Домашнее задание №8

(2) Д-ть: $u(x) = \int_0^1 (x-s)^2 \sin u(s)\,ds + e^x$ имеет ! реш. $u \in C[0,1]$

Д-во: П. $Au(x) = \int_0^1 (x-s)^2 \sin u(s)\,ds + e^x \Rightarrow A: C[0,1] \to C[0,1]$

$$\|Au - Av\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 (x-s)^2 \sin u(s)\,ds - \int_0^1 (x-s)^2 \sin v(s)\,ds \right| =$$

$$= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 (x-s)^2 (\sin u(s) - \sin v(s))\,ds \right| \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |x-s|^2 |\sin u(s) - \sin v(s)|\,ds$$

$$\le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |x-s|^2 |u-v|\,ds \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 (x-s)^2\,ds\, \|u-v\|_{C[0,1]} =$$

$$= \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 (x^2 - 2xs + s^2)\,ds \cdot \|u-v\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} \left(x^2 s - xs^2 + \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 \right) \|u-v\|_{C[0,1]}$$

$$= \max_{x\in[0,1]} \left(x^2 - x + \frac{1}{3} \right) \|u-v\|_{C[0,1]} = \frac{1}{3} \|u-v\|_{C[0,1]} \Rightarrow \exists \text{ решение и}$$

оно !

ЧТД.

(3) Д-ть: $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\sin^2(x-y) + 1 \\ y = \frac{1}{4}\cos^2(x+y) + 2 \end{cases}$ имеет ! решение.

Д-во: П. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \quad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin^2(x-y) + 1 \\ \frac{1}{4}\cos^2(x+y) + 2 \end{pmatrix}$

$$\rho\left(\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}(\sin^2(x-y) - \sin^2(u-v)) \\ \frac{1}{4}(\cos^2(x+y) - \cos^2(u+v)) \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}(\sin^2(x-y) - \sin^2(u-v)) \\ \frac{1}{4}(\cos^2(x+y) - \cos^2(u+v)) \end{matrix} \right\|_1 =$$

$$= \left| \frac{1}{3}\sin^2(x-y) - \frac{1}{3}\sin^2(u-v) \right| + \left| \frac{1}{4}\cos^2(x+y) - \frac{1}{4}\cos^2(u+v) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{3} \Big| (\sin(x-y) - \sin(u-v))(\sin(x-y) + \sin(u-v)) \Big| + \Big| (\cos(x+y) - \cos(u+v))(\cos(x+y) + \cos(u+v)) \Big|$$

$$\le \frac{1}{3} \left| 2 \sin\frac{x-y-u+v}{2} \cdot \cos\frac{x-y+u-v}{2} \right| \cdot \left| 2\sin\frac{x-y+u-v}{2} \cdot \cos\frac{x-y-u+v}{2} \right| + \frac{1}{3} \left| 2\sin\frac{x+y+u+v}{2} \cdot \sin\frac{x+y-u-v}{2} \right| \cdot$$

$$+ \left| 2\cos\frac{x+y+u+v}{2} \cdot \cos\frac{x+y-u-v}{2} \right| = \frac{1}{3} |\sin(x-y-u+v) \cdot \sin(x-y+u-v)| + \frac{1}{3} |\sin(x+y+u+v)$$

$$\cdot \sin(x+y-u-v)| \le \frac{1}{3} |\sin(x-y-u+v)| + \frac{1}{3} |\sin(x+y-u-v)| \le \frac{1}{3} |x-y-u+v| +$$

$$+ \frac{1}{3} |x+y-u-v| \le \frac{1}{3}|x-u| + \frac{1}{3}|v-y| + \frac{1}{3}|x-u| + \frac{1}{3}|y-v| = \frac{2}{3}|x-u| + \frac{2}{3}|y-v| =$$

$$= \frac{2}{3}(|x-u| + |y-v|) = \frac{2}{3} \left\| \begin{matrix} x-u \\ y-v \end{matrix} \right\|_1 = \frac{2}{3} \rho\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \text{по принципу}$$

сжим. отобр. $\exists$! решение

ЧТД.

• Д-ть: ур-ие Вольтерра имеет ! решение $\forall L$ и $\forall [t_0, T]$

Д-во: Π $|K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s))| \le L|u - v|$

$Au(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))ds + f(t)$

$|Au(t) - Av(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}[K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s))]ds\right| \le \int_{t_0}^{t}|K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s))|ds$

$\le L\int_{t_0}^{t}|u(s)-v(s)|ds \le L\|u-v\|_{C[0,1]}\int_{t_0}^{t}ds = L(t-t_0)\|u-v\|_{C[0,1]}$ $(*)$

$|A^2u(t) - A^2v(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}[K(t,s,Au(s)) - K(t,s,Av(s))]ds\right| \le L\int_{t_0}^{t}|Au(s)-Av(s)|ds \le$

$\le$ {в силу $(*)$} $\le L^2\|u-v\|_{C[0,1]}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)ds = \frac{1}{2}L^2(t-t_0)^2\|u-v\|_{C[0,1]}$ => если продолжим делать такие оценки, то получим:

$|A^nu(t) - A^nv(t)| \le \frac{L^n(t-t_0)^n}{n!}\|u-v\|_{C[0,1]}$ => при больших n $\frac{L^n(t-t_0)^n}{n!} < 1$

=> A^n - сжимающее => $\exists!$ решение ур-ие Вольтерра.

ЧтД.

① Д-ть: при $\sum_{j\ne i}|a_{ij}| \le \theta|a_{ii}|$ $\forall i \ge 1$, $\theta < 1$ существует решение

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \quad i \in \mathbb{N}$$

Д-во: $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \iff \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i \in \mathbb{N}$ и $a_{ii} \ne 0$

Π $A\vec{x} = B\vec{x} + C$ => $\rho(Ax_1, Ax_2) = \max_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_{1j} - \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_{2j} + \frac{b_i}{a_{ii}}\right|$

$= \max_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(x_{1j} - x_{2j})\right| \le \max_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\cdot|x_{1j} - x_{2j}|$ $\le$

$\sum_{j\ne i}|a_{ij}| \le \theta|a_{ii}|$ => $\sum_{j\ne i}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \le \theta$

$\le$ $\theta\rho(x_1, x_2)$ => $\exists$ решение

ЧтД.

④ Д-ть: $u(x) = \frac{1}{2}u(x^2) + \frac{1}{2}v(x^2) + x^3$
$v(x) = \frac{1}{2}u(x^3) - \frac{1}{2}v(x^3) - x^2$ имеет ! решение

Д-во: Π $\varphi: C[0,1]\times C[0,1] \to C[0,1]\times C[0,1]$, $M = C[0,1]\times C[0,1]$

$\varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}u(x^2) + \frac{1}{2}v(x^2) + x^3\\ \frac{1}{2}u(x^3) - \frac{1}{2}v(x^3) - x^2\end{pmatrix}$

$\rho\left(\varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix}\xi\\\varsigma\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}u(x^2) + v(x^2) - \xi(x^2) - \varsigma(x^2)\\ u(x^3) - v(x^3) - \xi(x^3) + \varsigma(x^3)\end{pmatrix}\right\|_M$ $=$

Определим норму на M следующим образом: $\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_M = \max\{\|u\|_{C[0,1]}, \|v\|_{C[0,1]}\}$

$= \frac{1}{2}\max\{\|u(x^2) + v(x^2) - \xi(x^2) - \varsigma(x^2)\|_{C[0,1]}, \|u(x^3) - v(x^3) - \xi(x^3) + \varsigma(x^3)\|_{C[0,1]}\} \le$

$\le \frac{1}{2}\max\{\|u(x^2) - \xi(x^2)\|_{C[0,1]} + \|v(x^2) - \varsigma(x^2)\|_{C[0,1]}, \|u(x^3) - \xi(x^3)\|_{C[0,1]} + \|v(x^3) - \varsigma(x^3)\|_{C[0,1]}\}$

$= \frac{1}{2}\max\{$