№2.5.

Д-В: $f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$

Д-во: $x \in f^{-1}(\complement A) \Leftrightarrow f(x) \in \complement A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(A)$

Ч.Т.Д.

№2.17

а) откр. круг $\to$ круг

Пусть в круге $\exists$ посл-ть окружностей радиуса $^1/_2$, $^1/_3$, ..., $^1/_n$, ...
Тогда границу круга отобразим на окр-ть радиуса $^1/_2$. Окружность радиуса $^1/_2$ на окр-ть радиуса $^1/_3$ и так далее. Точки вне окружностей отобразим в себя.

№2.18

$f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$

Выделим в $\mathbb{I}$ числа вида $x = q + n\sqrt{2}$, где $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.
Эти числа будем переводить в $x = q + (n-1)\sqrt{2}$. Остальные числа из $\mathbb{I}$ будем переводить в себя.

$$f(x) = \begin{cases} q + (n-1)\sqrt{2}, \text{ если } x = q + n\sqrt{2} \\ x, \text{ если } x \in \mathbb{I} \setminus \{x \mid x = q + n\sqrt{2}\} \end{cases}$$

Числа $q \in \mathbb{Q}$ можно будет получать из чисел вида $q + \sqrt{2}$:

$f(q + \sqrt{2}) = q + (1-1)\sqrt{2} = q$

Числа вида $q + n\sqrt{2}$ из $q + (n+1)\sqrt{2}$:

$f(q + (n+1)\sqrt{2}) = q + (n+1-1)\sqrt{2} = q + n\sqrt{2}$

№2.19

$x = 0{,}\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$
$y = 0{,}\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$; $\Pi = (0,1] \times (0,1]$.

$f: \Pi \to (0,1]$: $f(x,y) = 0{,}\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots$

f - отображение Π на $(0,1]$ или нет?

Контрпример: пусть $z = 0{,}707070\dots70\dots \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}7777\dots7\dots \\ y = 0{,}0000\dots0\dots \end{cases}$
Точка „0" не включена в $\Pi \Rightarrow y = 0{,}000\dots0\dots$ не удовл. усл $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ для z нет прообраза $\Rightarrow f$ - не отображение Π на $(0,1]$.

№2.11.

Д-ть: мн-во алгебр. чисел счётно

Д-во: алгебр. числа ~~имеют вид~~ - корни $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Рассмотрим $P_1(x) = a_1 + b_1 x$. Объединим коэфф. в пару (a_1, b_1)

Составим таблицу:

	a_1	a_2	...	a_n	...
b_1	(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	...	(a_n, b_1)	...
b_2	(a_1, b_2)	(a_2, b_2)	...	(a_n, b_2)	...
b_n	(a_1, b_n)	(a_2, b_n)	...	(a_n, b_n)	...

Видно, что каждую пару можно пронумеровать числом $n \in \mathbb{N}$ =>
=> мн-во всех $P_1(x)$ счётно.

Аналогичным образом получим, что являются счётными все множества $P_2(x), P_3(x), \ldots, P_n(x)$ (будет лишь меняться порядок измерения таблицы)

Тогда мн-во $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ счётно, так как получено объединением счётных множеств.

Теперь каждому $P_n(x)$ ставится в соответствие фиксированный набор корней $(x_1, \ldots, x_n)$, каждый из которых можно пронумеровать числом $n \in \mathbb{N}$ => мн-во алг. чисел счётно.

$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	...
x_1	x_2	x_4	x_7	
	x_3	x_5	x_8	
		x_6	x_9	
			x_{10}	