10 Теорема Фубини

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{k+m}$, E – измеримое множество, элементами которого являются точки (x, y), где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$. Положим

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}.$$

Теорема 10.1. *Пусть E – множество конечной меры. Тогда:*

1) Для п.в. $x \in \mathbb{R}^k$ множество $E(x)$ измеримо и $|E(x)| < \infty$.

2) Функция $|E(x)|$ измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = |E| \tag{10.1}$$

Доказательство. 1) Пусть $E = \Delta = [a, b)$. В этом случае утверждение теоремы не вызывает сомнений, так как $\Delta = \Delta' \times \Delta''$, причем $|\Delta| = |\Delta'| \times |\Delta''|$.

2). Пусть $E = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell$, где Δ_ℓ – попарно непересекающиеся промежутки. Тогда в силу п. 1) $E(x) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell(x)$ имеет конечную меру, функция $|E(x)| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} |\Delta_\ell(x)|$ измерима и справедлива формула (**??**).

3). Пусть E – произвольное открытое множество конечной меры. Представим E в виде объединения счетного набора непересекающихся промежутков $E = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} \Delta_\ell$.

Положим $E_n = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell$. В силу п. 2) $E_n(x) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell(x)$ имеет конечную меру, $|E_n(x)|$ измерима и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_n(x)|\, dx = |E_n| \tag{10.2}$$

В то же время $E(x) = \lim\limits_{n\to\infty} E_n(x)$, $E_n(x)$ – неубывающая последовательность множеств конечной меры. Поэтому $|E(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |E_n(x)|$. Кроме того, последовательность $\{E_n\}$, не убывая, сходится к E.

Поэтому, переходя в (10.2) к пределу при $n \to \infty$ и используя теорему Б. Леви, приходим к (**??**).

4). Пусть теперь E является множеством типа G_δ, т.е. $E = \bigcap\limits_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$, где G_ℓ – открытые множества. Тогда $E_n = \bigcap\limits_{\ell=1}^{n} G_\ell$ – открытое множество. E_n, монотонно не возрастая, сходится к E, $E_n(x)$, монотонно не возрастая, сходится к $E(x)$. В силу п.3 множества $E_n(x)$ и функции $|E_n(x)|$ измеримы и верно равенство (10.2). Переходя в (10.2) к пределу, снова приходим к (**??**).

5). Пусть E – множество нулевой меры. Тогда для всякого $n \geqslant 1$ существует открытое множество $G_n \supset E$ такое, что $|G_n| < 1/n$. Поэтому $E \subset E_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ и $|E_0| = 0$.

В силу п. 4) множества $E_0(x)$ измеримы, измеримы функции $|E_0(x)|$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E_0(x)|\, dx = |E_0| = 0.$$

Следовательно $|E_0(x)| = 0$ для почти всех x. Но $E(x) \subset E_0(x)$. Следовательно $|E(x)| = 0$ для почти всех x. Очевидно теперь, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} |E(x)|\, dx = |E| = 0.$$

6). Пусть теперь E – произвольное измеримое множество конечной меры. Тогда существуют множество E_1 типа G_δ и множество E_2 нулевой меры, что $E_1 = E \cup E_2$. Так как утверждение теоремы верно для E_1 и E_2, то оно верно и для E.

Теорема доказана.

Замечание 10.1. *Если $|E| = \infty$, то утверждение теоремы 10.1 также имеет место.*

Теорема 10.2. *Пусть функция $f(x, y)$ задана и измерима на E. Тогда для п.в. $x \in \mathbb{R}^k$ функция $f(x, y)$, рассматриваемая как функция аргумента y, измерима на $E(x)$.*

Доказательство. Построим последовательность простых функций вида

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^{(n)} \chi_{E_k^{(n)}}(x, y), \tag{10.3}$$

сходящихся к $f(x, y)$ для $(x, y) \in E$.

В силу теоремы 10.1 множество $E_k^{(n)}(x)$ измеримо для п.в. x и имеет конечную меру. Поскольку таких множеств счетный набор, то для п.в. x все они измеримы и имеют конечную меру одновременно, Тогда для этих значений x последовательность (10.3) представляет собой последовательность простых функций аргумента y, сходящихся к $f(x, y)$. В силу этого функция $f(x, y)$, рассматриваемая как функция аргумента y, измерима на $E(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 10.3. *(Теорема Фубини) Пусть $f \in L_1(E)$. Тогда:*

1) Функция

$$F(x) = \int\limits_{E(x)} f(x, y)\, dy \tag{10.4}$$

измерима и суммируема на E', причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} f(x,y)\,dy\Big] dx = \int\limits_{E} f(x,y)\,dxdy. \tag{10.5}$$

Доказательство. Представим f в виде $f = f^+ - f^-$ и докажем теорему для f^+ и f^-, то есть для $f \geqslant 0$. Рассмотрим неубывающую последовательность простых функций вида (10.3), сходящуюся к $f(x,y)$ для $(x,y) \in E$. Напомним, что $|E_k^{(n)}| < \infty$.

Из теорем 10.1 и 10.2 следует, что для почти всех x множества $E_k^{(n)}(x)$ измеримы и функция $f(x,y)$ измерима как функция аргумента $y \in E(x)$. Кроме того, функция

$$F_n(x) = \int\limits_{E(x)} f_n(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{N_n} y_k^{(n)} |E_k^{(n)}(x)| \tag{10.6}$$

измерима и суммируема на $\mathbb{R}^k$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F_n(x)\,dx = \int\limits_{E} f_n(x,y)\,dxdy \tag{10.7}$$

В силу теоремы Б. Леви в равенствах (10.6), (10.7) можно перейти к пределу и получить (10.4) и (10.5).

Теорема доказана.

Замечание 10.2. *Пусть $E' = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \operatorname{mes} E(x) > 0\}$. Тогда формулу (10.5) можно переписать в следующем виде*

$$\int\limits_{E'} \Big[\int\limits_{E(x)} f(x,y)\,dy\Big] dx = \int\limits_{E} f(x,y)\,dxdy. \tag{10.8}$$

Следствие 10.1. *Пусть функция $f(x,y)$ измерима на $E \subset \mathbb{R}^{k+m}$. Если*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} |f(x,y)|\,dy\Big] dx < \infty,$$

то $f \in L(E)$.

Доказательство. Положим

$$g_N(x,y) = \chi_{B_N}(x,y)[|f|]_N(x,y).$$

Применяя к g_N теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{E} g_N(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} g_N(x,y)\,dy\Big] dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Big[\int\limits_{E(x)} |f(x,y)|\,dy\Big] dx$$

Так как $g_N(x,y)$, монотонно неубывая, сходится к $|f(x,y)|$, то в силу теоремы Б. Леви $f \in L(E)$.

Следствие доказано.