3 Преобразование Фурье функций из пространства $S^\infty(\mathbb{R})$

Опр. Введем класс быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций $S^\infty(\mathbb{R})$ как множество таких функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которых

$$M_{n,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^k f^{(n)}(x)\right| < \infty \quad \forall\, k \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Как следствие,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M_{n,k}}{|x|^k} \quad \forall\, |x| \geqslant 1, \quad \forall\, k \geqslant 0,\ n \geqslant 0,$$

то есть функция f и все ее производные убывают не бесконечности бустрее любой степени x.

Примером функции из пространства $S^\infty(\mathbb{R})$ является $f(x) = e^{-x^2/2}$.

Ясно также, что

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S^\infty(\mathbb{R}).$$

Заметим, что

$$f \in S^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow x^k f^{(n)}(x) \in L_1(\mathbb{R}) \qquad \forall\, k \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Действительно,

$$\left|x^{k+2} f^{(n)}(x)\right| \leqslant M_{n,k+2} \quad \forall\,|x| \geqslant 1 \Rightarrow \left|x^k f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{M_{n,k+2}}{x^2} \quad \forall\,|x| \geqslant 1.$$

Таким образом, $\widetilde{f}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Теорема 3.1. *Оператор Фурье $\mathscr{F}$ является взаимно однозначным отображением $S^\infty(\mathbb{R})$ на $S^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $f \in S^\infty(\mathbb{R})$. Напомним, что

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}\big[(-ix)^n f\big](\xi),$$
$$(i\xi)^k \frac{d^n}{d\xi^n}\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}\big[((-ix)^n f)^{(k)}\big](\xi)$$

Функции $\xi^k \dfrac{d^n}{d\xi^n}\mathscr{F}[f](\xi)$ ограничены для всех k и n $\Rightarrow \mathscr{F}[f] \in S^\infty(\mathbb{R})$.

Возьмем теперь $g \in S^\infty(\mathbb{R})$ и положим $f(x) = \mathscr{F}^{-1}[g](x) = \mathscr{F}[g](-x)$. Ясно, что $f \in S^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathscr{F}[f] = g$. Действительно,

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}[g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{iyx}\,dy\Big]e^{-i\xi x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iyx}\,dy\Big]e^{i\xi x}\,dx = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[g](\xi) = g(\xi).$$

(Мы сделали замену переменных $x \to -x$.)

Осталось заметить, что в силу следствия 2.2 имеем $\operatorname{Ker}\mathscr{F} = 0$, то есть $\mathscr{F}[f] \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Теорема доказана.