7 Характеристическое свойство евклидовых (унитарных) пространств

Пусть X – некоторое нормированное пространство с заданной в нем нормой $\|\cdot\|_X$. Зададимся следующим вопросом. Можно ли ввести в X скалярное произведение так, чтобы оно было согласовано с нормой $\|\cdot\|_X$, то есть чтобы было выполнено равенство

$$(x, x) = \|x\|_X^2 \quad \forall\, x \in X. \tag{7.1}$$

Другими словами, является ли заданное нормированное пространство евклидовым (унитарным)?

Пример 1. Рассмотрим пространство $L_2(E)$ с нормой

$$\|f\|_{L_2(E)} = \Big(\int\limits_E |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

В $L_2(E)$ можно ввести скалярное произведение формулой

$$(f, g)_{L_2(E)} = \int\limits_E f(x)\overline{g}(x)\,dx.$$

Ясно, что

$$(f, f)_{L_2(E)} = \int\limits_E |f(x)|^2\,dx = \|f\|_{L_2(E)}^2,$$

то есть введенное скалярное произведение согласовано с нормой в $L_2(E)$.

Учитывая, что пространство $L_2(E)$ полно, делаем вывод, что оно является гильбертовым.

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_2 с нормой

$$\|x\|_{\ell_2} = \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\Bigr)^{1/2}.$$

Введем в ℓ_2 скалярное произведение формулой

$$(x, y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k.$$

Ясно, что

$$(x, x)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|_{\ell_2}^2,$$

то есть введенное скалярное произведение согласовано с нормой в ℓ_2.

Учитывая, что пространство ℓ_2 полно, делаем вывод, что оно является гильбертовым.

Сформулируем теперь следующую теорему.

Теорема 7.1. (**Характеристическое свойство евклидовых (унитарных) пространств.**) *Для того чтобы вещественное (комплексное) нормированное пространство X с нормой $\|\cdot\|_X$ было евклидовым (унитарным), то есть его норма была согласована с некоторым скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2) \quad \forall x, y \in X. \tag{7.2}$$

Необходимость очевидна, так как во всяком евклидовом (унитарном) пространстве справедливо тождество параллелограмма.

Доказательство достаточности основано на том, что в случае вещественного пространства X формула

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),$$

а в случае комплексного пространства X формула

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right),$$

задают в X скалярное произведение, согласованное с нормой $\|\cdot\|$.

Мы примем эту теорему без полного доказательства. Его можно найти, например, в учебнике А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина.

Следствие. Если в нормированном пространстве X найдутся элементы x и y, для которых не выполнено равенство параллелограмма (7.2), то в X нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой.

Пример 3. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ с нормой

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Является ли это пространство евклидовым, то есть можно ли в нем ввести скалярное произведение, согласованное с нормой $\|\cdot\|_{C[0,1]}$?

Решение. Возьмем $f(x) = 1$ и $g(x) = x$. Заметим, что

$$\|f\|_{C[0,1]} = 1, \quad \|g\|_{C[0,1]} = 1, \quad \|f+g\|_{C[0,1]} = 2, \quad \|f-g\|_{C[0,1]} = 1.$$

Ясно, что

$$\|f+g\|_{C[0,1]}^2 + \|f-g\|_{C[0,1]}^2 = 5 \neq 2(\|f\|_{C[0,1]}^2 + \|g\|_{C[0,1]}^2) = 4.$$

Поэтому пространство $C[0,1]$ нельзя сделать евклидовым, не меняя в нем норму.