# 9 Линейные операторы в гильбертовом пространстве

**Опр.** Пусть $H$ – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – линейный оператор. Оператор $A^* : H \to H$ называется *сопряженным* к оператору $A$, если

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x, y \in H. \tag{9.1}$$

**Опр.** Оператор $A$ называется называется *самосопряженным*, если

$$A^* = A.$$

**Теорема 9.1.** *Если $A \in \mathscr{L}(H)$, то сопряженный оператор $A^*$ существует, единствен и является линейным ограниченным, причем $\|A^*\| = \|A\|$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функционал $f(x) = (Ax, y)$ при фиксированном $y \in H$. Как нетрудно видеть $f$ – линейный и ограниченный. так как

$$|f(x)| = |(Ax, y)| \leqslant \|Ax\|\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\| \quad \forall\, x \in H.$$

В силу теоремы Рисса-Фреше существует единственный элемент $h \in H$ такой, что

$$(Ax, y) = (x, h) \quad \forall x \in H.$$

Обозначив $h = A^*y$, приходим к (9.1). Существование и единственность элемента $h$ гарантирует существование и единственность сопряженного оператора. Очевидно, что

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \to \alpha h_1 + \beta h_2$$

что дает линейность оператора $A^*$.

Подставив в (9.1) $x = A^*y$, имеем

$$\|A^*y\|^2 = (AA^*y, y) \leqslant \|A\|\|A^*y\|\|y\|.$$

Следовательно

$$\|A^*y\| \leqslant \|A\|\|y\| \quad \forall\, y \in H.$$

и

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|.$$

Как нетрудно видеть, $A = (A^*)^*$. Поэтому $\|A\| \leqslant \|A^*\|$.

Таким образом,

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

**Теорема доказана.**

**Опр.** Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *вполне непрерывным* (или *компактным*), если он каждое ограниченное множество переводит в относительно компактное множество.

**Замечание 9.1.** *Как нетрудно видеть, каждый вполне непрерывный линейный оператор является ограниченным. (Т.к. каждое относительно компактное множество является ограниченным.)*

**Предложение 9.1.** *Если* $\dim Y < \infty$, *то всякий оператор* $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ *является вполне непрерывным.*

**Доказательство.** Оператор $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ переводит всякое ограниченное множество в ограниченное, а всякое ограниченное множество в конечномерном пространстве $Y$ является относительно компактным.

**Предложение доказано.**

## Интегральный оператор с ядром Гильберта-Шмидта

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $E$ – ограниченное измеримое множество. Рассмотрим интегральный оператор $A$

$$Ax(t) = \int\limits_E K(t,s)x(s)\,ds, \quad x \in L_2(E). \tag{9.2}$$

Функция $K(t,s)$ называется ядром интегрального оператора $A$.

Будем считать, что $K \in L_2(E \times E)$, т.е. $K$ измеримо и

$$M = \|K\|_{L_2(E\times E)} = \Bigl(\int\limits_E \int\limits_E |K(t,s)|^2\,dtds\Bigr)^{1/2} < \infty.$$

Заметим сначала, что функция $Ax$ измерима.

Действительно, $K(t,s)x(s)$ – измеримая функция, принадлежащая $L_1(E\times E)$, так как

$$\int\limits_{E\times E} |K(t,s)|\,dtds \leqslant \|K\|_{L_2(E\times E)} \Bigl(\int\limits_{E\times E} |x(s)|^2\,dtds\Bigr)^{1/2} = M(\operatorname{meas} E)^{1/2}\|x\|_{L_2(E)} < \infty.$$

Из теоремы Фубини следует, что функция $Ax$ измерима.

**Утверждение 1.** $A$ – линейный ограниченный оператор $A : L_2(E) \to L_2(E)$.

**Доказательство.** В самом деле,

$$\|Ax\|^2_{L_2(E)} = \int\limits_E \Bigl|\int\limits_E K(t,s)x(s)\,ds\Bigr|^2 dt \leqslant \int\limits_E \Bigl[\int\limits_E |K(t,s)|^2 ds\Bigr]\Bigl[\int\limits_E |x(s)|^2 ds\Bigr] dt$$
$$= \int\limits_{E\times E} |K(t,s)|^2\,dsdt\,\|x\|^2_{L_2(E)} = M^2\|x\|^2_{L_2(E)}.$$

Таким образом,

$$\|Ax\|_{L_2(E)} \leqslant M\|x\|_{L_2(E)} \quad \forall\, x \in L_2(E) \Rightarrow \|A\| \leqslant M.$$

**Утверждение доказано.**

**Утверждение 2.** Сопряженным к оператору $A$ является оператор

$$A^*x(t) = \int\limits_E K^*(t,s)x(s)\,ds \quad u \in L_2(E).$$

где

$$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}.$$

**Доказательство.** Действительно, в силу теоремы Фубини

$$(Ax,y)_{L_2(E)} = \int\limits_E \Big[\int\limits_E K(t,s)x(s)\,ds\Big]\overline{y}(t)\,dt = \int\limits_E \Big[\int\limits_E K(t,s)\overline{y}(t)\,dt\Big]x(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_E x(s)\Big[\int\limits_E K(t,s)\overline{y}(t)\,dt\Big]\,ds = \int\limits_E x(s)\overline{\Big[\int\limits_E \overline{K(t,s)}y(t)\,dt\Big]}\,ds = (x,A^*y)_{L_2(E)}.$$

**Утверждение доказано.**

**Следствие.** Если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$, то $A^* = A$, то есть оператор $A$ – самосопряженный.

**Теорема 9.2.** *Оператор $A$ является вполне непрерывным.*

**Доказательство**. Пусть $\mathscr{M}$ – ограниченное множество в $L_2(E)$, то есть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|x\|_{L_2(E)} \leqslant C \quad \forall\, x \in \mathscr{M}.$$

Так как оператор $A$ – ограниченный, то множество $A(\mathscr{M})$ – ограниченное. Заметим, что

$$\int_E |Ax(t+h) - Ax(t)|^2\, dt = \int_E \left| \int_G (K(t+h,s) - K(t,s))\, x(s)\, ds \right|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E\times E} |K(t+h,s) - K(t,s)|^2\, dtds \cdot \|x\|^2_{L_2(G)} \leqslant C \int_{E\times E} |K(t+h,s) - K(t,s)|^2\, dtds.$$

В силу непрерывности функции $K$ в $L_2(E\times E)$ относительно сдвига для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_E |Ax(t+h) - Ax(t)|^2\, dt < \varepsilon \quad \forall\, h : \ |h| < \delta(\varepsilon) \quad \forall Ax \in A(\mathscr{M}).$$

Таким образом, множество $A(\mathscr{M})$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно в силу критерия Рисса предкомпактности в $L_2(E)$ оно предкомпактно.

**Теорема доказана.**

**Лемма 9.1.** *Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Если $x_n \to x_0$ слабо в $H$, то $Ax_n \to Ax_0$ слабо в $H$.*

**Доказательство.** Пусть $x_n \to x_0$ слабо в $H$. Тогда

$$(Ax_n, y) = (x_n, A^*y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y) \quad \forall\, y \in H.$$

**Лемма доказана.**

**Теорема 9.3.** *Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$. Для того, чтобы оператор $A$ был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_n \to x_0 \text{ слабо в } H \Rightarrow Ax_n \to Ax_0 \;\text{ сильно в } H.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $A$ вполне непрерывен и пусть $x_n \to x_0$ слабо в $H$. Ясно, что $Ax_n \to Ax_0$ слабо в $H$.

Предположим, что $Ax_n \not\to Ax_0$ сильно в $H$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$\|Ax'_n - Ax_0\| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, n \geqslant 1. \qquad (*)$$

Последовательность $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, так как слабо сходится. Следовательно последовательность $\{Ax'_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна и из нее можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность $Ax''_n \to y_0$.

Ясно, что $x''_n \to x_0$ слабо и $Ax''_n \to Ax_0$ слабо. Значит, $Ax''_n \to Ax_0 = y_0$ сильно, то есть $\|Ax''_n - Ax_0\| \to 0$. Получили противоречие с неравенством $(*)$.

Достаточность. Пусть оператор $A$ переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Возьмем произвольное ограниченное множество $E \subset H$ и произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A(E)$. Выделим из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $x_{n_k} \to x_0$ слабо в $H$. Тогда $y_{n_k} \to Ax_0$ сильно в $H$.

**Теорема доказана.**

**Лемма 9.2.** *Пусть $A, B \in \mathscr{L}(H)$. Если оператор $B$ вполне непрерывен, то операторы $AB$ и $BA$ вполне непрерывны.*

**Доказательство.** Пусть $x_n \to x$ слабо в $H$. Тогда

$Bx_n \to Bx$ сильно $\Rightarrow ABx_n \to ABx$ сильно;

$Ax_n \to Ax$ слабо $\Rightarrow BAx_n \to BAx$ сильно.

**Лемма доказана.**

**Теорема 9.4.** *Если линейный оператор $A : H \to H$ вполне непрерывен, то оператор $A^*$ вполне непрерывен.*

**Доказательство.** Возьмем произвольную последовательность $x_n \to x_0$ слабо в $H$. Покажем, что $A^*x_n \to A^*x_0$ сильно в $H$.

$$\|A^*x_n - A^*x_0\|^2 = (A^*(x_n - x_0), A^*(x_n - x_0)) = (x_n - x_0, AA^*(x_n - x_0)) \leqslant \\ \leqslant \|x_n - x_0\| \|AA^*(x_n - x_0)\| \to 0,$$

так как оператор $AA^*$ вполне непрерывен и $AA^*x_n \to AA^*x_0$.

**Теорема 9.5.** *Пусть $A \in \mathscr{L}(H)$, $A$ – самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leqslant \|A\|.$$

Докажем, что $\|A\| \leqslant \mu$.

Заметим, что

$$|(Ax, x)| \leqslant \mu \|x\|^2 \quad \forall\, x \in H.$$

Воспользуемся равенством

$$4 \operatorname{Re}(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y),$$

из которого для $\|x\| = \|y\| = 1$ следует, что

$$4\, |\operatorname{Re}(Ax, y)| \leqslant \mu \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4\mu.$$

Следовательно

$$|\operatorname{Re}(Ax, y)| \leqslant \mu \quad \forall\, x, y \in H : \; \|x\| = 1, \; \|y\| = 1.$$

Пусть теперь $x$ и $y$ произвольные ненулевые элементы. Положим $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$, $y' = \dfrac{y}{\|y\|}$. В силу только что доказанного неравенства

$$|\operatorname{Re}(Ax', y')| \leqslant \mu \Rightarrow |\operatorname{Re}(Ax, y)| \leqslant \mu \|x\| \|y\| \quad \forall\, x, y \in H.$$

Возьмем теперь $y = Ax$. Тогда из полученного неравенства следует

$$\|Ax\|^2 \leqslant \mu \|x\| \|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leqslant \mu \|x\| \quad \forall\, x \in H.$$

**Теорема доказана.**

**Теорема 9.6.** *Пусть $H$ – комплексное гильбертово пространство. Для того чтобы оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in H$ величина $(Ax, x)$ была вещественной.*

**Доказательство**. Пусть $A = A^*$. Тогда $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$. Следовательно $(Ax, x)$ вещественно.

Пусть $(Ax, x)$ вещественно. Положим

$$A_R = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{и} \quad A_I = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Как нетрудно видеть, $A_R$ и $A_I$ – ограниченные самосопряженные операторы и $A = A_R + iA_I$. Тогда

$$(Ax, x) = (A_R x, x) + i(A_I x, x),$$

где $(A_R x, x)$ и $(A_I x, x)$ вещественны. Отсюда $(A_I x, x) = 0$ для всех $x \in H$. В силу теоремы 9.5 $A_I = 0$. Следовательно $A = A^*$.

**Теорема доказана.**

**Опр.** В пространстве ограниченных самосопряженных операторов вводится отношение порядка: $A \geqslant B$, если $(Ax, x) \geqslant (Bx, x)$ для всех $x \in H$.

**Опр.** Самосопряженный оператор $A \in \mathscr{L}(H)$ такой, что $A \geqslant 0$, т.е. $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$, называется *неотрицательным.*

**Опр.** Пусть $X, Y$ – нормированные пространства. Оператор $A^* : Y^* \to X^*$ называется *сопряженным* к оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, если

$$\langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = \langle A^* y^*, x \rangle_{X^* \times X} \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y^* \in Y^*.$$

**Теорема 9.7.** *Если $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, то сопряженный оператор $A^*$ существует, единствен и является линейным ограниченным, причем $\|A^*\| = \|A\|$.*