ГЛАВА 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Напомним некоторые определения

Опр. Пусть M – некоторое непустое множество. Заданная на $M \times M$ числовая функция $\rho(x, y)$ называется *метрикой* на M, если она обладает следующими тремя свойствами:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in M$, причем $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \qquad \forall x, y \in M$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \qquad \forall x, y, z \in M$.

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника.* Величина $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y. Множество M с введенной на нем метрикой ρ называется *метрическим пространством.*

Примеры. Метрическими пространствами являются:

а) любое множество $M \subset \mathbb{R}$ с метрикой $\quad \rho(x, y) = |x - y|$;

б) любое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ с метрикой $\quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$;

в) произвольное нормированное пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$;

г) множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)|;$$

д) множество l_p (где $1 \leqslant p < \infty$) всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}, \text{ где } x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

где $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

е) множество l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{n \geqslant 1} |x_n - y_n|.$$

ж) пространство $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ с метрикой

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_p(E)}.$$

Опр. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства M называется *сходящейся к элементу* $x \in M$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Указанное свойство записывают в виде: $x_n \to x$ (в M) при $n \to \infty$ или $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а элемент x называют *пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Опр. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon).$$

Опр. Метрическое пространство M называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность является сходящейся (то есть она сходится к некоторому элементу пространства M).

Примеры. Следующие метрические пространства являются полными:

а) множество $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой;

б) произвольное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^m$ со стандартной метрикой;

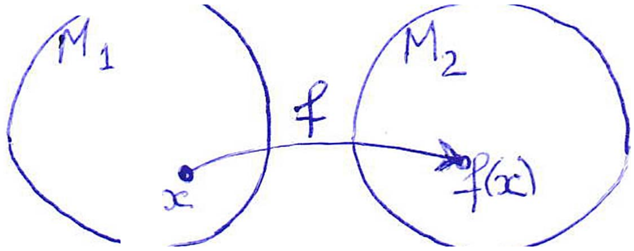
в) пространство $C[a, b]$;

г) пространство l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

д) пространство $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1 Непрерывные отображения в метрических пространствах

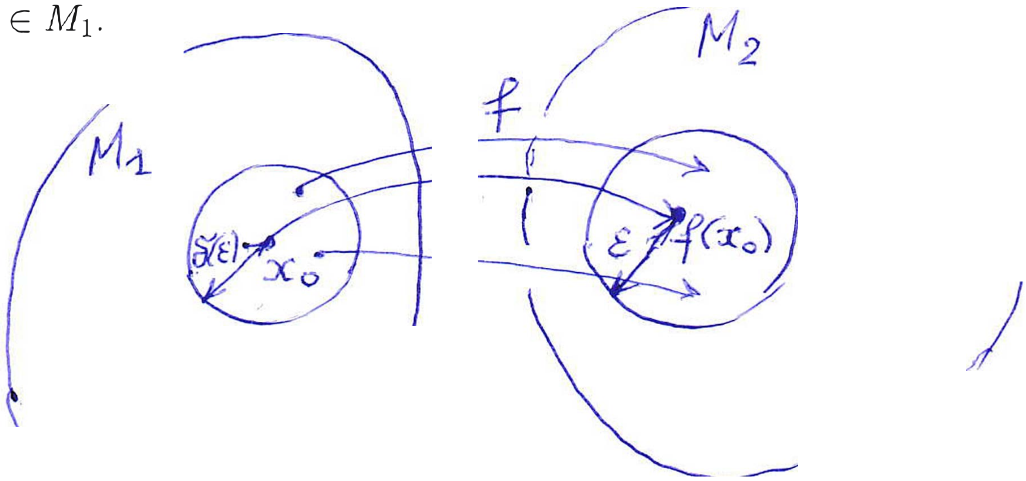
Опр. Пусть M_1 и M_2 – два метрические пространства и $f : M_1 \to M_2$.



Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in M_1$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in M_1 : \ \rho_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon).$$

Говорят, что отображение f непрерывно на M_1, если оно непрерывно всех точках $x \in M_1$.



Теорема 1.1. *Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in M_1$ тогда и только тогда, когда $f(x_n) \to f(x_0)$ для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_1$ такой, что $x_n \to x_0$.*

Доказательство. Пусть f непрерывно в точке x_0 и $x_n \to x_0$. Тогда существует $N(\varepsilon)$ такое, что

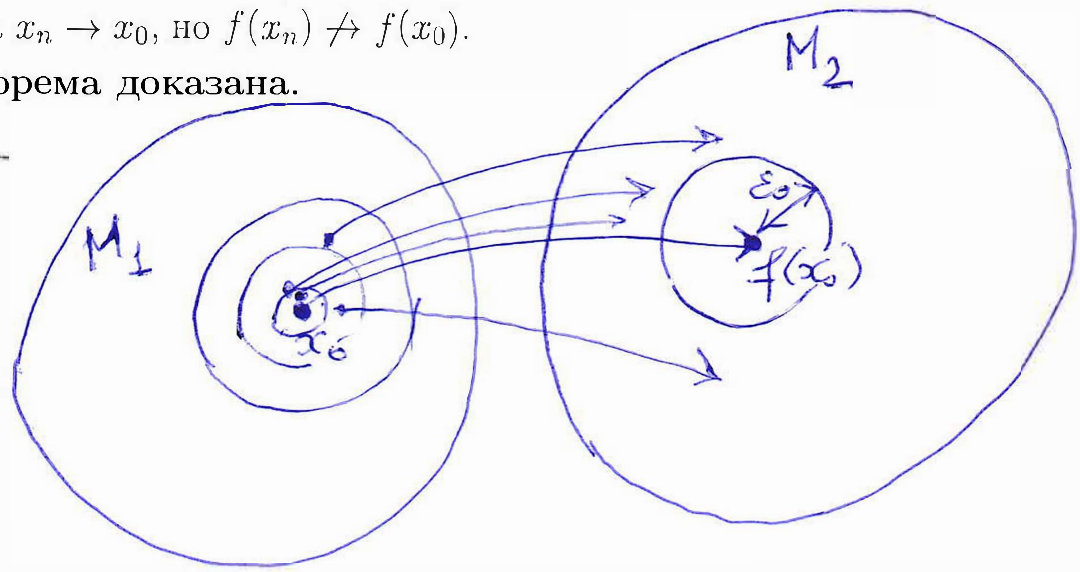
$$\rho_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Пусть теперь $f(x_n) \to f(x_0)$ для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x_n \to x_0$. Предположим, что отображение f не является непрерывным в точке x_0. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всякого $n \geqslant 1$ существует $x_n \in M_1$ такое, что

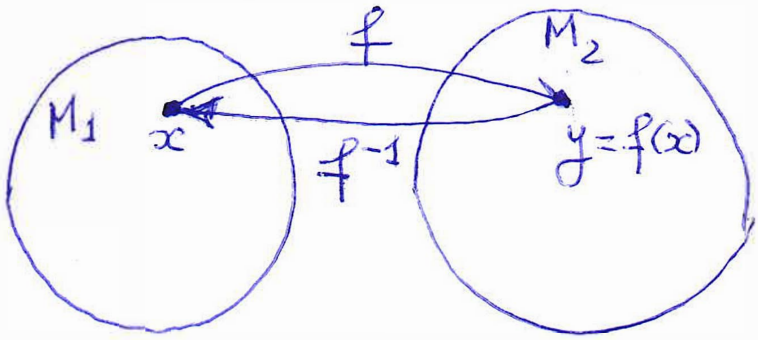
$$\rho(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \rho_1(x_n, x_0) < 1/n.$$

Тогда $x_n \to x_0$, но $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Теорема доказана.



Опр. Пусть f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2. Если отображения f и f^{-1} непрерывны, то отображение f называется *гомеоморфизмом*, а пространства M_1 и M_2 *гомеоморфными*.



Важным частным случаем гомеоморфизма является *изометрия*.

Опр. Взаимно однозначное отображение M_1 на M_2 называется *изометрией*, если

$$\rho_2(f(x_1), f(x_2)) = \rho_1(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in M_1.$$

При этом пространства M_1 и M_2 называются *изометрическими*.

Изометрические пространства обладают одинаковыми метрическими свойствами и могут восприниматься как тождественно равные.