№3.1
A - беск. ; B - счётно
Д-ть: $(A \cup B) \sim A$

1) Если $B \setminus A = \varnothing$, то $A \cup B = A \Rightarrow (A \cup B) \sim A$

2) Если $B \setminus A = C$ - конечно $\Rightarrow A \cup B = A \cup C$
Найдём взаимно однозн. отображение $(A \cup C)$ и A:
допустим во мн-ве C „n" элементов. Тогда сдвинем во мн-ве A все элементы на „n" позиций, на эти места поставим элементы мн-ва C из $(A \cup C)$. Элементы мн-ва отобразим в себя

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (A \cup C) = (A \cup B) \\ A \cup C \sim A \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \sim A$$

3) Если $B \setminus A$ счётно $\Rightarrow B \setminus A = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$
$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ $\Rightarrow$ нужно найти взаимн. однознач. отобр. A на мн-во $(A \cup B)$
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - счётное мн-во в мн-ве A. Построим отображение следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} a_n, \text{ если } x = a_k, \ k = 2t-1 \\ b_n, \text{ если } x = a_k, \ k = 2t \\ x, \text{ если } x \in A \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

№3.2

Д-ть: мн-во инт. (a, b); $a, b \in \mathbb{Q}$ - счётно.

Д-во: Занумеруем мн-во $\mathbb{Q}$ => получим $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Каждому интервалу можно поставить в соответствие пару рац. чисел (a, b)

Построим таблицу:

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & q_n \; \ldots \\
q_1 & (q_1, q_1) & (q_1, q_2) & (q_1, q_3) & \ldots & (q_1, q_n) \; \ldots \\
q_2 & (q_2, q_1) & (q_2, q_2) & (q_2, q_3) & \ldots & (q_2, q_n) \; \ldots \\
q_3 & (q_3, q_1) & (q_3, q_2) & (q_3, q_3) & \ldots & (q_3, q_n) \; \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
q_m & (q_m, q_1) & (q_m, q_2) & (q_m, q_3) & \ldots & (q_m, q_n) \; \ldots
\end{array}$$

Далее оставим в ней только те пары, в которых $q_m < q_n$, и пронумеруем их „по диагоналям"

ч.т.д.

№3.3.

$A \setminus B \sim B \setminus A$

Д-ть: $A \sim B$.

Д-во: $A \setminus B \sim B \setminus A$ => $\exists$ взаимно однозн. отображение $f: A \setminus B \to B \setminus A$

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Аналогично $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

=> определим следующее отобр. $h(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in A \cap B \\ f(x), \text{ если } x \in A \setminus B \end{cases}$

ч.т.д.

№3.4

$A \subset B \subset C$: $A \sim C$

Д-ть: $A \sim B$

Д-во: $\begin{rcases} A \subset B \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \\ A \sim C \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}} \\ B \subset C \Rightarrow \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{C}} \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \Rightarrow A \sim B$

ч.т.Д.

№3.5.

Треугольник однозначно задаётся тремя точками. У каждой точки, в свою очередь, две координаты. => мн-ву треугольников можно поставить в однозначное соответствие некое мн-во которое будет подмножеством мн-ва $\mathbb{Q}^6 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, которое счётно.

=> мн-во треугольников счётно. => его мощность - $\aleph_0$

№3.6.
f - мон. ф-ция с разр. на $[a, b]$.
Д-ть: мн-во разрывов счётно или конечно.

Д-во: Пусть f - неубывающая. Если x - точка разрыва, то $f(x+0) - f(x-0) > 0$

Тогда для каждой точки x $\exists$ интервал $(f(x-0), f(x+0))$.
Пусть $q \in (f(x-0), f(x+0))$ $q \in \mathbb{Q}$ => есть взаимно однозн. отображение мн-ва точек с разрывом на некое подмножество мн-ва $\mathbb{Q}$. => мн-во разрывов счётно или конечно.

ч.т.д.

№3.8.
Пусть $E = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\}$ => мн-во $E \cap (\tau, +\infty)$ пусто, если $\tau > 1$, и конечно, если $0 < \tau \leq 1$ => => утв. неверно.

№3.10.
$\forall n \in \mathbb{Z}$ мн-во $E \cap [n, n+1]$ содержит единств. точку или вообще пусто.
Заметим, что $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [E \cap [n, n+1]]$ => мн-во конечно или счётно.

чтд.

№3.11.
Д-ть замкн. круг ~ откр. круг (радиусы равны)

Д-во: Пусть $O_R(x_1)$ - откр. круг радиуса R и центром в x_1, $\tilde{O}_R(x_2)$ - замкн. круг радиуса R и центром в x_2

Очевидно, что $O_R(x_1) \sim O_R(x_2)$: $O_R(x_2) \subset \tilde{O}_R(x_2)$
С другой стороны, $\tilde{O}_R(x_2) \sim \tilde{O}_{\frac{R}{n}}(x_1) \subset O_R(x_1)$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ } =>
по т. Кантора - Бернштейна $O_R(x_1) \sim \tilde{O}_R(x_2)$

ч.т.д.

№3.12
П: $(0,1] \times (0,1] \sim (0,1]$ по т. Кантора - Бернштейна

Д-во: из 2.19 имеем: $П \sim A$, где A - подмножество мн-ва $(0,1]$.
$(0,1] \sim X$, где $X = \{(x, 1/3) \mid x \in (0,1]\}$ - подмножество $П$. } =>
=> по т. Кантора - Бернштейна $П \sim (0,1]$

ч.т.д.

№3.13
$\forall x \in [0,1]$ можно перевести в двоичную систему исчисления.
Тогда $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots_2$, где $a_n = \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

Аналогично можно перевести число x обратно в десятичную систему исчисления.

Но есть числа x вида $0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 100 \ldots 0 \ldots_2 =$
$= 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 011 \ldots 1 \ldots_2$, для которых отображение не будет взаимно однозначным, но мн-во таких чисел, очевидно, счётно.

=> мн-во посл-ей имеет мощность континуум.

ч.т.д.

№3.14

Д-ть: мн-во всех конечных подмножеств счётного мн-ва счётно

Д-во: Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - счётное мн-во, а B - его подмножество

Тогда можно построить посл-ть $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots$, в которой указ. жена, где находится элемент мн-ва A:

$d_n = 1$, если $a_n \in M$

$d_n = 0$, если $a_n \notin M$

$\Rightarrow$ получим число в двоичной системе: $x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_{n_2}$. В нём конечный набор „1" $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Тогда имеем: мн-ву всех конечн. подмн-в A соответствует беск. подмн-во счётного мн-ва.

$\Rightarrow$ мн-во всех конечных подмн-в счётного мн-ва счётно.

ч.т.д.

№3.15

Пусть $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возраст. посл-ть натуральных чисел. Поставим ей в соответствие число $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, где $a_n = 1$, если $n = b_k$, в противном случае - $a_n = 0$

Пусть получилось мн-во X. Очевидно, $\overline{\overline{X}} \leq c$. Но, в то же время, в X есть иррациональные числа $\Rightarrow \overline{\overline{X}} \geq c$

$\left.\begin{matrix}\overline{\overline{X}} \leq c \\ \overline{\overline{X}} \geq c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{\overline{X}} = c \Rightarrow$ мощность мн-ва всех возраст. посл-ей натур. чисел равна континууму.

№3.17

Сопоставим отрезку $[a, b]$ пару (a, b), где $a < b \Rightarrow$ мн-ву отрезков $[a, b]$ ставится в соответствие мн-во пар (a, b)

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{\overline{(a,b)}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = c$

Заметим что во множестве отрезков $\exists$ все отрезки $[a, a+1]$, мощность мн-ва которых равна „c"

Тогда мощность мн-ва всех отрезков на прямой равна „c".

№3.18.

Пусть $q \in \mathbb{Q}$ - точка на одном отрезке. Выберем подобные точки на каждом отрезке. $\Rightarrow$ получили взаимно однозначное соответствие между мн-вом отрезков и соотв. мн-вом рац. чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мн-во отрезков не более чем счётно $\Rightarrow$ мощность $\leq \aleph_0$.

№3.16.

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - последовательности натуральных чисел, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возр. последовательности натуральных чисел.

Установим между ними взаимно однозначное соответствие:

$n_1 = b_1$

$\left.\begin{matrix} b_1 + n_1 = b_2 \\ b_2 + n_2 = b_3 \\ \dots \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_{k+1} = b_k + n_k \Rightarrow$ мощность последовательностей натур. чисел равна континууму.

№3.7.

Пойдём от обратного: Пусть $\forall\ \tau > 0$ $E \cap (\tau, +\infty)$ - не более чем счётно.

Пусть $\tau = 1/n$ $\Rightarrow$ $E = \bigcup_{n \geq 1} \left[E \cap (1/n, +\infty) \right]$

Из предположения: $E \cap (1/n, +\infty)$ - не более чем счётно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ счётное объединение не более чем счётных множеств - не более чем счётно $\Rightarrow$ E - не более чем счётно, но по условию E - несчётное мн-во. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $\exists\ \tau > 0$: $E \cap (\tau; +\infty)$ - несчётно.

ч.т.д.