2 Обратное преобразование Фурье

Опр. Пусть $g \in L_1(\mathbb{R})$. Введем *обратное преобразование Фурье* формулой

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} g(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi. \qquad (2.1)$$

Заметим, что для $g \in L_1(\mathbb{R})$ вычисление интеграла в смысле главного значения не нужно. Однако, интеграл (2.1) может существовать и для функций $g \notin L_1(\mathbb{R})$.

При определенных условиях оператор $\mathscr{F}^{-1}$ действительно является обратным к $\mathscr{F}$ и дает равенство

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f] = f.$$

Замечание 2.1. *Как нетрудно видеть, для $g \in L_1(\mathbb{R})$ справедлива элементарная формула*

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) = \mathscr{F}[g](-x).$$

Опр. Пусть f – заданная на $\mathbb{R}$ измеримая функция. Говорят, что функция f удовлетворяет в точке x_0 *условию Дúни*, если

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

Предложение 2.1. *Для непрерывной кусочно-дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции условие Дини выполняется для всех $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. В силу формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\left| \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \right| = \left| \frac{1}{t} \int\limits_{x_0}^{x_0+t} f'(y)\, dy \right| \leqslant M = \sup_{y \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} |f(y)|.$$

Поэтому интеграл из условия Дини конечен.

Предложение доказано.

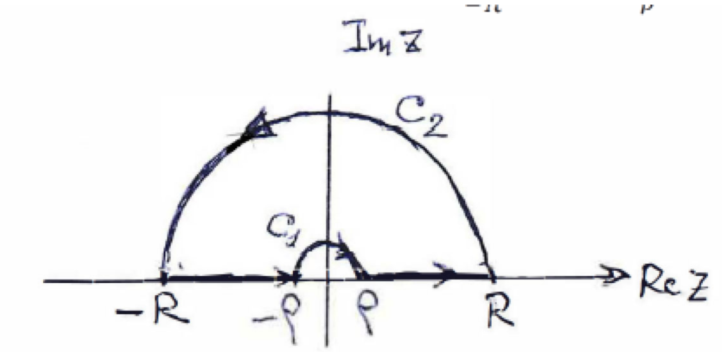
Лемма 2.1. *Справедлива формула*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin At}{t}\,dt = \pi \quad \forall A > 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin At}{t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{\rho\to 0,\ R\to\infty} \Big[\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt\Big] =$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\rho\to 0,\ R\to\infty} \Big[\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{it}}{t}\,dt\Big].$$



В силу теоремы Коши

$$\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int\limits_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

После замены $z = \rho e^{i\varphi}$ имеем

$$\int\limits_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{i\rho e^{i\varphi}}}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} i\,d\varphi = -i\int\limits_{0}^{\pi} e^{i\rho e^{i\varphi}}\,d\varphi \to -\pi i \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Используя замену $z = Re^{i\varphi}$, имеем

$$\Big|\int\limits_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\Big| = \Big|-i\int\limits_{0}^{\pi} e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}\,d\varphi\Big| \leqslant \int\limits_{0}^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin At}{t}\,dt = \frac{1}{i}\lim_{\rho\to 0,\ R\to\infty} \Big[\int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{it}}{t}\,dt\Big] = \pi.$$

Теорема 2.1. *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *удовлетворяет в точке* x_0 *условию Дини. Тогда справедлива формула обращения*

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$S_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \widetilde{f}(\xi) e^{ix_0\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right] e^{ix_0\xi}\, d\xi \to f(x_0) \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем порядок интегрирования:

$$S_A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(x-x_0)\xi}\, dx \right] d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int\limits_{-A}^{A} e^{-i(x-x_0)\xi}\, d\xi \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin A(x-x_0)}{x-x_0}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t}\, dt$$

Используя установленную в лемме 2.1 формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \pi,$$

имеем

$$S_A - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x_0+t) - f(x_0)] \frac{\sin At}{t} dt = I_1 + I_2 - I_3,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} [f(x_0+t) - f(x_0)] \frac{\sin At}{t} dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant N} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t} dt, \qquad I_3 = \frac{f(x_0)}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant N} \frac{\sin At}{t} dt.$$

Покажем, что интегралы I_2 и I_3 могут быть сделаны сколь угодно малыми равномерно по $A \geqslant 1$ выбором N.

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant N} |f(x_0+t)| \frac{\sin At}{t} dt \leqslant \frac{1}{\pi N} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} < \varepsilon/3 \quad \text{для} \quad N \geqslant N(\varepsilon),$$

$$|I_3| = \frac{2|f(x_0)|}{\pi} \Big| \int\limits_N^\infty \frac{\sin At}{t} dt \Big| = \frac{2|f(x_0)|}{\pi} \Big| \int\limits_{AN}^\infty \frac{\sin t}{t} dt \Big| < \varepsilon/3 \quad \text{для} \quad N \geqslant N(\varepsilon), \ A \geqslant 1.$$

Фиксируем $N = N(\varepsilon)$ и введем функцию

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} & |t| \leqslant N, \\ 0 & |t| > N. \end{cases} \tag{2.3}$$

В силу условия Дини $g \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^N [f(x_0+t) - f(x_0)] \frac{\sin At}{t} dt = \int\limits_{-\infty}^\infty g(t) \sin At \, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty g(t) \frac{e^{iAt} - e^{-iAt}}{2i} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \big(\mathscr{F}[g](-A) - \mathscr{F}[g](A) \big) \to 0 \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

Следовательно существует $A(\varepsilon)$ такое, что

$$|I_1| < \varepsilon/3 \quad \text{при} \quad A \geqslant A(\varepsilon).$$

Окончательно

$$|S_A - f(x_0)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad \text{при} \quad A \geqslant A(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Для любой непрерывной кусочно дифференцируемой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ справедлива формула обращения*

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f](x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следствие 2.2. *Если для непрерывной кусочно дифференцируемой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ выполнено равенство $\widehat{f}(\xi) \equiv 0$, то $f(x) \equiv 0$.*

Формулу обращения можно записать в следующей форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi(y-x)}\, dy \Big]\, d\xi.$$

Это **комплексная формула Фурье**.

Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi(y-x)}\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos[\xi(y-x)]\, dy + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin[\xi(y-x)]\, dy$$

Первой слагаемое в правой части является четной по ξ функцией, а второе - нечетной функцией. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos[\xi(y-x)]\, dy \Big]\, d\xi.$$

Это **интегральная формула Фурье**.

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *и существуют такие постоянные* f_+, f_-, *что при некотором* $\delta > 0$ *выполнены условия*

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f_+|}{t} dt < +\infty, \quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f_-|}{t} dt < +\infty.$$

Тогда

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}(f_- + f_+).$$

Как следствие, для кусочно-дифференцируемой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$