№1.16

f - изм. на E - кон. меры.

Д-ть: $\exists$ полож. φ изм. на E : $f\cdot\varphi$ - интегр. на E.

Д-во: $f\cdot\varphi$ - интегр. на E $\Leftrightarrow$ $f\cdot\varphi$ - изм. и огр.

Пусть $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0 \\ 2, & f(x) = 0 \end{cases}$,

$\Rightarrow$ $f\cdot\varphi$ - интегр. на E. ч.т.д.

№1.15

Д-ть: f - интегр. на $[0,a] \Rightarrow \forall k>0$ $f(kx)$ - интегр. на $[0, a/k]$. и

$$\int_0^a f(x)dx = k\int_0^{a/k} f(kx)dx$$

Д-во: 1) Пусть f - огр; $T = \{E_i\}_{i=1}^N$ - разбиение $[0,a]$;

$T_1 = \{E_{1_i}\}_{i=1}^N = \{\frac{1}{k}E_i\}_{i=1}^N$ - разбиение $[0, a/k]$.

Заметим, что $\mu(E_{1_i}) = \frac{1}{k}\mu(E_i)$

$s_T(f) = \sum_{i=1}^N m_i(f)\mu(E_i)$; $S_T(f) = \sum_{i=1}^N M_i(f)\cdot\mu(E_i)$

Пусть $f(kx) = f_k(x)$, тогда $s_{T'}(f_k) = \sum_{i=1}^N m_i(f)\mu(E_{1_i}) =$

$= \sum_{i=1}^N m_i(f)\cdot\frac{1}{k}\mu(E_i) = \frac{1}{k}s_T(f)$

$S_{T'}(f_k) = \sum_{i=1}^N M_i(f)\cdot\mu(E_{1_i}) = \frac{1}{k}S_T(f)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{J}(f_k) = \sup\limits_{T'} s_{T'}(f_k) = \frac{1}{k}\sup\limits_{T} s_T(f) = \frac{1}{k}\underline{J}(f) = \frac{1}{k}\int_0^a f(x)dx \\ \overline{J}(f_k) = \inf\limits_{T'} S_{T'}(f_k) = \frac{1}{k}\inf\limits_{T} S_T(f) = \frac{1}{k}\overline{J}(f) = \frac{1}{k}\int_0^a f(x)dx \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{a/k} f(kx)dx = \frac{1}{k}\int_0^a f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^a f(x)dx = k\int_0^{a/k} f(x)dx$

2) f - неотр., неогр.

Для $[f]_N$ имеем: $k\int_0^{a/k}[f]_N(kx)dx = \int_0^a [f]_N(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty}\left[k\int_0^{a/k}[f]_N(kx)dx\right] = k\int_0^{a/k} f(kx)dx = \lim\limits_{N\to\infty}\left[\int_0^a [f]_N(x)dx\right] =$

$= \int_0^a f(x)dx \Rightarrow \int_0^a f(x)dx = k\int_0^{a/k} f(kx)dx$

3) f - неогр. $\forall$ знака $\Rightarrow f = f^+ - f^-$, тогда

$k\left[\int_0^{a/k} f^+(kx)dx - \int_0^{a/k} f^-(kx)dx\right] = \int_0^a f^+(x)dx - \int_0^a f^-(x)dx =$

$= \int_0^a f(x)dx \Rightarrow k\int_0^{a/k} f(kx)dx = \int_0^a f(x)dx$

ч.т.д.

№2.8

$f_n, f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$; $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$

Д-ть: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n(x)\,dx \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f(x)\,dx$ при $n \to \infty$

Д-во: $|e^{-x^2} \sin f_n(x)| \le |e^{-x^2}| \le 1 \quad \forall n \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |e^{-x^2} \cdot \sin f_n(x)| \le F(x)$, где $F(x) \equiv 1$

$f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow$ по т.

Лебега о мажор. сх-ти: $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n(x)\,dx \right] =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f(x)\,dx \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f_n(x)\,dx \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin f(x)\,dx$ при $n \to \infty$

Ч.Т.Д.

№2.4

$f, f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{M}(E)$;

Д-ть: $f_n(x) \to f(x)$ на E по мере $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{|f_n(x) - f(x)|\,dx}{1 + |f_n(x) - f(x)|} = 0$

Д-во: $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\,dx =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \left(1 - \frac{1}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\right) dx = \mu(E) - \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{dx}{1 - |f_n(x) - f(x)|} = 0$

$\Rightarrow \mu(E) = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{dx}{1 - |f_n(x) - f(x)|} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow f_n \to f$ по мере на E.

$\Rightarrow$ $f_n \to f$ по мере $\Rightarrow \forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0\ \exists N: \mu(E[|f_n - f| > \delta]) < \varepsilon, n \ge N$

$\Rightarrow \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \to 0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E \frac{0}{1 + 0}\,dx = 0.$

Ч.Т.Д

№3.4

$f \in L_1(E)$; $g \in L_\infty(E)$

Д-ть: $f \cdot g \in L_1(E)$; $\|f \cdot g\|_{L_1(E)} \le \|f\|_{L_1(E)} \cdot \|g\|_{L_\infty(E)}$

Д-во: $f \in L_1(E)$, $g \in L_\infty(E) \Rightarrow f, g \in \mathfrak{M}(E) \Rightarrow f \cdot g \in \mathfrak{M}(E)$

$\|f \cdot g\|_{L_1(E)} = \int\limits_E |f(x) \cdot g(x)|\,dx \le \int\limits_E |f(x)|\,dx \cdot \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in E} |g(x)| =$

$= \|f\|_{L_1(E)} \|g\|_{L_\infty(E)} \Rightarrow \|f \cdot g\|_{L_1(E)} \le \|f\|_{L_1(E)} \cdot \|g\|_{L_\infty(E)}$

Ч.Т.Д.

№3.5

$f, g \in L_\infty(E)$

Д-ть: $f \cdot g \in L_\infty(E)$

Д-во: $f, g \in L_\infty(E) \Rightarrow f, g \in \mathfrak{M}(E) \Rightarrow f \cdot g \in \mathfrak{M}(E)$

$$\left.\begin{aligned} f \in L_\infty(E) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{M}(E),\ \exists c_1 > 0: |f(x)| \le c_1 \text{ почти } \forall x \in E \\ g \in L_\infty(E) \Leftrightarrow g \in \mathfrak{M}(E),\ \exists c_2 > 0: |g(x)| \le c_2 \text{ почти } \forall x \in E \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x) g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \le c_1 \cdot c_2 = c_3$ почти $\forall x \in E$, $c_3 > 0$, т.

$$\begin{cases} f \cdot g \in \mathfrak{M}(E) \\ |f(x) \cdot g(x)| \le c_3,\ c_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f \cdot g \in L_\infty(E)$$

ч.т.д.

№3.10

$f_n \to f$ в $L_2(E)$

Д-ть: $f_n \to f$ по мере на E.

Д-во: Т.к. $\mu(E) < \infty$, то из $f_n \to f$ в $L_2(E) \Rightarrow f_n \to f$ в $L_1(E) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$ при $n \to \infty$

Из нер-ва Чебышёва: $\mu(E[|f_n - f| > \delta]) \le \frac{1}{\delta} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \to$

$\Rightarrow \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \to 0 \Rightarrow f_n \to f$ по мере на E.

№3.11

$f_n \to f$ в $L_2(a,b)$; $g_n \to g$ в $L_2(a,b)$

Д-ть: $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ по мере на (a,b)

Д-во: • $\mu(a,b) < \infty \Rightarrow$ из $f_n \to f$ в $L_2(a,b) \Rightarrow f_n \to f$ в $L_1(a,b)$

Аналогично $g_n \to g$ в $L_1(a,b)$, тогда $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$ (1),

$\int_a^b |g_n(x) - g(x)| dx \to 0$ (2) при $n \to \infty$

• $|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = |(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x)) + (f_n(x) - f) g(x) +$
$+ (g_n(x) - g(x)) f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| \cdot |g(x)| + |g_n(x) - g(x)| |f(x)|$

$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| dx \le \underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| dx}_{1} +$
$+ \underbrace{\int_a^b |f_n(x) - f(x)| |g(x)| dx}_{2} + \underbrace{\int_a^b |g_n(x) - g(x)| |f(x)| dx}_{3}$

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| dx \to 0, \text{ т.к. } (1), (2). \\ &2)\ \int_a^b |f_n(x) - f(x)| |g(x)| dx \to 0, \text{ т.к. } (1) \\ &3)\ \int_a^b |g_n(x) - g(x)| |f(x)| dx \to 0, \text{ т.к. } (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x) g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| dx \to 0$ при $n \to \infty$

Нер-во Чебышёва: $\mu(E[|f_n \cdot g_n - fg| > \delta]) \le \frac{1}{\delta}\int\limits_E |f_n(x)\cdot g_n(x) - f(x)g(x)|dx \to 0$

при $n \to \infty \Rightarrow \mu(E[|f_n g_n - fg| > \delta]) \to 0 \Rightarrow f_n g_n \to fg$ по мере на $E = (a, b)$

№3.12 ч.т.д.

$f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$

Верно ли, что $f_n \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$?

Ответ: нет, неверно, т.к. $\mu(\mathbb{R}) = \infty$

№3.9

$f_n \to f$ в $L_4(E)$; $g_n \to g$ в $L_4(E)$

Д-ть: $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ в $L_2(E)$.

Д-во: $f_n \to f$ в $L_4(E) \Rightarrow f_n \to f$ в $L_2(E) \Rightarrow \left[\int\limits_E |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \to 0 \quad (1)$

Аналогично $\left[\int\limits_E |g_n(x) - g(x)|^2 dx\right]^{1/2} \to 0 \quad (2)$

$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|^2 = |(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x)) + (f_n(x) - f(x))g(x) + (g_n(x) - g(x))f(x)|^2 \le 2|(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x)) + (f_n(x) - f(x))g(x)|^2 + 2|(g_n(x) - g(x))f(x)|^2 \le 4|(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x))|^2 + 4|(f_n(x) - f(x))g(x)|^2 + 2|(g_n(x) - g(x))f(x)|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_E |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|^2 dx \le 4\int\limits_E |(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x))|^2 dx + 4\int\limits_E |(f_n(x) - f(x))g(x)|^2 dx + 2\int\limits_E |(g_n(x) - g(x))f(x)|^2 dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\int\limits_E |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|^2 dx\right]^{1/2} \le 2\left[\int\limits_E |(f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x))|^2 dx\right]^{1/2} + 2\left[\int\limits_E |(f_n(x) - f(x))g(x)|^2 dx\right]^{1/2} + \sqrt{2}\left[\int\limits_E |(g_n(x) - g(x))f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \to 0$ в силу (1) и (2) $\Rightarrow \left[\int\limits_E |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|^2 dx\right]^{1/2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ в $L_2(E)$

ч.т.д.