3 Линейные функционалы

Опр. Числовая функция f, определенная на линейном пространстве L, называется *функционалом.*

Функционал f называется *аддитивным*, если

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in L;$$

Функционал f, заданный на вещественном линейном пространстве, называется *однородным*, если

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall\, x \in L, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Функционал f, заданный на комплексном линейном пространстве, называется *однородным*, если

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall\, x \in L, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Аддитивный однородный функционал f называется *линейным.* Для него

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall \lambda, \mu.$$

Опр. Комплекснозначный функционал f, заданный на комплексном линейном пространстве L, называется *сопряженно-однородным*, если

$$f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x) \quad \forall\, x \in L, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Аддитивный сопряженно-однородный функционал f называется *сопряженно-линейным* (или *полулинейным*). Для него

$$f(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} f(x) + \overline{\mu} f(y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Примеры.

1. Заданный на $\mathbb{R}^m$ функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k x_k$ является линейным.

2. Заданный на $\mathbb{C}^m$ функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \overline{x}_k$ является сопряженно-линейным.

3. Заданный на $L_1(a,b)$ функционал $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dx$ является линейным, а функционал $f(x) = \int\limits_a^b \overline{x}(t)\,dx$ – полулинейным.

4. В пространстве $C[a,b]$ можно определить линейный функционал $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$, где t_0 – фиксированная точка из отрезка $[a,b]$. Его принято называть δ-функцией и обозначать

$$\delta_{t_0}(x) = \int x(t)\delta(t - t_0)\,dt,$$

где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака, введенная Полем Дираком в 1926 г.

Геометрический смысл линейного функционала

Опр. Множество $\operatorname{Ker} f = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$ называется *ядром* линейного функционала f.

Заметим, что $\operatorname{Ker} f$ является линейным подпространством в L. Действительно,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0 \quad \forall\, x, y \in \operatorname{Ker} f, \quad \forall\, \lambda, \mu.$$

Опр. Функционал f называется *нулевым* или *тривиальным*, если

$$f(x) = 0 \quad \forall\, x \in L,$$

то есть если $\operatorname{Ker} f = L$.

Теорема 3.1. *Для нетривиального линейного функционала f его ядро* $\operatorname{Ker} f$ *является линейным подпространством в L коразмерности 1.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in L$, для которого $f(x_0) \neq 0$. Можно считать, что $f(x_0) = 1$.

Достаточно взять $x_0' = \dfrac{1}{f(x_0)} x_0$. Тогда $f(x_0') = \dfrac{1}{f(x_0)} f(x_0) = 1$.

Возьмем произвольный $x \in L$ и положим $y = x - f(x)x_0 \Leftrightarrow x = f(x)x_0 + y$.

Заметим, что $f(y) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$. Поэтому $y \in \operatorname{Ker} f$ и

$$x = \alpha x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f. \tag{3.1}$$

Число $\alpha = f(x)$ определяется единственным образом. Поэтому это представление элемента x единственно. Таким образом

$$L = \operatorname{span}\, \{x_0\} \oplus \operatorname{Ker} f.$$

Теорема доказана.

Замечание. По своему ядру $\operatorname{Ker} f$ нетривиальный линейный функционал f восстанавливается с точностью до произвольного постоянного множителя.

Действительно, пусть f_1 – другой линейный функционал с тем же ядром. Воспользуемся представлением (3.1)

$$x = f(x)x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f.$$

и получим

$$f_1(x) = f(x)f_1(x_0) \quad \forall x \in L.$$

Таким образом, функционалы f и f_1 пропорциональны:

$$f_1(x) = Cf(x) \quad \forall x \in L.$$

Роль коэффициента пропорциональности играет $C = f_1(x_0)$.

Теорема 3.2. *Для всякого подпространства L' коразмерности 1 существует такой нетривиальный линейный функционал f, что* $\operatorname{Ker} f = L'$.

Доказательство. Пусть $L = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus L'$. Тогда для каждого $x \in L$ существуют единственные число $\alpha = \alpha(x)$ и элемент $y = y(x) \in L'$ такие, что

$$x = \alpha x_0 + y, \quad y \in L' \quad \forall x \in L.$$

Заметим, что α зависит от x линейным образом. Действительно, если

$$x_1 = \alpha_1 x_0 + y_1, \quad y_1 \in L',$$
$$x_2 = \alpha_2 x_0 + y_2, \quad y_2 \in L',$$

то

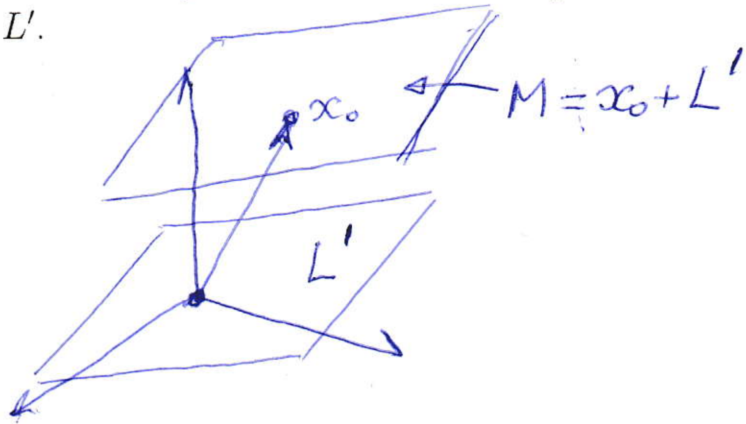
$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)x_0 + \lambda y_1 + \mu y_2, \quad \lambda y_1 + \mu y_2 \in L'.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker}\alpha = \{x = 0 \cdot x_0 + y', \ \ y' \in L'\} = L'$.

Таким образом, $f = \alpha$ – нужный линейный функционал.

Теорема доказана.

Опр. Пусть L' – подпространство пространства L коразмерности 1. Тогда аффинное многообразие $M = x_0 + L'$ называется *гиперплоскостью, параллельной подпространству* L'.



Пусть f – нетривиальный линейный функционал. Тогда существует $x_0 \in L$ такой, что $f(x_0) = 1$. Кроме того $L' = \operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность, равную 1. Поэтому множество

$$M = \{x \in L \mid f(x) = 1\}$$

является гиперплоскостью в L. Действительно,

$$x = f(x)x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f.$$

Поэтому

$$M = \{x = x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f\} = x_0 + \operatorname{Ker} f.$$

Обратно, для всякой гиперплоскости $M = x_0 + L'$ с $x_0 \notin L'$ найдется единственный нетривиальный линейный функционал f такой, что

$$\{x \in L \mid f(x) = 1\} = M.$$

Действительно, в силу теоремы 3.2 существует нетривиальный линейный функционал f_0 с ядром, равным L'. Взяв $f(x) = \dfrac{1}{f(x_0)} f_0(x)$, получим нужный функционал.

Таким образом, **между нетривиальными линейными функционалами, определенными на L, и гиперплоскостями в L, не проходящими через точку 0, существует взаимно однозначное соответствие.**

Домашнее задание.

Задачи 1.11 - 1.14, 1.17 из параграфа 1.1.

Задачи 2.1 - 2.4 из параграфа 1.2.

Задачи 3.1 - 3.4 из параграфа 1.3.