№3.8

$\mathbb{R}$ можно представить объединением отрезков.

Возьмём $[a,b]$ и разобьём его на „n" частей $[x_{i-1}, x_i]$ =>

$x_i - x_{i-1} = (b-a)\frac{1}{n}$.

$\Gamma[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = f(x)\}$, тогда $\Gamma[a,b] \subset$

$\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [x_{n-1}, x_n] \times [f(x_{n-1}), f(x_n)] \Rightarrow \mu(\Gamma[a,b]) \le$

$\le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \Rightarrow$ при $n \to \infty$ имеем

$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0 \Rightarrow \mu(\Gamma[a,b]) = 0$

Мн-во из задания $\Gamma = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma[n, n+1] \Rightarrow \mu(\Gamma) = 0$.

ч.т.д.

№3.9

f - непр. на $\mathbb{R}$.

Д-ть: график f имеет меру нуль.

Д-во: Рассмотрим f на $[a,b]$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$;

$x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пусть $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] : x_i - x_{i-1} < \delta(\varepsilon)$

$\Gamma[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = f(x)\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times$

$\times [\min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)]$. $|\max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(\Gamma[a,b]) \le \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(\max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)) \le$

$\le \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\varepsilon = (b-a)\varepsilon \Rightarrow \mu(\Gamma[a,b]) = 0 \Rightarrow \mu(\Gamma) =$

$= \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma[x_{i-1}, x_i]) = 0$.

ч.т.д.

№3.15

Пусть O_r - круг; S - четверть круга.

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 < r^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le r,$

$0 \le y < \sqrt{r^2 - x^2}\}$. Разобьём $[0, r]$ точками $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le r$:

$x_i - x_{i-1} = \frac{r-0}{n} = \frac{r}{n}$

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ монотонно убывает $\Rightarrow f(x_i) \le f(x) \le f(x_{i-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)] \subset S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_{i-1})] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \le \mu(S) \le \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$

$n \to \infty \Rightarrow \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \le \mu(S) \le \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(S) = \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow \mu(Q) = 4\mu(S) = \pi r^2$

ч.т.д.

№3.20

f, g - изм. на E

Д-ть: $E[f=g]$ - изм.

Д-во: f, g - изм. на $E \Rightarrow E[f>g], E[g>f]$ - изм.

$E[f=g] = E \setminus E[f>g] \setminus E[g>f] \Rightarrow E[f=g]$ - изм.

ч.т.д.

№3.21

f, g - изм. на E, $f(x) > 0$

Д-ть: $h(x) = f(x)^{g(x)}$ - изм.

Д-во: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$; $\ln(x)$ - непр, $f(x)$ - изм $\Rightarrow$

$f \circ \ln$ - изм.

$g(x)$ - изм, $\ln(f(x))$ - изм $\Rightarrow g(x) \cdot \ln(f(x))$ - изм.

e^x - непр. $\Rightarrow e^{g(x)\ln(f(x))}$ - изм. $\Rightarrow h(x) = f(x)^{g(x)}$ - изм.

ч.т.д.

№3.13

Пусть A - мн-во всех изм. мн-в в $\mathbb{R}$. K - канторово мн-во.
$card(K) = c$; $\mu(K) = 0$. $\rightarrow \forall E \subset K$ - измеримо.

Мощность мн-ва всех подмножеств K - гиперконтинуум $\Rightarrow$

$\Rightarrow card(A) \geq 2^c$. Мощность мн-ва всех мн-в в $\mathbb{R}$ - гиперконтинуум $\Rightarrow$

$\Rightarrow card(A) \leq 2^c$

Тогда $card(A) = 2^c$

ч.т.д.

№3.19

E - произв. мн-во, мн-во A: $\mu(A) = 0$

Д-ть: $\mu^*(E \cup A) = \mu^*(E) = \mu^*(E \setminus A)$

Д-во: $\cdot \mu^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k \mu^*(E_k) \Rightarrow \mu^*(E \cup A) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) =$

$= \mu^*(E) \Rightarrow \mu^*(E \cup A) \leq \mu^*(E)$; $E \subset E \cup A \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cup A)$

Получаем: $\mu^*(E) = \mu^*(E \cup A)$

$\cdot\ \mu^*(E \setminus A) = \inf\limits_{G \supset E \setminus A} \mu(G) = \inf\limits_{G \cup A \supset E} \mu(G) = \inf\limits_{G \cup A \supset E} \mu(G \cup A) = \mu^*(E)$

ч.т.д.