5 Сопряженные пространства

Опр. Множество всех линейных непрерывных функционалов f, заданных на нормированном пространстве X, образует нормированное пространство X^*, которое называется пространством, *сопряженным* к X; норма функционала $f \in X^*$ задается формулой

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Значение $f(x)$ функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$ далее будет обозначаться также через $\langle f, x\rangle$ или $\langle f, x\rangle_{X^*\times X}$.

Замечание 5.1. *Обратим внимание на важное неравенство*

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\|\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Теорема 5.1. *Пространство X^* – банахово.*

Действительно, $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ или $X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{C})$.

Теорема 5.2. *(Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве)*

Пусть H – гильбертово пространство. Для всякого функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $h \in H$ такой, что

$$\langle f, x\rangle = (x, h) \quad \forall\, x \in H, \tag{5.1}$$

причем $\|f\|_{H^*} = \|h\|_H$.

Обратно, для всякого $h \in H$ формула (5.1) определяет на H функционал $f \in H^*$.

Доказательство. Заметим, что функционал (5.1) действительно линейный. Для него $\|f\| \leqslant \|h\|$, так как

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|h\|\|x\| \quad \forall\, x \in H,$$

причем $\langle f, h\rangle = \|h\|^2$. Отсюда $\|f\| = \|h\|$.

Покажем теперь, что всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на H, действительно может быть представлен в виде (5.1). Если $f = 0$, то достаточно положить $h = 0$.

Пусть теперь $f \neq 0$. Так как функционал f непрерывен, то его ядро замкнуто. Тогда в силу теоремы о представлении гильбертова пространства в виде прямой суммы замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения имеем

$$H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^{\perp}. \tag{5.2}$$

Но ядро нетривиального линейного функционала имеет коразмерность, равную 1. Следовательно $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{span}\{e\}$, где $\|e\| = 1$.

В силу разложения (5.2) для любого $x \in H$ имеем

$$x = y + \alpha e, \quad y \in \operatorname{Ker} f.$$

Поэтому

$$\langle f, x\rangle = \langle f, y\rangle + \alpha\langle f, e\rangle = \alpha\langle f, e\rangle.$$

Положим $h = \overline{\langle f, e\rangle} e$. Тогда

$$(x, h) = (y + \alpha e, \overline{\langle f, e\rangle} e) = \langle f, e\rangle \left[(y, e) + \alpha\|e\|^2\right] = \alpha\langle f, e\rangle.$$

Таким образом, равенство (5.1) имеет место.

Докажем единственность элемента h. Предположим, что существуют два элемента $h_1, h_2 \in H$ такие, что

$$\langle f, x\rangle = (x, h_1), \quad \langle f, x\rangle = (x, h_2) \quad \forall\, x \in H.$$

Тогда

$$(x, h_1 - h_2) = 0 \quad \forall\, x \in H.$$

Взяв $x = h_1 - h_2$, получим $\|h_1 - h_2\|^2 = 0$.

Теорема доказана.

Определим оператор Рисса-Фреше $S : H^* \to H$, ставящий в соответствие функционалу $f \in H^*$ элемент $h \in H$ из равенства (5.1), то есть

$$\langle f, x\rangle = (x, h) = (x, Sf) \quad \forall\, x \in H.$$

. В силу теоремы Рисса-Фреше оператор S отображает H^* на H, является изометрическим и обладает свойством

$$S(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\, Sf + \overline{\mu}\, Sg \quad \forall\, f, g \in H^*, \quad \forall\, \lambda, \mu.$$

Оператор S является линейным изоморфизмом H^* на H, если пространство H вещественное и сопряженно-линейным изоморфизмом H^* на H, если пространство H комплексное.

В пространстве H^* можно ввести скалярное произведение

$$(f, g)_{H^*} = (Sg, Sf)_H,$$

согласованное с нормой пространства, так как

$$\|f\|^2_{H^*} = \|Sf\|^2_H.$$

(Напомним, что $Sf = h$ и $\|h\|_H = \|f\|_{H^*}$.)

Таким образом **пространство H^* – гильбертово.**

Приведем без доказательства еще одну теорему о представлении линейных непрерывных функционалов.

Теорема 5.3. *(об общем виде линейного непрерывного функционала на $L_p(E)$.) Пусть E – измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, $1 \leqslant p < \infty$, $q = p' = p/(p-1)$.*

Тогда для всякого функционала $f \in (L_p(E))^*$ существует единственная функция $h \in L_q(E)$ такая, что

$$\langle f, x \rangle = \int\limits_E x(t)\overline{h(t)}\,dt \quad \forall\, x \in L_p(E), \tag{5.3}$$

причем $\|f\|_{(L_p(E))^*} = \|h\|_{L_q(E)}$.

Обратно, для всякой функции $h \in L_q(E)$ формула (5.3) задает на $L_p(E)$ функционал $f \in (L_p(E))^*$.

Таким образом, при $1 \leqslant p < \infty$ пространство $(L_p(E))^*$ изометрично пространству $L_p(E)$:

$$(L_p(E))^* \approx L_{p'}(E) \quad (\text{часто пишут} \quad (L_p(E))^* = L_{p'}(E),$$

причем оператор, осуществляюший взаимно однозначное соответствие между $(L_p(E))^*$ и $L_{p'}(E)$ является сопряженно линейным.

Замечание 5.2. *При $p = 2$ теорема 5.3 следует из теоремы 5.2.*

Замечание 5.3. *При $p = \infty$ аналог теоремы 5.3 не имеет места.*

Теорема 5.4. *Если пространство X^* сепарабельно, то пространство X также сепарабельно.*

Доказательство. Так как пространство X^* сепарабельно, то сепарабельно и любое подмножество в X^*, в том числе и единичная сфера

$$S^* = \{f \in X^* \mid \|f\|_{X^*} = 1\}.$$

Поэтому существует плотная в S^* последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S^*$. Так как $\|f_n\|_{X^*} = 1$, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \langle f_n, x_n \rangle > 1/2.$$

Введем подпространство $M = \left[\operatorname{span}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\right]$. Оно сепарабельно, так как в M счетным всюду плотным подмножеством является множество всех линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ с рациональными коэффициентами α_k.

Докажем, что $X = M$. Допустим противное: существует $x_0 \in X \setminus M$. В силу леммы об аннуляторе существует нетривиальный функционал $f \in S^*$ такой, что $\langle f, x \rangle = 0$ для всех $x \in M$. Так множество $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно в S^*, существует подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} 1/2 < |\langle f_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \leqslant |\langle f, x_{n_k} \rangle| + |\langle f_{n_k} - f, x_{n_k} \rangle| \leqslant \\ \leqslant \|f - f_{n_k}\|_{X^*} \|x_{n_k}\| = \|f - f_{n_k}\|_{X^*} \to 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Замечание 5.4. *Из сепарабельности пространства X не следует сепарабельность сопряженного пространства. Действительно, в силу теоремы 5.3 $(L_1(E))^* \approx L_\infty(E)$. Но пространство $L_1(E)$ сепарабельно, а $L_\infty(E)$ не является сепарабельным.*

Следствие 5.1. *Теорема 5.3 не имеет места при $p = \infty$. Действительно, если бы $(L_\infty(E))^*$ было изометрично $L_1(E)$, то тогда пространство $(L_\infty(E))^*$ было бы сепарабельным и в силу теоремы 5.4 сепарабельным было бы и $L_\infty(E)$.*