6 Теорема Рисса-Фишера

Лемма 6.1. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *- ортонормированная система в евклидовом (унитарном) пространстве и* $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. *Тогда* $c_k = (f, e_k)$.

Доказательство. По условию $S_N = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j e_j \to f$. Поэтому

$$(f, e_k) = \lim_{N\to\infty} (S_N, e_k) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e_j, e_k \right) = \lim_{N\to\infty} c_k = c_k.$$

Лемма доказана.

Теорема 6.1. *(Теорема Рисса-Фишера) Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормированная система в* H *и* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ *(то есть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ *сходится).*

Тогда существует такой элемент $g \in H$, *что*

$$c_k = (g, e_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|^2.$$

Доказательство. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N, \quad \forall\, p \geqslant 1. \tag{6.1}$$

Поэтому последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Значит, существует элемент

$$g = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

В силу леммы 6.1 $c_k = (g, e_k)$. Равенство Парсеваля для g дает $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|g\|^2$.

Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - *ортонормированная система в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для всякого элемента* $f \in H$ *его ряд Фурье* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k$ *сходится к некоторому элементу* $g \in H$, *причем*

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2. \tag{6.2}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует, что $\{(f, e_k)\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$.

Поэтому в силу теоремы Рисса-Фишера существует элемент $g \in H$ такой, что

$$g = \sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k = \lim_{N\to\infty} S_N(f).$$

Переходя к пределу в равенстве

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, e_k)|^2,$$

приходим к равенству (6.2).

Следствие доказано.

Следствие 6.2. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортонормированная система в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для* $f \in H$ *элемент* $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k$ *является ортогональной проекцией* f *на* $L = [\mathrm{span}(\{e_k\}_{k=1}^{\infty})]$.

Доказательство. Достаточно увидеть, что $h = f - g \perp L$. Это действительно так, поскольку

$$(h, e_k) = (f, e_k) - (g, e_k) = 0 \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Значит

$$\left(h, \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\right) = \lim_{N\to\infty} \left(h, \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \overline{c}_k (h, e_k) = 0.$$