Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ "МЭИ"

Институт информационных и вычислительных технологий

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Отчёт по лабораторной работе №6 "Различие двух простых гипотез"

Студент: Симаков А.М.
Преподаватель: Шевченко О.В.

Москва 2023

1 Введение

Пусть имеется совокупность наблюдений $\xi_=(\xi_1, ..., \xi_n)$, относительно которой имеется два предположения (гипотезы):

$$H_0 : \xi \sim p_0(x);$$
$$H_1 : \xi \sim p_1(x);$$

(если ξ - непрерывна, то $p_0(x), p_1(x)$- плотности, если дискретна - вероятности).

По ξ требуется принять одно из двух решений: или **верна** H_0 (это решение обозначим 0) или **верна** H_1 (решение 1). Ясно, что дело сводится к определению решающей функции $\delta(x)$, имеющей два значения 0 и 1, т.е. к определению разбиения $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ пространства X всех возможных значений x:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_0 \\ 1, & x \in \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = X, \qquad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$$

При использовании любой решающей функции $\delta(x)$ возможны ошибки двух типов:
ошибка 1-го рода: принятие H_1 при истинности H_0,
ошибка 2-го рода: принятие H_0 при истинности H_1.

Любая решающая функция характеризуется двумя условными вероятностями (1):

$$\alpha = P\{accept\_H_1|H_0\} = \int\limits_{\Gamma_1} p_0(x)dx$$
$$\beta = P\{accept\_H_0|H_1\} = \int\limits_{\Gamma_0} p_1(x)dx,$$

которые называются вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода соответственно. Хотелось бы иметь α и β близкими к нулю, но из (1) ясно, что, вообще говоря, если одна из них уменьшается, например, α (за счет уменьшения Γ_1), то другая, β, увеличивается (за счет увеличения Γ_0; $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = X$, $\Gamma_0 \setminus \Gamma_1 = \emptyset$). Существуют различные подходы к определению оптимального правила.

2 Подход Неймана-Пирсона

Оптимальным (в смысле Неймана-Пирсона) назовем такое правило, которое имеет заданную вероятность ошибки первого рода, а вероятность ошибки второго рода при этом минимальна. Формально, правило $\delta(x)$ (соответственно разбиение Γ) оптимально, если

$$\beta(\Gamma) = \min_{\Gamma'} \beta(\Gamma') : \alpha(\Gamma') \leq \alpha_0$$

Оказывается, для оптимального правила область Γ_1 такова (3):

$$\Gamma_1 = \left\{ x : \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq h \right\},$$

где h определяется из условия (4)

$$\alpha(h) = \alpha_0,$$

Замечание. Приведенный результат есть частный случай фундаментальной леммы Неймана - Пирсона, справедливой при условии, что существует корень h уравнения (4). Это условие не является существенно ограничивающим: действительно, при изменении h от 0 до ∞ область Γ_1 уменьшается, и $\alpha(h)$ уменьшается от 1 до 0. Можно, однако, привести примеры, когда $\alpha(h)$ имеет скачки, и тогда (3) требует некоторого простого уточнения.

3 Пример 1. Различение гипотез о среднем нормальной совокупности

На вход канала связи подается сигнал S, который может принимать два значения: $S = 0$ (сигнала нет), $S = a \neq 0$ (сигнал есть).

В канале действует аддитивная случайная ошибка $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Результатом является $x' = S + \varepsilon$. Измерения повторяются n раз, так что на выходе имеются наблюдения $(x_1, ..., x_n) \equiv x$, по которым нужно решить, есть ли сигнал ($H_1 : S = a$) или нет ($H_0 : S = 0$). Требуется построить решающее правило $\delta(x)$, имеющее заданную вероятность α_0 ошибки первого рода (вероятность ложной тревоги)

$$\alpha \equiv P\{accept\_H_1 | H_0\} = \alpha_0$$

при минимальном значении вероятности β ошибки второго рода (вероятности пропуска). Считая ошибки независимыми, с учетом того, есть ли сигнал (H_1) или его нет (H_0), имеем

$$p_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad p_0(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

В соответствии с (3), решение о наличии сигнала нужно принять (принять H_1), если x попадает в Γ_1, где

$$\Gamma_1 = \left\{x : \ln\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq \ln h_1 \equiv h_1\right\} = \left\{x : \frac{1}{2\sigma^2}\left(2a\sum_{i=1}^{n} x_i - na^2\right) \geq h_1\right\}$$
$$= \left\{x : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq h_2 \equiv \frac{h_1 2\sigma^2 + na^2}{2a}\right\}$$

Итак, если (5)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq h_2$$

то принимается H_1; в противном случае принимается H_0. Порог h_2 определяется из (4):

$$\alpha(h_2) = P\{accept\_H_1|H_0\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq h_2|H_0\right\} = \alpha_0$$

Если верна H_0, то $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mathcal{N}(0, n\sigma^2) \implies$ последнее условие принимает вид

$$\alpha(h_2) = 1 - \Phi\left(\frac{h_2}{\sqrt{n\sigma^2}}\right),$$

откуда (6)

$$h_2 = \sigma\sqrt{n}Q(1 - \alpha_0),$$

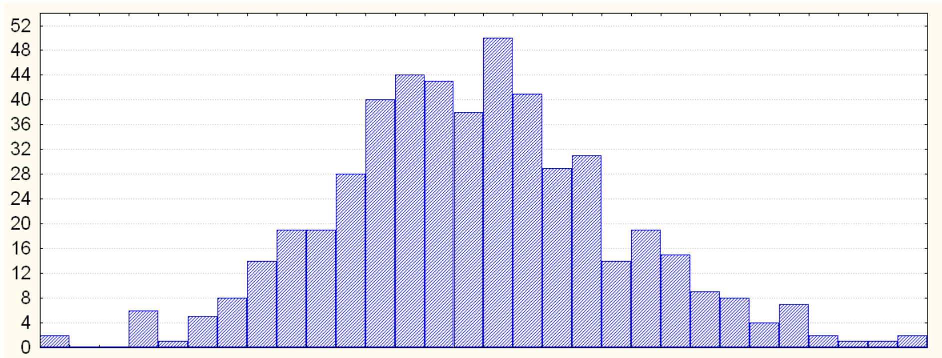
где $\Phi(x)$ - функция нормального $\mathcal{N}(0,1)$ распределения; $Q(1-\alpha_0)$ - квантиль порядка $(1-\alpha_0)$ того же распределения.

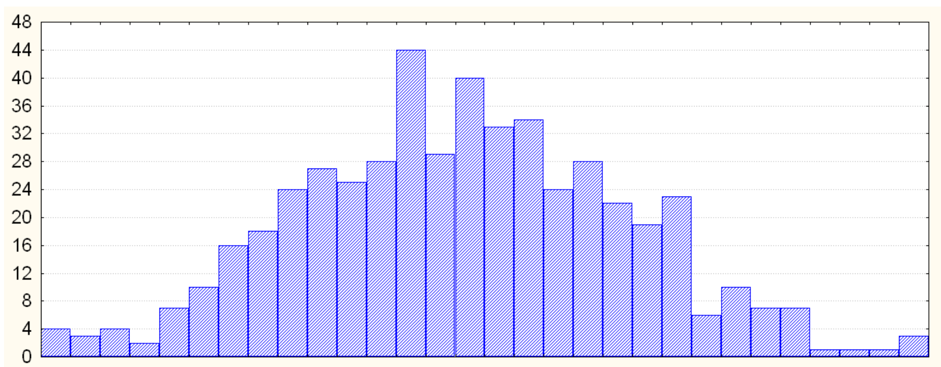
Определим вероятность β ошибки второго рода для процедуры (5) с порогом (6). Если верна H_1, то $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim \mathcal{N}(na, n\sigma^2) \implies$

$$\beta = P\{accept\_H_0|H_1\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i < h_2|H_1\right\} = \Phi\left(\frac{h_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(Q - \frac{a}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

Положим, $a = 0.2$, $\sigma = 1.0$ (т.е. ошибка σ в 5 раз больше сигнала a), $n = 500$, $\alpha = 10^{-2}$; при этом $h_2 = 1\cdot\sqrt{500}\cdot 2.33 = 52$, $\beta = \Phi(2.33 - 0.2\cdot 22.4) = \Phi(-2.14) = 1.6\cdot 10^{-2}$; как видим, вероятности ошибок невелики: порядка 10^{-2}

Гистограммы, когда верны H_0 и H_1:





Определим сумму наблюдений по каждой выборке и применим решающее правило с порогом $h_2 = 52$

SUM case 1-500	4,232	99,171

$S_0 = 4.232 < 52 \implies$ принимаем H_0
$S_1 = 99.171 \geq 52 \implies$ принимаем H_1
Убедились, что в обоих случаях решающее правило дает правильное решение

4 Задача 3. Бросание монеты

Петр утверждает, что умеет бросать монету так, что вероятность герба $P(\Gamma) = p$. Павел утверждает, что это невозможно и что $P(\Gamma) = p_0 = 0.5$

1. Определить необходимое число бросаний и статистическую процедуру (Неймана-Пирсона) определения, кто из них прав. Обеспечить заданные вероятности α и β ($\alpha = \beta$) ошибок первого и второго рода. Смоделировать две выборки при $p = p_0$ и $p = p_1$, применить к ним процедуру и выяснить, верные ли решения принимаются.

2. Построить последовательную процедуру разрешения спора. Определить среднее число наблюдений и функцию мощности, как функцию параметра p_1. Смоделировать процесс наблюдения и принятия решения в двух случаях (по одной реализации). Изобразить его графически.

Сравнить число бросаний для процедур 1 и 2.
$p = 0.7, \alpha = \beta = 0.05$

Пусть $x \equiv (x_1, ..., x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ - полученные результаты эксперимента с вероятностями $P(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$
Запишем два варианта закона распределения наблюдений:
если верна гипотеза H_0, то

$$P_0(x) = \prod_{i=1}^{n} P\{x_i|H_0\} = \prod_{i=1}^{n} p_0^{x_i}(1-p_0)^{1-x_i} = \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p_0)^n$$

если верна гипотеза H_1, то

$$P_1(x) = \prod_{i=1}^{n} P\{x_i|H_1\} = \prod_{i=1}^{n} p_1^{x_i}(1-p_1)^{1-x_i} = \left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p_1)^n$$

Здесь $\sum_{i=1}^{n} x_i$ - число выпадений герба.

Процедура Неймана-Пирсона
Вид решающего правила
Область принятия гипотезы H_1:

$$\Gamma_1 = \left\{x : \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \geq h\right\},$$

где $h, n : \alpha = \beta = 0.05$

$$\Gamma_1 = \left\{ x : \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \geq h \right\} = \left\{ x : \frac{\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p_1)^n}{\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p_0)^n} \geq h \right\} = \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i \geq h_1 \right\}$$

Здесь в h_1 вошли все величины, кроме наблюдений (после логарифмирования и переноса)

Имеем

$$\begin{cases} \alpha(n,h) = P\{accept\_H_1|H_0\} = 0.05 \\ \beta(n,h) = P\{accept\_H_0|H_1\} = 0.05 \end{cases}$$

$$\alpha = P\{accept\_H_1|H_0\} = P\left\{\sum_{i=1}^n x_i \geq h_1|H_0\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^n x_i < h_1|H_0\right\} \approx$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{h_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = 0.05 \implies \frac{h_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = 1.65$$

Здесь $\sum_{i=1}^n x_i$ - решающая статистика (количество успехов), так же учтено, что если верна H_0, то

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim \mathcal{B}(n, p_0) \approx \mathcal{N}(np_0, np_0q_0)$$

Если же верна H_1, то

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim \mathcal{B}(n, p_1) \approx \mathcal{N}(np_1, np_1q_1),$$

и

$$\beta = P\{accept\_H_0|H_1\} = P\left\{\sum_{i=1}^n x_i < h_1|H_1\right\} \approx \Phi\left(\frac{h_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) \implies$$
$$\frac{h_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} = -1.65$$

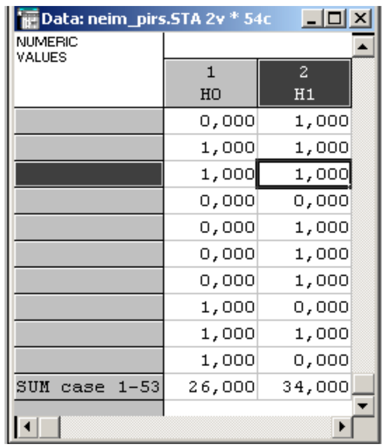
Получили систему

$$\begin{cases} \frac{h_1 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = 1.65 \\ \frac{h_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} = -1.65 \end{cases} \implies n = 53, \quad h_1 = 32.45$$

Таким образом, решающая процедуры выглядит так:

$$\sum_{i=1}^{53} x_i < 32.45 \implies H_0 = \{\text{ Пётр не может }\}$$
$$\sum_{i=1}^{53} x_i \geq 32.45 \implies H_1 = \{\text{ Пётр может }\}$$

Сгенерируем две выборки объема $n = 53$ в соответствии с гипотезами H_0 и H_1. Определим сумму наблюдений по каждой выборке и применим решающее правило.


Data: neim_pirs.STA 2v * 54c

NUMERIC VALUES	1 H0	2 H1
	0,000	1,000
	1,000	1,000
	1,000	1,000
	0,000	0,000
	0,000	1,000
	0,000	1,000
	0,000	1,000
	1,000	0,000
	1,000	1,000
	1,000	0,000
SUM case 1-53	26,000	34,000

Если верна H_0, то $\sum_{i=1}^{53} x_i = 26 < 32.45$
Если верна H_1, то $\sum_{i=1}^{53} x_i = 34 \geq 32.45$
Результаты эксперимента подтверждают что в обоих случаях решающее правило дает правильный результат.

Последовательная процедура

$$H_0 : P(\Gamma) = p_0 = 0.5$$
$$H_1 : P(\Gamma) = p_1 = 0.7$$

1. Решающее правило

Условие продолжения наблюдений имеет вид: $\ln B < \ln p < \ln A$

$$\ln p = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \ln \frac{p_1}{p_0} \frac{1-p_0}{1-p_1} + \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} \right) = c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + nc_2$$
$$c_1 = \ln \frac{p_1}{p_0} \frac{1-p_0}{1-p_1} = \ln \frac{0.7}{0.3} = 0.85, \quad c_2 = \ln \frac{1-p_1}{1-p_0} = \ln \frac{0.3}{0.5} = -0.51$$

Тогда получаем следующее

$$\beta(n) \equiv \frac{1}{c_1}(\ln B - nc_2) < \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{1}{c_1}(\ln A - nc_2) \equiv \alpha(n)$$

2. Пороги

$$A \approx A' = \frac{1-\beta}{\alpha} = 19, \quad B \approx B' = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{1}{19} \approx 0.053$$

$$\ln A = 2.94 \implies \alpha(n) = \frac{1}{0.85}(2.94 + 0.51n) = 3.46 + 0.59n$$

$$\ln B = -2.94 \implies \beta(n) = \frac{1}{0.85}(-2.94 + 0.51n) = -3.46 + 0.59n$$

Если для $\sum_{i=1}^{n} x_i$ - числа выпадений герба за n бросков верно

$$-3.46 + 0.59n < \sum_{i=1}^{n} x_i < 3.46 + 0.59n,$$

то наблюдения продолжаются до момента нарушения хотя бы одного из неравенств. Тогда получаем

$$-3.46 + 0.59n \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \implies \text{принимаем } H_0$$

$$3.46 + 0.59n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \implies \text{принимаем } H_1$$

3. Среднее число наблюдений

$$M(n|H_1) = \frac{(1-\beta)\ln A + \beta \ln B}{M(\tau|H_1)} = \frac{2.646}{0.085} \approx 32$$

$$M(\tau|H_1) = M\left(\ln \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right) = M(c_1 x + c_2) = p_1 c_1 + c_2 = 0.085$$

Аналогично

$$M(n|H_0) = \frac{\alpha \ln A + (1-\alpha)\ln B}{M(\tau|H_0)} = \frac{-2.646}{-0.085} \approx 32$$

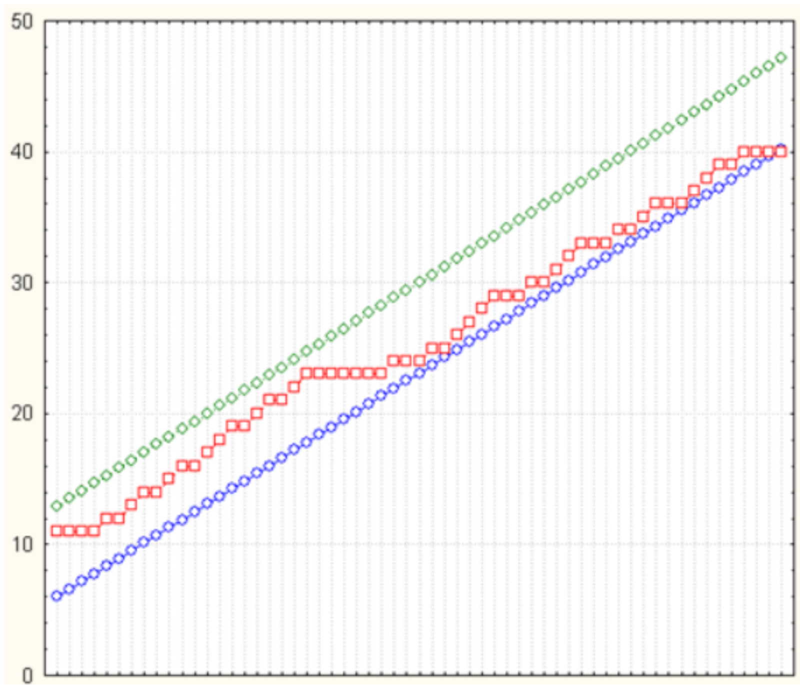
4. Моделирование

Сгенерируем две выборки не фиксированного объема n в соответствии с гипотезами H_0 и H_1. Определим сумму наблюдений по каждой выборке и применим решающее правило.

В случае верности гипотезы H_0: $n = 74$

37,250	39,000	44,170
37,840	39,000	44,760
38,430	40,000	45,350
39,020	40,000	45,940
39,610	40,000	46,530
40,200	40,000	47,120

График

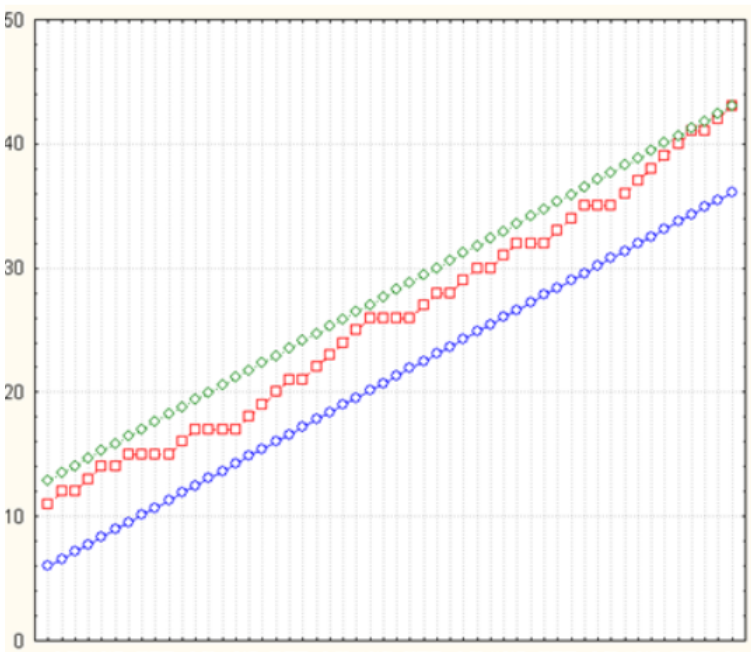


Получили верный результат (верна гипотеза H_0)

В случае верности гипотезы H_1: $n = 67$

33,120	39,000	40,040
33,710	40,000	40,630
34,300	41,000	41,220
34,890	41,000	41,810
35,480	42,000	42,400
36,070	43,000	42,990

График



Получили верный результат (верна гипотеза H_1)