ЗАНЯТИЕ 27 ОКТЯБРЯ

Домашнее задание на 3 ноября

Задачи 8.3 и 8.4.

7.8. Пусть оператор $A : H \to H$ таков, что $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$ для $x \in H$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая числовая последовательность. Доказать, что $A \in \sigma(H)$.

Решение. Пусть $x_k \to x$ слабо в H. Тогда

$$Ax_k - Ax = A(x_k - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_k - x, e_n) e_n.$$

Поэтому

$$\|Ax_k - Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x_k - x, e_n)|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |(x_k - x, e_n)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x_k - x, e_n)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |(x_k - x, e_n)|^2 + \sup_{n \geqslant N+1} |\lambda_n|^2 \|x_k - x\|^2.$$

Второе слагаемое делаем меньше $\varepsilon/2$ выбором N. Затем делаем меньше $\varepsilon/2$ первое слагаемое для всех $k > K(\varepsilon)$.

7.9. Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Показать, что оператор A вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывен оператор A^*A.

Решение. Пусть A вполне неперывен. Тогда A^* тоже вполне непрерывен и произведение A^*A двух вполне непрерывных операторов также является вполне непрерывным оператором.

Пусть теперь вполне непрерывен оператор A^*A. Пусть $x_n \to x$ слабо в H. Тогда

$$\|Ax_n - Ax\|^2 = (A(x_n - x), A(x_n - x)) = (x_n - x, A^*A(x_n - x)) \to 0.$$

7.10. Пусть $A \in \sigma(X, Y)$, где Y – банахово пространство. Показать, что образ оператора A замкнут тогда и только тогда, когда он конечномерен.

Решение. Пусть $\dim \operatorname{Im} A < \infty$. Тогда подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто как всякое конечномерное подпространство.

Предположим, что $\dim \operatorname{Im} A = \infty$ и $L = \operatorname{Im} A$ является замкнутым подпространством в Y. Значит, L является банаховым пространством
Заметим, что

$$L = \bigcup_{N=1}^{\infty} A(B_N(0)), \qquad (*)$$

где каждое из множеств $M_N = A(B_N(0))$ предкомпактно.

Покажем, что множество $\overline{M}_N$ компактно. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{M}_N$. Для каждого $y_n \in \overline{M}_N$ существует $y'_n \in M_N$ такой, что $\|y'_n - y_n\|_Y < 1/n$. Выделим из последовательности $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $y'_{n_k} \to y \in \overline{M}_N$ и заметим, что $y_{n_k} \to y \in \overline{M}_N$.

Так как $\overline{M}_N$ компактно, оно не может содержать в себе целиком ни одного шара из L. Значит $\overline{M}_N$ нигде не плотно в L.

Равенство $(*)$ означает, что полное метрическое пространство представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, что противоречит теореме Бэра.

7.11. Пусть $A \in \sigma(X, Y)$, где Y – бесконечномерное банахово пространство. Показать, что уравнение $Ax = y$ разрешимо не для всех $y \in Y$.

Решение. В силу предыдущей задачи $\operatorname{Im} A \neq Y$.

7.12. Может ли оператор $A \in \sigma(H)$ иметь ограниченный обратный?

Решение. В силу задачи 7.10 $\operatorname{Im} A \neq H$. Поэтому не существует оператора A^{-1}, определенного на всем H.

Если даже оператор A имеет ограниченный оператор, определенный на некотором $\operatorname{Im} A$, то $A^{-1}A = I$. Это невозможно, так как оператор $A^{-1}A$ является вполне непрерывным.

8.3. Найти характеристические значения и собственные функции интегрального оператора $A \in \mathscr{L}(L_2(0,1))$, $Au(x) = \int\limits_0^1 K(x,s)u(s)\,ds$ в следующих случаях:

а) $K(x,s) = x - s$;
б) $K(x,s) = x^2 + s^2$;
в) $K(x,s) = s$;
г) $K(x,s) = x(1-s)$ при $x \leqslant s$ и $K(x,s) = s(1-x)$ при $x > s$.

Решение. б) Решение интегрального уранения

$$\mu \int\limits_0^1 (x^2 + s^2)u(s)\,ds = u(x)$$

должно иметь вид $u(x) = C_1x^2 + c_2$.

$$\mu \int\limits_0^1 (x^2 + s^2)(C_1s^2 + C_2)\,ds = C_1x^2 + C_2$$

Приходим к системе уравнений

$$\left(\mu\frac{1}{3} - 1\right)C_1 + \mu C_2 = 0,$$
$$\mu\frac{1}{5}C_1 + \left(\mu\frac{1}{3} - 1\right)C_2 = 0.$$

Приравнивая к нулю определитель системы, приходим к уравнению

$$\left(\mu\frac{1}{3} - 1\right)^2 - \mu^2\frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{45}\mu^2 - \frac{2}{3}\mu + 1 = 0$$

Решая его, находим

$$\mu_{1,2} = -\frac{15}{4} \pm \frac{9\sqrt{5}}{4}.$$

Характеристическому значению $\mu_1 = \dfrac{15}{4} - \dfrac{9\sqrt{5}}{4}$ отвечает семейство собственных функций

$$u(x) = C_1\left(x^2 + \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{3}\right), \quad C_1 \neq 0,$$

а характеристическому значению $\mu_1 = \dfrac{15}{4} + \dfrac{9\sqrt{5}}{4}$ отвечает семейство собственных функций

$$u(x) = C_1\left(x^2 + \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{3}\right), \quad C_1 \neq 0.$$

в) В случае $K(x,s)=s$ имеем $\mu=2$ и собственные функции имеют вид

$$u(x)=C, \quad C\neq 0.$$

г) $K(x,s)=x(1-s)$ при $x\leqslant s$ и $K(x,s)=s(1-x)$ при $x>s$.

$$\mu\left[\int_0^x s(1-x)u(s)\,ds+\int_x^1 x(1-s)u(s)\,ds\right]=u(x).$$

Дифференцируя по x имеем

$$\mu\left[-\int_0^x su(s)\,ds+\int_x^1 (1-s)u(s)\,ds\right]=u'(x).$$

$$-\mu u(x)=u''(x).$$

Приходим к задаче Штурма - Лиувилля

$$\begin{gathered}-u''(x)=\mu u(x),\\ u(0)=0, \quad u(1)=0.\end{gathered}$$

Решая ее, находим

$$\mu_n=\pi^2n^2, \quad u_n(x)=C_n\sin\pi nx, \quad C_n\neq 0, \quad n\in\mathcal{N}.$$

8.4. Решить интегральные уравнения в $L_2(a,b)$:

а) $u(x) - \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x\cos s + s^2 \sin x + \cos x \sin s) u(s)\, ds = x, \quad (a,b) = (-\pi, \pi);$

б) $u(x) = \int\limits_0^{1/2} xsu(s)\, ds + f(x), \quad (a,b) = (0, 1/2), \quad f \in L_2(0,1/2);$

в) $u(x) = \mu \int\limits_0^1 K(x,s)u(s)\, ds + x$, где K – ядро из задачи 8.2г, $(a,b) = (0,1)$;

г) $u(x) = \int\limits_0^{\pi} \cos(x+s)u(s)\, ds + 1, \quad (a,b) = (0,\pi);$

д) $u(x) = 6\int\limits_0^1 (xs - \frac{x+s}{2} + \frac{1}{3})u(s)\, ds + x, \ \ (a,b) = (0,1).$

8.5. Исследовать разрешимость в $L_2(0,1)$ следующих интегральных уравнений (μ – комплексный параметр, $f \in L_2(0,1)$):

а) $\quad u(x) - \mu \int\limits_0^1 (x^2 + s^2)u(s)\, ds = f(x);$

б) $\quad u(x) - \mu \int\limits_0^1 su(s)\, ds = f(x).$