Домашнее задание №6

~~4.6~~, ~~4.10~~, ~~4.11~~, ~~4.19~~, ~~4.24~~ (39, 40); ~~3.11~~, ~~3.14~~, ~~4.2~~, ~~4.4~~, ~~4.9~~ (19, 20)

№3.11

Д-з: $\Phi = \{(x,y): y = kx + b,\ 0 \le k \le 1,\ 0 \le b \le 1\}$ - компакт в $C[0,1]$.

Д-во: $\forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{k_n x + b_n\}_{n=1}^{\infty}:\ 0 \le k_n \le 1,\ 0 \le b_n \le 1$

$\exists$ есть подпосл-ть вида $(k_{n_m}, b_{n_m}) \to (k_0, b_0) \in [0,1]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(y_{n_m}, y_0) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |k_{n_m} x + b_{n_m} - k_0 x - b_0| \le |k_{n_m} - k_0| + |b_{n_m} - b_0| \to 0$

$\Rightarrow y_{n_m} = k_{n_m} x + b_{n_m} \to k_0 x + b_0 = y_0$ в $C[0,1] \Rightarrow \Phi$ - компакт

ч.т.д.

№3.14

Д-з: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ - компакт, где K_i - компакт; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ - предкомпакт, где P_i - предкомп.

Д-во: 1) $\forall \{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \Rightarrow \exists \{k_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset K_m$, где K_m - компакт

$\Rightarrow \exists \{k_{n_{m_j}}\}_{j=1}^{\infty}: k_{n_{m_j}} \to k \in K_m \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ - компакт

2) $\forall \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \Rightarrow \exists \{p_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset P_m$, где P_m - предкомпакт $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ сходящаяся $\{p_{n_{m_j}}\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ - предкомпакт

ч.т.д.

№4.2

$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \overset{?}{-}$ метрика на $\mathbb{R}$

Решение: Проверим аксиомы метрики:

1) $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \ge 0$ - верно

2) $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ - верно

3) $\rho(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = \rho(x,y)$ - верно

4) $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \le |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$

$= \rho(x,z) + \rho(z,y)$ - верно

1), 2), 3), 4) $\Rightarrow \rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ - метрика

№4.4

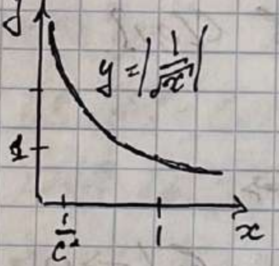
$\exists \langle M, \rho \rangle$ - дискр. метр. пр-во $\Rightarrow \rho = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Фиксируем $\varepsilon = 1/2$, $\forall a \in A \subset M \Rightarrow B_{1/2}(a)$ содержит только точку $a \Rightarrow B_{1/2}(a) \subset A \Rightarrow A$ - откр. мн-во.

№4.6

$f \in R[a,b]$; $f \overset{?}{\in} L_\infty(a,b)$

Рассмотрим $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$: $(R)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \in R[0,1]$



$\exists\ |f| \le C \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = C \Rightarrow x = \frac{1}{C^2} > 0 \Rightarrow$ можно выбрать $C_1 : C_1 < \frac{1}{C^2}$, тем самым мы увеличим „верхнюю границу" $\Rightarrow |f|$ не сущ. огр $\Rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{x}} \notin L_\infty(0,1)$

Ответ: нет

№4.10

$f_n, f \in L_1(E) \cap L_\infty(E)$; $f_n \xrightarrow{L_1(E)} f$, $\sup\limits_{n \ge 1} \|f_n\|_{L_\infty(E)} < \infty$

Д-ть: $f_n \xrightarrow{L_p(E)} f\ \forall p \in (1, \infty)$; $\|f_n - f\|_{L_\infty(E)} \overset{?}{\to} 0$

Д-во: $f_n, f \in L_1(E) \cap L_\infty(E) \Rightarrow \begin{cases} f, f_n \in L_1(E) \\ f, f_n \in L_\infty(E) \end{cases} \Rightarrow$ в силу линейности пр-в $\begin{cases} f_n - f \in L_1(E) \\ f_n - f \in L_\infty(E) \end{cases}$; $f_n - f \in L_\infty(E) \Rightarrow |f_n - f| \le \|f_n - f\|_{L_\infty(E)} < \infty$

По т. 7.2 из условия $f_n - f \in L_1(E) \cap L_\infty(E) \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p(E)} \le \|f_n - f\|^{\alpha}_{L_1(E)} \|f_n - f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(E)} =$
$= \|f_n - f\|^{1/p}_{L_1(E)} \cdot \|f_n - f\|^{1 - 1/p}_{L_\infty(E)}$ $\left\{ f_n \xrightarrow{L_1(E)} f \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_1(E)} \to 0 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_{L_p(E)} \le \|f_n - f\|^{1/p}_{L_1(E)} \cdot \|f_n - f\|^{1-1/p}_{L_\infty(E)} \to 0\ \forall p \in (1, \infty) \Rightarrow f_n \xrightarrow{L_p(E)} f\ \forall p \in (1, \infty)$.

ч.т.д.

$f_n \to f$ в $L_\infty(E)$?

По нер-ву Чебышёва: $\|f_n - f\|_{L_\infty(E)} \le \sup\limits_{n \ge 1} (|f_n - f|) \le \|f_n - f\|_{L_1(E)} \to 0$
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_\infty(E)} f$

№4.9

$F_1, F_2 \subset M$; F_1, F_2 — компакты! : $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

Д-ть: $\rho(F_1, F_2) = \inf\limits_{x\in F_1,\, y\in F_2} \rho(x,y) > 0$

Д-во: Очевидно, что $\rho(F_1, F_2) \geq 0$. П $x \in F_1$, тогда $\rho(x, F_2) = \inf\limits_{y\in F_2} \rho(x,y) > 0$. Если бы было равенство, тогда т. x — предельная точка мн-ва F_2, но F_2 — компакт => F_2 — замкн. и огр. => в силу замкнутости F_2: $x \in F_2$ => $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, что противоречит условию. Аналогично $\forall y \in F_2$: $\rho(F_1, y) = \inf\limits_{x\in F_1} \rho(x,y) > 0$

=> $\rho(F_1, F_2) = \inf\limits_{x\in F_1,\, y\in F_2} \rho(x,y) > 0$ чтд.

№4.10

f-огр., неотр. ф-ия: $f \in \mathfrak{M}(E_1)$, $E_1 = [a,b]$; $E = \{(x,y) : a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\}$

Д-ть: E — изм; Найти: μE — ?

Д-во: $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{(x,y) : a \le x \le b,\ \frac{1}{i} \le y \le f(x)\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ => $\forall i$ $\mu_* E_i = 0$;

$\mu^* E_i = \frac{1}{i}\int_a^b f(x)dx$. Рассмотрим $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$: $Q_i = [x_i, x_i + \Delta x[\times [y_i, y_i + \Delta y]$

=> $\forall i$ $\exists j$: E_j включает в себе часть Q_i, которая выше Ox (иначе Q_i содержится в обл-ти, где $y = 0$ => $\mu Q_i = 0$)

=> $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu Q_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0$: $\forall i > N(\varepsilon)$: $\Delta y_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ => $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \Delta x_i \Delta y_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta x_i \Delta y_i + \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \Delta x_i \Delta y_i < \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta x_i \Delta y_i + \varepsilon = \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$

=> $\inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu Q_i : E \subset (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i)\} \le \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. В то же время $\forall i \le N$ $Q_i \subset E_i$ => $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu Q_i \le \int_a^b f(x)dx$ =>

$\sup\{\sum\limits_{i=1}^{N} \mu Q_i : Q_i \subset E_i\} \le \int_a^b f(x)dx$ $\forall \{Q_i\}_{i=1}^{N} \subset E$ => $\mu_* E = \int_a^b f(x)dx$

=> E — измеримо => $\mu E = \int_a^b f dx$.

№4.11

$f, f_n \in L_1(E)$; $g, g_n \in L_\infty(E)$; $f_n \xrightarrow{L_1(E)} f$, $g_n \to g$ почти $\forall x \in E$, $\sup\limits_{n\ge 1} \|g_n\|_{L_\infty(E)} < \infty$

Д-ть: $f_n g_n \xrightarrow{L_1(E)} fg$

Д-во: $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$ => $\|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} \le \|f_n(g_n - g)\|_{L_1(E)} + \|g(f_n - f)\|_{L_1(E)} \le \|f_n\|_{L_1(E)} \|g_n - g\|_{L_\infty(E)} + \|f_n - f\|_{L_1(E)} \|g\|_{L_\infty(E)} \to \|f_n\|_{L_1(E)} \|g_n - g\|_{L_\infty(E)}$,

т.к. $\|f_n - f\|_{L_1(E)} \to 0$, а $\|g\|_{L_\infty(E)} < \infty$.

$\|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} \to \|f_n\|_{L_1(E)} \|g_n - g\|_{L_\infty(E)}$

$g_n \to g$ почти $\forall x \in E \Rightarrow |g_n - g| \to 0$ почти $\forall x \in E$

$\left.\begin{array}{l} g_n, g \in L_\infty(E) \Rightarrow g_n - g \in L_\infty(E) \Rightarrow \exists \text{ ess sup } |g_n - g| < \infty \\ \quad |g_n - g| \to 0 \text{ почти } \forall x \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \|g_n - g\|_{L_\infty(E)} \to 0$

$\Rightarrow \|f_n\|_{L_1(E)} \|g_n - g\|_{L_\infty(E)} \to 0 \Rightarrow \|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} \to 0 \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{L_1(E)} fg$

ЧТД.

№ 4.24

$f \in L_1(E) \cap L_\infty(E)$; $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Д-ть: $\|f\|_{L_p(E)} \|f\|_{L_q(E)} \le \|f\|_{L_1(E)} \cdot \|f\|_{L_\infty(E)}$

Д-во: $f \in L_1(E) \cap L_\infty(E) \Rightarrow \|f\|_{L_1(E)} < \infty$, $\|f\|_{L_\infty(E)} < \infty$

$\left.\begin{array}{l} p \in [1, \infty] \text{ и } f \in L_1(E) \cap L_\infty(E) \Rightarrow \text{по т. 7.2 имеем: } \|f\|_p \le \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \\ q \in [1, \infty] \Rightarrow \text{аналогично имеем: } \|f\|_q \le \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_\infty^{1-\frac{1}{q}} \end{array}\right\} \Rightarrow$

($\|f\|_{L_q(E)} = \|f\|_q$. Аналогично написал и другие нормы)

$\Rightarrow \|f\|_p \cdot \|f\|_q \le \|f\|_1^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}} = \|f\|_1 \cdot \|f\|_\infty$

ЧТД.