№1.4

$E \subset [a,b]$; $E$ - изм.

Д-ть: $\chi_E(x)$ - инт. по Лебегу на $[a,b]$, $\int\limits_a^b \chi_E(x)dx = \mu(E)$

Д-во: • $E$ - изм $\Rightarrow$ $\chi_E$ - огр. и изм. $\Rightarrow$ $\chi_E$ - инт по Лебегу на $[a,b]$.

• $\int\limits_a^b \chi_E(x)dx = \left\{ \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \right\} =$

$= \int\limits_E \chi_E(x)dx + \int\limits_{[a,b]\setminus E} \chi_E(x)dx = \int\limits_E dx + \int\limits_{[a,b]\setminus E} 0 \cdot dx = \int\limits_E dx =$

$= \mu(E)$

ч.т.д.

№1.5

$f$ - неотр., инт на $E$; $\mu(E[f \geq c]) = a$

Д-ть: $\int\limits_E f(x)dx \geq ac$

Д-во: $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E[f \geq c]} f(x)dx + \int\limits_{E[0 \leq f < c]} f(x)dx \geq \int\limits_{E[f \geq c]} c\,dx =$

$= c \cdot \mu(E[f \geq c]) = ca \Rightarrow \int\limits_E f(x)dx \geq ca$

ЧТД.

№1.6

$K$ - канторово мн-во; $\mu(K) = 0$, тогда $f$ эквивалентна $x^3$ на мн-ве $[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{[0,1]} f(x)dx = \int\limits_{[0,1]} x^3 dx = (R)\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

Ответ: $1/4$

№1.7

$f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{I}$, $x > 0$; $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{Q}$

$\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Тогда $f$ эквивалентна $\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ - неогр. ф-ия} \right\} \ominus$

Введём срезку: $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_N = \begin{cases} N, & x \in [0, 1/N^2] \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (\frac{1}{N^2}, 1] \end{cases}$

$\ominus \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_N (x)dx = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_0^{1/N^2} N dx + \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{1/N^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

$= \lim\limits_{N\to\infty} Nx\Big]_0^{1/N^2} + \lim\limits_{N\to\infty} 2\sqrt{x}\Big]_{1/N^2}^{1} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} + 2\lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{N^2}}\right) = 2$

№1.8

Ответ: 2

$f(x) = x^3,\ x\in \mathbb{I},\ x< 1/3;\ f(x) = x^2,\ x\in\mathbb{I},\ x\geq 1/3,\ f(x)=0,\ x\in\mathbb{Q}$

$\int_0^1 f(x)dx = \left\{ \mu(\mathbb{Q})=0;\ f \text{ экв. } x^3 \text{ при } x<1/3;\ f \text{ экв. } x^2 \text{ при } x\geq 1/3 \right\} =$

$= \int_0^{1/3} f(x)dx + \int_{1/3}^1 f(x)dx = \int_0^{1/3} x^3dx + \int_{1/3}^1 x^2dx =$

$= \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{1/3} + \frac{1}{3}x^3\Big]_{1/3}^1 = \frac{1}{4\cdot 3^4} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^3}\right) = \frac{35}{108}$

№1.10

Ответ: $\frac{35}{108}$

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \text{ - неогр. ф-ия};\ \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right]_N = \begin{cases} N, & x\in\left[1,\ 1+\frac{1}{N^3}\right] \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}, & x\in\left(1+\frac{1}{N^3},\ 2\right] \end{cases}\right.$

$= \lim\limits_{N\to\infty}\int_1^{1+\frac{1}{N^3}} N dx + \lim\limits_{N\to\infty}\int_{1+\frac{1}{N^3}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim\limits_{N\to\infty} N\left(1+\frac{1}{N^3}-1\right) +$

$+ \lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{3\left(1/N^3\right)^{3/2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$

№1.11

Ответ: $\frac{3}{2}$

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ - неогр. ф-ия $\Rightarrow [f]_N(x) = \begin{cases} N, & x\in\left(0,\ \frac{1}{N}\right] \\ \frac{1}{x}, & x\in\left(\frac{1}{N},\ 1\right) \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to\infty}\int_0^1 [f]_N(x)dx$

$= \lim\limits_{N\to\infty}\int_0^{1/N} Ndx + \lim\limits_{N\to\infty}\int_{1/N}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to\infty} N\left(\frac{1}{N}-0\right) + \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{N}\right) =$

$= +\infty \Rightarrow \frac{1}{x}$ не интегр. на $(0,1)$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - неогр. ф-ия $\Rightarrow [f]_N(x) = \begin{cases} N, & x\in\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{N}}\right] \\ \frac{1}{x^2}, & x\in\left(\frac{1}{\sqrt{N}},\ 1\right) \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{N\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{N}}} Ndx + \lim\limits_{N\to\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt{N}}}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{N}{\sqrt{N}} + \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{x}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{N}}} =$

$= \infty \Rightarrow \frac{1}{x^2}$ - не интегр. на $(0,1)$.

№1.3

$f(x) = x^3,\ x\in\mathbb{I};\ f(x)=1,\ x\in\mathbb{Q}$.

(1) $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Тогда $f(x)$ эквивалентна $x^3$. (2) $f$ имеет разрывы во всех точках $(0,1)$ $\Rightarrow$ не интегр. по Риману.

В силу (1): $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$

Ответ: $1/4$

№1.12

а) $(0,1)$

$\frac{1}{x^\alpha}$; если $\alpha \le 0$, то $\frac{1}{x^\alpha}$ - огр => интегрируема

$\alpha > 0$

$$[f]_N(x) = \begin{cases} N, & x \in (0, \frac{1}{N^{1/\alpha}}] \\ \frac{1}{x^\alpha}, & x \in (\frac{1}{N^{1/\alpha}}, 1) \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 [f]_N(x)dx = \lim_{N\to\infty} N \cdot \frac{1}{N^{1/\alpha}} + \lim_{N\to\infty} \int_{N^{-1/\alpha}}^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N^{1/\alpha}} + \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\left(1 - N^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\right]$$ => пределы ~~...~~ конечны

при $\alpha < 1$ =>

$\frac{1}{x^\alpha}$ интегр на $(0,1)$ при $0 < \alpha < 1$

б) $(1, \infty)$

$\frac{1}{x^\alpha}$ интегр на $[1, N]$ $\forall N \ge 1$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha} - 1\right)\right] \Rightarrow$$

=> предел конечен при $\alpha > 1$ => при $\alpha > 1$ $\frac{1}{x^\alpha}$ интегр.

в) $(0, \infty)$

Допустим, что $f$ интегр на $(0, \infty)$ =>

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

I. конечен при $0 < \alpha < 1$

II. конечен при $\alpha > 1$ } => $f$ не интегр. на $(0, \infty)$.

№1.13

$f$ - огр., интегр. по Лебегу на $E$.

• $|f|$ интегр <-> $f$ ~~по~~ интегр. по Лебегу на $E$.

а) $\mu(E) < +\infty$

Ф-ии $f^{10}$, $\cos f$ в данном случае интегр., т.к. ограничены и измеримы.

• $\frac{1}{f}$ - не всегда интегрируема, т.к. $\exists$ пример: $f(x) = x$, на мн-ве $E = (0,1)$

б) $\mu(E) = \infty$

• $f$ - огр => $|f(x)| \le M$ => $|f(x)^{10}| \le M^9 |f(x)|$ => $f^{10}$ интегр

• Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на $(1, +\infty)$. Из „1.12 б)" $f(x)$ - интегр. на $(1, +\infty)$. $\cos f(x) = \cos\frac{1}{x^2} \to 1$ при $x \to \infty$ => $\cos f$ не интегр