Домашнее задание 2

№1.13

f - огр., инт. по Лебегу на E.

а) f^{10}, б) $|f|$, в) $\frac{1}{f}$, г) $\cos f \overset{?}{\in} L(E)$

• $\mu(E) < \infty$

а, г) Заметим, что f^{10} и $\cos f$ - огр. и $f^{10}, \cos f \in \mathcal{M}(E) \Rightarrow f^{10}$ и $\cos f$ - инт. по Лебегу.

б) f - инт по Лебегу на $E \Leftrightarrow |f|$ - инт на $E \Rightarrow |f|$ - инт. по Лебегу

в) П $f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{x}$; $E = (0,1) \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_0^{1/N} N\,dx +$
$+ \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{1/N}^1 \frac{dx}{x} = \infty \Rightarrow \frac{1}{f} \notin L(E)$

П $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{C}$, $E = (0,1) \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{1}{C} dx = \frac{1}{C} < \infty \Rightarrow \frac{1}{f} \in L(E)$

$\Rightarrow \frac{1}{f}$ может быть как интегр., так и не интегр. по Лебегу.

• $\mu(E) = \infty$

б) $f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E) \Rightarrow |f| \in L(E)$

а) f - огр $\Rightarrow |f| \le M \Rightarrow |f^{10}| \le M^9 |f| \Rightarrow f^{10} \in L(E)$

№1.21

E-изм., $f \geq 0$, $\in L(E)$; $g \in \mathcal{M}(E)$: $\alpha \le g \le \beta$ почти $\forall x \in E$

Д-ть: $\exists \gamma \in [\alpha, \beta]$: $\int\limits_E fg\,dx = \gamma \int\limits_E f\,dx$

Д-во: $\alpha \le g(x) \le \beta \Rightarrow \alpha \int\limits_E f\,dx \le \int\limits_E fg\,dx \le \int\limits_E g\,dx$. П сначала $\int\limits_E f\,dx \neq 0$

$\Rightarrow \alpha \le \int\limits_E fg\,dx \cdot \left[\int\limits_E f\,dx\right]^{-1} \le \beta \Rightarrow \gamma = \int\limits_E f\cdot g\,dx \cdot \left[\int\limits_E f\,dx\right]^{-1}$

Если $\int\limits_E f\,dx = 0$, то достаточно взять $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$.

Ч.Т.Д.

№1.13 (продолжение)

$\mu(E) = \infty$, $\cos f$.

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f \in \mathcal{M}(E)$, где $E = [1, \infty)$

$x \to \infty \Rightarrow f \to 0 \Rightarrow \cos f \to 1 \Rightarrow \cos f \notin L(E)$

№1.22

$f \in L(E)$, $f(x) > 0$ почти $\forall x \in E$

Д-ть: $\int_E f\,dx = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

Д-во: $E = E[f \le 0] + E[f > 0] = E[f \le 0] + \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > \frac{1}{n}]$

$f(x) > 0$ почти $\forall x \in E \Rightarrow \mu(E[f \le 0]) = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \mu(E) =$

$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > \frac{1}{n}])$

$\int_E f\,dx \ge \int_{E_n} f\,dx \ge \frac{1}{n}\mu(E_n) \Rightarrow \begin{cases} \int_E f\,dx = 0 \\ \int_E f\,dx \ge \frac{1}{n}\mu(E_n) \end{cases} \Rightarrow \mu(E_n) = 0$

где $E_n = E[f > \frac{1}{n}] \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > \frac{1}{n}]) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

ч.т.д.

№2.5

$f_n \to f$ в $L(a,b)$

Д-ть: $\cos f_n \to \cos f$ в $L(a,b)$

Д-во: $\cos f_n - \cos f = 2 \sin \frac{f_n + f}{2} \cdot \sin \frac{f - f_n}{2} \le 2 \cdot \frac{f - f_n}{2} \sin \frac{f_n + f}{2} =$

$= (f - f_n) \sin \frac{f_n + f}{2} \le f - f_n \Rightarrow |\cos f_n - \cos f| \le |f - f_n|$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$f_n \to f$ в $L(a,b) \Rightarrow \int_a^b |f_n - f|\,dx \to 0$

$\Rightarrow \int_a^b |\cos f_n - \cos f|\,dx \le \int_a^b |f_n - f|\,dx \to 0 \Rightarrow \int_a^b |\cos f_n - \cos f|\,dx \to 0$

$\Rightarrow \cos f_n \to \cos f$ в $L(a,b)$

ч.т.д.

№2.8

$f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$, $f_n \to f$ почти всюду на $\mathbb{R}$

Д-ть: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f\,dx$ при $n \to \infty$

Д-во: Заметим: $|e^{-x^2} \sin f_n| \le |e^{-x^2}| \le 1$ $\forall n \ge 1 \Rightarrow |e^{-x^2} \sin f_n| \le F(x)$,
где $F(x) \equiv 1$

$f_n \to f$ почти всюду на $\mathbb{R}$

Тогда по т. Лебега о мажор. сх-ти: $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f\,dx$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f\,dx$ при $n \to \infty$

ч.т.д.

№2.4

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: f_n \in \mathcal{M}(E)$, где $\mu(E) < \infty$.

Д-ть: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \to f$ по мере $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|} dx = 0$

Д-во: $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} dx = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \left(1 - \frac{1}{1+|f_n-f|}\right) dx =$

$= \mu(E) - \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{1+|f_n-f|} dx = 0 \Rightarrow \mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{1+|f_n-f|} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n - f| \Rightarrow 0$ при $n\to\infty \Rightarrow f_n \to f$ ~~сх-ся~~ на $E \Rightarrow f_n \to f$ по мере на E.

$\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists N: \mu(E[|f_n - f| > \delta]) < \varepsilon$ при $n \geq N \Leftrightarrow$
$\forall \delta > 0\ \ \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \to 0$ при $n \to \infty$

№2.3

П $E = [0,1]$. Рассмотрим $f_n(x) = \begin{cases} n, & x\in[0, 1/n) \\ 0, & x \in [1/n, 1]\end{cases}$.

При ~~f_n~~ $n\to\infty$ $f_n \to \varphi$, где $\varphi(x) = 0$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{1/n} n\, dx + \int_{1/n}^1 0 \cdot dx\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\cdot \frac{1}{n}\right) = 1$, но $\int_0^1 \varphi\, dx = 0$.

№2.2

П $E = [0,1]$. Рассмотрим $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n) \\ \frac{1}{x}, & x \in [1/n, 1]\end{cases}$.

f_n - ограниченные, изм. $n\to\infty \Rightarrow f_n \to \varphi = \frac{1}{x}$, но $\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\right| dx =$
$= \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{1/N} N\, dx + \lim\limits_{N\to\infty} \int_{1/N}^1 \frac{1}{x} dx = 1 + \lim\limits_{N\to\infty} \ln x \Big]_{1/N}^{1} = \infty \Rightarrow \varphi \notin L(0,1)$