3 Функция Кантора

Определим функцию Кантора $\tau : [0,1] \to [0,1]$.

Представим число $x \in [0,1]$ в троичной системе исчисления

$$x = (0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots)_3 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i = 0,1,2$$

и сопоставим ему

$$y = \tau(x) = (0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n\ldots)_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{2^i}, \quad \beta_i = 0,1$$

по следующему алгоритму:

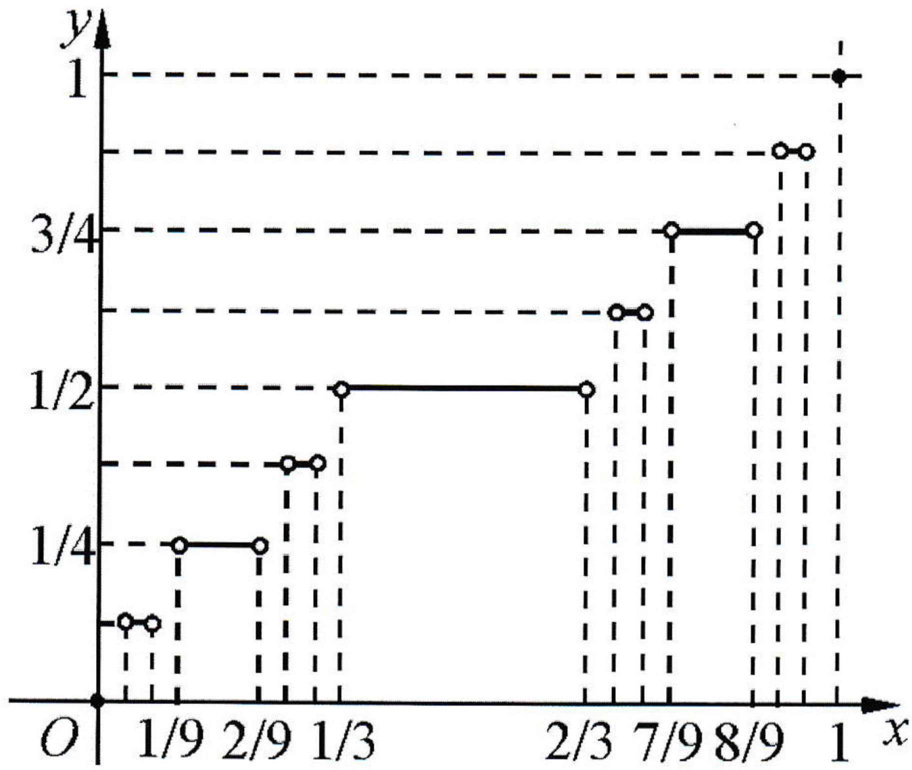
Пусть N – первый среди номеров i, для которых $\alpha_i = 1$. (Если среди цифр α_i нет равных единице, то $N = \infty$.) Положим

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i < N \quad \text{и} \quad \alpha_i = 0, \\ 1, & \text{если} \quad i < N \quad \text{и} \quad \alpha_i = 2, \\ 1, & \text{если} \quad i = N, \\ 0, & \text{если} \quad i > N. \end{cases}$$

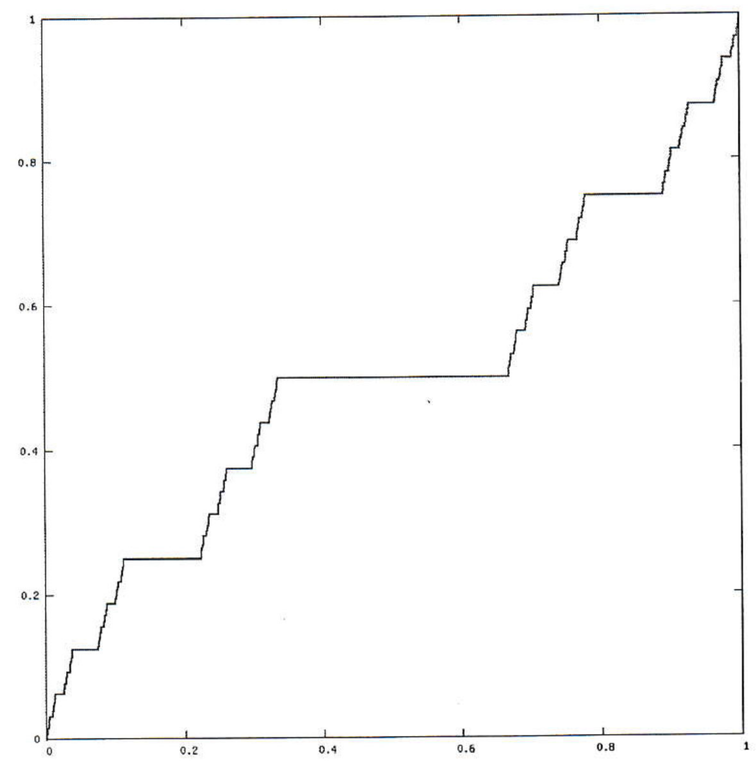
График функции Кантора называют канторовой лестницей.

Примеры.

$$x = (0,1020102\ldots)_3 \to \tau(x) = (0,1000000\ldots)_2 = \frac{1}{2},$$
$$x = (0,0210111\ldots)_3 \to \tau(x) = (0,0110000\ldots)_2 = \frac{3}{8},$$
$$x = (0,2020202\ldots)_3 \to \tau(x) = (0,1010101\ldots)_2.$$



y
1
3/4
1/2
1/4
O
1/9
2/9
1/3
2/3
7/9
8/9
1
x



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Ясно, что функция Кантора обладает следующими свойствами:

1) она не убывает на $[0,1]$;

2) она принимает все значения из $[0,1]$;

3) она непрерывна на $[0,1]$ (это следует из 1) и 2));

4) она равна постоянной на каждом из интервалов k-го ранга;

5) она дифференцируема почти всюду, причем $\tau'(x)=0$ почти всюду.

Пример 1. Рассмотрим функцию Кантора на множестве K_0, которое получено из канторова множества удалением правых концов отрезков k-ого ранга. Заметим, что $\tau(K_0) = [0,1]$, причем функция τ обратима и $\tau^{-1} : [0,1] \to K_0$.

Таким образом, функция Кантора дает **пример непрерывной функции, которая взаимно однозначно отображает множество нулевой меры на множество положительной меры**.

Пример 2. Пусть теперь $E_0 \subset [0,1]$, E_0 - неизмеримое множество. Ясно, что

$$E = \tau^{-1}(E_0) \subset K.$$

Следовательно $|E| = 0$ и множество E измеримо. В то же время множество $E_0 = \tau(E)$ неизмеримо,

Обратим внимание на то, что функция τ^{-1} монотонна и поэтому измерима.

Таким образом, функция Кантора дает **пример непрерывной функции, которая переводит измеримое множество на неизмеримое множество**.

Пример 3, который показывает, что **суперпозиция измеримых функций не обязана быть измеримой функцией**.

Пусть χ_E - характеристическая функция множества $E = \tau^{-1}(E_0)$, где $E_0 \subset [0,1]$, E_0 - неизмеримое множество. Тогда

$$\chi_E(\tau^{-1}(y)) = \chi_{E_0}(y).$$

Таким образом, функция являющаяся суперпозицией двух измеримых функций, определена на $[0,1]$ и совпадает с характеристической функцией множества E_0, которая неизмерима.