2 Арифметические операции над измеримыми функциями

Лемма 2.1. $f \in \mathfrak{M}(E) \Rightarrow f + c \in \mathfrak{M}(E), \quad cf \in \mathfrak{M}(E) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай функций, принимающих только конечные значения.

$$E[f + c > a] = E[f > a - c],$$

$$E[cf > a] = \begin{cases} E[f > a/c] & \text{если} \quad c > 0, \\ E[f < a/c] & \text{если} \quad c < 0, \\ E & \text{если} \quad c = 0 \quad \text{и} \quad a < 0, \\ \emptyset & \text{если} \quad c = 0 \quad \text{и} \quad a \geqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Если $f, g \in \mathfrak{M}(E)$, то множество $E[f > g]$ измеримо.*

Доказательство. Пусть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел. Справедлива формула

$$E[f > g] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E[f > q_n] \cap E[q_n > g]),$$

из которой следует, что множество $E[f > g]$ измеримо.

Теорема 2.1. *Пусть* $f, g \in \mathfrak{M}(E)$. *Тогда* $f+g, f-g, f \cdot g \in \mathfrak{M}(E)$ *и* $f/g \in \mathfrak{M}(E)$ *(последнее в случае, если* $g(x) \neq 0$ *почти всюду на* E*).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай функций, принимающих только конечные значения.

1. Множество $E[f - g > a] = E[f > g + a]$ измеримо $\Rightarrow$ функция $f - g$ измерима.

2. Функция $f + g = f - (-1)g$ измерима.

3. Заметим, что $f \in \mathfrak{M}(E) \Rightarrow f^2 \in \mathfrak{M}(E)$. Действительно,

$$E[f^2 > a] = \begin{cases} E[|f| > \sqrt{a}], & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ E, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

4. $fg = \dfrac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$.

5. Функция $1/g$ измерима, так как

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = (E[g > 0] \cap E[1 - ag > 0]) \cup (E[g < 0] \cap E[1 - ag < 0]).$$

6. $f/g = f \cdot (1/g)$.

Теорема доказана.

Опр. Функции f и g, которые равны почти всюду на E, называются *эквивалентными на* E.

Свойство 5. Пусть f и g – эквивалентные заданные на измеримом множестве E функции. В этом случае функция f измерима тогда и только тогда, когда измерима функция g.

Доказательство. Пусть f измерима, тогда g измерима, поскольку

$$E[g > a] = (E[f = g] \cap E[f > a]) \cup (E[f \neq g] \cap E[g > a]).$$

Теорема 2.2. *Если функция f непрерывна почти всюду на E, то она измерима на E.*

Доказательство. Пусть E_0 – множество точек разрыва функции f. По условию $|E_0| = 0$. Так как множество $E \setminus E_0$ измеримо, то существует множество $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ типа F_σ такое, что $E_1 \subset E \setminus E_0$ и множество $\widetilde{E} = (E \setminus E_0) \setminus E_1$ имеет нулевую меру. Поэтому

$$E = E_0 + \widetilde{E} + \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Заметим теперь, что множество $F_n[f \geqslant a]$ замкнуто в силу непрерывности функции f на множестве F_n. Так как всякое замкнутое множество измеримо, то f измерима на F_n. В силу свойств 2 и 3 функция f измерима и на E.

Утверждение. Пусть $\varphi : E \to (a, b)$ – измеримая функция, а f – непрерывная на (a, b) функция. Тогда суперпозиция $f(\varphi(x))$ является измеримой функцией.

Доказательство. В силу непрерывности функции f имеем

$$\{y \in (a, b) \mid f(y) > c\} = \bigcup_{k\geqslant 1}(\alpha_k, \beta_k).$$

Поэтому множество

$$E[f(\varphi) > c] = \bigcup_{k\geqslant 1} E[\alpha_k < \varphi < \beta_k]$$

является измеримым.

Замечание. Интервал (a, b) можно заменить отрезком $[a, b]$. В этом случае множество $E[f(\varphi) > c]$ совпадает с $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} E[\alpha_k < \varphi < \beta_k]$ с точностью до множеств $E[\varphi = a]$ и $E[\varphi = b]$, которые измеримы.

Теорема 2.3. *(Теорема Лузина.) Пусть f – заданная на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^m$ почти всюду конечная функция.*

Функция f измерима на E тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ такое, что

$$f \in C(F_\varepsilon) \quad \text{и} \quad |E \setminus F_\varepsilon| < \varepsilon.$$