ГЛАВА 10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1 Преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть f – комплекснозначная функция вещественного переменного $x \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f \in L_1(\mathbb{R})$, если $Re\, f$ и $Im\, f$ – измеримые функции и $|f| \in L_1(\mathbb{R})$. По определению положим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\, f(x)\, dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} Im\, f(x)\, dx.$$

Опр. *Преобразованием Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что функция $\widetilde{f}(\xi)$ определена при всех $\xi \in \mathbb{R}$, причем

$$|\widetilde{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Замечание. В разных источниках определения преобразования Фурье могут отличаться нормировочным множетелем перед интегралом.

Рассмотрим примеры вычисления преобразования Фурье.

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(x\xi)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\alpha x}\cos(x\xi)\right)\Big|_0^{\infty} + \frac{\xi}{\alpha}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(x\xi)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(x\xi)\, dx = \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\widetilde{f}(\xi).$$

Таким образом,

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Пример 2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > a \end{cases}$$

Тогда

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \cos(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

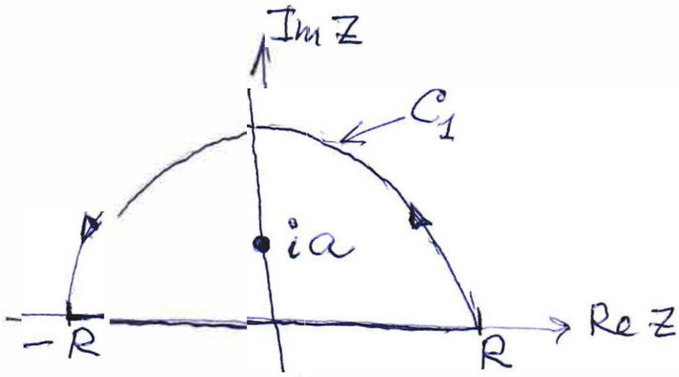
Обратим внимание на то, что $\widetilde{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

Пример 3. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$. Покажем, что $\widetilde{f}(\xi) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a} e^{-a|\xi|}$.

Для вычисления интеграла

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{-i\,x\xi}\, dx.$$

воспользуемся теорий вычетов. Пусть $\xi < 0$.



В точке $z = ia$ функция

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} e^{-i\,z\xi} = \frac{1}{(z - ia)(z + ia)} e^{-i\,z\xi}$$

имеет полюс первого порядка и вычет в этой точке равен

$$\left. \frac{1}{z + ia} e^{-i\,z\xi} \right|_{z=ia} = \frac{1}{2ia} e^{a}$$

Поэтому

$$\int\limits_{C} g(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} g(x)\, dx + \int\limits_{C} g(z)\, dz = 2\pi\, i \frac{1}{2ia} e^{a\xi} = \frac{\pi}{a} e^{a\xi}$$

Интеграл по нижней части контура стремится к $\widetilde{f}(\xi)$ при $R \to \infty$.

Замечая, что на верхней части контура

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^2 - a^2} e^{Im z \cdot \xi} \leqslant \frac{1}{R^2 - a^2},$$

имеем

$$\left| \int\limits_{C_1} g(z)\, dz \right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2 - a^2} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Поэтому

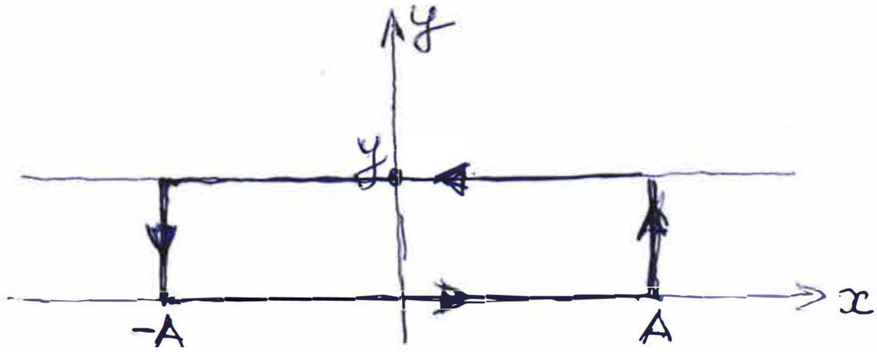
$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{a} e^{a\xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a} e^{a\xi}.$$

Замечая, что функция $\widetilde{f}(\xi)$ четна по ξ, приходим к формуле

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a} e^{-a|\xi|}.$$

Пример 4. Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$. Покажем, что $\widetilde{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ix\xi}\,dx.$$



Применяя для $f(z) = e^{-z^2/2-iz\xi}$ формулу Коши, имеем

$$\int_{-A}^{A} e^{-x^2/2-ix\xi}\,dx - \int_{-A}^{A} e^{-(x+iy)^2/2-i(x+iy)\xi}\,dx + \int_{0}^{y} e^{-(A+is)^2/2-i(A+is)\xi}\,ds -$$

$$- \int_{0}^{y} e^{-(-A+is)^2/2-i(-A+is)\xi}\,ds = 0 \qquad (1.2)$$

Заметим, что

$$\left|e^{-(\pm A+is)^2/2-i(\pm A+is)\xi}\right| = \left|e^{-A^2/2+s^2/2+s\mp iA(s+\xi)}\right| = e^{-A^2/2+s^2/2+s\xi}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{0}^{y} e^{-(A+is)^2/2-i(A+is)\xi}\,ds\right| \leqslant e^{-A^2/2}\int_{0}^{y} e^{s^2/2+s\xi}\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

Переходя к пределу при $A \to \infty$ в равенстве (1.2), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2/2-i(x+iy)\xi}\,dx. \qquad (1.3)$$

Пусть $\xi < 0$. Выбрав $y = -\xi$, имеем

$$e^{-(x-i\xi)^2/2-i(x-i\xi)\xi} = e^{-x^2/2+ix\xi+\xi^2/2-ix\xi-\xi^2} = e^{-x^2/2}e^{-\xi^2}.$$

Поэтому из (1.3) следует

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}\sqrt{2\pi} = e^{-\xi^2/2}.$$

Напомним вывод формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\Big]^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,dxdy = 2\pi\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2/2}r\,dr = 2\pi\big(-e^{-r^2/2}\big)\big|_0^{\infty} = 2\pi.$$

Введем *оператор Фурье* $\mathscr{F}$ формулой

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

В силу неравенства (1.1)

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathscr{F}[f](\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье $\widetilde{f}$ является ограниченной непрерывной функцией, причем*

$$\widetilde{f}(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Доказательство. Ограниченность следует из неравенства (1.4).

Пусть теперь $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$. В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\widetilde{f}(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi_n}\, dx \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx = \widetilde{f}(\xi).$$

Действительно, $f(x)e^{-ix\xi_n} \to f(x)e^{-ix\xi}$ при $n \to \infty$ и $|f(x)e^{-ix\xi_n}| \leqslant |f(x)|$, причем $|f| \in L_1(\mathbb{R})$.

Покажем теперь, что $\widetilde{f}(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. Заметим, что при $|\xi| \neq 0$ верно

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx &= -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(x\xi - \pi)}\, dx = \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(x - \pi/\xi)\xi}\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x + \pi/\xi) e^{-ix\xi}\, dx.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x + \pi/\xi)) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Используя свойство непрерывности функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ относительно сдвига, имеем

$$|\widetilde{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x + \pi/\xi)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Теорема доказана.

Таким образом, оператор Фурье $\mathscr{F}$ является линейным непрерывным оператором, действующим из $L_1(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(\mathbb{R})$, $f \in L_1(\mathbb{R})$. *Если* $f_n \to f$ *в* $L_1(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$, *то* $\widetilde{f}(\xi) \rightrightarrows \widetilde{f}(\xi)$ *на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Используя неравенство (1.4), имеем

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}[f_n](\xi) - \mathscr{F}[f](\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}[f_n - f](\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Пусть f – непрерывная кусочно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, причем $f \in L_1(\mathbb{R})$, $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\mathscr{F}[f'](\xi) = i\xi\mathscr{F}[f](\xi).$$

Доказательство. Заметим, что

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt \to c_\pm \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty,$$

так как $f' \in L_1(\mathbb{R})$.

Ясно, что $c_\pm = 0$, ибо в противном случае $f \notin L_1(\mathbb{R})$. Поэтому $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Следовательно

$$\mathscr{F}[f'](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \left[\left(f(x)e^{-ix\xi}\right)\Big|_{-A}^{A} + i\xi \int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \right] = i\xi\mathscr{F}[f](\xi).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть $f \in C^n(\mathbb{R})$. Если $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\mathscr{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \mathscr{F}[f](\xi).$$

Следствие 1.2. *В условиях следствия 1.1 справедливо свойство*

$$\mathscr{F}[f](\xi) = o\left(1/|\xi|^n\right) \quad \text{\textit{при}} \quad |\xi| \to \infty.$$

Теорема 1.4. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $xf \in L_1(\mathbb{R})$. *Тогда* $\mathscr{F}[f] \in C^1(\mathbb{R})$ *и*

$$\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[(-ix)f].$$

Доказательство. Фиксируем $\xi \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\frac{\widetilde{f}(\xi+h) - \widetilde{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi}}{h}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_h(x)\, dx,$$

где

$$F_h(x) = (-ix) f(x) e^{-ix\xi}\, \frac{e^{-ixh} - 1}{-ixh}.$$

Заметим, что

$$|e^{-ixh} - 1|^2 = (\cos(xh) - 1)^2 + \sin^2(xh) = 2(1 - \cos(xh)) = 4\sin^2(xh/2) \leqslant |xh|^2.$$

Поэтому

$$|F_h(x)| = |xf(x)| \frac{|e^{-ixh} - 1|}{|xh|} \leqslant |xf(x)| \in L_1(\mathbb{R}).$$

Кроме того,

$$F_h(x) \to (-ix) f(x) e^{-ix\xi} \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости существует

$$\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{\widetilde{f}(\xi+h) - \widetilde{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\xi}\, dx = \mathscr{F}[(-ix)f](\xi).$$

Непрерывность производной $\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[(-ix)f]$ следует из теоремы 1.1.

Теорема доказана.

Следствие 1.3. *Пусть* $(1 + |x|^n) f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. *Тогда* $\mathscr{F}[f] \in C^n(\mathbb{R})$ *и*

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[(-ix)^n f].$$