Домашнее задание №9

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

№1.1

Д-во: П $x, y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} cl\, B_{r_i}(x_i)$: $r_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ $x, y \in cl\, B_{r_i}(x_i)$ $\forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x,y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \le 2r_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ в пределе $\rho(x,y) \le 0$

$\Rightarrow x = y$.

ЧТД.

№1.2

Д-во: П $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ - посл-ть влож. друг в друга непустых мн-в.: $diam\, A_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

П $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_n \in A_n$. Т.к. $a_m \in A_m \subset A_n$ $\forall m > n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_m \in A_n$ $\forall m > n$ $\Rightarrow \rho(a_m, a_n) \le diam\, A_n < \varepsilon$ $\forall m > n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ заметим, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундам. $\Rightarrow \exists\, a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, т.к. метр. пр-во полное. Т.К. A_n - замкн, то $a \in A_n \Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

ЧТД

№1.3

П $\langle M, \rho \rangle$ - метр. пр-во, где $\rho(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \ne n \end{cases}$

П $cl\, B_{r_n}(n)$: $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$; $\rho(m,n) \le 1 + \frac{1}{2n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{m+n} \le \frac{1}{2n} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \ge n \Rightarrow cl\, B_{r_n}(n) = \{m : m \ge n\} = \{n+1, n+2, \ldots\} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\, B_{r_n}(n) = \varnothing$

№1.4

Рассмотрим $M = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ в качестве откр. шара выступают интервалы

П $A_n = (0, 1/n) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ $\Rightarrow$ заменить замкн. шары на откр. нельзя.

Ответ: нет

№1.5

$|K \cap (a,b)| = 0 \Rightarrow \exists\, x \in (a,b) : x \notin K \rightarrow K$ нигде не плотно.

№1.6

П A- нигде не плотное мн-во $\Rightarrow \forall B_r(x) \;\exists\, a \in B_r(x) : a \notin [A$

$[A = M \setminus A$. П $x \in M \Rightarrow \forall B_r(x) \;\exists\, a \in M \setminus A \Rightarrow M \setminus A$ всюду плотно в

в $M \Leftrightarrow [A$- всюду плотно.

Обратное неверно, т.к. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, но $\mathbb{I} = [\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ -

тоже всюду плотно в $\mathbb{R}$.

№1.7

Д-ть: $M_1 \subset M$ полно в полном M $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cl}\, M_1 = M_1$ в M

Д-во: ($\Rightarrow$) П M_1 - полное, x - предельная точка M_1 $\Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$
$\{x_n\}$ - фунд в M $\Rightarrow \{x_n\}$ - фунд в $M_1 \subset M$, но M_1 - полное $\Rightarrow$
$\exists\, \xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n : \xi \in M_1$. Очевидно $\xi = x \Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow M_1$ - замкнуто

($\Leftarrow$) П M_1 - замкн в M. П $\exists \{x_n\} \subset M_1 : \{x_n\}$ - фунд в $M_1 \Rightarrow \{x_n\}$ фунд. в M, но M - полное $\Rightarrow \exists\, x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а M_1 - замкнуто $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow M_1$ - полное.

ЧтД.

№1.8

Д-ть: l_∞ - не сепарабельно

Д-во: П $A \subset l_\infty : A = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k = 0$ или $1\}$. П $x, y \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(x,y) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n - y_n| = 1$. П в l_∞ $\exists$ счётное всюду плотное мн-во.
$S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \forall x \in l_\infty$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, s_n \in S : s_n \in B_\varepsilon(x)$.
П $\varepsilon = 1/3 < \frac{1}{2}$, $x, y \in A : x \neq y$. $\rho(x,y) = 1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow s_n \in B_\varepsilon(x) \neq s_m \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow$ между A и $S_1 \subset S$ $\exists$ взаимно однознач. ное соотв., но заметим, что $\mathrm{card}\, A = \mathfrak{c}$, а $\mathrm{card}\, S = \aleph_0 \Rightarrow$ противоречие.

ЧтД.

№1.9

Д-ть: $L_\infty(0,1)$ - не сепарабельно

Д-во: П $L_\infty(0,1)$ - сепарабельно $\Rightarrow \exists$ счётное всюду плотное мн-во в $L_\infty(0,1)$ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

П $A = \left\{ \chi_{(a,b)} = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & x \in \complement(a,b) \end{cases},\ \text{где } (a,b) \subset (a,c) \right\} \Rightarrow \mathrm{card}\, A = \mathfrak{c}$

$\rho(\chi_{(a,b)}, \chi_{(a,d)}) = \|\chi_{(a,b)} - \chi_{(a,d)}\|_{L_\infty(a,b)} = 1$, если $b \neq d$

$L_\infty(0,1)$ - сепарабельно $\Rightarrow \forall \chi_{(a,b)}\ \exists f_n : \rho(f_n, \chi_{(a,b)}) < 1/3 \Rightarrow \exists$ взаим. однозн. соотв. между A и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ противоречие, т.к.
$\mathrm{card}\, A = \mathfrak{c} \neq \aleph_0 = \mathrm{card}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

ЧтД.

① Д-ть: $L_p(a,b)$ - сепарабельно $\forall\, p\in[1,\infty)$

Д-во: $\mathcal{P}[a,b]$ всюду плотно в $C[a,b]$. (*)

П $f\in L_p(a,b)$. $C[a,b]$ всюду плотно в $L_p(a,b) \Rightarrow \exists\, g\in C[a,b]$: $\|f-g\|_{L_p(a,b)} < \varepsilon/2$, где $\varepsilon>0$ - выбрано произвольно

(*) $\Rightarrow \exists\, p_n : \|g-p_n\|_{C[a,b]} < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}}$

$\Rightarrow \|g-p_n\|_{L_p(a,b)} = \left[\int_a^b |g-p_n|^p dx\right]^{1/p} \leq (b-a)^{1/p}\|g-p_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon/2$

Тогда: $\|f-p_n\|_{L_p(a,b)} \leq \|f-g\|_{L_p(a,b)} + \|g-p_n\|_{L_p(a,b)} < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Rightarrow L_p(a,b)$ - сепарабельно

ЧТД

№1.10

Д-ть: l_2 - сепарабельно

Д-во: Рассмотрим в l_2 посл-ти вида $x=(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots)$.

П $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0: \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \exists\, x'=(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots) : \|x-x'\|_{l_2} = \left[\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2\right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x_n\ \exists\, q_n\in\mathbb{Q}: |x_n-q_n| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{N}} \Rightarrow \exists\, y'=(y_1, y_2, \dots, y_N, 0, \dots)$:

$\|x'-y'\|_{l_2} = \left[\sum\limits_{n=1}^{N}|x_n-q_n|^2\right]^{1/2} < \left[\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon^2}{4N}\right]^{1/2} = \varepsilon/2$

$\Rightarrow$ имеем: $\|x-y'\|_{l_2} \leq \|x-x'\|_{l_2} + \|x'-y'\|_{l_2} < \varepsilon \Rightarrow l_2$ - сепарабельно.

№1.11

Д-ть: $C[a,b]$ - сепарабельно

Д-во: По т. Вейерштрасса: $\forall f\in C[a,b],\ \forall\varepsilon>0\ \exists\, p_n\in\mathcal{P}[a,b]$:

$\max\limits_{x\in[a,b]}|f-p_n|<\varepsilon \Rightarrow \|f-p_n\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]}|f-p_n|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f-p_n\|_{C[a,b]}<\varepsilon \Rightarrow C[a,b]$ - сепарабельно

ЧТД

② Д-ть: l_p - сепарабельно, если $p\in[1,\infty)$

Д-во: Рассмотрим в l_p $x=(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots)$. П $\{x_n\}\in l_p \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0: \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \Rightarrow \exists\, x' =$

$= (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, \dots) : \|x-x'\|_{l_p} = \left[\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x_n\ \exists\, q_n\in\mathbb{Q}: |x_n-q_n| < \frac{\varepsilon}{2N^{1/p}} \Rightarrow \exists\, y'=(y_1, y_2, \dots, y_N, 0)$:

$\|x'-y'\|_{l_p} = \left[\sum\limits_{n=1}^{N}|x_n-q_n|^p\right]^{1/p} < \left[\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon^p}{2^p N}\right]^{1/p} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|x-y'\|_{l_p} \leq$

$\leq \|x-x'\|_{l_p} + \|x'-y'\|_{l_p} < \varepsilon \Rightarrow l_p$ - сепарабельно.

ЧТД