8 Лемма Рисса о почти перпендикуляре

Теорема 8.1. *Пусть X – бесконечномерное нормированное пространство, а Y – замкнутое подпространство в X, не совпадающее с X.*

Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует $z_\varepsilon \in X$, такой, что

$$\|z_\varepsilon\| = 1 \quad \text{и} \quad \rho(z_\varepsilon, Y) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Возьмем $x_0 \in X \setminus Y$. Ясно, что

$$d = \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, Y) > 0$$

и для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует $y_\varepsilon \in Y$ такой, что

$$\|x_0 - y_\varepsilon\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d.$$

Положим $z_\varepsilon = \dfrac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}$. Ясно, что $\|z_\varepsilon\| = 1$. В то же время для любого $y \in Y$

$$\|z_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{\Big\| x_0 - y_\varepsilon - \|x_0 - y_\varepsilon\| y \Big\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} \geqslant \frac{d}{d/(1-\varepsilon)} = 1 - \varepsilon.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\|x_0 - (y_\varepsilon + \|x_0 - y_\varepsilon\| y)\| \geqslant \rho(x_0, Y) = d.)$$

Таким образом, $\rho(z_\varepsilon, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Теорема доказана.

Следствие 8.1. *В бесконечномерном нормированном пространстве X сфера $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ не предкомпактна.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Возьмем $x_1 \in S$. В силу леммы о почти перпендикуляре существует $x_2 \in S$ такой, что $\rho(x_2, \operatorname{span}\{x_1\}) \geqslant 1 - \varepsilon$. Далее существует $x_3 \in S$ такой, что $\rho(x_3, \operatorname{span}\{x_1, x_2\}) \geqslant 1 - \varepsilon$. И т.д. Таким образом, существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ такая, что $\|x_n - x_m\| \geqslant 1 - \varepsilon$ для всех $n \neq m$. Ясно, что из нее нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Следствие доказано.