ГЛАВА 9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1 Линейные операторы

Пусть X, Y – линейные пространства (оба вещественные или комплексные).

Опр. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором*, если справедливо равенство

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X, \quad \forall\, \lambda, \mu.$$

Образом оператора A называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{y = Ax \mid x \in X\},$$

которое обозначается также через $R(A)$.

Множество

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$$

называется *ядром оператора* A и обозначается также через $N(A)$.

Теорема 1.1. *Для линейного оператора A его ядро $\operatorname{Ker} A$ и образ $\operatorname{Im} A$ являются линейными многообразиями.*

Опр. Если $Ax = 0$ для всех $x \in X$, то оператор A называется *нулевым оператором* и обозначается через 0.

Опр. Оператор A называется *конечномерным*, если его образ $\operatorname{Im} A$ конечномерен.

Опр. Линейный оператор $A : X \to X$ называется *линейным преобразованием пространства* X.

Опр. Линейное преобразование A такое, что

$$Ax = x \quad \forall\, x \in X,$$

называется *единичным* или *тождественным оператором* и обычно обозначается через I (или E).

Примеры линейных операторов.

1. Умножение матрицы A на вектор $x \in \mathbb{R}^m$ или вектор $x \in \mathbb{C}^m$.

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n.$$

2. Оператор дифференцирования $Du(x) = u'(x)$.

$$D : C^1[a,b] \to C[a,b], \quad D : C^n[a,b] \to C^{n-1}[a,b].$$

3. Оператор интегрирования $Ax = \int\limits_a^b x(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad A : L_1(a,b) \to \mathbb{R}.$$

4. Оператор интегрирования с переменным верхним пределом $Ax(t) = \int\limits_a^t x(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to C^1[a,b], \quad A : L_1(a,b) \to C[a,b].$$

5. Интегральный оператор $Au(x) = \int\limits_a^b K(x,s)u(s)\,ds$.

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad A : L_2(a,b) \to L_2(a,b).$$

Опр. Пусть X, Y, Z – линейные пространства, все вещественные или все комплексные.

Пусть $A : X \to Y$, $B : X \to Y$, $C : Y \to Z$ – линейные операторы.

Сумма операторов, произведение оператора на число и произведение операторов определяются формулами

$$\begin{aligned}
&(A + B)x = Ax + Bx, \\
&(\lambda A)x = \lambda(Ax), \\
&(CA)x = C(Ax)
\end{aligned}$$

для всех $x \in X$.

Опр. Всюду далее X, Y – нормированные пространства.

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax_0.$$

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным*, если он непрерывен во всех точках $x_0 \in X$.

Теорема 1.2. *Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в точке $x_0 = 0$.*

Опр. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если он каждое ограниченное множество переводит в ограниченное множество.

Теорема 1.3. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ его ограниченность эквивалентна выполнению каждого из следующих двух свойств.*

1. Справедливо неравенство

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \quad \forall\, x \in X \tag{1.1}$$

с некоторой постоянной $c \geqslant 0$, не зависящей от x.

2. Оператор A переводит единичную сферу $S = \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$ в ограниченное множество.

Для ограниченных линейных операторов и только для них конечна величина

$$\|A\| = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \tag{1.2}$$

называемая *нормой оператора A*.

Замечание 1.2. Из определения нормы оператора следует, что

$$\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \|x\|_X \quad \forall\, x \in X. \tag{1.3}$$

Таким образом $\|A\|$ является минимальной из постоянных c, для которых выполнено неравенство (1.1).

Теорема 1.4. *Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Обозначим через $\mathscr{L}(X,Y)$ множество всех ограниченных линейных операторов $A: X \to Y$. В случае $X = Y$ положим для краткости $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X,X)$.

Утверждение 1.1. Множество $\mathscr{L}(X,Y)$ является нормированным пространством, в котором норма оператора A вводится следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Теорема 1.5. *Пусть Y – банахово пространство. Тогда $\mathscr{L}(X,Y)$ – банахово пространство.*

2 Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема 2.1. *(Теорема Банаха-Штейнгауза или принцип равномерной ограниченности)*

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X, Y)$, *где* X *– банахово пространство.*

Если $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|A_n x\|_Y < \infty$ *для каждого* $x \in X$, *то* $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|A_n\| < \infty$.

3 Обратный оператор

Опр. Пусть X, Y – линейные пространства. Оператор A, действующий из $D(A) \subset X$ в Y, называется *обратимым*, если для каждого $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный его прообраз $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$.

Если A обратим, то оператор, ставящий в соответствие элементу $y \in \operatorname{Im} A$ его прообраз x, называется *обратным* к A и обозначается через A^{-1}.

Теорема 3.1. *Обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} A = O$.

Теорема 3.2. *Оператор A^{-1}, обратный к линейному оператору A, также линеен.*

Теорема 3.3. *Пусть X, Y – нормированные пространства. Для того, чтобы линейный оператор A, действующий из X на Y, имел непрерывный обратный, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $m > 0$ такая, что*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Опр. Говорят, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\operatorname{Im} A = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

Теорема 3.4. *(Теорема Банаха об обратном операторе)*
Пусть $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, где X, Y – банаховы пространства, причем $\operatorname{Im} A = Y$. Если оператор A обратим, то $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$.

Теорема 3.5. *Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$, где X – банахово пространство, и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I - A)^{-1}$ существует, ограничен и представляется рядом Неймана*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$