4 Преобразование Фурье свертки

Опр. Сверткой функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $g \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy. \tag{4.1}$$

Для свертки используется обозначение $h = f * g$.

Предложение 4.1. *Свертка (4.1) определена для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ и справедлива оценка*

$$\|f * g\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|\, dy \right] dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|\, dx \right] dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx \right] dy = \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty.$$

В силу следствия из теоремы Фубини $f(x)g(x-y) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому в силу теоремы Фубини свертка $f * g$ определена почти всюду на $\mathbb{R}$ и принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Замечание 4.1. *Обратим внимание на то, что*

$$f * g = g * f.$$

Действительно, замена $z = x - y$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-x) g(z)\, dz.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $g \in L_1(\mathbb{R})$*. Тогда*

$$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g].$$

Доказательство.

$$\mathscr{F}[f * g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y)\, dy \right] e^{-i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{-i\xi(x-y)}\, dx \right] dy =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x}\, dx \right] = \mathscr{F}[f](\xi)\mathscr{F}[g](\xi).$$

Теорема доказана.