№4.3 (Д.3 1)

б) $\int_0^1 \tilde{\tau}\, dx$ – ?

$\tilde{\tau}$ – интр. на $(0,1) \Rightarrow \tilde{\tau} \in \mathfrak{M}(0,1) \Rightarrow \tilde{\tau} \in \mathfrak{M}(E_k)$, где $(0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ($\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство изм. мн-в : $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$).

По т. о счётной аддитивности интеграла Лебега: $\int_0^1 \tilde{\tau}\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \tilde{\tau}\, dx =$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^i + \ldots\right) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow \int_0^1 \tilde{\tau}\, dx = \frac{1}{2}.$

№3.7 (Д.З 1)

$E: \mu(E) < \infty$; $1 \le q \le p \le \infty$

Д-ть: $L_p(E) \subset L_q(E)$

Д-во: 1) $p < \infty$

Рассмотрим $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{q_1/r} + \frac{1}{q_2/r} = 1 \Rightarrow$ из нер-ва Гёльдера: $\int_E |fg|^r dx \le \| |f|^r \|_{L_{q_1/r}(E)} \| |g|^r \|_{L_{q_2/r}(E)} =$

$= \left[\int_E |f|^{q_1} dx\right]^{r/q_1} \cdot \left[\int_E |g|^{q_2} dx\right]^{r/q_2} \Rightarrow \|fg\|_{L_r(E)} \le \|f\|_{L_{q_1}(E)} \cdot \|g\|_{L_{q_2}(E)}$,

где $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r} \Rightarrow$ если вместо „$\frac{1}{r}$" взять „$\frac{1}{q}$" получим:

$\|f \cdot g\|_{L_q(E)} \le \|f\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_r(E)}$ при $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\|f\|_{L_q(E)}\right]^q = \left(\left[\int_E |f|^q dx\right]^{1/q}\right)^q \le \left(\left[\int_E |f|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_E dx\right]^{\frac{1}{r}}\right)^q \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \le [\mu(E)]^{1-\frac{q}{p}} \|f\|^q_{L_p(E)}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Т.к. } f \in L_p(E) \Rightarrow \left[\int_E |f|^p dx\right]^{q/p} < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{\frac{q}{p}-1} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} < \infty \Rightarrow \int_E |f|^q dx < \infty \Rightarrow f \in L_q(E)$ (1)

2) $p = \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} = \int_E |f|^q dx \le \int dx \cdot \|f\|^q_{L_\infty(E)} = \mu(E) \cdot \|f\|^q_{L_\infty(E)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{-1} \le \|f\|^q_{L_\infty(E)}$

Т.к. $f \in L_\infty(E) \Rightarrow \exists c: |f| \le c \Rightarrow \|f\|_{L_\infty(E)} < \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_\infty(E)} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \cdot [\mu(E)]^{-1} \le \|f\|^q_{L_\infty(E)} < \infty \Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} < \infty \Rightarrow \int_E |f|^q dx < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in L_q(E)$ (2)

(1) и (2) $\Rightarrow$ при $\mu(E) < \infty$, $1 \le q \le p \le \infty$ $L_p(E) \subset L_q(E)$

- Если $\mu(E) = \infty$

При $p = \infty$: $\|f\|^q_{L_q(E)} \le \mu(E) \cdot \|f\|^q_{L_\infty(E)}$ $\left\{ \|f\|^q_{L_\infty(E)} < \infty \text{ т.к. } f \in L_\infty(E) \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|^q_{L_q(E)} \le \infty \Rightarrow$ нер-во не строгое $\Rightarrow$ нельзя сделать вывод о принадлежности пр-ву $L_q(E)$ $\Rightarrow$ при $\mu(E) = \infty$ и $1 \le q \le p \le \infty$ не всегда $L_p(E) \subset L_q(E)$.