Домашняя работа 12

~~2.1~~, ~~2.2~~, ~~2.3~~, ~~2.4~~  ~~3.1~~, ~~3.2~~, ~~3.3~~, ~~3.4~~, ~~3.5~~, ~~3.6~~, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10

№2.1

Д-ть: $f$ на $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^m$) - линейный $\Leftrightarrow$ $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Д-во: $\Leftarrow$ $f(\zeta x+\xi y)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\zeta x_k+\xi y_k) = \zeta\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k x_k + \xi\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k y_k$

$=\zeta f(x)+\xi f(y)$ $\Rightarrow$ линейный

$\Rightarrow$ $\exists f$ - линейный функ-ал на $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^m$).

$x=\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k x_k$, где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ - базис $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f(\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k x_k)=\sum\limits_{k=1}^{m}x_k f(\beta_k)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k x_k$ : $\alpha_k=f(\beta_k)$ $\forall k=1,\dots m$

ЧТД

№2.2

Д-ть: $f$ на $\mathbb{C}^m$ - сопр $\Leftrightarrow$ $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\overline{x_k}$, $\alpha_k\in\mathbb{C}$

Д-во: $\Leftarrow$ $f(\zeta x+\xi y)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\overline{(\zeta x_k+\xi y_k)}=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\overline{\zeta}\,\overline{x_k}+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\overline{\xi}\,\overline{y_k}=$

$=\overline{\zeta}f(x)+\overline{\xi}f(y)$ $\Rightarrow$ сопр. лин.

$\Rightarrow$ $\exists f$ - сопр. лин. на $\mathbb{C}^m$

$x=\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k x_k \Rightarrow f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\overline{x_k}f(\beta_k)=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\overline{x_k}$; $\alpha_k=f(\beta_k)$ $\forall k=1,\dots,m$

ЧТД

№2.3

$y\in L_1(a,b)$, $t_0\in[a,b]$

Д-ть: $f(x)=\int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt$, $\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$ - лин. ф-лы

Д-во: • $f(\zeta x+\xi z)=\int\limits_a^b(\zeta x(t)+\xi z(t))\,y(t)\,dt=\zeta\int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt+\xi\int\limits_a^b z(t)y(t)\,dt$

$=\zeta f(x)+\xi f(z)$ $\Rightarrow$ линейный

• $\delta_{t_0}(\zeta x+\xi z)=\zeta x(t_0)+\xi z(t_0)=\zeta\,\delta_{t_0}(x)+\xi\,\delta_{t_0}(z)$ $\Rightarrow$ линейный

ЧТД

№2.4

Лин ф-алы на $C[-1,1]$?

а) $f(x) = \max\limits_{[-1,1]} x(t)$

$\max\limits_{[-1,1]} (-1)t^2 = 0 \neq (-1)\max\limits_{[-1,1]} t^3 = -1 \Rightarrow$ нет

б) $f(x) = \min\limits_{[-1,1]} x(t)$

$\min\limits_{[-1,1]} (-1)t^2 = -1 \neq (-1)\min\limits_{[-1,1]} t^2 = 0 \Rightarrow$ нет

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$

$f(\xi x + \xi y) = \int\limits_{-1}^{0}(\xi x(t) + \xi y(t))dt + \int\limits_{0}^{1}(\xi x(t) + \xi y(t))dt =$

$= \xi\int\limits_{-1}^{0} x(t)dt + \xi\int\limits_{-1}^{0} y(t)dt + \xi\int\limits_{0}^{1} x(t)dt + \xi\int\limits_{0}^{1} y(t)dt = \xi f(x) + \xi f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ да

№3.1

Д-ть: $\forall L' \subset L$ явл-ся выпукл. мн-ом. $L'$ - выпукл. тело ?

Д-во: $L'$ - лин. многообр. $\Rightarrow \forall x, y \in L' \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in L' \ \forall \alpha \in [0,1]$
$\Rightarrow$ выпукл. мн-во.

$M$ - выпукл тело $\Leftrightarrow \exists x_0 \in M : \forall y \in L \ \exists \varepsilon(y) : x_0 + ty \in M \ \forall t : |t| < \varepsilon(y)$

$\exists L' \neq L \rightarrow \exists y \in L : y \notin L' \Rightarrow \forall x \ \ x + ty \notin L' \rightarrow$ не выпукл. тело.
$t \neq 0$

ЧТД

№3.2

Д-ть: $\forall$ афинное многообразие $M$ - выпукл. мн-во. $M$ - выпукл. тело ?

Д-во: $\exists x_1, x_2 \in M = x_0 + L' \Rightarrow$ если $y_1, y_2 \in L'$, то $x_1 = x_0 + y_1$, $x_2 = x_0 + y_2$

$\Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha x_0 + (1-\alpha)x_0 + \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = x_0 + \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in M$

$\exists L' \neq L \Rightarrow \exists y \in L : y \notin L' \rightarrow \forall x = x_0 + z \in M : z \in L', t \neq 0 \ \ x + ty \notin M \rightarrow$
не выпукл. тело.

ЧТД

№3.3

$W$ - выпукл. мн-во в $L$, $x_0 \in L$

Д-ть: $x_0 + W$ - выпукл.

Д-во: $\exists x_1, x_2 \in x_0 + W \Rightarrow$ если $y_1, y_2 \in W$, то $x_1 = x_0 + y_1$, $x_2 = x_0 + y_2$

$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x_0 + \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ (№3.2) $\in x_0 + W \Rightarrow$ выпукл.

ЧТД

## №3.4

$M, N$ - выпукл. мн-ва в $L$, $\lambda$ - скаляр.

Д-ть: $M+N$, $M-N$, $\lambda M$ - выпукл.

Д-во: • $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in M+N \Rightarrow \xi_1 = x_1 + y_1,\ \xi_2 = x_2 + y_2 :\ x_1, x_2 \in M;\ y_1, y_2 \in N$

$\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 = \alpha x_1 + \alpha y_1 + (1-\alpha)x_2 + (1-\alpha)y_2 \in M+N \Rightarrow$ вып.

• $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in M-N \Rightarrow \xi_1 = x_1 - y_1,\ \xi_2 = x_2 - y_2 :\ x_1, x_2 \in M,\ y_1, y_2 \in N$

$\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 = \alpha x_1 - \alpha y_1 + (1-\alpha)x_2 - (1-\alpha)y_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - (\alpha y_1 +$
$+ (1-\alpha)y_2) \in M-N \Rightarrow$ вып

• $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in \lambda M \Rightarrow \xi_1 = \lambda x_1,\ \xi_2 = \lambda x_2 :\ x_1, x_2 \in M$

$\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 = \alpha\lambda x_1 + (1-\alpha)\lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in \lambda M \Rightarrow$ вып

чтд

## №3.5

Д-ть: в $\ell_2$ вып. мн-ва: а) $\Pi = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : |x_k| \le 2^{-k+1}\ \ k \in \mathbb{N}\}$

$\Pi, E$ - вып. тела? б) $E = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |x_k|^2 < 1\}$

Д-во: а) $\exists\ x, y \in \Pi \Rightarrow$ Оцен $|\alpha x_k + (1-\alpha)y_k| \le \alpha|x_k| + (1-\alpha)|y_k| \le$
$\le \alpha 2^{-k+1} + (1-\alpha)2^{-k+1} = 2^{-k+1} \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in \Pi \Rightarrow$ вып. $(\alpha \in [0,1])$

б) $\exists\ x, y \in E \Rightarrow$ Оцен $\alpha x + (1-\alpha)y$ : $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\alpha x_k + (1-\alpha)y_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[\alpha|x_k|^2 +\right.$
$\left.+ (1-\alpha)|y_k|^2\right] = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} k^2|x_k|^2 + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} k^2|y_k|^2 < 1 \Rightarrow$ вып. $(\alpha \in [0,1])$

а) $\Pi$ - вып. тело?

$\exists\ x \in \Pi,\ y \in \ell_2 : y = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow |x_k + t\frac{1}{k}| \le 2^{-k+1}$ Заметим, что:

при $k \to \infty$ нер-во неверно $\Rightarrow \Pi$ - не вып. тело

б) $E$ - вып. тело?

$\exists\ x \in E,\ y \in \ell_2 : y = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow \forall t \ne 0\ \ \sum_{k=1}^{\infty} k^2|x_k + ty_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2|x_k + t\frac{1}{k}|^2$

$\lim_{k\to\infty} k^2|x_k + t\frac{1}{k}|^2 = \lim_{k\to\infty}|kx_k + t|^2 = |t|^2 \ne 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2|x_k + t\frac{1}{k}|^2$ - расх-ся

$\Rightarrow E$ - не вып. тело

чтд

## №3.6

Д-ть: $M = \{x \in C[a,b] : |x(t)| \le 1 \ \forall t \in [a,b]\}$ - вып. $M \overset{?}{-}$ вып тело

Д-во: $\exists x, y \in M \Rightarrow |\alpha x(t) + (1-\alpha) y(t)| \le \alpha |x(t)| + (1-\alpha) |y(t)| \le$

$\le \alpha + 1 - \alpha = 1 \ \forall t \in [a,b], \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow$ вып.

$\exists x = 0$ в $M$, $y \in C[a,b] \Rightarrow |x(t) + \xi y(t)| = |0 + \xi y(t)| \le |\xi| \cdot \|y\|_{C[a,b]} \le 1$

при $|\xi| < [\|y\|_{C[a,b]}]^{-1} \Rightarrow$ выпукл. тело

чтд

## №3.7

$p$ - вып. ф-ал на $L$, $x_0 \in L$, $c \in \mathbb{R}$

Д-ть: $Q = \{x \in L : p(x - x_0) \le c\}$ - выпукл.

Д-во: $\exists x, y \in Q \Rightarrow p(\alpha x + (1-\alpha) y - x_0) = p(\alpha(x - x_0) + (1-\alpha)(y - x_0)) \le$

$\le \alpha p(x - x_0) + (1-\alpha) p(y - x_0) \le c \ \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow$ выпукл.

чтд

№3.9

$\{W_i\}$ - система выпукл. мн-в.

Д-ть: $\bigcap\limits_i W_i$ - выпукл.

Д-во: $\exists x, y \in \bigcap\limits_i W_i \Rightarrow x, y \in W_i \ \forall i$; $W_i$ - выпукл $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in W_i \ \forall i \Leftrightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in \bigcap\limits_i W_i \quad \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow$ выпукл.

ЧтД.

№3.10

$W_1 \cap W_2 \overset{?}{-}$ вып. тело, если $W_1, W_2$ - вып. тела

Решение: Рассмотрим два куба: $W_1 = [-1,1]^3$, $W_2 = [1,3] \times [-1,1]^2$.

$W_1, W_2$ - вып. тела, но в их пересечении - $\overset{\text{часть}}{\text{плоскости}}$, что не явл-ся вып. телом.

Ответ: нет