4 Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега

Теорема 4.1. *(Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.)*
Пусть $f \in L(E)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \int\limits_e f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества $e \subset E$ такого, что $|e| < \delta(\varepsilon)$.

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $M = M(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_{E \setminus E_M} |f|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_{E_M} \big(|f| - [|f|]_N\big)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3N(\varepsilon)}$. Пусть $e \subset E$ – произвольное измеримое множество такое, что $|e| < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_e f\,dx \right| &\leqslant \int\limits_e |f|\,dx \leqslant \int\limits_{e \setminus E_M} |f|\,dx + \int\limits_{e \cap E_M} |f|\,dx \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{E \setminus E_M} |f|\,dx + \int\limits_{E_M} \big(|f| - [|f|]_N\big)\,dx + \int\limits_{e \cap E_M} [|f|]_N\,dx < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + N(\varepsilon)|e| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4.2. *(Теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега.)*

Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, *где* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– семейство попарно непересекающихся измеримых множеств.*

а) Если $f \in L(E)$, *то* $f \in L(E_k)$ *для всех* $k \geqslant 1$, *причем*

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

б) Если $f \in L(E_k)$ *для всех* $k \geqslant 1$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|\,dx$, *то* $f \in L(E)$ *и справедливо равенство (4.1).*

Доказательство. а). Так как $E = E_k \cup (E \setminus E_k)$, то из $f \in L(E)$ следует, что $f \in L(E_k)$ для всех $k \geqslant 1$.

Положим $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$.

В силу аддитивности интеграла Лебега

$$\int\limits_{E} f\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f\,dx + \int\limits_{R_n} f\,dx.$$

Равенство (4.1) будет установлено, если мы покажем, что $\int\limits_{R_n} f\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $M = M(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{E\setminus B_M} |f|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $R_{n,M} = R_n \cap B_M(0)$. При фиксированном M последовательность $\{R_{n,M}\}_{n=1}^{\infty}$ представляет собой невозрастающую последовательность множеств конечной меры, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,M} = \emptyset$. Следовательно $|R_{n,M}| \to 0$ при $n \to \infty$.

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\Big|\int\limits_{R_{n,M}} f\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon).$$

Из равенства

$$\int\limits_{R_n} f\,dx = \int\limits_{R_{n,M}} f\,dx + \int\limits_{R_n\setminus B_M} f\,dx$$

следует, что

$$\Big|\int\limits_{R_n} f\,dx\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{R_{n,M}} f\,dx\Big| + \int\limits_{E\setminus B_M} |f|\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon).$$

б). Пусть $f \in L(E_k)$ для всех $k \geqslant 1$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|\, dx$. Тогда для всех $M > 0$ и $N > 0$

$$\int\limits_{E \cap B_M} [|f|]_N \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k \cap B_M} [|f|]_N \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f| \, dx.$$

Поэтому

$$\int\limits_{E} |f| \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f| \, dx < \infty.$$

Следовательно $f \in L(E)$.

Теорема доказана.