Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "МЭИ"

Институт информационных и вычислительных технологий

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Отчёт по лабораторной работе №4 "Доверительные границы и интервалы"

Студент: Симаков А.М.
Преподаватель: Шевченко О.В.

Москва 2023

1 Постановки вопросов, формулы

Пусть $(x_1, ..., x_n) \equiv x$ - n независимых наблюдений над случайной величиной с законом распределения $F(z; a)$, зависящим от параметра a, значение которого неизвестно.

Функция наблюдений $a_1(x_1, ..., x_n)$ (заметим, что это случайная величина) называется **нижней доверительной границей** для параметра a с уровнем доверия P_d (обычно близким к 1), если при любом значении a

$$P\left\{a1(x_1, ..., x_n) \leq a\right\} \geq P_d$$

Функция наблюдений $a_2(x_1, ..., x_n)$ (заметим, что это случайная величина) называется **верхней доверительной границей** для параметра a с уровнем доверия P_d, если при любом значении a

$$P\left\{a1(x_1, ..., x_n) \geq a\right\} \geq P_d$$

Интервал со случайными концами (случайный интервал)

$$I(x) = (a_1(x), a_2(x)),$$

определяемый двумя функциями наблюдений, называется **доверительным интервалом** для параметра a с уровнем доверия P_d , если при любом значении a

$$P\{a \in I(x)\} \equiv P\{a_1(x_1, ..., x_n) \leq a \leq a_2(x_1, ..., x_n)\} \geq P_d \ ,$$

т.е. **вероятность** (зависящая от а) **накрыть** случайным **интервалом** $I(x)$ истинное значение a - велика: больше или равна P_d.

Для построения доверительного интервала (или границы) необходимо знать **закон распределения** статистики $\zeta = \zeta(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n)$, по которой **оценивается неизвестный параметр** (такой статистикой могут быть сама оценка $\widehat{a}(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n)$, статистика, от которой зависит оценка $\widehat{a}$, достаточная статистика или статистика, близкая к достаточной).

Один из способов построения состоит в следующем:
1) Построим случайную величину $\varphi = \varphi(\zeta, a)$, зависящую от статистики ζ и неизвестного параметра a таким образом, что:
— закон распределения для φ известен и не зависит от a;
— $\varphi(\zeta, a)$ непрерывна и монотонна по a.
Такая случайная величина $\varphi(\zeta, a)$ называется **центральной статистикой**.

2) Выберем интервал (f_1, f_2) для φ так, чтобы попадание в него случайной величины φ было практически достоверным (с вероятностью P_d):

$$P\{f_1 < \varphi(\zeta, a) < f_2\} = P_d \ ,$$

для чего достаточно в качестве f_1 и f_2 взять квантили распределения для φ уровня $\frac{1-P_d}{2}$ и $\frac{1+P_d}{2}$ соответственно.

3) Перейдем в равенстве к другой записи случайного события, разрешив неравенства относительно параметра a. Предполагая монотонное возрастание φ по a получим:

$$P\left\{g(\zeta, f_1) < a < g(\zeta, f2)\right\} = P_d$$

Это соотношение верно при любом значении параметра a, поэтому, согласно определению, интервал со случайными концами $(g(\zeta, f_1), g(\zeta, f_2))$ является **доверительным** для a с уровнем доверия P_d.
Если имеем монотонное убывание φ по a, интервалом будет $(g(\zeta, f_2), g(\zeta, f_1))$.
Для построения односторонней границы для a выберем значения f_1 и f_2 так, чтобы

$$P\{\varphi(\zeta, a) \geq f_1\} \geq P_d, \qquad f_1 = Q(1 - P_d)$$

или

$$P\{\varphi(\zeta, a) \leq f_2\} \geq P_d, \qquad f_2 = Q(P_d)$$

где $Q(p)$ - квантиль уровня p. После разрешения неравенства под знаком P получим односторонние доверительные границы для a.

2 Доверительный интервал для среднего нормальной совокупности при известной и неизвестной дисперсии

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2 ... \xi_n)$ — выборка из нормальной $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ совокупности, σ^2 известна. Достаточной оценкой для a является

$$\widehat{a} = \widehat{a}(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \equiv \overline{\xi},$$

с распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2/n)$. Выполним нормировку и получим

$$\varphi(\overline{\xi}; a) = \frac{\overline{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$ **при любом** a.

По заданному уровню доверия P_d определим для φ симметричный интервал $(-f_p, f_p)$ так, чтобы он содержал в себе вероятность P_d, т.е.

$$P\{-f_p < \varphi < f_p\} = P_d$$

Ясно, что f_p есть квантиль порядка $\frac{1+P_d}{2}$ стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$. Заметим, что φ зависит от a, и равенство верно при любом значении a.
Подставим в равенство выражение для φ и разрешим неравенство под знаком вероятности относительно a. Получим соотношение

$$(1) \qquad P\left\{\overline{\xi} - f_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{\xi} + f_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P_d,$$

верное по-прежнему при любом значении a. Под знаком вероятности слева и справа имеем две функции наблюдений

$$a_1(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n) \equiv \overline{\xi} - f_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \qquad a_2(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n) \equiv \overline{\xi} + f_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

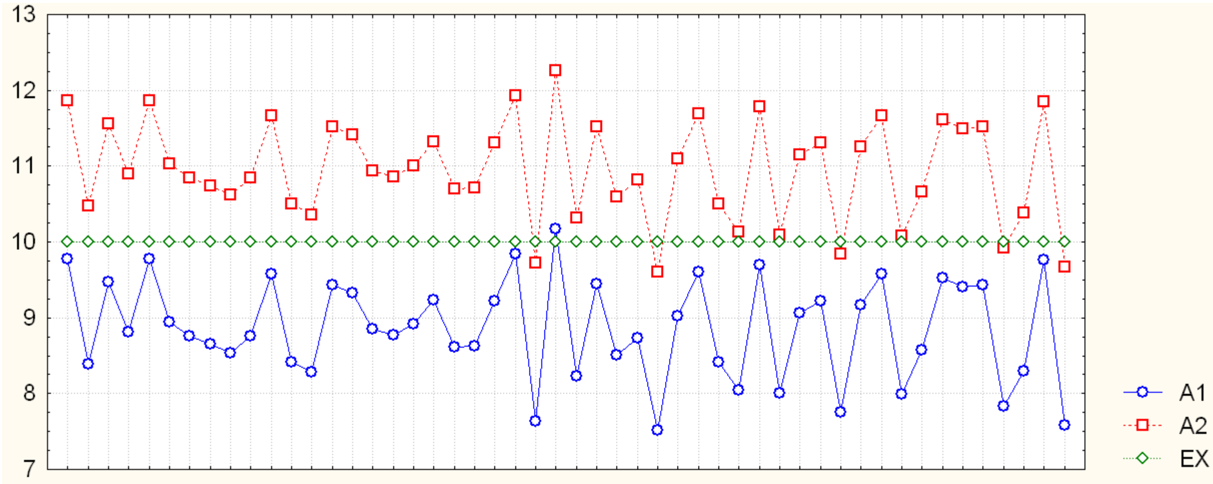
определяющие случайный интервал

$$I(\xi_1, \xi_2 ... \xi_n) = (a_1(\xi), a_2(\xi))$$

который в силу (1) накрывает неизвестное значение параметра a с большой вероятностью, равной P_d, при любом значении параметра a, и потому, по определению доверительного интервала, он является доверительным для a с уровнем доверия P_d.

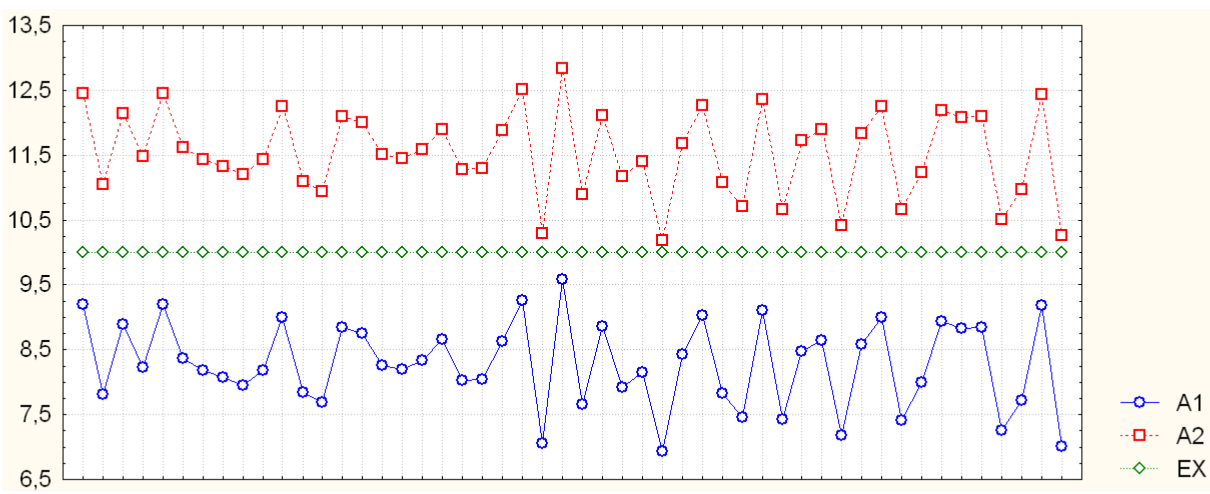
Испытаем полученный интервал на 50 выборках объема $n = 10$ для трех уровней доверия P_d: 0.9, 0.99 , 0.999 (соответственно, три значения f_p). Предполагаем:
При $P_d = 0.9$ число неверных из $k = 50$ результатов окажется в окрестности 5, так как среднее число неверных $k(1 - P_d) = 5$;
При $P_d = 0.99$ появление хотя бы одного неверного из $k = 50$ весьма вероятно: вероятность этого события $1 - P_d^k = 1 - 0.99^{50} \approx 0.4$;
При $P_d = 0.999$ появление хотя бы одного неверного весьма сомнительно: вероятность этого события $1 - P_d^k = 1 - 0.999^{50} \approx 0.05$.

1) $P_d = 0.95 \implies f_p = 1.65$

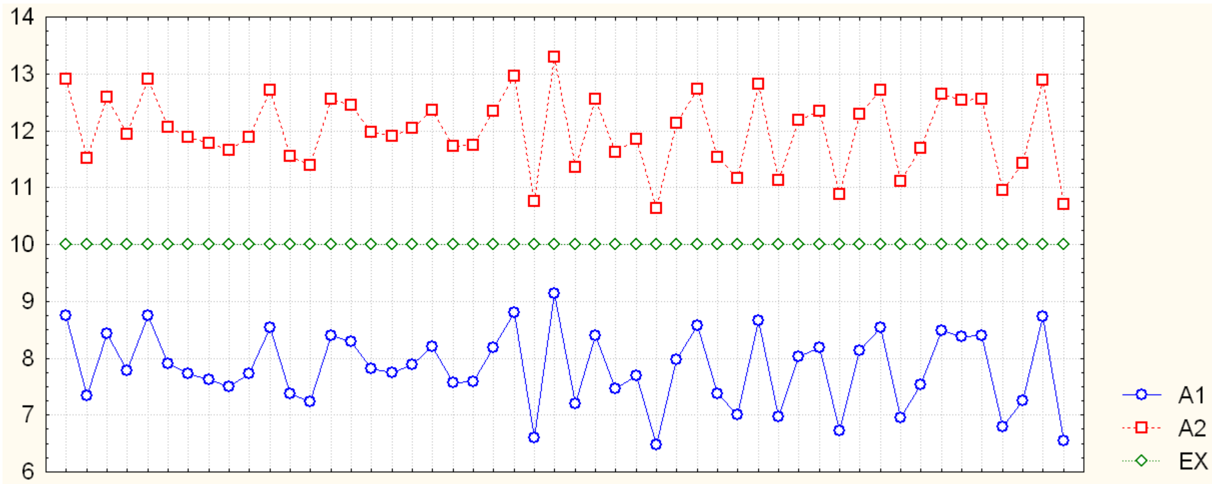


Как видим, из 50 испытаний 6 раз доверительный интервал оказался неверен.

2) $P_d = 0.995 \implies f_p = 2.57$



3) $P_d = 0.9995 \implies f_p = 3.29$



Видим, что для случаев 2) и 3) доверительный интервал оказался верным для всех испытаний.

Теперь пусть $x_1, ..., x_n$ - выборка с распределением $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Значения среднего a и дисперсии σ^2 неизвестны.
Оценки для a и σ^2:

$$\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \overline{x} \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Как известно, доверительным интервалом **для среднего** a с уровнем доверия P_d при неизвестной дисперсии является интервал (2)

$$I(x) = (a_1(x), a_2(x)),$$

где

$$a_1 = \overline{x} - t_p\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad a_2 = \overline{x} + t_p\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Здесь t_p - квантиль порядка $\frac{1+P_d}{2}$ распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Доверительным интервалом **для стандартного отклонения** σ с уровнем доверия P_d является интервал (3)

$$I(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x)),$$

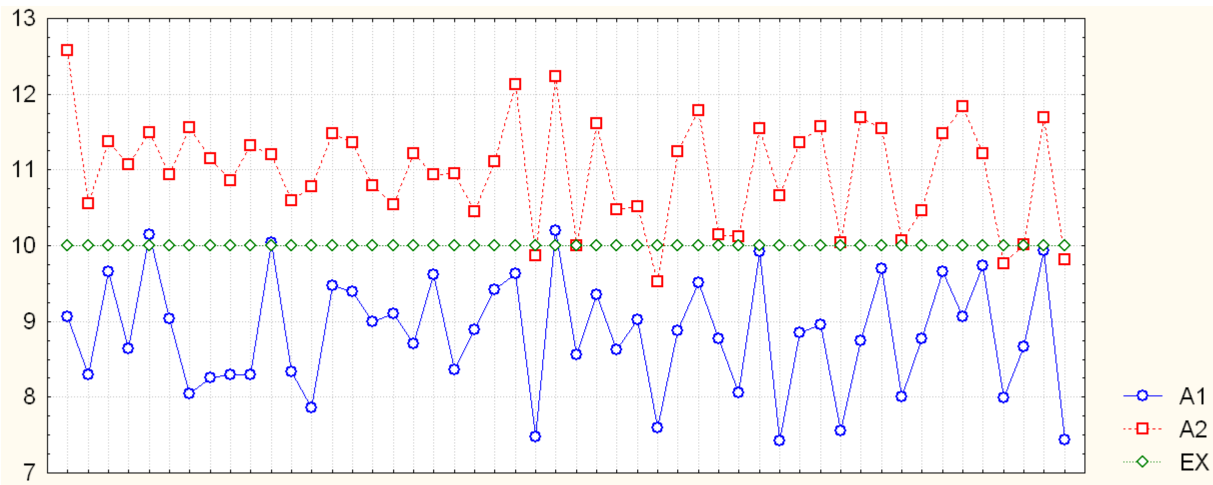
где

$$\sigma_1 = s\sqrt{\frac{n-1}{t_1}} \qquad \sigma_2 = s\sqrt{\frac{n-1}{t_2}}$$

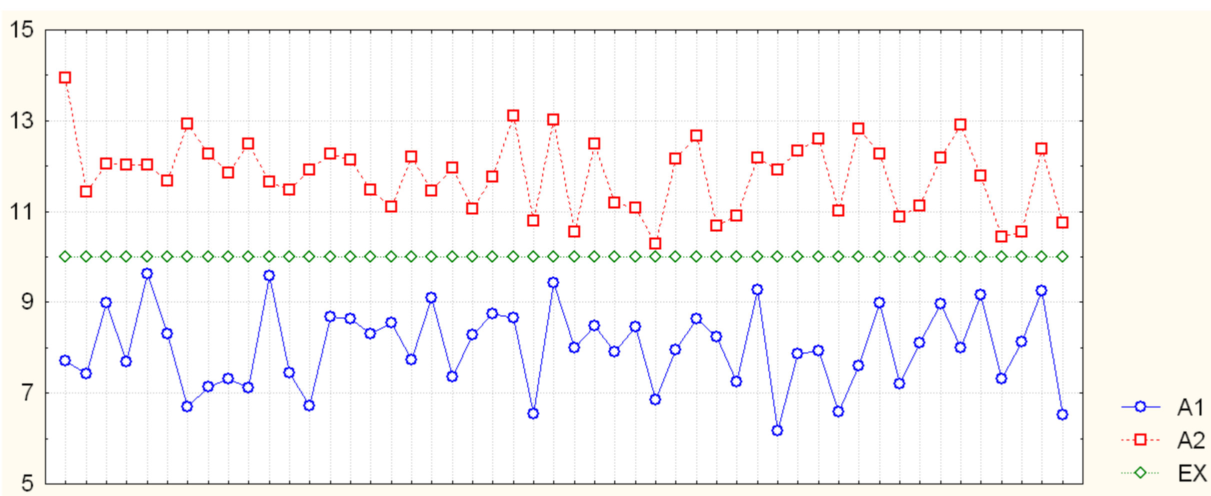
Испытаем интервал (2) на 50 выборках объема $n = 10$ для трех уровней доверия P_d: $0.95, 0.995, 0.9995$ (соответственно, три значения t_p). Приведу результаты в форме таблицы.

P_d	t_p
0.95	1.83
0.995	3.25
0.9995	4.78

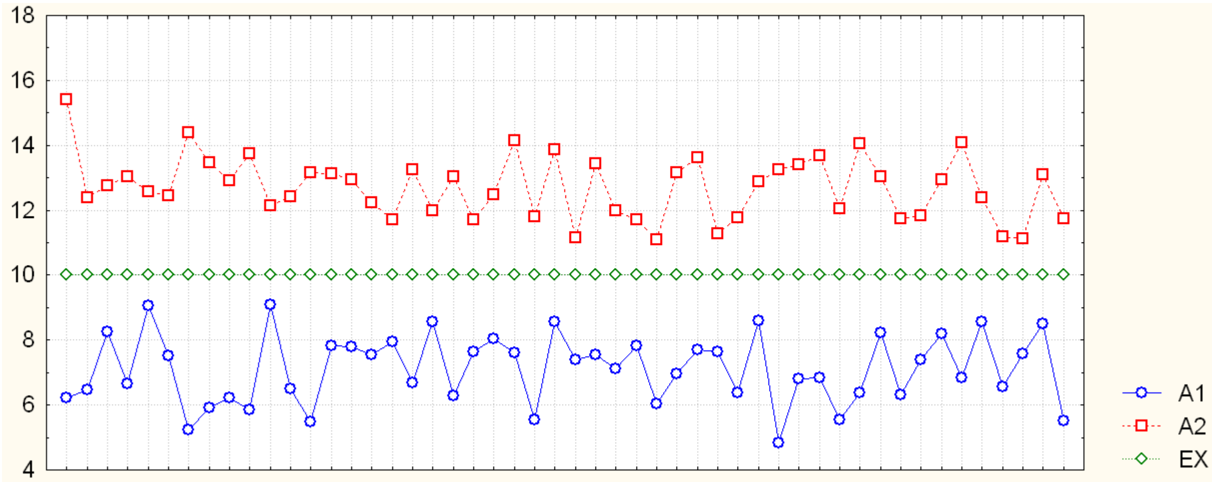
1) $P_d = 0.95 \implies t_p = 1.83$



2) $P_d = 0.995 \implies t_p = 3.25$



3) $P_d = 0.9995 \implies t_p = 4.78$



Сгенерируем выборку объема $n = 20$ с распределением $\mathcal{N}(10, 2^2)$ и определим доверительные интервалы для a с уровнями доверия $P_d : 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99$. Результаты выпишем в виде таблицы.

P_d	a_1	a_2
0.8	8.92	10.26
0.9	8.72	10.46
0.95	8.54	10.64
0.98	8.3	10.87
0.99	8.15	11.03

С ростом P_d интервал расширяется.

Определим верхнюю доверительную границу для σ с уровнем доверия $P_d = 0.95$. Верхней границей для σ с уровнем доверия P_d является

$$\sigma_2 = s\sqrt{\frac{n-1}{t_2}},$$

где t_2 - квантиль порядка $1 - P_d$ распределения χ^2_{n-1} (хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы).
Квантиль порядка $1 - P_d = 0.05$ распределения χ^2_{n-1}, где $n - 1 = 19$ степенями свободы $t_2 = 10.12$. Тогда получаем

$$\sigma_2 = s\sqrt{\frac{n-1}{t_2}} = 2.254\sqrt{\frac{19}{10.12}} = 3.0885$$

3 Задание на самостоятельную работу

Некоторое неизвестное расстояние a измерялось с аддитивной случайной ошибкой ε, распределенной по закону Коши с плотностью

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + x^2}$$

По результатам $x_1, ..., x_n$ независимых измерений методом порядковых статистик построить оценку для a и приближенный доверительный интервал с коэффициентом доверия P_d.

$$n = 50; \quad b = 5; \quad P_d = 0,95; \quad a = 25$$

Измерения получить моделированием с заданным параметром a.
Полученное измерение — это СВ ξ следующего вида: $\xi = a + \varepsilon$

Здесь ε — это СВ, распределённая по закону Коши с заданной плотностью. Поэтому плотность для одного наблюдения ξ имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + (x-a)^2}$$

Будем оценивать параметр a с помощью порядковых статистик. Заметим, что в силу симметрии данного распределения параметр a является медианой.

$$a = x_{1/2}$$

Поэтому имеем следующую оценку через выборочную медиану

$$\widehat{a} = x_{([n/2]+1)}$$

Нам известна **теорема Крамера**, которая гласит следующее: для непрерывных распределений с плотностью $q(x)$ оценка ζ_p асимптотически нормальна с параметрами

$$M\zeta_p = x_p \qquad D\zeta_p = \frac{1}{n}\frac{p(1-p)}{q^2(x_p)}$$

Для нашего случая имеем

$$M\zeta_p = a \qquad D\zeta_p = \frac{(\pi b)^2}{4n}$$

Тогда нормированная величина

$$\varphi(a, \widehat{a}) = \frac{\widehat{a} - a}{\sigma} = \frac{(\widehat{a} - a)2\sqrt{n}}{\pi b}$$

имеет распределение $\mathcal{N}(0, 1)$ при любом a

По заданному уровню доверия P_d определим для φ отрезок $[-f_p, f_p]$ так, чтобы

$$P\left\{-f_p < \varphi < f_p\right\} = P_d$$

т.е.f_p - квантиль порядка $\frac{1+P_d}{2}$ распределения $\mathcal{N}(0,1)$.
Заметим, что φ зависит от a, но равенство верно при любом значении a. Подставим в него выражение для φ и разрешим неравенство под знаком вероятности относительно a. Тогда получим

$$P\left\{\widehat{a} - f_p\frac{\pi b}{2\sqrt{n}} < a < \widehat{a} + f_p\frac{\pi b}{2\sqrt{n}}\right\} = P_d$$

Таким образом мы нашли доверительный интервал для a.

Сгенерируем выборку размера $n = 50$, распределенную по закону Коши с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + (x-a)^2} \qquad b = 5 \qquad a = 25$$

По данным выборки найдем статистическую оценку a и приближенный доверительный интервал с уровнем доверия $P_d = 0.95$.

51 A	52 A1	53 A2
24,669	22,837	26,502