Домашняя работа №4

① $f_n \xrightarrow{L_6(E)} f$; $g_n \xrightarrow{L_3(E)} g$; $h_n \xrightarrow{L_2(E)} h$

Д-ть: $f_n g_n h_n \xrightarrow{L_1(E)} fgh$

Д-во: П $\|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_p$

$\|f_n \to f\|_6 \to 0$, $\|g_n - g\|_3 \to 0$, $\|h_n \to h\|_2 \to 0$

$f_n g_n h_n - fgh = (f_n g_n - fg)h + fg(h_n - h) + (f_n g_n - fg)(h_n - h) =$

$= hg(f_n - f) + hf(g_n - g) + h(f_n - f)(g_n - g) + fg(h_n - h) + g(f_n - f)(h_n - h) +$

$+ f(g_n - g)(h_n - h) + (f_n - f)(g_n - g)(h_n - h) \Rightarrow \|f_n g_n h_n - fgh\|_1 \leq \|hg(f_n - f)\|_1 +$

$+ \|hf(g_n - g)\|_1 + \|h(f_n - f)(g_n - g)\|_1 + \|fg(h_n - h)\|_1 + \|g(f_n - f)(h_n - h)\|_1 +$

$+ \|f(g_n - g)(h_n - h)\|_1 + \|(f_n - f)(g_n - g)(h_n - h)\|_1$ $\Rightarrow$

Рассмотрим показатели: 6, 3, 2. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\overbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}^{1/2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$
2 сопр. с 3 и 6, и далее 2 сопр с 2 по Гёльдеру

$\Rightarrow$ по нер-ву Гёльдера получим:

$\|f_n g_n h_n - fgh\|_1 \leq \|h\|_2 \|g\|_3 \|f_n - f\|_6 + \|h\|_2 \|f\|_6 \|g_n - g\|_3 + \|h\|_2 \|f_n - f\|_6 \|g_n - g\|_3$
$+ \|f\|_6 \|g\|_3 \|h_n - h\|_2 + \|g\|_3 \|f_n - f\|_6 \|h_n - h\|_2 + \|f\|_6 \|g_n - g\|_3 \|h_n - h\|_2 + \|f_n - f\|_6 \cdot$
$\|g_n - g\|_3 \|h_n - h\|_2 \to 0 \Rightarrow \|f_n g_n h_n - fgh\|_1 \to 0 \Rightarrow f_n g_n h_n \xrightarrow{L_1(E)} fgh$

ЧТД.

② $(f+g) \in L_p(E)$, $(f-g) \in L_p(E)$

Д-ть: $f \in L_p(E)$, $g \in L_p(E)$

Д-во: $L_p(E)$ – лин. пр-во $\Rightarrow (f+g) + (f-g) = 2f \in L_p(E) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2f \in L_p(E)$
$\Rightarrow f \in L_p(E)$

Аналогично $(f+g) + (-(f-g)) = 2g \in L_p(E) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2g = g \in L_p(E)$

ЧТД.

№4.20

Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x-n\sin^2\frac{x}{n}}dx = 1$

Д-во: $|e^{-x-n\sin^2\frac{x}{n}}| = |e^{-x}||e^{-n\cdot\sin^2\frac{x}{n}}| \le |e^{-x}|\cdot|e^{-n\cdot\frac{x}{n}\cdot\sin\frac{x}{n}}| =$

$= |e^{-x}||e^{-x\cdot\sin\frac{x}{n}}| \le |e^{-x}|\cdot|e^{-x}| \in |e^{-2x}|$

$\int\limits_1^{\infty}|e^{-2x}|dx = \int\limits_1^{\infty}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}e^{-2x}\Big]_1^{\xi} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}e^{-2x}\Big]_{\xi}^{1}$

$= \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}\cdot 0 < \infty \Rightarrow |e^{-2x}| \in L_1(1,\infty) \rightarrow$ по т. о мажор.

сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{\infty}e^{-x-n\sin^2\frac{x}{n}}dx = \int\limits_1^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-x-n\sin^2\frac{x}{n}})dx =$

$= \int\limits_1^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-x-n\frac{x^2}{n^2}})dx = \int\limits_1^{\infty}e^{-x}dx = e^{-x}\Big]_{\infty}^{1} = \frac{1}{e}$

Кажется в задании опечатка: В нижнем пределе интеграла „0" вместо „1" должно быть

№4.21

Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{1+x^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}\sin^2\frac{x}{n}}dx = 2$

Д-во: $\frac{1+x^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}\sin^2\frac{x}{n}} \le \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}\cdot\frac{x^2}{n^2}\cdot C^2} = \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^2\frac{C^2}{n^{3/2}}} = \frac{1+x^n}{\sqrt{x}+C_1x^2} \le$

$\le \frac{1+x^n}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{\sqrt{x}}$, если $x\in(0,1]$

$\int\limits_0^1\left|\frac{2}{\sqrt{x}}\right|dx = \int\limits_0^1\frac{2}{\sqrt{x}}dx = 2\int\limits_0^1\sqrt{x}dx < \infty$ $\Bigg\}\Rightarrow$ по т. о мажор. сх-ти:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{1+x^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}\sin^2\frac{x}{n}}dx = \int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+x^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}\sin^2\frac{x}{n}}\right)dx =$

$= \int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+x^n}{\sqrt{x}+x^2\frac{1}{n^{3/2}}}\right)dx = \int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+x^n}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$= 2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2$

ЧТД.

№4.15

Найти: $card(L_1(0,1))$ - ?

Решение: Мн-во всех ф-ий на $(0,1)$ имеет мощность гиперконтинуума $\Rightarrow card(L_1(0,1)) \le 2^{C}$

С другой стороны, имеем следующее: П χ_E - хар. ф-ия, где $E\subset K$-ного мн-во.

Заметим, что $\chi_E \subset L_1(0,1)$, т.к. изм. и огр.

$\Rightarrow 2^{C} \le card(L_1(0,1))$

$\left.\begin{array}{l} card(L_1(0,1)) \ge 2^{C} \\ card(L_1(0,1)) \le 2^{C}\end{array}\right\} \Rightarrow card(L_1(0,1)) = 2^{C}$

Ответ: 2^{C}

№4.13

$\Phi = \{ f \in \mathcal{H}(0,1) : 0 < f(x) < 1 \ \forall \ x \in (0,1) \}$

$\forall f \in \Phi \Rightarrow f \in \mathcal{H}(0,1)$, f-огр $\Rightarrow f \in L_2(0,1)$; $f_{min} = r_1$, ~~f_{max}~~

$r_2 = -f_{max} + 1 \Rightarrow r = \min\{r_1, r_2\}$

$\forall g \in B_r(f) \Rightarrow |g(x) - f(x)| < r \ \forall x \in (0,1) \Rightarrow 0 \le f - f_{min} \le f - r \le g < f + r \le f + 1 - f_{max} \le 1 \Rightarrow g \in B_r(f) \Rightarrow g \in \Phi \Rightarrow \Phi$-откр.

№4.14

Найти: card$(S[0,1])$, где $S[0,1]$ - мн-во простых ф-ий на $[0,1]$

Решение: Пусть Φ-мн-во всех числ. ф-ий на $[0,1]$, $\forall A \subset [0,1]$

Поставим в соотв. каждому A χ_A $\Rightarrow$ card$(\Phi) \ge 2^C$

$\forall f \in \Phi$. Поставим каждой ф-ии f её график $\Rightarrow$ card$(\Phi) \le 2^C$

$\Rightarrow$ card$(\Phi) = 2^C$

$\Rightarrow$ card$(S[0,1]) \le 2^C$.

$\forall \chi_E$ - хар. ф-ия мн-ва $E \subset K$. Поставим каждому $E_1 \subset E$ в соотв. хар. ф-ию этого мн-ва

$\Rightarrow$ мн-во всех χ_E - имеет мощность гиперконтинуума

$\chi_E \subset S[0,1] \Rightarrow$ card$(S[0,1]) \ge 2^C$

$\begin{cases} \text{card}(S[0,1]) \le 2^C \\ \text{card}(S[0,1]) \ge 2^C \end{cases} \Rightarrow \text{card}(S[0,1]) = 2^C$

Ответ: 2^C