ЗАНЯТИЕ 24 НОЯБРЯ

Домашнее задание на 31 ноября

Задачи 1.4 11)-14), 1.5 – 1.7 из раздела 4.1.

Задачи

1.1. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Проверить следующие свойства преобразования Фурье:

а) $\mathscr{F}[\overline{f}](\xi) = \overline{\mathscr{F}[f]}(-\xi)$;

б) $\mathscr{F}[f(x+a)](\xi) = e^{ia\xi}\mathscr{F}[f](\xi)$;

в) $\mathscr{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \mathscr{F}[f](\xi - a)$;

г) $\mathscr{F}[f(\frac{x}{a})](\xi) = |a|\mathscr{F}[f](a\xi), \quad a \neq 0$;

д) $\mathscr{F}[\cos(ax)f(x)] = \dfrac{1}{2}\big(\mathscr{F}[f](\xi + a) + \mathscr{F}[f](\xi - a)\big)$;

е) $\mathscr{F}[\sin(ax)f(x)] = -\dfrac{1}{2i}\big(\mathscr{F}[f](\xi + a) - \mathscr{F}[f](\xi - a)\big)$.

Решение. а)

$$\mathscr{F}[\overline{f}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,dx} = \overline{\mathscr{F}[f]}(-\xi).$$

б)

$$\mathscr{F}[f(x+a)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+a)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(x-a)\xi}\,dx =$$
$$= e^{ia\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = e^{ia\xi}\mathscr{F}[f](\xi).$$

в)

$$\mathscr{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi-a)}\,dx = \mathscr{F}[f](\xi - a).$$

г)

$$\mathscr{F}[f(\frac{x}{a})](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(\frac{x}{a})e^{-ix\xi}\,dx = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i|a|x\xi}\,dx = |a|\mathscr{F}[f](a\xi).$$

д)

$$\mathscr{F}[\cos(ax)f(x)] = \frac{1}{2}\mathscr{F}[(e^{iax} + e^{-iax})f(x)] = \frac{1}{2}[\mathscr{F}[f](\xi - a) + \mathscr{F}[f](\xi + a)].$$

е)

$$\mathscr{F}[\sin(ax)f(x)] = \frac{1}{2i}\mathscr{F}[(e^{iax} - e^{-iax})f(x)] = \frac{1}{2i}[\mathscr{F}[f](\xi - a) - \mathscr{F}[f](\xi + a)].$$

1.2.а) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция. Доказать, что:

$$\mathscr{F}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] = \operatorname{Re}\mathscr{F}[f], \quad \mathscr{F}\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right] = i\operatorname{Im}\mathscr{F}[f].$$

Решение.

$$\mathscr{F}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}e^{-ix\xi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ix\xi}+e^{ix\xi}}{2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x\xi)\,dx = \operatorname{Re}\mathscr{F}[f](\xi).$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{2}e^{-ix\xi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ix\xi}-e^{ix\xi}}{2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i)\sin(x\xi)\,dx = i\operatorname{Im}\mathscr{F}[f](\xi).$$

Решение. Задача 1.4.1) $f(x) = \chi_a(x)$. Было на лекции

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \cos(x\xi)\, dx = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{\sin a\xi}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} a, & \xi = 0. \end{cases}$$

Задача 1.4.2) $f(x) = \chi_1(x)\mathrm{sgn}(x)$.

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{sgn}(x)\, e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{sgn}(x)(-i\sin(x\xi))\, dx =$$
$$= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{1} \sin(x\xi)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}}\, \dfrac{\cos\xi - 1}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ 0, & \xi = 0. \end{cases}$$

Задача 1.4.3) $f(x) = \mathrm{sgn}(x-b) - \mathrm{sgn}(x-c)$ $(c > b)$.

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{sgn}(x-b) - \mathrm{sgn}(x-c)]\, e^{-ix\xi}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b}^{c} 2e^{-ix\xi}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right)\Bigg|_{b}^{c} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-ic\xi} - e^{-ib\xi}}{\xi}.$$

Ответ

$$\widetilde{f}(\xi) = \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{e^{-ic\xi} - e^{-ib\xi}}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(c-b), & \xi = 0. \end{cases}$$

Задача 1.4.4) $f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2}$. Было на лекции.

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a}e^{-|a|\xi}.$$

Задача 1.4.5) $f(x) = \chi_\pi(x)\sin x$;

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\, e^{-ix\xi}\,dx = -\Big[e^{-ix\xi}\,\cos x\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi} - i\xi\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\, e^{-ix\xi}\,dx =$$
$$= \Big[e^{-i\pi\xi} - e^{i\pi\xi}\Big] - i\xi\Big[e^{-ix\xi}\,\sin x\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \xi^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\, e^{-ix\xi}\,dx =$$
$$= -2i\sin(\pi\xi) + \xi^2\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi)$$

Отсюда при $\xi^2 \neq 1$

$$\sqrt{2\pi}(1-\xi^2)\widetilde{f}(\xi) = -2i\sin(\pi\xi) \Rightarrow \widetilde{f}(\xi) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\pi\xi)}{\xi^2-1}.$$

При $\xi = \pm 1$

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\, e^{-ix}\,dx = -i\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = -i\pi,$$
$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(-1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\, e^{ix}\,dx = i\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = i\pi.$$

Ответ.

$$\widetilde{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin\pi\xi}{\xi^2-1}, & \xi^2 \neq 1, \\ -\dfrac{\sqrt{\pi}i}{\sqrt{2}}, & \xi = -1, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}i}{\sqrt{2}}, & \xi = 1. \end{cases}$$

Можно иначе

$$f(x) = \chi_\pi(x)\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \quad \mathscr{F}[\chi_\pi](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\pi\xi}{\xi}, \quad \xi \neq 0.$$

Поэтому

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}\mathscr{F}[(e^{ix}-e^{-ix})\chi_\pi](\xi) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\pi(\xi-1)}{\xi-1} - \frac{\sin\pi(\xi+1)}{\xi+1}\right] =$$
$$= \frac{-1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\pi\xi}{\xi-1} - \frac{\sin\pi\xi}{\xi+1}\right] = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\pi\xi}{\xi^2-1}, \quad \xi^2 \neq 1.$$

Задача 1.4.6)

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, e^{-ix\xi}\, dx = \Big[\sin x\, e^{-ix\xi}\Big]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + i\xi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, e^{-ix\xi}\, dx =$$

$$= \Big[e^{-i\pi\xi/2} + e^{i\pi\xi/2}\Big] - i\xi\Big[\cos x\, e^{-ix\xi}\Big]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \xi^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, e^{-ix\xi}\, dx =$$

$$= 2\cos(\pi\xi/2) + \xi^2\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi)$$

Отсюда при $\xi^2 \neq 1$

$$\sqrt{2\pi}(1-\xi^2)\widetilde{f}(\xi) = 2\cos(\pi\xi/2) \Rightarrow \widetilde{f}(\xi) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\pi\xi/2)}{\xi^2-1}.$$

При $\xi = \pm 1$

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, e^{\mp ix}\, dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \pi/2$$

Ответ.

$$\widetilde{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\cos(\pi\xi/2)}{\xi^2-1}, & \xi \neq \pm 1, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, & \xi = \pm 1. \end{cases}$$

Иначе

$$f(x) = \chi_{\pi/2}(x)\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \mathscr{F}[\chi_{\pi/2}](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin \pi\xi/2}{\xi}, \quad \xi \neq 0.$$

Поэтому

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}\mathscr{F}[(e^{ix}+e^{-ix})\chi_{\pi/2}](\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin \pi(\xi-1)/2}{\xi-1} + \frac{\sin \pi(\xi+1)/2}{\xi+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{-\cos \pi\xi/2}{\xi-1} + \frac{\cos \pi\xi/2}{\xi+1}\right] = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos \pi\xi/2}{\xi^2-1}, \quad \xi^2 \neq 1.$$

Задача 1.4.7) $f(x) = \chi_{\frac{2\pi n}{\omega}}(t) A \sin \omega t$.

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = A \int\limits_{-2\pi n/\omega}^{2\pi n/\omega} \sin \omega x \; e^{-ix\xi}\, dx = \frac{A}{\omega} \int\limits_{-2\pi n}^{2\pi n} \sin x \; e^{-ix\xi/\omega}\, dx =$$
$$= -\frac{A}{\omega}\Big[\cos x \; e^{-ix\xi/\omega}\Big]\Big|_{-2\pi n}^{2\pi n} - i\xi \frac{A}{\omega^2} \int\limits_{-2\pi n/\omega}^{2\pi n/\omega} \cos x \, e^{-ix\xi/\omega}\, dx =$$
$$= -\frac{A}{\omega}\Big[e^{-i2\pi n\xi/\omega} - e^{i2\pi n\xi/\omega}\Big] + \xi^2 \frac{A}{\omega^3} \int\limits_{-2\pi n}^{2\pi n} \sin x \, e^{-ix\xi/\omega}\, dx =$$
$$= \frac{2Ai}{\omega} \sin(2\pi n\xi/\omega) + \frac{\xi^2}{\omega^2}\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi).$$

Отсюда при $\xi^2 \neq \omega^2$

$$\Big(1 - \frac{\xi^2}{\omega^2}\Big)\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = \frac{2Ai}{\omega} \sin(2\pi n\xi/\omega) \Rightarrow \widetilde{f}(\xi) = \frac{-2A\omega i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(2\pi n\xi/\omega)}{\xi^2 - \omega^2}.$$

При $\xi = \pm\omega$

$$\sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\xi) = A \int\limits_{-2\pi n/\omega}^{2\pi n/\omega} \sin \omega x \; e^{\mp ix\omega}\, dx = \frac{A}{\omega} \int\limits_{-2\pi n}^{2\pi n} \sin x \; e^{\mp ix}\, dx =$$
$$= \frac{\mp Ai}{\omega} \int\limits_{-2\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x \, dx = \frac{\mp 2A\pi n\, i}{\omega}.$$

Задача 1.4.8) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$. Было на лекции

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Задача 1.4.9) $f(x) = e^{-\alpha|x| + i\beta x}$;

Используя формулу

$$\mathscr{F}[e^{i\beta x} f](\xi) = \mathscr{F}[f](\xi - \beta),$$

имеем

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\xi - \beta)^2}.$$

Задача 1.4.10) На лекции было: $f(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow \widetilde{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$.

Поэтому в силу формулы

$$\mathscr{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right](\xi) = |a| \mathscr{F}\left[f(ax)\right](\xi)$$

для $f(x) = e^{-x^2}$ с $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}.$$

8.2. Пусть выполнены условия теоремы 8.6. Указать вид общего решения уравнения (8.1).

Решение. Пусть μ – характеристическое значение интегрального оператора и u_1 – частное решение уравнения

$$u - \mu A u = f.$$

Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_1 + u_0, \quad u_0 \in \operatorname{Ker}(I - \mu A).$$

8.3. г) Найти характеристические значения и собственные функции интегрального оператора $A \in \mathscr{L}(L_2(0,1))$, $Au(x) = \int\limits_0^1 K(x,s)u(s)\,ds$ в следующем случае:
$K(x,s) = x(1-s)$ при $x \leqslant s$ и $K(x,s) = s(1-x)$ при $x > s$.

Решение.

$$\mu\Big[\int\limits_0^x s(1-x)u(s)\,ds + \int\limits_x^1 x(1-s)u(s)\,ds\Big] = u(x).$$

Заметим, что $u \in C[0,1]$ и поэтому $u \in C^1[0,1]$, причем $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.
Дифференцируя уравнение, имеем

$$\mu\Big[-\int\limits_0^x su(s)\,ds + \int\limits_x^1 (1-s)u(s)\,ds\Big] = u'(x).$$

Из этого равенства видно, что $u \in C^2[0,1]$.
Дифференцируя еще раз, имеем

$$-\mu u(x) = u''(x).$$

Таким образом, μ и u – собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{gathered} -u''(x) = \mu u(x), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{gathered}$$