Домашняя работа №13

~~3.13~~, ~~4.2~~, ~~4.3~~, 4.6, ~~4.7~~, ~~4.8~~, ~~1.1~~, ~~1.2~~, ~~1.3~~, ~~1.4~~, 1.5, ~~1.6~~, ~~1.7~~

№3.13

а) $p_A(x) = \inf\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in L\} = \inf\{\tau > 0\} = 0$

б) $L = \ell_2$; $A = \{\{x_k\} \in \ell_2 : \|x\|^2_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < r^2\}$, $r > 0$

$p_A(x) = \inf\{\xi > 0 : \frac{x}{\xi} \in A\} = \inf\{\xi > 0 : \frac{\|x\|^2_{\ell_2}}{\xi^2} < r^2\} =$

$= \inf\{\xi > \frac{\|x\|_{\ell_2}}{r}\} = \frac{\|x\|_{\ell_2}}{r}$

в) $L = \ell_2$, $A = \{\{x_k\} \in \ell_2 : |x_1| < r\}$, $r > 0$

$p_A(x) = \inf\{\xi > 0 : \frac{x}{\xi} \in A\} = \inf\{\xi > 0 : \frac{|x_1|}{\xi} < r\} =$

$= \inf\{\xi > \frac{|x_1|}{r}\} = \frac{|x_1|}{r}$

№4.2

Может ли L состоять из n элементов?

Решение: $\exists\, x \in L \Rightarrow \alpha x \in L$ $\forall \alpha$ $x \neq 0$ $\Rightarrow$ в L есть минимум континуум элементов. $\Rightarrow$ не может

Ответ: нет

№4.3

а) $Ax = 0 \Rightarrow$ если x - решение, то $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ф.с.р.

$\Rightarrow L = \{x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\}$ - мн-во всех решений $Ax = 0 \Rightarrow$

$L = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow$ лин. многообразие

б) $Ax = b \Rightarrow$ если x - решение, то $x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, где x_0 - частное решение; $x_1, \ldots, x_n$ - ф.с.р.

$\Rightarrow M = \{x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\}$ - мн-во решений $Ax = b \Rightarrow$

$\Rightarrow M + L = M + \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow$ аффинное многообразие.

ЧТД.

№4.8

Д-ть: $\overset{\circ}{M}$ - вып, где M - вып. тело.

Д-во: $\exists\, x_1, x_2 \in \overset{\circ}{M}$, $y \in L \Rightarrow x_1 + ty \in M$ $\forall |t| < \varepsilon_1(y)$; $x_2 + ty \in M$ $\forall |t| < \varepsilon_2(y)$

$\Rightarrow \alpha(x_1 + ty) + (1-\alpha)(x_2 + ty) \in M$ $\forall \alpha \in [0,1]$ и $\forall |t| < \varepsilon(y)$, где

$\varepsilon(y) = \min\{\varepsilon_1(y), \varepsilon_2(y)\}$ $\Rightarrow \alpha x_1 + \alpha t y + (1-\alpha)x_2 + ty - \alpha t y \in M$

$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + ty \in M$ $\forall |t| < \varepsilon(y)$ $\forall \alpha \in [0,1]$

$\Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \overset{\circ}{M} \Rightarrow \overset{\circ}{M} \neq \varnothing$ ЧТД

№1.1

Д-ть: $\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \le \|x-y\| \quad \forall x,y\in X$

Д-во: $\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\|+\|y\| \Leftrightarrow \|x\|-\|y\| \le \|x-y\|$

$\|y\| = \|y-x+x\| \le \|y-x\|+\|x\| \Leftrightarrow -\|x\|+\|y\| \le \|x-y\| \Leftrightarrow$ ч.т.д.

$\|x\|-\|y\| \ge -\|x-y\|$

$\Rightarrow \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \le \|x-y\| \quad \forall x,y\in X$

ч.т.д.

№1.2

Д-ть: $\|x\|$ - непр. вып. ф-ал.

Д-во: $\exists x,y\in X \Rightarrow \|\alpha x+(1-\alpha)y\| \le \|\alpha x\|+\|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \to$ выпуклый

$\exists x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow$ (№1.1) $\big|\,\|x\|-\|x_n\|\,\big| \le \|x_n-x\| \to 0 \to$ непр.

ч.т.д.

№1.4 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X;\ x,y\in X$ Д-ть:

а) $x_n\to x \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - огр.

$\{\|x-x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ - беск. малая $\Rightarrow$ огр. $\Rightarrow \sup\limits_{n\ge 1}\|x_n-x\| = M<\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - огр.

б) $x_n\to x,\ \lambda_n\to\lambda \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x$

$\lambda_n x_n - \lambda x = (\lambda_n-\lambda)x + \lambda(x_n-x) + (\lambda_n-\lambda)(x_n-x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le |\lambda_n-\lambda|\,\|x\| + |\lambda|\,\|x_n-x\| + |\lambda_n-\lambda|\,\|x_n-x\| \to 0$

в) $x_n\to x \Rightarrow \|x_n\|\to\|x\|$

$\big|\,\|x_n\|-\|x\|\,\big| \le \|x_n-x\| \to 0$

г) $x_n\to x,\ \|x_n-y_n\|\to 0 \Rightarrow y_n\to x$

$\|y_n-x\| \le \|y_n-x_n+x_n-x\| \le \|y_n-x_n\| + \|x-x_n\| \to 0$

д) $x_n\to x \Rightarrow \|x_n-y\|\to\|x-y\|$

$\big|\,\|x_n-y\|-\|x-y\|\,\big| \le \|x_n-y-x+y\| = \|x_n-x\| \to 0$

е) $x_n\to x,\ y_n\to y \Rightarrow \|x_n-y_n\| \to \|x-y\|$

$\big|\,\|x_n-y_n\|-\|x-y\|\,\big| \le \|x_n-y_n-x+y\| \le \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \to 0$

ч.т.д.

№1.7

Д-ть: $\|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ $\forall x, y \in X$

Д-во: $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) \Rightarrow \|x\| \le \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x+y\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$, т.к. $\frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x+y\| \le$

$\le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$

ЧТД.

№1.5

Д-ть: в норм. пр-ве $\operatorname{diam} B_r(x_0) = 2r$

Д-во: Очевидно $\operatorname{diam} B_r(x_0) \le 2r$. $\exists y \in X : \|y\| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 + ty,\ x_0 - ty \in B_r(x_0)$ $\forall t \in (0, r)$

$x_0 + ty - x_0 + ty = 2ty \Rightarrow \|x_0 + ty - x_0 + ty\| = 2t\|y\| = 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{diam} B_r(x_0) \ge 2t$ $\forall t \in (0, r) \Rightarrow \operatorname{diam} B_r(x_0) \ge 2r$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{diam} B_r(x_0) \le 2r \\ \operatorname{diam} B_r(x_0) \ge 2r\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{diam} B_r(x_0) = 2r$

• Рассмотрим $X = \mathbb{Z}$: $\rho_X(a,b) = |a-b| \Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(0) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{diam} B_{\frac{1}{2}}(0) =$

$= 0 \ne 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ не верно $\forall$ метр. пр-ва

ЧТД

№1.6

$cl B_{r_1}(x_1) \subset cl B_{r_2}(x_2)$

Д-ть: $r_1 \le r_2$; $\|x_2 - x_1\| \le r_2 - r_1$

Д-во: $\exists x_1 = x_2$, $\|\xi\| = 1$

$x = x_1 + r_1\xi \in cl B_{r_1}(x_1) \subset cl B_{r_2}(x_2) \Rightarrow \|x - x_1\| = \|x - x_1 + r_1\xi\| =$

$= \|r_1\xi\| = r_1 \le r_2$

$\exists x_1 \ne x_2 \Rightarrow \exists x = x_1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|}(x_1 - x_2)$

$\|x - x_1\| = \|x_1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|}(x_1 - x_2) - x_1\| = \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|}\|x_1 - x_2\| = r_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in cl B_{r_1}(x_1) \subset cl B_{r_2}(x_2) \Rightarrow \|x - x_2\| = \|x_1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|}(x_1 - x_2) - x_2\|$

$= \|(x_1 - x_2)(1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|})\| = (1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|})\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\| + r_1 \le r_2$

$\Rightarrow \|x_1 - x_2\| \le r_2 - r_1$

ЧТД.

Д-ть: В полном норм. пр-ве ∀ абс. сходящийся ряд сх-ся.

Д-во: ∃ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ - абс. сх-ся $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ - сх-ся $\Rightarrow$ последовательность част. сумм $\{\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\}$ - фунд. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0 \ \left| \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon \ \ \forall n, m > N(\varepsilon)$

• Рассмотрим: $\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ - фунд. $\Rightarrow$ сх-ся $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ - сх-ся.

ЧТД.

№4.7

На $D \subset C[-1,1]$ заданы $f_1(x) = x(0) + x(1)$; $f_2(x) = \int_0^1 x(t)dt$

∃ продолжение f_1, f_2 на $C[-1,1]$?

Решение: ∃ на $C[-1,1]$ заданы $f_1'(x) = x(0) + x(1)$ и $f_2'(x) = \int_0^1 x(t)dt$

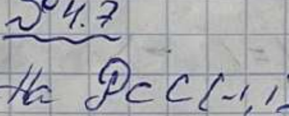
$\Rightarrow f_1', f_2'$ - продолжение f_1, f_2 на $C[-1,1]$ соотв.

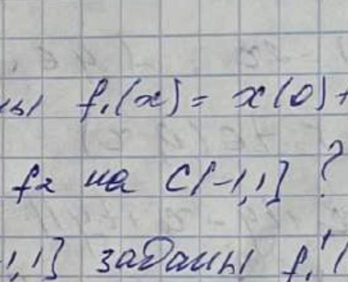
№1.3

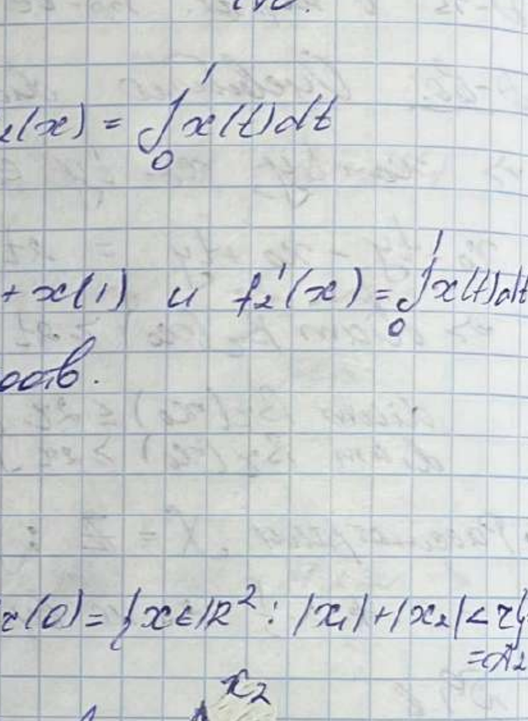
• $p = 1 \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |x_k|$

$m = 1 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\} = A_1$; $m = 2 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\} = A_2$

$m = 3 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| < r\} = A_3$





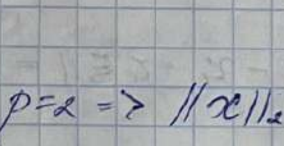


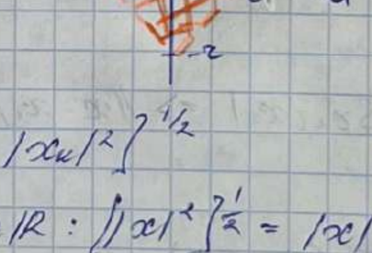
• $p = 2 \Rightarrow \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2 \right]^{1/2}$

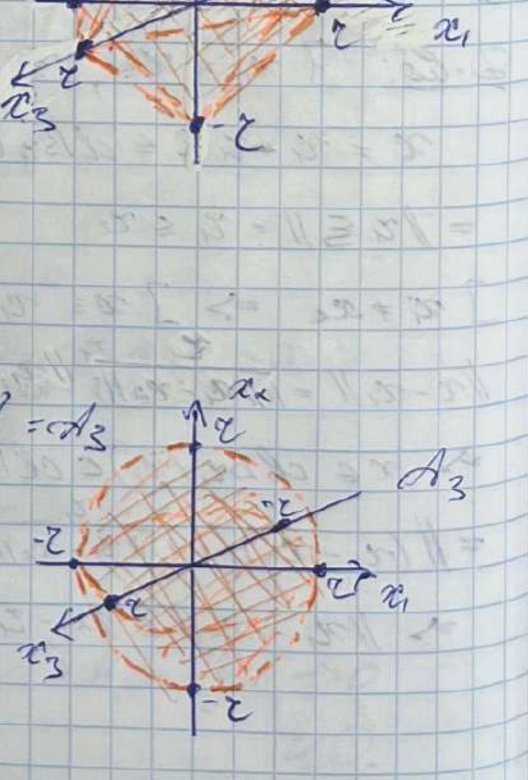
$m = 1 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : [|x|^2]^{\frac{1}{2}} = |x| < r\} = A_1$

$m = 2 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} < r\} = A_2$

$m = 3 \Rightarrow B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} < r\} = A_3$







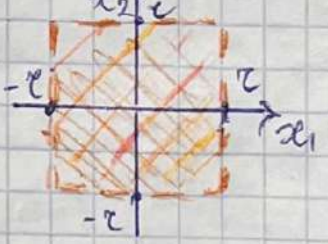
$p=\infty \Rightarrow \|x\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le m} |x_k|$

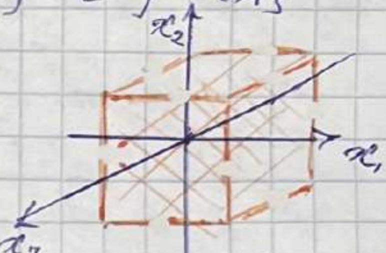
$m=1 \Rightarrow B_r(0) = \{x\in\mathbb{R} : |x| < r\} = A_1$

$m=2 \Rightarrow B_r(0) = \{x\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|,|x_2|\} < r\} = A_2$

$m=3 \Rightarrow B_r(0) = \{x\in\mathbb{R}^3 : \max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\} < r\} = A_3$

A_1





A_3 - куб без граней.

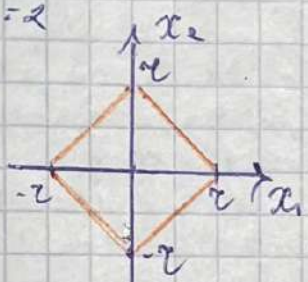
$S_r(0) = \{x\in\mathbb{R}^m : \|x\|_p = r\}$; $p=1,2,\infty$; $m=1,2,3$

• $p=1$

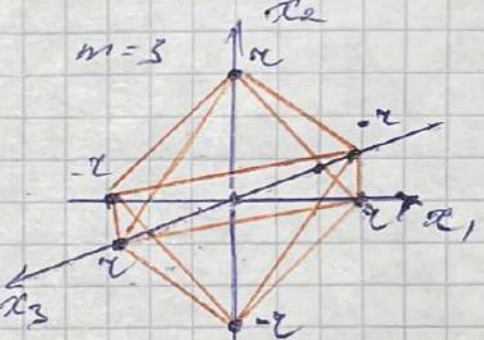
$m=1$

$A_1 = \{-r, r\}$

$m=2$



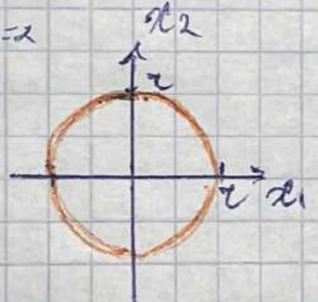
$m=3$



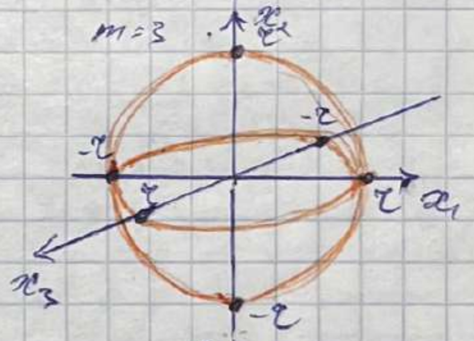
$p=2$

$m=1$

$m=2$



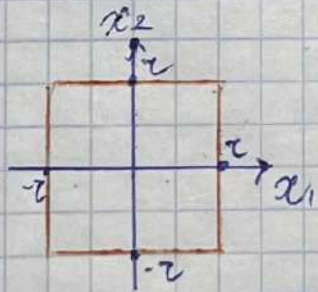
$m=3$



$p=\infty$

$m=1$

$m=2$



$m=3$