№1.13

Пусть $\exists$ такое мн-во $E \subset [a, b]$. $G = (a, b) \setminus E$

$\Rightarrow G \cup E = (a, b) \Rightarrow \mu(G) + \mu(E) = b - a$, но G - откр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $G \neq \emptyset$, то в G $\exists$ хоть одна т. x: x - внутр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(G) > 0 \Rightarrow \mu(G) \neq 0$, но из $[\mu(G) + \mu(E) = b - a]$:

$\mu(G) = 0 \rightarrow$ получаем противоречие

Тогда : $G = \emptyset \rightarrow (a, b) \subset E \Rightarrow [a, b] = E$

№1.23

Д-ть: $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2)$

Д-во: $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \setminus E_2)$; $E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$

Имеем: $\mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_1 \setminus E_2) +$

$+ \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$

№ 1.24

• Пусть $k > 0$.

$\forall$ откр. $G \subset \mathbb{R}$: $G = \bigcup\limits_n (a_n, b_n) \Rightarrow \mu(G) = \sum\limits_n (b_n - a_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow kG = \bigcup\limits_n (ka_n, kb_n) \Rightarrow \mu(kG) = \sum\limits_n (kb_n - ka_n) =$
$= k\sum\limits_n (b_n - a_n) = k \cdot \mu(G)$

$\forall$ произв. $E \subset \mathbb{R}$: $\mu^*(kE) = \inf\limits_{G \supset kE} \mu(G) = \inf\limits_{\frac{1}{k}G \supset E} \mu(G) =$
$= k \cdot \frac{1}{k} \inf\limits_{\frac{1}{k}G \supset E} \mu(G) = k \inf\limits_{\frac{1}{k}G \supset E} \mu(k^{-1}G) = k \inf\limits_{G \supset E} (G) = k\mu^*(E)$, но E - измеримо $\Rightarrow \inf\limits_{G \supset E} \mu^*(G \setminus E) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\limits_{G \supset kE} \mu^*(G \setminus kE) = \inf\limits_{\frac{1}{k}G \supset E} \mu^*(k(\frac{1}{k}G \setminus E)) = \inf\limits_{G \supset E} \mu^*(k(G \setminus E)) =$
$= k \inf\limits_{G \supset E} \mu^*(G \setminus E) = 0 \Rightarrow kE$ - измеримо $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(kE) = \mu^*(kE) = k\mu^*(E) = k\mu(E)$, т.к. E - измеримо

• $k < 0$

$kG = \bigcup\limits_n (kb_n, ka_n) \Rightarrow \mu(kG) = \sum\limits_n (ka_n - kb_n) = |k| \sum\limits_n (a_n - b_n)(-1) =$
$= |k| \sum\limits_n (b_n - a_n) = |k| \mu(G)$

№ 1.17

Рассмотрим $A = [0,1) \cup \mathbb{N}$ - неогр. изм. мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем: $\mu(A) = \mu([0,1) \cup \mathbb{N}) = \mu([0,1)) \cup \mu(\mathbb{N}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Да, может

№ 1.16

$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k} \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$

Пусть A_k - мн-во из $x \in [0,1]$: $x = 0, \alpha_1 0 \alpha_3 0 \alpha_5 \ldots 0 \alpha_{2k-1} 1$, тогда

$E = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Если $x \in A_1$, то $x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2^2} + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = (1/4, 1/2] \cup (3/4, 1] \Rightarrow [0,1] \setminus A_1 = [0, 1/4] \cup (1/2, 3/4]$.

$\mu(A_1) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (1 - 3/4) = 1/2$

$x \in A_2 \Rightarrow x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2} + \frac{1}{2^4} + \sum\limits_{k=5}^{\infty} \frac{\alpha^k}{2^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = (1/16; 2/16] \cup (3/16, 4/16] \cup (9/16, 10/16] \cup (11/16, 12/16] \Rightarrow$

$\Rightarrow [0,1] \setminus A_2 \setminus A_1 = [0, 1/16] \cup (2/16, 3/16] \cup (8/16, 9/16] \cup (10/16, 11/16]$

$\mu(A_2) = 1/4$

Тогда $\mu[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

$\mu(E) = \mu([0,1]) - \mu[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k] = 1 - 1 = 0$

ч.т.д.

№1.18

Пусть $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, тогда E состоит из рац. точек $\mu(E) = 0$.

$[E] = [0,1] \Rightarrow \mu([E]) = 1$

$\Rightarrow$ нет, не должно быть.

№1.20

Пусть все расстояния рациональны. Пусть $\xi \in E \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall e \in E: \rho = (e - \xi) \in \mathbb{Q}$. Тогда определим взаимно однозначное соотв. между E и неким подмножеством $\mathbb{Q}$: точке $e \in E$ ставим в соотв. $\rho \in \mathbb{Q}$. Тогда E - не более чем счётно $\Rightarrow$ $\mu(E) = 0$, но по усл. $\mu(E) > 0$ $\Rightarrow$ получено противоречие $\Rightarrow$ $\exists$ точки с иррациональными расстояниями.

№1.22

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k: \mu(E_k) > 1 - \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Тогда: } 1 - \varepsilon < \mu(E_k) \le \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ E \subset [0,1] \Rightarrow \mu(E) \le \mu([0,1]) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \varepsilon < \mu(E) \le 1$$

$\Rightarrow \mu(E) = 1$

ч.т.д.

№1.14

Пусть $E_n = (0,1) \cup (n, +\infty) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (0,1) \Rightarrow \mu(\bigcap_n E_n) = 1$ - мера конечна, отлична от нуля