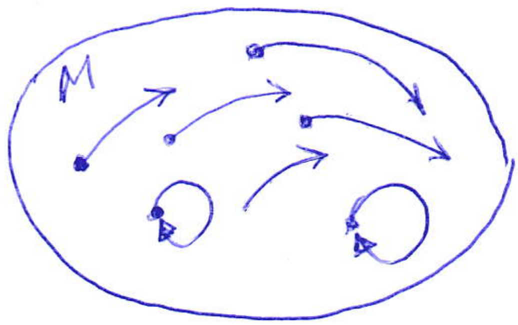
2 Принцип сжимающих отображений

Опр. Пусть M – метрическое пространство и $A : M \to M$, то есть A – это отображение метрического пространства M в себя.

Точка $x \in M$ называется *неподвижной точкой* отображения A, если $x = Ax$, иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения

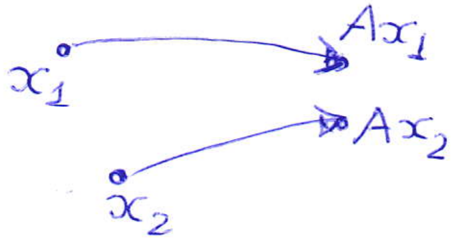
$$x = Ax.$$



Опр. Отображение $A : M \to M$ называется *сжимающим отображением*, если существует такое число $0 \leqslant q < 1$, что

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant q\,\rho(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in M.$$

Число q часто называют *коэффициентом сжатия*.



$$\frac{\rho(Ax_1, Ax_2)}{\rho(x_1, x_2)} \leqslant q < 1$$

Утверждение. Всякое сжимающее отображение непрерывно.

Действительно, пусть $x_0 \in M$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho(Ax, Ax_0) \leqslant q\,\rho(x, x_0) < \varepsilon \quad \forall\, x \in M : \ \rho(x, x_0) < \delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

В 1922 году польский математик Стефан Банах доказал следующий важный результат.

Теорема 2.1. *(Теорема Банаха о неподвижной точке или принцип сжимающих отображений.)*

Всякое сжимающее отображение, действующее в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство. Возьмем произвольное $x_0 \in M$ и построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, используя следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(Ax_k, Ax_{k-1}) \leqslant q\,\rho(x_k, x_{k-1}) \leqslant q^2\rho(x_{k-1}, x_{k-2}) \leqslant \ldots \leqslant q^k\rho(x_1, x_0)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пусть $\varepsilon > 0$ и $m > n$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\leqslant \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant q^{m-1}\rho(x_1, x_0) + q^{m-2}\rho(x_1, x_0) + \cdots + q^n\rho(x_1, x_0) = \\ &= q^n(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \cdots + q + 1)\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0).\end{aligned}$$

Так как $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, то существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall\, m > n > N(\varepsilon).$$

В силу полноты метрического пространства существует $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Переходя к пределу в равенстве (2.1) и используя непрерывность отображения A, имеем

$$x = Ax.$$

Существование неподвижной точки доказано.

Предположим, что у отображения A существуют две неподвижные точки - x' и x'' такие, что $x' = Ax'$ и $x'' = Ax''$. Тогда

$$\rho(x', x'') = \rho(Ax', Ax'') \leqslant q\,\rho(x', x'').$$

Так как $0 \leqslant q < 1$, то это возможно только в случае $\rho(x', x'') = 0$.
Значит, $x' = x''$ и неподвижная точка единственна.

Теорема доказана

Примеры применения принципа сжимающих отображений.

Пример 1. Одно нелинейное уравнение.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$x = \varphi(x), \tag{2.2}$$

где φ – функция, определенная на отрезке $[a, b]$, отображающая отрезок $[a, b]$ в $[a, b]$ и удовлетворяющая условию Липшица

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$$

с постоянной $0 \leqslant L < 1$. Тогда уравнение (2.2) имеет решение $x \in [a, b]$ и оно единственно.

Пример 2. Система линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{B}$ – квадратная матрица размера $m \times m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. Искомым является вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

Пусть в $\mathbb{R}^m$ введена некоторая норма $\|\cdot\|$.

Предположим, что $\|\mathbf{B}\| < 1$

Введем отображение $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ формулой $A\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$. Заметим, что

$$\|A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{B}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \leqslant \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Так как $\|\mathbf{B}\| < 1$, то отображение A -сжимающее. Следовательно существует, причем единственный $x \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax}.$$

Таким образом, задача (2.3) имеет решение и оно единственно.

Пример 3. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad t \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Здесь $K(s,t)$ – *ядро интегрального оператора.*

Предполагается, что $K \in C([a,b] \times [a,b])$, $f \in C[a,b]$.

Искомой является функция $u \in C[a,b]$, удовлетворяюшая интегральному уравнению.

Ясно, что перед нами задача об отыскании неподвижной точки отображения $A : C[a,b] \to C[a,b]$, где

$$Au(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)\,ds + f(t).$$

Заметим, что

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)(u_1(s) - u_2(s))\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \max_{s\in[a,b]} |u_1(s) - u_2(s)| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \|u_1 - u_2\|_{C[a,b]}.$$

Если

$$q = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds < 1,$$

то отображение A является сжимающим.

В этом случае решение интегрального уравнения (2.4) существует и единственно.

Пример 4. Нелинейное интегральное уравнение.

$$u(t) = \int\limits_a^b K(t, s, u(s))\, ds + f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{2.5}$$

Здесь $K(t, s, u)$ – непрерывная функция, заданная на $[a, b]\times[a, b]\times\mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$.

Искомой является функция $u \in C[a, b]$.

Будем предполагать, что функция K удовлетворяет следующему условию Липшица по переменной u:

$$|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|.$$

Положим

$$Au(t) = \int\limits_a^b K(t, s, u(s))\, ds + f(t)$$

и заметим, что

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_a^b [K(t, s, u_1(s)) - K(t, s, u_2(s))]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b L|u_1(s) - u_2(s)|\, ds \leqslant L(b - a)\|u_1 - u_2\|_{C[a,b]}.$$

При выполнении условия

$$L(b - a) < 1$$

отображение $A : C[a, b] \to C[a, b]$ является сжимающим. В этом случае уравнение (2.5) имеет единственное решение.

Пример 5. Интегральное уравнение типа Вольтерра.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s, u(s))\, ds + f(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.6}$$

где $K(t, s, u)$ – непрерывная функция, заданная на $[t_0,T]\times[t_0,T]\times\mathbb{R}$, $f \in C[t_0,T]$.

Искомой является функция $u \in C[t_0, T]$.

Будем предполагать, что функция K удовлетворяет следующему условию Липшица по переменной u:

$$|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|.$$

Положим

$$Au(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s, u(s))\, ds + f(t)$$

и заметим, что

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[t_0,T]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} [K(t, s, u_1(s)) - K(t, s, u_2(s))]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[t_0,T]} \int\limits_{t_0}^{t} L|u_1(s) - u_2(s)|\, ds \leqslant L(T - t_0)\|u_1 - u_2\|_{C[t_0,T]}.$$

При выполнении условия

$$L(T - t_0) < 1$$

отображение $A : C[a, b] \to C[a, b]$ является сжимающим. В этом случае уравнение (2.6) имеет единственное решение.

Пример 6. <u>Задача Коши для системы ОДУ</u>.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2.8}$$

Здесь $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ – непрерывная вектор-функция, заданная на $[t_0, T] \times \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Искомой является функция $\mathbf{y} \in C^1[t_0, T]$.

Сведем задачу Коши к эквивалентному интегральному уравнению.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds \quad t \in [t_0, T], \tag{2.9}$$

с искомой функцией $\mathbf{y} \in C[t_0, T]$.

Будем предполагать, что $\mathbf{f}$ удовлетворяет следующему условию Липшица по переменной $\mathbf{y}$:

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)| \leqslant L|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|.$$

Положим

$$A\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds.$$

Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in C[t_0, T]$. Тогда $\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \max\limits_{t \in [t_0, T]} |\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)|$.

Заметим, что

$$|A\mathbf{y}_1(t) - A\mathbf{y}_2(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(s))|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L|\mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{y}_2(s)|\, ds \leqslant L(t - t_0)\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

Следовательно

$$\rho(A\mathbf{y}_1, A\mathbf{y}_2) \leqslant L(T - t_0)\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

и при выполнении условия

$$L(T - t_0) < 1$$

отображение $A : C[t_0, T] \to C[t_0, T]$ является сжимающим.

В этом случае уравнение (2.9) имеет единственное решение.

Следовательно задача Коши (2.7), (2.8) имеет единственное решение.

Обобщенный принцип сжимающих отображений

Теорема 2.2. *Пусть A – такое отображение полного метрического пространства в себя, что для некоторого натурального m отображение A^m является сжимающим. Тогда отображение A имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Существование.

В силу принципа сжимающих отображений существует $x \in M$ такое, что

$$x = A^m x.$$

Тогда

$$Ax = A^{m+1} x$$

и

$$\rho(x, Ax) = \rho(A^m x, A^m Ax) \leqslant q\rho(x, Ax) \Rightarrow x = Ax.$$

Единственность.

$$x = Ax \Rightarrow x = A^m x.$$

То есть x является неподвижной точкой сжимающего отображения A^m.
В силу принципа сжимающих отображений такое x единственно.

Теорема доказана.

Задача Коши для системы ОДУ.

Снова рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad t \in [t_0, T],$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Сведем задачу Коши к эквивалентному интегральному уравнению.

$$\mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\, ds \quad t \in [t_0, T]$$

с искомой функцией $\mathbf{y} \in C[t_0, T]$.

Как и ранее, предполагаем, что $\mathbf{f}$ удовлетворяет следующему условию Липшица по переменной $\mathbf{y}$:

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)| \leqslant L|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|.$$

Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in C[t_0, T]$. Тогда $\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \max\limits_{t\in[t_0,T]} |\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)|$.

Заметим, что

$$|A\mathbf{y}_1(t) - A\mathbf{y}_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s))]\, ds\right| \leqslant L(t - t_0)\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

Поэтому

$$|A^2\mathbf{y}_1(t) - A^2\mathbf{y}_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} [\mathbf{f}(s, A\mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, A\mathbf{y}_2(s))]\, ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L|A\mathbf{y}_1(s) - A\mathbf{y}_2(s)|\, ds \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L^2(s - t_0)\, ds \rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{L^2(t - t_0)^2}{2}\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2),$$
$$|A^3\mathbf{y}_1(t) - A^3\mathbf{y}_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} [\mathbf{f}(s, A^2\mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, A^2\mathbf{y}_2(s))]\, ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L|A^2\mathbf{y}_1(s) - A^2\mathbf{y}_2(s)|\, ds \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \frac{L^3(s - t_0)^2}{2}\, ds \rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{L^3(t - t_0)^3}{3!}\rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

Продолжая эти оценки, получим

$$|A^n \mathbf{y}_1(t) - A^n \mathbf{y}_2(t)| \leqslant \frac{L^n (t-t_0)^n}{n!} \rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

Отсюда

$$\rho(A^n \mathbf{y}_1, A^n \mathbf{y}_2) \leqslant \frac{L^n (T-t_0)^n}{n!} \rho(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2).$$

При достаточно большом значении n имеем $\dfrac{L^n (T-t_0)^n}{n!} < 1$. Следовательно отображение A^n – сжимающее.

ДЗ. Доказать, что интегральное уравнение типа Вольтерра однозначно разрешимо и в случае, когда условие $L(T-t_0) < 1$ не выполнено.