№3.3
Д-ть: $A \sim B$, если $A \setminus B \sim B \setminus A$

Д-во: $A \setminus B \sim B \setminus A \Rightarrow \exists$ взаимно однозн. отображение
$f: A \setminus B \to B \setminus A$

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, аналогично $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

В обоих рав-ах есть одинаковые част. Определим следующее отобр.:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A \cap B \\ f(x), & \text{если } x \in A \setminus B \end{cases}$$

№3.14

Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - счётное мн-во, а $B \subset A$ - подмн-во

Тогда построим посл-ть $d_1 d_2, \ldots, d_n, \ldots$, в которой укажем расположение элемента мн-ва A:
$d_n = 1$, если $a_n \in B$
$d_n = 0$, если $a_n \notin B$

$\Rightarrow$ получили число в двоичной системе $x = 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots d_n$,
в нём конечный набор „1" $\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$.

Тогда имеем: мн-ву всех конечных подмножеств мн-ва A поставлено в соотв. бесконечное подмн-во счётного мн-ва.

$\Rightarrow$ мн-во всех конечных подмн-в счётного мн-ва счётно

Ч.т.д.

№3.20

Пусть Φ - мн-во всех числовых функций, определённых на $[a, b]$.

Пусть $A \subset [0,1]$. Сопоставим каждому A характеристическую ф-цию

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Мощность мн-ва из таких ф-ий - гипер мощность гиперконтинуума (2^c)

$\Rightarrow \overline{\overline{\Phi}} \geq 2^c$ (1)

Теперь для каждой ф-ии $f \in \Phi$ поставим в соотв. её график.
Мн-во графиков - подмн-во мн-ва всех подмножеств из $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{\overline{\Phi}} \leq 2^c$ (2)
из (1) и (2) имеем: $\overline{\overline{\Phi}} = 2^c$

№3.21

Заметим, что в $C[a,b]$ содержатся функции вида $y = a$, $a = const$
$\Rightarrow \overline{\overline{C[a,b]}} \geq c$ (1)

Выберем $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл-ть чисел, где $q_n \in \mathbb{Q}$: $q_n \in [a,b]$. Тогда некой ф-ции $f \in C[a,b]$ сопоставляется из её значений: $\{f(q_n)\}_{n=1}^{\infty}$. По этой посл-ти можно однозначно восстановить исходную ф-цию f.

Пусть $x \in [a,b]$. Выберем посл-ть $\{q_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$: если $m \to \infty$, то $q_{n_m} \to x$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} f(q_{n_m}) = f(x)$

$\Rightarrow$ имеем взаим. однозначное соотв. между $C[a,b]$ и подмножеством мн-ва всех посл-тей вещ. чисел $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{\overline{C[a,b]}} \leq c$ (2)

Из (1) и (2) получим: $\overline{\overline{C[a,b]}} = c$.

Ч.Т.Д.

№3.22

Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; A_n имеет мощность континуума.

A получается из объединения $A_n \Rightarrow \overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{A_n}} = c$ (1)

Пусть $A_n' = A_1$, $A_n' = A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k'\right)$, если $n > 1$

Отметим, что мн-ва A_n' друг с другом не имеют пересечений, а $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n'$

Пусть каждому мн-ву A_n взаимно одн. соотв. инт. $(n, n+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ каждому мн-ву A_n' соотв. некое подмн-во интервала $(n, n+1)$, мн-во A, в свою очередь, некое подмн-во $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq c$ (2)

Из (1) и (2): $\overline{\overline{A}} = c$

№3.23

Д-ть: мн-во точек с рац. коорд. счётно.

Д-во: $x = (x_1, \ldots, x_m)$, где $x_i \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq m$.

Если взять $x = (x_1)$, то, очевидно, что мн-во таких точек счётно, т.к. мн-во $\mathbb{Q}$ счётно.

По мере увеличения кол-ва измерений точки "x" будем иметь дело с мн-вом получающимся из декартового произв. мн-ва $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}$: $x = (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow \mathbb{Q}^m = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^m$ получается из декартового произведения $\mathbb{Q}$ - счётных множеств $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^m$ - счётное мн-во.

Тогда мн-ву точек x можно поставить в однозначное соотв. некое мн-во, которое есть подмн-во мн-ва $\mathbb{Q}^m$

$\Rightarrow$ мн-во точек x счётно.