№1.9

в) $C[a,b]$, $\rho(x,y)=\max\limits_{[a,b]}|x(t)-y(t)|$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд. посл-ть из $C[a,b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0:\ \rho(\varphi_n,\varphi_m)=\max\limits_{[a,b]}|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|<\varepsilon\ \forall n,m>N$

$\Rightarrow |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|<\varepsilon\ \forall t\in[a,b]\ \forall n,m>N(\varepsilon)\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд $\Rightarrow \varphi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)$

$|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|<\varepsilon\ \forall t\in[a,b]\ \forall n,m>N(\varepsilon)\Rightarrow$ в пределе по „m“:

$|\varphi_n(t)-\varphi(t)|\le\varepsilon\ \forall t\in[a,b]\ \forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх-ся к φ

$\Rightarrow \varphi\in C[a,b]$. (*)

$\Rightarrow \rho(\varphi_n,\varphi)=\max\limits_{[a,b]}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|\le\varepsilon\ \forall n>N(\varepsilon)\Leftrightarrow\varphi_n\to\varphi$

ч.т.д.

(*) Посл-ть непр. $\varphi_n\to\varphi$ равномерно на $[a,b]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi\in C[a,b]$.

№1.5. (нер-во треугольника)

1. $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y| \geq 0$ - верно

2. $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y| = \operatorname{arctg}|y-x| = \rho(y,x)$ - верно

3. $tg(\alpha_1+\alpha_2) = \dfrac{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2}{1 - tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2} \geq tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2) \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \operatorname{arctg}(tg\,\alpha_1) + \operatorname{arctg}(tg\,\alpha_2)$

Пусть $tg\,\alpha_1 = |x-y|$; $tg\,\alpha_2 = |y-z|$

Тогда: $\operatorname{arctg}(|x-y| + |y-z|) \leq \operatorname{arctg}|x-y| + \operatorname{arctg}|y-z|$

$\operatorname{arctg}(|x-z|) \leq \operatorname{arctg}(|x-y| + |y-z|) \leq \operatorname{arctg}|x-y| + \operatorname{arctg}|y-z| \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ - верно

$\Rightarrow \rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ - метрика

Полнота:

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \rho(a_n, a_m) <$
$< \operatorname{arctg}\varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. по $\rho(x,y) = |x-y|$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n, a_m) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}|a_n - a| = 0 \Rightarrow$ полное.

№1.9.

3) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фунд. посл-ть. $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0: \ \sup\limits_{k \geq 1} |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall k \geq 1 \ |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = x_k$

$\forall k \geq 1 \ |x_{n_k} - x_{m_k}| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$ в пределе по „m":

$\forall k \geq 1 \ |x_{n_k} - x_k| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sup\limits_{k \geq 1} |x_{n_k} - x_k| \leq \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_k) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ полное

Ч.Т.Д.