8 Изоморфизм гильбертовых пространств

Евклидовы (унитарные) пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными*, если они изоморфны как линейные пространства и изоморфизм J пространства E_1 на пространство E_2 таков, что

$$(J(f), J(g))_{E_2} = (f, g)_{E_1} \qquad \forall\, f, g \in E_1. \tag{8.1}$$

Напомним теорему, известную из курса линейной алгебры.

Теорема 8.1. *Любые два n-мерные евклидовы (унитарные) пространства изоморфны.*

Доказательство. В пространстве E_1 существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в пространстве E_2 – ортонормированный базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Всякий элемент $f \in E_1$ однозначно представляется в виде

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

где c_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ – координаты элемента f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Как нетрудно видеть, $c_k = (f, e_k)_{E_1}$ – это коэффициенты Фурье элемента f.

Таким образом, каждому элементу $f \in E_1$ однозначно сопоставлен набор его координат $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Ясно, что отображение $f \to (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ является линейным взаимно однозначным отображением E_1 на $\mathbb{R}^n$, если пространство E_1 евклидово и – линейным взаимно однозначным отображением E_1 на $\mathbb{C}^n$, если пространство E_2 унитарно.

Возьмем еще один элемент $g \in E_1$ и представим его в виде $g = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j e_j$. Заметим, что

$$(f, g)_{E_1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{j=1}^{n} d_j e_j\Big)_{E_1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_k e_k, d_j e_j)_{E_1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_k \overline{d}_j (e_k, e_j)_{E_1} = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d}_k.$$

Таким образом, отображение $f \to (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ является изоморфизмом E_1 на $\mathbb{R}^n$, если пространство E_1 евклидово и – изоморфизмом E_1 на $\mathbb{C}^n$, если пространство E_1 унитарно.

Определим теперь изоморфизм $J : E_1 \to E_2$ следующим образом:

$$J(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k e'_k.$$

Фактически отображение J осуществляется в два этапа. Сначала элементу f ставится в соответствие набор его координат $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а затем в E_2 определяется элемент, имеющий те же координаты в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Ясно, что это отображение линейно и взаимно однозначно. Кроме того,

$$(J(f), J(g))_{E_2} = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d}_k = (f, g)_{E_1}.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 8.2. *(Теорема об изоморфизме гильбертовых пространств.)*

Любые два сепарабельные гильбертовы пространства (оба вещественные или оба комплексные) изоморфны.

Доказательство. Покажем сначала, что сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно пространству ℓ_2. Фиксируем в H ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для всякого $f \in H$ имеем $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Из неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|f\|$$

следует, что $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Ясно, что отображение $f \to \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ линейно.

Напомним, что в силу теоремы Рисса-Фишера для каждого $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ существует элемент $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Таким образом, соответствие $f \to \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ не только линейно, но и взаимно однозначно.

Пусть теперь $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k e_k$ и $S_N(f) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k e_k$, $S_N(g) = \sum\limits_{k=1}^{N} d_k e_k$. Ясно, что

$$(S_N(f), S_N(g))_H = \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d}_k. \qquad (8.2)$$

Учитывая, что $S_N(f) \to f$, $S_N(g) \to g$ в H при $N \to \infty$, перейдем в равенстве (8.2) к пределу при $N \to \infty$ и получим

$$(f, g)_H = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d}_k = (c, d)_{\ell_2}.$$

Таким образом, пространство H изоморфно пространству ℓ_2.

Пусть теперь H_1 и H_2 – два сепарабельные гильбертовы пространства (оба вещественные или оба комплексные). Поскольку пространство H_1 изоморфно пространству ℓ_2, а пространство ℓ_2 изоморфно пространству H_2, то пространства H_1 и H_2 изоморфны.

Теорема доказана.

Замечание 8.1. *Теорема 8.2 означает, что с точностью до изоморфизма существует только одно сепарабельное вещественное (комплексное) гильбертово пространство и что пространство ℓ_2 можно рассматривать как его "координатную реализацию".*