5 Преобразование Фурье - Планшереля функций из $L_2(\mathbb{R})$

Обратим внимание на то, что для $f \in L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье, введенное в параграфе 1, не определено, так как $f \in L_2(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f \in L_1(\mathbb{R})$.

Определим его несколько иначе.

Докажем предварительно следующее утверждение.

Теорема 5.1. *(Равенство Парсеваля.) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.*
Тогда $\widetilde{f} \in L_2(\mathbb{R})$ и справедливо равенство Парсеваля

$$\|\widetilde{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Замечая, что $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S^\infty(\mathbb{R})$, имеем $f \in S^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \widetilde{f} \in S^\infty(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$.
Используя теорему Фубини, имеем

$$\|\widetilde{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = (\widetilde{f}, \widetilde{f})_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x}\, dx \right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x)\, dx = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Пусть теперь $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Построим последовательность $\{f_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$ и $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$ одновременно.

Для этого сначала выберем M таким, чтобы для $f^M = f \cdot \chi_{[-M,M]}$ выполнялись неравенства

$$\|f - f^M\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int\limits_{|x|>M} |f|\,dx < 1/n,$$

$$\|f - f^M\|_{L_2(\mathbb{R})} = \Big(\int\limits_{|x|>M} |f|^2\,dx\Big)^{1/2} < 1/n.$$

Затем построим осреднение $f_n = (f^M)_{h_n}$ такое, что

$$\|f^M - (f^M)_{h_n}\|_{L_1(\mathbb{R})} < 1/n, \quad \|f^M - (f^M)_{h_n}\|_{L_2(\mathbb{R})} < 1/n.$$

В результате получим последовательность $f_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\|f - f_n\|_{L_1(\mathbb{R})} < 2/n, \quad \|f - f_n\|_{L_2(\mathbb{R})} < 2/n.$$

Из $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$ следует, что $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Из $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$ и из равенства Парсеваля

$$\|\widetilde{f_n} - \widetilde{f_m}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_n - f_m\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

уже доказанного для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, следует, что последовательность $\widetilde{f_n}$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторой функции $g \in L_2(\mathbb{R})$.

Заметим теперь, что $\widetilde{f} = g$ почти всюду. Действительно, для всякого $N > 0$ из равномерной сходимости $\widetilde{f_n}$ к $\widetilde{f}$ следует, что $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ в $L_2(-N, N)$. В то же время из $\widetilde{f_n} \to g$ в $L_2(\mathbb{R})$ следует $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ в $L_2(-N, N)$. Поэтому $\widetilde{f} = g$ почти всюду на $(-N, N)$.

Таким образом, $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Переходя к пределу в равенстве

$$\|\widetilde{f_n}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_n\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

справедливому для $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, приходим к равенству Парсеваля (5.1).

Теорема доказана.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Положим $f_N = f \cdot \chi_{[-N,N]}$. Заметим, что $f_N \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ и $f_N \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$ при $N \to \infty$. Кроме того,

$$\widetilde{f}_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Теорема 5.2. *(Теорема Паншереля.) Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\widetilde{f}_N \in L_2(\mathbb{R})$ для всех $N > 0$ и существует функция $g \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что $\widetilde{f}_N \to g$ в $L_2(\mathbb{R})$, причем*

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. В силу теоремы 5.1 $f_N \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \widetilde{f}_N \in L_2(\mathbb{R})$.

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\|\widetilde{f}_N - \widetilde{f}_M\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_N - f_M\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Поэтому из фундаментальности последовательности $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{R})$ следует фундаментальность последовательности $\{\widetilde{f}_N\}_{N=1}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно существует $g = \lim\limits_{N\to\infty}{}^{L_2} \widetilde{f}_N$.

Переходя к пределу в равенстве

$$\|\widetilde{f}_N\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_N\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

приходим к равенству

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Теорема доказана.

Теорема Планшереля позволяет корректно определить для функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ **преобразование Фурье - Планшереля**

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{N\to\infty}{}^{L_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Заметим, что для $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ это преобразование совпадает с классическим преобразованием Фурье.

Подчеркнем, что для преобразования Фурье - Плашереля справедливо равенство Парсеваля

$$\|\mathscr{F}[f]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Определим **обратное преобразование Фурье - Планшереля**

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) = \lim_{N\to\infty}{}^{L_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} g(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Заметим, что

$$\mathscr{F}^{-1}[g](x) = \mathscr{F}[g](-x).$$

Поэтому $\mathscr{F}^{-1} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ и

$$\|\mathscr{F}^{-1}[g]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Теорема 5.3. *Для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f] = f. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Построим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ такую, что $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Заметим, что

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f_n] = f_n. \tag{5.3}$$

Кроме того,

$$\|\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f_n - f]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\mathscr{F}[f_n - f]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f_n - f\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (5.3), приходим к (5.2).

Теорема доказана.

Замечание 5.1. *Отображение Фурье - Планшереля является изометрическим изоморфизмом $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$, то есть линейным взаимно однозначным отображением $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$, сохраняющим норму.*