Домашнее задание №10.

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, 6, ~~7~~, 9

№3.1

Д-ть: $\forall$ вполне огр мн-во ограничено.

Д-во: П A - вполне огр $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ для ε $\exists$ ε-сеть $B_\varepsilon = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
$x \in A \Rightarrow \exists\, b_k \in B_\varepsilon : \rho(x, b_k) \le \varepsilon$

$$\rho(x, b_1) \le \rho(b_k, b_1) + \rho(x, b_k) \le \underbrace{\max_{1\le k\le n} \rho(b_k, b_1) + \varepsilon}_{r} \Rightarrow A \subset cl\, B_r(b_1)$$

ЧТД.

№3.2
шар в

Д-ть: l_2 - огр, но не вполне огр.

Д-во: $B_1(0) = \{x \in l_2 : [\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2]^{1/2} \le 1\}$. П $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(e_i, e_j) = \sqrt{2}$, $i \ne j$ $\Rightarrow$ если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B_1(0)$ и, если $B_1(0)$ - компакт,
то $\exists \{e_{j_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{e_j\}_{j=1}^{\infty} : \exists \lim_{m\to\infty} e_{j_m} \Rightarrow \{e_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow \rho(e_{j_m}, e_{j_n}) < \varepsilon$
$\forall n, m > N(\varepsilon)$, но $\rho(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ противоречие. $\Rightarrow$ шар не компакт и даже не предкомп. В полном метр. пр-ве предкомпакт $\Leftrightarrow$ вполне огр $\Rightarrow$ шар не вполне огр. мн-во.

ЧТД.

№3.3

A - ε-сеть для B. A -? ε-сеть для $cl\, B$.

Решение: П $B = (0, 1]$, $A = (\varepsilon, 1+\varepsilon] \Rightarrow \forall x \in B\ \exists\, y = x + \varepsilon \in A : |x - y| < \varepsilon \Rightarrow$
A - ε-сеть для B. В то же время $cl\, B = [0, 1] \Rightarrow 0 \in cl\, B \Rightarrow |y - 0| > \varepsilon\ \forall y \in A$
$\Rightarrow A$ не ε-сеть для $cl\, B$.

Ответ: нет

№3.4

A - ε-сеть для B (1); B - ε-сеть для C (2)

Д-ть: A - 2ε сеть для C.

Д-во: (2) $\Rightarrow \exists\, b \in B\ \forall c \in C : \rho(b, c) \le \varepsilon$; (1) $\Rightarrow \forall b \in B\ \exists\, a \in A : \rho(a, b) \le \varepsilon$
$\Rightarrow \forall c \in C\ \exists\, a \in A : \rho(a, c) \le \rho(a, b) + \rho(b, c) \le 2\varepsilon$

ЧТД.

№3.5

Д-ть: ∀ вполне огр. метр. пр-во M - сепарабельно.

Д-во: M - вполне огр $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ для M $\exists$ ε-сеть A_ε : $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ - счётное

$x \in M \Rightarrow \forall n \geq 1 \; \exists \, a_n \in A_{\frac{1}{n}} : \rho(x, a_n) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Rightarrow A$ всюду плотно в M. $\Rightarrow M$ - сепарабельно.

ЧТД.

№3.7

Д-ть: M - сепар $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ для M $\exists$ не более чем счётная ε-сеть A_ε

Д-во: ⊜ $\forall \varepsilon > 0$ для M $\exists$ не более чем счётная ε-сеть $\Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ - счётное всюду плотное (№3.5) в $M \Rightarrow M$ - сепар.

⊜ M - сепар $\Rightarrow \exists A$ счётное всюду плотное : $A \subset M \Rightarrow A$ - ε-сеть $\forall \varepsilon > 0$.

ЧТД.

Теорема 7.1

$\forall f \in C(K)$ - огр. и достигает и достигает своих точных верхней и нижней граней.

Д-во: П $f \in C(K)$ $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K : \sup\limits_{x \in K} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

K - компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_{n_j} \to x_0 \in K$. $f \in C(K) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in K} f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x_0) \Rightarrow f$ - огр. сверху и достигает своей точной верхней грани. Аналогично док-ся, что f - огр. снизу и достигает инфинума.

ЧТД.

Теорема 7.2

$\forall f \in C(K)$ - равн. непр.

Д-во: f - равн. непр $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \;\; \forall x', x'' \in K : \rho(x', x'') < \delta(\varepsilon)$

П $f \in C(K)$, но не равн. непр. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ и $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n''\}_{n=1}^{\infty} \subset K$:

$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon : \rho(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}$. $\forall \{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \; \exists \{x_{n_j}'\}_{j=1}^{\infty} : x_{n_j}' \to x_0 \in K$

$x_{n_j}'' \to x_0$. $|f(x_{n_j}') - f(x_{n_j}'')| \geq \varepsilon$ в пределе даст: $0 = |f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow f$ - равн. непр.

ЧТД.

Теорема 7.3

$C(K)$ - полное метр. пр-во

Д-во: П $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$:

$\rho(f_n, f_m) = \max\limits_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow \forall x \in K \ \exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

$m \to \infty \Rightarrow \forall x \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon)$.

f_n - непр. в $x_0 \in K \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0: |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in B_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \ \forall x \in B_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$

$\Rightarrow f \in C(K)$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f_n, f) = \max\limits_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \le 3\varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow C(K)$ - полное

ЧТД.

(4) из Д.з. 8

Д-в: $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3} u(x^2) + \frac{1}{3} v(x^2) + x^3 \\ v(x) = \frac{1}{3} u(x^3) - \frac{1}{3} v(x^3) - x^2 \end{cases}$ имеет ! реш. $(u, v) \in C[0,1] \times C[0,1]$

Д-во: $\exists\, \varphi : M \to M$, где $M = C[0,1] \times C[0,1]$

$$\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} u(x^2) + \frac{1}{3} v(x^2) + x^3 \\ \frac{1}{3} u(x^3) - \frac{1}{3} v(x^3) - x^2 \end{pmatrix}$$

Определим норму на M: $\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|_M = \|u\|_{C[0,1]} + \|v\|_{C[0,1]}$

$$\rho\left(\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}\right) = \left\|\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}\right\|_M = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{3} u(x^2) + \frac{1}{3} v(x^2) - \frac{1}{3} \xi(x^2) - \frac{1}{3} \varsigma(x^2) \\ \frac{1}{3} u(x^3) - \frac{1}{3} v(x^3) - \frac{1}{3} \xi(x^3) + \frac{1}{3} \varsigma(x^3) \end{matrix}\right\|_M =$$

$$= \frac{1}{3} \|u(x^2) + v(x^2) - \xi(x^2) - \varsigma(x^2)\|_{C[0,1]} + \frac{1}{3} \|u(x^3) - v(x^3) - \xi(x^3) + \varsigma(x^3)\|_M \le$$

$$\le \frac{1}{3} \|u(x^2) - \xi(x^2)\|_{C[0,1]} + \frac{1}{3} \|v(x^2) - \varsigma(x^2)\|_{C[0,1]} + \frac{1}{3} \|u(x^3) - \xi(x^3)\|_{C[0,1]} + \frac{1}{3} \|v(x^3) - \varsigma(x^3)\|_{C[0,1]}$$

$$= \frac{2}{3} \|u - \xi\|_{C[0,1]} + \frac{2}{3} \|v - \varsigma\|_{C[0,1]} = \frac{2}{3} \left\|\begin{pmatrix} u - \xi \\ v - \varsigma \end{pmatrix}\right\|_M = \frac{2}{3} \rho\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix}\right) \Rightarrow$$ по

принципу сжим. отобр решение $\exists$ и !

ЧТД