№ 2.36

Пусть $[a,b] = A_1 \cup A_2$, где A_1, A_2 — непустые непересек. мн-ва, которые замкнуты.

Пусть $a \in A_1 \Rightarrow a < b = \inf A_2$, т.к. A_2 — замкн.

$[a,b) \subset A_1 \Rightarrow b \in E_1$, но по условию A_1 и A_2 — непересекающиеся $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow [a,b] \neq A_1 \cup A_2$

ч.т.д.

№ 3.1

Д-ть: комп мн-во $\Rightarrow$ предкомп.

Д-во: Пусть K — компактное мн-во $\Rightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ $\exists$ подпосл-ть, которая сходится к $x \in K$.

$\Rightarrow$ в $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выделить сход. подпосл-ть $\Rightarrow K$ — предкомпактное мн-во.

ч.т.д.

№ 3.3

Д-ть: K — компакт $\Leftrightarrow K$ — огр. и замкн.

Д-во: ($\Rightarrow$) K — компакт $\Rightarrow K$ — предкомпакт $\Rightarrow K$ — огр.
Пусть $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, $k_n \to k$; K — компакт $\Rightarrow k \in K \Rightarrow K$ — замкн.

($\Leftarrow$) Пусть K — огр. и замкн. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ — огр $\Rightarrow$ посл-ть $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ — огр. $\Rightarrow \exists$ подпосл-ть $\{k_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, которая сх-ся $k_{n_m} \to k$, $m \to \infty$
$\Rightarrow K$ — предкомпакт
K — замкн $\Rightarrow k \in K$ $\Big\} \Rightarrow K$ — компакт

ч.т.д.

Мн-во $K \in \mathbb{R}^m$ — предкомпакт $\Leftrightarrow K$ — огр.

№ 3.4.

Д-ть: f — непр $\Rightarrow f$ — огр.

Д-во: f — непр $\Rightarrow \forall \xi \in [a,b]$ $\exists I = (\xi - \varepsilon(\xi), \xi + \varepsilon(\xi))$:

$|f(x)| \le C(\xi)$ $\forall x \in [a,b] \cap I$.

По лемме Гейне-Бореля: из откр. $\{(\xi - \varepsilon(\xi), \xi + \varepsilon(\xi))\}_{\xi \in [a,b]}$ можно выделить $\{(\xi_n - \varepsilon(\xi_n), \xi_n + \varepsilon(\xi_n))\}_{n=1}^{N}$ — конечное подпокр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)| \le \max\limits_{1 \le n \le N} C(x_n)$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ огр.

ч.т.д.

№3.6

• Пусть K - предкомпакт, но K - не огр. Пусть $x_0 \in K$
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\rho(x_0, x) \geq n$. K - предкомпакт => из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая сх-ся: $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$
=> $\rho(x_0, x_{n_k}) \to \rho(x_0, x)$ при $k \to \infty$ => $\{\rho(x_0, x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ - огр., но это не так => противоречие => K - огр.

• Пусть K - компакт. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$: $x_n \to x$ при $n \to \infty$
K - компакт => из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \to x_0 \in K$
Очевидно, $x_0 = x \in K$ => K - замкн.

№3.7.

Д-ть: K - компакт <=> K - предкомпакт, замкн.

Д-во: (=>) Пусть K - компакт, тогда по №3.6 K - предкомпакт, замкн.
(<=) Пусть K - предкомпакт и замкн => из $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выделить $\{k_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$: $k_{n_m} \to k$ при $m \to \infty$. K - замкн => $k \in K$ =>
=> K - компакт

ч.т.д.

№3.8

Д-во: Пусть $K_1 \subset K$: K_1 - замкн, K - компакт
$\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_1 \subset K$ => можно выделить $\{k_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$: $k_{n_m} \to k \in K$
K_1 - замкн => $k \in K_1$ => K_1 - компакт.

ч.т.д.

№3.9

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [E]$. $\forall x_n \in [E]$ $\exists y_n \in E$ => $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

E - предкомпакт => из $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ можно выбрать $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$:
$y_{n_m} \to y$, $m \to \infty$, $y \in [E]$.

$\rho(x_{n_m}, y) \leq \rho(x_{n_m}, y_{n_m}) + \rho(y_{n_m}, y) < \frac{1}{n} + \rho(y_{n_m}, y) \to 0$ =>
=> $x_{n_m} \to y \in [E]$ => $[E]$ - компакт

ч.т.д.

№3.10.

Пусть $\{k_n x^2\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: $k_n \in [0, 3]$. Возьмём подпосл-ть
k_{n_m} : $k_{n_m} \to k \in [0, 3]$ => $y_{n_m} \to y = kx^2$, ибо:

$$\rho(y_{n_m}, y) = \max_{0 \leq x \leq 1} |k_{n_m} x^2 - kx^2| = |k_{n_m} - k| \to 0$$

=> мн-во компактно

ч.т.д.

№3.11

Пусть $\{k_n x + b\}_{n=1}^{\infty} - \{y_n\}_{n=1}^{\infty} : k_n \in [0,1],\ b_n \in [0,1]$.
Возьмём подпосл-ть $(k_{n_m}, b_{n_m}) : (k_{n_m}, b_{n_m}) \to (k, b) \in \Omega = [0,1]\times[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(y_{n_m}, y) = \max\limits_{0\le x\le 1} |k_{n_m}x + b_{n_m} - kx - b| \le |k_{n_m} - k| + |b_{n_m} + b| \to 0 \Rightarrow y_{n_m} \to y = kx + b \Rightarrow$ мн-во компактно.

ч.т.д.

№3.12

$|f(x)| \le a \Rightarrow$ мн-во можно представить в виде замкнутого шара $[B_a(0)]$ в $C[0,1] \Rightarrow$ замкн. и огр. мн-во.

№3.13

Рассмотрим $[B_1(0)] \subset l_2 : x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$:

$\rho(x, 0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \le 1$. Выберем $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$a_1 = (1, 0, \dots 0);\ a_2 = (0, 1, 0, \dots, 0);\ \dots;\ a_n = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(a_n, a_m) = \sqrt{2}$, если $m \ne n \Rightarrow$ нельзя выделить фунд. подпосл-ть $\Rightarrow [B_1(0)]$ - не предкомпакт

ч.т.д.

№3.14

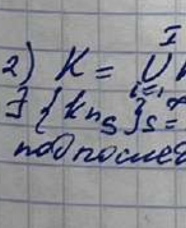
1) $K = \bigcup\limits_{i=1}^{I} K_i$ где K_i - компакт. Пусть $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \Rightarrow \exists K_m$: $\exists \{k_{n_s}\}_{s=1}^{\infty} \subset K_m$. K_m - компакт $\Rightarrow \exists \{k_{n_{s_q}}\}_{q=1}^{\infty} : k_{n_{s_q}} \to k$ при $q \to \infty \Rightarrow q \in K_m \subset K \Rightarrow K$ - компакт.

ч.т.д.

2) $K = \bigcup\limits_{i=1}^{I} K_i$, где K_i - предкомпакт. Пусть $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \Rightarrow \exists K_m$: $\exists \{k_{n_s}\}_{s=1}^{\infty} \subset K_m \Rightarrow$ Аналогично 1) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\Rightarrow K$ - предкомпакт.

ч.т.д.

№2.24



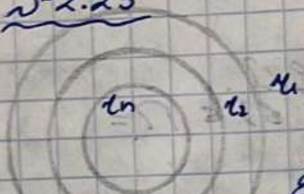
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(0)$ - открытое мн-во

Рассмотрим два случая:

1) $r_k \to \infty \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(0) = \mathbb{R}^2$ - замкн. мн-во $\Rightarrow$ может быть замкн. мн-вом

2) $r_k \to r < \infty \Rightarrow$ Итоговое мн-во не будет замкнутым.

№2.25



$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(0) = \{0\}$, $r_i \to 0$

$\{0\}$ - замкн, не откр. мн-во $\Rightarrow$ не всегда открытое

Если $r_i \to r > 0$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(0) = \overline{B_r}(0)$ - замкн.

$\Rightarrow$ может быть замкнутым