Домашняя работа №11   ~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, 10, ~~11~~, ~~12~~, ~~14~~

① Д-ть: нулевой элемент ! (№1,1)

Д-во:] $\exists e_1, e_2$ - нулевые элементы. $\Rightarrow e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow e_1 = e_2$

ЧТД

② Д-ть: $\forall x \in L \ \exists! \, x' : x + x' = 0$ и $x' = (-1)x$ (№1.3)

Д-во:] $\forall x \in L \ \exists \, x', x'' : x + x' = 0 \quad x + x'' = 0$
$\Rightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x'' + x + x' = x'' + 0 \Rightarrow x' = x''$

$x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x' = (-1)x$

ЧТД

③ Д-ть: $\forall x, y \in L \ \exists! (x-y) : x - y = x + (-1)y$

Д-во:] $x, y \in L \Rightarrow z = x + (-1)y$:

$y + z = y + x + (-1)y = x + y + (-1)y = x \Rightarrow x - y = x + (-1)y$

] $\exists z_1, z_2$ - разности для $x, y \in L \Rightarrow x = y + z_1 = y + z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' + y + z_1 = y' + y + z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

ЧТД

④ $\mathcal{F}$ - предкомп. в $L_p(E)$, $1 \le p < \infty \Rightarrow \mathcal{F}$ - равном. огр и равностеп. непр

Д-во: $\mathcal{F}$ - предкомп $\Rightarrow \mathcal{F}$ - вполне огр $\Rightarrow \mathcal{F}$ - огр.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ конечная $\varepsilon/3$ - сеть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. $\forall \xi_k \ \exists \delta_k > 0$:

$\|\xi_k(\cdot + h) - \xi_k(\cdot)\|_{L_p(E)} < \varepsilon/3 \quad \forall h : |h| < \delta_k$

$\forall f \in \mathcal{F} \ \exists \ \xi_k : \|f - \xi_k\|_{L_p(E)} < \varepsilon/3$

$\Rightarrow \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L_p(E)} \le \|f(\cdot+h)-\xi_k(\cdot+h)\|_{L_p(E)} + \|\xi_k(\cdot+h)-\xi_k(\cdot)\|_{L_p(E)} +$
$+ \|\xi_k(\cdot)-f(\cdot)\|_{L_p(E)} < 2\cdot\varepsilon/3 + \|\xi_k(\cdot+h)-\xi_k(\cdot)\|_{L_p(E)} < \varepsilon \quad \forall h:$
$|h| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) = \min_{1\le k\le N} \delta_k(\varepsilon/3)$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ - равностеп непр

ЧтД

5°1.2

Д-ть: $0\cdot x = 0 \quad \forall x \in L$

Д-во: $y = 0\cdot x = (0+0)x = 0x + 0x = y+y \Rightarrow$
$\Rightarrow y = y+y \Rightarrow y+y' = y+y+y' \Rightarrow 0 = y \Rightarrow 0\cdot x = 0$

ЧтД

5°1.14

M - мн-во в лин. пр-ве.

Д-ть: $2M \subset M+M$; $2M \overset{?}{\neq} M+M$

Д-во: $2M = \{2x : x\in M\} = \{x+x : x\in M\} \subset M+M = \{x+y : x,y \in M\}$
П $M = \{x\} \Rightarrow$ Для $2M$ имеем: $2M = M+M$

ЧтД.

5°1.4

Д-ть: $\forall x\in L \ \exists x'\in L : x+x' = 0$ можно заменить на $\forall x \in L \ 0\cdot x = 0$

Д-во: $\forall x\in L \ \exists x'\in L : x+x' = 0 \Rightarrow x + (-1)x = (1-1)x = 0\cdot x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\in L \ 0\cdot x = 0$

ЧтД

5°1.6

$\lambda x = \mu x : x \neq 0$

Д-ть: $\lambda = \mu$

Д-во: $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda x + (\mu x)' = \mu x + (\mu x)' = 0 \Rightarrow \lambda x + (\mu x)' = 0$
$\Rightarrow \lambda x + (-1)\mu x = 0 \Rightarrow (\lambda-\mu)x = 0 \ \{x\neq 0\} \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$

ЧтД

5°1.7

$\lambda x = \lambda y : \lambda \neq 0$

Д-ть: $x = y$

Д-во: $\lambda x = \lambda y \Rightarrow \lambda x + (\lambda y)' = \lambda y + (\lambda y)' = 0 \Rightarrow \lambda x + (\lambda y)' = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda x + (-1)\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda(x + (-1)y) = 0 \ \{\lambda \neq 0\} \Rightarrow x + (-1)y = 0 \Rightarrow x - y = 0$
$\Rightarrow x = y$

ЧтД

№1.9

Д-ть: $\forall x \in L\ \exists!$ разложение по базису.

Д-во: $]\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - базис n-мерного лин. пр-ва L

$\Rightarrow \forall x \in L\ \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n: \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n = x \quad (1)$

$]\ \exists$ ещё одно разложение: $\beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \ldots + \beta_n \xi_n = x \quad (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow \quad x - x = (\beta_1 - \alpha_1)\xi_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\xi_2 + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)\xi_n \rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)\xi_i = 0$. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - лин. незав, т.к. это базис

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)\xi_i = 0 \Leftrightarrow (\beta_i - \alpha_i) = 0 \quad \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n \rightarrow$ разложение !

ЧТД

№1.8

Д-ть: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ - не лин. пр-во с обычным слож. и умн, но становится им, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^+\ x \oplus y = x \cdot y$, $\forall x \in \mathbb{R}\ \lambda \odot x = x^\lambda$

Д-во: $]\ \lambda = -1 \Rightarrow \forall x\ \ x \cdot \lambda \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ не лин. пр-во.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+\ x \oplus y = x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \lambda \in \mathbb{R}\quad \lambda \odot x = x^\lambda \in \mathbb{R}^+$

Заметим: 1) $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ нулевой элем - 1

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \exists\ \frac{1}{x}: x \oplus \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$

Остальные аксиомы очевидны.

$\dim \mathbb{R}^+ = 1$

Заметим: $]\ x = \lambda \odot \xi = \xi^\lambda \Rightarrow \lambda = \log_\xi x \Rightarrow \xi \in \mathbb{R}^+$ - базис в $\mathbb{R}^+$.

ЧТД

№1.12

а) x, $(-x^3)$ - монотонные на $[-1, 1]$ функции, но $x - x^3 = x + (-x^3)$ - не монот. ф-ия $\Rightarrow$ нет

б) $]\ \xi, \varsigma$ - чётные ф-ии. $\xi + \varsigma$ - чётная ф-ия; $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\xi$ - чётная $\Rightarrow$ Да

в) $]\ \xi, \varsigma$ - многочлены $\Rightarrow \xi + \varsigma$ - многочлен, $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\xi$ - многочлен $\Rightarrow$ Да

г) $]\ \xi, \varsigma$ - многочлены ст $\le k \Rightarrow \xi + \varsigma$ - многочлен ст $\le k$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda\xi$ - многочлен ст $\le k$. $\Rightarrow$ Да

д) $]\ \xi, \varsigma$ - непр. дифф. $\Rightarrow \xi + \varsigma$ - непр. дифф; $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \xi$ - непр. дифф. $\Rightarrow$ Да е) Аналогично предыдущему пункту

ж) $A = \{x \in C[-1,1] : x(0) = 0\}$. $] x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Да

з) $A = \{x \in C[-1,1] : \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0\}$. $] x, y \in A \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} x\,dt = 0$, $\int\limits_{-1}^{1} y\,dt = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (x+y): \int\limits_{-1}^{1} (x+y)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} x\,dt + \int\limits_{-1}^{1} y\,dt = 0$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\int\limits_{-1}^{1} \lambda x\,dt = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Да

и) $A = \{x \in C[-1,1] : |x(t_1) - x(t_2)| \le L|t_1 - t_2|\}$. $] x, y \in A \Rightarrow$

$|x(t_1) - x(t_2)| \le L_x |t_1 - t_2|$, $|y(t_1) - y(t_2)| \le L_y |t_1 - t_2|$

$\forall (x+y): |(x+y)(t_1) - (x+y)(t_2)| = |x(t_1) + y(t_1) - x(t_2) - y(t_2)| \le$

$\le |x(t_1) - x(t_2)| + |y(t_1) - y(t_2)| \le (L_x + L_y)|t_1 - t_2| \Rightarrow (x+y) \in A$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x: |\lambda x(t_1) - \lambda x(t_2)| = |\lambda (x(t_1) - x(t_2))| = |\lambda| |x(t_1) - x(t_2)| \le$

$\le |\lambda| L |t_1 - t_2| \Rightarrow \lambda x \in A$

$\Rightarrow$ Да

Ответ: а) нет; б)–и) да

№1.11

Д-ть: лин. оболочка $L(\{x_\alpha\})$ – лин. многообразие

Д-во: $] x, y \in L(\{x_\alpha\}) \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $y = \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j y_j$: $x_k, y_j \in L(\{x_\alpha\})$

$$\left.\begin{array}{l} x+y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j y_j \in L(\{x_\alpha\}) \\ \lambda x = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda \alpha_k x_k \in L(\{x_\alpha\}) \end{array}\right\} \Rightarrow L(\{x_\alpha\}) \text{ – лин. многообр.}$$

ЧТД

№1.10

- $\dim \mathbb{R} = 1$
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$
- $\dim C[a,b] = \infty$, т.к. $\mathcal{P}[a,b] \subset C[a,b]$
- $\dim C^k[a,b] = \infty$, т.к. $\mathcal{P}[a,b] \subset C[a,b]$
- $\dim C^\infty(\mathbb{R}) = \infty$, т.к. $C(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$, а $\dim C(\mathbb{R}) = \infty$
- $\dim L_p(E) = \infty$
- $\dim l_p = \infty$

$\underset{\sim}{\text{№}1.5}$

$\mathbb{C}$ как вект. пр-во.

$\exists$ $\{1, i\}$ - базис $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{C}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$: $c = a + ib$ $\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$\alpha(a+ib) = \alpha a + i\alpha b \in \mathbb{C}$.