№2.4.

Верно ли $f(\bigcap_\alpha B_\alpha) = \bigcap_\alpha f(B_\alpha)$?

Из замечания 2.1. имеем: $f(\bigcap_\alpha B_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(B_\alpha)$ => не верно. Рассмотр. пример:

$f: \{1,2\} \Rightarrow \{1\}$ $(f(1)=1,\ f(2)=1)$, $B_1=\{1\}$; $B_2=\{2\} \Rightarrow B_1\cap B_2 = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow f(B_1\cap B_2)=\varnothing$

$f(B_1)\cap f(B_2) = f(\{1\})\cap f(\{2\}) = \{1\}\cap\{1\} = \{1\}$ => видно, что рав-во неверно.

№2.5

Д-ть: $f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$

Д-во: Пусть $x\in f^{-1}(\complement A) \Leftrightarrow f(x)\in \complement A \Rightarrow f(x)\in S\setminus A \Rightarrow$
$f(x)\notin A \Leftrightarrow x\notin f^{-1}(A) \Rightarrow x \in S\setminus f^{-1}(A) = \complement f^{-1}(A)$

ч.т.д.

№2.6.

Верно ли $f(\complement A) = \complement f(A)$?

Построим пример: пусть $f(x)=x^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$; ~~$x=[0,1]$~~ =>

$A=[0,1] \Rightarrow \complement A = (-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

$f(\complement A) = (0;+\infty)$; $f(A)=[0,1] \Rightarrow \complement f(A) = (-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

$f(\complement A) = (0;+\infty) \neq (-\infty;0)\cup(1;+\infty) = \complement f(A)$ => не верно

№2.9.

Д-ть: Мн-во $\mathbb{Z}$ счётно

Д-во: Нужно д-ть, что мн-во $\mathbb{Z}$ эквивалентно $\mathbb{N}$ => нужно найти взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots -4,-3,-2,-1,0,1,2,\dots\} = \{0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,\dots\}$, тогда можно составить системы:

1) Считаем по положительным => $\begin{cases} a+b=0 \\ a+3b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$ =>

$f(n) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$, если $n = 2k+1$

2) По отрицательным: $\begin{cases} a+2b=-1 \\ a+4b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} -a-2b=1 \\ a+4b=-2 \end{cases}$ $\Rightarrow 2b=-1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=0$

$f(n) = -\frac{1}{2}n$, если $n=2k$

Итого, имеем $f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}n, & n=2k \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n, & n=2k+1 \end{cases}$ $\Rightarrow \not\exists$ счётно

ч.т.д.

№2.8.

Дано: A и B - конечные мн-ва

Д-В: $A \sim B \Leftrightarrow n_A = n_B$, где n_A и n_B - кол-во эл-ов в A и B соотв.

Д-во: $\Leftarrow$ $n_A = n_B$, A, B - конечные мн-ва $\Rightarrow$ составим таблицу

$\left.\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n_A} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n_B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ можно задать отображение, которое является однозначным

$\Rightarrow$ $A \sim B \Rightarrow \exists$ взаимно однозначное отображение. Допустим, что $n_A \neq n_B$ (пусть $n_A < n_B$). Составим таблицу:

$\left.\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ нет взаимно однозначного отображения $\Rightarrow$

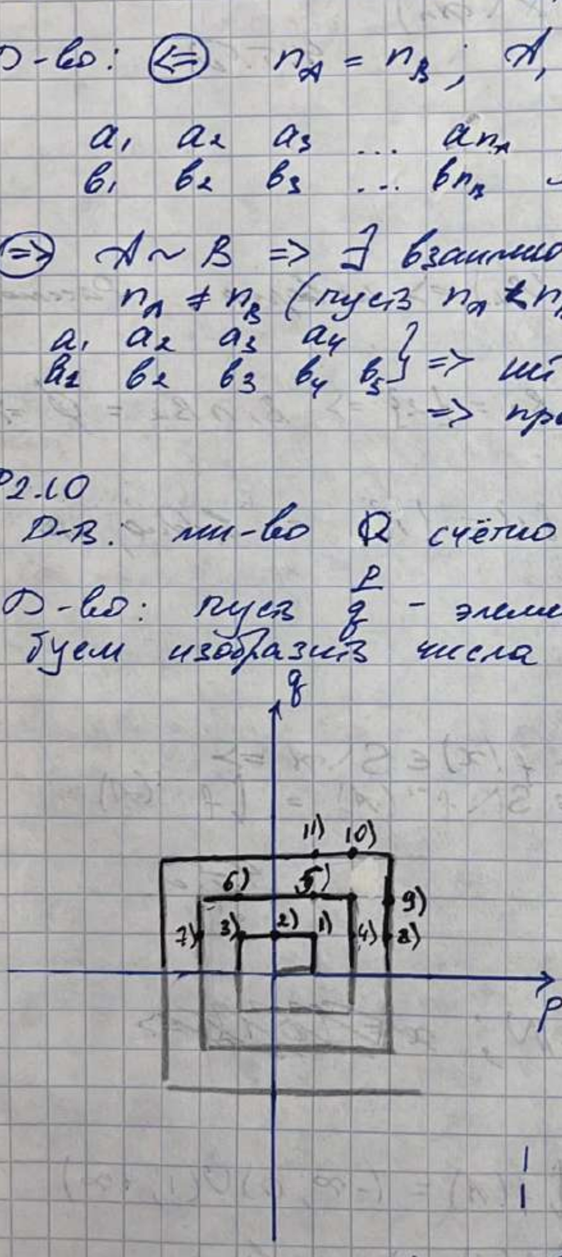
$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow n_A = n_B$

ч.т.д.

№2.10

Д-В: мн-во $\mathbb{Q}$ счётно

Д-во: пусть $\frac{p}{q}$ - элемент мн-ва $\mathbb{Q}$. ($\text{НОД}(p,q)=1$, $q>0$). Попробуем изобразить числа в пл-ти pq.



Обозначим числа на ней с помощью спирали.

Теперь будем рассматривать только те числа, для которых $q>0$ (чёрная часть спирали)

Пронумеруем точки пересечения целых „p" и „q", тогда получим таблицу (также убираем случаи повторения)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
1	0	-1	2	1/2	-1/2	-2	3	3/2	2/3	1/3	...

$\Rightarrow$ каждому рациональному числу ставится ровно одно натуральное. И, соответственно, обратное тоже верно $\Rightarrow$ мн-во $\mathbb{Q}$ счётно.

ч.т.д.

№2.7.

О-в: а) $A \sim A$; б) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; в) $\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim C$

Д-во: а) С обеих сторон от "$\sim$" имеем A => имеем тождественное отображение, которое отображает A на A взаимно однозначно.

б) $A \sim B \Rightarrow \exists$ отобр. f, которое однозначно отображает A на B. => имеем отображение f^{-1}, которое взаимно однозначно отображает B на A

в) $\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists$ взаимно однозн. отобр. f мн-ва A на B и $\exists$ взаимно однозн. отобр. g мн-ва B на C.

Тогда получаем взаимно однозн. отобр. $h = g \circ f$ мн-ва A на C, где $h(x) = g(f(x))$.

ч.т.д.

№2.12

а) $\mathbb{N}$; $\{k \mid k = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$

1	2	3	4	5	...
2	4	6	8	10	...

=>

=> $f(n) = 2n$

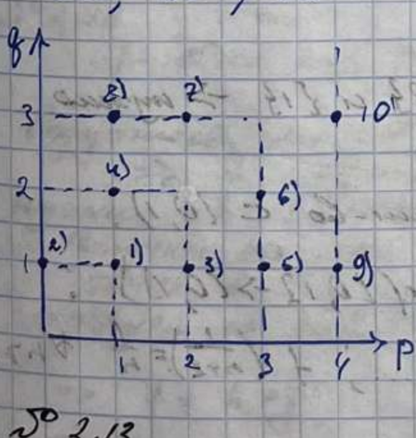
б) $\mathbb{N}$; $\{k \mid k = 2z,\ z \in \mathbb{Z}\}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	2	-2	4	-4	6	-6	8	-8	...

Расставим полож. чётн. числа по своим "номерам ($2-2$; $4-4$; и т.д), отрицательные же поместим между ними. Тогда несложно увидеть отображение:

$$f(n) = \begin{cases} n; & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ 1-n; & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

в) Проведём выкалывания аналогично номеру 2.10. Добавим условие, что $p \geq 0$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	0	2	1/2	3	3/2	2/3	1/3	4	4/3	...

=> имеем взаимно однозначное отображение.

№2.13

а) $[0,1] \to [a,b]$.

Пусть отобр. имеет вид $f(n) = \xi + \theta \cdot n$ => имеем систему

$$\begin{cases} \xi + \theta \cdot 0 = a \\ \xi + \theta = b \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = a \\ \theta = b - a \end{cases} \Rightarrow f(n) = a + (b-a)n$$

Проверим, все ли элементы $[0,1]$ попадают в $[a,b]$. Пусть $x \in [0,1]$ =>

$\Rightarrow f(x) = a + (b-a)x = a + bx - ax = bx + a(1-x) \leq bx + b(1-x) =$
$= bx + b - bx = b \Rightarrow f(x) \leq b$

$f(x) = a + (b-a)x = bx + a(1-x) \geq ax + a - ax = a \Rightarrow f(x) \geq a$

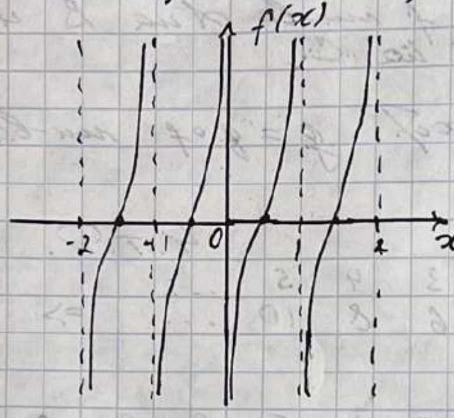
$a \leq f(x) \leq b$

б) Пусть $f: (0,1) \to \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = +\infty$

Выставил такие условие на f, т.к. хочу получить асимптоты в точках 0 и 1.
Также, чтобы переводить интервал на $\mathbb{R}$, f должна быть периодичной.

В моём представлении, должна получиться следующая картина:



С виду, f похожа на tg, но нужно его "модифицировать".

У tg $T=\pi$, нам же нужен $T=1$

Если $T=\pi$, то $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Нам же нужно, чтобы $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

Очевидно, что нам подойдёт $tg(\pi x)$
Дальше нам нужно сдвинуть вправо на $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ получаем $f(x) = tg(\pi x - \frac{\pi}{2})$

в) Пусть $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x) = tg(\pi x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow g: \mathbb{R} \to (0,1)$, $g = f^{-1}$

$f^{-1} = [tg(\pi x - \frac{\pi}{2})]^{-1} \Rightarrow f^{-1} = \frac{1}{\pi} arctg(x) + \frac{1}{2} = g$

$g(x) = \frac{1}{\pi} arctg(x) + \frac{1}{2}$

г) $f: [0,1] \to (0,1)$

$(0,1)$ "отличается" от $[0,1]$ двумя точками: $\{0\}$ и $\{1\}$ $\to$ нужно найти место в интервале для этих точек.

Пусть $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ - некое счётное мн-во $\subset (0,1)$.

Тогда зададим отображение следующим образом $([0,1] \to (0,1))$:

$f(\frac{1}{2}) = 0$; $f(\frac{1}{3}) = 1$; $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$; $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{3}$; ... ; $f(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 2$

Если же некий $x \notin A$, то пусть $f(x) = x$.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & n \in A,\ n > 2 \\ n, & n \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

д) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Получим отображение f из двух других: $g: [0,1] \to (0,1)$; $h: (0,1) \to \mathbb{R}$

Тогда $f = h \circ g$ (h и g описаны в б) и г) соотв) е) $f: [0;+\infty) \to \mathbb{R}$

Разобьём наше искомое отображение на 2:

$$[0;+\infty) \xrightarrow[①]{} (0;+\infty) \xrightarrow[②]{} \mathbb{R}$$

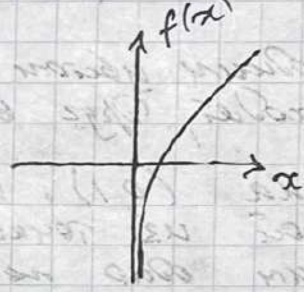
① $h: [0;+\infty) \to (0;+\infty)$

Пусть $A = \{1, 2, 3, \dots, a, \dots\} \subset (0;+\infty)$, тогда пусть $h(0)=1;\ h(1)=2;\ h(2)=3;\ \dots\ h(n)=n+1$. А те точки, которые не лежат в A пусть отображаются сами в себя.

$$h(n) = \begin{cases} n_{n+1}, & \forall n \geq 0 \\ n, & n \in (0;+\infty) \setminus A \end{cases}$$

② $g: (0;+\infty) \to \mathbb{R}$

Вспомним график логарифма:



Это как раз искомое отобр. $g \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \ln x$

Тогда $f: [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ получим следующим образом:

$$f = g \circ h$$

№ 2.14

Искомая функция $\nexists$, ибо $\forall$ непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена

№ 2.15

Искомая функция $\nexists$, ибо $\forall$ непрерывная на $[a, b]$ функция достигает верхней и нижней граней $\Rightarrow$ её образом всегда является отрезок.

№ 2.16

f: едич. окр $\to [0;1]$

Окружность можно представить так: $\{(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi) : \varphi \in [0;1)\}$ $\Rightarrow \exists$ отображение на $[0,1)$. Назовём его g. Далее нам нужно $h: [0,1) \to [0,1]$

Получим его так: каждая точка переходит в себе, кроме точек $\in A = \{1, 1/2, 1/4, \dots\}$ которые переходят друг в друга со следующим: $h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow f = h \circ g$

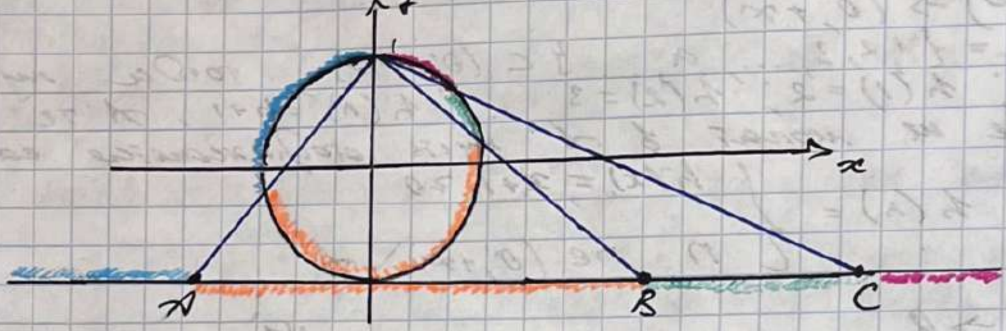
№ 2.17

а) откр. круг $\to$ круг

Пусть $\exists \{A_n\}$ - посл-ть концентрических окр-ей в откр. круге. Тогда будем точки окр-ти A_1 будем переводить в точки круга, лежащие на его границе. Точки A_n в соотв. точки A_{n+1}. Остальные же точки оставим переходить сами в себя.

б) окр-ть → прямая

Идея следующая: попробую разбить окр-ть на несколько частей и показать переходы.



Обозначу одним цветом части окружности и части прямой, которые переходят друг в друга.

Осталась точка $(0,1)$. С ней всё просто: пусть каждое число $\in \mathbb{N}$ на прямой из точки „n" перейдёт в точку „n+1" ⇒ ⇒ получим одно место для $(0,1)$.

№2.11

Д-ть: мн-во алгебр. чисел счётно.

Д-во: число x алгебр. ⇒ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Для каждого ур-ия есть свой набор корней, который конечный ⇒ ⇒ док-во сведём к тому, чтобы д-ть, что мн-во всех многочленов счётно.

Рассмотрим $P_1(x) = a + bx$ ⇒ рассмотрим пару (a, b):

Составим матрицу:

$$\left.\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \dots \\ b_1 & (a_1,b_1) & (a_2,b_1) & (a_3,b_1) & \dots & (a_n,b_1) \dots \\ b_2 & (a_1,b_2) & (a_2,b_2) & (a_3,b_2) & \dots & (a_n,b_2) \dots \\ b_n & (a_1,b_n) & (a_2,b_n) & (a_3,b_n) & \dots & (a_n,b_n) \dots \\ & \dots & \dots & \dots & & \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \text{видно, что каждую}$$

точку можно пронумеровать числом $n \in \mathbb{N}$

Аналогично рассматривая $P(x)$ более высоких степеней, порядок нашей матрицы будет расти, но всё также каждую комбинацию $(a_1, a_2, \dots a_n, \dots)$ можно будет пронумеровать ⇒ мн-во всех многочленов счётно. Теперь каждому $P_n(x)$ ставится в соответствие определённый набор алгебраических чисел.

Всё это можно пронумеровать $n \in \mathbb{N}$ ⇒ мн-во алгебр. чисел счётно.

Ч.Т.Д.

№2.17

в) f: сфера с вык. точкой → пл-ть.

Построим стереограф. проекцию:

Будем проводить много через выколотую точку прямую l под разными углами ⇒ l будет пересекать сферу в т. x, а продолжение прямой за сферу пересекает пл-ть в т. y. Таким образом отобразим все точки сферы на плоскость и получим искомое отображение.

г) сфера → плоскость

Идея следующая: 1) отображаем сферу на сферу с выколотой точкой; 2) отображаем её на плоскость

1) Выделим на сфере без точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отобразим „лишнюю" точку первой сферы в элемент x_1, далее сдвигаем каждый i-ый элемент в $(i+1)$-ый. Остальные же точки переводим в себя.

2) Далее отображаем сферу с выколотой точкой на пл-ть (см В))

№ 2.18

$f: \mathbb{I} \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

~~Пусть~~ $\cancel{\{ \}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} ; \{ \}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{I}}$

Попробую построить рассуждение на основе идеи: будем прибавлять или отнимать иррац. число. Пусть это будет число $\sqrt{2}$.

Некое число $i \in \mathbb{I} = q + \sqrt{2}\, n$; $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$

Сделаю так, чтобы некоторые i переходили в $\mathbb{R}$ но при этом, чтобы не терялись иррац. числа из серии: $q + \sqrt{2}\, n$

Пусть каждое число вида $(q + \sqrt{2}\, n)$ переходит в $(q + (n-1)\sqrt{2})$, остальные же пусть переходят в себя.

Тогда, чтобы, например, получить на выходе „1":

$f(1+\sqrt{2}) = 1 + (1-1)\sqrt{2} = 1$; Аналогично получатся все $q \in \mathbb{Q}$

Но в то же время имеем $f(1+2\sqrt{2}) = 1 + (2-1)\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}$, то есть число $(1+\sqrt{2})$ не теряется.

Аналогично для всех чисел вида $q + n\sqrt{2}$: $q \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$

№ 2.19

$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots$ — абсцисса точки принадл. квадрату

$y = 0.\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_m \dots$ — ордината точки, принадл. квадрату

$f: \Pi \to (0,1]$, где $\Pi = (0,1] \times (0,1]$: $f(x,y) = 0,\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots$

f — отображение или нет?

Попробуем построить контрпример: заметим, что точка „0" не включена никуда ⇒

⇒ пусть некое число было получено отображением f: $z = 0{,}707070\dots$

⇒ $x = 0{,}7777\dots$ — удовл. усл, но $y = 0{,}0000\dots$ не удовл. усл ⇒

⇒ для т. $z = 0{,}707070\dots$ нет прообраза ⇒ f — не отображение.