11 Спектр линейного оператора. Резольвента

Пусть A – линейный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X.

Опр. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным значением* оператора A, если:

1) $Im(A - \lambda I) = X$;

2) оператор $A - \lambda I$ обратим $\Leftrightarrow Ker(A - \lambda I) = 0$;

3) оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, называемый *резольвентой*, ограничен.

Множество всех регулярных значений λ называется *резольвентным множеством оператора* A и обозначется через $\rho(A)$. Совокупность всех остальных значений называется *спектром оператора* A и обозначается через $Sp(A)$ или $\sigma(A)$.

Замечание 11.1. *Обратим внимание на то, что вопрос о свойствах оператора* $A - \lambda I$ *и обратного к нему* $(A - \lambda I)^{-1}$ *тесно связан с вопросом о свойствах задачи*

$$(A - \lambda I)x = y, \tag{11.1}$$

которая может быть записана в эквивалетном виде

$$Ax = \lambda x + y. \tag{11.2}$$

Замечание 11.2. *Если* A *– ограниченный оператор, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе из 1) и 2) следует 3). Таким образом, для* $A \in \mathscr{L}(X)$ *число* $\lambda \in \mathbb{C}$ *является регулярным значением тогда и только тогда, когда:*

1) $Im(A - \lambda I) = X$;

2) $Ker(A - \lambda I) = 0$.

Опр. Число λ называется *собственным значением оператора* A, если уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет нетривиальные решения x, называемые *собственными векторами* оператора A.

Так как в этом случае $Ker(A - \lambda I) \neq O$, то оператор $A - \lambda I$ не является обратимым. Следовательно множество собственных значений (*точечный спектр*) входит в спектр оператора A. Остальная часть спектра образует *непрерывный спектр*.

Теорема 11.1. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$. Если $|\lambda| > \|A\|$, то λ – регулярная точка.*

Доказательство. Ясно, что

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A).$$

то есть

$$(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = -\frac{1}{\lambda}y.$$

Так как $\|\frac{1}{\lambda}A\| < 1$, то уравнение

$$(A - \lambda I)x = y$$

однозначно разрешимо при любой правой части y. Следовательно $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема доказана.

Замечание 11.3. *В условиях 11.1 справедливы формула*

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{\lambda}\Big)^k = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$$

то есть формула

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$$

и оценка

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|},$$

то есть оценка

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|},$$

Следствие 11.1. *Спектр линейного ограниченного оператора принадлежит кругу*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| \leqslant \|A\|\}.$$

Теорема 11.2. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$. Тогда резольвентное множество $\rho(A)$ открыто.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Рассмотрим уравнение

$$(A - \mu I)x = y \Leftrightarrow (A - \lambda I)x - (\mu - \lambda)x = y. \tag{11.3}$$

После умножения его на $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ получим эквивалентное уравнение

$$(I - (\mu - \lambda)R_\lambda)x = R_\lambda y.$$

Если $|\mu - \lambda| < r = \|R_\lambda\|^{-1}$, то $\|(\mu - \lambda)R_\mu\| < 1$ и уравнение (11.3) имеет единственное решение при любом $y \in X$. Следовательно $\mu \in \rho(A)$.

Теорема доказана.

Замечание 11.4. *Ясно, что при $\|(\mu - \lambda)R_\lambda\| < 1$ справедлива формула*

$$R_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\lambda^{k+1}.$$

Следствие 11.2. *Спектр любого оператора $A \in \mathscr{L}(X)$ образует на комплексной плоскости замкнутое множество.*

Предложение 11.1. *Справедливо тождество Гильберта*

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A). \tag{11.4}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (11.4) на

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) = (A - \mu I)(A - \lambda I)$$

и получим

$$(A - \lambda I)(A - \mu I) R_\mu - (A - \mu I)(A - \lambda I) R_\lambda = (\mu - \lambda)(A - \lambda I)(A - \mu I) R_\mu R_\lambda,$$

что эквивалентно очевидному равенству

$$(\mu - \lambda) I = (\mu - \lambda) I.$$

Предложение доказано.

Следствие 11.3. *Пусть* $\lambda \in \rho(A)$, *Тогда*

$$\lim_{\mu \to \lambda} \|R_\mu - R_\lambda\| = 0.$$

Доказательство. Из тождества Гильберта следует, что

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)(R_\mu - R_\lambda) R_\lambda + (\mu - \lambda) R_\lambda^2,$$

откуда

$$\|R_\mu - R_\lambda\| \leqslant |\mu - \lambda| \|R_\mu - R_\lambda\| \|R_\lambda\| + |\mu - \lambda| \|R_\lambda\|^2.$$

Значит,

$$\|R_\mu - R_\lambda\| \leqslant \frac{|\mu - \lambda| \|R_\lambda\|^2}{1 - |\mu - \lambda| \|R_\lambda\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to \lambda.$$

Следствие доказано.

Следствие 11.4. *Пусть* $\lambda \in \rho(A)$, *Тогда существует предел*

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\lambda^2.$$

Доказательство. В силу тождества Гильберта

$$\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\mu R_\lambda \to R_\lambda^2 \quad \text{при} \quad \mu \to \lambda.$$

Следствие доказано.

Теорема 11.3. *Всякий ограниченный линейный оператор, действующий в нетривиальном комплексном нормированном пространстве, имеет непустой спектр.*

Доказательство. Фиксируем $x \in X$, $y \in X^*$ и рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(\lambda) = \langle y, R_\lambda x \rangle.$$

Предположим, что $\rho(A) = \mathbb{C}$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует предел

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} \left\langle y, \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} x \right\rangle = \langle y, R_\lambda^2 x \rangle.$$

Таким образом функция $f(\lambda)$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Заметим, что

$$|f(\lambda)| \leqslant \|y\|_* \|R_\lambda\| \|x\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \|y\|_* \|x\| \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to \infty.$$

Поэтому в силу теоремы Лиувилля

$$f(\lambda) = \langle y, R_\lambda x \rangle \equiv 0 \quad \forall\, x \in X, \; y \in X^*.$$

Следовательно

$$R_\lambda x = 0 \quad \forall\, x \in X \Rightarrow R_\lambda = 0,$$

что невозможно поскольку $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Теорема 11.4. *Все собственные значения самосопряженного линейного оператора лежат на вещественной оси.*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение, а x – соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x).$$

Отсюда $\lambda = \overline{\lambda}$.

Теорема доказана.

Теорема 11.5. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y) \Rightarrow (x, y) = 0.$$

Теорема доказана.