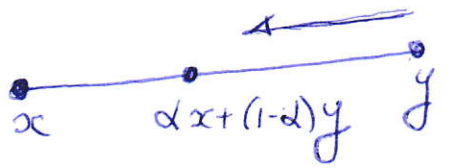
4 Выпуклые множества и выпуклые функционалы

Опр. Пусть L – линейное пространство. *Отрезком, соединяющим точки* $x, y \in L$ называется множество

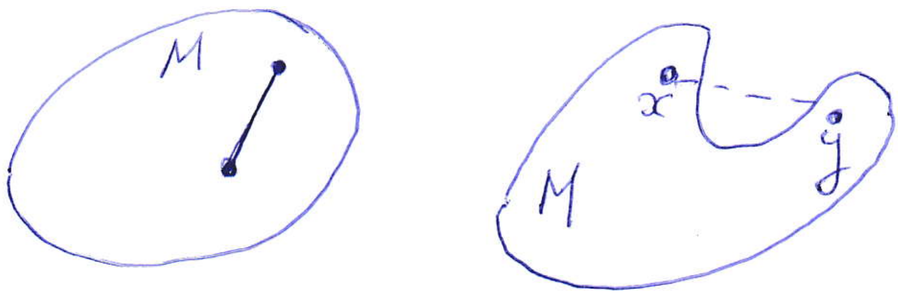
$$[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$

Заметим, что

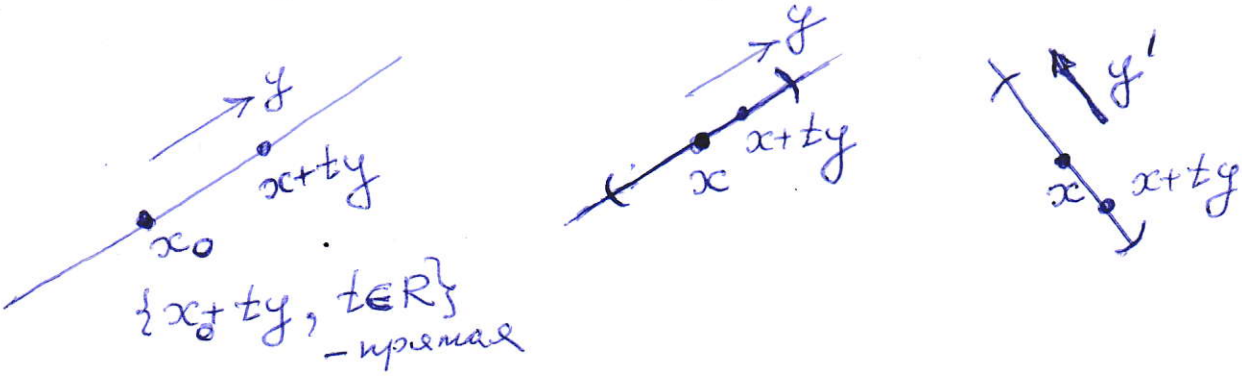
$$[x, y] = \{y + \alpha(x-y) \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$



Опр. Множество $M \subset L$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит соединяющий их отрезок $[x, y]$. Пустое множество считается выпуклым по определению.



Опр. Если M – выпуклое множество в L, то его *ядром* называется множество $\mathring{M}$ таких точек $x \in M$, что для каждого $y \in L$ существует $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ такое, что $x + ty \in M$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.



Опр. Выпуклое множество M, имеющее непустое ядро, называется *выпуклым телом.*

Примеры.

1. Куб и шар в $\mathbb{R}^3$ – выпуклые множества и выпуклые тела.

2. Плоскость и круг в $\mathbb{R}^3$ – выпуклые множества, не являющиеся выпуклыми телами.

3. Множество $\{f \in C[0,1] \mid |f| \leqslant 1\}$ – выпуклое множество и выпуклое тело.

4. Единичный шар в ℓ_2 – выпуклое множество и выпуклое тело.

Предложение 4.1. *Пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Замечание 4.1. *Непустое пересечение выпуклых тел не обязано быть выпуклым телом.*

Опр. Минимальное выпуклое множество, содержащее фиксированное множество A называется *выпуклой оболочкой множества* A.

Для построения выпуклой оболочки множества A достаточно найти пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A. Одним из таких множеств является L.

ДЗ 4.1. Доказать предложение 4.1.

ДЗ 4.2. Привести пример, когда непустое пересечение выпуклых тел не является выпуклым телом.

ДЗ 4.3. Доказать существование и единственность выпуклой оболочки множества A.

Подсказка. Для построения выпуклой оболочки множества A достаточно найти пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A. Одним из таких множеств является L.

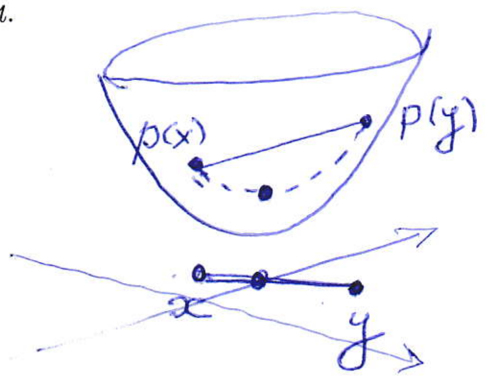
Однородно-выпуклые функционалы

Опр. Вещественный функционал p, определенный на линейном пространстве L, называется:

а) *выпуклым*, если
$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \quad \forall\, x, y \in L, \quad \forall\, \alpha \in [0,1];$$

б) *положительно-однородным*, если
$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall\, x \in L \quad \forall\, \alpha > 0. \tag{4.1}$$

Выпуклый положительно-однородный функционал для краткости называют *однородно-выпуклым.*



Предложение 4.2. *Для однородно-выпуклого функционала справедливо неравенство*
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in L. \tag{4.2}$$

Доказательство.
$$p(x+y) = 2p\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant 2\left(\frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(y)\right) = p(x) + p(y).$$

Замечание 4.2. *Из (4.1) и (4.2) следует выпуклость функционала p.*

Действительно,
$$p\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant p\big(\alpha x\big) + p\big((1-\alpha)y\big) = \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y).$$

Предложение 4.3. *Пусть p – однородно-выпуклый функционал. Тогда:*

1) $p(0) = 0$*;*

2) $p(x) + p(-x) \geqslant 0$*;*

3) $p(\alpha x) \geqslant \alpha p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1) $p(0) = p(\alpha 0) = \alpha p(0) \quad \forall \alpha > 0 \Rightarrow p(0) = 0$.

2) $0 = p(0) = p(x + (-x)) \leqslant p(x) + p(-x)$.

3) При $\alpha \geqslant 0$ доказываемое неравенство превращается в равенство. Если же $\alpha < 0$, то

$$0 \leqslant p(\alpha x) + p((-\alpha)x) = p(\alpha x) + (-\alpha)p(x) \ \Rightarrow p(\alpha x) \geqslant \alpha p(x).$$

Предложение доказано.

Примеры.

1. Однородно-выпуклым является любой линейный функционал ℓ.

2. Однородно-выпуклым является функционал $p(x) = |\ell(x)|$, где ℓ – линейный функционал.

3. В ℓ_∞ – функционал $p(x) = \sup\limits_{n \geqslant 1} |x_n|$ – однородно-выпуклый.

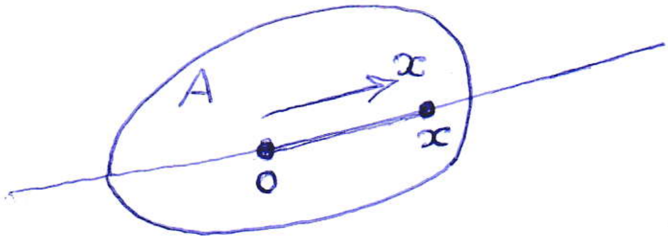
4. В любом нормированном пространстве функционал $p(x) = \|x\|$ является однородно-выпуклым.

Функционал Минковского

Опр. Пусть A – выпуклое тело в L, ядро которого $\mathring{A}$ содержит точку 0. Функционал

$$p_A(x) = \inf\left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\right\} \tag{4.3}$$

называется *функционалом Минковского* (выпуклого тела A).



Замечание 4.3. *Множество* $\left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\right\}$ *не пусто для всех* $x \in L$.

Действительно, $0 \in \mathring{A}$. Следовательно существует $\varepsilon(x)$ такое, что $0 + tx = tx \in A \quad \forall\, t:\ |t| < \varepsilon$. Значит, $\frac{1}{r}x \in A$ для всех $r > 1/\varepsilon$.

Замечание 4.4. *Множество* $\left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\right\}$ *представляет собой полуинтервал* $(a, +\infty)$ *или полусегмент* $[a, +\infty)$. *При этом* $p_A(x) = a \geqslant 0$.

Действительно, пусть $\frac{1}{r}x \in A$ и $r' > r$. Так как $0 \in A$, то в силу выпуклости множества A

$$\frac{1}{r'}x = \frac{r}{r'} \cdot \frac{1}{r}x + \left(1 - \frac{r}{r'}\right) \cdot 0 \in A \quad \forall\, r' \geqslant r.$$

Предложение 4.4. $p_A(x) \leqslant 1$ *для* $x \in A$ *и* $p_A(x) \geqslant 1$ *для* $x \notin A$.

Доказательство. Если $x \in A$, то $1 \in \left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\right\}$ и из определения (4.3) следует, что $p(x) \leqslant 1$.

Если $x \notin A$, то для $r \in (0, 1]$ не может выполняться условие $\frac{1}{r}x \in A$, так как в противном случае оно выполнялось бы с $r = 1$.

Поэтому $\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\} \subset (1, +\infty)$ и из определения (4.3) следует, что $p(x) \geqslant 1$.

Теорема 4.1. *Функционал Минковского – однородно-выпуклый.*

Доказательство. Положительная однородность очевидна:

$$p_A(\alpha x) = \inf \left\{ r > 0 \mid \frac{1}{r}\alpha x \in A \right\} = \inf \left\{ \alpha r' > 0 \mid \frac{1}{r'} x \in A \right\} = \alpha p_A(x).$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in L$ и $\varepsilon > 0$. Выберем r_1, r_2 так, чтобы

$$\frac{1}{r_1}x_1 \in A, \quad \frac{1}{r_2}x_2 \in A \quad \text{и} \quad r_1 < p_A(x_1) + \varepsilon, \quad r_2 < p_A(x_2) + \varepsilon.$$

В силу выпуклости множества A имеем:

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{r_1}x_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{r_2}x_2 = \frac{1}{r_1 + r_2}(x_1 + x_2) \in A.$$

Поэтому

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant r_1 + r_2 < p_A(x_1) + p_A(x_2) + 2\varepsilon.$$

Следовательно

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant p_A(x_1) + p_A(x_2).$$

Теорема доказана.

Домашнее задание к 1 апреля

Задачи 3.5 - 3.8, 3.13.