Сходимость по мере

Определение. Пусть $f \in \mathfrak{M}(E)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E)$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* f *по мере на* E, для любого $\delta > 0$ если

$$\operatorname{meas} E\left[|f_n - f| > \delta\right] \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

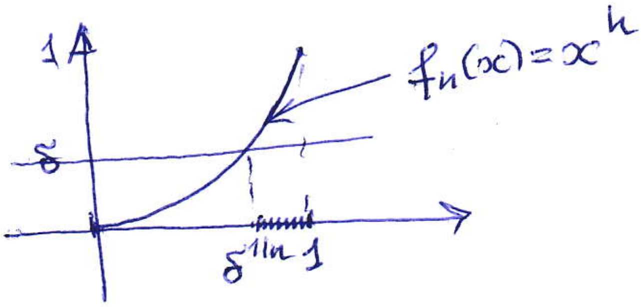
Таким образом, $f_n \to f$ по мере на E тогда и только тогда, когда для всякого $\delta > 0$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\operatorname{meas} E\left[|f_n - f| > \delta\right] < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N.$$

Пример 1. Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to 0$ по мере, так как

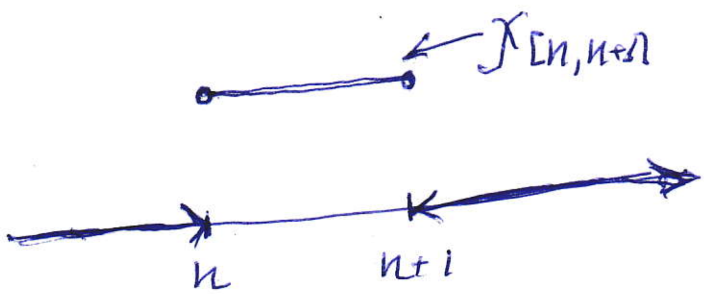
$$E[|f_n - 0| > \delta] = E[|f_n| > \delta] = \begin{cases} (\delta^{1/n}, 1], & 0 < \delta < 1, \\ \emptyset, & 1 \leqslant \delta \end{cases}$$

и $\operatorname{meas} E\left[|f_n - 0| > \delta\right] = 1 - \delta^n \to 0$ при $n \to \infty$.



Пример 2. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Тогда $f_n(x) \to 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, но $f_n \not\to 0$ по мере, так как

$$\operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \delta\} = 1 \not\to 0 \quad \text{для} \quad 0 < \delta < 1.$$



Пример 3. **("Бегающая ступенька")** Пусть $E = [0, 1]$ и $f_n = \chi_{[a_n, b_n]}$, где

$$[a_1, b_1] = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad [a_3, b_3] = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad [a_4, b_4] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],$$

$$[a_5, b_5] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad [a_6, b_6] = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \quad [a_7, b_7] = \left[0, \frac{1}{8}\right], \quad [a_8, b_8] = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \ldots.$$

Эта последовательность не сходится ни в одной точке, но сходится к нулю по мере.