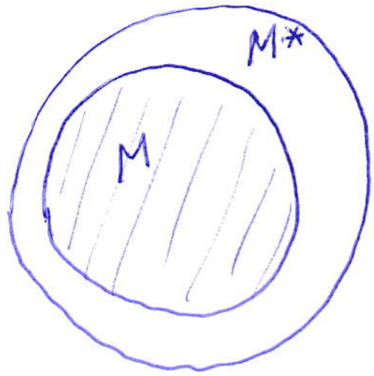
5 Пополнение метрического пространства

Опр. Пусть M – метрическое пространство.

Полное метрическое пространство M^* называется пополнением пространства M, если:

1) M является подпространством пространства M^*;
2) M всюду плотно в M^*.



Примеры.

1). Множество вещественных чисел можно рассматривать как пополнение множества рациональных чисел.

2). Пространство $L_p(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$ можно рассматривать как пополнение пространства $C_p[a,b]$ с метрикой

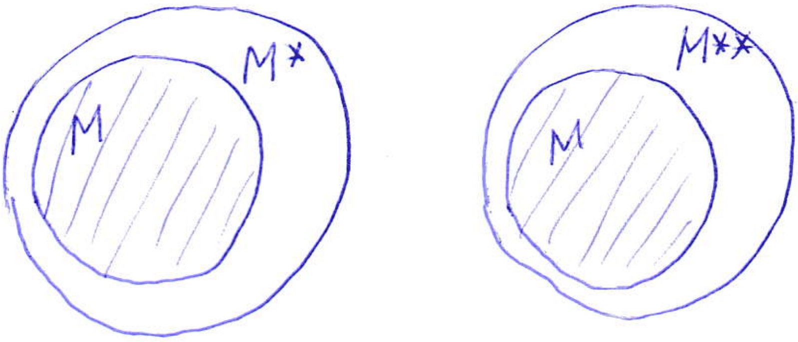
$$\rho(f,g) = \Big(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

ДЗ 5.1. Можно ли рассматривать $L_\infty(a,b)$ как пополнение пространства $C[a,b]$?

Теорема 5.1. *(Теорема Хаусдорфа о пополнении.) Каждое метрическое пространство M имеет пополнение и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из M.*

Доказательство. Докажем сначала **единственность.**

Предположим, что у метрического пространства M есть два пополнения: M^* и M^{**}.



Покажем, что существует отображение $\varphi : M^* \to M^{**}$ такое, что:

1) φ отображает M^* на M^* взаимно однозначно;

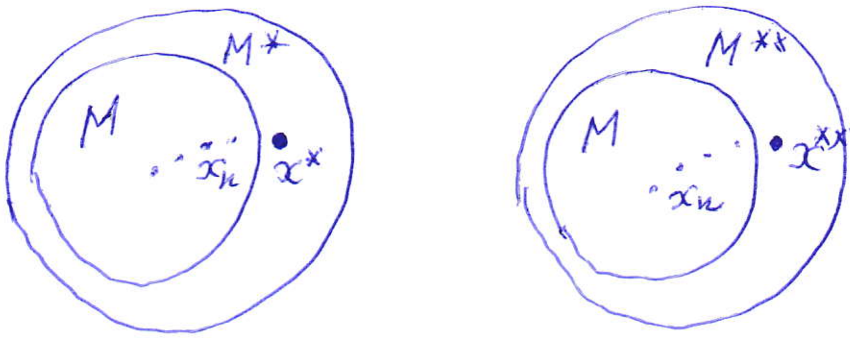
2) $\varphi(x) = x$ для всех $x \in M$;

3) $\rho_*(x, y) = \rho_{**}(\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $x, y \in M^*$.

Пусть $x^* \in M^*$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ такая, что $x_n \to x^*$ в M^*. Но $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M^{**}$ и поэтому

$$\rho_{**}(x_n, x_m) = \rho_*(x_n, x_m).$$

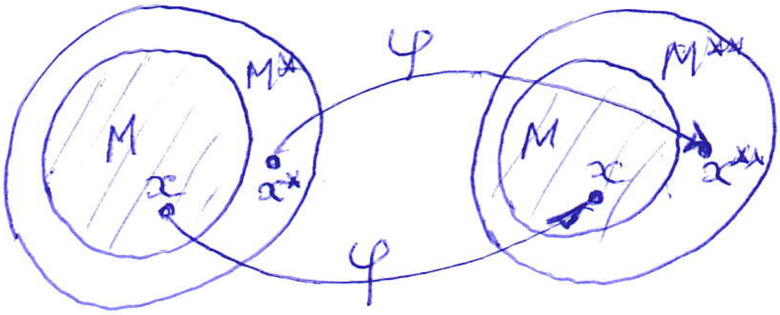
Значит, эта последовательность фундаментальна в M^{**}. и поэтому сходится в M^{**} к некоторому элементу x^{**}.



Заметим, что x^{**} не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x. Действительно, пусть $x_n \to x^*$ и $y_n \to x^*$ в M^*; кроме того, $x_n \to x^{**}$ и $y_n \to y^{**}$ в M^{**}. Тогда

$$\rho_{**}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_{**}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_*(x_n, y_n) = \rho_*(x^*, x^*) = 0.$$

Положим $\varphi(x^*) = x^{**}$ для всех $x^* \in M^*$.



Это и есть нужная изометрия. Докажем это.

1) Заметим, что φ отображает M^* на M^{**}. Пусть $x^{**} \in M^{**}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ такая, что $x_n \to x^{**}$ в M^{**}. Но $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M^*$ и эта последовательность фундаментальна. Следовательно она сходится в M^* к некоторому элементу x^*. Тогда $x^{**} = \varphi(x^*)$.

2) То, что $x = \varphi(x)$ для всех $x \in M$, очевидно.

3) Пусть $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ в M^* и $x_n \to x^{**}$, $y_n \to y^{**}$ в M^{**}. Тогда

$$\rho_{**}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_{**}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_*(x_n, y_n) = \rho_*(x^*, y^*).$$

Докажем **существование пополнения**. Назовем две фундаментальных последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ эквивалентными, еcди

$$\rho(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Обозначим через M^* множество, элементами которого являются классы X эквивалентных фундаментальных в M последовательностей.

Пусть $X, Y \in M^*$. Возьмем $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$. Положим

$$\rho_*(X, Y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{5.1}$$

Докажем, что этот предел существует Из неравенства

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$$

следует, что последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Следовательно предел (5.1) существует.

Покажем, что он не зависит от выбора $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$.

Пусть $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$. Тогда

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Убедимся в том, что M^* является метрическим пространством.

Очевидно, что $\rho_*(X, Y) \geqslant 0$. Равенство $\rho_*(X, Y) = 0$ означает, что последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$ эквивалентны, то есть $X = Y$.

Свойство $\rho_*(X, Y) = \rho_*(Y, X)$ очевидно.

Неравенство треугольника

$$\rho_*(X, Y) \leqslant \rho_*(X, Z) + \rho_*(Z, Y)$$

получается из неравенства

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

предельным переходом.

Сопоставим теперь каждому элементу $x \in M$ класс $X(x)$ сходящихся к x последовательностей. Положим

$$\widetilde{M} = \{\, X(x) \in M^*,\ x \in M\}.$$

Покажем, что $\widetilde{M}$ **всюду плотно в** M. Пусть $X \in M^*$. Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$. Для нее

$$\rho_*(X, X(x_m)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad m > N(\varepsilon).$$

Покажем, что M^* **полно**. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная в M^* последовательность. Так как $\widetilde{M}$ всюду плотно в M^*, то для каждого X_n существует $x_n \in M$ такой, что $\rho_*(X_n, X(x_n)) < 1/n$.

Заметим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) = \rho_*(X(x_n), X(x_m)) &\leqslant \\ \leqslant \rho_*(X(x_n), X_n) + \rho_*(X_n, X_m) &+ \rho_*(X_m, X(x_m)) < \\ < 1/n + \rho_*(X_n, X_m) + 1/m &< \varepsilon \quad n, m > N(\varepsilon).\end{aligned}$$

Пусть X – класс, которому принадлежит $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\rho_*(X, X_m) \leqslant \rho_*(X, X(x_m)) &+ \rho_*(X(x_m), X_m) < \\ < \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) + 1/m &< \varepsilon \quad \forall m > N(\varepsilon).\end{aligned}$$

Таким образом, $X_m \to X$ в M^*.

Для завершения доказательства осталось заменить $\widetilde{M}$ на M (то есть заменим $X(x)$ на x), сохранив расстояния.

Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Подпространство M_1 полного метрического пространства M полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в M.*

Доказательство. Пусть M_1 замкнуто. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_1$. В силу полноты M она сходится к некоторому элементу x. Из замкнутости M_1 следует, что $x \in M_1$. Следовательно M_1 полно.

Пусть теперь M_1 полно. Тогда всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, сходящаяся в M к некоторому элементу x, фундаментальна в M_1. В силу полноты M_1 она сходится к элементу из M_1. Следовательно $x \in M_1$.

Теорема доказана.

Пример. Пространство $C[a, b]$ является замкнутым подпространством пространства $L_\infty(a, b)$.