3 Интеграл Лебега по множеству произвольной меры

Пусть f – измеримая функция, заданная на неограниченном измеримом множестве E.

Положим $E_N = E \cap \{|x| < N\}$ и будем считать, что $f \in L(E_N)$ для всех $N > 0$.

Опр. Будем говорить, что функция f *интегрируема по Лебегу на множестве* E (или *суммируема на* E), если существуют конечные пределы

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^+\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^-\,dx.$$

В этом случае *интегралом Лебега функции* f *на множестве* E называется число

$$\int\limits_E f\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^+\,dx - \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^-\,dx.$$

Множество всех суммируемых на E функций обозначим через $L(E)$.

Заметим, что $|f| = f^+ + f^-$. Поэтому

$$\int\limits_E |f|\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} (f^+ + f^-)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^+\,dx + \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f^-\,dx.$$

Таким образом, для измеримой на E функции f

$$f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E).$$

Для суммируемых на E функций справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Если $f \in L(E)$, то $\lambda f \in L(E)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и справедливо равенство

$$\int\limits_E \lambda f\,dx = \lambda \int\limits_E f\,dx.$$

Свойство 2. Пусть $f, g \in L(E)$. Тогда Тогда $f + g \in L(E)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_E (f+g)\,dx = \int\limits_E f\,dx + \int\limits_E g\,dx.$$

Свойство 3. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 – измеримые непересекающиеся множества.

$f \in L(E)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E_1)$ и $f \in L(E_2)$, причем

$$\int\limits_E f\,dx = \int\limits_{E_1} f\,dx + \int\limits_{E_2} f\,dx.$$

Свойство 4. Пусть $f \in L(E)$. Тогда $f(\cdot - h) \in L(E+h)$ для всякого $h \in \mathbb{R}^m$ и

$$\int\limits_{E+h} f(x-h)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Свойство 5. Пусть $|E| = 0$. Тогда всякая заданная на E функция f суммируема на E и

$$\int\limits_E f\,dx = 0.$$

Свойство 6. Пусть f – измеримая на E функция, $g \in L(E)$, $g \geqslant 0$ и $|f| \leqslant g$ почти всюду на E. Тогда $f \in L(E)$ и

$$\Big|\int\limits_E f\,dx\Big| \leqslant \int\limits_E g\,dx.$$

Справедливы также следующие свойства.

Свойство 7. Функция f суммируема на E тогда и только тогда, когда она измерима на E и ее модуль $|f|$ суммируем на E.

Свойство 8. Пусть $f \in L(E)$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{E\setminus E_N} f\,dx = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_E f\,dx = \int\limits_{E_N} f\,dx + \int\limits_{E\setminus E_N} f\,dx.$$

Поэтому

$$\int\limits_E f\,dx - \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E_N} f\,dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{E\setminus E_N} f\,dx = 0.$$