№1.4.

а) $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$

1. $\rho(x,y) = \sin(x-y)\cdot\sin(x-y) \geq 0$ - верно

2. $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$

$\rho(y,x) = \sin^2(y-x) = \sin(y-x)\sin(y-x) = (-1)\sin(x-y)(-1)\cdot\sin(x-y)$

$= \sin^2(x-y) = \rho(x,y)$ - верно

3. $\sin^2(x-y) = 0 \Rightarrow \sin(x-y) = 0 \Rightarrow x-y = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ может быть ситуация, когда $x \neq y \Rightarrow$ не метрика

б) $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

1. $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$ - верно

2. $\rho(y,x) = \sqrt{|y-x|} = \sqrt{|x-y|}$ - верно

3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (1)

$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$; $x-z = \xi$; $z-y = \theta$

$x-y = \xi + z - (z-\theta) = \xi + \theta$

$\Rightarrow \sqrt{|\xi+\theta|} \leq \sqrt{|\xi|} + \sqrt{|\theta|}$

Очев. $|\xi+\theta| \leq |\xi| + |\theta| \Rightarrow \sqrt{|\xi+\theta|} \leq \sqrt{|\xi|+|\theta|}$

Если рассматривать $\forall \xi \geq 0$ и $\forall\theta\geq 0$, то получим:

$\sqrt{\xi+\theta} \leq \sqrt{\xi} + \sqrt{\theta} \Rightarrow$ (1) верно

$\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ - метрика

в) $\rho(x,y) = |x^2-y^2|$

1. $|x^2-y^2| \geq 0$ - верно

2. $\rho(y,x) = |y^2-x^2| = |x^2-y^2| = \rho(x,y)$ - верно

3. ~~$|x^2-y^2| \leq |x^2-z^2| + |z^2-y^2|$~~

$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow |x^2-y^2| = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

Пусть $x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow |x^2-y^2| = |1-1| = 0$, но $x \neq y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не метрика

Если рассматривать на $[0;+\infty)$, то нужно рассмотреть нер-во треугольника:

$|x^2-y^2| \leq |x^2-z^2| + |z^2-y^2|$; $x^2-z^2 = \xi$; $z^2-y^2 = \theta$

$x^2-y^2 = \xi + z^2 - (z^2-\theta) = \xi+\theta$

$|\xi+\theta| \leq |\xi| + |\theta|$ - верно

$\Rightarrow \rho(x,y) = |x^2-y^2|$ - метрика, если рассматриваем на $[0;+\infty)$.

г) $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-y| = 0 \\ 1+|x-y| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$

1. $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \geq 0$ – верно

2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ – верно

3. $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$; $\xi = x - z$ $\quad \theta = z - y$
$x - y = \xi + \theta$

$\frac{|\xi+\theta|}{1+|\xi+\theta|} \leq \frac{|\xi|}{1+|\xi|} + \frac{|\theta|}{1+|\theta|} = \frac{|\xi|(1+|\theta|) + |\theta|(1+|\xi|)}{(1+|\xi|)(1+|\theta|)} =$
$= \frac{|\xi| + |\theta| + 2|\xi\theta|}{1+|\xi|+|\theta|+|\xi\theta|}$

$\frac{|\xi|+|\theta|}{1+|\xi|+|\theta|} \geq \frac{|\xi+\theta|}{1+|\xi+\theta|}$

$\frac{|\xi|+|\theta|}{1+|\xi|+|\theta|} \leq \frac{|\xi|+|\theta|+2|\xi\theta|}{1+|\xi|+|\theta|+|\xi\theta|} = \frac{|\xi|}{1+|\xi|} + \frac{|\theta|}{1+|\theta|}$

$\Rightarrow$ верно $\Rightarrow$ $\rho(x,y)$ – метрика

№1.5.

$\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$

1. $\operatorname{arctg}|x-y| \geq 0$ – верно

2. $\operatorname{arctg}|y-x| = \operatorname{arctg}|x-y| \Leftrightarrow \rho(x,y) = \rho(y,x)$

3. $\operatorname{arctg}|x-y| \leq \operatorname{arctg}|x-z| + \operatorname{arctg}|z-y|$
$\operatorname{arctg}|x-y| < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}|x-z| < \pi/2$; $\operatorname{arctg}|z-y| < \pi/2$
$\operatorname{arctg}|x-y| \leq \frac{\pi}{2} + \pi/2 = \pi$ – верно
$\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ – метрика

Полнота:

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд. посл-ть по $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y| \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(a_n, a_m) = \operatorname{arctg}|a_n - a_m| < \operatorname{arctg}\varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$
$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд. по $\rho(x,y) = |x-y|$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}|a_n - a| = 0 \Rightarrow$ метр. пр-во полное.

№1.6.

Пусть S - расстояние между x и y, где $x, y \in X$.

1. $S \geq 0$ - очевидно. $S = 0 \Rightarrow$ точки совпадают $\Rightarrow x = y$

2. Пусть S' - расстояние от y до x.
Очевидно, что $S = S'$

3. S - расстояние от x до y
S' - расстояние от x до z
S'' - расстояние от z до y.

S - кратчайшая дуга $\Rightarrow$ т. z лежит на большей дуге $\Rightarrow$
$\Rightarrow S' + S'' \geq S$

Данное расстояние удовлетворяет аксиомам метрики.

№1.8.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$ - выполняется,

если $x = x_n \ \forall n \geq N$ (x - элемент из M) $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$
$\Rightarrow$ пр-во полное

№1.9

а) По критерию Коши $\forall$ фунд. посл-ть сх-ся $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ полное

б) Пусть $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ - фунд. $\Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^m$:
$\vec{x}_n \to \vec{x}$ при $n \to \infty$ $\Rightarrow$

M - замкнутое мн-во $\Rightarrow \vec{x} \in M$

$\Rightarrow$ полное

г) $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть. $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(x_n, x_m) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_{m_k}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall k \geq 1 \quad |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$

$\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = x_k \quad \forall k \geq 1$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_{m_k}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$. Фиксируем $M \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{M} |x_{n_k} - x_{m_k}|^p < \varepsilon^p \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{M} |x_{n_k} - x_k|^p \leq \varepsilon^p$ при $m \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x_k|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow (x_n - x) \in \ell_p$

Нер-во Минковского:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}$$

Применяя к нашему случаю получим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{n_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}|^p\right)^{1/p} < \infty$$

$\Rightarrow x \in \ell_p$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}-x_k|^p \le \varepsilon^p \quad \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_n, x) \le \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$\Rightarrow \rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$

$\Rightarrow$ полное.

№1.12

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)|$$

1. $\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)| \ge 0$ - очевидно

$\rho(\varphi, \psi) = 0 \Rightarrow \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)| = 0 \iff \varphi(t) \equiv \psi(t)$

$\Rightarrow$ выполнено

2. $\rho(\psi, \varphi) = \sup_{t\in E}|\psi(t)-\varphi(t)| = \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)| = \rho(\varphi, \psi)$

$\Rightarrow$ выполнено

3. $|\varphi(t)-\psi(t)| \le |\varphi(t)-\xi(t)| + |\xi(t)-\psi(t)| \Rightarrow$

$|\varphi(t)-\psi(t)| \le \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\xi(t)| + \sup_{t\in E}|\xi(t)-\psi(t)| \Rightarrow$

$\sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)| \le \sup_{t\in E}|\varphi(t)-\xi(t)| + \sup_{t\in E}|\xi(t)-\psi(t)| \Rightarrow$

$$\rho(\varphi, \psi) \le \rho(\varphi, \xi) + \rho(\xi, \psi)$$

$\Rightarrow$ выполнено.

ч.т.д.

№1.13.

Пусть $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть из E $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 :\ \rho(\theta_n, \theta_m) = \sup_{t\in E}|\theta_n-\theta_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in E\ |\theta_n-\theta_m| < \varepsilon \Rightarrow \{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\theta_n(t) = \theta(t) \quad \forall t \in E$

$|\theta_n(t)-\theta_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in E \Rightarrow$ в пределе по m получим:

$|\theta_n(t)-\theta(t)| \le \varepsilon \quad \forall t \in E$

Тогда рассмотрим $|\theta(t)| = |\theta(t) + \theta_n(t) - \theta_n(t)| \le$

$\leq |\theta_n(t) - \theta(t)| + |\theta_n(t)| \leq \varepsilon + |\theta_n(t)| \quad \forall t \in E$

$\Rightarrow$ ф-ция θ явл-ся ограниченной.

$|\theta_n(t) - \theta(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\theta_n, \theta) = \sup\limits_{t \in E} |\theta_n(t) - \theta(t)| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\theta_n, \theta) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ полное

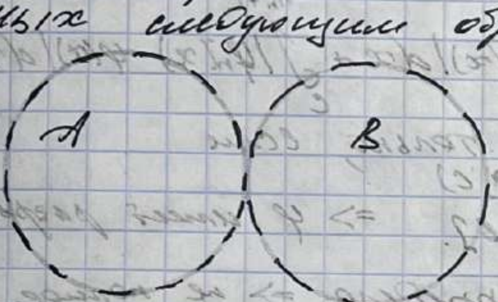
ч.т.д.

№1.7.

$A, B \subset M$

$\rho(A, B) = \inf\limits_{x \in A,\, y \in B} \rho(x, y)$

Допустим, что A и B - два открытых круга, расположенных следующим образом:



Очевидно что $\rho(A,B) = 0$, но в то же время $A \neq B \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(A,B) = \inf\limits_{x \in A,\, x \in B} \rho(x,y)$ - не метрика

№1.9

в) $C[a,b]$; $\rho(x,y) = \max\limits_{[a,b]} |x(t) - y(t)|$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть из $C[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(\varphi_n, \varphi_m) = \max\limits_{[a,b]} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon \ \forall n, m > N$

$\Rightarrow |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [a,b] \ \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow \varphi(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(t)$

$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [a,b] \ \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$ в пределе по „m":

$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \ \forall t \in [a,b] \ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх-ся к φ

$\Rightarrow \varphi \in C[a,b]$.

$\Rightarrow \rho(\varphi_n, \varphi) = \max\limits_{[a,b]} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon) \Leftrightarrow \varphi_n \to \varphi$

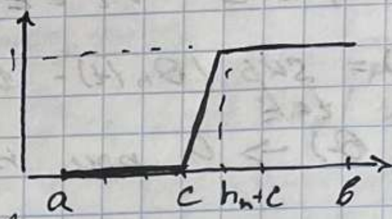
ч.т.д.

№1.10.

$\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – посл-ть непр. ф-ий на $[a,b]$:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,c] \\ 1, & x \in [c+h_n, b] \\ \frac{x-c}{h_n}, & x \in (c, c+h_n) \end{cases}$$



$$\rho(\varphi_n,\varphi_m) = \int\limits_a^b |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|\,dx = \int\limits_c^{h_n+c} |\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|\,dx \le h_n \quad \forall m>n$$

Пусть $N = \frac{b-c}{\varepsilon} \Rightarrow \rho(\varphi_n,\varphi_m) < \varepsilon \quad \forall m>n>N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд.

Пусть $\exists$ непр. ф-ия φ: $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(\varphi_n,\varphi) = \int\limits_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx = \int\limits_a^c |0-\varphi(x)|\,dx + \int\limits_c^{h_n+c} |\varphi_n(x)-\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{c+h_n}^b |1-f(x)|\,dx \to 0,$$

что возможно только, если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,c) \\ 1, & x \in (c,b] \end{cases} \Rightarrow \varphi \text{ имеет разрыв} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в пр-ве $\exists$ фунд. посл-ть без предела $\Rightarrow$ не полное

№1.11

$\rho(x,y) = \left[\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt\right]^{1/2}$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – посл-ть непр. ф-ий на $[a,b]$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & t \in [a,c] \\ \frac{t-c}{h_n}, & t \in (c, c+h_n) \\ 1, & t \in [c+h_n, b] \end{cases} \qquad c \in (a,b), \quad h_n = \frac{b-c}{n}$$

$$\rho(\varphi_n,\varphi_m) = \left[\int\limits_a^b |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|^2\,dt\right]^{1/2} = \left[\int\limits_c^{c+h_n} |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \le$$
$$\le h_n \quad \forall m>n$$

Выберем $N(\varepsilon) = \frac{b-c}{\varepsilon} \Rightarrow \rho(\varphi_n,\varphi_m) < \varepsilon \quad \forall m>n>N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд.

Пусть $\exists$ непр. ф-ия φ: $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(\varphi_n,\varphi) = \left[\int\limits_a^b |f_n(t)-f_m(t)|^2\,dt\right]^{1/2} = \left[\int\limits_a^c |0-\varphi(t)|^2\,dt\right]^{1/2} +$$
$$+ \left[\int\limits_c^{c+h_n} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|^2\,dt\right]^{1/2} + \left[\int\limits_{c+h_n}^b |1-\varphi(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \to 0 \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a,c) \\ 1, & t \in [c,b] \end{cases} \Rightarrow \text{есть разрыв} \Rightarrow \text{в пр-ве } \exists$$

фунд. посл-ть без предела $\Rightarrow$ не полное.

№1.9

б) l_∞: $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\rho(x,y) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - y_n|$

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть в l_∞ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(x_n, x_m) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. числ. посл-ть $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$. Перейдём к преду по „m“:

$|x_n - x| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх-ся к x $\Rightarrow$ $x \in l_\infty$

$\Rightarrow$ $\rho(x_n, x) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - x| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$

ч.т.д.