6 Примеры применения преобразования Фурье

1. Интегральное уравнение Фредгольма 2 рода

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение можно записать так:

$$u = \sqrt{2\pi}\,K * u + f.$$

Перейдем к преобразованию Фурье:

$$\widetilde{u} = \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}\,\widetilde{u} + \widetilde{f}.$$

Найдем $\widetilde{u}$:

$$\widetilde{u}(\xi) = \frac{1}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi)}\widetilde{f}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi)}\widetilde{f}(\xi) + \widetilde{f}(\xi). \tag{6.1}$$

Положим

$$\widehat{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi)} e^{ix\xi}\,d\xi$$

Применяя к (6.1) обратное преобразование Фурье, имеем

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{K}(x-y)f(y)\,dy + f(x). \tag{6.2}$$

Для того, чтобы формально полученную формулу (6.2) можно было обосновать, необходимы дополнительные условия на ядро K.

Например,

$$K \in S^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \|K\|_{L_1(\mathbb{R})} < 1 \Rightarrow \widehat{K} \in S^{\infty}(\mathbb{R}),\ 1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\xi) \geqslant 1 - \|K\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

2. Дифференциальное уравнение

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2 порядка

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Перейдем к преобразованию Фурье:

$$\xi^2\,\widetilde{u}(\xi) + \widetilde{u}(\xi) = \widetilde{f}(\xi).$$

Откуда

$$\widetilde{u}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\widetilde{f}(\xi).$$

Нам известно, что $$\mathscr{F}\left[e^{-\alpha|x|}\right](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \mathscr{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}\right](\xi).$$

Следовательно

$$u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)\,dy.$$

3. Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
$$u(x,0) = u^0(x).$$

Выполним преобразование Фурье: $u(x,t) \to \widetilde{u}(\xi,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}(\xi,t) = -\xi^2\,\widetilde{u}(\xi,t) + \widetilde{f}(\xi,t),$$
$$\widetilde{u}(\xi,0) = \widetilde{u}^0(\xi).$$

Отсюда

$$\widetilde{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\widetilde{u}^0(\xi) + \int\limits_0^t \widetilde{f}(\xi,\tau)e^{-\xi^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Воспользуемся тем, что $\mathscr{F}[e^{-ax^2}] = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. Значит,

$$\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-\xi^2 t}\right](x) = \mathscr{F}\left[e^{-\xi^2 t}\right](-x) = \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, имеем:

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}u^0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Первый интеграл принято называть интегралом Пуассона.