

8 Пространство $L_\infty(E)$.

Опр. Пусть f – заданная на множестве E измеримая функция. Говорят, что функция f имеет на E конечный существенный максимум, если существует число c такое, что $\text{meas } E[f > c] = 0$, то есть $f(x) \leq c$ почти всюду на E .

В этом случае *существенным максимумом* функции f называется число

$$\text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{c : \text{meas } E[f > c] = 0\}.$$

Заметим, что

$$c_f = \text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \min\{c : \text{meas } E[f > c] = 0\}.$$

Действительно,

$$E[f > c_f] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > c_f + 1/n]$$

Как следствие,

$$\text{meas } E[f > c_f] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{meas } E[f > c_f + 1/n] = 0.$$

Аналогичным образом вводится *существенный минимум*

$$\text{ess inf}_{x \in E} f(x) = \sup\{c : \text{meas } E[f < c] = 0\} = \max\{c : \text{meas } E[f < c] = 0\}.$$

Обозначим через $L_\infty(E)$ множество всех заданных на E измеримых функций f , для которых $|f|$ имеет на E конечный существенный максимум.

Другими словами, $f \in L_\infty(E)$ тогда и только тогда, когда f измерима на E и существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f(x)| \leq c$ для почти всех $x \in E$.

Функции $f, g \in L_\infty(E)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $f \sim g$ на E .

Теорема 8.1. $L_\infty(E)$ – линейное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Доказательство. Ясно, что $\|f\|_{L_\infty(E)} \geq 0$ и

$$\|f\|_{L_\infty(E)} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{почти всюду на } E.$$

Пусть $f \in L_\infty(E)$. Тогда

$$|f| \leq \|f\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на } E \Rightarrow |\alpha f| \leq |\alpha| \|f\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на } E.$$

Значит $\alpha f \in L_\infty(E)$. Кроме того, при $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{L_\infty(E)} &= \min\{c : \operatorname{meas} E[|\alpha f| > c] = 0\} = \min\{c : \operatorname{meas} E[|f| > c/|\alpha|] = 0\} = \\ &= |\alpha| \min\{c/|\alpha| : \operatorname{meas} E[|f| > c/|\alpha|] = 0\} = |\alpha| \|f\|_{L_\infty(E)}. \end{aligned}$$

Пусть $f, g \in L_\infty(E)$. Тогда

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{L_\infty(E)} + \|g\|_{L_\infty(E)} \quad \text{почти всюду на } E.$$

Следовательно

$$f + g \in L_\infty(E) \quad \text{и} \quad \|f + g\|_{L_\infty(E)} \leq \|f\|_{L_\infty(E)} + \|g\|_{L_\infty(E)}.$$

Теорема доказана.

Введение метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_\infty(E)}$$

делает $L_\infty(E)$ метрическим пространством.

Теорема 8.2. Пространство $L_\infty(E)$ – полное.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная в $L_\infty(E)$ последовательность. Для нее

$$\varepsilon_n = \sup_{m>n} \|f_m - f_n\|_{L_\infty(E)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим

$$A_{mk} = E \left[|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_{L_\infty(E)} \right], \quad A = \bigcup_{m,n} A_{mn}.$$

Ясно, что $|A| = 0$.

Обратим внимание на то, что

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall m > n, \quad \forall x \in E \setminus A, \quad (8.1)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому для $x \in E \setminus A$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Значит, существует предел

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Положим $f(x) = 0$ для $x \in A$. Заметим, что функция f измерима как поточечный предел последовательности измеримых функций.

Переходя в (8.1) к пределу при $m \rightarrow \infty$, имеем

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall x \in E \setminus A.$$

Как следствие, $f - f_n \in L_\infty(E)$ и

$$\|f - f_n\|_{L_\infty(E)} \leq \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Напомним теорему о неравенстве Гельдера.

Теорема. Пусть $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int_E f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)}.$$

Замечание. Неравенство Гельдера справедливо и при $p = 1$, $q = \infty$. Действительно, если $f \in L_1(E)$, $g \in L_\infty(E)$, то функция fg измерима на E и

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \int_E |f(x)| dx \cdot \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |g(x)| = \|f\|_{L_1(E)} \|g\|_{L_\infty(E)}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8.3. Пусть $p, q \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int_E f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)}.$$