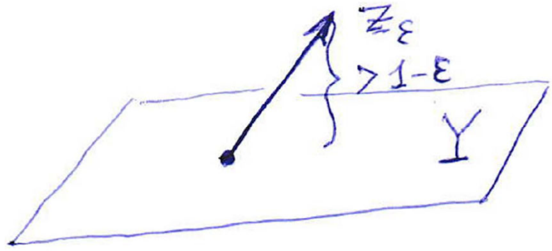
9 Лемма Ф. Рисса о почти перпендикуляре

Теорема 9.1. *Пусть X – бесконечномерное нормированное пространство, а Y замкнутое подпространство в X, не совпадающее с X.*

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует элемент $z_\varepsilon \in X$, $\|z_\varepsilon\| = 1$ такой, что

$$\rho(z_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon.$$



Доказательство. Возьмем $x_0 \in X \setminus Y$. Ясно, что $d = \rho(x_0, Y) > 0$ и для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует $y_\varepsilon \in Y$ такой, что $\|x_0 - y_\varepsilon\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d$.

Положим $z_\varepsilon \quad \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}$. Ясно, что $\|z_\varepsilon\| \quad 1$. В то же время для любого $y \in Y$

$$\|z_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{\left\| x_0 - (y_\varepsilon + \|x_0 - y_\varepsilon\| y) \right\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} \geqslant \frac{d}{d/(1-\varepsilon)} = 1 - \varepsilon.$$

Следовательно $\rho(z_\varepsilon, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Теорема доказана.

Следствие 9.1. *В бесконечномерном нормированном пространстве X сфера*

$$S_1 = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

не предкомпактна.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Возьмем $x_1 \in S_1$. В силу леммы о почти перпендикуляре существует $x_2 \in S_1$ такой, что

$$\rho(x_2, \mathrm{span}\{x_1\}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Далее существует $x_3 \in S_1$ такой, что

$$\rho(x_3, \mathrm{span}\{x_1, x_2\}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

И т.д. Таким образом, существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_1$ такая, что

$$\|x_n - x_m\| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \forall\, n \neq m$$

Ясно, что из нее нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Следствие доказано.