# ЗАНЯТИЕ 17 НОЯБРЯ

## Домашнее задание на 24 ноября

## Задачи 1.1, 1.2a), 1.4 1)– 1.4 10) из раздела 4.1

Обратить внимание на то, что в задачнике преобразование Фурье определено без использования нормирующего множителя $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Использовать определение преобразования Фурье из лекций.

**9.9.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t) = x''(t)$, если:

а) $D(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] \mid \ x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $D(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] \mid x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x(t) \in C^2[0,\pi] \mid x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi)\}$.

**Решение.** Заметим, что искомые собственные значения вещественны и неположительны.

Пусть $x'' = \lambda x$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi x''(t)\overline{x}(t)\,dt = \lambda \int\limits_0^\pi |x(t)|^2\,dt.$$

Следовательно

$$-\int\limits_0^\pi |x'(t)|^2\,dt + x'(\pi)\overline{x}(\pi) - x'(0)\overline{x}(0) = \lambda \int\limits_0^\pi |x(t)|^2\,dt.$$

Учитывая краевые условия, имеем

$$-\int\limits_0^\pi |x'(t)|^2\,dt = \lambda \int\limits_0^\pi |x(t)|^2\,dt.$$

**Ответ.**

а) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = C\sin nt$, $C \neq 0, \quad n \geqslant 1$,

б) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = C\cos nt$, $C \neq 0, \quad n \geqslant 0$,

в) $\lambda n = -4n^2$, $x_0(t) = C \neq 0$, $n = 0$,
$x_n(t) = C_1 \sin 2nt + C_2 \cos 2nt$, $|C_1|^2 + |C_2|^2 \neq 0, \quad n \geqslant 1$,

**9.10.** В комплексном пространстве $C[0, 2\pi]$ рассмотрим оператор $A$ такой, что $Ax(t) = e^{it}x(t)$. Доказать, что $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

**Решение.** Рассмотрим задачу на собственные значения

$$e^{it}x(t) = \lambda x(t) \Leftrightarrow (e^{it} - \lambda)x(t).$$

Если $x(t) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $t_0$, то в этой окрестности $e^{it} \equiv \lambda$, что невозможно. Следовательно дискретный спектр пуст.

Рассмотрим теперь задачу

$$e^{it}x(t) - \lambda x(t) = y(t).$$

Если $|\lambda| \neq 1$, то эта задача однозначно разрешима при любой правой части $y \in C[0, 2\pi]$ и решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{e^{it} - \lambda} y(t)$$

Если же $|\lambda| = 1$, то существует $t_0 \in [0, 2\pi]$ такое, что $e^{it_0} = \lambda$. Поэтому необходимым условием разрешимости является условие $y(t_0) = 0$.

Таким образом, $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

**9.11.** Пусть $L$ – ненулевое замкнутое подпространство в $H$. Найти спектр оператора ортогонального проектирования на $L$.

**Решение.** Воспользуемся разложением

$$H = L \oplus L^{\perp},$$

в силу которого для всякого $x \in H$

$$x = u + v, \quad u \in L,\ v \in L^{\perp}.$$

Здесь $u = Px$, где $P$ – оператор ортогонального проектирования на $L$.

Задача на собственные значения принимает вид

$$u = \lambda u + \lambda v \Leftrightarrow (1-\lambda)u = 0, \quad \lambda v = 0.$$

Если $\lambda = 0$, то собственным является любой ненулевой вектор $v \in L^{\perp}$.

Если $\lambda = 1$, то собственным является любой ненулевой вектор $u \in L$.

$\lambda$, отличные от 0 и 1, не являются собственными значениями.

Рассмотрим теперь задачу

$$Px - \lambda x = y.$$

Запишем ее в виде

$$u - \lambda(u+v) = Py + y - Py \Leftrightarrow (1-\lambda)u = Py, \quad -\lambda v = (I-P)y.$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{1-\lambda}Py, \quad v = -\frac{1}{\lambda}(I-P)y \Rightarrow x = \frac{1}{1-\lambda}Py - \frac{1}{\lambda}(I-P)y.$$

Таким образом, $\operatorname{Sp} P = \{0,1\}$, непрерывный спектр пуст.

**9.12.** Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Может ли резольвента $R_\lambda(A)$ при каких-либо $\lambda$ быть вполне непрерывным оператором?

**Решение.** Нет, так как $\operatorname{Im} R_\lambda(A) = H$.

**9.13.** Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $H$, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим оператор

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Доказать, что: а) $A \in \mathscr{L}(H)$ и $\|A\| = \sup\limits_{k \geqslant 1} |\lambda_k|$;

б) спектр оператора $A$ совпадает с замыканием множества $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Решение.** а)

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^2| (x, e_k)|^2 \leqslant \sup_{k \geqslant 1} |\lambda_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \sup_{k \geqslant 1} |\lambda_k|^2 \|x\|^2.$$

Поэтому $A \in \mathscr{L}(H)$ и $\|A\| \leqslant \sup\limits_{k \geqslant 1} |\lambda_k|$.

Осталось заметить, что $Ae_k = \lambda_k e_k$ для всех $k \geqslant 1$. Поэтому

$$\|A\| \geqslant \frac{\|Ae_k\|}{\|e_k\|} = |\lambda_k| \;\Rightarrow \|A\| \geqslant \sup_{k \geqslant 1} |\lambda_k|.$$

б) Спектр оператора $A$ замкнут. Поэтому $F = [\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}] \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Пусть $\lambda \notin F$. Тогда $\rho(\lambda, F) > 0$. Рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k.$$

Его решение существует для всякого $y \in H$ и имеет вид

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} (y, e_k) e_k,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda|^2} |(y, e_k)|^2 \leqslant \frac{1}{\rho(\lambda, F)^2} \|y\|^2.$$

Следовательно $\mathbb{C} \setminus F \in \rho(A)$.

**Замечание.** Ортонормированная последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ не обязана образовывать базис в $H$. И в этом случае доказанные утверждения будут справедливы.

**9.15.** Пусть $F$ – произвольное непустое замкнутое ограниченное множество комплексных чисел. Показать, что существует оператор $A \in \mathscr{L}(H)$, для которого $\mathrm{Sp}\,(A) = F$.

**Решение.** Возьмем в $H$ произвольную ортонормированную последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Если множество $F$ конечно, то $F = \{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$. Тогда в качестве $A$ можно взять

$$Ax = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Если же множество $F$ бесконечно, то в нем существует всюду плотная последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Взяв оператор

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

из задачи 3.13, мы получим линейный непрерывный оператор, для которого $[\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}] = F$.

**9.16.** Найти резольвенту оператора $A \in \mathscr{L}(C[0,1])$, $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$.

**Решение.** Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Рассмотрим задачу

$$\int\limits_0^t x(s)\,ds - \lambda x(t) = y(t).$$

Полагая $X(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$ придем к задаче

$$\begin{aligned}&X'(t) - \frac{1}{\lambda}X(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t),\\ &X(0) = 0,\end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$X(t) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\tau)}y(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно

$$x(t) = X'(t) = \frac{1}{\lambda}X(t) - \frac{1}{\lambda}y(t) = -\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\tau)}y(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}y(t).$$

**Ответ.**

$$R_\lambda y(t) = -\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\tau)}y(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}y(t).$$