3 Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

Опр. Полное бесконечномерное евклидово (унитарное) пространство H называется *гильбертовым пространством.*

Примерами гильбертовых пространств являются пространства ℓ_2 и $L_2(E)$. Скалярные произведения в этих пространствах задаются формулами

$$(x, y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k,$$
$$(x, y)_{L_2(E)} = \int_E x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

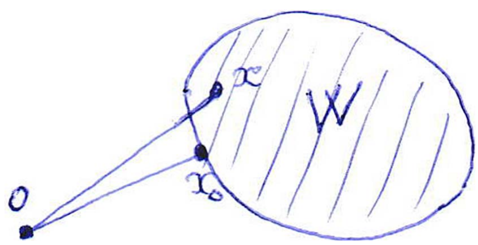
В случае вещественных пространств черта сверху, означающая комплексное сопряжение, не нужна.

Всюду дальше H – гильбертово пространство.

Теорема 3.1. *Пусть W – замкнутое выпуклое подмножество в H.*

Тогда существует единственный элемент $x_0 \in W$ с минимальной нормой, то есть такой элемент, что

$$\|x_0\| = \min_{x \in W} \|x\|.$$



Доказательство. Пусть $d = \inf\limits_{x \in W} \|x\|$. Из определения точной нижней грани следует существование минимизирующей последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ такой, что $d = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

В силу тождества параллелограмма

$$2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) = \|x_n - x_m\|^2 + \|x_n + x_m\|^2 =$$
$$= \|x_n - x_m\|^2 + 4\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\|^2 \geqslant \|x_n - x_m\|^2 + 4d^2.$$

Мы воспользовались тем, что $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$ в силу выпуклости W, и поэтому

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\| \geqslant d = \inf_{x \in W} \|x\|.$$

Таким образом,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4d^2 \leqslant 2(2d^2 + \varepsilon/2) - 4d^2 \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon).$$

Значит,

$$\|x_n - x_m\|^2 < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon).$$

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а гильбертово пространство H полно. Поэтому существует $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in W$. Для него $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$. (Мы воспользовались непрерывностью нормы.)

Предположим, что существует еще один элемент $y_0 \in W$, для которого $\|y_0\| = d$. Тогда

$$\|x_0 - y_0\|^2 = 2(\|x_0\|^2 + \|y_0\|^2) - 4\left\|\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right\|^2 =$$
$$= 4d^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(x_0 + y_0)\right\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

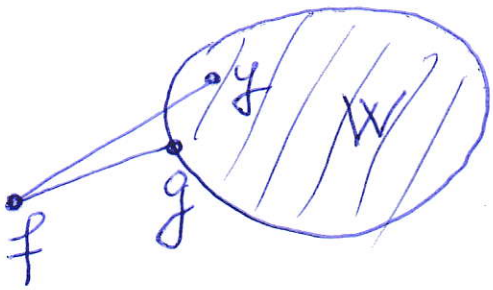
Следовательно $x_0 = y_0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть W – замкнутое выпуклое подмножество в H и $f \in H$. Тогда существует единственный элемент $g \in W$, для которого*

$$\|g - f\| = \min_{y \in W} \|y - f\|.$$

Элемент g называется элементом наилучшего приближения к f в W.



Доказательство. Множество $W - f = \{x = y - f \mid y \in W\}$ выпукло и замкнуто. В силу теоремы 3.1 в $W - f$ существует, причем единственный элемент $x_0 = g - f$ (где $g \in W$) с минимальной нормой

$$\|x_0\| = \min_{x \in W - f} \|x\| \Leftrightarrow \|g - f\| = \min_{y \in W} \|y - f\|.$$

Теорема доказана.