2 Фактор-пространство

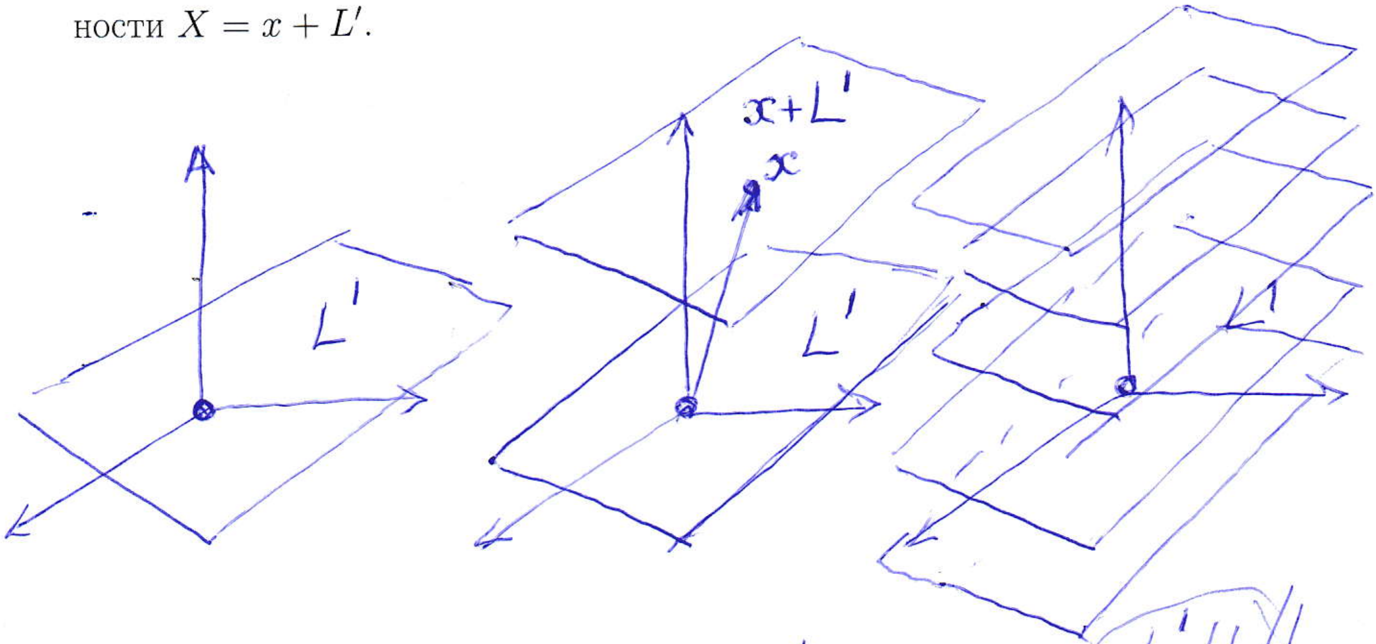
Опр. Пусть L' – некоторое (собственное) подпространство в L.

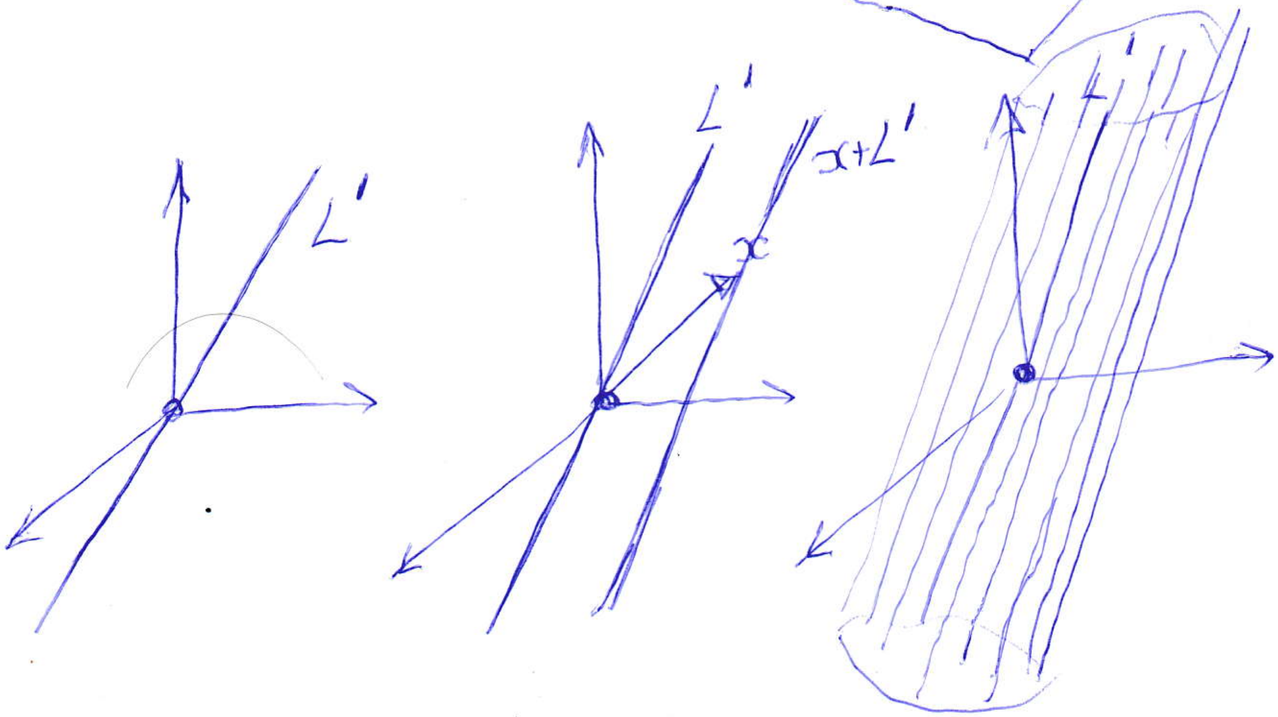
Будем говорить, что элементы x и y *эквивалентны*, если $x - y \in L'$.

Класс $X = \{y \in L \mid y - x \in L'\}$ элементов, эквивалентных фиксированному элементу $x \in L$, называется *классом смежности* (пространства L по подпространству L'), порожденным элементом x. Ясно, что $X = x + L'$.

Совокупность всех классов смежности называется *фактор-пространством пространства L по подпространству L'* и обозначается через L/L'.

Таким образом, элементами фактор-пространства L/L' являются классы смежности $X = x + L'$.





Пусть $X = x + L'$ и $Y = y + L'$ – классы смежности, порожденные элементами x и y соответственно. Тогда

$$X + Y = \{(x + z) + (y + w) \mid z, w \in L'\} = x + y + L',$$
$$\lambda X = \{\lambda(x + z) \mid z \in L'\} = \{\lambda x + \lambda z \mid z \in L'\} = \lambda x + L'.$$

Таким образом, арифметические операции над классами смежности сводятся к арифметическим операциям над порождающими элементами.

Теорема 2.1. *Фактор-пространство L/L' является линейным пространством относительно введенных в L операций сложения множеств и умножения множества на число.*

Доказательство. Как уже было замечено, сумма классов смежности X и Y, порожденных элементами x и y и умножение класса X на число, дают классы смежности

$$X + Y = x + y + L', \quad \lambda X = \lambda x + L'.$$

Роль нулевого элемента играет класс $O = L'$, порожденный нулевым элементом.

Роль элемента, противоположного классу $X = x + L'$, играет класс $X' = x' + L'$, где $x' = (-1)x$ – элемент, противоположный элементу x.

Выполнение остальных аксиом линейного пространства в L/L' следует из выполнения соответствующих аксиом линейного пространства L.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_p$ и X – классы смежности, порожденные элементами $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и x соответственно.*

Равенство

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + y, \quad y \in L'.$$

Опр. Размерность фактор-пространства L/L' называется *коразмерностью* подпространства L' относительно пространства L.

Теорема 2.2. *Подпространство L' пространства L имеет конечную коразмерность, равную p, тогда и только тогда, когда существует подпространство N пространства L такое, что*

$$\dim N = p \quad \text{и} \quad L = L' \oplus N.$$

Доказательство. 1) Пусть $\dim(L/L') = p < \infty$. Тогда в L/L' существует базис

$$X_1 = x_1 + L',\ X_2 = x_2 + L', \ldots, X_p = x_p + L'.$$

Заметим, что $x_1, x_2, \ldots, x_p$ линейно независимы, так как в противном случае $X_1, X_2, \ldots, X_p$ были бы линейно зависимы.

Возьмем произвольный элемент $x \in L$. Тогда для соответствующего класса смежности $X = x + L'$ справедливо

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p \Leftrightarrow x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + y, \quad y \in L'$$

Таким образом, $L = N + L'$, где $N = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$.

Покажем, что эта сумма является прямой. Предположим, что существует еще одно представление элемента x в виде

$$x = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \cdots + \alpha_p' x_p + y', \quad y' \in L.$$

Тогда

$$0 = (\alpha - \alpha_1')x_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')x_2 + \cdots + (\alpha_p - \alpha_p')x_p + y - y'.$$

Как следствие,

$$O = (\alpha_1 - \alpha_1')X_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')X_2 + \cdots + (\alpha_p - \alpha_p')X_p$$

и поэтому $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2', \ldots, \alpha_p = \alpha_p'$, $y = y'$.

Таким образом, $L = L' \oplus N$, где $\dim N = p$.

2) Пусть теперь $L = L' \oplus N$ и $\dim N = p < \infty$.

Возьмем в N базис $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и рассмотрим соответствующие классы смежности

$$X_1 = x_1 + L', X_2 = x_2 + L', \ldots, X_p = x_p + L'.$$

Покажем, что они линейно независимы. Заметим, что

$$O = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p \Leftrightarrow 0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + y, \quad y \in L'.$$

Так как $L = L' \oplus N$, это означает, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = 0, \quad y' = 0.$$

Следовательно $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0$.

Значит, классы X_1, X_2,..., X_p линейно независимы.

Возьмем теперь произвольный класс смежности $X = x + L'$. Имеем

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + y, \quad y \in L \Rightarrow X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p.$$

Таким образом, X_1, X_2,..., X_p – базис в L/L' и $\dim\,(L/L') = p$.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть* $\dim L = n < \infty$. *Тогда*

$$\dim\,(L/L') = p \Leftrightarrow \dim L' = n - p.$$

ДЗ 2.1. Доказать справедливость следствия 2.1.