№2.6

f^3 - изм. на $E \Rightarrow E[f^3 > a^3]$ - измеримо

$f^3 > a^3 \Rightarrow f > a$

$E[f^3 > a^3] = E[f > a] \Rightarrow E[f > a]$ - измеримо $\Rightarrow f$ изм. на E.

ч.т.д.

№2.8

$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$; $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

f, g - измеримы $\Rightarrow E[f > a], E[g > a]$ - измеримы

Заметим: $\left.\begin{array}{l} E[m > a] = E[f > a] \cap E[g > a] \\ E[M > a] = E[f > a] \cup E[g > a] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow E[m > a], E[M > a]$ - измеримы $\Rightarrow m, M$ - измеримы ч.т.д.

№2.9

$[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$[a, b] = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i]\right) \cup \{a\} \cup \{b\}$, где $a < \alpha_i < \beta_i < b$

f - изм. на $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b) \Rightarrow$ изм. на $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i]$, на $\{a\}$ и $\{b\}$, т.к. $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$.

Тогда f - изм. на $[a, b]$.

ч.т.д.

№2.10

Пусть g - изм. $\Rightarrow E[g > a]$ - изм.

$\left.\begin{array}{l} E[f > a] = \left[E[f = g] \cap E[g > a]\right] \cup \left[E[f > a] \cap E[f \neq g]\right] \\ \mu(E[f \neq g]) = 0 \Rightarrow E[f = g] = E \setminus E[f \neq g] \text{ - измеримо} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow E[f > a]$ - изм. $\Rightarrow f$ - изм.

ч.т.д.

№2.16

φ - изм. на $E \Rightarrow E[\varphi > a]$ - изм. ; $E_1 \supset \varphi(E)$

f - непр $\Rightarrow E_1[f > a]$ - откр $\Rightarrow E_1[f > a] = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$

Тогда $E[f(\varphi) > a] = \bigcup\limits_k E[a_k < \varphi < b_k]$ - изм. $\Rightarrow f(\varphi)$ - изм.

ч.т.д.

№2.11

Пусть $g(x) = x^3$; g - измерима, т.к. $E[g > a] = \{x \in [0, 1] \mid x^3 > a\} = [0, 1] \cap (a^{1/3}, \infty)$.

$E_{пер}$ - мн-во пересечений $\Rightarrow E_{пер} = K \cap E \Rightarrow \mu(E_{пер}) = 0$.

Тогда f и g - эквивалентные ф-ии $\Rightarrow f$ - измерима.

ч.т.д.

№2.12

$f(x)$ имеет $f'(x)$ в $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ - непр. на $[a, b] \Rightarrow$ f - измерима на $[a, b]$.

$g(x) = \dfrac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$: $h_n = \dfrac{b-a}{n+1}$ - непр. на $[a, b-h_n] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ измерима на нём

$f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$ $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ - изм. на $[a, b) \Rightarrow$ изм. на $[a, b]$.

ч.т.д.

№2.7

Рассмотрим неизм. мн-во $E \subset [0,1]$. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \in [0,1] \setminus E \end{cases}$

Тогда $\{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\} = E$ - неизм, т.к. не всегда выполняется условие

$f^2(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$\{x \in [0,1] \mid f^2(x) = 1 > a\} = \begin{cases} [0,1], & \text{если } a < 1 \\ \varnothing, & \text{если } a \geq 1 \end{cases} = E_1$ - измеримо

$\Rightarrow$ из изм. f^2 не следует изм. f.

№2.13

1) Пусть E - неизм.

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \complement E \end{cases} \Rightarrow E[\chi_E > 0] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \chi_E(x) > 0\} = E$

$\Rightarrow E[\chi_E > 0]$ - неизм $\Rightarrow \chi_E$ - неизм.

2) Пусть E - изм

$E[\chi_E > 0] = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^m, & \text{если } a < 0 \\ E, & \text{если } 0 \leq a < 1 \\ \varnothing, & \text{если } a \geq 1 \end{cases}$

E - изм; $\varnothing$ - изм; $\mathbb{R}^m$ - изм $\Rightarrow$

$E[\chi_E > 0]$ - изм $\Rightarrow \chi_E$ - изм.

ч.т.д.