5 Частично упорядоченные множества

Опр. Множество E называется *частично упорядоченным*, если между некоторыми его элементами определено отношение $\leqslant$, обладающее следующими свойствами:

1) $a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$;

2) $a \leqslant a$;

3) $a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b$.

Задать частичную упорядоченность можно заданием некоторого непустого множества $\Phi \in E \times E$. При этом запись $a \leqslant b$ означает, что $(a, b) \in \Phi$. Это множество должно удовлетворять следующим свойствам:

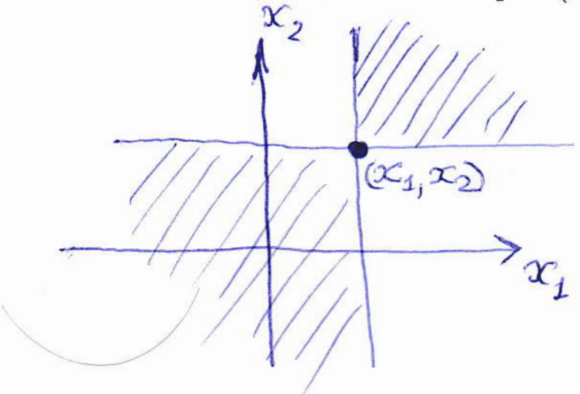
1) $(a, b) \in \Phi,\ (b, c) \in \Phi \Rightarrow (a, c) \in \Phi$;

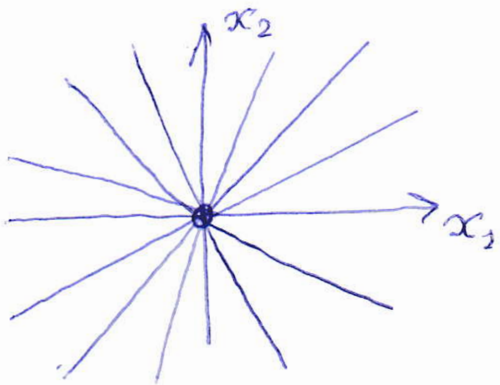
2) $(a, a) \in \Phi \quad \forall\, a \in E$;

3) $(a, b) \in \Phi,\ (b, a) \in \Phi \Rightarrow a = b$.

Пример 1. Простым примером частично упорядоченного множества является множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пример 2. Множество $\mathbb{R}^2$ можно сделать частично упорядоченным, определив операцию сравнения следующим образом:
$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$. Обратим внимание на то, что не все пары (x_1, y_1), (x_2, y_2) сравнимы.





Пример 3. В множестве функций, заданных на $[a, b]$, можно ввести частичную упорядоченность, если считать, что $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Опр. Подмножество A частично упорядоченного множества E называется *линейно упорядоченным*, если для любой пары $x, y \in A$ либо $x \leqslant y$ либо $y \leqslant x$. Линейно упорядоченное множество иначе называется *цепью.*

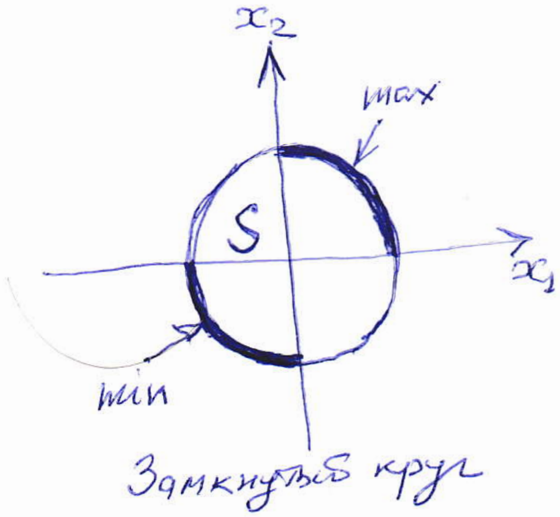
Пример 4. Ясно, что любое непустое подмножество $A \subset \mathbb{R}$ линейно упорядочено.

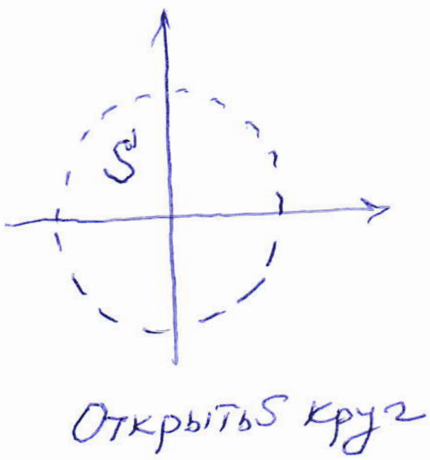
Пример 5. В $\mathbb{R}^2$ всякая прямая является линейно упорядоченным множеством.

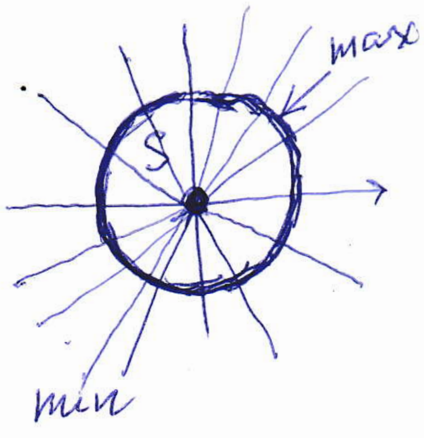
Опр. Элемент $x \in E$ называется *максимальным*, если $y \leqslant x$ для всех $y \in E$, сравнимых с x, и называется *минимальным*, если $x \leqslant y$ для всех $y \in E$, сравнимых с x.

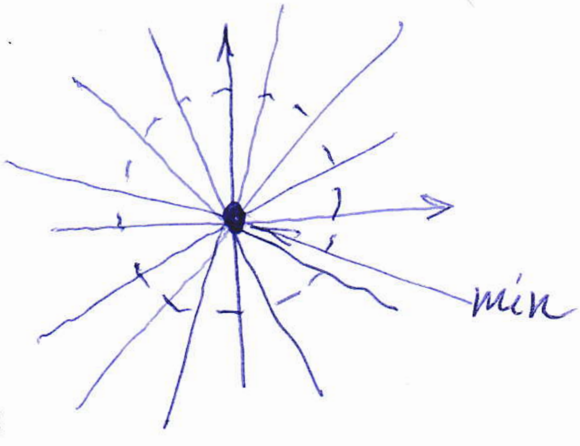
Другими словами, элемент $x \in E$ называется *максимальным*, если из $x \leqslant y$ следует, что $x = y$, и называется *минимальным*, если из $y \leqslant x$ следует, что $x = y$.

Пример 6. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ замкнутый круг S радиуса 1 с центром в нуле. Если частичный порядок введен, как в примере 2, то всякая точка $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ является максимальной для S, а при $\pi \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$ является минимальной для S.







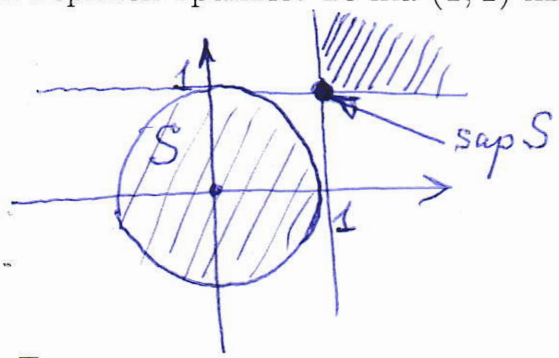


Опр. Элемент $x \in E$ называется *верхней гранью множества* $A \subset E$, если $a \leqslant x \quad \forall\, a \in A$ и – *нижней гранью множества* A, если $x \leqslant a \quad \forall\, a \in A$.

Опр. Если в множестве верхних граней множества A существует минимальный элемент, то он называется *точной верхней гранью* множества A и обозначается через $\sup A$.

Если в множестве нижних граней множества A существует максимальный элемент, то он называется *точной нижней гранью* множества множества A и обозначается через $\inf A$.

Пример 7. Для круга S из примера 6 каждая точка (x, y) с $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ является верхней гранью. Точка $(1, 1)$ является точной верхней гранью.



Опр. Линейно упорядоченное множество E называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество содержит минимальный элемент.

Пример 8. Множество целых чисел $\mathbb{N}$ вполне упорядочено.

Пример 9. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ не является вполне упорядоченным.

Опр. Линейно упорядоченное подмножество M частично упорядоченного множества E называется *максимальным*, если оно не содержится в качестве собственного подмножества ни в каком другом линейно упорядоченном множестве.

Пример 10. На плоскости $\mathbb{R}^2$ из примера 2 всякая прямая является максимальным линейно упорядоченным множеством.

В теории множеств фундаментальную роль играют следующие 4 утверждения.

Теорема Цермело. Каждое множество может быть вполне упорядочено.

Аксиома выбора. Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in A\}$ – некоторое семейство множеств. Тогда существует функция φ, ставящая в соответствие каждому α некоторый элемент $m_\alpha \in M_\alpha$.

Другими словами, можно составить множество M, выбрав из каждого множества M_α по одному элементу.

Теорема Хаусдорфа. В частично упорядоченном множестве всякое линейно упорядоченное множество содержится в некотором максимальном линейно упорядоченном множестве.

Лемма Цорна. Если всякое линейно упорядоченное множество в частично упорядоченном множестве E имеет верхнюю грань, то всякий элемент из E подчинен некоторому максимальному элементу.

Все эти четыре утверждения эквивалентны.

В следующем параграфе лемма Цорна будет использована самым существенным образом.

Отметим, что существуют три эквивалентные формулировки леммы Цорна.

Лемма Цорна (первая формулировка). Частично упорядоченное множество E, в котором любая цепь имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.

В приложениях наиболее удобна следующая формулировка, в которой утверждается существование максимального элемента, который не меньше заданного.

Лемма Цорна (вторая формулировка). Если всякая цепь в частично упорядоченном множестве E имеет верхнюю грань, то всякий элемент из E подчинен некоторому максимальному.

В оригинальной статье 1935 года Цорн сформулировал свое утверждение для множеств, частично упорядоченных по отношению включения.

Лемма Цорна (третья, оригинальная формулировка). Пусть семейство множеств $\mathfrak{M}$ обладает тем свойством, что объединение любой цепи множеств из $\mathfrak{M}$ есть снова множество из этого семейства. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит максимальное множество.