2 Евклидовы и унитарные пространства

Опр. *Скалярным произведением* в вещественном (комплексном) линейном пространстве E называется вещественнозначная (комплекснозначная) функция (x, y), определенная на $E \times E$ и обладающая следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in E \qquad ((x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall\, x, y \in E$);
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad \forall\, x_1, x_2, y \in E$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall\, x, y \in E \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{C})$;
4) $(x, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in E; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Вещественное (комплексное) линейное пространство E с введенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым (унитарным) пространством.*

Всякое евклидово (унитарное) пространство E является нормированным с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{2.1}$$

Данная норма и скалярное произведение в E называются *согласованными.*

Замечание 2.1. *Свойства 2), 3) говорят о том, что (при фиксированном втором аргументе y) скалярное произведение является линейным функционалом первого аргумента x.*

Замечание 2.2. *Из свойств 1) – 3) скалярного произведения следуют следующие свойства:*

5) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad \forall\, x, y_1, y_2 \in E$*;*
6) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \quad \forall\, x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
(x, y_1 + y_2) &= \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2),\\
(x, \lambda y) &= \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}\ \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).
\end{aligned}$$

Таким образом (при фиксированном первом аргументе x) скалярное произведение является линейным функционалом второго аргумента y в случае евклидова пространства и – сопряженно-линейным функционалом в случае унитарного пространства.

Замечание 2.3. *Обратим внимание на то, что в случае евклидова пространства*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2,$$

а в случае унитарного пространства

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2.$$

Действительно, использование свойств 2) и 5) дает

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) = \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + (y,x) + (x,y) + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Примеры евклидовых и унитарных пространств.

1. Пространство $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k.$$

2. Пространство $\mathbb{C}^m$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y}_k.$$

3. Вещественное пространство ℓ_2 со скалярным произведением

$$(x,y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

4. Комплексное пространство ℓ_2 со скалярным произведением

$$(x,y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k.$$

5. Вещественное пространство $L_2(E)$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{L_2(E)} = \int_E f(x) g(x)\, dx.$$

6. Комплексное пространство $L_2(E)$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{L_2(E)} = \int_E f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Теорема 2.1. *В евклидовом (унитарном) пространстве E справедливо неравенство Коши-Буняковского (неравенство Шварца):*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\| \quad \forall\, x, y \in E.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай евклидова пространства. Пусть $x, y \in E$ и $x, y \neq 0$. Заметим, что

$$0 \leqslant (tx + y, tx + y) = t^2\|x\|^2 + 2t(x, y) + \|y\|^2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Рассмотрим теперь случай унитарного пространства.
Воспользуемся представлением комплексного числа (x, y) в виде

$$(x, y) = |(x, y)|e^{i\varphi}. \tag{2.2}$$

Положим $z = e^{-i\varphi}x$. Из (2.2) следует, что

$$(z, y) = |(x, y)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (tz + y, tz + y) &= t^2\|z\|^2 + 2tRe\,(z, y) + \|y\|^2 \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t|(x, y)| + \|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D = 4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Справедливо неравенство треугольника*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $|\mathrm{Re}(x, y)| \leqslant |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Замечание 2.4. *Из определения (2.1) нормы и свойств скалярного произведения следует, что*

$$\|x\| \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \|x\|.$$

Кроме того, справедливо неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Поэтому величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *действительно является нормой.*

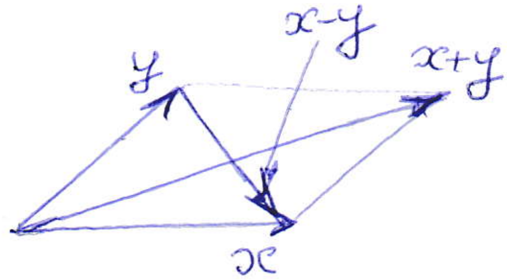
Предложение 2.1. *Справедливо тождество параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall\, x, y \in E.$$

Доказательство. Действительно,

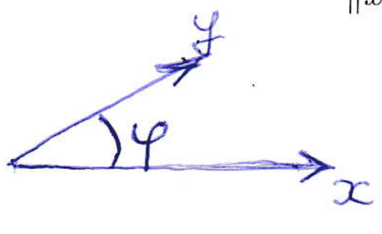
$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \\ =&\|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2 = \\ =&2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

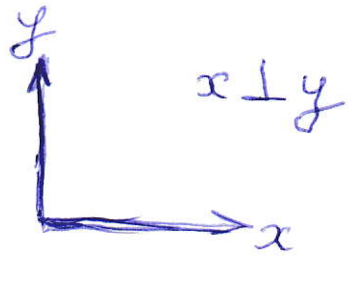
Предложение доказано.



Опр. Угол φ между ненулевыми векторами $x, y \in E$ определяется формулой

$$\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\| \|y\|}.$$





Опр. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x,y) = 0$.
То, что x и y ортогональны, записывают так: $x \perp y$.

Опр. Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\} \subset E$ называется *ортогональной*, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при всех $\alpha \neq \beta$.

Если дополнительно $\|x_\alpha\| = 1$ для всех α, то система $\{x_\alpha\}$ называется *ортонормированной.*

Теорема 2.2. *Всякая ортогональная система линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}$ - ортогональная система.
Возьмем произвольную конечную подсистему $\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ и приравняем линейную комбинацию векторов этой подсистемы нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} = 0.$$

Умножив скалярно левую и правую часть этого равенства на x_{α_j}, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Таким образом, система $\{x_\alpha\}$ линейно независима.
Теорема доказана.

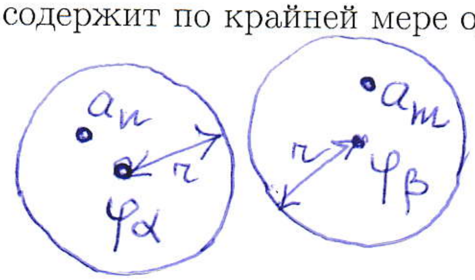
Теорема 2.3. *В сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве E всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетная всюду плотная в E система, а $\{\varphi_\alpha\}$ – ортогональная система.

Без ограничения общности можно считать систему $\{\varphi_\alpha\}$ ортонормированной. Заметим, что

$$\rho(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)^2 = \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \|\varphi_\alpha\|^2 - (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha) + \|\varphi_\beta\|^2 = 2 \quad \text{при} \;\; \alpha \neq \beta.$$

Рассмотрим совокупность шаров $B_r(\varphi_\alpha)$ с $r < \sqrt{2}/2$. Они не пересекаются и каждый из шаров содержит по крайней мере один из элементов $a_n \in A$.



Таким образом существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\{\varphi_\alpha\}$ и некоторым подмножеством счетного множества A.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Во всяком бесконечномерном сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве существует счетная ортонормированная полная система.*

Доказательство. Существование конечного ортонормированного базиса в конечномерном пространстве доказывается с помощью процесса ортогонализации Шмидта. Напомним его.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – линейно независимая система. Тогда, проделав следующие операции

$$
\begin{aligned}
&g_1 = f_1, \quad e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}, \\
&g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1, \quad e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&g_k = f_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} (f_k, e_\ell)e_\ell, \quad e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&g_n = f_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} (f_n, e_\ell)e_\ell, \quad e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|},
\end{aligned}
$$

мы приходим к ортонормированной системе $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Обратим внимание на то, что процесс ортогонализации переводит конечный базис в ортонормированный конечный базис.

Пусть теперь E – бесконечномерное сепарабельное евклидово (унитарное) пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное в E множество. Выделим в этом множестве полную линейно независимую систему $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для этого достаточно исключить из $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ те элементы, которые представляются в виде линейной комбинации предыдущих элементов.

Применяя теперь к $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ процесс ортогонализации Шмидта, получим ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Она полна в E так как $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{span}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})$.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Во всяком подпространстве сепарабельного евклидова (унитарного) пространства существует не более чем счетная ортонормированная полная система.*