Домашняя работа №14.

~~2.1~~, ~~2.2~~, ~~2.3~~, ~~2.4~~, 2.5; ~~3.2~~, ~~3.3~~, ~~3.4~~, ~~3.5~~, ~~3.9~~; ~~4.1~~, ~~4.3~~, ~~4.4~~, ~~4.5~~, ~~4.6~~, ~~4.10~~, 4.12, ~~4.13~~, 4.14

№2.1

Д-ть: $\forall$ конечномерное норм пр-во - банахово

Д-во: $\exists X$ - данное пр-во $\Rightarrow x \in X: x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \alpha_k$, где $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ - базис.

Конечномерное пр-во $\Rightarrow \forall$ 2 нормы эквивалентны $\Rightarrow \exists C$:

$\max\limits_{1\le k\le m} |x_k| \le C\|x\| \;\forall x \in X$. $\exists \{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фунд., где

$x^n = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^n \alpha_k$

Тогда имеем: $\forall k\; \max\limits_{1\le k\le m} |x_k^n - x_k^m| \le C\|x^n - x^m\| < \varepsilon \;\; \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд $\Rightarrow \exists x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^n \Rightarrow \|x^n - x\| = \|\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^n \alpha_k -$

$- \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \alpha_k\| = \|\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^n - x_k)\alpha_k\| \le \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k^n - x_k| \|\alpha_k\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. чтд

№2.2

$\|P\|_{(1)} = \max\limits_{[a,b]} |P(t)|$; $\|P\|_{(2)} = \left[\int_a^b |P(t)|^2 dt\right]^{1/2}$

$(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{(1)})$, $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{(2)})$ - бан. пр-во?

Решение: $\mathcal{P}$ всюду плотно в $C[a,b]$ (т. Вейерштрасса) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\; \forall f \in C[a,b]$

$\exists p \in \mathcal{P}: \|p - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon \Rightarrow \mathcal{P} \subset C[a,b]$ - не замкн $\Rightarrow$ не банахово.

$(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{(2)})$: $\|p - f\|_{L_2(a,b)} = \left[\int_a^b |p-f|^2 dt\right]^{1/2} \le \|p - f\|_{C[a,b]} \left[\int_a^b dt\right]^{1/2} =$

$= \sqrt{b-a}\, \|p - f\|_{C[a,b]} < \sqrt{b-a}\,\varepsilon \Rightarrow$ замыкание $\mathcal{P}$ в $L_2(a,b)$ содержит

все $f \in C[a,b] \Rightarrow \mathcal{P} \subset L_2(a,b)$ - не бан. $\Rightarrow (\mathcal{P}, \|\cdot\|_{(2)})$ - не бан.

Ответ: нет

Если заменить $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}_n$, то оно будет банаховым с $\forall$ нормой, т.к. конечномерно.

№2.3

$(X, \|\cdot\|_1)$ - бан. пр-во; $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ - экв

Д-ть: $(X, \|\cdot\|_2)$ - бан. пр-во.

Д-во: $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фунд по $\|\cdot\|_2$. $\|x_m - x_n\|_1 \le C\|x_m - x_n\|_2$ в силу экв

$\Rightarrow \|x_m - x_n\|_1 \le C\|x_m - x_n\|_2 < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд

по $\|\cdot\|_1 \Rightarrow \exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ по $\|\cdot\|_1$

$\Rightarrow \|x_n - x\|_2 \le C\|x_n - x\|_1 \to 0 \Rightarrow$ если $(X, \|\cdot\|_1)$ - бан., то и

$(X, \|\cdot\|_2)$ - банахово.

чтд

№2.4

Д-ть: $X' \subset X : cl X' = X'$ - бан. пр-во

Д-во: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$ - фунд $\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фунд $\Rightarrow \exists x = \lim_{n\to\infty} x_n$:

$x \in X$, т.о $cl X' = X' \Rightarrow x \in X' \Rightarrow X'$ - банахово.

Чтд

№3.2

$x_n \to x,\ y_n \to y$

Д-ть: $(x_n, y_n) \to (x, y)$

Д-во: $|(x_n,y_n)-(x,y)| = |(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)| =$

$= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le |(x_n, y_n-y)| + |(x_n - x, y)| \le$

$\le \|x_n\|\cdot\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\cdot\|y\| \longrightarrow 0 \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x,y)$

Чтд.

№3.3

Д-ть: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (а) $\forall x, y \in E$

$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$ $\forall x,y,z \in E$ (б)

Д-во: (а) : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (\|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2) +$

$+ (\|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2) = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

(б): $2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2 = 2\|\frac{z}{2} - \frac{x}{2} + \frac{z}{2} - \frac{y}{2}\|^2 = 2\left[2(\|\frac{z}{2}-\frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{z}{2}-\frac{y}{2}\|^2) - \right.$

$\left. - \|\frac{y}{2} + \frac{x}{2}\|^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}(\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 - \frac{1}{4}\|y-x\|^2\right) = \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x\|^2$

$\Rightarrow \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z-\frac{1}{2}(x+y)\|^2$

Чтд.

№3.4

E - евклидово пр-во.

Д-ть: $0 = (x,y) \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

Д-во: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2$

$\Rightarrow (x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Чтд

Пусть E - унитарное пр-во $\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2$

$(x,y) = 0 \Rightarrow Re(x,y) = Re\, 0 = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

№3.5

$x_1, x_2 \in E$, $Re(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$

Д-ть: $x_1 = x_2$

Д-во: Очевидно: $2Re(x_1, x_2) = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\|x_1\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 \Rightarrow 3\|x_1\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_2\|^2 =$

$= \|x_1\|^2 + 2Re(x_1, x_2) + \|x_2\|^2 - \|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 \Rightarrow 3\|x_1\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2$

$\Rightarrow \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2 \Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\| \Rightarrow \left(\sqrt{(x_1, x_1)}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_2, x_2)}\right)^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

чтд

№3.9

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - орт. сист. в E, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$

Д-ть: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

Д-во: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - орт $\Rightarrow (x_i, x_j) = 0 \ \forall i \neq j$, $x_i \neq 0 \ \forall i$

$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 =$

$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$ в силу ортогональности $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

чтд

№4.1

$C_2[a, b]$ - гильб.?

Решение: В прошлом семестре было доказано, что $C_2[a, b]$ с $\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt\right]^{1/2}$ не явл. полным $\Rightarrow$ не гильб.

Ответ: нет

№4.3

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ - орт. система

Д-ть: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сх-ся $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сх-ся

Д-во: $\exists\ S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$

$\|S_n - S_m\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сх-ся $\Leftrightarrow$
$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сх-ся

чтд

№4.4

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонорм. в H, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - числ. посл-ть

Д-ть: $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ сх-ся в H $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся

Д-во: $x_k = \lambda_k \cdot e_k$ - ортонорм. в H $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ - сх-ся $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_k e_k\|^2$ сх-ся (№4.3) $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся

чтд

№4.5

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset cl B_1(0)$; $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Д-ть: $\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\|y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Д-во: $|(x_n, y_n)| \le \|x_n\| \cdot \|y_n\| \le 1$; $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset cl B_1(0) \Rightarrow \|x_n\| \cdot \|y_n\| \le$
$\le \|x_n\| \le 1$

$|(x_n, y_n)| \le \|x_n\| \cdot \|y_n\| \le 1$; $|(x_n, y_n)| \to 1 \Rightarrow \|x_n\| \cdot \|y_n\| \to 1 \Rightarrow$ т.к. $\|x_n\| \le 1$, то $\|x_n\| \to 1$. Аналогично $\|y_n\| \to 1$

$\|x_n - y_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - (x_n, y_n) - (y_n, x_n) \to 1 + 1 - 1 - 1 \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x_n - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

чтд

№4.6

$x \in H$. $L: L \subset H$, $cl L = L$

Д-ть: $x \perp L \Leftrightarrow \|x\| < \|x - y\|$ $\forall y \in L$

Д-во: $\Rightarrow$ $x \perp L \Rightarrow \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x, y) - (y, x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ge \|x\|^2$
$\Rightarrow \|x\| < \|x - y\|$

$\Leftarrow$ $H = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow x = l + h : l \in L, h \in L^{\perp}$

$\|x\| \le \|x - y\| \Rightarrow \|x\|^2 \le \|x - y\|^2 \Leftrightarrow \|l + h\|^2 \le \|l + h - y\|^2$

$\|l\|^2 + \|h\|^2 \le \|l - y\|^2 + \|h\|^2$, т.к. $l \perp h$, $l - y \perp h$

$\Rightarrow \|l\|^2 \le \|l - y\|^2$. $y - \forall \Rightarrow \exists y = l \Rightarrow \|l\| = 0 \Rightarrow x = h \in L^{\perp} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in L$

чтд

№4.10

$M \subset N \subset H$

Д-ть: $M^{\perp} \supset N^{\perp}$

Д-во: $\exists x \in N^{\perp} \Leftrightarrow (x, y) = 0$ $\forall y \in N \Rightarrow (x, y) = 0$ $\forall y \in M$, т.к. $M \subset N \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in M^{\perp} \Rightarrow M^{\perp} \supset N^{\perp}$

чтд

№4.13

$l_2 = M \oplus N$

M, N - ?

Решение: $\exists\, M = \{x \in l_2 : x_{2k+1} = 0 \ \forall k \geq 0\}$, $N = \{x \in l_2 : x_{2k} = 0 \ \forall k \geq 0\}$

№4.14

$x(t) \in M \subset L_2(-1,1) : x(t) = 0$ почти $\forall t \in (0,1)$

Д-ть: M - замкн; $M^{\perp}$ - ?

Решение: • $M = \{x \in L_2(-1,1) : x = 0$ почти $\forall t \in (0,1)\}$

$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in L_2(-1,1) \Rightarrow \|x_n - x\|^2_{L_2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |x_n - x|^2 dt$

$= \int_{-1}^{0} |x_n - x|^2 dt + \int_{0}^{1} |x_n - x|^2 dt = \int_{-1}^{0} |x_n - x|^2 dt + \int_{0}^{1} |x|^2 dt = \int_{0}^{1} |x|^2 dt \to 0$

$\Rightarrow x = 0$ почти $\forall t \in (0,1) \Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ - замкн.

• $\exists\, y \in M^{\perp} \Rightarrow (x,y)_{L_2(-1,1)} = 0 \ \forall x \in M \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} x \cdot \bar{y}\, dt = 0 \ \forall x \in M$

$\exists\, x = 0 \ \forall t \in (0,1),\ x = y \ \forall t \in (-1,0) \Rightarrow \int_{-1}^{0} x \bar{y}\, dt = \int_{-1}^{0} y \bar{y}\, dt = \int_{-1}^{0} |y|^2 dt = 0 \Rightarrow$

почти $\forall t \in (-1,0)$ $y = 0$

Если же $y = 0$ почти $\forall t \in (-1,0)$, то $\int_{-1}^{1} x \bar{y}\, dt = 0 \ \forall x \in M \Rightarrow y \in M^{\perp}$

$\Rightarrow M^{\perp} = \{x \in L_2(-1,1) : x = 0$ почти $\forall t \in (-1,0)\}$