Домашнее задание №3

1.8, 1.9 (13); 2.9, 2.11, 2.13, 2.21, 2.26, 2.27, 2.29, 2.32, 2.33 (15-17), 3.12, 3.13 (19)

№1.8

M - $\forall$ непустое мн-во. $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$. M - полное?

Решение: П/т $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) > 0: \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m > N(\varepsilon)$

Это будет выполнено, если $x = x_n$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$, где $x \in M$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow M$ - полное

Ответ: да

№2.9

Всегда ли $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ замкнуто, если A_i - замкнуто

Решение: П/т $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$, а $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} [\frac{1}{i}, 1] = (0, 1]$ - ни открытое, ни замкнутое мн-во.

Ответ: невсегда

№2.11

Д-ть: $B_r(x_0)$ - откр. мн-во

Д-во: Пусть $\xi \in B_r(x_0)$, $\varepsilon < r - \rho(x_0, \xi)$. Рассмотрим $B_\varepsilon(\xi)$ - откр. шар с центром в т. ξ и $r = \varepsilon$.

$\forall y \in B_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \rho(y, x_0) \leq \rho(y, \xi) + \rho(\xi, x_0) < \varepsilon + \rho(\xi, x_0) < \varepsilon + r - \varepsilon = r \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in B_r(x_0) \Rightarrow B_\varepsilon(\xi) \subset B_r(x_0) \Rightarrow \forall$ точка из $B_r(x_0)$ - внутр $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_r(x_0)$ - откр.

ч.т.д.

№2.13

Д-ть: $[B_r(x_0)]$ - замкн.

Д-во: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [B_r(x_0)]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \rho(x_n, x_0) \leq r \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x, x_0) \leq r \Rightarrow [B_r(x_0)]$ - замкн.

ч.т.д.

№2.21

Д-ть: $\partial E = [E] \setminus \operatorname{int} E$

Д-во: $[E] = \operatorname{int} E \cup \partial E$, при этом $\operatorname{int} E \cap \partial E = \varnothing \Rightarrow [E] \setminus \operatorname{int} E = \partial E$

ч.т.д.

№2.26

f - непр. на $\mathbb{R}$ ф-ия. $E_a = \{x: f(x) \geq a\}$

Д-В: E_a - замкн.

Д-во: П $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $f(x_n) \geq a \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \geq a \Rightarrow x \in E_a$

ЧтД.

№2.27

f - непр. на $\mathbb{R}$ ф-ия. $E_a = \{x: f(x) > a\}$

Д-В: E_a - откр.

Д-во: Рассмотрим $\complement E_a = \{x: f(x) \leq a\}$. П $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \complement E_a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
$\Rightarrow f(x_n) \leq a \Rightarrow f(x) \leq a \Rightarrow x \in \complement E_a \Rightarrow \complement E_a$ - замкн.

$\Rightarrow E_a$ - откр.

ЧтД.

№2.29

Д-В: $\{f \in C[0,1]: \alpha < f < \beta \;\; \forall x \in [a,b]\} = \Phi$ - откр.

Д-во: П $f \in \Phi$, $r_1 = f_{min} - \alpha$, $r_2 = -f_{max} + \beta$; $g \in B_r(f)$, $r = \min\{r_1, r_2\}$
$\Rightarrow |g - f| < r \;\; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \alpha \leq f - f_{min} + \alpha \leq f - r < g < f + r \leq f + \beta - f_{max} \leq \beta$

$\Rightarrow$ из $g \in B_r(x_0) \Rightarrow g \in \Phi \Rightarrow B_r(x_0) \subset \Phi \Rightarrow \Phi$ - откр.

ЧтД

№2.32

Д-В: $\forall$ замкн. $M_1 \subset M$ (M - полн. метр. пр-во) - полное метр. пр-во.

Д-во: П на M_1 и M задана одинаковая метрика, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_1$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \exists x \in M$:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
M_1 - замкн $\Rightarrow x \in M_1$

ЧтД.

№2.33

Д-В: $\operatorname{int} E$ где E - $\forall$ мн-во - откр. мн-во.

Д-во: П $x \in \operatorname{int} E \Rightarrow B_r(x) \subset E \Rightarrow \forall y \in B_r(x) \; \exists \; B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset E \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall$ точка y - внутр. $\Rightarrow B_r(x) \subset \operatorname{int} E \Rightarrow \operatorname{int} E$ - откр.

ЧтД.

№3.12

Д-ть: $\Phi = \{f \in C[0,1] : |f| \le a\}$ - огр. и замкн., но не компакт и даже не предкомпакт

Д-во: $\Phi = [B_a(0)]$ - замкн. шар $\Rightarrow$ Φ - замкн. и огр.

Рассмотрим $\{ax^n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. П. $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : f_{n_k} \to f$ в $C[0,1]$

$\Rightarrow f_{n_k} \to f$ $\forall x [0,1]$, в то же время $f_{n_k} \to 0$ если $x \in [0,1)$, а $f_{n_k}(1) \to a$ $\Rightarrow$ f - разрывная ф-ция

$\Rightarrow$ противоречие ч.т.д.

№3.13

$[B_1(0)] \subset l_2$, где $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \Rightarrow \rho(x,0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \le 1$.

П $\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $a_2 = (0, 1, \dots 0)$, ..., $a_n (0, \dots 0, 1, \dots 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(a_n, a_m) = \sqrt{2}$ при $m \ne n$ $\Rightarrow \nexists$ фунд. подпосл-ть $\Rightarrow [B_1(0)]$ - не комп

№1.9

г) l_p, $1 \le p < \infty$

П $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть $\subset l_p$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) > 0$:

$\rho(x_n, x_m) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_{m_k}|^p\right]^{1/p} < \varepsilon$ $\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \forall k \ge 1$

$|x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon$ $\forall n, m > N(\varepsilon)$. $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_{n_k} = x_k$ $\forall k \ge 1$

$\forall N \ge 1$ $\sum_{k=1}^{N} |x_{n_k} - x_{m_k}|^p < \varepsilon^p$ $\forall n, m > N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ в пределе по m:

$\sum_{k=1}^{N} |x_{n_k} - x_k|^p \le \varepsilon^p \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_k|^p \le \varepsilon^p$ $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \exists (x_n - x) \in l_p$

Нер-во Минковского: $\left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right]^{1/p}$

$|x_k - x_{n_k} + x_{n_k}| = |x_k| \le |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k}|$ $\Rightarrow$ по нер-ву Минковского:

$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{n_k}|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow x \in l_p$

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_k|^p \le \varepsilon^p$ $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) \le \varepsilon$ $\forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ l_p - полное

д) l_∞ ($x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\rho = \sup_{n \ge 1} |x_n - y_n|$ (огр)).

П $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$. П $\|x\|_\infty = \sup_{n \ge 1} |x_n|$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ~~посл-ть~~ фунд. посл-ть $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) > 0 : \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \sup_{k \ge 1} |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon$ $\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \forall k \ge 1$ $|x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \ge 1$ $(x_{1k}, x_{2k}, \dots)$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_{n_k} = x_k$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) > 0 : |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon/2$ $\forall k$, $\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$ в пределе по m:

$|x_{n_k} - x_k| \le \varepsilon/2 \quad \forall k, \ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sup\limits_{k \ge 1} |x_k^n - x_k| \le \varepsilon/2 \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \|x_n - x\|_\infty \le \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) \to 0, \ n \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow l_\infty$ - полное

ЧТД.