3 Теорема о вложенных шарах

В анализе широко используется теорема о вложенных отрезках. В теории метрических пространств ее аналогом является теорема о вложенных шарах.

Теорема 3.1. *(Теорема о вложенных шарах) Для того, чтобы метрическое пространство M было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость. Пусть M – полное метрическое пространство и

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \supset \overline{B}_{r_2}(x_2) \supset \ldots \overline{B}_{r_n}(x_n) \supset \ldots$$

последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров с $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $\overline{B}_{r_n}(x_n) \supset \overline{B}_{r_m}(x_m)$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant r_n < \varepsilon \quad \text{при} \quad m > n > N(\varepsilon).$$

Следовательно последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. В силу полноты пространства M существует $x_0 \in M$ такое, что $x_n \to x_0$. Заметим, что $x_m \in \overline{B}_{r_n}(x_n)$ для всех $m > n$. Как следствие, $x_0 \in \overline{B}_{r_n}(x_n)$ для всех $n \geqslant 1$ и поэтому $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(x_n)$.

Достаточность. Пусть в M всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю имеет непустое пересечение.

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и докажем, что она имеет предел. Положим $r_n = \dfrac{1}{2^n}$ для $n \geqslant 1$. В силу фундаментальности найдется номер n_1 такой, что $\rho(x_n, x_{n_1}) < \dfrac{r_1}{2}$ для всех $n > n_1$. Аналогично существует $n_2 > n_1$ такой, что $\rho(x_n, x_{n_2}) < \dfrac{r_2}{2}$ для всех $n > n_2$.

Если номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ уже выбраны, то выберем $n_{k+1} > n_k$ так, чтобы $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \dfrac{r_{k+1}}{2}$ для всех $n > n_{k+1}$.

Заметим, что $\overline{B}_{r_k}(x_k) \supset \overline{B}_{r_{k+1}}(x_{k+1})$. Действительно, если $x \in \overline{B}_{r_{k+1}}(x_{k+1})$, то

$$\rho(x, x_k) \leqslant \rho(x, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_k) \leqslant r_{k+1} + \frac{r_k}{2} = r_k \quad \Rightarrow x \in \overline{B}_{r_k}(x_k).$$

Но тогда, в силу сделанного предположения, существует $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_n}(x_{n_k})$. Так как $\rho(x, x_{n_k}) \leqslant r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $x_{n_k} \to x$.

Покажем, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ для $n > m > N$. Затем выберем $n_k > N$ такое, что $\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Как следствие

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы о вложенных шарах мы фактически передоказали следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Если для фундаментальной поледовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ *существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $x_{n_k} \to x \in M$ *при* $k \to \infty$, *то* $x_n \to x$ *при* $n \to \infty$.

ДЗ 3.1. Доказать лемму 3.1.

4 Плотные подмножества. Теорема Бэра

Напомним, что замыкание множества A в метрическом пространстве мы обозначаем через $\overline{A}$ или $[A]$. Точка $x \in [A]$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ или x является предельной точкой множества A. Другими словами, $x \in [A]$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Опр. Пусть A и B – подмножества метрического пространства M. Говорят, что множество A плотно в B, если $\overline{A} \supset B$.

Множество A называется всюду плотным в M, если $\overline{A} \supset M$ (то есть $\overline{A} = M$).

Примеры.

1. Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$.

2. Множество $C^{\infty}[a,b]$ всюду плотно в $L_p(a,b)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Опр. Метрическое пространство, содержащее бесконечное множество элементов, называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Примеры сепарабельных пространств:

1) $\mathbb{R}^m$,

2) $C[a,b]$,

3) $L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$,

4) ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$.

Примеры пространств, не являющихся сепарабельными:

1) ℓ_∞,

2) $L_\infty(E)$.

Для того, чтобы убедиться в сепарабельности пространства $C[a,b]$, воспользуемся следующей классической теоремой.

Теорема 4.1. *(Аппроксимационная теорема Вейерштрасса.)*
Для всякой функции $f \in C[a,b]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой алгебраический многочлен P_n степени $n = n(f,\varepsilon)$, что

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $f \in C[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса существует многочлен $P_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ такой, что

$$\|f - P_N\|_{C[a,b]} < \varepsilon/2.$$

Заменим коэффициенты a_k их рациональными приближениями $\widetilde{a}_k$ таким образом, чтобы для многочлена $\widetilde{P}_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \widetilde{a}_k x^k$ было справедливо неравенство

$$\|P_N - \widetilde{P}_N\|_{C[a,b]} < \varepsilon/2.$$

Тогда

$$\|f - \widetilde{P}_N\|_{C[a,b]} \leqslant \|f - P_N\|_{C[a,b]} + \|P_N - \widetilde{P}_N\|_{C[a,b]} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Мы доказали, что множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $C[a,b]$. Поскольку это множество счетно, пространство $C[a,b]$ сепарабельно.

ДЗ 4.1. Доказать, что пространство $L_p(a,b)$ с $1 \leqslant p < \infty$ сепарабельно.

ДЗ 4.2. Доказать, что пространство ℓ_p с $1 \leqslant p < \infty$ сепарабельно.

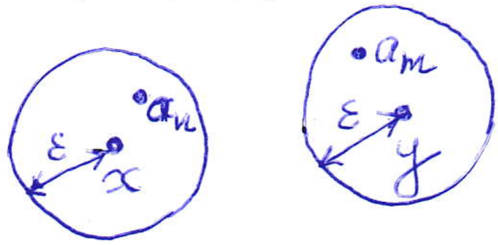
Теорема 4.2. *Пространство ℓ_∞ не является сепарабельным.*

Доказательство. Рассмотрим множество $E \subset \ell_\infty$, элементами которого являются последовательности $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, где x_k равно 0 и 1.

Множество E имеет мощность континуума. Заметим, что расстояние между разными элементами $x, y \in E$ равно 1. Действительно,

$$\rho(x, y) = \sup_{k \geqslant 1} |x_k - y_k| = 1.$$

Предположим, что в ℓ_∞ существует счетное всюду плотное множество $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$. Тогда для каждого $x \in \ell_\infty$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a_n \in A$ такой, что $a_n \in B_\varepsilon(x)$.
Возьмем $\varepsilon < 1/2$ и $x, y \in E$, $x \neq y$.



Поскольку расстояние между x и y равно 1, то шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(y)$ не пересекаются. Следовательно элементы $a_n \in B_\varepsilon(x)$ и $a_m \in B_\varepsilon(y)$ разные. Таким образом, между множеством E и некоторым подмножеством множества A установлено взаимно однозначное соответствие. Это невозможно, так как E имеет мощность континуума, а A счетно.

Теорема доказана.

ДЗ 4.3. Доказать, что пространство $L_\infty(a, b)$ не является сепарабельным. Подсказка: рассмотреть множество характеристических функций интервалов (a, x), где $x \in (a, b)$.