9 Шкала пространств L_p

Теорема 9.1. *Пусть* $|E| < \infty$. *Если* $f \in L_p(E)$ *с некоторым* $p \in [1, \infty]$, *то* $f \in L_q(E)$ *для всех* $1 \leqslant q \leqslant p$, *причем справедлива оценка*

$$\|f\|_{L_q(E)} \leqslant |E|^{1/q-1/p} \|f\|_{L_p(E)}.$$

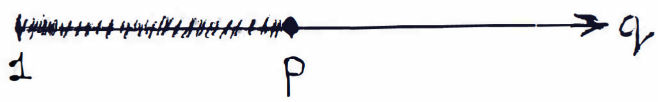
Доказательство. Пусть $p < \infty$. Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\|f\|_{L_q(E)}^q = \int\limits_E |f|^q \, dx \leqslant \Big(\int\limits_E 1 \, dx\Big)^{1-q/p} \Big(\int\limits_E |f|^p \, dx\Big)^{q/p} = |E|^{1-q/p} \|f\|_{L_p(E)}^q.$$

Если $p = \infty$, то при $q < \infty$

$$\|f\|_{L_q(E)}^q = \int\limits_E |f|^q \, dx \leqslant \Big(\int\limits_E 1 \, dx\Big) \|f\|_{L_\infty(E)}^q = |E| \, \|f\|_{L_\infty(E)}^q.$$

Теорема доказана.



Теорема 9.2. *Пусть* $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$. *Если* $f \in L_{p_1}(E) \cap L_{p_2}(E)$, *то* $f \in L_p(E)$ *для всех* $p \in [p_1, p_2]$, *причем справедлива мультипликативная оценка*

$$\|f\|_{L_p(E)} \leqslant \|f\|^{\alpha}_{L_{p_1}(E)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_2}(E)}, \tag{9.1}$$

где $\alpha = \dfrac{1/p - 1/p_2}{1/p_1 - 1/p_2}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. При $p = p_1$ и $p = p_2$ неравенство (9.1) превращается в равенство. Поэтому достаточно доказать его при $p_1 < p < p_2$.

Положим $q_1 = \dfrac{p_1}{\alpha p}$ и $q_2 = \dfrac{p_2}{(1-\alpha)p}$ и заметим, что

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{\alpha p}{p_1} + \frac{(1-\alpha)p}{p_2} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \frac{p}{p_1} + \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \frac{p}{p_2} = \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{p}{p_1 p_2}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} + \frac{\frac{p}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} = 1.$$

Таким образом, показатели q_1 и q_2 сопряжены по Гельдеру.

Пусть $p_2 \neq \infty$. Применяя неравенство Гельдера с q_1 и q_2, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L_p(E)} &= \int_E |f|^p\,dx = \int_E |f|^{\alpha p} |f|^{(1-\alpha)p}\,dx \leqslant \\ &\leqslant \Big(\int_E |f|^{p_1}\,dx\Big)^{\alpha p/p_1} \Big(\int_E |f|^{p_2}\,dx\Big)^{(1-\alpha)p/p_2} = \|f\|^{\alpha p}_{L_{p_1}(E)} \|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_{p_2}(E)}. \end{aligned}$$

Пусть $p_2 = \infty$. Тогда $\alpha = p_1/p$. В этом случае

$$\|f\|^p_{L_p(E)} = \int_E |f|^p\,dx = \int_E |f|^{p_1} |f|^{p-p_1}\,dx \leqslant \|f\|^{p_1}_{L_{p_1}(E)} \|f\|^{p-p_1}_{L_\infty(E)} = \|f\|^{\alpha p}_{L_{p_1}(E)} \|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_\infty(E)}.$$

Теорема доказана.

Связь между пространствами L_p с $1 \leqslant p < \infty$ и пространством L_∞.

Теорема 9.3. *Пусть* $|E| < \infty$ *и* $f \in L_\infty(E)$. *Тогда* $f \in L_p(E)$ *для всех* $1 \leqslant p < \infty$ *и*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

Доказательство. То, что $f \in L_p(E)$ для всех $1 \leqslant p < \infty$, очевидно.

Заметим, что для любого $0 < \varepsilon < \|f\|_{L_\infty(E)}$ существует множество $E_\varepsilon \subset E$ положительной меры такое, что $f > \|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon$ на E_ε. Следовательно

$$(\|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon)|E_\varepsilon|^{1/p} \leqslant \|f\|_{L_p(E)} = \Big(\int\limits_E |f|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L_\infty(E)}|E|^{1/p}.$$

Предельный переход в этом неравенстве при $p \to \infty$ дает

$$\|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} \leqslant \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

В силу произвола в выборе ε отсюда следует, что

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 9.4. *Пусть* $f \in L_p(E)$ *для всех* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\sup\limits_{1 \leqslant p < \infty} \|f\|_{L_p(E)} < \infty$. *Тогда* $f \in L_\infty(E)$.

Доказательство. Предположим, что $f \notin L_\infty(E)$. Тогда для всякого $M > 0$ мера множества $E[|f| > M]$ положительна. Следовательно

$$M(\operatorname{mes} E[|f| > M])^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_E |f|^p \, dx\right)^{1/p} = \|f\|_{L_p(E)} \leqslant \sup_{1 \leqslant p < \infty} \|f\|_{L_p(E)}.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$ в левом неравенстве, имеем

$$M \leqslant \sup_{1 \leqslant p < \infty} \|f\|_{L_p(E)} \quad \forall M > 0,$$

что противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.