ГЛАВА 9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1 Линейные операторы

Пусть X, Y – линейные пространства (оба вещественные или комплексные).

Опр. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором*, если справедливо равенство

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X, \quad \forall\, \lambda, \mu.$$

Образом оператора A называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{y = Ax \mid x \in X\},$$

которое обозначается также через $R(A)$.

Множество

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$$

называется *ядром оператора* A и обозначается также через $N(A)$.

Замечание 1.1. Вообще говоря, линейный оператор A может быть определен не на всем пространстве X, а на некотором линейном многообразии $D(A) \subset X$. Тогда $A : D(A) \to Y$ и

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall\, \lambda, \mu.$$

Теорема 1.1. *Для линейного оператора A его ядро $\operatorname{Ker} A$ и образ $\operatorname{Im} A$ являются линейными многообразиями.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 = 0 \Rightarrow \lambda x_1 + \mu x_2 \in \operatorname{Ker} A.$$

Пусть теперь $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Это значит, что существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Но тогда

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2 \Rightarrow \lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} A$$

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Если A – линейный оператор, то $A(0) = 0$.

Действительно,

$$\lambda \cdot A(0) = A(\lambda \cdot 0) = A(0) \quad \forall\, \lambda \quad \Rightarrow \quad A(0) = 0.$$

Опр. Если $Ax = 0$ для всех $x \in X$, то оператор A называется *нулевым оператором* и обозначается через 0.

Опр. Оператор A называется *конечномерным*, если его образ $\operatorname{Im} A$ конечномерен.

Опр. Линейный оператор $A : X \to X$ называется *линейным преобразованием пространства* X.

Опр. Линейное преобразование A такое, что

$$Ax = x \quad \forall\, x \in X,$$

называется *единичным* или *тождественным оператором* и обычно обозначается через I (или E).

Примеры линейных операторов.

1. Умножение матрицы A на вектор $x \in \mathbb{R}^m$ или вектор $x \in \mathbb{C}^m$.

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n.$$

2. Оператор дифференцирования $Du(x) = u'(x)$.

$$D : C^1[a,b] \to C[a,b], \quad D : C^n[a,b] \to C^{n-1}[a,b].$$

3. Оператор интегрирования $Ax = \int\limits_a^b x(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad A : L_1(a,b) \to \mathbb{R}.$$

4. Оператор интегрирования с переменным верхним пределом $Ax(t) = \int\limits_a^t x(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to C^1[a,b], \quad A : L_1(a,b) \to C[a,b].$$

5. Интегральный оператор $Au(x) = \int\limits_a^b K(x,s)u(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad A : L_2(a,b) \to L_2(a,b).$$

Опр. Пусть X, Y, Z – линейные пространства, все вещественные или все комплексные.

Пусть $A : X \to Y$, $B : X \to Y$, $C : Y \to Z$ – линейные операторы.

Сумма операторов, произведение оператора на число и произведение операторов определяются формулами

$$\begin{aligned}
&(A+B)x = Ax + Bx,\\
&(\lambda A)x = \lambda(Ax),\\
&(CA)x = C(Ax)
\end{aligned}$$

для всех $x \in X$.

Опр. Всюду далее X, Y – нормированные пространства.

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax_0.$$

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным*, если он непрерывен во всех точках $x_0 \in X$.

Теорема 1.2. *Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в точке $x_0 = 0$.*

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен в точке $x_0 = 0$.

Пусть $x \in X$ и $x_n \to x$. Тогда

$$Ax_n = Ax + A(x_n - x) \to Ax + A(0) = Ax.$$

Таким образом оператор A непрерывен во всех точках $x \in X$.

Если же оператор A непрерывен, то он непрерывен и в точке $x_0 = 0$.

Теорема доказана.

Опр. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если он каждое ограниченное множество переводит в ограниченное множество.

Теорема 1.3. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ его ограниченность эквивалентна выполнению каждого из следующих двух свойств.*

1. Справедливо неравенство

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \quad \forall\, x \in X \tag{1.1}$$

с некоторой постоянной $c \geqslant 0$, не зависящей от x.

2. Оператор A переводит единичную сферу $S = \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$ в ограниченное множество.

Доказательство. Пусть оператор A ограничен. Тогда он переводит единичную сферу в ограниченное множество, то есть справедливо свойство 2).

Пусть справедливо свойство 2). Тогда существует постоянная $c \geqslant 0$ такая, что

$$\|x\|_X = 1 \Rightarrow \|Ax\|_Y \leqslant c.$$

Возьмем произвольный $x \in X$, $x \neq 0$. Тогда

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = 1 \Rightarrow \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\|Ax\|_Y \leqslant c \quad \Rightarrow \quad \|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X,$$

то есть справедливо свойство 1).

Пусть справедливо свойство 1). Пусть $M \subset X$, M – ограниченное множество. Тогда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что

$$\|x\|_X \leqslant C_1 \quad \forall\, x \in M.$$

В силу свойства 1) имеем:

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X \leqslant C_2 = cC_1 \quad \forall\, x \in M.$$

Таким образом, оператор A всякое ограниченное множество переводит в ограниченное.

Теорема доказана.

В силу теоремы 1.3 для ограниченных линейных операторов и только для них конечна величина

$$\|A\| = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \tag{1.2}$$

называемая *нормой оператора* A.

Действительно, если для линейного оператора выполнено неравенство

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \quad \forall\, x \in X, \tag{1.3}$$

с некоторой постоянной $c \geqslant 0$, то

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant c \quad \forall\, x \in X,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant c.$$

Замечание 1.2. Из определения нормы оператора следует, что

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \|A\| \quad \forall\, x \in X,\ x \neq 0.$$

Поэтому

$$\|Ax\|_Y \leqslant \|A\|\|x\|_X \quad \forall\, x \in X. \tag{1.4}$$

Таким образом $\|A\|$ является минимальной из постоянных c, для которых выполнено неравенство (1.3).

Замечание 1.3. Для вычисления нормы ограниченнного оператора A можно использовать эквивалентную формулу

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y. \tag{1.5}$$

Действительно,

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y \leqslant \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Теорема 1.4. *Линейный оператор* $A : X \to Y$ *непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Пусть A – ограниченный оператор и $x_n \to x_0$. Тогда

$$\|Ax_n - Ax_0\|_Y = \|A(x_n - x_0)\|_Y \leqslant \|A\| \|x_n - x_0\|_X \to 0,$$

то есть оператор A непрерывен.

Пусть теперь A – непрерывный оператор. Предположим, что он не является ограниченным. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такая, что

$$\|x_n\|_X = 1 \quad \text{и} \quad \|Ax_n\|_Y \geqslant n.$$

Положим $y_n = \dfrac{1}{n} x_n$. Очевидно, что

$$\|y_n\|_X = \frac{1}{n} \quad \text{но} \quad \|Ay_n\|_Y \geqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает ограниченность оператора A.

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathscr{L}(X,Y)$ множество всех ограниченных линейных операторов $A : X \to Y$. В случае $X = Y$ положим для краткости $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X;X)$.

Утверждение 1.1. Множество $\mathscr{L}(X,Y)$ является нормированным пространством, в котором норма оператора A вводится следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\in X,\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Доказательство.

I. Пусть $A, B \in \mathscr{L}(X,Y)$. Тогда

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\|_Y = \|Ax+Bx\|_Y \leqslant \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leqslant \\ \leqslant \|A\|\|x\|_X + \|B\|\|x\|_X = (\|A\|+\|B\|)\|x\|_X \quad \forall\, x \in X.\end{aligned}$$

Следовательно $A + B \in \mathscr{L}(X,Y)$ и

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

II. Заметим также, что

$$\|(\lambda A)x\|_Y = \|\lambda Ax\|_Y = |\lambda|\|Ax\|_Y \leqslant |\lambda|\|A\|\|x\|_X \quad \forall\, x \in X.$$

Следовательно $\lambda A \in \mathscr{L}(X,Y)$ и

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$

III. Нетрудно убедиться в справедливости аксиом линейного пространства

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) существует *нулевой оператор* $0 \in \mathscr{L}(X,Y)$ такой, что $A + 0 = A$;
4) для каждого $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ существует *противоположный элемент* $(-1)A \in \mathscr{L}(X,Y)$ такой, что $A + (-1)A = 0$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow A = 0$.

Для нулевого оператора $0x = 0$. Поэтому $\|0\| = \sup\limits_{x\in X,\ x\neq 0} \dfrac{\|0x\|_Y}{\|x\|_X} = 0$.

Если же $\|A\| = \sup\limits_{x\in X,\ x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для всех $x \in X$, то есть $Ax = 0$ для всех $x \in X$. Значит, $A = 0$.

Утверждение доказано.