$\underline{№ 4.1}$ $\rho(x,y) = \varphi(|x-y|)$

а) $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)>0$ если $x>0$ б) $\varphi'(x)\geq 0$, $\varphi''(x)\leq 0$ при $x\geq 0$

1. $\rho(x,y)\geq 0$

$\rho(x,y) = \varphi(|x-y|)$: $|x-y|\geq 0 \Rightarrow \varphi(|x-y|)\geq 0$, причём $\varphi(0)=0 \Leftrightarrow x=y$ $\Rightarrow$ верно

2. $\rho(y,x) = \varphi(|x-y|) = \rho(x,y) \Rightarrow$ верно

3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ $\forall x,y,z$

$\rho(x,y) = \varphi(|x-y|) = \varphi(|x-z+z-y|)$

~~$\varphi(0)=0$ и $\varphi(x)>0$ при $x>0$~~

• $\varphi'(x)\geq 0 \Rightarrow \varphi(x)$ не убывает $\Rightarrow$ последующее значение не меньше предыдущего.

$\varphi(|a+b|) \leq \varphi(|a|+|b|) \Rightarrow \varphi(|x-z+z-y|) \leq \varphi(|x-z|+|z-y|)$

• $\varphi''(x)\leq 0 \Rightarrow \varphi(x)$ – вогнутая ф-ия $\Rightarrow \varphi(tx)\geq t\,\varphi(x)$, тогда

$\varphi(\xi)+\varphi(\theta) = \varphi\left[(\xi+\theta)\frac{\xi}{\xi+\theta}\right] + \varphi\left[(\xi+\theta)\frac{\theta}{\xi+\theta}\right] \triangleq$

$\geq \frac{\xi}{\xi+\theta}\varphi(\xi+\theta) + \frac{\theta}{\xi+\theta}\varphi(\xi+\theta) = \varphi(\xi+\theta) \Rightarrow \varphi(\xi+\theta)\leq\varphi(\xi)+\varphi(\theta)$

$\Rightarrow \varphi(|x-z|+|z-y|) \leq \varphi(|x-z|)+\varphi(|z-y|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(|x-y|) = \rho(x,y) \leq \varphi(|x-z|)+\varphi(|z-y|) = \rho(x,z)+\rho(z,y)$

Из 1., 2., 3. : $\rho(x,y) = \varphi(|x-y|)$ – метрика

№ 4.2

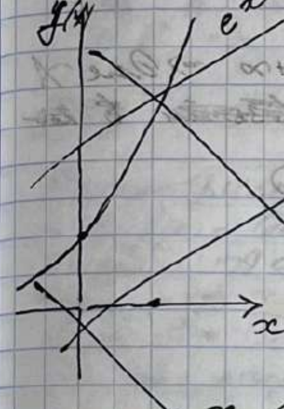
$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$

1. $\rho(x,y) \geq 0$ - верно

2. $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ - верно

3. $\rho(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = \rho(x,y)$ - верно

4. Пусть $f(x) = e^x$ - строго возрастает на $\mathbb{R}$



Заметим, что область, лежащая выше $f(x) = e^x$ - выпуклое мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ - выпукл. ф-ция $\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\xi x} \leq \xi e^x$. Тогда рассмотрим:

$e^x + e^y = e^{x+y \frac{x}{x+y}} + e^{x+y \frac{y}{x+y}} \leq$

$\leq \frac{x}{x+y} e^{x+y} + \frac{y}{x+y} e^{x+y} = \frac{x+y}{x+y} e^{x+y} = e^{x+y} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x + e^y \leq e^{x+y}$, но по св-ву метрики получим:

$\rho(x,y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y| = |e^x - e^z$

4. $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq$

$\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Выполнены 1, 2, 3, 4 $\Rightarrow \rho(x,y)$ - метрика

№ 4.3

$\rho(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

1) $\rho(m,n) \geq 0$

если $m = n$, очевидно, верно. Если $m \neq n$, то $\cancel{\frac{1}{m+n} > 0}$

$\frac{1}{m+n} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{m+n} > 0 \Rightarrow \rho(m,n) \geq 0$ - верно

2) $\rho(m,n) = 0 \Leftrightarrow m = n$. Очевидно

3) $\rho(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n} = 1 + \frac{1}{n+m} = \rho(n,m)$ - верно

Случай $m = n$ очевиден

4) $m = n \Rightarrow 0 \leq 1 + \frac{1}{m+q} + 1 + \frac{1}{n+q}$ - верно

$m \neq n \Rightarrow \rho(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{m+q} + 1 + \frac{1}{q+n}$ ← Д-ть

Запишем нер-во: $1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{m+q} + 1 + \frac{1}{q+n}$

$\frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{m+q} + \frac{1}{q+n}$

Все дроби не превышают значение „1" $\Rightarrow$ рав-во верно

$\Rightarrow \rho(m,n)$ - метрика

№1.1

Мн-во E изм-мо $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ откр. $Q_\varepsilon \supset E : |Q_\varepsilon \setminus E|^* < \varepsilon$

Пусть A - откр. мн-во $\Rightarrow$ $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ откр. } Q_\varepsilon \supset A : |Q_\varepsilon \setminus A|^* < \varepsilon}_{\text{нужно доказать}}$

A - откр $\Rightarrow$ примем $Q_\varepsilon = A$ $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon \ \exists Q_\varepsilon = A : |Q_\varepsilon \setminus A|^* = |A \setminus A|^* = |\varnothing|^* = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ A - измеримо

ч.т.д.

A - откр $\Rightarrow |A| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| \leq +\infty$

Внешняя мера произв. мн-ва: $|E|^* = \inf\limits_{G \supset E} |G| \leq +\infty$ $\Rightarrow$ для A имеем: $|A|^* = \inf |G|$, где G - откр., но A - откр $\Rightarrow$ ~~...~~ $\Rightarrow |A|^* = \inf\limits_{G \supset A} |G| = |A|$

ч.т.д.

№1.2.

A - изм-мо $\Rightarrow |A| = |A|^*$

B - изм-мо $\Rightarrow |B| = |B|^*$; $B \subset A$

Д-ть: $|A \setminus B| = |A| - |B|$

Д-во: Заметим, что $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \setminus B) \cup B \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| - |B| = |A \setminus B|$

ч.т.д.

№1.3

A, B - измеримы $\Rightarrow |A| = |A|^*$; $|B| = |B|^*$

A, B - $\forall$ мн-ва $\Rightarrow$ рассмотрим ситуацию: $B \supset A \Rightarrow$

$\Rightarrow |A \setminus B| = |\varnothing| = 0 \neq |A| - |B| \Rightarrow$ не всегда $|A \setminus B| = |A| - |B|$

Пример: $A = (0, 2)$; $B = (0, 4) \Rightarrow |A \setminus B| = 0 \neq |A| - |B| = 2 - 4 = -2$

№1.4

Пусть $E_n = [n, \infty) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing \Rightarrow |\lim\limits_{n \to \infty} E_n| = 0$

$|E_n| = \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} |E_n| = \infty$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lim\limits_{n \to \infty} E_n| = 0 \neq \lim\limits_{n \to \infty} |E_n| = \infty$

№1.7

$\mu(\mathbb{Q}) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{q_k\}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\{q_k\}) \ominus$

Пусть $\{q_0\} \subset (q_0 - \varepsilon; q_0 + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \mu(\{q_0\}) \leq 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(\{q_0\}) = 0$

$\ominus \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = 0$

ч.т.д.

№1.8

Пусть $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [n, n+1), y = 0\}$ => заметим, что $\forall \varepsilon > 0$ $A_n \subset [n, n+1) \times [\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow |A_n|^* \leq \varepsilon \Rightarrow |A_n| = 0$

$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \Rightarrow |E|^* \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |A_n| = 0 \Rightarrow |E| = 0$

ч.т.д.

№1.12

Пусть E содержит ξ - внутр. точку => $\exists B_r(\xi) : B_r(\xi) \subset$ $\subset E \Rightarrow \mu(E) \geq \mu(B_r(\xi)) > 0$ => не может

№4.4

Рассмотрим дискретное метрическое пр-во => $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

$\langle M, \rho \rangle$ - дискр. метр. пр-во

Пусть $A \subset M$

Чтобы A было откр нужно: $\forall a \in A$ $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A$

Пусть $\varepsilon = 1/2$, тогда $B_{1/2}(a)$ содержит только т. a => $B_{1/2}(a) \subset A$

=> A - открытое мн-во.