_{j-1})(g(x_j) - g(x_{j-1}))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |g| \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f| \sum_{j=1}^{n} |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |g| \mathrm{var}_{[a,b]} f + \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f| \mathrm{var}_{[a,b]} g.$$

Отсюда

$$\|fg\|_{BV[a,b]} = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |fg| + \mathrm{var}_{[a,b]}(fg) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f| \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |g| + \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |g| \mathrm{var}_{[a,b]} f + \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f| \mathrm{var}_{[a,b]} g \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{BV[a,b]} \|g\|_{BV[a,b]}.$$

Пусть теперь $|g(x)| \geqslant c_0 > 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} |1/g(x_j) - 1/g(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} \frac{|g(x_j) - g(x_{j-1})|}{|g(x_{j-1})||g(x_j)|} \leqslant \frac{1}{c_0^2} \mathrm{var}_{[a,b]} g,$$

$$\|f/g\|_{BV[a,b]} \leqslant \|f\|_{BV[a,b]} \|g\|_{BV[a,b]}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Функция f, заданная на $[a, b]$, является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неубывающих функций.*

Доказательство. Если f представима в виде разности двух неубывающих функций, то, очевидно, $f \in BV[a, b]$.

Пусть теперь $f \in BV[a, b]$. Положим

$$v(x) = \mathrm{var}_{[a,x]} f, \quad \varphi(x) = \mathrm{var}_{[a,x]} f - f(x).$$

Тогда
$$f(x) = v(x) - \varphi(x).$$
Функция v неубывающая. Покажем, что φ также неубывающая. Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Тогда
$$\begin{aligned}\varphi(x_2) - \varphi(x_1) &= [\mathrm{var}_{[a,x_2]} f - \mathrm{var}_{[a,x_1]} f] - [f(x_2) - f(x_1)| = \\ &= \underset{[x_1,x_2]}{\mathrm{var}}\, f - |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Множество точек разрыва функции ограниченной вариации не более чем счетно, причем в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, а в каждой точке разрыва $x_0 \in (a, b]$ существует $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.*

Следствие 2.3. *Функция конечной вариации для п.в. $x \in [a, b]$ имеет конечную производную $f'(x)$, причем $f' \in L_1(a, b)$.*

Теорема 2.6. *(Принцип выбора Хелли. Вторая теорема Хелли.) Из всякой ограниченной в $BV[a, b]$ последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, которая для всех $x \in [a, b]$ сходится к $f \in BV[a, b]$. При этом*
$$\sup_{[a,b]} |f(x)| \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \sup_{[a,b]} |f_n(x)|, \tag{2.5}$$
$$\underset{[a,b]}{\mathrm{var}}\, f \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \underset{[a,b]}{\mathrm{var}}\, f_n. \tag{2.6}$$

Доказательство. Предположим сначала, что все функции f_n неубывающие. Пусть $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[a, b]$. Используя диагональный процесс Кантора, выберем из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся во всех рациональных точках. Ее пределом будет неубывающая функция f, определенная в рациональных точках.Доопределим ее в иррациональных точках, принадлежащих $(a, b]$ значением

$$f(x) = \sup_{q_k < x} f(q_k).$$

Покажем, что полученная таким образом неубывающая функция f во всех своих точках непрерывности x_* является пределом последовательности $\{f_{n_k}(x_*)\}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|f(x') - f(x_*)| < \varepsilon/6$ для всех $x' \in (x_* - \delta(\varepsilon), x_* + \delta(\varepsilon))$. Выберем рациональные q', q'' такие, что

$$x_* - \delta(\varepsilon) < q' < x_* < q'' < x_* + \delta(\varepsilon).$$

Пусть теперь k настолько велико, что $|f_{n_k}(q') - f(q')| < \varepsilon/6$ и $|f_{n_k}(q'') - f(q'')| < \varepsilon/6$. Тогда

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(q'') - f_{n_k}(q')| \leqslant |f_{n_k}(q'') - f(q'')| + |f(q'') - f(x_*)| + \\ + |f(x_*) - f(q')| + |f(q') - f_{n_k}(q')| < 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Так как функция f_{n_k} неубывающая, то

$$|f_{n_k}(x_*) - f_{n_k}(q')| \leqslant |f_{n_k}(q'') - f_{n_k}(q')| \leqslant 2\varepsilon/3.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &|f(x_*) - f_{n_k}(x_*)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_*) - f(q')| + |f(q') - f_{n_k}(q')| + |f_{n_k}(q') - f_{n_k}(x_*)| < \\ &< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x_*) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_*)$ во всех точках непрерывности функции f.

Так как функция f монотонна, то множество E ее точек разрыва не более чем счетно. Выберем из последовательности $\{f_{n_k}\}$ подпоследовательность $\{f'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в точках $x \in E$. Последовательность $\{f'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится теперь во всех точках $x \in [a, b]$. Переопределяя функцию f значением $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f'_{n_k}(x)$ для $x \in E$, получим желаемый результат. Заметим, что функция f монотонна.

Рассмотрим теперь общий случай. Представим каждую из функций f_n в виде разности двух неубывающих функций $f_n = v_n - \varphi_n$, где

$$v_n(x) = \mathrm{var}_{[a,x]} f_n, \quad \varphi_n(x) = \mathrm{var}_{[a,x]} f_n - f_n(x).$$

Как нетрудно видеть, последовательности $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничены в $BV[a,b]$.

Выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\} = \{v_{n_k} - \varphi_{n_k}\}$ так, чтобы для всех $x \in [a,b]$ существовали пределы $v(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_{n_k}(x)$ и $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x)$ и положим $f(x) = v(x) - \varphi(x)$.

Из неравенства

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sup_{[a,b]} |f_n(x)|$$

следует неравенство (2.5).

Из неравенства

$$\sum_{j=1}^{N} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |f_n(x_{j+1}) - f_n(x_j)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \mathrm{var}_{[a,b]} f_n$$

следует неравенство (2.6).

Теорема доказана.

3 ИНТЕГРАЛ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Пусть f, g – заданные на $[a, b]$ ограниченные функции. Обозначим через $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$. Выберем произвольные $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и построим интегральную сумму

$$\sigma(T, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Предположим, что существует число I такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого T, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1}) < \delta(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|\sigma(T, f, g) - I| < \varepsilon.$$

Тогда число I называется интегралом Римана-Стилтьеса от функции f по функции g и обозначается

$$\int_a^b f(x)dg(x). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Если существуют интегралы*

$$\int_a^b f_1(x)dg(x), \quad \int_a^b f_2(x)dg(x),$$

то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x)dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

Если существуют интегралы

$$\int_a^b f(x)dg_1(x), \quad \int_a^b f(x)dg_2(x),$$

то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_a^b f(x)d(\alpha g_1 + \beta g_2)(x) = \alpha \int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

Теорема 3.2. *Пусть $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$. Тогда интеграл (3.1) существует.*

Доказательство. Заметим, что из теоремы о представлении функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций следует, что достаточно доказать теорему в случае, когда g – неубывающая функция.

Определим нижнюю и верхнюю интегральные суммы

$$s(T,f,g) = \sum_{i=1}^{n} m_i[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$
$$S(T,f,g) = \sum_{i=1}^{n} M_i[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

где

$$m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Ясно, что

$$s(T,f,g) \leqslant S(T,f,g).$$

Заметим, что при добавлении к разбиению T дополнительной точки нижняя интегральная сумма не убывает, а верхняя не возрастает.

Пусть теперь T_1 и T_2 – два произвольных разбиения. Положим $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда

$$s(T_1,f,g) \leqslant s(T_3,f,g) \leqslant S(T_3,f,g) \leqslant S(T_2,f,g). \tag{3.2}$$

Положим

$$I = \sup_T s(T,f,g).$$

Из (3.2) следует, что

$$s(T,f,g) \leqslant I \leqslant S(T,f,g)$$

для всех T. Следовательно

$$|\sigma(T,f,g)-I| \leqslant S(T,f,g)-s(T,f,g) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})].$$

В силу равномерной непрерывности функции f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $M_i - m_i < \varepsilon$, если $x_i - x_{i-1} < \delta(\varepsilon)$. Поэтому для всякого разбиения T, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) < \delta(\varepsilon)$, имеем

$$|\sigma(T,f,g) - I| < [g(b) - g(a)]\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *(Теорема о среднем.) Пусть функция f ограничена, $g \in BV[a,b]$ и интеграл (3.1) существует. Тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \operatorname*{var}_{[a,b]} g. \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметим, что

$$|\sigma(T,f,g)| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \operatorname*{var}_{[a,b]} g.$$

Предельный переход в этом неравенстве дает (3.3).

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *(Формула интегрирования по частям.) Если существует один из интегралов $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$, $\int\limits_a^b g(x)df(x)$, то существует и другой, причем*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = -\int\limits_a^b g(x)df(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{3.4}$$

Доказательство. Предположим, что существует второй из интегралов. Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $\xi_0 = x_0$, $\xi_{n+1} = x_n$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})g(x_i) =$$

$$-\sum_{i=0}^{n}[f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)]g(x_i) + f(\xi_{n+1})g(x_n) - f(\xi_0)g(x_0)$$

и обратим внимание на то, что

$$\sum_{i=0}^{n}[f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)]g(x_i)$$

можно рассматривать как интегральную сумму для $\int\limits_a^b g(x)df(x)$

Так как $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\xi_{i+1}-\xi_i) \leqslant 2\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$, то из существования предела второй интегральной суммы следует существование предела первой и равенство (3.4).

Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Пусть $a<c<b$. Если существует интеграл (3.1), то существуют интегралы*

$$\int\limits_a^c f(x)dg(x), \quad \int\limits_c^b f(x)dg(x) \tag{3.5}$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x). \tag{3.6}$$

Доказательство. Обозначим через $\underline{I}_n$ и $\overline{I}_n$ точную нижнюю и точную верхние грани значений интегральных сумм, отвечающих интегралу $\int\limits_a^b f\,dg$ с $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(x_i-x_{i-1}) < 1/n$. (Точка c включена в разбиение.)

Через $\underline{I}_n^1$, $\overline{I}_n^1$ и $\underline{I}_n^2$, $\overline{I}_n^2$ обозначим аналогичные точные нижние и точные верхние грани значений интегральных сумм, отвечающих интегралам $\int\limits_a^c f\,dg$ и $\int\limits_c^b f\,dg$ соответственно.

Заметим, что

$$\underline{I}_n \leqslant \underline{I}_n^1 + \underline{I}_n^2 \leqslant \overline{I}_n^1 + \overline{I}_n^2 \leqslant \overline{I}_n. \tag{3.7}$$

В силу существования интеграла $\int\limits_a^b f\,dg$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n = \int\limits_a^b f\,dg.$$

Поэтому

$$\overline{I}_n^1 - \underline{I}_n^1 \to 0, \quad \overline{I}_n^2 - \underline{I}_n^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку последовательности $\overline{I}_n^1$, $\underline{I}_n^1$, $\overline{I}_n^2$, $\underline{I}_n^2$ монотонны, существуют пределы

$$I^1 = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n^1 = \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n^1, \quad I^2 = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n^2 = \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n^2.$$

Ясно, что

$$I^1 = \int\limits_a^c f\,dg, \quad I^2 = \int\limits_c^b f\,dg.$$

и из (3.7) следует равенство (3.6).

Теорема доказана.

Замечание 3.1. *Из существования интегралов (3.5) не следует существование интеграла (3.1). Рассмотрим соответствующий пример. Пусть f, g определены на $[-1, 1]$ формулами*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\int\limits_{-1}^0 f(x)dg(x) = 0, \quad \int\limits_0^1 f(x)dg(x) = 0.$$

Пусть $-1 = x_0 < \dots < x_m < 0 < x_{m+1} < \dots x_n = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] = f(\xi_{m+1}) = \begin{cases} 0, & \xi_{m+1} > 0, \\ 1, & \xi_{m+1} < 0. \end{cases}$$

Поэтому предела интегральных сумм не существует.

Теорема 3.6. *Пусть $f \in C[a,b]$, а функция g дифференцируема на $[a,b]$, причем ее производная g' интегрируема по Риману на $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f\,dg = (R)\int\limits_a^b fg'\,dx. \tag{3.8}$$

Доказательство. Производная g' интегрируема по Риману и поэтому ограничена. Значит, $g \in BV[a,b]$ и интеграл, стоящий в левой части равенства (3.8) существует. Из интегрируемости по Риману функции g' следует, что функция fg' ограничена и непрерывна почти всюду. Следовательно интеграл, стоящий в правой части равенства (3.8), также существует.

В силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Составим интегральную сумму для правого интеграла, взяв за промежуточные точки именно точки ξ_j и получим равенство

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)[g(x_j) - g(x_{j-1})]. \tag{3.9}$$

Переходя в нем к пределу при $\lim\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j - x_{j-1}) \to 0$, получим (3.8).

Теорема доказана.

Теорема 3.7. *Пусть $f \in C[a,b]$, а функция g определена на $[a,b]$ и постоянна на каждом из интервалов (a,c_1), (c_1,c_2), ..., (c_m,b), где*

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_m < b.$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f\,dg = f(a)[g](a) + \sum_{j=1}^{m} f(x_j)[g](c_j) + f(b)[g](b). \tag{3.10}$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^{c_1} f\,dg + \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{c_j}^{c_{j+1}} f\,dg + \int\limits_{c_m}^{b} f\,dg.$$

Заметим, что

$$\int\limits_a^{c_1} f\,dg = f(a)(g(a+0)-g(a)) + f(c_1)(g(c_1)-g(c_1-0)),$$
$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f\,dg = f(c_1)(g(c_1+0)-g(c_1)) + f(c_2)(g(c_2)-g(c_2-0)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int\limits_{c_m}^{b} f\,dg = f(c_m)(g(c_m+0)-g(c_m)) + f(b)(g(b)-g(b-0)).$$

Складывая эти равенства, приходим к (3.10).

Теорема доказана.

Теорема 3.8. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$, $f \in C[a,b]$ *и* $g \in BV[a,b]$. *Если* $f_n \to f$ *в* $C[a,b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f_n\,dg \to \int\limits_a^b f\,dg.$$

Доказательство. В силу теоремы о среднем

$$\left|\int\limits_a^b f_n\,dg - \int\limits_a^b f\,dg\right| \leqslant \|f_n - f\|_{C[a,b]} \mathrm{var}_{[a,b]} g \to 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.9. *(Первая теорема Хелли.) Пусть* $f \in C[a,b]$ *и* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset BV[a,b]$, *причем* $g_n(x) \to g(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$ *и* $\operatorname*{var}\limits_{[a,b]} g_n \leqslant K$ *для всех* $n \geqslant 1$. *Тогда* $g \in BV[a,b]$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dg_n(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Доказательство. Ясно, что $g \in BV[a,b]$ и $\operatorname*{var}\limits_{[a,b]} g \leqslant K$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и разобъем отрезок $[a,b]$ на такие подотрезки, на которых колебание функции f меньше $\dfrac{\varepsilon}{3K}$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dg(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]dg(x) + \sum_{i=1}^n f(x_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dg(x)$$

Ясно, что

$$\left| \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]dg(x) \right| \leqslant \varepsilon/3.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \theta\varepsilon, \quad |\theta| \leqslant 1/3.$$

Аналогично

$$\int\limits_a^b f(x)dg_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)[g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] + \theta_n\varepsilon, \quad |\theta_n| \leqslant 1/3.$$

Но для $n > N(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)[g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \right| < \varepsilon/3.$$

Как следствие,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dg_n(x) - \int\limits_a^b f(x)dg(x) \right| < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.10. *(Ф. Рисс) Для всякого функционала $F \in (C[a,b])^*$ существует функция $g \in BV[a,b]$ такая, что*

$$F(f) = \int\limits_a^b f(x)dg(x) \quad \forall f \in C[a,b],$$

причем $\operatorname*{var}\limits_{[a,b]} g = \|F\|$.

4 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Опр. Функция f, заданная на отрезке $[a,b]$, называется *абсолютно непрерывной* на нем, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k\geqslant 1} \subset [a,b]$ с суммой длин, меньшей $\delta(\varepsilon)$ (то есть такая, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$), для нее выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Множество абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций будем обозначать $AC[a,b]$. Ясно, что $AC[a,b]$ – линейное пространство.

Утверждение 4.1. $AC[a,b] \subset C[a,b]$.

Замечание 4.1. *Из того, что $f \in C[a,b]$, не следует, что $f \in AC[a,b]$. Действительно, рассмотрим функцию Кантора τ. Пусть K – канторово множество. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как K имеет нулевую меру, то существует открытое множество G_ε с мерой меньше ε такое, что $K \subset G_\varepsilon$. Так как G_ε является объединением семейства непересекающихся интервалов, то в силу леммы Гейне - Бореля из этого семейства можно выделить конечный набор интервалов (α_n, β_n) такой, что $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N}(\alpha_n, \beta_n)$.*

Заметим, что $\tau(x)$ постоянна на отрезках $[\beta_n, \alpha_{n+1}]$. Поэтому

$$1 = \tau(1) - \tau(0) = \tau(1) - \tau(\beta_1) + \sum_{k=2}^{n-1}[\tau(\beta_k) - \tau(\alpha_k)] + \tau(1) - \tau(\alpha_n).$$

Замечание 4.2. *Заметим, что $C^1[a, b] \subset [a, b]$ и $Lip[a, b] \subset AC[a, b]$.*

Утверждение 4.2. *$AC[a, b] \subset BV[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $f \in AC[a, b]$. Фиксируем $\varepsilon_0 > 0$ и разобъем отрезок $[a, b]$ на N подотрезков $[a_k, b_k]$ длины меньше $\delta(\varepsilon_0)$. Для каждого подотрезка при выборе $a_k = x_0 < x_1 < \dots x_N = b_k$ имеем

$$\sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \varepsilon_0.$$

Отсюда $\underset{[a_k,b_k]}{\operatorname{var}} f \leqslant \varepsilon_0$. Следовательно $\underset{[a,b]}{\operatorname{var}} f \leqslant N\varepsilon_0$.

Утверждение доказано.

Утверждение 4.3. *Пусть $f \in AC[a, b]$. Тогда $|f| \in AC[a, b]$.*

Утверждение 4.4. *Пусть $f, g \in AC[a, b]$. Тогда $f \cdot g \in AC[a, b]$. Если дополнительно $|g(x)| \geqslant c_0 > 0$, то $f/g \in AC[a, b]$.*

Утверждение 4.5. *Пусть $a < c < b$. Тогда $f \in AC[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f \in AC[a, c]$ и $f \in AC[c, b]$.*

Теорема 4.1. *Пусть $f \in AC[a, b]$, $g \in AC[\alpha, \beta]$, причем g монотонна и $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$. Тогда суперпозиция $\varphi(x) = f(g(x))$ абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$.*

Доказательство. Пусть δ_f и δ_g – величины, входящие в определение абсолютной непрерывности функций f и g. При фиксированном $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \delta_g(\delta_f(\varepsilon))$. Тогда для любой системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k\geqslant 1} \subset (\alpha, \beta)$ с суммой длин, меньшей δ, выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}[g(b_k) - g(a_k)] < \delta_g(\varepsilon).$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} |f(g(b_k)) - f(g(a_k))| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Утверждение 4.6. *Пусть $f \in AC[a, b]$. Тогда*

$$v(x) = \operatorname*{var}_{[a,x]} f \in AC[a, b].$$

Доказательство. Пусть $\{(a_k, b_k)\}_{k\geqslant 1} \subset [a, b]$ – система попарно непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta(\varepsilon)$. Тогда, выполнив разбиение каждого из них, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_k} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{var}_{[a_k,b_k]} f = \sum_{k=1}^{n}(v(b_k) - v(a_k)) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{var}_{[a_k,b_k]} f \leqslant \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

Следствие 4.1. *Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция может быть представлена в виде разности двух неубывающих абсолютно непрерывных функций.*

Утверждение 4.7. *Пусть $f(x) = \int\limits_a^x g(s)\, ds + c$, где $g \in L_1(a, b)$. Тогда $f \in AC[a, b]$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{a_k}^{b_k} |g(s)|\, ds$$

и воспользоваться абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

Утверждение доказано.

Теорема 4.2. *$f \in AC[a,b]$ тогда и только тогда, когда существуют функция $g \in L_1(a,b)$ и постоянная c такие, что*

$$f(x) = \int\limits_{a}^{x} g(s)\, ds + c, \quad x \in [a,b].$$

При этом $g(x) = f'(x)$ почти всюду на $[a,b]$.

Следствие 4.2. *Если $f \in AC[a,b]$, то*

$$f(b) - f(a) = \int\limits_{a}^{b} f'(x)\, dx.$$

Лемма 4.1. *Если $f, g \in AC[a,b]$, то*

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{4.1}$$

почти всюду на $[a,b]$.

Теорема 4.3. *Пусть $f, g \in AC[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g'(x)\, dx = -\int\limits_{a}^{b} f'(x)g(x)\, dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Доказательство. Нужно воспользоваться формулой (4.1).

Теорема 4.4. *Пусть $f \in L_1(a,b)$, g абсолютно непрерывна, монотонна и $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$. Тогда $f(g)g' \in L_1(\alpha,\beta)$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(s))g'(s)\,ds.$$

Замечание 4.3. *Пространство $AC[a,b]$ является нормированным с*

$$\|f\|_{AC[a,b]} = \|f\|_{L_1(a,b)} + \|f'\|_{L_1(a,b)}.$$

Этой норме эквивалентны нормы

$$\|f\|_{AC[a,b]} = \|f\|_{C[a,b]} + \|f'\|_{L_1(a,b)},$$
$$\|f\|_{AC[a,b]} = |f(a)| + \|f'\|_{L_1(a,b)}.$$

Теорема 4.5. *Пространство $AC[a,b]$ банахово.*

Доказательство. Заметим, что из равенства

$$f(x) = f(y) + \int\limits_y^x f'(x)\,dx$$

следует оценка

$$\|f\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{1}{b-a}\|f\|_{L_1(a,b)} + \|f'\|_{L_1(a,b)}.$$

Пусть теперь $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная в $AC[a,b]$ последовательность. Тогда $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $C[a,b]$ к некоторой функции f, а $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ сходится в $L_1(a,b)$ к некоторой функции g.

Переходя к пределу в равенстве

$$f_n(x) = f_n(a) + \int\limits_a^x f_n'(s)\,ds,$$

имеем

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(s)\,ds.$$

Таким образом, $f \in AC[a,b]$, $g = f'$ и $f_n \to f$ в $AC[a,b]$.

Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Пусть* $f \in AC[a,b]$. *Тогда*

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f = \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f \leqslant \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Пусть $f \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f \geqslant \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |f'(\xi_j)|(x_j - x_{j-1})$$

Переходя к пределу при $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j - x_{j-1}) \to 0$, получим

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f \geqslant \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Пусть теперь $f \in AC[a,b]$. Продолжим функцию f, положив $f(x) = f(a)$ для $x < a$ и $f(x) = f(b)$ для $x > b$. Построим осреднение f_h. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^n |f_h(x_j) - f_h(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(x_j + y) - f(x_{j-1} + y))\omega_h(y)\,dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n |f(x_j + y) - f(x_{j-1} + y))|\omega_h(y)\,dy \leqslant \operatorname{var}_{[a,b]} f.$$

Таким образом,

$$\operatorname{var}_{[a,b]} f_h = \int\limits_a^b |f_h'(x)|\,dx \leqslant \operatorname{var}_{[a,b]} f.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$\int\limits_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant \operatorname{var}_{[a,b]} f.$$

Теорема доказана.

Замечание. Нужно показать, что $(f_h)' = (f')_h$. Это верно, так как из

$$f_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\omega_h(y-x)\,dy$$

следует, что

$$(f_h)'(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\omega_h'(y-x)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(y)\omega_h(y-x)\,dy = (f')_h(x).$$