ГЛАВА 8. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1 Нормированные пространства

Опр. Линейное пространство X называется *нормированным пространством*, если каждому вектору $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$ (*норма* вектора x), удовлетворяющее следующим 3 аксиомам:

1) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall\, x \in X \quad \forall \lambda;$

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ (*неравенство треугольника*).

Чтобы норму в пространстве X отличать от норм в других пространствах, вместо $\|\cdot\|$ пишут $\|\cdot\|_X$.

Замечание. Функционал $p(x) = \|x\|$ является однородно выпуклым.

Всякое нормированное пространство X является метрическим с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Поэтому в X определено понятие сходимости: последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *сходится* к элементу $x \in X$ (пишут $x_n \to x$ или $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Такую сходимость называют *сходимостью по норме* или *сильной сходимостью*.

Замыкание множества $E \subset X$ обозначается через $[E]$ или $\overline{E}$.

Опр. Подпространство L' нормированного пространства L называется *замкнутым*, если $[L'] = L'$.

Опр. Систему элементов $\{x_\alpha\} \subset X$ называют *полной в* X, если

$$[\mathrm{span}(\{x_\alpha\})] = X.$$

Пример. Система элементов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ полна в $C[a, b]$ в силу того, что $[\mathscr{P}]_{C[a,b]} = C[a, b]$.

Опр. Пусть в линейном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Они называются *эквивалентными*, если существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$

Из курса линейной алгебры известна следующая теорема.

Теорема 1.1. *В конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

В бесконечномерных пространствах нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ не обязаны быть эквивалентными.

Пример. Покажем, что введенные на пространстве $C[a,b]$ нормы

$$\|f\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

не эквивалентны.

Ясно, что

$$\|f\|_2 \leqslant (b-a)\|f\|_1 \quad \forall\, f \in C[a,b].$$

Покажем, что не существует постоянной $c_1 > 0$ такая, что

$$c_1\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \quad \forall\, f \in C[a,b].$$

Возьмем

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - n(t-a), & t \in [a, a+1/n], \\ 0, & t \in [a+1/n, b]. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\|f_n\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t)| = 1, \quad \text{но} \quad \|f_n\|_2 = \int\limits_a^b |f_n(t)|\,dt \to 0$$

Ряды в нормированных пространствах

Опр. Пусть X – нормированное пространство и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится в* X, если существует такой элемент $S \in X$, называемый *суммой ряда* и обозначаемый также через $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, что

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N, \quad \text{где} \;\; S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k \;\; \text{– частичная сумма ряда,}$$

то есть существует элемент $S \in X$ такой, что

$$\|S - S_N\| \to 0 \quad \text{при} \;\; N \to \infty.$$

Опр. Пусть X – бесконечномерное нормированное пространство. Последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ образует *базис в* X, если любой элемент $x \in X$ может быть однозначно представлен в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

где α_k – числа, называемые *координатами* вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Опр. Пусть X и Y – нормированные пространства. Говорят, что Y *непрерывно вложено в* X, если $Y \subset X$ и существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|y\|_X \leqslant c\|y\|_Y \quad \forall\, y \in Y.$$

Если дополнительно Y всюду плотно в X (то есть $[Y]_X = X$), то говорят, что Y *непрерывно и плотно вложено в* X.

ДЗ 1.1. Показать, что $C[a,b]$ непрерывно вложено в $L_p(a,b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
При каких значениях показателя p вложение является плотным?

Банаховы пространства

Опр. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Теорема 1.2. *Пространство* $L_p(E)$ *при* $p \in [1, \infty]$ *является банаховым.*

Теорема 1.3. *Пространства* $C[a, b]$ *и* $C^m[a, b]$ *– банаховы.*

Теорема 1.4. *Пространства* ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *с нормами*

$$\|x\|_{\ell_p} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{k \geqslant 1} |x_k|, & p = \infty \end{cases}$$

являются банаховыми.

Теорема 1.2 была доказана раньше. Полнота пространства $C[a, b]$ тоже была доказана.

ДЗ 1.2. Доказать, что пространство $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\|_{C^1[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

является банаховым.

Домашнее задание к 13 апреля

Задачи 1.1 – 1.14 из параграфа 2.1