4 Линейные функционалы на нормированных пространствах

Пусть X – нормированное пространство. Заметим, что линейный функционал f, заданный на X, является частным случаем линейного оператора, действующего из X в $Y = \mathbb{R}$ или в $Y = \mathbb{C}$ (в зависимости от того, вещественно или комплексно пространство X). Поэтому для функционала f определены понятия непрерывности и ограниченности, введенные в параграфе 1.

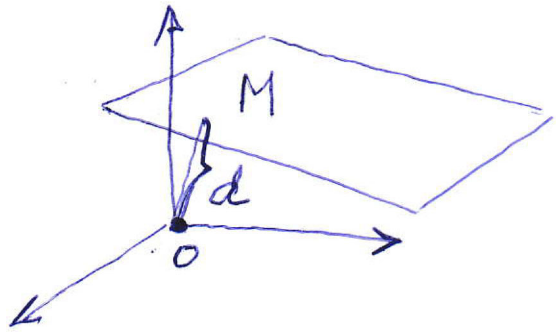
Линейный функционал f ограничен тогда и только тогда, когда конечна его норма

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Заметим, что из определения нормы следует, что

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Понятию нормы линейного функционала можно дать простую геометрическую интерпретацию. Напомним, что каждому ненулевому линейному функционалу можно сопоставить гиперплоскость $M = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$.



Найдем расстояние $d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$ от этой гиперплоскости до точки $x = 0$ в предположении, что f – ограниченный функционал.

Так как $|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|$, то для $x \in M = \{f(x) = 1\}$ имеем

$$\|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|} \Rightarrow d \geqslant \frac{1}{\|f\|}.$$

С другой стороны, в силу определения нормы функционала для всякого $\varepsilon > 0$ существует x_ε такой, что $\dfrac{|f(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} \geqslant \|f\| - \varepsilon$. Взяв $y_\varepsilon = \dfrac{1}{f(x_\varepsilon)} x_\varepsilon$, получим

$$f(y_\varepsilon) = 1 \quad \text{и} \quad \|y_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Отсюда

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\| \leqslant \frac{1}{\|f\| - \varepsilon} \Rightarrow d \leqslant \frac{1}{\|f\|}.$$

Таким образом, норма нетривиального функционала f имеет простую геометрическую интерпретацию: $\|f\| = \dfrac{1}{d}$, где d – это расстояние от точки $x = 0$ до гиперплоскости $M = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$.

Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах.

Теорема 4.1. *(Теорема Хана - Банаха в нормированных пространствах.) Пусть f_0 – линейный ограниченный функционал, заданный на линейном многообразии $L \subset X$. Тогда существует продолжение f функционала f_0 на X такое, что $\|f\| = \|f_0\|_{\text{на } L}$.*

Доказательство. Положим $k = \|f_0\|_{\text{на } L}$ и $p(x) = k\|x\|$. Ясно, что

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \quad \text{на} \quad L$$

и $p(x)$ – однородно-выпуклый функционал. Следовательно в силу теоремы Хана-Банаха для линейных пространств существует продолжение f функционала f_0 на X такое, что

$$|f(x)| \leqslant p(x) = k\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Отсюда

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant k = \|f_0\|_{\text{на } L} \Rightarrow \|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f_0\|_{\text{на } L}.$$

Так как $f(x) = f_0(x)$ на L, то

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|_{\text{на } L} \Rightarrow \|f\| = \|f_0\|_{\text{на } L}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Для всякого ненулевого элемента $x_0 \in X$ существует заданный на X линейный непрерывный функционал f такой, что*

$$\|f\| = 1 \quad \text{и} \quad f(x_0) = \|x_0\|_X.$$

Доказательство. Определим на $L = \mathrm{span}\{x_0\}$ линейный функционал f_0 формулой $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$.

Ясно, что

$$\|f_0\|_{\text{на } L} = \sup_{\alpha x_0,\ \alpha \neq 0} \frac{|\alpha|\|x_0\|}{\|\alpha x_0\|} = 1.$$

В силу теоремы Хана-Банаха существует продолжение f функционала f_0 на пространство X такое, что $\|f\| = 1$.

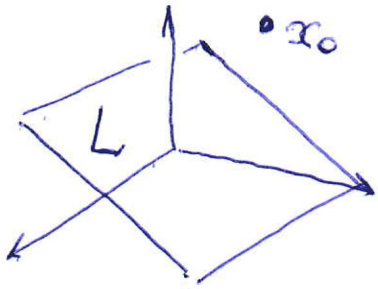
Следствие доказано.

Следствие 4.2. *Пусть L – линейное многообразие в X и элемент $x_0 \in X$ расположен на расстоянии $d > 0$ от L. Тогда существует заданный на X линейный непрерывный функционал f такой, что:*

1) $f(x) = 0 \quad \forall x \in L$;

2) $f(x_0) = 1$;

3) $\|f\| = 1/d$.



Доказательство. Возьмем $L_0 = L + \mathrm{span}\{x_0\}$. Для $x \in L_0$ имеем

$$x = y + \alpha x_0, \quad y \in L.$$

Положим $f_0(x) = \alpha$. Ясно, что $f_0(x) = 0$ для всех $x \in L$. Кроме того, $f_0(x_0) = 1$. Далее,

$$|f_0(x)| = |\alpha| = \frac{\|x\|}{\|y/\alpha + x_0\|} \leqslant \frac{\|x\|}{d},$$

так как

$$d = \inf_{z \in L} \|x_0 - z\| \leqslant \|x_0 - y/(-\alpha)\|.$$

Следовательно f_0 – непрерывный функционал.

Заметим, что d – расстояние от гиперплоскости $L + x_0 = \{x \in L_0 \mid f_0(x) = 1\}$. Поэтому $\|f_0\|_{\text{на } L_0} = 1/d$.

В силу теоремы Хана-Банаха существует продолжение f функционала f_0 на X такое, что $\|f\| = 1/d$.

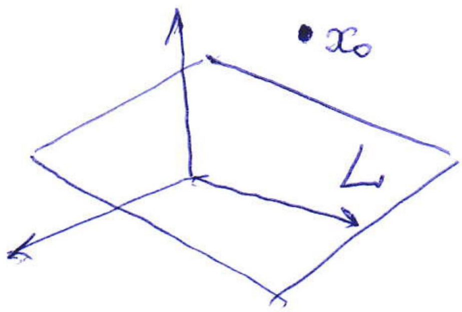
Следствие доказано.

Опр. Совокупность линейных непрерывных функционалов, заданных на пространстве X и равных нулю на подпространстве L, называется *аннулятором* этого подпространства и обозначается $L^{\perp}$.

Следствие 4.3. *(Лемма об аннуляторе) Для всякого замкнутого собственного подпространства L в X существует нетривиальный линейный непрерывный функционал f такой, что*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in L.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что из замкнутости L и условия $L \neq X$ следует существование $x_0 \in X$, $x_0 \notin L$ и воспользоваться предыдущим следствием.



Отделимость выпуклых множеств.

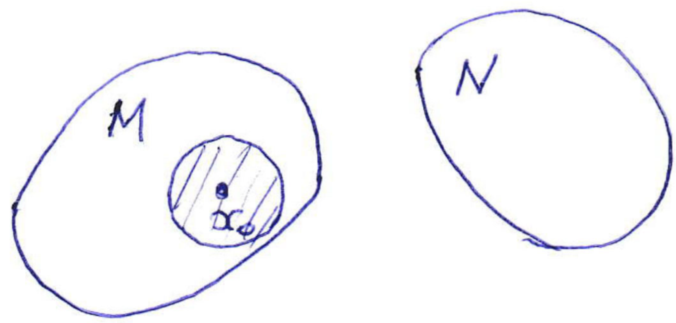
В следующих двух теоремах X – вещественное нормированное пространство.

Теорема 4.2. *(Теорема об отделимости выпуклых множеств)*
Пусть M и N – непересекающиеся выпуклые множества в X, причем $\operatorname{int} M \neq \emptyset$. Тогда существует нетривиальный линейный непрерывный функционал, разделяющий M и N.

Доказательство. Так как $\operatorname{int} M \subset \overset{\circ}{M}$, то в силу теоремы об отделимости выпуклых множеств в вещественных линейных пространствах существует нетривиальный линейный функционал f, разделяющий множества M и N.

Докажем, что f – ограниченный функционал. Действительно,

$$\sup_{x\in M} f(x) \leqslant \inf_{y\in N} f(y).$$



Взяв $x_0 \in \operatorname{int} M$, получим

$$f(x) \leqslant c_0 \quad \forall\, x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$$

Отсюда для произвольного $x \in X$, $\|x\| = 1$ имеем

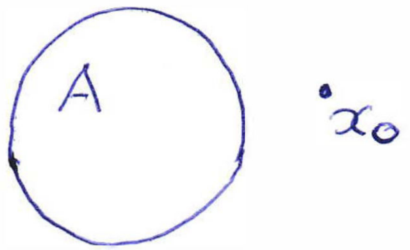
$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon}(f(x_0 + \varepsilon x) - f(x_0)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(c_0 - f(x_0)) = C.$$

Таким образом,

$$\sup_{\|x\|=1} f(x) \leqslant C \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leqslant C \Rightarrow \|f\| \leqslant C.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. *(Теорема Мазура) Пусть A – замкнутое выпуклое множество в X и $x_0 \in X \setminus A$. Тогда существует линейный непрерывный функционал, строго разделяющий A и $\{x_0\}$.*



Доказательство. Положим $N = A$ и $M = \overline{B}_\varepsilon(x_0)$, где ε достаточно мало.

В силу теоремы 4.2 существует нетривиальный линейный непрерывный функционал такой, что

$$\sup_{x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)} f(x) \leqslant \inf_{y \in A} f(y).$$

Покажем, что

$$f(x_0) < \inf_{y \in A} f(y).$$

Действительно, так как функционал f нетривиальный, то существует элемент $e \in X$, $\|e\| = 1$ и $f(e) > 0$. Тогда

$$f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon f(e) = f(x_0 + \varepsilon e) \leqslant \sup_{x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)} f(x) \leqslant \inf_{y \in A} f(y).$$

Теорема доказана.