№1.18

f – интегр. по Лебегу на $[a,b]$, интегр. по Риману на $[c,b]$: $c \in (a,b)$

Д-ть: $(R)\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} (R)\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ – сх-ся и $= \int_a^b f(x)dx$

Д-во: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx + (R)\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - (R)\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx\right| \Rightarrow$ если $\varepsilon \to 0$, то

$\left|\int_a^{a+\varepsilon} f(x)dx\right| \to \left|\int_a^a f(x)dx\right| \to 0 \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - (R)\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\right| \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} (R)\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

№1.19

Из 1.17: $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ - не суммируема на $(0,1)$, но

$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \left\{\frac{1}{x}=t\right\} = \int_1^{1/\varepsilon}\frac{1}{t}\cos t\,dt = \int_1^{1/\varepsilon}\frac{1}{t}\,d(\sin t) =$

$= \left\{ \begin{matrix} u=1/t \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2}dt \\ dv=\cos t \Rightarrow v=\sin t \end{matrix} \right\} = \frac{1}{t}\sin t\Big]_1^{1/\varepsilon} + \int_1^{1/\varepsilon}\sin t\cdot\frac{1}{t^2}\,dt =$

$= \varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} - \sin 1 + \int_1^{1/\varepsilon}\sin t\cdot\frac{1}{t^2}\,dt \quad \{\varepsilon\to 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} - \sin 1 + \int_1^{1/\varepsilon} t^{-2}\sin t\,dt \to -\sin 1 + \int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt$

$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \left\{u=\frac{1}{t^2}\Rightarrow du=\frac{-2}{t^3}dt;\ dv=\sin t\Rightarrow v=-\cos t\right\} =$

$= -\frac{\cos t}{t^2}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{2}{t^3}\cos t\,dt = \cos 1 - 2\int_1^\infty\frac{\cos t}{t^3}\,dt$

$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^3}\,dt < \int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,dt$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ -сх-ся

Тогда $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx$ сх-ся

№1.21

E - изм. мн-во; f-неотр, интегр на E; g -изм. на E: $\alpha\le g(x)\le\beta$ почти всюду на E

Д-ть: $\exists\ \gamma\in[a,b]: \int_E f(x)\,dx\, g(x) = \gamma\int_E f(x)\,dx$

Д-во: $\alpha\le g(x)\le\beta \Rightarrow \alpha\int_E f(x)\,dx \le \int_E f(x)g(x)\,dx \le \beta\int_E f(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \alpha \le \frac{\int_E f(x)g(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx} \le \beta$ при $\int_E f(x)g(x)\,dx \ne 0$

Тогда если взять $\gamma = \frac{\int_E f(x)g(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx}$, то:

$\int_E f(x)g(x)\,dx = \gamma\int_E f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\cdot\frac{\int_E f(x)g(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx} =$

$= \int_E f(x)g(x)\,dx \Rightarrow$ рав-во выполнено

Если же $\int_E f(x)\,dx = 0$, то $\gamma\in[\alpha,\beta]$.

Ч.т.д.

№1.17

$\int_0^1 \frac{1}{x}|\cos\frac{1}{x}|dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}dx \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}dx \quad \{\frac{1}{x}=t\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}|\cos\frac{1}{x}|dx \geq \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\cos^2 t}{t}dt = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{1}{t}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$

$= \frac{1}{2}\int_1^{1/\varepsilon}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{1/\varepsilon}\frac{\cos 2t}{t}dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}|\cos\frac{1}{x}|dx = \infty \Rightarrow \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не интегр. на $(0,1)$.

ч.т.д.

№1.20

f - сумм. на E: E - изм.

Д-ть: $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$

Д-во: $|\int_E f(x)dx| = |\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx| \leq$

$\leq |\int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx| \ominus$

$f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$; $f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \Rightarrow f(x) = |f(x)| - 2f^-(x)$

$f^+(x) = \frac{|f(x)| + |f(x)| - 2f^-(x)}{2} \Rightarrow f^+(x) + f^-(x) = |f(x)| \Rightarrow$

$\Rightarrow |f^+(x) + f^-(x)| = ||f(x)|| = |f(x)|$

$\ominus |\int_E (f^+(x) + f^-(x))dx| = |\int_E |f(x)|dx| = \int_E |f(x)|dx \Rightarrow$

$\Rightarrow |\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$

ч.т.д.

№2.5

$f_n \to f$ в $L(a,b)$

Д-ть: $\cos f_n \to \cos f$ в $L(a,b)$

Д-во: $\cos f_n - \cos f = 2\sin\frac{f_n+f}{2}\cdot\sin\frac{f-f_n}{2} \leq 2\cdot\frac{f-f_n}{2}\cdot\sin\frac{f_n+f}{2} =$

$= (f-f_n)\cdot\sin\frac{f_n+f}{2} \leq (f-f_n)\cdot 1 = f - f_n \Rightarrow |\cos f_n - \cos f| \leq |f_n - f|$

$f_n \to f$ в $L(a,b) \Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$

$\int_a^b |\cos f_n - \cos f|dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \Rightarrow \int_a^b |\cos f_n - \cos f|dx \to 0$

при $n \to \infty \Rightarrow \cos f_n \to \cos f$ в $L(a,b)$

ч.т.д.

№2.3

Пусть $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & x \in (1/n, 1] \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \to \varphi(x): \varphi(x) = 0$ ∀ почти $\forall x \in (0,1]$

Но в то же время: $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$; $\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{1/n} n\,dx + \int_{1/n}^1 0\cdot dx =$

$= nx\Big]_0^{1/n} = 1 \Rightarrow \int_0^1 \varphi(x)dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 f_n(x)dx$