№1.1

а) $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$

$(A\cap C)\cup(B\cap D)=[(A\cap C)\cup B]\cap[(A\cap C)\cup D]=[B\cup(A\cap C)]\cap[D\cup(A\cap C)]$
$=[(A\cup B)\cap(B\cup C)]\cap[(C\cup D)\cap(A\cup D)]\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$
$\Rightarrow (A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$ ч.т.д.

б) $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$
$(B\cap\bar C)\setminus(B\cap\bar A)\subset A\cap\bar C$

$(B\cap\bar C)\setminus(B\cap\bar A)=(B\cap\bar C)\cap(\overline{B\cap\bar A})=(B\cap\bar C)\cap(A\cup\bar B)=$
$=\bar C\cap B\cap(A\cup\bar B)=\bar C\cap[(A\cap B)\cup(B\cap\bar B)]=(A\cap B)\cap\bar C\subset A\cap\bar C$
$\Rightarrow (B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$ ч.т.д.

в) $A\setminus C\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$
$A\cap\bar C\subset(A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar C)$

$(A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar C)=[(A\cap\bar B)\cup B]\cap[\bar C\cup(A\cap\bar B)]=$
$=[(B\cup\bar B)\cap(A\cup B)]\cap[\bar C\cup(A\cap\bar B)]=(A\cup B)\cap[\bar C\cup(A\cap\bar B)]\Rightarrow$
$\Rightarrow A\cap\bar C\subset(A\cup B)\cap[\bar C\cup(A\cap\bar B)]$
ч.т.д

№1.2
Доказать: $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$

Д-во: $A\setminus(A\setminus B)=A\setminus(A\cap\bar B)=A\cap(\overline{A\cap\bar B})=A\cap(\bar A\cup B)=$
$=(A\cap\bar A)\cup(A\cap B)=A\cap B$
ч.т.д.

№1.3.
Доказать: $C(C(A))=A$

Д-во: $C(C(A))=C(S\setminus A)=S\setminus(S\setminus A)=S\setminus(S\cap\bar A)=S\cap(\overline{S\cap\bar A})=$
$=S\cap(\bar S\cup A)=(S\cap\bar S)\cup(A\cap S)=A\cap S=A$
ч.т.д.

№1.4
а) Доказать: $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

Д-во: лев. часть: $A\setminus(B\cap\bar C)=A\cap(\overline{B\cap\bar C})=A\cap(\bar B\cup C)=$
$=(A\cap\bar B)\cup(A\cap C)$

прав. часть: $(A\setminus B)\cup(A\cap C)=(A\cap\bar B)\cup(A\cap C)$ $\Rightarrow$ рав-во верно
ч.т.д.

б) Доказать: $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$

Д-во: лев. часть: $(A\setminus B)\setminus C=(A\cap\bar B)\cap\bar C$

прав. часть: $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\cap\bar C)\cap(\overline{B\cap\bar C})=A\cap\bar C\cap(\bar B\cup C)=$
$=A\cap[(\bar C\cap\bar B)\cup[\bar C\cap C]]=A\cap(\bar C\cap\bar B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ рав-во верно ч.т.д.

№1.4.
Д-ть: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно при $A \supset C$ и неверно при $C \setminus A \neq \varnothing$

Д-во: лев. часть: $A \setminus (B \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$

прав. часть: $(A \setminus B) \cup C = (A \cap \overline{B}) \cup C$

• При $A \supset C$ имеем: $A \cap C = C \Rightarrow$ лев. часть: $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = (A \cap \overline{B}) \cup C \Rightarrow$ получили правую часть $\Rightarrow$ рав-во верно, если $A \supset C$

• Если $C \setminus A \neq \varnothing$, то получается так, что во мн-ве "C" есть некая часть, которая лежит вне мн-ва "A" $\Rightarrow A \cap C \neq C$, но в исходном рав-ве части $(A \cap \overline{B})$ совпадают $\Rightarrow$ нужно равенство $A \cap C = C$, что невозможно при данном условии $\Rightarrow$ рав-во неверно, если $C \setminus A \neq \varnothing$

ч.т.д.

№1.5
Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \cup C$?

Попробуем подобрать контрпример:

• $A = \{1, 2\}$; $B = \{2\} \Rightarrow A \setminus B = \{1\} = C$
$B \cup C = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\} = A$ $\Rightarrow$ верно

• $A = \{3\}$; $B = \{3, 4\} \Rightarrow A \setminus B = \varnothing = C$
$B \cup C = \{3, 4\} \neq \{3\} = A$ $\Rightarrow$ не вытекает

№1.6.
Вытекает ли из $A = B \cup C$, что $A \setminus B = C$?

Попробуем подобрать контрпример:

• $B = \{1, 2\} = C \Rightarrow B \cup C = \{1, 2\} = A$
$A \setminus B = \{1, 2\} \setminus \{1, 2\} = \varnothing \neq \{1, 2\} = C$ $\Rightarrow$ не вытекает

№1.8.
а) Д-ть неверность $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

Д-во: лев. часть: $A \cup (B \setminus C) = A \cup (B \cap \complement C) = (A \cup B) \cap (A \cup \complement C)$
прав. часть: $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \cap (\complement A \cap \complement C)$

Очевидно, $(A \cup B) \cap (A \cup \complement C) \neq (A \cup B) \cap (\complement A \cap \complement C)$

Пусть $A = \{1, 2\}$; $B = C = \varnothing \Rightarrow B \setminus C = \varnothing \Rightarrow A \cup \varnothing = \{1, 2\}$
$A \cup B = \{1, 2\}$; $A \cup C = \{1, 2\} \Rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \varnothing$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\} \neq \varnothing = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

ч.т.д.

б) Д-ть неверность $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

Пусть $A=\{1,2\}$; $B=\{1\}$; $C=\varnothing$

$A\setminus(B\cup C) = \{1,2\}\setminus(\{1\}\cup\varnothing) = \{1,2\}\setminus\{1\} = \{2\}$

$(A\setminus B)\cup(A\setminus C) = (\{1,2\}\setminus\{1\})\cup(\{1,2\}\setminus\varnothing) = \{2\}\cup\{1,2\} = \{1,2\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A\setminus(B\cup C) = \{2\} \neq \{1,2\} = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

ч.т.д.

№1.9

а) $A\cap B\cap C$ б) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

в) Получим из б) путём вычитания элементов из пересечения всех 3ёх мн-в

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)$

г) Если некий эл-т $x\in A$, то не факт, что он $\in B$ и $\in C$. Если $x\in(A\cap B)$, то не факт, что $x\in C$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получаем $A\cap B\cap C$

д) Чтобы $x\in A$ но $x\notin C$ и $x\notin B$ нужно чтобы $A\setminus(B\cup C)$. Аналогично для мн-в B и C $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получаем $[A\setminus(B\cup C)]\cup[B\setminus(A\cup C)]\cup[C\setminus(A\cup B)]$.

№1.10

Д-ть: $\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k \subset \bigcup_k (A_k\setminus B_k)$

Д-во: Пусть $x\in(\bigcup_k A_k\setminus\bigcup_k B_k) \Leftrightarrow \exists k: x\in A_k$, но $x\notin B_k$.

Тогда имеем: $\exists k: x\in A_k,\ x\notin B_k \Rightarrow x\in\bigcup_k(A_k\setminus B_k)$

ч.т.д.

Пример, показывающий, что „$\subset$" нельзя заменить на „$=$":

Пусть $k=2$.

$A_1=\{2,3\}$; $B_1=\{3,5\}$; $A_2=\{3,5\}$; $B_2=\{2,3\}$ $\Rightarrow (A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2) = (\{2,3\}\cup\{3,5\})\setminus(\{3,5\}\cup\{2,3\}) = \varnothing$

$(A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2) = (\{2,3\}\setminus\{3,5\})\cup(\{3,5\}\setminus\{2,3\}) = \{2\}\cup\{5\} \neq \varnothing = (A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2)$

№1.11.

Д-ть: $\bigcup_k(\bigcap_n A_{kn}) \subset \bigcap_n(\bigcup_k A_{kn})$

Д-во: Пусть $x\in\bigcup_k(\bigcap_n A_{kn}) \Rightarrow$ по опр $\exists k: x\in\bigcap_n A_{kn} \Rightarrow$ по опр: $\exists k: x\in A_{kn}\ \forall n \Rightarrow x\in\bigcup_k A_{kn}\ \forall n \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\bigcap_n(\bigcup_k A_{kn})$

ч.т.д.

№1.12

а) Д-ть: если $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

Д-во: Допустим, что некий $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тогда по опр. имеем:
$\exists n: x \in A_n$, тогда $\exists n: x \in B_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$;

$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow$ по опр. $\exists n: x \in B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow$ имеем:
$\exists i: x \in A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

ч.т.д.

б) Д-ть: если $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Д-во: Пусть $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ по опр.: $a \in A_n \ \forall n \Rightarrow a \in C_n \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ \forall n \Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$;

$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \Rightarrow a \in C_n \ \forall n$, но $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ \forall n \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in A_i \ \forall i \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

ч.т.д.

№1.16.

Д-ть: $\forall$ посл-ти мн-в $\bigcap_n A_n \overset{(1)}{\subset} \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \overset{(2)}{\subset} \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \overset{(3)}{\subset} \bigcup_n A_n$

Д-во: $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_k$ (1)

$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (3)

По замечанию 1.3: $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ (2)

$\Rightarrow$ имеем $\bigcap_n A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_n A_n$

ч.т.д.

• Пример, показывающий невозможность замены „$\subset$" на „$=$":

Пусть $A_1 = \{2\}$; $A_2, A_3, \ldots, A_n = \{1\}, \{1,3\}, \{1\}, \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A_n = \{1\}, & \text{если } n \geq 2 \text{ и } n = 2k, \ k \in \mathbb{Z} \\ A_n = \{1,3\}, & \text{если } n \geq 2 \text{ и } n = 2k+1, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Тогда получаем: • $\bigcap_n A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{2\} \cap \{1\} \cap \{1,3\} \cap \ldots \cap =$
$= \varnothing \cap \{1,3\} \cap \{1\} \cap \ldots = \varnothing$

• $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} \cap \ldots) =$
$= (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots) \cup \ldots =$
$= \varnothing \cup \{1\} \cup \{1\} \cup \ldots = \{1\}$

• $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup A_{n+3} \cup \ldots) =$
$= (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots) \cap \ldots =$
$= \{1,2,3\} \cap \{1,3\} \cap \{1,3\} \cap \ldots = \{1,3\}$

• $\bigcup_n A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \{1,2,3\}$

Тогда имеем: $\bigcap_n A_n = \varnothing \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{1\} \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} = \{1,3\} \subset \bigcup_n A_n = \{1,2,3\}$

№1.17

$A_n \subset X$ для $n \geq 1$ Д-ть: а) $X \setminus \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$

б) $X \setminus \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$

Д-во: а) $X \setminus \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \complement_X \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) = \complement_X \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) =$

$= \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \complement_X \left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \complement_X (A_k) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\complement_X A_n\right) =$

$= \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$

ч.т.д.

б) $X \setminus \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \complement_X \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) = \complement_X \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \complement_X \left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) =$

$= \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \complement_X A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\complement_X A_n\right) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (X \setminus A_n)$

ч.т.д.