

Свойства операции замыкания

Напомним, что $\overline{E} = [E] = E \cup E'$, где E' – множество предельных для E точек.

Теорема 2.3. Справедливы следующие свойства операции замыкания:

- 1) $[[E]] = [E]$,
- 2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow [E_1] \subset [E_2]$,
- 3) $[E_1 \cup E_2] = [E_1] \cup [E_2]$,
- 4) $[E_1 \cap E_2] \subset [E_1] \cap [E_2]$.

Доказательство. 1) $[E]$ – замкнутое множество. Поэтому

$$[E]' \subset [E] \Rightarrow [[E]] = [E] \cup [E]' = [E].$$

2) Ясно, что $E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_1' \subset E_2'$. Следовательно

$$[E_1] = E_1 \cup E_1' \subset E_2 \cup E_2' = [E_2].$$

3) Заметим, что

$$[E_1] \subset [E_1 \cup E_2], \quad [E_2] \subset [E_1 \cup E_2].$$

Поэтому

$$[E_1] \cup [E_2] \subset [E_1 \cup E_2].$$

С другой стороны

$$E_1 \cup E_2 \subset [E_1] \cup [E_2] \Rightarrow [E_1 \cup E_2] \subset [[E_1] \cup [E_2]] = [E_1] \cup [E_2].$$

4) Ясно, что $E_1 \cap E_2 \subset [E_1] \cap [E_2]$. Поэтому

$$[E_1 \cap E_2] \subset [[E_1] \cap [E_2]] = [E_1] \cap [E_2].$$

Теорема доказана.