№2.1

Д-во:

Допустим, что x - предельная точка E $\Rightarrow \forall n \geq 1\ \exists B_{\frac{1}{n}}(x)$

$\exists x_n \in B_{1/n}(x): x_n \neq x \Rightarrow \rho(x_n, x) < 1/n$; $1/n \to 0$ при $n \to \infty$

$\Rightarrow x_n \to x$

Пусть $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E: x_n \neq x, x_n \to x$ при $n \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \rho(x_n, x) < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$

Ч.Т.Д.

№2.7.

Показать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ - не всегда открыто, где A_n - открытое

Пусть $A_n = (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Очевидно A_n - открытое

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) = (a-1, b+1) \cap (a-\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}) \cap \ldots \cap (a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) \cap \ldots =$$

$= [a, b]$ - замкнутое мн-во.

№2.9

$\bigcup_{i \in I} A_i$ - всегда ли замкнуто, если A_i - замкнуто

Заметим, что $(0, 1] = \bigcup_{i=2}^{\infty}[\frac{1}{i}, 1]$. $[\frac{1}{i}, 1]\ \forall i \geq 2$ - замкнуто

$$\bigcup_{i=2}^{\infty}[\tfrac{1}{i}, 1] = [\tfrac{1}{2}, 1] \cup [\tfrac{1}{3}, 1] \cup [\tfrac{1}{4}, 1] \cup [\tfrac{1}{5}, 1] \cup \ldots \cup [\tfrac{1}{i}, 1] \cup \ldots =$$

$= (0, 1]$ - не замкнутое мн-во.

№2.10

Пусть $\xi \in (a, b)$, $r = \min\{x-a, b-x\}$.

Тогда заметим, что $(x-r, x+r) \subset (a, b) \Rightarrow \forall$ точка из (a, b) является внутренней $\Rightarrow (a, b)$ - открытое

№2.11.

Пусть $\xi \in B_r(x_0)$. Пусть $\varepsilon < r - \rho(x_0, \xi)$. Рассмотрим $B_\varepsilon(\xi)$ - открытый шар радиуса ε в т. ξ. Пусть $y \in B_\varepsilon(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(y, x_0) \le \rho(y, \xi) + \rho(\xi, x_0) < \varepsilon + \rho(\xi, x_0) < r \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in B_r(x_0) \Rightarrow B_\varepsilon(\xi) \subset B_r(x_0) \Rightarrow$ все точки $B_r(x_0)$ яв-ся внутренними $\Rightarrow B_r(x_0)$ - открытое мн-во.

№2.12

Пусть $\xi \notin [a, b]$. Докажем, что ξ не может быть предельной точкой.

$\exists$ ε-окр-ть $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ которая не пересекается с $[a, b]$ ($\varepsilon = a - \xi$ при $\xi < a$; $\varepsilon = \xi - b$, если $b < \xi$)

$\Rightarrow$ мн-во пред. пар $[a, b]$ лежит в $[a, b] \Rightarrow [a, b]$ - замкн.

№2.13

Пусть $\xi \in \complement \overline{B_r}(x_0) \Rightarrow \rho(x_0, \xi) > r$. Пусть $\varepsilon = \rho(x_0, \xi) - r$

Тогда $\forall y \in B_\varepsilon(\xi)$: $\rho(\xi, x_0) \le \rho(\xi, y) + \rho(y, x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\xi, x_0) < \varepsilon + \rho(y, x_0) \Rightarrow r < \rho(y, x_0) \Rightarrow B_\varepsilon(\xi) \subset \complement \overline{B_r}(x_0)$.

Получаем: $\complement \overline{B_r}(x_0)$ - открытое $\Rightarrow \overline{B_r}(x_0)$ - замкнутое

№2.14

Пусть $x \in \complement \overline{E} \Rightarrow \exists\ B_r(x)$, которая не содержит ни одной точки из E.

$\forall y \in B_r(x) \Rightarrow \exists\ B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$, которая не содержит ни одной точки из E

$\Rightarrow y \in \complement \overline{E}$; $B_r(x) \in \complement \dot{E} \Rightarrow \complement \overline{E}$ - от.кр. $\Rightarrow \overline{E}$ - замкнуто

№2.15

1. Пусть $x \in E \Rightarrow x \in \overline{E}$ и x - точка прикосновения E.
2. Пусть $x \notin E$.
   а) Если x - предельная точка, то в $\forall$ окр-ти есть точки из E. $\Rightarrow x$ - точка прикосновения

   б) Если x - точка прикосн. $\Rightarrow$ в $\forall$ окр-ти есть точки из E, отличные от x

Значит x - предельная точка.

Таким образом, мн-ва совпадают

№2.16

По доказанному ранее $[a,b]$ - замкнутое мн-во.

$x \in [a,b] \Rightarrow (x_\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [a,b] = \varnothing \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ нет изолированных точек.

$\Rightarrow [a,b]$ - совершенное мн-во.

№2.19

1) Пусть $x \in int(E_1 \cap E_2) \Rightarrow \exists\ B_\varepsilon(x) \subset E_1 \cap E_2. \Rightarrow$

$\begin{cases} B_\varepsilon(x) \subset E_1 \\ B_\varepsilon(x) \subset E_2 \end{cases} \Rightarrow x \in int E_1 \cap int E_2$

Теперь в „обратную" сторону:

Пусть $x \in int E_1 \cap int E_2 \Rightarrow \exists\ B_{r_1}(x) \subset E_1$ и $\exists\ B_{r_2}(x) \subset E_2$

Пусть $r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B_r(x) \subset (E_1 \cap E_2)$

$\Rightarrow x \in int(E_1 \cap E_2)$.

$\Rightarrow int(E_1 \cap E_2) = int E_1 \cap int E_2$

2) Пусть $x \in int(\bigcap\limits_i E_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ B_r(x) \subset E_i\ \forall i \Rightarrow x \in int E_i\ \forall i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_i int E_i$

$\Rightarrow int(\bigcap\limits_i E_i) \subset \bigcap\limits_i int E_i \quad (1)$

Равенство невозможно. Пример:

$E_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i = (-1,1) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cap \ldots = \{0\}$

Тогда имеем: $int(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \varnothing$; $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} int E_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) =$

$= (-1,1) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap \ldots = \{0\}$

$int(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \varnothing \subset \{0\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} int E_i \Rightarrow (1)$ выполнено

№2.20

Пусть $x \in \bigcup\limits_i int E_i \Rightarrow \exists i : x \in int E_i \Rightarrow \exists i : \exists\ B_r(x) \subset E_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists B_r(x) \subset \bigcup\limits_i E_i \Rightarrow x \in int(\bigcup\limits_i E_i)$

$\Rightarrow \bigcup\limits_i int E_i \subset int(\bigcup\limits_i E_i) \quad (2)$

Равенство невозможно. Пример:

$E_1 = [1,2]$; $E_2 = [2,3]$

Тогда: $\left.\begin{array}{l} int(E_1 \cup E_2) = int([1,3]) = (1,3) \\ int E_1 \cup int E_2 = (1,2) \cup (2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow int E_1 \cup int E_2 = (1,2) \cup (2,3) \subset (1,3) = int(E_1 \cup E_2) \Rightarrow (2)$ выполнено.

№2.17

Пусть E - замкн. мн-во, (a, b): ни одна точка $\notin E$, но $a, b \in E$, тогда (a, b) - смежный интервал.

Покажем, что если $x \notin E$, то $x \in$ одному из смежных интервалов.

Пусть $E_{x\to}$ - часть E лежащая правее точки x, тогда $E_{x\to} = E \cap [x, +\infty)$ $\Rightarrow$ $E_{x\to}$ - замкнуто

Если $E_{x\to}$ - пустое, то $[x, +\infty) \notin E$.

Если $E_{x\to}$ - не пустое, то оно $\subset [x, +\infty)$ $\Rightarrow$ есть нижняя грань b $\Rightarrow$ $b \in E_{x\to}$ $\Rightarrow$ $b \in E$.

Тогда $[x, b)$ не имеет точек из $E_{x\to}$ $\Rightarrow$ не содержит точек из E. $\Rightarrow$ имеем $[x, b)$: $b = +\infty$ или $b \in E$

Аналогично получим $(a, x]$: $a = -\infty$ или $a \in E$

$\Rightarrow$ $x \in (a, b)$, где (a, b) - смежный интервал для E

Заметим, что если (a_1, b_1) и (a_2, b_2) - два смежных интервала, то они либо совпадают либо не пересекаются

$\Rightarrow$ $\forall$ замкнутое мн-во получается при помощи удаления некого числа интервалов (смежных). В $\forall$ интервале найдётся хоть одна рац. точка, которых на прямой счётное мн-во. $\Rightarrow$ число смежных интервалов не более чем счётно

$\Rightarrow$ $\forall$ замкнутое мн-во может быть получено из числ. прямой удалением не более чем счётного мн-ва.