5 Ряды Фурье. Полнота и базисность ортонормированных систем

Опр. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом (унитарном) пространстве E. *Рядом Фурье* элемента $f \in E$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k, \tag{5.1}$$

где (f, e_k) – *коэффициенты Фурье.*

Таким образом, элементу $f \in E$ мы сопоставили его ряд Фурье (5.1). Главный вопрос, конечно, заключается в том, сходится ли этот ряд и верно ли, что

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k.$$

Начнем с доказательства важного утверждения, которое часто называют *минимальным свойством коэффициентов Фурье.*

Лемма 5.1. *Частичная сумма ряда Фурье*

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N}(f, e_k)e_k$$

является ортогональной проекцией элемента f на подпространство $L_N = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ и обладает следующим свойством:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N}|(f, e_k)|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 \leqslant \|f - S_N\|^2 \quad \forall\ S_N \in L_N. \tag{5.2}$$

Доказательство. Заметим, что

$$f = S_N(f) + (f - S_N(f)), \quad \text{где} \quad S_N(f) \in L_N,\ f - S_N(f) \in L_N^{\perp}.$$

То, что $f - S_N(f) \in L_N^{\perp}$ следует из того, что

$$(f - S_N(f), e_j) = (f, e_j) - \sum_{k=1}^{N}(f, e_k)(e_k, e_j) = (f, e_j) - (f, e_j) = 0$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant N$.

Таким образом, частичная сумма ряда Фурье $S_N(f)$ является ортогональной проекцией элемента f на L_N. Поэтому

$$\|f - S_N(f)\| \leqslant \|f - S_N\| \quad \forall\, S_N \in L_N. \tag{5.3}$$

Кроме того, из ортогональности $S_N(f)$ и $f - S_N(f)$ следует

$$\|f\|^2 = \|S_N(f)\|^2 + \|f - S_N(f)\|^2,$$

то есть справедливо равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(f, e_k)|^2 + \|f - S_N(f)\|^2. \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.5) следует (5.2).

Лемма доказана.

Замечание 5.1. *Обратим внимание на то. что величина* $\|f - S_N(f)\|$ *не убывает с ростом* N.

Следствие 5.1. *Справедливо* **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{5.5}$$

Доказательство. Из равенства

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(f, e_k)|^2 + \|f - S_N(f)\|^2.$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{N} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \forall\, N \geqslant 1.$$

Следовательно ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2$ сходится и справедливо неравенство Бесселя.

Следствие доказано.

Следствие 5.2. *Справедливо следующее свойство коэффициентов Фурье:*

$$(f, e_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Замечание 5.2. *Обратим внимание на то, что равенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, e_k)|^2 = \|f - S_N(f)\|^2$$

говорит о том, что $S_N(f) \to f$ при $N \to \infty$, то есть f разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k,$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2.$$

Это равенство принято называть **равенством Парсеваля**.

Полнота и базисность ортонормированных систем

Напомним, что система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ называется полной в E, если замыкание линейной оболочки $\operatorname{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})$ совпадает с E.

Другими словами, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна, если для каждого $f \in E$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация элементов системы $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$ такая, что $\|f - S_N\| < \varepsilon$.

Теорема 5.1. *Ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда для каждого элемента $f \in E$ его ряд Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f, то есть если*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k \quad \forall\, f \in E.$$

Доказательство. Если для каждого $f \in E$ его ряд Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f, то для всякого $\varepsilon > 0$ Найдется N такой, что $\|f - S_N(f)\| < \varepsilon$. Следовательно система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна. Тогда для всякого $f \in E$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$, для которой $\|S_N - f\| < \varepsilon$. Тогда в силу минимального свойства коэффициетов Фурье и Замечания 5.1

$$\|S_n(f) - f\| \leqslant \|S_N(f) - f\| \leqslant \|S_N - f\| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Это означает, что ряд Фурье сходится к f.

Теорема доказана.

Следствие 5.3. *Ортонормированная система полна тогда и только тогда, когда она является базисом.*

Следствие 5.4. *Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортонормированный базис.*

Доказательство. В силу теоремы 2.4 в H существует ортонормированная полная система. В силу предыдущего следствия эта система является базисом.

Теорема 5.2. *Ортонормированная система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна тогда и только тогда, когда для всех* $f \in E$ *верно равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2. \tag{5.6}$$

Доказательство. См. замечание 5.1.

Теорема 5.3. *В гильбертовом пространстве* H *ортонормированная система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна тогда и только тогда, когда*

$$(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})^{\perp} = O. \tag{5.7}$$

Доказательство. Если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна, то она образует базис в H. Пусть $f \in (\{e_k\}_{k=1}^{\infty})^{\perp}$. Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k = 0.$$

Пусть теперь $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (5.7). Положим $L = \overline{\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})}$ и заметим, что

$$x \in L^{\perp} \Rightarrow x \in (\{e_k\}_{k=1}^{\infty})^{\perp} = O \Rightarrow L^{\perp} = O.$$

Из разложения

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

следует, что $H = L$, то есть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Теорема доказана.