5 Последовательности суммируемых функций

Заметим, что множество $L(E)$ всех суммируемых на измеримом множестве E функций является линейным пространством.

Сопоставим каждой функции $f \in L(E)$ число

$$\|f\|_{L(E)} = \int\limits_E |f(x)|\,dx.$$

Эту величину можно считать нормой, если ввести в $L(E)$ равенство следующим образом: $f = g$ тогда и только тогда, когда $f \sim g$, то есть $f(x) = g(x)$ почти всюду на E.

Ясно, что $L(E)$ является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_{L(E)} = \int\limits_E |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Опр. Пусть $f \in L(E)$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E)$. Будем писать, что $f_n \to f$ в $L(E)$, если

$$\|f_n - f\|_{L(E)} = \int\limits_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 5.1. *Пусть* $f \in L(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E)$ *и* $\delta > 0$. *Справедливо неравенство Чебышёва*

$$meas\, E[|f_n - f| > \delta] \leqslant \frac{1}{\delta} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx.$$

Доказательство.

$$\int_E |f_n - f|\, dx = \int_{E[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f|\, dx + \int_{E[|f_n - f| \leqslant \delta]} |f_n - f|\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{E[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f|\, dx \geqslant \delta \cdot \mathrm{meas}\, E[|f_n - f| > \delta]$$

Теорема доказана.

Следствие *Если* $f_n \to f$ *в* $L(E)$, *то* $f_n \to f$ *по мере на* E.

Докажем теперь несколько классических теорем л предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Пусть $f \in L(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E)$ и известно, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду на E.

Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx \;?$$

Вообще говоря, нельзя.

Пример. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n), \\ 0, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Тогда $f_n(x) \to f(x) = 0$ всюду на $(0, 1]$. В то же время

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \not\to \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Если же взять

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & x \in [0, 1/n), \\ 0, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

то, по прежнему, $f_n(x) \to f(x) = 0$ всюду на $(0, 1]$. В то же время

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = n \to \infty.$$

Если взять

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & x \in [0, 1/n), \\ 0, & x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

то, $f_n(x) \to f(x) = 0$ всюду на $(0, 1]$ и

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = (-1)^n.$$

Предела у этой последовательности нет вообще.

Теорема 5.2. *(Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.)*
Пусть $f \in L(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E)$ *и существует функция* $F \in L(E)$ *такая, что*

$$|f_n(x)| \leqslant F(x) \quad \text{почти всюду на} \quad E \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 1. \tag{5.1}$$

Если $f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду на* E, *то* $f_n \to f$ *в* $L(E)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Переходя к пределу в (5.1), получаем, что функция f измерима и удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant F(x)$ почти всюду на E. Следовательно $f \in L(E)$.

Положим $E_N = E \cap B_N$ и заметим, что

$$\int\limits_E |f_n - f|\,dx = \int\limits_{E_N} |f_n - f|\,dx + \int\limits_{E \setminus B_N} |f_n - f|\,dx \leqslant \int\limits_{E_N} |f_n - f|\,dx + 2\int\limits_{E \setminus B_N} F\,dx.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ второе слагаемое в правой части этого неравенства можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ выбором $N = N(\varepsilon)$. Фиксируем это $N = N(\varepsilon)$ и получим

$$\int\limits_E |f_n - f|\,dx \leqslant \int\limits_{E_N} |f_n - f|\,dx + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Заметим, что из $f_n \to f$ почти всюду на E_N следует, что $f_n \to f$ по мере на E_N, то есть для любого $\delta > 0$ мера множества $E_N[|f_n - f| > \delta]$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Положим $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3|E_N|}$ и заметим, что

$$\int\limits_{E_N} |f_n - f|\,dx = \int\limits_{E_N[|f_n-f|>\delta]} |f_n - f|\,dx + \int\limits_{E_N[|f_n-f|\leqslant\delta]} |f_n - f|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_N[|f_n-f|>\delta]} 2F\,dx + \delta|E_N| \leqslant \int\limits_{E_N[|f_n-f|>\delta]} 2F\,dx + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из $\operatorname{meas} E_N[|f_n - f| > \delta] \to 0$ при $n \to \infty$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что найдется $n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\int\limits_{E_N[|f_n-f|>\delta]} 2F\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\Bigl|\int\limits_E f_n\,dx - \int\limits_E f\,dx\Bigr| \leqslant \int\limits_E |f_n - f|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 5.2 останется верной, если в ее условиях заменить сходимость $f_n \to f$ почти всюду на E на сходимость по мере на E.

Теорема 5.3. *(Теорема Б.Леви.) Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность неотрицательных суммируемых на E функций и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ почти всюду на E.*

Если последовательность $\{\int\limits_E f_n(x)\,dx\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $f \in L(E)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Если же последовательность $\{\int\limits_E f_n(x)\,dx\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то $f \notin L(E)$.

Доказательство. Если $f \in L(E)$, то $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$ и для доказательства достаточно воспользоваться теоремой Лебега о мажорированной сходимости.

Если $f \notin L(E)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx \geqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\cap B_M} [f_n]_N\,dx = \int\limits_{E\cap B_M} [f]_N\,dx \to +\infty$$

при $M \to \infty$, $N \to \infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Иногда теорему Б. Леви называют теоремой Лебега о монотонной сходимости.

Следствие. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность неотрицательных суммируемых на E функций.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)\,dx$ сходится, то функциональный ряд $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится почти всюду на E; кроме того, $S \in L(E)$ и

$$\int\limits_E S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)\,dx. \qquad (*)$$

Доказательство. Положим $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)$. Заметим, что $\{S_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность неотрицательных суммируемых на E функций и

$$\int\limits_E S_N(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_E u_n(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)\,dx < \infty.$$

В силу теоремы Б. Леви функция $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ суммируема на E и справедливо равенство $(*)$. Кроме того из $S \in L(E)$ следует, что $S(x) < \infty$ почти всюду.

Теорема 5.4. *(Теорема Фату.) Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность неотрицательных суммируемых на* E *функций и* $f(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Если $\int\limits_E f_n(x)\,dx \leqslant C$ *для всех* $n \geqslant 1$, *то* $f \in L(E)$ *и*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant C.$$

Доказательство. Положим $g_n(x) = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$ и заметим, что

$$f(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_{n\geqslant 1} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x).$$

Последовательность $g_n(x)$, монотонно не убывая, сходится к $f(x)$, причем

$$g_n(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow \int\limits_E g_n\,dx \leqslant C \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

В силу теоремы Б. Леви $f \in L(E)$ и

$$\int\limits_E g_n\,dx \to \int\limits_E f\,dx \Rightarrow \int\limits_E f(x)\,dx \leqslant C.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E)$ и $\int\limits_E |f_n(x)|\,dx \leqslant C$ для всех $n \geqslant 1$. Если $f_n \to f$ почти всюду на E, то $f \in L(E)$ и $\int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant C$.