3 Открытые и замкнутые множества на числовой прямой

Под интервалом будем понимать промежуток (a, b), где a и b могут быть как конечными, так и бесконечными.

Теорема 3.1. *Всякое открытое множество G на числовой прямой может быть представлено в виде объединения не более чем счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов, и это представление единственно.*

Доказательство. Пусть $x \in G$. Тогда существует интервал Δ_x, содержащий точку x и содержащийся в G. Введем множество

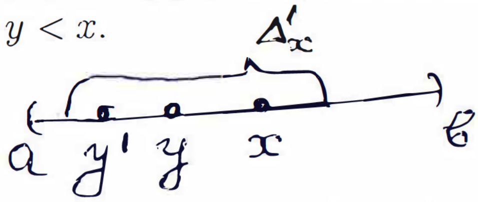
$$I_x = \bigcup_{x \in \Delta_x \subset G} \Delta_x.$$

Очевидно, что $I_x \neq \emptyset$. Докажем, что I_x – интервал.

Положим $a = \inf I_x$, $b = \sup I_x$.

Заметим, что I_x открыто и поэтому $a \notin I_x$, $b \notin I_x$. Следовательно $I_x \subset (a, b)$.

Покажем теперь, что $(a, b) \subset I_x$. Возьмем произвольное $y \in (a, b)$ и рассмотрим случай $a < y < x$.



Так как $a = \inf I_x$, то существует $y' \in \Delta'_x \subset I_x$ такой, что $a < y' < y < x$. Но тогда $y \in \Delta'_x \subset I_x$.

Аналогично, если $x < y < b$, то $y \in I_x$. Таким образом, $I_x = (a, b)$.

Покажем теперь, что для $x, y \in G$ интервалы I_x и I_y либо не пересекаются либо совпадают. Пусть $I_x \cap I_y \neq \emptyset$.

Тогда интервал $I_x \cup I_y$ содержит точку x и поэтому $I_x \cup I_y \subset I_x$. Как следствие, $I_y \subset I_x$. Аналогично $I_y \subset I_x$. Таким образом, $I_x = I_y$.

Итак, множество G распадается в сумму некоторого семейства попарно непересекающихся интервалов. Выберем в каждом из интервалов одну рациональную точку и установим взаимно однозначное соответствие между множеством построенных интервалов и подмножеством множества рациональных чисел. Наличие этого соответствия говорит о том, что семейство интервалов не более чем счетно.

Первая часть теоремы доказана. Докажем теперь единственность представления. Пусть $G = \bigcup\limits_n I_n$ – построенное представление и пусть есть еще одно представление $G = \bigcup\limits_k \delta_k$, где $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Ясно, что для каждого интервала $\delta_k = (\alpha, \beta)$ существует интервал $I_n = (a, b)$ такой, что $\delta_k \subset I_n$. Достаточно взять $x \in \delta_k$ и построить соответствующий интервал $I_x = \bigcup\limits_{x \in \Delta_x \subset G} \Delta_x \supset \delta_k$.

Покажем, что $\delta_k = I_n$. Предположим, например, что $\alpha \in (a, b)$.

$\delta_k \subset I_n$

Тогда существует интервал δ_j, $j \neq k$ такой, что $\alpha \in \delta_j$, но $\delta_k \cap \delta_j = \emptyset$. Поэтому $\alpha = a$. Аналогично $\beta = b$.

Таким образом, в представлениях

$$G = \bigcup_k \delta_k \quad \text{и} \quad G = \bigcup_n I_n$$

каждый из интервалов δ_k совпадает с одним из интервалов I_n. Следовательно эти представления совпадают.

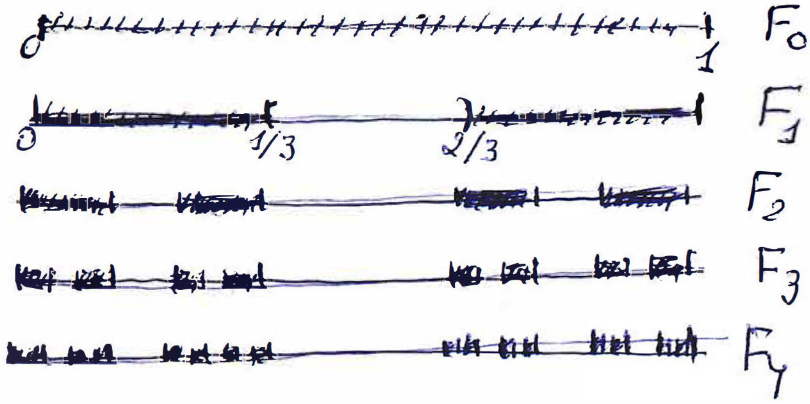
Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Всякое замкнутое множество на числовой прямой может быть получено удалением из числовой прямой не более чем счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов.*

Следствие 3.2. *В борелевской σ - алгебре $\mathfrak{B}$ содержатся все открытые и все замкнутые множества.*

Канторово совершенное множество

Пусть $F_0 = [0,1]$. Выбросим из F_0 интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Полученное множество обозначим через F_1. Оставшиеся отрезки разобъем на три равные части и выбросим из каждого отрезка центральный интервал. В результате получим множество F_2, являющееся объединением 4 отрезков. Продолжая этот процесс дальше, получим убывающую последовательность замкнутых множеств F_n.



Предел этой последовательности $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ называется *канторовым совершенным множеством*. Это множество получается выбрасыванием из отрезка $[0,1]$ счетного числа интервалов. Поэтому F является замкнутым множеством.

Это множество не пусто. Во всяком случае, ему принадлежит последовательность концов выбрасывемых интервалов.

Вычислим сумму длин всех выброшенных интервалов

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 4\frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом F получено удалением и отрезка $[0,1]$ длины 1 интервалов, суммарная длина которых тоже равна 1.

Тем не менее, F имеет мощность континуума, то есть $F \sim [0,1]$. Для того, чтобы доказать это, запишем каждое из чисел $x \in [0,1]$ в троичной системе исчисления

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{1}{3^k} = (0, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots\dots)_3,$$

где $\alpha_k = 0, 1, 2$. Построение F состоит в том, что последовательно отбрасываются числа, содержащие цифру $\alpha_k = 1$ хотя бы в одной из позиций. Число $x \in F$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0, 2$ для всех k. Исключением являются правые концы отброшенных интервалов.

Очевидно, что это множество эквивалентно множеству всех чисел из отрезка $[0,1]$ (нужно использовать двоичное представление чисел).

Заметим, что множество F является совершенным, то есть замкнутым множеством, не имеющим изолированных точек. Действительно, пусть $x \in F$. Тогда $x \in F_k$ для каждого k. Значит, для каждого k точка x принадлежит одному из отрезков $[a_k, b_k] \subset F_k$. Следовательно $|x - a_k| \leqslant |b_k - a_k| \to 0$. Поэтому x является пределом последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$.