Домашнее задание №3

№3.10

$f_n \to f$ в $L_2(E)$

Д-ть: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на E

Д-во: $f_n \to f$ в $L_2(E) \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_2(E)} = \left(\int_E |f_n - f|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_E |f_n - f|^2 dx \to 0$

$\int_E |f_n - f|^2 dx \geq \int_{E[|f_n - f| > \delta]} |f_n - f|^2 dx \geq \delta^2 \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \Rightarrow$

$\mu(E[|f_n - f| > \delta]) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_E |f_n - f|^2 dx \to 0 \Rightarrow \mu(E[|f_n - f| > \delta]) \to 0 \ \forall \delta$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$ на E.

ЧТД.

№3.9

$f_n \to f$, $g_n \to g$ в $L_4(E)$

Д-ть: $f_n g_n \to fg$ в $L_2(E)$

Д-во: $f_n \to f$, $g_n \to g$ в $L_4(E) \Rightarrow \|f_n - f\|_{L_4(E)} \to 0$, $\|g_n - g\|_{L_4(E)} \to 0$

$f_n g_n - fg = (f_n - f)g + (g_n - g)f + (f_n - f)(g_n - g) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n g_n - fg\|_{L_2(E)} \leq \|(f_n - f)g\|_{L_2(E)} + \|(g_n - g)f\|_{L_2(E)} + \|(f_n - f)(g_n - g)\|_{L_2(E)} \leq$

$\leq \|f_n - f\|_{L_4(E)} \|g\|_{L_4(E)} + \|g_n - g\|_{L_4(E)} \|f\|_{L_4(E)} + \|f_n - f\|_{L_4(E)} \|g_n - g\|_{L_4(E)} \to 0$, т.к.

$\|f_n - f\|_{L_4(E)} \to 0$ и $\|g_n - g\|_{L_4(E)} \to 0 \Rightarrow \|f_n g_n - fg\|_{L_2(E)} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n g_n \to fg$ в $L_2(E)$

ЧТД.

№3.11

$f_n \to f$ в $L_2(a,b)$, $g_n \to g$ в $L_2(a,b)$

Д-ть: $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ на (a,b)

Д-во: $\|f_n - f\|_{L_2(a,b)} \to 0$ и $\|g_n - g\|_{L_2(a,b)} \to 0$

$\|f_n g_n - fg\|_{L_1(E)} \leq \|(f_n - f)g\|_{L_1(a,b)} + \|(g_n - g)f\|_{L_1(a,b)} + \|(g_n - g)(f_n - f)\|_{L_1(a,b)} \leq$

$\leq \|f_n - f\|_{L_2(a,b)} \|g\|_{L_2(a,b)} + \|g_n - g\|_{L_2(a,b)} \|f\|_{L_2(a,b)} + \|g_n - g\|_{L_2(a,b)} \|f_n - f\|_{L_2(a,b)} \to 0$

$\Rightarrow \|f_n g_n - fg\|_{L_1(a,b)} \to 0 \Rightarrow f_n g_n \to fg$ в $L_1(a,b) \Rightarrow \int_E |f_n g_n - fg| dx \to 0$

$(E = (a,b))$

$\int_E |f_n g_n - fg| dx \geq \int_{E[|f_n g_n - fg| > \delta]} |f_n g_n - fg| dx \geq \delta \mu(E[|f_n g_n - fg| > \delta]) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(E[|f_n g_n - fg| > \delta]) \leq \frac{1}{\delta} \int_E |f_n g_n - fg| dx \to 0 \Rightarrow \mu(E[|f_n g_n - fg| > \delta]) \xrightarrow[\forall \delta]{} 0$

$\Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$ на (a,b)

ЧТД.

№3.15

$1 \le p \le \infty$, $f_n \to f$ в $L_p(E)$

Д-ть: $\sin f_n \to \sin f$ в $L_p(E)$

Д-во: $f_n \to f$ в $L_p(E) \Rightarrow \left[\int_E |f_n - f|^p dx\right]^{1/p} \to 0 \Rightarrow \int_E |f_n - f|^p dx \to 0$

$\sin f_n - \sin f = 2\sin\frac{f_n - f}{2} \cdot \cos\frac{f_n + f}{2} \le 2 \cdot \sin\frac{f_n - f}{2} \le 2 \cdot \frac{1}{2}(f_n - f) = f_n - f$

$\Rightarrow |\sin f_n - \sin f| \le |f_n - f| \Rightarrow |\sin f_n - \sin f|^p \le |f_n - f|^p \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_E |\sin f_n - \sin f|^p dx \le \int_E |f_n - f|^p dx \to 0 \to \int_E |\sin f_n - \sin f|^p dx \to 0$

$\Rightarrow \left[\int_E |\sin f_n - \sin f|^p dx\right]^{1/p} \to 0 \Rightarrow \sin f_n \to \sin f$ в $L_p(E)$

ЧТД.

№4.16

$f_k \in L_{p_k}(E)$, $p_k \in [1, \infty]$ $\forall k \ge 1$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = 1$

Д-ть: $\|f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n\|_{L_1(E)} \le \|f_1\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|f_2\|_{L_{p_2}(E)} \cdot \ldots \cdot \|f_n\|_{L_{p_n}(E)}$

Д-во: П $f_1 \in L_{p_1}(E)$, $f_2 \in L_{p_2}(E)$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 \Rightarrow$ из нер-ва Гёльдера:

$\|f_1 \cdot f_2\|_{L_1(E)} = \int_E |f_1 \cdot f_2| dx \le \left(\int_E |f_1|^{p_1} dx\right)^{1/p_1} \left(\int_E |f_2|^{p_2} dx\right)^{1/p_2} = \|f_1\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|f_2\|_{L_{p_2}(E)}$

• Добавим $f_3 \in L_{p_3}(E) \Rightarrow \|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3\|_{L_1(E)}$

$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$ $\left\{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q}\right\} \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p_3} = 1 \Rightarrow p_3$ сопр. с q по Гёльдеру

$\Rightarrow$ из нер-ва Гёльдера: $\|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3\|_{L_1(E)} \le \|f_1 \cdot f_2\|_{L_q(E)} \|f_3\|_{L_{p_3}(E)} \le$

$\le \|f_1\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|f_2\|_{L_{p_2}(E)} \cdot \|f_3\|_{L_{p_3}(E)}$

• С $f_4 \in L_{p_4}(E)$: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p_4} = 1 \Rightarrow$

$\|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4\|_{L_1(E)} \le \|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3\|_{L_q(E)} \cdot \|f_4\|_{L_{p_4}(E)} \le \|f_1\|_{L_{p_1}(E)} \|f_2\|_{L_{p_2}(E)} \|f_3\|_{L_{p_3}(E)} \|f_4\|_{L_{p_4}(E)}$

• С $f_n \in L_{p_n}(E) \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p_n} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n\|_{L_1(E)} \le \|f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_{n-1}\|_{L_q(E)} \cdot \|f_n\|_{L_{p_n}(E)} \le$

$\le \|f_1\|_{L_{p_1}(E)} \cdot \|f_2\|_{L_{p_2}(E)} \cdot \ldots \cdot \|f_n\|_{L_{p_n}(E)}$

ЧТД.

№4.18

$\exists\ [0,1] \supset E = \{ q \in \mathbb{Q} :\ 0 \le q \le 1 \}$, тогда имеем следующее:

E - изм; $\mu(E) = 0$.

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [0,1] \setminus E \end{cases}$, тогда χ_E - ф-ия, аналогичная ф-ии Дирихле $\Rightarrow$ χ_E - не инт. по Риману. $\Rightarrow$ не всякая характ. ф-ия изм. E интегр. по Риману.

№3.12

Рассмотрим $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln(n+1)}, & x \in [1, n+1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, n+1] \end{cases} \Rightarrow$

$n \to \infty \Rightarrow \int |f_n|^2 dx = \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{\ln^2(n+1)} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{\ln^2(n+1)} \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x^2} =$

$= \frac{1}{\ln^2(n+1)} \frac{1}{x} \Big|_{n+1}^{1} = \frac{1}{\ln^2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \to 0 \Rightarrow f = 0$, но в то же время

$\int\limits_{\mathbb{R}} |f_n| dx = \frac{1}{\ln(n+1)} \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\ln(n+1)} (\ln(n+1) - \ln 1) = 1 \Rightarrow f = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ из $f_n \xrightarrow{L_2(\mathbb{R})} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_1(\mathbb{R})} f$