ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1 Суммируемые по Лебегу функции

Всюду в этой главе E – измеримое множество в $\mathbb{R}^m$.

В этом параграфе E – ограниченное измеримое множество и f – заданная на E ограниченная измеримая функция.

Опр. Конечная система измеримых множеств $T = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется *разбиением множества* E, если

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E \quad \text{и} \quad |E_i \cap E_j| = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Фиксируем некоторое разбиение T множества E и положим

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Составим *нижнюю* и *верхнюю интегральные суммы*

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|, \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k|.$$

Ясно, что

$$s_T(f) \leqslant S_T(f).$$

Введем *нижний* и *верхний интегралы Лебега* функции f на множестве E следующим образом:

$$\underline{J}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f).$$

Опр. Функция f называется *интегрируемой по Лебегу на множестве* E (или *суммируемой на* E), если

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Число $J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ называется *интегралом Лебега функции* f *на множестве* E и обозначается так:

$$J(f) = \int_E f(x)\, dx$$

Опр. Разбиение $\widetilde{T} = \{\widetilde{E}_i\}_{i=1}^m$ называется *измельчением* разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, если для каждого i верно $\widetilde{E}_i \subset E_k$ с некоторым $k = k(i)$ и $E_k = \bigcup\limits_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{E}_i$.

В этом случае
$$|E_k| = \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i|.$$

Опр. Пусть $T_1 = \{E_i^{(1)}\}_{i=1}^n$, $T_2 = \{E_j^{(2)}\}_{j=1}^m$ – два разбиения множества E. Разбиение
$$T_1 \cdot T_2 = \{E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)},\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$
называется *произведением разбиений* T_1 и T_2.

Очевидно, что $T_1 \cdot T_2$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2.

Отметим следующие свойства.

Лемма 1.1. *Если* $\widetilde{T} = \{\widetilde{E}_i\}_{i=1}^m$ *– измельчение разбиения* $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, *то*

$$s_T(f) \leqslant s_{\widetilde{T}}(f), \quad S_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_T(f).$$

Доказательство. Если $\widetilde{E}_i \subset E_k$, то

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x) \leqslant \widetilde{m}_i = \inf_{x \in \widetilde{E}_i} f(x),$$

$$\widetilde{M}_i = \sup_{x \in \widetilde{E}_i} f(x) \leqslant M_k = \sup_{x \in E_k} f(x).$$

Поэтому

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k |E_k| = \sum_{k=1}^n m_k \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i| \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{m}_i |\widetilde{E}_i| = \sum_{i=1}^m \widetilde{m}_i |\widetilde{E}_i| = s_{\widetilde{T}}(f),$$

$$S_{\widetilde{T}}(f) = \sum_{i=1}^m \widetilde{M}_i |\widetilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} \widetilde{M}_i |\widetilde{E}_i| \leqslant \sum_{k=1}^n M_k \sum_{\widetilde{E}_i \subset E_k} |\widetilde{E}_i| = \sum_{k=1}^n M_k |E_k| = S_T(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для любых двух разбиений* T_1 *и* T_2

$$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f).$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{T} = T_1 \cdot T_2$. Тогда в силу леммы 1.1

$$s_{T_1}(f) \leqslant s_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_{\widetilde{T}}(f) \leqslant S_{T_2}(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Справедливо неравенство*

$$\underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f).$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 имеем

$$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_{T_1} s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \Rightarrow \underline{J}(f) \leqslant \inf_{T_2} S_{T_2}(f) = \overline{J}(f).$$

Лемма доказана.

Замечание. Как нетрудно видеть,

$$\int\limits_E 1\,dx = |E|.$$

Действительно, для $f(x) = 1$ имеем

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \underline{J}(f) = \sup_T s_T(f) = |E|,$$
$$S_T(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |E_k| = |E| \Rightarrow \overline{J}(f) = \inf_T S_T(f) = |E|.$$

Ясно также, что

$$\int\limits_E 0\,dx = 0.$$

Свойства интеграла Лебега ограниченной измеримой функции

Свойство 1. Пусть функция f суммируема на E и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функция λf суммируема на E и справедливо равенство

$$\int\limits_E \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda\, s_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \sup_T\, s_T(f) = \lambda\, \underline{J}(f) = \lambda J(f),$$
$$S_T(\lambda f) = \lambda\, S_T(f) \Rightarrow \overline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \inf_T\, S_T(f) = \lambda\, \overline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$s_T(\lambda f) = \lambda\, S_T(f) \Rightarrow \underline{J}(\lambda f) = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \inf_T S_T(f) = \lambda\, \overline{J}(f) = \lambda J(f),$$
$$S_T(\lambda f) = \lambda\, s_T(f) \Rightarrow \overline{J}(\lambda f) = \inf_T S_T(\lambda f) = \lambda \sup_T\, s_T(f) = \lambda\, \underline{J}(f) = \lambda J(f).$$

Следовательно

$$\underline{J}(\lambda f) = \overline{J}(\lambda f) = \lambda J(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Пусть функции f и g суммируемы на E. Тогда функция $f+g$ суммируема на E и справедливо равенство

$$\int\limits_E (f+g)(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множества E. Возьмем $T = T_1 \cdot T_2$. Тогда

$$s_{T_1}(f) + s_{T_2}(g) \leqslant s_T(f) + s_T(g) \leqslant s_T(f+g) \leqslant \underline{J}(f+g) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{J}(f+g) \leqslant S_T(f+g) \leqslant S_T(f) + S_T(g) \leqslant S_{T_1}(f) + S_{T_2}(g).$$

Как следствие,

$$J(f) + J(g) \leqslant \underline{J}(f+g) \leqslant \overline{J}(f+g) \leqslant J(f) + J(g).$$

Таким образом,

$$\underline{J}(f+g) = \overline{J}(f+g) = J(f) + J(g).$$

Свойство доказано.

Следствие. Если функции f, g суммируемы на E для их произвольная линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также суммируема на E, причем

$$\int\limits_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_E f(x)\,dx + \beta \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Свойство 3. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 – измеримые непересекающиеся множества.

а) Если функция f суммируема на E, то f суммируема на E_1 и на E_2, причем

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

б) Если функция f суммируема на E_1 и на E_2, то f суммируема и на E и справедливо равенство (1.1).

Доказательство. а) Пусть $T = \{\widetilde{E}_k\}_{k=1}^n$ – произвольное разбиение множества E. Оно индуцирует разбиения

$$T_1 = \{\widetilde{E}_k \cap E_1\}_{k=1}^n \quad \text{и} \quad T_2 = \{\widetilde{E}_k \cap E_2\}_{k=1}^n$$

множеств E_1 и E_2. Заметим, что

$$m_k = \inf_{x\in\widetilde{E}_k} f(x) \leqslant m_{k,1} = \inf_{x\in\widetilde{E}_k\cap E_1} f(x), \quad \text{и} \quad m_k \leqslant m_{k,2} = \inf_{x\in\widetilde{E}_k\cap E_2} f(x),$$
$$M_k = \sup_{x\in\widetilde{E}_k} f(x) \geqslant M_{k,1} = \sup_{x\in\widetilde{E}_k\cap E_1} f(x), \quad \text{и} \quad M_k \geqslant M_{k,2} = \sup_{x\in\widetilde{E}_k\cap E_2} f(x).$$

Поэтому

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k|\widetilde{E}_k| = \sum_{k=1}^n m_k|\widetilde{E}_k\cap E_1| + \sum_{k=1}^n m_k|\widetilde{E}_k\cap E_2| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n m_{k,1}|\widetilde{E}_k\cap E_1| + \sum_{k=1}^n m_{k,2}|\widetilde{E}_k\cap E_2| = s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f),$$
$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k|\widetilde{E}_k| = \sum_{k=1}^n M_k|\widetilde{E}_k\cap E_1| + \sum_{k=1}^n M_k|\widetilde{E}_k\cap E_2| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n M_{k,1}|\widetilde{E}_k\cap E_1| + \sum_{k=1}^n M_{k,2}|\widetilde{E}_k\cap E_2| = S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f).$$

Таким образом,

$$s_T(f) \leqslant s_{T_1}(f)+s_{T_2}(f) \leqslant \underline{J}_1(f)+\underline{J}_2(f) \leqslant \overline{J}_1(f)+\overline{J}_2(f) \leqslant S_{T_1}(f)+S_{T_2}(f) \leqslant S_T(f).$$

Отсюда следует, что

$$J(f) \leqslant \underline{J}_1(f) + \underline{J}_2(f) \leqslant \overline{J}_1(f) + \overline{J}_2(f) \leqslant J(f).$$

Поэтому

$$\underline{J}_1(f) = \overline{J}_1(f), \quad \underline{J}_2(f) = \overline{J}_2(f) \quad \text{и} \quad J_1(f) + J_2(f) = J(f).$$

б) Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения множеств E_1 и E_2. Заметим, что $T = T_1 \cup T_2$ является разбиением множества E. Поэтому

$$s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) = s_T(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant S_T(f) = S_{T_1}(f) + S_{T_2}(f).$$

Как следствие,

$$J_1(f) + J_2(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant J_1(f) + J_2(f).$$

Поэтому

$$J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f) = J_1(f) + J_2(f).$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Пусть функция $f(x)$ суммируема на E.
Тогда для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ функция $f(x-h)$ суммируема на $E+h$ и

$$\int\limits_{E+h} f(x-h)\,dx = \int\limits_{E} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $T = \{E_k\}_{k=1}^N$ – разбиение множества E. Тогда $T+h = \{E_k+h\}_{k=1}^N$ – разбиение множества $E+h$.

Положим $f_h(x) = f(x-h)$ и заметим, что

$$\inf_{x\in E_k+h} f_h(x) = \inf_{x\in E_k} f(x) = m_k, \qquad \sup_{x\in E_k+h} f_h(x) = \sup_{x\in E_k} f(x) = M_k.$$

Пользуясь инвариатностью меры относительно сдвига, имеем

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^N m_k|E_k| = \sum_{k=1}^N m_k|E_k+h| = s_{T+h}(f_h),$$
$$S_T(f) = \sum_{k=1}^N M_k|E_k| = \sum_{k=1}^N M_k|E_k+h| = S_{T+h}(f_h).$$

Поэтому

$$J(f) = \underline{J}(f) = \underline{J}(f_h), \quad J(f) = \overline{J}(f) = \overline{J}(f_h) \quad \Rightarrow \underline{J}(f_h) = \overline{J}(f_h) = J(f).$$

Следствие доказано.

Свойство 5. Пусть $|E| = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $s_T(f) = 0$, $S_T(f) = 0$.

Свойство 6. Пусть функции f и g суммируемы на E, причем $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду на E. Тогда

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_E f\,dx - \int\limits_E g\,dx = \int\limits_E (f-g)\,dx = \int\limits_{E[f\leqslant g]} (f-g)\,dx + \int\limits_{E[f>g]} (f-g)\,dx.$$

Для первого интеграла $s_T(f-g) \leqslant 0$ и поэтому значение этого интеграла неотрицательно. Второй интеграл равен нулю, так как $|E[f>g]| = 0$.

Свойство доказано.

Теорема 1.1. *(Теорема Лебега.) Любая ограниченная измеримая на множестве E конечной меры функция f интегрируема по Лебегу на этом множестве.*

Доказательство. По условию $m \leqslant f < M$. Разобьем отрезок $[m, M]$ точками

$$m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M.$$

с постоянным шагом $\delta_n = \dfrac{M-m}{n}$.

Положим $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, где $E_k = E[y_{k-1} \leqslant f < y_k]$ для $1 \leqslant k \leqslant n$.

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n y_{k-1}|E_k| \leqslant s_T(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant S_T(f) \leqslant \sum_{k=1}^n y_k|E_k|.$$

Следовательно

$$0 \leqslant \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leqslant \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})|E_k| = \sum_{k=1}^n \delta_n|E_k| = \delta_n|E|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем:

$$0 \leqslant \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leqslant 0 \Rightarrow \underline{J}(f) = \overline{J}(f).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Именно для измеримости множеств E_k Лебегу и потребовалось свойство измеримости функции f.

Замечание 2. Можно доказать. что **всякая интегрируемая по Лебегу функция f является измеримой**.

Теорема 1.2. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега совпадают:*

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (L)\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть $\underline{I}(f)$ и $\overline{I}(f)$ – нижний и верхний интегралы Дарбу.

$$\underline{I}(f) = \sup_T s_T(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_T S_T(f),$$

где $T = \{[x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_x - x_{k-1}), \quad S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_x - x_{k-1}).$$

Очевидно, что

$$\underline{I}(f) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant \overline{I}(f),$$

так как множество разбиений в определении $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$ шире.

Так как $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f) = (L)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из интегрируемости по Лебегу не следует интегрируемость по Риману! (Функция Дирихле.)

Теорема 1.3. *Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена и непрерывна почти всюду на $[a, b]$.*