

2 Евклидовы и унитарные пространства

Опр. Скалярным произведением в вещественном (комплексном) линейном пространстве E называется вещественнозначная (комплекснозначная) функция (x, y) , определенная на $E \times E$ и обладающая следующими свойствами:

- 1) $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in E \quad ((x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in E);$
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in E;$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C});$
- 4) $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in E; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Вещественное (комплексное) линейное пространство E с введенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым (унитарным) пространством*.

Всякое евклидово (унитарное) пространство E является нормированным с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (2.1)$$

Данная норма и скалярное произведение в E называются *согласованными*.

Замечание 2.1. Свойства 2), 3) говорят о том, что (при фиксированном втором аргументе y) скалярное произведение является линейным функционалом первого аргумента x .

Замечание 2.2. Из свойств 1) – 3) скалярного произведения следуют следующие свойства:

- 5) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in E;$
- 6) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}).$

Действительно,

$$\begin{aligned} (x, y_1 + y_2) &= \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2), \\ (x, \lambda y) &= \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом (при фиксированном первом аргументе x) скалярное произведение является линейным функционалом второго аргумента y в случае евклидова пространства и – сопряженно-линейным функционалом в случае унитарного пространства.

Замечание 2.3. Обратим внимание на то, что в случае евклидова пространства

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

а в случае унитарного пространства

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2.$$

Действительно, использование свойств 2) и 5) дает

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + (y, x) + (x, y) + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Примеры евклидовых и унитарных пространств.

1. Пространство \mathbb{R}^m со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k y_k.$$

2. Пространство \mathbb{C}^m со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k \bar{y}_k.$$

3. вещественное пространство ℓ_2 со скалярным произведением

$$(x, y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

4. Комплексное пространство ℓ_2 со скалярным произведением

$$(x, y)_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

5. вещественное пространство $L_2(E)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(E)} = \int_E f(x) g(x) dx.$$

6. Комплексное пространство $L_2(E)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(E)} = \int_E f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Теорема 2.1. В евклидовом (унитарном) пространстве E справедливо неравенство Коши-Буняковского (неравенство Шварца):

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in E.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай евклидова пространства. Пусть $x, y \in E$ и $x, y \neq 0$. Заметим, что

$$0 \leq (tx + y, tx + y) = t^2 \|x\|^2 + 2t(x, y) + \|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Рассмотрим теперь случай унитарного пространства. Воспользуемся представлением комплексного числа (x, y) в виде

$$(x, y) = |(x, y)| e^{i\varphi}. \quad (2.2)$$

Положим $z = e^{-i\varphi} x$. Из (2.2) следует, что

$$(z, y) = |(x, y)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq (tz + y, tz + y) &= t^2 \|z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(z, y) + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |(x, y)| + \|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D = 4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Справедливо неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (2.3)$$

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $|\operatorname{Re}(x, y)| \leq |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Замечание 2.4. Из определения (2.1) нормы и свойств скалярного произведения следует, что

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{и} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \|x\|.$$

Кроме того, справедливо неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Поэтому величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ действительно является нормой.

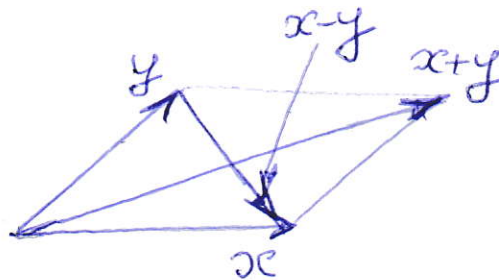
Предложение 2.1. Справедливо тождество параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E.$$

Доказательство. Действительно,

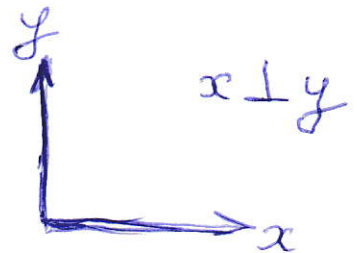
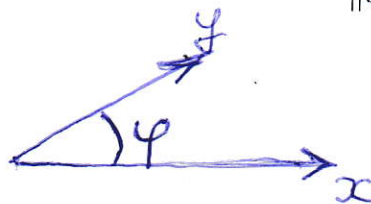
$$\begin{aligned} & \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \\ & = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2 = \\ & = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Предложение доказано.



Опр. Угол φ между ненулевыми векторами $x, y \in E$ определяется формулой

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$



Опр. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. То, что x и y ортогональны, записывают так: $x \perp y$.

Опр. Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\} \subset E$ называется *ортгогональной*, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при всех $\alpha \neq \beta$.

Если дополнительно $\|x_\alpha\| = 1$ для всех α , то система $\{x_\alpha\}$ называется *ортонормированной*.

Теорема 2.2. *Всякая ортгогональная система линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}$ - ортгогональная система.

Возьмем произвольную конечную подсистему $\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ и приравняем линейную комбинацию векторов этой подсистемы нулю:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\alpha_i} = 0.$$

Умножив скалярно левую и правую часть этого равенства на x_{α_j} , получим

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}) = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Таким образом, система $\{x_\alpha\}$ линейно независима.

Теорема доказана.

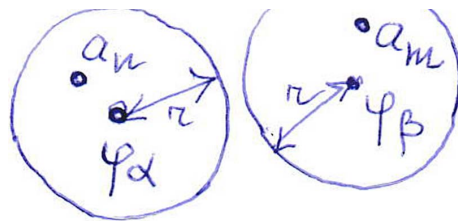
Теорема 2.3. *В сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве E всякая ортгогональная система не более чем счетна.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ - счетная всюду плотная в E система, а $\{\varphi_\alpha\}$ - ортгогональная система.

Без ограничения общности можно считать систему $\{\varphi_\alpha\}$ ортонормированной. Заметим, что

$$\rho(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)^2 = \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \|\varphi_\alpha\|^2 - (\varphi_\alpha, \varphi_\beta) - (\varphi_\beta, \varphi_\alpha) + \|\varphi_\beta\|^2 = 2 \quad \text{при } \alpha \neq \beta.$$

Рассмотрим совокупность шаров $B_r(\varphi_\alpha)$ с $r < \sqrt{2}/2$. Они не пересекаются и каждый из шаров содержит по крайней мере один из элементов $a_n \in A$.



Таким образом существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\{\varphi_\alpha\}$ и некоторым подмножеством счетного множества A .

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Во всяком бесконечномерном сепарабельном евклидовом (унитарном) пространстве существует счетная ортонормированная полная система.*

Доказательство. Существование конечного ортонормированного базиса в конечномерном пространстве доказывается с помощью процесса ортогонализации Шмидта. Напомним его.

Пусть f_1, f_2, \dots, f_n – линейно независимая система. Тогда, проделав следующие операции

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, & e_1 &= \frac{g_1}{\|g_1\|}, \\ g_2 &= f_2 - (f_2, e_1)e_1, & e_2 &= \frac{g_2}{\|g_2\|}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_k &= f_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} (f_k, e_\ell)e_\ell, & e_k &= \frac{g_k}{\|g_k\|}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_n &= f_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} (f_n, e_\ell)e_\ell, & e_n &= \frac{g_n}{\|g_n\|}, \end{aligned}$$

мы приходим к ортонормированной системе e_1, e_2, \dots, e_n .

Обратим внимание на то, что процесс ортогонализации переводит конечный базис в ортонормированный конечный базис.

Пусть теперь E – бесконечномерное сепарабельное евклидово (унитарное) пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – счетное всюду плотное в E множество. Выделим в этом множестве полную линейно независимую систему $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Для этого достаточно исключить из $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ те элементы, которые представляются в виде линейной комбинации предыдущих элементов.

Применяя теперь к $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ процесс ортогонализации Шмидта, получим ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Она полна в E так как $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \text{span}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Во всяком подпространстве сепарабельного евклидова (унитарного) пространства существует не более чем счетная ортонормированная полная система.*