ЗАНЯТИЕ 3 ДЕКАБРЯ

Домашнее задание к 10 декабря.

Задачи 1.8, 1.9, 1.10.

1.4. Найти преобразование Фурье следующих функций

11) $f(x) = xe^{-x^2}$; 12) $f(x) = xe^{-\alpha|x|}$;

13) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$; 14) $f(x) = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right)\chi_a(x)$.

Решение 1.4 11) $f(x) = xe^{-x^2}$.

Заметим, что $f(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}e^{-x^2}$. Поэтому

$$\mathscr{F}[f](\xi) = -\frac{1}{2}\mathscr{F}\left[\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right](\xi) = -\frac{1}{2}(i\xi)\mathscr{F}[e^{-x^2}] = \frac{-i\xi}{2\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}.$$

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{i\xi}{2\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}.$$

Другое решение.

Известно, что для $g = e^{-x^2}$ имеем $\mathscr{F}[g](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}$. Учитывая, что $f(x) = xg(x)$, имеем

$$-i\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}[-ixg](\xi) = \frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{d\xi}e^{-\xi^2/4} = \frac{-\xi}{2\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}.$$

Отсюда

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{-i\xi}{2\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}$$

Решение. 1.4 12)

Известно, что для $g = e^{-\alpha x}$ имеем $\mathscr{F}[g](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2}$.

Учитывая, что $f(x) = xg(x)$, имеем

$$-i\mathscr{F}[f](\xi) = \mathscr{F}[-ixg](\xi) = \frac{d}{d\xi}\mathscr{F}[g](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\xi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2\alpha\xi}{(\alpha^2+\xi^2)}.$$

Отсюда

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2i\alpha\xi}{(\alpha^2+\xi^2)}.$$

Решение. 1.4 13) Для $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$; имеем

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha + i\xi}.$$

Решение. 1.4 14) Для $f(x) = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right)\chi_a(x)$ имеем

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(a\xi) - 1}{a^2\xi^2}.$$

Решение. 1.5 1)

$$f(x) = \chi_a(x), \quad \widetilde{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a\xi}{\xi}.$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\widetilde{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a\xi}{\xi} e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi}\cos(x\xi)\,d\xi$$

Формула обращения

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi}\cos(x\xi)\,d\xi = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = a. \end{cases}$$

Решение. 1.5 2)

$$f(x) = \chi_1(x)\mathrm{sgn}(x), \quad \widetilde{f}(\xi) = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\cos\xi - 1}{\xi}.$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\widetilde{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\cos\xi - 1}{\xi} e^{ix\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{i}{\pi} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\xi - 1}{\xi}[\cos(x\xi) + i\sin(x\xi)]\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos\xi}{\xi}\sin(x\xi)\, d\xi.$$

Формула обращения

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos\xi}{\xi}\sin(x\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1, \quad 0 < x < 1, \\ -1, \quad -1 < x < 0, \\ 0, \quad x = 0,\ |x| > 1, \\ 1/2, \quad x = 1, \\ -1/2, \quad x = -1. \end{cases}$$

Решение. 1.5 3)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x-b) - \operatorname{sgn}(x-c), \quad \widetilde{f}(\xi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-ic\xi} - e^{-ib\xi}}{\xi}.$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\widetilde{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-ic\xi} - e^{-ib\xi}}{\xi} e^{ix\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{i}{\pi} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(c-x)\xi} - e^{-i(b-x)\xi}}{\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(c-x)\xi - \sin(b-x)\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(c-b)\xi}{2}\cos\frac{(c+b-2x)\xi}{2}}{\xi}\, d\xi.$$

Формула обращения

$$\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(c-b)\xi}{2}\cos\frac{(c+b-2x)\xi}{2}}{\xi}\, d\xi = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, b) \cup (c, \infty), \\ 1, & x = b, x = c, \\ 2, & x \in (b, c). \end{cases}$$

Решение. 1.5 4)

$$f(x)=\frac{1}{a^2+x^2},\quad \widetilde{f}(\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a}e^{-|a|\xi}.$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\widetilde{f}](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a}e^{-|a|\xi}e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-|a|\xi}\cos(x\xi)\,d\xi.$$

Формула обращения

$$\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-|a|\xi}\cos(x\xi)\,d\xi=\frac{1}{a^2+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

1.6. Найти функцию φ такую, что:

1) $\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)\cos x\xi\, d\xi = \dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)\sin x\xi\, d\xi = e^{-x}$ при $x > 0$.

Решение. 1). Известно, что для $f = e^{-|x|}$ имеем $\widetilde{f}(\xi) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{1+\xi^2}$. Поэтому

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}\, dx = 2\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos(\xi x)\, dx = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\cos(x\xi)\, d\xi = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \varphi(x) = e^{-x}.$$

Решение. 2). Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ -e^{-|x|}, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sign\, x\, e^{-|x|} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin(x\xi)\, dx$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin(x\xi)\, dx = -e^{-x} \sin(x\xi)|_0^\infty + \xi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \cos(x\xi)\, dx =$$

$$= -\xi e^{-x} \cos(x\xi)|_0^\infty - \xi^2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin(x\xi)\, dx$$

Отсюда

$$\widetilde{f}(\xi) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \sin(x\xi)\, dx = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi}{1+\xi^2}.$$

В силу формулы обращения

$$\mathscr{F}^{-1}[\widetilde{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi}{1+\xi^2} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi^2} \sin(x\xi)\, d\xi = sign\, x\, e^{-|x|}.$$

Таким образом

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi^2} \sin(x\xi)\, d\xi = e^{-x} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Следовательно

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{1+x^2}$$

1.7. Пусть $f \in C^\alpha[a,b]$, $\alpha \in (0,1)$ (см. параграф 2.5, задача 5.2). Показать, что f в каждой точке $x \in (a,b)$ удовлетворяет условию Дини.

Решение. По условию

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant C|t|^\alpha \quad \forall\, x, x+t \in [a,b].$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \leqslant C \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, dt < \infty$$

для $0 < \delta < \min\{x-a, b-x\}$.