Домашнее задание №7

2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11

№2.2

f - непр. отобр. на M-полном пр-ве. $\forall f$ имеет неподв. точку?

• П $M = \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Приведём $f(x)=0$ к виду $x = \varphi(x)$ и П $\varphi(x) = ax^2 + x + c$, где $a, c \in \mathbb{R}$: $a, c \geq 1 \Rightarrow$ имеем ур-ие:

$$ax^2 + x + c = x \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}, \quad a, c \geq 1 \Rightarrow \text{ур-ие не имеет решений}$$

Ответ: нет

№2.3

Можно ли в т. Банаха изменить условие а) $q \in [0,1]$ б) $\rho(Ax, Ay) < \rho(x,y)$

• П $M = \mathbb{R}$

а) $x = \varphi(x)$, П $\varphi(x) = x+1 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| = |x+1-y-1| = |x-y| \Rightarrow$ усл. т. выполнено с $q=1$, но $\varphi(x) = x$ не имеет решений.

Ответ: нет.

№2.4

П $M = (0,1)$ и $\varphi(x) = \frac{1}{3}x \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y| = \frac{1}{3}|x-y| \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi$ - сжимающее, но $\varphi(x) = x$ не имеет решений на M.

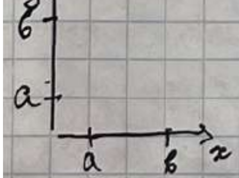
Ответ: нет

№2.5

φ-непр: $[a,b] \to [a,b]$

Д-ть: $\exists$ неподв. точка для φ на $[a,b]$.

Д-во: П $f(x) = x - \varphi(x)$; $\varphi \xrightarrow{[a,b]} [a,b] \Rightarrow a \leq \varphi(a) \leq b \quad a \leq \varphi(b) \leq b \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq \varphi(a) \Rightarrow a - \varphi(a) \leq 0 \\ b \geq \varphi(b) \Rightarrow b - \varphi(b) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) = a - \varphi(a) \leq 0 \\ f(b) = b - \varphi(b) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in [a,b] : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$$

ЧТД.

№2.6

f - дифф. на $[a,b]$: $m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

$\exists \lambda : \varphi(x) = x - \lambda f(x)$ - сжим?

• П $0 < m < M \Rightarrow$ П $\lambda = \frac{2}{m+M} \Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{2}{m+M} f'(x) \quad \{m \leq f'(x) \leq M\}$

$\Rightarrow 1 - \frac{2}{m+M} M \leq \varphi'(x) \leq 1 - \frac{2}{m+M} m \Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{|M-m|}{M+m} < 1$

• П $0 < M < m \Rightarrow$ П $\lambda = \frac{2}{m+M} \Rightarrow 1 - \frac{2}{m+M} m \leq \varphi'(x) \leq 1 - \frac{2}{m+M} M \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{|M-m|}{M+m} < 1$

• $\lambda < 0 \Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \Rightarrow \varphi'(x) > 1$ если $f'(x) > 0$

Аналогично при $\lambda > 0$ $\varphi'(x) > 1$, если $f'(x) < 0$

Ответ: Да

№2.7

$\varepsilon \in (0,1)$, $k > 0$

Д-ть: $u(x) = x + \varepsilon u(x^k)$ имеет ! реш. $u \in C[0,1]$.

Д-во: П $Au(x) = x + \varepsilon u(x^k)$, $x \in [0,1]$; $A: C[0,1] \to C[0,1]$

$\Rightarrow$ ур-ие примет вид: $Au = u$.

$\|Au_1 - Au_2\|_{C[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} |Au_1(x) - Au_2(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\varepsilon u_1(x^k) + x - x - \varepsilon u_2(x^k)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\varepsilon u_1(x^k) - \varepsilon u_2(x^k)| = \varepsilon \max\limits_{x\in[0,1]} |u_1(x^k) - u_2(x^k)| = \varepsilon \|u_1 - u_2\|_{C[0,1]} \Rightarrow A$ - сжимающее $\Rightarrow Au = u$ имеет ! решение.

ЧТД

№2.9

Д-ть: посл-ть $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \dots$ имеет предел и найти его.

Д-во: Очевидно, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, где $\varphi(x) = 2 + \frac{1}{x}$, при этом $x_0 = 2$

$\varphi: [2,\infty) \to [2,\infty)$; $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow$ посл-ть сх-ся.

Рассмотрим ур-ие: $x = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 2x + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}+1 \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}+1$

Ответ: $\sqrt{2}+1$

№2.10

Д-ть: $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sin(xs)} y(s)\,ds + f(x)$, $x \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$ имеет ! решение $y \in C[0,1]$.

Д-во: П $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ay(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sin(xs)} y(s)\,ds + f(x) \Rightarrow$ ур-ие примет вид $Ay = y$.

$\|Ay_1 - Ay_2\|_{C[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sin(xs)} y_1(s)\,ds + f(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sin(xs)} y_2(s)\,ds - f(x)\right| = \frac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 e^{\sin(xs)} y_1(s)\,ds - \int_0^1 e^{\sin(xs)} y_2(s)\,ds\right| = \frac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 e^{\sin(xs)} (y_1(s) - y_2(s))\right| = \frac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 e^{\sin(xs)} (y_1(s) - y_2(s))\,ds\right| \le \frac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]} \int_0^1 e^{\sin(xs)}\,ds\, \|y_1 - y_2\|_{C[0,1]}$

$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{\sin(sx)}\,ds \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xs}\,ds \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{s}\,ds = \frac{1}{2}(e-1) < 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ - сжим. отобр. $\Rightarrow Ay = y$ имеет ! решение.

ЧТД.

№2.11

$y(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$, $L_2(a,b)$

$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \Rightarrow$ ур-ие примет вид $Ay = y$

$K(x,s)y(s) \in \mathcal{H}(a,b)$ и заметим, что $\left[\int_a^b K(x,s)y(s)ds\right]^2 \le$

$\le \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \cdot \|y\|^2_{L_2(a,b)} < \infty$, т.к. $K(x,s)$ - ядро Фредгольма

$\Rightarrow A: L_2(a,b) \to L_2(a,b)$

$\|Ay_1 - Ay_2\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b \left[\left|\int_a^b K(x,s)[y_1(s) - y_2(s)]ds\right|^2\right]dx \le$

$\le \|y_1 - y_2\|^2_{L_2(a,b)} \cdot \int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds \Rightarrow \int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds < 1$

Ответ: $\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 dxds < 1$

№2.8

$a \in [0,1]$, $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a)$, $n = 0, 1, \ldots$; $x_0 = 0$

Д-ть: посл-ть имеет предел и найти его.

Решение: 1) $a = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow$ решение $x = 0$

2) $a > 0 \Rightarrow x_1 = 0 - \frac{1}{2}(0 - a) = \frac{a}{2}$. П $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2x = 1 - x$. Заметим, что $\varphi: \left[\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right] \to \left[\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right]$,

т.к. $\varphi'(x) = 1 - x \to \varphi'(x) = 0$, если $x = 1$ $\quad \varphi'(x)$: $+$ до 1, $-$ после 1; $\varphi(x)$: $\nearrow$ 1 $\searrow$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x)|_{x=1} = \max \varphi(x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1+a}{2}$

$\max_{x \in [\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}]} |\varphi'(x)| = 1 - \frac{a}{2} < 1 \Rightarrow \varphi$ - сжимающее $\Rightarrow$ посл-ть сх-ся.

$x = x - \frac{1}{2}(x^2 - a) \Rightarrow x = \sqrt{a}$

Ответ: $x = \sqrt{a}$

1) Д-ть: $f: M_1 \to M_2$ - непр $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \rho_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty: x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Д-во: $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \rho_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (1)

П $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M_1: x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N > 0: \rho_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$ $\forall n > N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ по (1):

$\rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0: \rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ $\forall n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow$ опр. по Гейне выполнено

$(\Leftarrow)$ $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty: x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

В силу определение предела функции по Гейне $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$
$\Rightarrow f$ - непр. в т. x_0 по Коши.

ЧТД.

② Д-ть: $cl B_1(0)$ - не компакт и даже не предкомп. в l_p $\forall p$

Д-во: • П $p<\infty \Rightarrow \forall x,y \in l_p$ $\rho(x,y) = \|x-y\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$

$\Rightarrow cl B_1(0) = \{x \in l_p : [\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p]^{1/p} \le 1\}$

П $e_j = \{\underset{1}{0}, \ldots, \underset{j-1}{0}, \underset{j}{1}, \underset{j+1}{0}, \ldots\} \Rightarrow \rho(e_i, e_j) = \sqrt[p]{2} = (2)^{1/p}$, $i \ne j$

П $cl B_1(0)$ - компакт $\Rightarrow$ если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset cl B_1(0)$, то $\exists \{e_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ - сходящ. подпосл. $\Rightarrow \{e_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \rho(e_{j_m}, e_{j_n}) < \varepsilon$ $\forall n,m > N(\varepsilon)$, что даёт противоречие за счёт того, что $\rho(e_i, e_j) = (2)^{1/p} \Rightarrow cl B_1(0)$ - не комп и не предкомп.

• П $p=\infty \Rightarrow \forall x,y \in l_\infty$ $\rho(x,y) = \sup\limits_{n \ge 1}|x_n - y_n| \Rightarrow cl B_1(0) = \{x \in l_\infty : \sup\limits_{n\ge 1}|x_n| \le 1\}$. П $e_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(e_i, e_j) = 1$, $i \ne j$. Аналогично случаю $p<\infty$ получим то, что $cl B_1(0)$ - не комп. и не предкомп.

ч.т.д.

№2.3

б) Можно ли в пр. сжим. отобр. поставить условие $\rho(Ax, Ay) < \rho(x,y)$?

П $M = \mathbb{R}$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow$ по ф-ле конечных приращ. Лагранжа:

$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \varphi'(\xi)(x_1 - x_2) \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\varphi'(\xi)||x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$,

если $|\varphi'(x)| < 1$ $(-1 < \varphi'(x) < 1)$ (*)

Имеем ур-ие $x = \varphi(x) \Rightarrow f(x) = 0$, где $f(x) = x - \varphi(x)$
$\varphi(x) = x - f(x)$

(*) $\Rightarrow -1 < 1 - f'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < f'(x) < 2$

П $f(x) = \operatorname{arctg} x - \pi/2 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+x^2} < 2$ - выполнено,

но ур-ие $x = x + \operatorname{arctg} x - \pi/2$ не имеет решений.

$\Rightarrow$ заменить нельзя.

Ответ: нет