Домашнее задание №1

№4.3

Д-ть: а) $\tilde{\tau} \in L_1(0,1)$; Найти б) $\int_0^1 \tilde{\tau}(x)dx$

Решение: а) $\tilde{\tau}$ - ф-ия Кантора $\Rightarrow$ $\tilde{\tau}$ - интегр. на $(0,1) \Rightarrow \tilde{\tau} \in \mathcal{M}(0,1)$
$\tilde{\tau}: [0,1] \to [0,1] \Rightarrow \tilde{\tau}$ - огр.
$\mu(0,1) < \infty$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_0^1 \tilde{\tau} dx \Leftrightarrow \exists \int_0^1 |\tilde{\tau}| dx$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\tau} \in \mathcal{M}(0,1) \\ \int_0^1 |\tilde{\tau}| dx < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\tau} \in L_1(0,1)$$

б) $$\int_0^1 \tilde{\tau}(x)dx = \int_0^{1/3} \tilde{\tau} dx + \frac{1}{2}\int_{1/3}^{2/3} dx + \int_{2/3}^1 \tilde{\tau} dx = \int_0^{1/9} \tilde{\tau} dx + \frac{1}{4}\int_{1/9}^{2/9} dx + \int_{2/9}^{1/3} \tilde{\tau} dx +$$
$$+ \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{2} dx + \int_{2/3}^{7/9} \tilde{\tau} dx + \frac{3}{4}\int_{7/9}^{8/9} dx + \int_{8/9}^1 \tilde{\tau} dx = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

№4.9

$f, g \in L_1(E)$

Д-ть: $\|f+g\|_{L_1(E)} = \|f\|_{L_1(E)} + \|g\|_{L_1(E)} \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x) > 0$ почти $\forall x \in E$

Д-во: ($\Leftarrow$) $f(x)\cdot g(x) > 0$ почти $\forall x \in E \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>0,\ g(x)>0 \ (1) \\ f(x)<0,\ g(x)<0 \ (2) \end{array}\right.$ почти $\forall x \in E$

$(1) \Rightarrow |f+g| = f+g = |f|+|g| \Rightarrow \int_E |f+g| dx = \int_E |f| dx + \int_E |g| dx$ (1.1)

$(2) \Rightarrow |f+g| = \{-u = f<0,\ -v = g<0\} = |-u-v| = |u+v| = u+v = |u|+|v| =$
$= |-f|+|-g| = |f|+|g| \Rightarrow \int_E |f+g| dx = \int_E |f| dx + \int_E |g| dx$ (2.1)

(1.1) и (2.1) $\Rightarrow \int_E |f+g| dx = \int_E |f| dx + \int_E |g| dx$, если $f(x)\cdot g(x) > 0$ почти $\forall x \in E$

$\Rightarrow \|f+g\|_{L_1(E)} = \|f\|_{L_1(E)} + \|g\|_{L_1(E)}$

($\Rightarrow$) $\|f+g\|_{L_1(E)} = \|f\|_{L_1(E)} + \|g\|_{L_1(E)} \Rightarrow \int_E |f+g| dx = \int_E |f| dx + \int_E |g| dx \Rightarrow$
$\Rightarrow |f+g| = |f|+|g| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>0,\ g(x)>0 \\ f(x)<0,\ g(x)<0 \end{array}\right. \Rightarrow f(x)g(x) > 0$ почти $\forall x \in E$.

ч.т.д.

№3.7

$E: \mu(E) < \infty$; $1 \le q \le p \le \infty$

Д-ть: $L_p(E) \subset L_q(E)$

Д-во: 1) $p < \infty$ => из нер-ва Гельдера:

$$\|f\|^q_{L_q(E)} = \int_E |f|^q dx \le \left(\int_E dx\right)^{1-q/p} \left(\int_E |f|^p dx\right)^{q/p} = [\mu(E)]^{1-q/p} \|f\|^q_{L_p(E)}$$

$$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{q/p-1} \le \|f\|^q_{L_p(E)} = \left[\int |f|^p dx\right]^{q/p}$$

П $f \in L_p(E) \Rightarrow \int_E |f|^p dx < \infty \Rightarrow \left[\int |f|^p dx\right]^{q/p} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем следующее: $\|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{\frac{q}{p}-1} \le \left[\int |f|^p dx\right]^{q/p} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{\frac{q}{p}-1} < \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_E |f|^q dx < \infty \Rightarrow f \in L_q(E)$

2) $p = \infty$ => при $q < \infty$ имеем:

$$\|f\|^q_{L_q(E)} = \int_E |f|^q dx \le \int_E dx \cdot \|f\|^q_{L_\infty(E)} = \mu(E) \|f\|^q_{L_\infty(E)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot \mu(E) \le \|f\|_{L_\infty(E)}$

П $f \in L_\infty(E) \Rightarrow \exists C: |f(x)| \le C \Rightarrow \|f\|_{L_\infty(E)} < \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_\infty(E)} < \infty$ ⊜

~~$\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \|f\|_{L_\infty(E)}$ $\exists E_\varepsilon \subset E$: $f > \|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon$ на E_ε $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow (\|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon)[\mu(E_\varepsilon)]^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L_p(E)} = \left[\int |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L_\infty(E)} \cdot [\mu(E)]^{1/p}$~~

⊜ $\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot \mu(E) \le \|f\|^q_{L_\infty(E)} < \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} < \infty$

$\Rightarrow \int_E |f|^q dx < \infty \Rightarrow f \in L_q(E)$

№3.1

При каком $p \in [1, \infty]$ $f = \frac{\sin x}{x} \in L_p(1,\infty)$?

- П $p=1 \Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ $\left\{ |\sin x| \ge |\sin^2 x| = \sin^2 x \right\}$ $\left\{ \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} \right\}$

$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ① $- \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$ ②; ① расх-ся, т.к. $\alpha = 1$, ② сх-ся по Дирихле

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расх-ся $\Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расх-ся $\Rightarrow p=1$ – не решение

- $p=2 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ① $- \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2} dx$ ②; ①, ② сх-ся $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx < \infty$

$\Rightarrow p = 2$ – решение

- $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p dx \le \int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right|^p dx < \infty \quad \forall p \ge 2$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \in L_p(1,\infty) \quad \forall p \ge 2$ ← Ответ

№3.2

При каком $p \in [1, \infty]$ $f = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \in L_p(0,1)$ $\left(\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|^p dx < \infty \right)$

• $\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|^p dx = \int_0^1 \frac{|\cos x|^p}{(\sqrt{x})^p} dx = \int_0^1 \frac{|\cos x|^p}{x^{p/2}} dx \le \int_0^1 \frac{dx}{x^{p/2}} < \infty$ если $p/2 < 1$

$\Rightarrow p < 2$

Ответ: $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \in L_p(0,1)$, если $p < 2$