ЗАНЯТИЕ 10 ДЕКАБРЯ

Домашнее задание на 17 декабря

Задача 4.1 (для случая $m = 1$), 4.2, 4.3.

Теорема 0.1. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *и существуют такие постоянные* f_+, f_-, *что при некотором* $\delta > 0$ *выполнены условия*

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f_+|}{t} dt < +\infty, \quad \int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f_-|}{t} dt < +\infty.$$

Тогда

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x_0) = \frac{1}{2}(f_- + f_+).$$

Как следствие, для кусочно-дифференцируемой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f]](x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$S_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \widetilde{f}(\xi) e^{ix_0\xi}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right] e^{ix_0\xi}\, d\xi \to \frac{f_- + f_+}{2} \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Заметим, что

$$S_A = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t}\, dt = S_A^- + S_A^+,$$

где

$$S_A^- = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t}\, dt, \quad S_A^+ = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(x_0+t) \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$S_A^- \to \frac{f_-}{2}, \quad S_A^+ \to \frac{f_+}{2} \quad \text{при} \quad A \to \infty.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \pi \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin At}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$S_A^- - \frac{f_-}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\Big[f(x_0+t) - f_-\Big]\frac{\sin At}{t}dt = I_1^- + I_2^- + I_3^-,$$

$$S_A^+ - \frac{f_+}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[f(x_0+t) - f_+\Big]\frac{\sin At}{t}dt = I_1^+ + I_2^+ + I_3^+,$$

где

$$I_1^- = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{0}[f(x_0+t) - f_-]\frac{\sin At}{t}dt,$$

$$I_2^- = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-N} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt, \qquad I_3 = \frac{f_-}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-N}\frac{\sin At}{t}dt.$$

$$I_1^+ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{N}[f(x_0+t) - f_+]\frac{\sin At}{t}dt,$$

$$I_2^+ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{N}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt, \qquad I_3^+ = \frac{f_+}{\pi}\int\limits_{N}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt.$$

Интегралы I_2^- и I_3^- могут быть сделаны сколь угодно малыми равномерно по $A \geqslant 1$ выбором N.

$$|I_2^-| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-N}|f(x_0+t)|\frac{\sin At}{t}dt \leqslant \frac{1}{\pi N}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} < \varepsilon/3 \quad \text{для} \quad N \geqslant N(\varepsilon),$$

$$|I_3^-| = \frac{|f_-|}{\pi}\Big|\int\limits_{-\infty}^{N}\frac{\sin At}{t}dt\Big| = \frac{|f_-|}{\pi}\Big|\int\limits_{-\infty}^{-AN}\frac{\sin t}{t}dt\Big| < \varepsilon/3 \quad \text{для} \quad N \geqslant N(\varepsilon),\ A \geqslant 1.$$

Фиксируем $N = N(\varepsilon)$ и введем функцию

$$g_-(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{f(x_0+t) - f_-}{t} & t \in (-N, 0), \\ 0 & t \in \mathbb{R} \setminus (-N, 0). \end{cases}$$

В силу условий теоремы $g_- \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому

$$I_1^- = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{0}[f(x_0+t)-f_-]\frac{\sin At}{t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_-(t)\sin At\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_-(t)\frac{e^{iAt}-e^{-iAt}}{2i}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\big(\mathscr{F}[g_-](-A) - \mathscr{F}[g_-](A)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad A\to\infty.$$

Следовательно существует $A(\varepsilon)$ такое, что

$$|I_1^-| < \varepsilon/3 \quad \text{при} \quad A \geqslant A(\varepsilon).$$

Окончательно

$$|S_A^- - f_-| \leqslant |I_1^-| + |I_2^-| + |I_3^-| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \quad \text{при} \quad A \geqslant A(\varepsilon).$$

Следовательно $\lim\limits_{A\to\infty} S_A^- = \dfrac{f_-}{2}$.

Аналогично доказыватися, что $\lim\limits_{A\to\infty} S_A^+ = \dfrac{f_+}{2}$.

1.9. Указать достаточные условия на f, при которых справедлива формула

$$\mathscr{F}\Big[\int\limits_a^x f(t)dt\Big](\xi) = (i\xi)^{-1}\mathscr{F}[f](\xi), \quad \xi \neq 0$$

с каким-либо $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Для $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ в случае $f \in C(\mathbb{R})$ справедливо равенство $g'(x) = f(x)$.

Если $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $g' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\mathscr{F}[g'](\xi) = (i\xi)\mathscr{F}[g](\xi).$$

Взяв $g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, получим

$$\mathscr{F}[f](\xi) = (i\xi)\mathscr{F}\Big[\int\limits_a^x f(t)dt\Big](\xi).$$

Ответ. $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ и $\int\limits_a^x f(t)\,dt \in L_1(\mathbb{R})$.

1.10. Пусть P_n - многочлен степени не выше n с комплексными коэффициентами. Показать, что:

а) если $(1+|x|^n)f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$P_n\left(\frac{d}{d\xi}\right) F[f] = \mathscr{F}[P_n(-ix)f(x)];$$

б) если $f, f', ..., f^{(n)} \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то

$$\mathscr{F}[P_n(\frac{d}{dx})f](\xi) = P_n(i\xi)\mathscr{F}[f](\xi).$$

Решение. Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Тогда

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right) = a_0I + a_1\frac{d}{dx} + a_2\frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n\frac{d^n}{dx^n}.$$

а)

$$P_n\left(\frac{d}{d\xi}\right) F[f] = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{d\xi^k} F[f] = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{F}[(-ix)^k f] = \mathscr{F}[P_n(-ix)f].$$

б)

$$\mathscr{F}\left[P_n\left(\frac{d}{dx}\right)f\right](\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{F}\left[\frac{d^k}{dx^k}f\right](\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k (i\xi)^k \mathscr{F}[f](\xi) = P_n(i\xi)\mathscr{F}[f](\xi).$$