3 Обратный оператор

Опр. Пусть X, Y – линейные пространства. Оператор A, действующий из $D(A) \subset X$ в Y, называется *обратимым*, если для каждого $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный его прообраз $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$.

Если A обратим, то оператор, ставящий в соответствие элементу $y \in \operatorname{Im} A$ его прообраз x, называется *обратным* к A и обозначается через A^{-1}.

Теорема 3.1. *Обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = O$.

Доказательство. Пусть A – обратимый оператор. Если $\operatorname{Ker} A \neq O$, то существует элемент $x \in D(A)$, $x \neq 0$ такой, что $Ax = 0$. Но тогда у элемента $0 \in Y$ существует два прообраза: $x, 0 \in X$, что противоречит обратимости A.

Пусть теперь $\operatorname{Ker} A = O$. Предположим, что для некоторого $y \in \operatorname{Im} A$ существуют два прообраза x_1, x_2. Тогда

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = 0 \quad \Rightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Следовательно A обратим.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$ и $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Тогда

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Следовательно

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Для того, чтобы линейный оператор A, действующий из X на Y, имел непрерывный обратный, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $m > 0$ такая, что*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X \quad \forall\, x \in X \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует непрерывный обратный оператор A^{-1}. Тогда

$$\|x\|_X = \|A^{-1}Ax\| \leqslant \|A^{-1}\|\|Ax\|_Y \Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|_X \leqslant \|Ax\|_Y,$$

то есть неравенство (3.1) выполняется с $m = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Достаточность. Пусть выполнено (3.1). Тогда $\operatorname{Ker} A = O$ и поэтому оператор A обратим и определен на Y (поскольку $\operatorname{Im} A = Y$). Из (3.1) для $x = A^{-1}y$ следует, что

$$\|x\|_X \leqslant m^{-1}\|Ax\|_Y \quad \Leftrightarrow \|A^{-1}y\|_Y \leqslant m^{-1}\|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y,$$

в силу чего $\|A^{-1}\| \leqslant m^{-1}$.

Теорема доказана.

Опр. Говорят, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\operatorname{Im} A = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

Следуюшая теорема является одной из основных теорем линейного функционального анализа.

Теорема 3.4. *(Теорема Банаха об обратном операторе)*

Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, где X, Y – банаховы пространства, причем $\operatorname{Im} A = Y$. *Если оператор A обратим, то $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.*

Мы приводим теорему Банаха об обратном операторе без доказательства.

Понятие о прямых и обратных задачах

Прямая задача.

По заданному $x \in X$ определить $y \in Y$ такое, что

$$y = Ax.$$

Как правило, x неизвестно, а известно $x^* \approx x$. Тогда вычисляется

$$y^* = Ax^* \approx y = Ax.$$

Если оператор A – линейный и ограниченный, то

$$y^* - y = A(x^* - x) \quad \Rightarrow \|y^* - y\|_Y \leqslant \|A\| \|x^* - x\|_X.$$

Обратная задача.

По заданному $y \in Y$ определить $x \in X$ такое, что

$$Ax = y.$$

Как правило, y неизвестно, а известно $y^* \approx y$. Тогда вычисляется x^* такое, что

$$Ax^* = y^*.$$

Если оператор A – линейный и обратимый, а обратный оператор A^{-1} - ограниченный, то

$$A(x^* - x) = y^* - y \quad \Rightarrow x^* = A^{-1}(y^* - y) \quad \Rightarrow \|x^* - x\|_X \leqslant \|A^{-1}\| \|y^* - y\|_Y.$$

Для решения обратной задачи справедлива оценка

$$\frac{\|x^* - x\|_X}{\|x^*\|_X} \leqslant \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|y^* - y\|_Y}{\|y^*\|_Y}.$$

Нередко обратная задача имеет вид

$$x = Ax + y,$$

где $A : X \to X$ и $x, y \in X$, то есть вид

$$(I - A)x = y.$$

Пусть $A : X \to X$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$x = Ax + y, \tag{3.2}$$

где $y \in X$ – заданная правая часть, $x \in X$ – искомое решение.
Это уравнение можно записать в эквивалентном виде

$$(I - A)x = y. \tag{3.3}$$

Приведем теорему о достаточных условиях существования ограниченного обратного оператора $(I - A)^{-1}$.

Теорема 3.5. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X – банахово пространство, и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I - A)^{-1}$ существует, ограничен и представляется рядом Неймана*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{3.4}$$

Доказательство. Существование и единственность решения уравнения (3.3) при любом $y \in X$ следует из принципа сжимающих отображений.

Действительно, запишем уравнение (3.2) в виде

$$x = Bx, \quad \text{где} \quad Bx = Ax + y.$$

Заметим, что

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|Ax_1 + y - Ax_2 - y\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leqslant \|A\|\|x_1 - x_2\|.$$

Значит, отображение $B : X \to X$ – сжимающее.

Следовательно оператор $(I - A)^{-1}$ существует и определен на X.

Заметим, что последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n} A^k$ фундаментальна в $\mathscr{L}(X)$.

Действительно,

$$\|\sum_{k=n}^{m} A^k\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|A^k\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|A\|^k \leqslant \|A\|^n/(1-\|A\|) \quad \forall m > n.$$

Поскольку пространство $\mathscr{L}(X)$ банахово, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится.

Для любого n имеем

$$\Big[\sum_{k=0}^{n} A^k\Big](I-A) = I - A^{n+1}.$$

Так как $A^{n+1} \to 0$, то предельный переход дает

$$\Big[\sum_{k=0}^{\infty} A^k\Big](I-A) = I.$$

Следовательно

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}. \tag{3.5}$$

Теорема доказана.

Вернемся еще раз к вопросу о разрешимости уравнения $x = Ax+y$ в условиях теоремы 3.5. Напомним, что отображение $Bx = Ax + y$ является сжимающим.

Из доказательства принципа сжимающих отображений следует, что при любом $x_0 \in X$ метод простой итерации

$$x_{n+1} = Ax_n + y, \quad n \geqslant 0$$

сходится.

Возьмем $x_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&x_1 = Ax_0 + y = y,\\
&x_2 = Ax_1 + y = Ay + y,\\
&x_3 = Ax_2 + y = A(Ay + y) + y = A^2y + Ay + y,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k y,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Так как $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y.$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, принято называть **рядом Неймана**.