3 Обратный оператор

Опр. Пусть X, Y – линейные пространства. Оператор A, действующий из $D(A) \subset X$ в Y, называется *обратимым*, если для каждого $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный его прообраз $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$.

Если A обратим, то оператор, ставящий в соответствие элементу $y \in \operatorname{Im} A$ его прообраз x, называется *обратным* к A и обозначается через A^{-1}.

Теорема 3.1. *Обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = O$.

Доказательство. Пусть A – обратимый оператор. Если $\operatorname{Ker} A \neq O$, то существует элемент $x \in D(A)$, $x \neq 0$ такой, что $Ax = 0$. Но тогда у элемента $0 \in Y$ существует два прообраза: $x, 0 \in X$, что противоречит обратимости A.

Пусть теперь $\operatorname{Ker} A = O$. Предположим, что для некоторого $y \in \operatorname{Im} A$ существуют два прообраза x_1, x_2. Тогда

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = 0 \quad \Rightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Следовательно A обратим.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$ и $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Тогда

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Следовательно

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Для того, чтобы линейный оператор A, действующий из X на Y, имел непрерывный обратный, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $m > 0$ такая, что*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X \quad \forall\, x \in X \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует непрерывный обратный оператор A^{-1}. Тогда

$$\|x\|_X = \|A^{-1}Ax\| \leqslant \|A^{-1}\|\|Ax\|_Y \Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|_X \leqslant \|Ax\|_Y,$$

то есть неравенство (3.1) выполняется с $m = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Достаточность. Пусть выполнено (3.1). Тогда $\operatorname{Ker} A = O$ и поэтому оператор A обратим и определен на Y (поскольку $\operatorname{Im} A = Y$). Из (3.1) для $x = A^{-1}y$ следует, что

$$\|x\|_X \leqslant m^{-1}\|Ax\|_Y \quad \Leftrightarrow \|A^{-1}y\|_Y \leqslant m^{-1}\|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y,$$

в силу чего $\|A^{-1}\| \leqslant m^{-1}$.

Теорема доказана.

Опр. Говорят, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\operatorname{Im} A = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

Следуюшая теорема является одной из основных теорем линейного функционального анализа.

Теорема 3.4. *(Теорема Банаха об обратном операторе)*

Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, где X, Y – банаховы пространства, причем $\operatorname{Im} A = Y$. *Если оператор A обратим, то $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.*

Мы приводим теорему Банаха об обратном операторе без доказательства.