7 Пространство $C(K)$

Пусть K – компактное метрическое пространство. Обозначим через $C(K)$ множество заданных на K вещественнозначных непрерывных функций. Ясно, что $C(K)$ – линейное пространство.

Теорема 7.1. *Всякая функция $f \in C(K)$ ограничена и достигает своего максимального и минимального значений.*

Доказательство. Пусть $f \in C(K)$. Существует последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ такая, что

$$\sup_{t \in K} f(t) = \lim_{n \to \infty} f(t_n).$$

Пользуясь компактностью K, выделим из нее подпоследовательность $t_{n_k} \to t_0 \in K$. В силу непрерывности f имеем

$$\sup_{t \in K} f(t) = \lim_{k \to \infty} f(t_{n_k}) = f(t_0).$$

Значит, f ограничена сверху и достигает своего максимального значения.

Совершенно аналогично доказывается, что f ограничена снизу и достигает своего минимального значения.

Теорема доказана.

Опр. Функция $f \in C(K)$ называется равномерно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(t') - f(t'')| < \varepsilon \quad \forall\, t', t'' \in K: \ \rho(t', t'') < \delta(\varepsilon).$$

Теорема 7.2. *Всякая функция $f \in C(K)$ равномерно непрерывна.*

Доказательство. Предположим, что некоторая функция $f \in C(K)$ не является равномерно непрерывной. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t''_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ такие, что

$$|f(t'_n) - f(t''_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad \rho(t'_n, t''_n) < 1/n.$$

Выделим из $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $t'_{n_k} \to t_0 \in K$. Заметим, что $t''_{n_k} \to t_0$

Переходя к пределу в неравенстве

$$|f(t'_{n_k}) - f(t''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

получим

$$0 = |f(t_0) - f(t_0)| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Введение на пространстве $C(K)$ нормы

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{t\in K}|f(t)|$$

превращает его в нормированное пространство и тем самым – в метрическое пространство с метрикой

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_{C(K)} = \max_{t\in K}|f(t)-g(t)|.$$

Теорема 7.3. $C(K)$ – *полное метрическое пространство.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(K)$. Для нее для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{t\in K}|f_n(t)-f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, n,m > N(\varepsilon).$$

Как следствие, для каждого $t \in K$ имеем

$$|f_n(t)-f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, n,m > N(\varepsilon). \tag{7.1}$$

Значит, последовательность значений $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна и для каждого $t \in K$ существует предел

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Переходя в (7.1) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$|f_n(t)-f(t)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Фиксируем f_n с $n > N(\varepsilon)$. В силу непрерывности функции f_n в точке $t_0 \in K$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f_n(t)-f_n(t_0)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in B_{\delta(\varepsilon)}(t_0).$$

Но тогда

$$|f(t)-f(t_0)| \leqslant |f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-f_n(t_0)|+|f_n(t_0)-f(t_0)| < 3\varepsilon \quad \forall\, t \in B_{\delta(\varepsilon)}(t_0).$$

Следовательно $f \in C(K)$.

Теперь из (7.1) следует, что

$$\rho(f_n, f) = \max_{t\in K}|f_n(t)-f(t)| \leqslant 3\varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Опр. Пусть $\mathscr{F} = \{f\}$ - семейство функций $f \in C(K)$. Говорят, что $\mathscr{F}$ равномерно ограничено, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|f\|_{C(K)} \leqslant C \quad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Опр. Семейство функций $\mathscr{F}$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(t') - f(t'')| < \varepsilon \quad \forall\, t', t'' \in K:\ \rho(t', t'') < \delta(\varepsilon) \quad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Теорема 7.4. *(Теорема Асколи-Арцела) Семейство функций $\mathscr{F} = \{f\}$ предкомпактно в $C(K)$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство $\mathscr{F}$ относительно компактно. Тогда оно вполне ограничено и, следовательно, – ограничено. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ для $\mathscr{F}$ существует конечная $\varepsilon/3$ сеть $f_1, f_2, \dots, f_N$.

Для каждого f_k существует $\delta_k(\varepsilon)$ такое, что

$$|f_k(t') - f_k(t'')| < \varepsilon/3 \quad \forall\, t', t'' \in K, \quad \rho(t', t'') < \delta_k(\varepsilon).$$

Положим $\delta(\varepsilon) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} \delta_k(\varepsilon)$.

Пусть $f \in \mathscr{F}$. Тогда найдется f_k такое, что $\|f - f_k\|_{C(K)} < \varepsilon/3$. Поэтому

$$\begin{aligned} |f(t') - f(t'')| &\leqslant |f(t') - f_k(t')| + |f_k(t') - f_k(t'') + |f_k(t'') - f(t'')| \leqslant \\ &\leqslant 2\|f - f_k\|_{C(K)} + |f_k(t') - f_k(t'')| < \varepsilon \quad \forall\, t', t'' \in K:\ \rho(t', t'') < \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathscr{F}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Достаточность. Пусть теперь семейство $\mathscr{F}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Возьмем произвольные последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ и $\varepsilon > 0$.

Так как K компакт, то на K существует конечная $\delta(\varepsilon/3)$ - сеть

$$t_1, t_2, \ldots, t_M.$$

Из равномерной ограниченности $\mathscr{F}$ следует, что $|f_n(t_j)| \leqslant C$ для всех $j = 1, 2, \ldots, M$. Следовательно существует подпоследовательность $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся в каждой из точек t_j.

Пусть $t \in K$. Тогда существует точка t_j такая, что $\rho(t, t_j) < \delta(\varepsilon/3)$. Из равностепенной непрерывности следует, что

$$\begin{aligned} |f'_n(t) - f'_m(t)| \leqslant |f'_n(t) - f'_n(t_j)| + |f'_n(t_j) - f'_m(t_j)| + |f'_m(t_j) - f'_m(t)| < \\ < \varepsilon/3 + |f'_n(t_j) - f'_m(t_j)| + \varepsilon/3. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Из сходимости последовательностей $\{f'_n(t_j)\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \leqslant j \leqslant M$ следует, что

$$|f'_n(t_j) - f'_m(t_j)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Поэтому из (7.2) следует, что

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in K \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon).$$

Значит,

$$\|f'_n - f'_m\|_{C(K)} = \max_{t \in K} |f'_n(t) - f'_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N(\varepsilon).$$

Последовательность $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $C(K)$ и поэтому сходится в $C(K)$ к некоторой функции $f \in C(K)$.

Теорема доказана.

8 Критерий Рисса предкомпактности в $L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$

Опр. Семейство функций $\mathscr{F} = \{f\} \subset L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$ называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|f\|_{L_p(E)} \leqslant C \quad \forall\, f \in \mathscr{F}$$

и называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(E)} < \varepsilon \quad \forall\, h : |h| < \delta(\varepsilon), \quad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Теорема 8.1. *Пусть E – ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^m$. Семейство функций $\mathscr{F} \subset L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$ предкомпактно в $L_p(E)$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Для удобства продолжим все функции нулем вне E.

Необходимость. Пусть семейство $\mathscr{F}$ относительно компактно. Тогда оно вполне ограничено и, следовательно, – ограничено. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon/3$ – сеть $g_1, g_2, \ldots, g_N$. Для каждой из функций g_k существует $\delta_k(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|g_k(\cdot + h) - g_k(\cdot)\|_{L_p(E)} < \varepsilon/3 \quad \forall\, h: \ |h| < \delta_k(\varepsilon).$$

Для всякого $f \in \mathscr{F}$ существует g_k такое, что $\|f - g_k\|_{L_p(E)} < \varepsilon/3$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(E)} \leqslant \\
&\leqslant \|f(\cdot + h) - g_k(\cdot + h)\|_{L_p(E)} + \|g_k(\cdot + h) - g_k(\cdot)\|_{L_p(E)} + \|g_k(\cdot) - f(\cdot)\|_{L_p(E)} < \\
&< \varepsilon/3 + \|g_k(\cdot + h) - g_k(\cdot)\|_{L_p(E)} + \varepsilon/3 < \varepsilon
\end{aligned}$$

для всех h таких, что $|h| < \delta(\varepsilon) = \min\limits_{11 \leqslant k \leqslant N} \delta_k(\varepsilon/3)$. Следовательно $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно.

Достаточность. Пусть теперь семейство $\mathscr{F} = \{f\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Построим множество $\mathscr{F}_\delta = \{f_\delta\}$ соответствующих средних функций.

Напомним, что

$$\|f - f_\delta\|_{L_p(E)} \leqslant \sup_{|z|\leqslant\delta} \|f(\cdot + z) - f(\cdot)\|_{L_p(E)}.$$

В силу равностепенной непрерывности $\mathscr{F}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathscr{F}_\delta$ является $\varepsilon/2$ – сетью для $\mathscr{F}$.

Пусть $\overline{B}$ – замкнутый шар достаточно большого радиуса, содержащий E. Заметим, что

$$|f_\delta(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x+z)|\omega_\delta(z)\,dz \leqslant \|f\|_{L_p(E)} \Big[\int_{\mathbb{R}^m} \omega_\delta(z)^{p'}\,dz\Big]^{1/p'} = C_\delta \|f\|_{L_p(E)},$$

$$|f_\delta(x+h) - f_\delta(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x+h+z) - f(x+z)|\omega_\delta(z)\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(E)} \Big[\int_{\mathbb{R}^m} \omega_\delta(z)^{p'}\,dz\Big]^{1/p'} = C_\delta \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_{L_p(E)},$$

где $C_\delta = \Big[\int_{\mathbb{R}^m} \omega_\delta(z)^{p'}\,dz\Big]^{1/p'}$.

Из полученных неравенств следует, что при фиксированном δ семейство функций $\mathscr{F}_\delta = \{f_\delta\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C(\overline{B})$. Поэтому оно относительно компактно в $C(\overline{B})$ и, тем более, – в $L_p(E)$.

Следовательно для любого $\varepsilon > 0$ для $\mathscr{F}_\delta$ существует конечная $\varepsilon/2$ – сеть $g_1, g_2, \ldots, g_N$, которая будет ε – сетью для $\mathscr{F}$.

Теорема доказана.

Теорема 8.2. *Пусть E – неограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^m$. Семейство функций $\mathscr{F} \subset L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$ предкомпактно в $L_p(E)$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и равностепенно интегрируемо.*

Опр. Семейство функций $\mathscr{F} \subset L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$ называется равностепенно интегрируемым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_{E\setminus B_R(0)} |f(x)|^p\,dx < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathscr{F}.$$

Домашнее задание к 18 марта.

Задачи 4.1, 4.2, 4.6, 4.7, 4.9 - 4.11, 4.13 – 4.15.