№2.21

Д-ть: $\partial E = \overline{E} \setminus \operatorname{int} E$

Д-во: Пусть $x \in \partial E \Rightarrow x \notin \operatorname{int} E$, но $x \in \overline{E} \Rightarrow x \in \overline{E} \setminus \operatorname{int} E$

Теперь пусть $x \in \overline{E} \setminus \operatorname{int} E \Rightarrow$ в $\forall\ B_r(x)\ \exists$ точки $\in E$
По условию $x \notin \operatorname{int} E \Rightarrow$ в $B_r(x)\ \exists$ точки $\notin E$ $\Big\} \Rightarrow x \in \partial E$

ч.т.д.

№2.22

Д-ть: $\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\partial E_i)$

Д-во: $\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i} \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{E_i} \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) \subset$

$\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\overline{E_i} \setminus \operatorname{int} E_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\partial E_i) \Rightarrow \partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\partial E_i)$

ч.т.д.

Пример:

Пусть $E_i = \left(\frac{1}{i}, +\infty\right) \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = (0, \infty)$, $\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \{0\}$, но $\partial E_i = \left\{\frac{1}{i}\right\}$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \partial E_i = \left\{\frac{1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$

$\Rightarrow \partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\partial E_i)$

№2.23

Д-ть: ∂E - замкн.

Д-во: $\partial E = \bar{E} \setminus \mathrm{int}\, E$, где $\bar{E}$ - замкн; $\mathrm{int}\, E$ - откр.

$\Rightarrow$ ∂E - замкн.

Ч.т.д.

№2.26

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_a$; $x_n \to x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) \geq a \Rightarrow f(x) \geq a \Rightarrow x \in E_a$

Ч.т.д.

№2.27

Пусть $x_0 \in E_a \Rightarrow x_0 \in \{f(x) > a\} \Rightarrow \exists$ ε-окр $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$: $f(x) > a$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow$ открыто

Ч.т.д.

№2.28

Д-ть: $F = \{ f \in C[0,1] \mid f(x) \leq f_0(x) \ \forall x \in [0,1] \}$ - замкн.

Д-во: Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$: $f_n \to f$ в пр-ве $C[0,1]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ в $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq f_0(x)$ $\forall x \in [0,1]$

$\left.\begin{matrix} f_n(x) \leq f_0(x) \\ f_n(x) \to f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ в пределе по „n" имеем: $f(x) \leq f_0(x)$ $\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow f \in F \Rightarrow$ замкнуто

Ч.т.д.

№2.29

Д-ть: $F = \{ f \in C[a,b] \mid \alpha < f(x) < \beta \ \forall x \in [a,b] \}$ - откр.

Д-во: Пусть $f \in F$; $r_1 = f_{min} - \alpha$, $r_2 = \beta - f_{max}$ $\Rightarrow r = \min\{r_1, r_2\}$

Пусть $g \in B_r(f)$

$\Rightarrow |g(x) - f(x)| < r$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \leq f(x) - f_{min} + \alpha \leq f(x) - r \leq g(x) < f(x) + r \leq f(x) + \beta - f_{max} \leq \beta$

$\Rightarrow g \in B_r(f) \Rightarrow g \in F \Rightarrow B_r(f) \subset F \Rightarrow F$ - откр.

№2.30

а) Пусть E - замкнуто => оно содержит все точки прикосновения => оно содержит все предельные точки =>
=> замкнуто

б) $\bar{E} = \partial E \cup \operatorname{int} E$. Если E - замкнуто, то $E = \bar{E} = \partial E \cup \operatorname{int} E \supset \partial E$
Если $\partial E \subset E$, то $\bar{E} = \partial E \cup \operatorname{int} E \subset E$ => $\bar{E} = E$

ч.т.д.

№2.31

$\bigcap\limits_{E \subset A} A$ - замкн., содержит E

$$E \subset \bigcap_{E \subset A} A \Rightarrow [E] \subset \bigcap_{E \subset A} A$$

Но $A = [E]$ - одно из мн-в, которые рассматриваются =>
=> $\bigcap\limits_{E \subset A} A \subset [E]$

$$\begin{cases} [E] \subset \bigcap\limits_{E \subset A} A \\ [E] \supset \bigcap\limits_{E \subset A} A \end{cases} \Rightarrow [E] = \bigcap_{E \subset A} A$$

ч.т.д.

№2.20

$\operatorname{int}(E_1 \cup E_2) \neq \operatorname{int} E_1 \cup \operatorname{int} E_2$

Пример: $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [1,2)$ => $\operatorname{int}(E_1 \cup E_2) = \operatorname{int}[0,2) = (0,2)$

$\operatorname{int} E_1 = (0,1)$; $\operatorname{int} E_2 = (1,2)$ => $\operatorname{int} E_1 \cup \operatorname{int} E_2 = (0,1) \cup (1,2) \neq (0,2)$

Докажем включение:

Пусть $x \in \operatorname{int} E_1 \cup \operatorname{int} E_2$. Для удобства $x \in \operatorname{int} E_1$. Пусть $\exists A$:
$x \in A \subset \operatorname{int} E_1$
Тогда $A \subset (E_1 \cup E_2)$ => $A \subset \operatorname{int}(E_1 \cup E_2)$. x - $\forall$ точка =>
=> $\operatorname{int} \cancel{A_1} \cup \operatorname{int} E_2 \subset \operatorname{int}(E_1 \cup E_2)$

$$\operatorname{int}(E_1 \cup E_2) \supset \operatorname{int} E_1 \cup \operatorname{int} E_2$$

№ 2.25

Пусть x_0 - центр всех концентрических откр. кругов

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} r_i$, где $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > \ldots$ =>

=> $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} r_i = \{x_0\} = A$

Если A - откр, то $\forall$ точка - внутр -> x_0 - внутр, но это не так, потому что $\nexists B_\varepsilon(x_0) \subset A$ => не всегда откр.

Если A - замкн, то $\forall$ предельная точка $\in A$. В A одна точка => она должна быть предельной, но это не так, ибо $\nexists$ окр-ть, в которой содержатся точки $\in A$, отличные от x_0.

№ 2.32

Пусть A - полное метр. пр-во с метрикой $\rho(x, y)$, а $A_1 \subset A$ - замкн. мн-во.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_1$ -> т.к. $A_1 \subset A$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд в A посл-ть => $\exists a \in A: a_n \to a$, A_1 - замкн -> $a \in A_1$

=> полное

ч.т.д.

№ 2.33

Пусть $a \in \operatorname{int} A \Rightarrow B_r(a) \subset A$. $\forall b \in B_r(a)\ \exists B_\varepsilon(b) \subset B_r(a) \subset A$ => => $\forall$ точка $b \in B_r(a)$ - внутренняя => $B_r(a) \subset \operatorname{int} A$ => => $\operatorname{int} A$ - открытое

ч.т.д.

№ 2.34

Д-ть: $E_\varepsilon = \{x \in M \mid \rho(x, E) < \varepsilon\}$ - откр.

Д-во: Пусть $x \in E_\varepsilon \Rightarrow \rho(x, E) < \varepsilon$. $\exists y: y \in E: \rho(x, y) < \dfrac{\rho(x, E) + \varepsilon}{2}$

Рассмотрим $B_r(x)$: $r = \dfrac{\varepsilon - \rho(x, E)}{2}$. Пусть $\xi \in B_r(x)$ =>

$$\Rightarrow \rho(\xi, y) \le \rho(\xi, x) + \rho(x, y) < \frac{\varepsilon - \rho(x, E)}{2} + \frac{\rho(x, E) + \varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho(\xi, y) < \varepsilon \Rightarrow \xi \in E_\varepsilon \Rightarrow B_r(x) \subset E_\varepsilon \Rightarrow E_\varepsilon$ - откр.

ч.т.д.