2 Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема 2.1. *(Теорема Банаха-Штейнгауза или принцип равномерной ограниченности) Пусть* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X,Y)$*, где* X *– банахово пространство. Если* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|A_n x\|_Y < \infty$ *для каждого* $x \in X$*, то* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|A_n\| < \infty$*.*

Доказательство. В силу непрерывности оператора A_n множество

$$F_{nk} = \{x \in X \mid \|A_n x\|_Y \leqslant k\}$$

замкнуто. Действительно, если $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset F_{nk}$ и $x_m \to x_0$, то

$$\|A_n x_m\|_Y \leqslant k \quad \Rightarrow \|A_n x_0\|_Y \leqslant k \quad \Rightarrow x_0 \in F_{nk}.$$

Поэтому замкнуто множество

$$F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{nk} = \{x \in X \mid \|A_n x\|_Y \leqslant k \quad \forall\, n \geqslant 1\}.$$

По условию для каждого $x \in X$ существует такое $k \geqslant 1$, что $x \in F_k$. Поэтому

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Так как X полно, то из теоремы Бэра следует, что хотя бы одно из множеств F_k не является нигде не плотным. Поэтому существует множество F_k, которое содержит целиком некоторый шар $\overline{B}_r(x_0)$.

Пусть $x \in X$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$x_0 + rx \in \overline{B}_r(x_0) \quad \text{и} \quad \|A_n(x_0 + rx)\|_Y \leqslant k \;\; \forall\, n \geqslant 1.$$

Отсюда

$$\|A_n(rx)\|_Y = \|A_n(x_0 + rx) - A_n x_0\|_Y \leqslant \|A_n(x_0 + rx)\|_Y + \|A_n x_0\|_Y \leqslant 2k.$$

Таким образом,

$$\|A_n x\|_Y \leqslant 2k/r \quad \forall\, x \in X, \;\; \|x\| = 1.$$

Следовательно

$$\|A_n\| \leqslant 2k/r \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X, Y)$, *где* X, Y *– банаховы пространства, а* $M \subset X$ *– множество, линейная оболочка которого* $L(M) = \operatorname{span}(M)$ *всюду плотна в* X. *Тогда следующие 3 свойства эквивалентны.*

1) Предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ *существует для всех* $x \in X$.

2) Предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ *существует для всех* $x \in M$ *и* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|A_n\| < \infty$.

3) Предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ *существует для всех* $x \in X$ *и задает оператор* $A \in \mathscr{L}(X, Y)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) в силу теоремы Банаха-Штейнгауза.

Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 3). Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ существует для всех $x \in L(M)$. Возьмем $x_0 \in X$ и докажем, что последовательность $\{A_n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $x \in L(M)$ так, чтобы

$$\sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| \|x - x_0\| < \varepsilon/4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|A_n x_0 - A_m x_0\| &= \|A_n x - A_m x\| + \|A_n(x_0 - x)\| + \|A_m(x_0 - x)\| \leqslant \\ &\leqslant \|A_n x - A_m x\| + \|A_n\| \|x_0 - x\| + \|A_m\| \|x_0 - x\| < \\ &< \|A_n x - A_m x\| + \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \text{для всех } m > n \geqslant N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, определен оператор $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Ясно, что

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \beta \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Значит, оператор A линеен. Кроме того,

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \|x\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| \, \|x\| \Rightarrow \|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| \, \|x\|.$$

Значит, оператор A ограничен и $\|A\| \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} \|A_n\|$.

3) $\Rightarrow$ 1) очевидно.

Теорема доказана.