وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الجزيرة

كلية العلوم والهندسة

قسم الحاسبات

برنامج تقنية معلومات

مستوى ثاني

رياضيات متقطعة
Discrete Mathematics

Huda Al-Shaikh

2023-2024

مقدمـة:

نعلم أن الرياضيات Mathematics هو كل شيء له قيمة حقيقة لأي مفهوم مُعرف بصورة جيدة. وهذا المفهوم يمكن أن يكون حول الأرقام، الرموز، الكائنات، الصور، الأصوات،...إلخ.

Mathematics is, most generally, the study of <u>any and all</u> *absolutely certain* truths about <u>any and all</u> *perfectly well-defined* concepts.

- **But, these concepts can be *about* numbers, symbols, objects, images, sounds, *anything*!**

والمتقطع Discrete تعني الأجزاء المنفصلة أي عكس المستمر. فالرياضيات المتقطعة هي دراسة الهياكل و الأشياء الرياضية المتقطعة.

- **"*Discrete*" (≠ "discreet"!) - Composed of distinct, separable parts. (Opposite of *continuous*.)**
  discrete:continuous :: digital:analog
- **"*Structures*" - Objects built up from simpler objects according to some definite pattern.**
- **"*Discrete Mathematics*" - The study of discrete, mathematical objects and structures.**

الهدف من دراسة Discrete Mathematics هو تعلم كيفية تحويل مشكلة حقيقية إلى مسألة رياضية بحيث يستطيع الحاسب فهمها وتحليلها للوصول إلى حل مناسب.

وخلال المقرر سوف نناقش مجموعة من المفاهيم الأساسية مثل:

- Logic Algebra
- Sets Theory
- Functions

- Algorithms
- Equivalence Relations
- Graphs
- Proof Strategies
- Summations
- Trees.

Logic

– Propositional Logic:

– تعريف Proposition:

هو جملة إعلامية (تعني الجملة التي تصرح بقيمة الحقيقة) أي تحمل الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً.

أمثلة:

س: هل الجمل التالية تعبر عن Proposition ؟ حدد True أو False؟

- صنعاء عاصمة اليمن. [تمثل Proposition]
- هل حضر محمد الدرس؟ [لا تمثل Proposition] .. لماذا؟
- افتح الباب! [لا تمثل Proposition] .. لماذا؟
- X+3>7. [لا تمثل Proposition] .. لماذا؟
- هو طالب مجتهد. [لا تمثل Proposition] .. لماذا؟

لاحظ أن ..

- غالباً تستخدم Small Letters للتعبير عن متغيرات الجملة مثل p,q,r,s …
- قيمة الصواب يرمز لها بالرمز T أو 1 وقيمة الخطأ F أو 0.

– Compound Propositions:

تعريف:

هي جملة إعلامية جديدة تنتج من مجموعة جمل إعلامية موجودة يتم الربط بينها بمجموعة عمليات منطقية أو روابط.

- **العمليات المنطقية أو الروابط:**

* Not   * Exclusive Or   * And   Or   *Implication

*   *Biconditional

– Negation of a Proposition [Not]:

تعريف:

إذا رمزنا للجملة الإعلامية بالرمز p فإن نفي الجملة الإعلامية يرمز لها بالرمز p~ وهي جملة تعني not p.

مثال:

- إذا كانت p : 3 عدد سالب   فإن   ~p : 3 ليست عدد سالب
- إذا كانت p : اليوم هو الجمعة   فإن   ~p : اليوم ليس الجمعة

أي أن p~ يمثل عكس قيمة الحقيقة لـ p.

- جدول الحقيقة (Not):

p	~p
T	F
F	T

– Conjunction (And) :

<u>تعريف:</u>

إذا كانت p , q تمثل جمل إعلامية "proposition" فإن $p \wedge q$ (تقرأ p And q) تمثل جملة إعلامية،

وتكون $p \wedge q$ صائبة عندما يكون كل من p , q صائب وخاطئة في غير ذلك.

<u>مثال:</u> إذا كانت

p : محمد طالب جامعي

q : اليوم هو الجمعة

فإن $p \wedge q$: محمد طالب جامعي واليوم هو الجمعة

– جدول الحقيقة ($\wedge$):

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

– Disjunction (OR) :

<u>تعريف:</u>

إذا كانت p , q تمثل جمل "proposition" فإن $p \vee q$ (تقرأ p Or q) تمثل جملة،

وتكون $p \vee q$ خاطئة عندما يكون كل من p , q خاطئ وصحيحة في غير ذلك.

مثال: إذا كانت

محمد طالب جامعي : p

اليوم هو الجمعة : q

فإن محمد طالب جامعي أو اليوم هو الجمعة $p \vee q$

- جدول الحقيقة ($\vee$):

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Exclusive OR (XOR) :

تعريف:

إذا كانت p , q تمثل جمل "proposition" فإن $p \oplus q$ (تقرأ p XOR q) تمثل جملة، وتكون $p \oplus q$ صائبة عندما بالضبط يكون أحد من p , q صائب وخاطئة في غير ذلك.

مثال: إذا كانت

محمد ناجح في مادة الحاسوب : p

محمد راسب في مادة الحاسوب : q

فإن محمد ناجح أو راسب في مادة الحاسوب : $p \oplus q$

- جدول الحقيقة (XOR):

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

* مثال يوضح الفرق بين OR , XOR :

– لدى أحمد أخ أو أخوين.

لا يمكن تنفيذ الحالتين معاً وبالتالي or تعبر عن حالة exclusive, [XOR].

–الطالب المسجل في قسم الحاسوب لديه اختبار قبول أو يدرج في قسم الرياضيات.

يمكن أن تنفذ حالة منهما أو الحالتين معاً لذلك or تعبر عن حالة inclusive, [OR] .

– Composite Statements:

يمكن ربط الجمل مع العمليات بطريقة معينة لتشكل جمل جديدة مثل الجملة $\sim p \vee \sim q$ ويتم تمثيلها في جدول الحقيقة Truth Table كالتالي:

p	q	~p	~q	~p or ~q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

مثال : تحويل جملة تعبيرية إلى Propositional Logic :

أنا لا استطيع شراء الهاتف هذا الأسبوع أو اشتريت الهاتف و حصلت على المال يوم الجمعة.

الحل:

نفرض اشتريت الهاتف :p

ونفرض حصلت على المال يوم الجمعة :q

فإن الجملة " أنا لا استطيع شراء الهاتف هذا الأسبوع أو اشتريت الهاتف و حصلت على المال يوم الجمعة" ، يمكن تمثيلها بالطريقة التالية:

$$\sim p \vee (p \wedge q)$$

– **Conditional Statements:**

* **Implication:**

تعريف:

إذا كانت p , q تمثل جمل "proposition" فالجملة الشرطية $p \rightarrow q$ (تقرأ if p then q) تمثل جملة، وتكون الجملة الشرطية خاطئة عندما يكون p صائب و q خاطئ وصحيحة في غير ذلك. وفي هذه الحالة تسمى p فرضية أو مسلمة وتسمى q استنتاج أو نتيجة.

– جدول الحقيقة (if $\rightarrow$ then):

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

* **Biconditional Statements (bi – implication) :**

تعريف:

إذا كانت p , q تمثل جمل "proposition" فالجملة الشرطية $p \leftrightarrow q$ (تقرأ p if and only if q) تمثل جملة،

وتكون الجملة الشرطية صائبة عندما يكون p و q لهما نفس قيم الحقيقة وخاطئة في غير ذلك.

– جدول الحقيقة (if and only if):

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تمرين (واجب):

1 – اكتب العبارات التالية رمزياً:

- تمطر السماء كلما كان الجو مشمس.
- إذا كانت الفئران تستطيع الطيران فإن 1+1=5.

2– نفرض الجمل التالية :

p : حصلت ساره على تقدير ممتاز في الاختبار النهائي. q : ساره اجابت على كل تمارين المقرر. r : حصلت ساره على تقدير ممتاز في هذا الفصل.

اكتب العبارات التالية تعبيرياً:

* $\sim p$ * $p \vee q$ * $p \to q$

* $p \wedge q$ * $p \leftrightarrow q$ * $\sim p \to \sim q$

* $\sim p \wedge \sim q$ * $\sim p \vee (p \wedge q)$

Propositional Equivalences:

تعرف أولاً على المفاهيم التالية :

Tautology*

هي الجملة المركبة التي تحمل دائماً قيمة الصواب بغض النظر عن قيم كل جملة فيها.

مثال:

1- $r \vee (\sim r)$

2- $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

< تأكد من ذلك باستخدام جدول الحقيقة >

Contradiction*

هي الجملة المركبة التي تحمل دائماً قيمة الخطأ بغض النظر عن قيم كل جملة فيها.

مثال:

1- $r \wedge (\sim r)$

2- $\sim (\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q))$

< تأكد من ذلك باستخدام جدول الحقيقة >

Logical Equivalence:

تعريف:

تسمى جملتين مركبتين بـِ Logical Equivalence إذا وفقط إذا كانت تمتلك نفس قيم الحقيقة في كل الحالات المحتملة.

تعريف آخر :

إذا كان لدينا الجمل المركبة p , q فتسمى Logical Equivalence إذا كان $p \leftrightarrow q$ هو tautology.

لاحظ أن ..

- يرمز لِ Logical Equivalence بالرمز $p \equiv q$ وأحياناً يستخدم الرمز $p \Leftrightarrow q$.

مثال: اثبت باستخدام <u>جدول الحقيقة</u> أن : $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ ؟

الحل:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

من خلال الجدول نلاحظ أن قيم $p \vee q$ هي نفس قيم $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ في كل الحالات وبالتالي فإن $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

هذا يمثل طريقة اثبات التكافؤ المنطقي للجمل المركبة باستخدام جدول الحقيقة،

ويمكن أيضاً اثبات ذلك عن طريق القوانين، فيما يلي مجموعة من القوانين المنطقية التي تساعدك في ذلك:

- **<u>De Morgan's laws قوانين دي مورغان</u>** :

1. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

– Laws of Logic :

1. Commutative laws

$p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$

2. Associative laws

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$; $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

3. Distributive laws

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4. Identity laws

$p \wedge T \equiv p$; $p \vee F \equiv p$

5. Negation laws

$p \vee \sim p \equiv T$; $p \wedge \sim p \equiv F$

6. Double negation law

$\sim(\sim p) \equiv p$

7. Idempotent laws

$p \wedge p \equiv p$; $p \vee p \equiv p$

8. Universal bound laws

$p \vee T \equiv T$; $p \wedge F \equiv F$

9. Absorption laws

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$; $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

10. Negation of T and F

$\sim T \equiv F$; $\sim F \equiv T$

وباستخدام المكافئات يمكن تعريف العمليات التالية:

- XOR

  $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

  $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

- Implies:

  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

- Biconditional:

  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \oplus q)$

مثال:

اثبت صحة التالي باستخدام القوانين المنطقية:

$$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

الحل:

نأخذ الطرف $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

$\equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$ (by De Morgan's laws)

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$, (by double negative law)

$\equiv p \vee (\sim q \wedge q)$, (by distributive law)

$\equiv p \vee (q \wedge \sim q)$, (by the commutative law)

$\equiv p \vee F,$ (by the negation law)

$\equiv p,$ (by the identity law)

وبالتالي فإن $(p \vee q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$ و p متكافئتان.

مثال2:

اثبت صحة التالي باستخدام القوانين المنطقية:

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \oplus r) \equiv \sim p \vee q \vee \sim r.$$

الحل:

نأخذ الطرف $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \oplus r)$

$\equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee (p \oplus r)$

$\equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \wedge r))$

$\equiv (\sim p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \wedge r))$

$\equiv q \vee \sim p \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \wedge r))$

$\equiv q \vee (\sim p \vee ((p \vee r) \wedge \sim(p \wedge r))$

$\equiv q \vee (\sim p \vee (p \vee r)) \wedge (\sim p \vee \sim(p \wedge r))$

$\equiv q \vee ((\sim p \vee p) \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim (p \wedge r))$

$\equiv q \vee (\sim p \vee \sim(p \wedge r))$

$\equiv q \vee (\sim p \vee (\sim p \vee \sim r))$

$\equiv q \vee ((\sim p \vee \sim p) \vee \sim r))$

$\equiv q \vee (\sim p \vee \sim r)$

تمارين (واجب):

بين تكافؤ العبارات التالية باستخدام جدول الحقيقة مرة وباستخدام القوانين مرة أخرى:

- $\sim p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $q \rightarrow (p \vee r)$
- $(p \Lambda (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, T.

Predicate and Quantifiers:

A Predicates:

تعريف:

هي الجملة التي تحتوي عدد محدد (منتهي) من المتغيرات وتصبح جملة تصريحية Proposition عند وضع قيم محددة للمتغيرات.

The domain of predicate:

المجال أو نطاق التعريف هو مجموعة كل القيم التي قد تعطى للمتغير، ونرمز له بالرمز D.

Truth set:

إذا كانت P(x) هي Predicate و x متغير ومجاله D، مجموعة الحقيقة لِ P(x) هو مجموعة كل العناصر في D التي تجعل P(x) صائبة عند اعطائها قيم لِ x.

نرمز لمجموعة الحقيقة لِ P(x) بالرمز Tp ويعرف بالشكل:

$$Tp = \{x : x \in D, P(x) \text{ is true}\}$$

$$Tp = \{x : P(x)\}$$

A predicate is a sentence which contains finite number of variables and becomes a statement when specific values are substituted for the variables.

The domain of a predicate variable is the set of all values that may be substituted in place of the variable

Truth Set
If P(x) is a predicate and x has domain D, the truth set of P(x) is the set of all elements of D that make P(x) true when substituted for x. The truth set of P(x) is denoted by

$$\{x \in D \mid P(x)\}$$

read as "the set of all x in D such that P(x)".

مثال1: لنفرض $P(x) = x > 7$ فإن

$P(x)$ has no value < x قيمة مجهولة >

$P(3)$ is false < 3 ليست أكبر من 7 >

$P(8)$ is true < 8 أكبر من 7 >

مثال2: لنفرض $P(x, y, z) = x + y > z$ فإن

$P(x,3,5)$ has no value < لماذا؟ >

$P(3,2,4)$ is true < لماذا؟ >

$P(2,4,8)$ is false < لماذا؟ >

<u>تعريف:</u>

لأي فرضيتين two predicates هما $P(x)$, $Q(x)$ فإن :

- الرمز $Q(x) \Rightarrow P(x)$ يعني بأن أي عنصر في مجموعة الحقيقة لِ $P(x)$ هو في مجموعة الحقيقة لِ $Q(x)$.
- الرمز $Q(x) \Leftrightarrow P(x)$ يعني بأن $P(x)$ و $Q(x)$ تمتلكان مجموعة حقيقة متماثلة.

مثال: لنفرض $P(x) = x > 0, \ x \in R$ فإن مجموعة الحقيقة هي

$$\{x \in R+ \ : x > 0 \}$$

مثال: نفرض $P(x) = x$ هي عوامل العدد 8

و $Q(x) = x$ هي عوامل العدد 4

و $R(x) = x < 5$

فإن :

1− مجموعة الحقيقة لِ $P(x)$ هي $\{1,2,4,8\}$

و $Q(x)$ هي $\{1,2,4\}$

نلاحظ أن كل عنصر في مجموعة الحقيقة لِ $Q(x)$ هو في مجموعة الحقيقة لِ $P(x)$ لذلك فإن $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

2− مجموعة الحقيقة لِ $R(x)$ هي $\{1, 2, 4\}$ و التي تماثل مجموعة الحقيقة لِ $Q(x)$ لذلك فإن $R(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

مثال: نفرض $Q(x, y) : x + y = x - y$ حيث مجال x, y هو مجموعة كل الأرقام الحقيقية، حدد قيم الحقيقة لِ :

1− $Q(5, -2)$

2− $Q(4.7, 0)$

3− حدد مجموعة أزواج الأرقام التي تحقق صواب $Q(x, y)$؟

الحل:

1− it is false … or $3=7$ $Q(5, -2) = 5+(-2) = 5-(-2)$

2− it is true … $Q(4.7, 0) = 4.7+0 = 4.7-0$

3− $x+2y=x$ if and only if $x+y=x-y$

والتي تكون صائبة إذا وفقط إذا كان $y=0$، لذلك يمكن لِ x أن تكون أي عدد حقيقي و y يجب أن تكون صفر.

Universal Quantifier:

تعريف :

نفرض $Q(x)$ هي فرضية Predicate و D هو مجال لِ x فإن المحدد العام Universal Quantifier تكون بالشكل " $\forall x \in D , Q(x)$ "

وتكون صائبة إذا وفقط إذا كان $Q(x)$ صائب لكل x في D

وخاطئة إذا وفقط إذا كان $Q(x)$ خاطئة لِ x واحد على الأقل في D.

قيمة x التي تجعل $Q(x)$ خاطئة تسمى Counter example للمحدد العام.

مثال : نفرض $D= \{ 1,2,3,4,5\}$ ولنثبت أن الجملة $x^2 \geq x$ صائبة؟

الحل : نختبر صواب " $x^2 \geq x$ " لكل x في D كالتالي :

$$\forall x \in D , x^2 \geq x$$

$$1^2 \geq 1$$

$$2^2 \geq 2$$

$$3^2 \geq 3$$

$$4^2 \geq 4$$

$$5^2 \geq 5$$

لذلك فإن $\forall x \in D , x^2 \geq x$ هي صائبة.

مثال : نفرض $\forall x \in R , x^2 \geq x$ ، أوجد Counter example التي تثبت أنها غير صائبة؟

الحل:

نأخذ $x = 1/2$ ، فإن x في R،

$$(1/2)^2 \leq (1/2)$$

لذلك فإن $\forall x \in R , x^2 \geq x$ هي خاطئة.

Existential Quantifier:

<u>تعريف :</u>

نفرض $Q(x)$ هي فرضية Predicate و D هو مجال لـِ x فإن المحدد الوجودي Existential Quantifier يكون بالشكل

" $\exists\, x \in D$ such that $Q(x)$ "

وتكون صائبة إذا وفقط إذا كان $Q(x)$ صائب لكل x على الأقل في D

و خاطئة إذا وفقط إذا كان $Q(x)$ خاطئة لكل x في D.

الرمز $\exists$ يرمز إلى " يوجد هنا" .

مثال : نفرض " $x < /x/$ " : $P(x)$ ، حدد قيم الحقيقة $\exists x$ حيث المجال لـِ x هو :

1- $\{1, 2, 3\}$

2- $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

الحل:

1- $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ هي كلها خاطئة لأي حالة $x=/x/$ ، لذلك يوجد على الأقل x بحيث تكون $P(x)$ خاطئة لهذا المجال.

2- إذا بدأنا نختبر القيم لـِ x ، سنجد $P(-2)$ صائبة حيث أنه $-2 < /-2/$ ، لذا لا نحتاج أن نختبر حالات أكثر لامتلاك حالة واحدة تجعل الفرضية صائبة وهي كافية لتضمن أنه يوجد على الأقل x بحيث تكون $P(x)$ صائبة.

مثال : نفرض أن $D = \{5,6,7,8,9,10\}$ ، أثبت أن الجملة $\exists\, m \in D : m^2=m$ خاطئة؟

الحل:

الجملة ليست صائبة لكل القيم في D ولذلك فإن $\exists\, m \in D : m^2=m$ هي خاطئة.

< يتم التعويض للتأكد من ذلك >

مثال : أعد كتابة الجمل التالية تعبيرياً:

1- $\forall\, x \in R ,\ x^2 \geq 0$

2- $\forall\, x \in R ,\ x^2 \neq -1$

3- $\exists\, m \in Z ,\ m^2 = m$

الحل:

1- يمكن كتابة الجملة بطرق مختلفة مثل:

كل الأعداد الحقيقية ليس لها مربعات سالبة.

لا يوجد عدد حقيقي له مربع سالب.

X ليس له مربع سالب، لكل قيم x .

2- كل الأعداد الحقيقية مربعها لا يساوي -1.

لا يوجد عدد حقيقي له مربع يساوي -1.

3- هناك عدد صحيح مربعه يساوي نفسه.

يمكن أن نجد على الأقل عدد صحيح يساوي مربعه.

مثال : اكتب الجمل التالية باستخدام Predicates :

F(x) : " x is a freshman "

T(x, y) : " x is taking y "

حيث x يمثل الطلاب ، و y يمثل المقررات

الحل: $\exists x (F(x) \wedge T(x, \text{Discrete math}))$

هذه الجملة تخبر بأن هناك طالب x له صفتين : x is freshman و x taking Discrete math .

تمرين : (واجب)

س: حدد قيم الحقيقة لكل من الجمل التالية حيث المجال لِ x هو مجموعة الأعداد الصحيحة N :

- $\forall n \, (n^2 \geq 0)$
- $\exists n \, (n^2 = 2)$
- $\forall n \, (n^2 \geq n)$
- $\exists n \, (n^2 < 0)$

Introduction to Proof:

تعريف:

البرهان هو خطوات تبين المطلوب برهنته (عبارة رياضية) وتتم باستخدام النظريات المبرهنة مسبقاً والمعطيات Hypotheses والفرضيات Postulates والمسلمات Axiomsوالبديهيات Premises.

طرق البرهان هذه لها أهمية كبيرة ليس فقط لبرهان النظريات الرياضية وإنما لها تطبيقات مختلفة في علوم الحاسوب. تتضمن هذه التطبيقات التحقق من صحة البرمجيات وأنظمة التشغيل.

Inference Rules – General Form:

قواعد الاستدلال هي مجموعة من القوانين الثابتة تستخدم لإثبات صحة الاستنتاج للفرضية المطلوبة.
وهنا بعض من قواعد الاستدلال:

P		$\therefore p \vee q$	Rule of Addition
$p \wedge q$		$\therefore p$	Rule of simplification
p	q	$\therefore p \wedge q$	Rule of conjunction
p	$p \rightarrow q$	$\therefore q$	
$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\therefore \sim p$	

*** Syllogism Inference Rules:**

$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$\therefore p \rightarrow r$	Rule of hypothetical syllogism
$p \vee q$	$\sim p$	$\therefore q$	Rule of disjunctive syllogism

يمكنك التأكد من صحة قواعد الاستدلال بالرجوع إلى جداول الحقيقة للعمليات التي قد تم التحدث عنها سابقاً واثباتها.

* **Proof Methods for Implication:**

1- البرهان المباشر **Direct proof:**

يتم بناء البرهان المباشر لفرضية شرطية $p \to q$ بافتراض أن p صحيحة وهي الخطوة الأولى، تليها خطوات استخدام قواعد الاستدلال inference بالإضافة إلى استخدام البديهيات والتعاريف والنظريات المثبتة سابقاً، والخطوة الأخيرة استنتاج صحة q (النتيجة).

مثال : اثبت أنه إذا كان n عدد فردي، فإن n^2 عدد فردي.

الحل:

نعبر عن هذا بالشكل $\forall n\ (\ P(x) \to Q(x)\ )$ حيث:

P(x) هي (n عدد فردي)

و Q(x) هي (n^2 عدد فردي).

نفرض أولاً أن فرض العبارة الشرطية هو صحيح، أي أن n عدد فردي. وهذا يعني حسب تعريف العدد الفردي أنه يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k+1$.

نثبت الآن أن n^2 فردي أيضاً كما يلي :

بتربيع الطرفين نحصل على:

$$n^2 = (2k+1)^2$$
$$= 4k^2+4k+1$$
$$=2(2k^2+2k)+1$$
$$n^2=2s+1$$

ومن تعريف العدد الفردي نستنتج أن n^2 عدد فردي.

مثال: اثبت أنه إذا كان كل من m , n مربع كامل فإن mn مربع كامل.

(ملاحظة : نقول عن عدد صحيح y أنه مربع كامل إذا وجد عدد صحيح k بحيث $y = k^2$ مثل (1,4,9,16,25,...

الحل:

بفرض أن كل من m , n مربع كامل.

من تعريف المربع الكامل فإنه يوجد عددين صحيحين s , t بحيث

$$m = s^2 \ , \ n = t^2 ،$$

نبرهن الآن أن mn مربع كامل.

بضرب العددين ينتج:

$$mn = s^2 * t^2 = (st)^2$$

ومن تعريف المربع الكامل ينتج أن mn مربع كامل.

2- البرهان غير المباشر Indirect Proof : (proof by contraposition)

يستخدم البرهان غير المباشر خاصية التكافؤ المنطقي بين الفرضية الشرطية $p \to q$ ونفيها $\sim q \to \sim p$ أي :

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p \ .$$

نفترض أن $\sim q$ صحيحة وهذه الخطوة الأولى، تليها خطوات استخدام قواعد الاستدلال الرياضي بالإضافة إلى استخدام البديهيات والتعريفات ...إلخ والخطوة الأخيرة اثبات صحة $\sim p$ (النتيجة).

مثال: اثبت أنه إذا كان n عدد صحيح ، و $3n+2$ عدد فردي، فإن n عدد فردي؟

الحل:

نحاول أولاً استخدام البرهان المباشر كالتالي :

بفرض أن $3n+2$ عدد فردي، وبالتالي يوجد عدد صحيح k بحيث

$3n+2 = 2k+1$ ، فإن $3n = 2k-1$.

من الواضح أنه لا يمكن استنتاج أن n عدد فردي من هذه المعادلة.

لذلك نستخدم البرهان غير المباشر فتصبح الجملة الشرطية المكافئة كالتالي:

" إذا كان n عدد زوجي، فإن $3n+2$ زوجي أيضاً" .

n عدد زوجي يعني أنه يوجد عدد k بحيث $n = 2k$ (حسب تعريف العدد الزوجي)،

بتعويض قيمة n في المعادلة $3n+2$ فتصبح:

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$$

أي أن $3n+2$ عدد زوجي حسب تعريف العدد الزوجي.

وبما أن النفي صحيح فالعبارة الشرطية الأصلية صحيحة لأنهما متكافئتان.

مثال: اثبت أنه إذا كان $x + y > 100$ ، فإن $x > 50$ or $y > 50$ ؟

الحل:

نفرض أن $p : x + y > 100$

و $q : x > 50$ or $y > 50$

ونفرض أن $\sim q$ صحيحة، و نثبت أن $\sim p$ صحيحة أيضاً، حيث :

$\sim q : x \leq 50$ and $y \leq 50$

و $\sim p : x + y \leq 100$

إذا كان $x \leq 50$ and $y \leq 50$

فإن $x + y \leq 50 + 50 = 100$

وبالتالي فإن $\sim p$ صحيح، إذاً $\sim q \rightarrow \sim p$ صحيحة.

وبهذا تكون $p \rightarrow q$ صحيحة، أي أنه إذا كان $x + y > 100$ ،

فإن $x > 50$ or $y > 50$.

3- البرهان بنقض الفرض Proofs by contradiction:

بفرض أننا نريد إثبات صحة العبارة p . وبفرض أننا استطعنا ايجاد تناقض q بحيث $\sim p \rightarrow q$ تكون صحيحة، وبما أن q خاطئة و $\sim p \rightarrow q$ صحيحة، نستنتج أن $\sim p$ خاطئة وبالتالي p تكون صحيحة.

مثال : اثبت أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي (أي لا يمكن كتابته على الشكل a/b ، حيث a, b عددان صحيحان و $b \neq 0$)

الحل:

نفرض p : العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي

ونفرض أن $\sim p$ صحيحة، أي أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي،

الآن سنبرهن أن هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.

$\sqrt{2}$ هو عدد نسبي، وبالتالي يوجد عددين صحيحين $a , b \neq 0$

بحيث $\sqrt{2} = a/b$ و a/b بالشكل المختزل

بتربيع الطرفين نحصل على $2 = a^2 / b^2$

وبالتالي $2b^2 = a^2$

ومن تعريف العدد الزوجي فإن a^2 عدد زوجي، وبالتالي فإن a عدد زوجي.

a عدد زوجي هذا يعني وجود عدد صحيح c بحيث $a = 2c$.

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة السابقة فإن $2b^2 = (2c)^2$

أي أن $2b^2 = 4c^2$

وبالتالي $b^2 = 2c^2$

أي أن b^2 عدد زوجي ومنه فإن b عدد زوجي أيضاً.

الفرض $\sqrt{2} = a/b$ انتج أن كل من a, b عدد زوجي، وبالتالي 2 يقسم كل من a, b وهذا مناقض للفرض.

مما سبق نجد أن ~p خاطئة وبالتالي p صحيحة، أي أن العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

مثال: اثبت باستخدام نقض الفرض أنه إذا كان n عدد صحيح، 3n+2 فردي، فإن n فردي؟

الحل:

نفرض p : "3n+2 فردي"

و q : " n عدد فردي"

وبفرض أن p , ~q صحيحتان، أي أن 3n+2 فردي و n عدد زوجي (ليس فردي).

n عدد زوجي يعني وجود عدد صحيح k بحيث $n = 2k$ ،

بالتعويض في 3n+2 نحصل على :

$$3n + 2 = 3\,(2k) + 2 = 6k + 2 = 2\,(3k + 1)$$

وهذا يعني أن $3n + 2$ زوجي وهي خاطئة (يناقض الفرض)، وبالتالي فإن $3n+2$ فردي.

أمثلة أخرى محلولة :

س: برهن ما يلي :

- مجموع عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

الحل:

باستخدام البرهان المباشر، نفرض x , y عددان فرديان ، أي يمكن تمثيلهما بالشكل:

$$X = 2n+1$$

$$Y = 2m+1$$

وبالتالي فمجموعهما : $x+y = (2n+1) + (2m+1)$

$$= 2n+2m+2$$

$$= 2(n+m+1)$$

$$= 2k$$

أي أن مجموع العددين الفرديين هو عدد زوجي.

- إذا كان n , m أعداد صحيحة وmn عدد زوجي فإن m عدد زوجي أو n عدد زوجي.

الحل:

باستخدام البرهان غير المباشر ، نفرض m عدد فردي و n عدد فردي

وبالتالي فإنه يمكن تمثيلهما بالشكل :

$$m = 2k+1$$

$$n = 2s+1$$

وبالتعويض في mn كالتالي:

$$mn = (2k+1)(2s+1)$$

$$= 4ks+2k+2s+1$$

$$= 2(2ks+k+s)+1$$

$$= 2f+1$$

أي أن mn يمثل عدد فردي وبالتالي فإنه إذا كان mn عدد زوجي فإن m عدد زوجي أو n عدد زوجي.

- إذا كان n عدد صحيح موجب أكبر من 1 ،فإن $n < n^2$.

الحل:

باستخدام البرهان بنقض الفرض، نفرض أن $n^2 < n$

وعند قسمة الطرفين على n نحصل على

$n < 1$ وهذا خاطئ (يناقض الفرض)

إذاً $n^2 > n$

تمرين (واجب):

برهن كل مما يلي :

- حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي؟
- إذا كان n عدد صحيح، و n^3+5 عدد فردي فإن n عدد زوجي؟
- إذا كان n عدد صحيح موجب، فإن n عدد زوجي إذا وفقط إذا كان $7n+4$ هو عدد زوجي؟

Set Theory:

تعريف :

المجموعة هي تجمع لكل معرّف مع بعض وللأشياء المميزة في مفهومنا، والذي تسمى عناصر المجموعة.

عناصر elements أو أعضاء members المجموعة يمكن أن تكون أي شيء: أعداد ، أشخاص، حروف، ... إلخ. غالباً يرمز للمجموعات باستخدام Uppercase Letters.

A *set* is an unordered collection of objects, called *elements* or *members* of the set. A set is said to *contain* its elements. We write $a \in A$ to denote that a is an element of the set A. The notation $a \notin A$ denotes that a is not an element of the set A.

مثال:

- مجموعة أشخاص A= { Ali , Ahmed , Hassan , Salem }
- مجموعة الحروف الإنجليزية الصغيرة B={ a , b , c , d ,..., z }
- مجموعة الأعداد الصحيحة C={ ..., −1, −2 , 0 , 1 , 2,... }.
- مجموعة الأعداد الفردية الموجبة أقل من 10

D = { x:x is an odd positive integer < 10 }

لاحظ أن : مفهوم data type أو Type في علوم الحاسوب تبنى على مفهوم المجموعة Set مثلا Boolean هو اسم لمجموعة {0, 1 }.

* **العمليات على المجموعات Operations on sets:**

1- **الإتحاد Union:**

هو إضافة عناصر مجموعتين مع بعض في مجموعة جديدة ، ويرمز له بالرمز A∪B وهي مجموعة من كل العناصر إما في A أو B.

مثال:

− {1, 2} ∪ {red, white} = {1, 2, red, white}

− {1, 2, green} ∪ {red, white, green} = {1, 2, red, white, green}

− {1, 2} ∪ {1, 2} = {1, 2}

2− التقاطع Intersection :

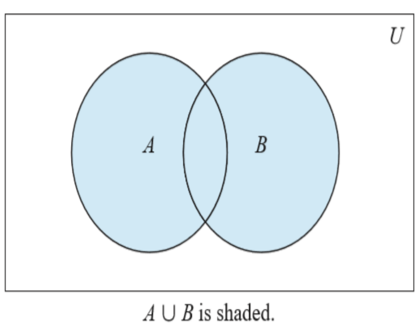
مجموعة جديدة تبنى بتحديد العناصر المشتركة بين مجموعتين، ويرمز للتقاطع بين المجموعتين A,B بالرمز B ∩ A وهي مجموعة من العناصر في كل من A و B.

مثال:

− {1, 2} ∩ {red, white} = { } (∅)

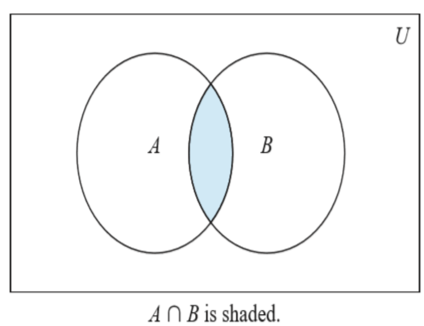
− {1, 2, green} ∩ {red, white, green} = { green }

− {1, 2} ∩ {1, 2} = {1, 2}



$A \cup B$ is shaded.

FIGURE 1 **Venn Diagram of the Union of *A* and *B*.**



$A \cap B$ is shaded.

FIGURE 2 **Venn Diagram of the Intersection of *A* and *B*.**

3- المتمم **Complements:**

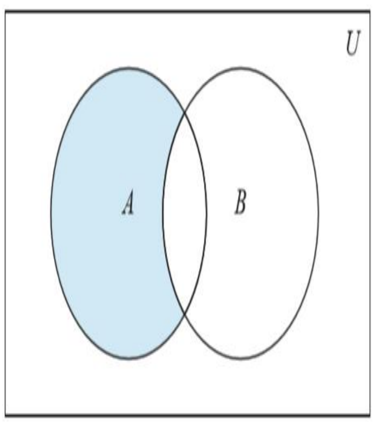
المتمم النسبي لِ B في A أو فرق A من B ويرمز له بالرمز A \ B (أو A − B) وهي مجموعة من كل العناصر في المجموعة A لكنها ليست في B.

مثال:

− $\{1, 2\} \setminus$ {red, white} = $\{ 1 , 2 \}$

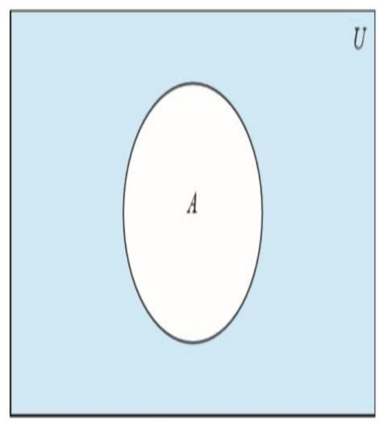
− {1, 2, green} \ {red, white, green} = $\{ 1 , 2 \}$

− $\{1, 2\} \setminus \{1, 2\} = \varnothing$



$A - B$ is shaded.

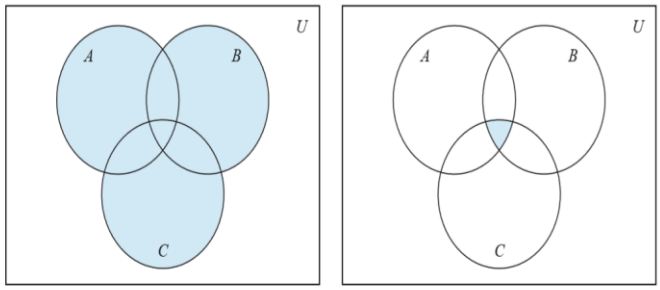
FIGURE 3 Venn Diagram for the Difference of A and B.



$\bar{A}$ is shaded.

FIGURE 4 Venn Diagram for the Complement of the Set A.

مثال:



(a) $A \cup B \cup C$ is shaded.

(b) $A \cap B \cap C$ is shaded.

FIGURE 5 **The Union and Intersection of A, B, and C.**

4- الحاصل الديكارتي Cartesian products:

مجموعة جديدة تبنى بمشاركة كل عنصر في احدى المجموعات مع كل عنصر في مجموعة أخرى، ويرمز للحاصل الديكارتي لمجموعتين A , B بالرمز $A \times B$، وهو مجموعة من كل الأزواج المرتبة (a , b) بحيث أن a هو عنصر في A و b هو عنصر في B.

مثال:

- $\{1, 2\} \times \{red, white\} = \{ (1 , red), (1 , white) , (2 , red) , (2, white) \}$.

- $\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{ (1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1), (2 , 2)\}$.

*** مجموعات خاصة:**

هناك بعض المجموعات التي لها أهمية رياضية كبيرة والتي اكتسبت أسماء خاصة ومميزات متفق عليها مثل المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز { } أو $\varnothing$.

وكذلك المجموعة الوحيدة { x } والتي تحتوي فقط عنصر واحد ويسمى x.

P يرمز لمجموعة الأعداد الأولية $P = \{ 2,3,5,7,11,\ldots\}$

N يرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{ 1,2,3,4,5,\ldots\}$

Z يرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة (إما موجبة أو سالبة أو صفر)

$$Z = \{ \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

Q يرمز لمجموعة الأعداد النسبية $Q = \{ a/b : a, b \in Z , b \neq 0 \}$

R يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية وتتضمن كل الأعداد النسبية مع كل الأعداد غير النسبية (كذلك الأعداد التي لا يمكن إعادة كتابتها كالكسور مثل Π ، e ، $\sqrt{2}$ ، بالإضافة إلى الأعداد التي لا يمكن تعريفها).

C يرمز لمجموعة الأعداد المركبة حيث $C = \{ a + bi : a , b \in R\}$ مثل $1+2i \in C$.

* **المجموعات المحدودة وغير المحدودة Finite and Infinite Sets :**

– **Finite Set:** تسمى المجموعة محدودة إذا كانت تحتوي عدد خاص (منتهي) من العناصر أي إذا كنا نستطيع عدّ العناصر في المجموعة.

مثل: مجموعة عدد المقاعد على الباص ، مجموعة عدد الأشخاص على كوكب الأرض.

– **Infinite Set:** تسمى المجموعة غير محدودة إذا كانت تحتوي عدد لا منتهي من العناصر أي إذا كنا لا نستطيع عد العناصر في المجموعة.

مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية ، مجموعة كل الأعداد.

* **Cardinality:**

يشير إلى عدد العناصر في المجموعة، ويرمز له بالرمز | |.

A = {x | x is a lower case letter} $|A| = 26$

B = {2, 3, 4, 5, 6, 7} $|B| = 6$

C = {x | x is an even number < 10} $|C| = 4$

$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\qquad |A| = \infty$

$B = \{x \mid x \text{ is a point on a line}\}$ $\qquad |B| = \infty$

*** العضوية Memberships:**

العلاقة الرئيسية بين المجموعات هي العضوية، عندما يوجد عنصر هو أحد عناصر مجموعة أخرى.

إذا كان a عنصر في B ، نرمز لذلك بالرمز $a \in B$ ، إذا كان c ليس عنصر في B ، نرمز لذلك بالرمز $a \notin B$.

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{\text{blue}, \text{red}, \text{white}\}$

فإن $4 \in A$ و $\text{green} \notin B$.

*** المجموعات الشاملة Universal Sets:**

المجموعة الشاملة هي المجموعة من كل الأشياء ذات العلاقة ويرمز لها بالرمز U .

*** Subsets:**

إذا كان كل عنصر في المجموعة A هو أيضاً عنصر في المجموعة B فإن A تسمى subset من B وتكتب $A \subseteq B$، وتسمى العلاقة بالتضمين أو احتواء.

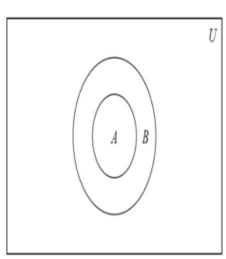


FIGURE 2 Venn Diagram Showing that *A* Is a Subset of *B*.

: Super Sets *

إذا كان يمكن كتابة $A \supseteq B$ حيث B هي Super set لِ A ، وB تتضمن A أو B تحتوي A.

:Proper Subset *

إذا كانت A هي subset من B – ولا تساويها – فإن A تسمى Proper Subset لِ B وتكتب A $\subset$ B أو $A \supset B$.

مثال:

$$\{ 1 \ , \ 3 \} \subset \{ 1,2,3,4 \}$$

$$\{ 1,2,3,4 \} \subseteq \{ 1,2,3,4 \}$$

*** تساوي مجموعتين:**

تتساوى مجموعتين إذا وفقط إذا تحتويان بالضبط نفس العناصر، وترتيب العناصر غير مهم.

$$A = B \quad \text{if and only if} \quad A \subseteq B \ \text{ and } \ B \subseteq A$$

مثال:

$A = \{ 1,2,2,3,4,1,2 \}$ و $B = \{ 1,2,3,4 \}$ فإن $A = B$ and $B = A$

حيث $B \subset A$ and $A \subset B$.

:Power Set *

Power Set للمجموعة A هو المجموعة المحتوية كل احتمالات Subsets لِ A متضمنة المجموعة الخالية، و تحتوي هذه المجموعة 2^n عناصر حيث n هو عدد العناصر في A، ويرمز لها بالرمز P(A) أو 2^A.

مثال:

إذا كانت $A = \{ a, b , c ,d \}$ فإن

$P(A) = \{ \{\} , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{d\} , \{a , b\}, \{a , c\}, \{a , d\}, \{b , c\}, \{b , d\}$

$\{c , d\}, \{a ,b ,c\}, \{a ,b ,d\}, \{a ,c ,d\}, \{b ,c ,d\}, \{a ,b ,c ,d\}\}$.

*** Subset Relationships:**

$A = \{x \mid x \text{ is a positive integer} \leq 8\}$

set A contains: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

$B = \{x \mid x \text{ is a positive even integer} < 10\}$

set B contains: 2, 4, 6, 8

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

set C contains: 2, 4, 6, 8, 10

The universal set $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Subset Relationships

$A \subseteq A$	$A \not\subset B$	$A \not\subset C$
$B \subset A$	$B \subseteq B$	$B \subset C$
$C \not\subset A$	$C \not\subset B$	$C \subseteq C$

*** خصائص المجموعات Sets Properties:**

1. **Inclusion of Intersection:**

$A \cap B \subseteq A$ and $A \cap B \subseteq B$

2. **Inclusion in Union:**

$A \subseteq A \cup B$ and $B \subseteq A \cup B$

3. **Transitive Property of Subsets:**

If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$

*** Set Identities:**

1. Commutative Laws: For all sets A and B

a) $A \cup B = B \cup A$ and (b) $A \cap B = B \cap A$

2. Associative Laws: For all sets A, B, and C

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Distributive Laws: For all sets, A, B, and C

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Identity Laws: For all sets A

a) $A \cup \emptyset = A$, b) $A \cap U = A$

Complement Laws .5

a) $A \cup A' = U$, b) $A \cap A' = \varnothing$

Double Complement Law: For all sets A .6

$(A')' = A$

Idempotent Laws: For all sets A .7

a) $A \cup A = A$, b) $A \cap A = A$

Universal Bound Laws: For all sets A .8

a) $A \cup U = U$, b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

De Morgan's Laws: For all sets A and B .9

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Absorption Laws: For all sets A and B .10

.a) $A \cup (A \cap B) = A$, b) $A \cap (A \cup B) = A$

Complements of U and $\varnothing$ .11

a) $U' = \emptyset$ b) $\emptyset' = U$

Set Difference Law: For all sets A and B .12

$$A - B = A \cap B'$$

تمرين (واجب) :

س1 : استخدم شكل فن لتمثيل العلاقة $C \subseteq B$ and $B \subseteq A$ ؟

س2 : نفرض $A = \{ 1,2,3,4,5 \}$ و $B = \{ 0,3,6 \}$

أوجد :

1) $A \cup B$

2) $A \cap B$

3) $A - B$

4) $B - A$

Relations:

مقدمة :

– "أقل من" ، "متوازي مع" ، "فرعية من"...إلخ، هذه العلاقات تعد موجودة من اتصال مؤكد بين أزواج من الأشياء Objects تؤخذ في أمر محدد.

نعرف العلاقة بمصطلح "أزواج مرتبة" يرمز لها (a , b)، عناصر الزوج المرتب a, b حيث a هو العنصر الأول و b هو العنصر الثاني.

* (a , b) = (c , d) إذا وفقط إذا كان a=c , b=d.

* (a , b) $\neq$ (b , a) مالم يكن a=b ، هذا يختلف عن المجموعات حيث ترتيب العناصر غير مهم كـ $\{3 , 5\} = \{5 , 3\}$.

– **Product Sets:**

نفرض مجموعتين A , B ، مجموعة كل الأزواج المرتبة (a , b) حيث $a\in A$, $b\in B$ تسمى الحاصل الديكارتي من A , B ، ونرمز له بالرمز $A\times B$ ، "A cross B" ، و يعرف بالشكل:

$$A\times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

* يمكن كتابة A^2 بدلاً من $A\times A$.

* نرمز بالرمز n(S) لعدد العناصر في المجموعة S حيث لأي مجموعات محدودة A , B

$$n(A\times B) = n(A) * n(B)$$

Relations :–

تعريف:

نفرض A , B مجموعات، فالعلاقة الثنائية "البسيطة" هي علاقة من A إلى B وهي مجموعة فرعية Subset من $A\times B$.

نفرض R هي علاقة من A إلى B، فإن R هي مجموعة من الأزواج المرتبة حيث أن أي عنصر أول يأتي من A وأي عنصر ثاني يأتي من B، هذا يعني ، لأي زوج $a\in A$, $b\in B$ فواحدة بالضبط من التالي هي الصحيحة:

i) $(a, b) \in R$: " a is R–related to b " , aRb

ii) $(a, b) \notin R$: " a is not R–related to b " $a \not{R} b$

* إذا كانت R علاقة في المجموعة A نفسها أي إذا كانت R هي مجموعة فرعية من $A^2=A\times A$ فإنه يمكن القول أن R هي علاقة على A.

* المجال(النطاق) Domain في العلاقة R هو مجموعة كل العناصر الأولى في الأزواج المرتبة حيث تنتمي إلىR ، أما المدى Range هو مجموعة العناصر الثانية.

مثال:

نفرض $A = \{ 1, 2, 3 \}$ و $B = \{ x, y, z \}$

ونفرض $R = \{(1 , y),(1 , z),(3, y)\}$

فإن R هي علاقة من A إلى B

ومجال R هو $\{ 1,3 \}$

والمدى هو $\{ y , z \}$.

* نفرض A أي مجموعة فإن $A\times A$ و $\emptyset$ هي مجموعات فرعية من $A\times A$ ،ولذلك هي علاقات على A تسمى العلاقة الشاملة ، العلاقة الخالية ، على التوالي.

– معكوس العلاقة Inverse of Relation:

نفرض R أي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، معكوس R يرمز له بالرمز R^{-1}، وهو العلاقة من B إلى A حيث تحتوي الأزواج المرتبة التي عندما تعكس تنتمي إلى R.

$$R^{-1} = \{ (b , a) \mid (a ,b) \in R\}$$

وهذا يكافئ

$$\forall\ a\in A \text{ and } b\in B\ ,\ (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

* من الواضح أنه إذا كانت R هي أي علاقة فإن $(R^{-1})^{-1} = R$.

* المجال والمدى لـِ R^{-1} هو بالتوالي المدى والمجال لـِ R.

* إذا كانت R هي علاقة على A، فإن R^{-1} هي علاقة أيضاً على A.

مثال:

نفرض $A =\{ 1, 2 \}$ و $B =\{ x, y, z \}$

وكانت $R = \{ (1 , y),(1 , z),(3, y) \}$

فإن $R^{-1} = \{ (y, 1),(z , 1),(y, 3) \}$.

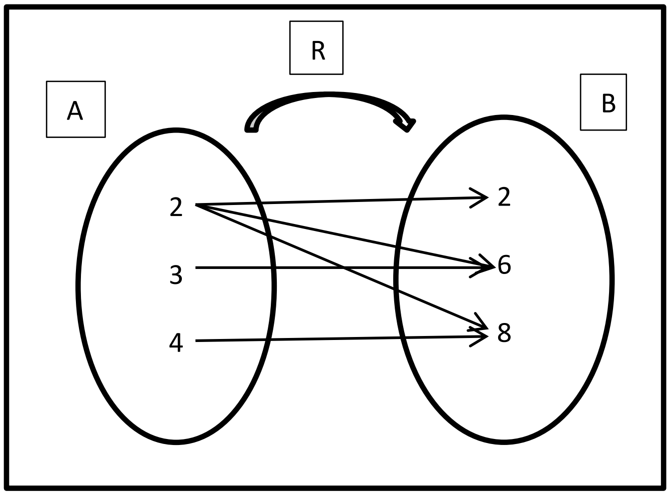
مثال:

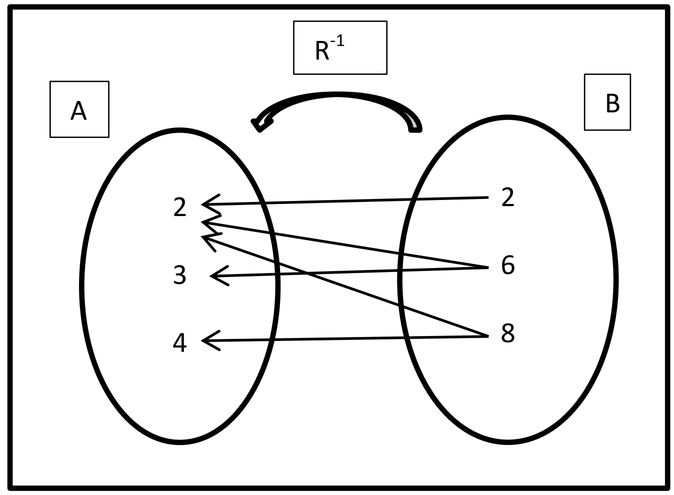
إذا كانت $A =\{ 2,3,4 \}$ و $B =\{ 2,6,8\}$ ، نفرض R علاقة القسمة من A إلى B

$$\forall (x, y) \in A\times B \quad , \quad xRy \Leftrightarrow x/y$$

$R = \{ (2,2),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$

$R^{-1} = \{ (2,2),(6,2),(8,2),(6,3),(8,4)\}$





- أنواع العلاقات Types of Relations:

1- One to One Relation:

مثال:

نفرض $A = \{ 1,2,3,4 \}$ و $B = \{ 5,6,7,8 \}$ فإن

$A \times B = \{ \ldots. \}$ (اكمل عناصر المجموعة $A \times B$)

وكانت قاعدة العلاقة هي اضافة 4 فإن

$R = \{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ هي علاقة واحد إلى واحد.

2- Many to Many Relation:

مثال:

نفرض $A = \{$ Ali, Ahmed, Peter, Hamed $\}$

B = { Paris , London , New York , Dubai }

فإن $A \times B = \{ \dots \}$ (اكمل عناصر المجموعة $A \times B$)

وكانت قاعدة العلاقة هي Has visited فإن :

R = { (Ahmed , Paris) , (Ahmed , Dubai) , (Ali , New york) ,(Ali , London),(Ali , Dubai) ,(Hamed , Paris), (Hamed , London) , (Peter, London) , (Peter , Dubai)}

3- Many to One Relation:

مثال:

نفرض A = { Ali, Salma, Aziz, Peter , Hassan , safa }

B = { 62 , 66, 75 }

فإن $A \times B = \{ \dots \}$ (اكمل عناصر المجموعة $A \times B$)

وكانت قاعدة العلاقة هي Has … kg فإن :

R = {(Ali ,62),(Salma ,66),(Aziz ,66),(Peter,62),(Hassan ,75), (Safa,75)}

4- One to Many Relations:

مثال:

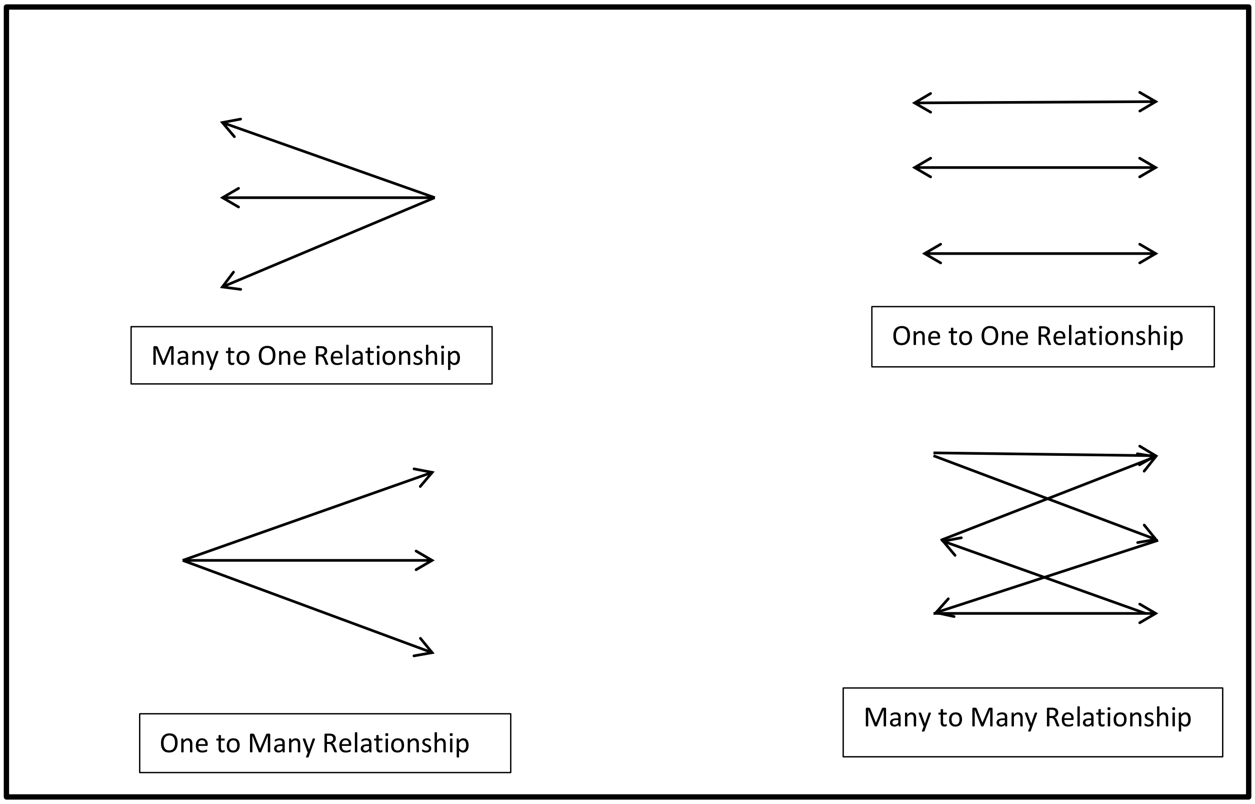
نفرض A = { 14 , 30 }

B = { Pen , Pencil, Ruler, Needle, Stick }

فإن $A\times B = \{ \dots \}$ (اكمل عناصر المجموعة $A\times B$)

وكانت قاعدة العلاقة هي is the length of فإن :

R = {(14,Pen),(14 ,Pencil),(30 ,Ruler),(30,Needle),(30 ,Stick)}



– خصائص العلاقات Properties of Relations:

1- العلاقة الانعكاسية Reflexive Relations:

تكون العلاقة R على المجموعة A انعكاسية إذا كان aRa لكل $a\in A$ وهذا يعني أن

$(a, a)\in R$ لكل $a\in A$

وهكذا تكون R غير انعكاسية إذا وجد $a\in A$ بحيث أن $(a, a) \notin R$.

مثال:

لنفرض العلاقات التالية على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$:

$R1= \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$

$R2= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R3= \{(1,3),(2,1)\}$

$R4= \varnothing$, the empty relation

$R5 = A\times A$, the universal relation

حدد أي العلاقات هي علاقة انعكاسية؟

الحل:

لأن A تحتوي أربعة عناصر 1,2,3,4 ، فالعلاقة R على A تكون انعكاسية إذا كانت تتكون من الأزواج الأربعة (4,4),(3,3),(2,2),(1,1) وهذا يوجد فقط في العلاقة R2 والعلاقة الشاملة $R5=A\times A$ هي انعكاسية ايضاً.

لاحظ أن R1,R3,R4 غير انعكاسية لأن ،على سبيل المثال، (2,2) لا تنتمي إلى أي منهم.

2- **Symmetric , Anti symmetric , And Asymmetric Relations:**

* تكون R علاقة Symmetric على A إذا كان:

$$\forall a , \forall b \in A , (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

* و تكون R علاقة AntiSymmetric على A إذا كان:

$$\forall a , \forall b \in A , (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a=b$$

* و تكون R علاقة ASymmetric على A إذا كان:

$$\forall a\ ,\ \forall b \in A\ ,\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$$

مثال:

لنفرض العلاقات التالية على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$:

$R1= \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$

$R2= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R3= \{(1,3),(2,1)\}$

$R4= \{(1,1)\}$

الحل:

R1 is Anti symmetric , And Asymmetric Relation.

R2 is Symmetric and Anti symmetric.

R3 Asymmetric Relation.

R4 is Symmetric , And Anti symmetric Relation

3- العلاقة المتعدية Transitive Relations:

تكون العلاقة R على المجموعة A متعدية إذا كان aRb و bRc فإن aRc وهذا يعني أن إذا كان $(a, b)\ ,\ (b, c) \in R$ فإن $(a, c) \in R$.

وهكذا تكون R غير متعدية Intransitive إذا وجد $a\ ,b\ ,c \in A$ بحيث أن

$(a, b),(b, c) \in R$ لكن $(a, c) \notin R$.

مثال:

حدد أي العلاقات في المثال السابق تمثل علاقة متعدية؟

الحل:

R1 is Transitive Relation

R2 is Transitive Relation

R3 is Intransitive Relation

R4 is Transitive Relation

4- علاقة التكافؤ Equivalence Relations:

تكون العلاقة R هي علاقة تكافؤ على المجموعة A إذا كانت R هي علاقة انعكاسيةReflexive ومتماثلة Symmetric ومتعدية Transitive .

تمرين (واجب) :

س1 : حدد أي من العلاقات في المثال السابق تمثل علاقة تكافؤ؟

س2 : أوجد A^2 حيث $A = \{ 1,2,a,b \}$ ؟

Functions:

تعريف:

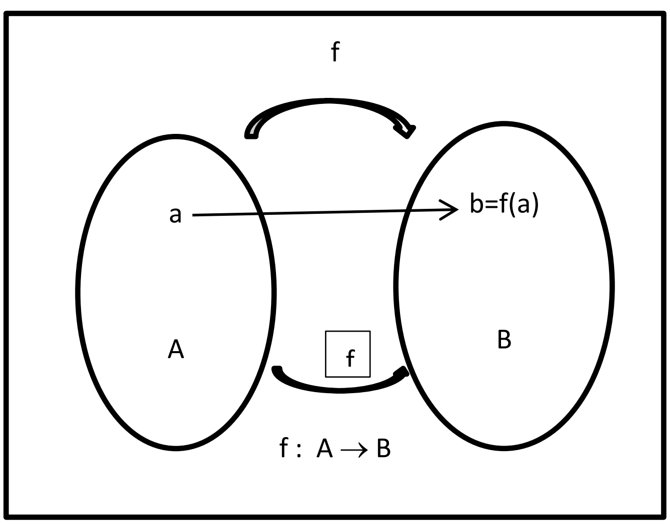
نفرض B , A مجموعات غير خالية، فالدالة f من A إلى B تحدد بالضبط في عنصر وحيد من B لكل عنصر من A.

نكتب $f(a) = b$ إذا كان b هو العنصر الوحيد في B الذي تم تحديده بواسطة f للعنصر a من A . إذا كانت f هي دالة من A إلى B تكتب بالشكل $f : A \to B$.

تعريف:

إذا كانت f هي دالة من A إلى B ، نقول أن A هو النطاق (domain) لِـ f و B هو المستقر (codomain) لِـ f.

إذا كان $f(a) = b$ نقول أن b هو صورة (image) a. والمدى (range) لِـ f هي مجموعة كل صور العناصر من A.



مثال:

نفرض $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = x^2$ فإن :

نطاق f هو مجموعة الأعداد الصحيحة

ومستقر f هو مجموعة الأعداد الصحيحة

و مدى f هو مجموعة مربع الأعداد الصحيحة أي $\{0,1,4,9,16,...\}$.

تعريف:

نفرض f_1,f_2 دوال من A إلى R ، فإن f_1+f_2 و f_1f_2 هي أيضاً دوال من A إلى R تعرف لكل $x \in A$ كالتالي:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)\ f_2(x).$$

مثال:

نفرض f_1,f_2 دوال من R إلى R ، حيث $f_1(x)=x^2$ و $f_2(x)=x-x^2$، أوجد f_1+f_2 و f_1f_2 ؟

الحل:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2+(x-x^2) = x.$$

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)\ f_2(x) = x^2\ (x-x^2) = x^3-x^4.$$

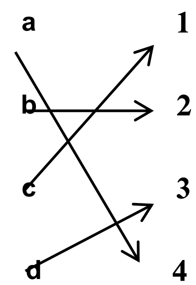
– الدوال المتباينة (واحد إلى واحد) والدوال الغامرة (الفوقية):

One – to – One and Onto Functions:

تعريف:

نقول عن الدالة f أنها متباينة إذا وفقط إذا كان $f(a) = f(b)$ و $a = b$ لكل a, b تنتمي لنطاق f.

مثال:



نلاحظ أن الدالة هنا دالة متباينة.

ملاحظة: f دالة متباينة إذا كانت $f(a) \neq f(b)$ بحيث أن $a \neq b$.

$$\forall a \; , \; \forall b \; (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)).$$

أي أن:

$$\forall a \forall b \; (a = b \rightarrow f(a) = f(b)).$$

مثال:

إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ ، فهل f دالة متباينة؟

الحل:

الدالة ليست متباينة لأن $f(1) = f(-1) = 1$ لكن $1 \neq -1$.

ملاحظة: لو كان نطاق هذه الدالة z^+ فإن الدالة $f(x) = x^2$ متباينة.

تعريف:

الدالة f من A إلى B تسمى دالة غامرة، إذا وفقط إذا كان لكل عنصر $b \in B$ يوجد عنصر $a \in A$ حيث $f(a) = b$.

$\forall y, \exists x : (f(x) = y)$.

مثال:

إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ ، فهل f دالة غامرة ؟

الحل: الدالة f ليست غامرة لأنه لا يوجد عدد صحيح بحيث $x^2 = -1$.

مثال:

إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x+1$ ، فهل f دالة غامرة ؟

الحل: الدالة f دالة غامرة لأنه لكل عدد صحيح y يوجد عدد صحيح x بحيث أن $f(x) = y$.

تعريف:

تكون الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة متناظرة one–to–one correspondence, or a bijection إذا كانت دالة متباينة وغامرة.

أي أن لكل عنصر في A يوجد عنصر وحيد مناظر في B والعكس صحيح أيضاً.

- **الدوال العكسية Inverse Functions:**

تعريف:

نفرض f دالة متناظرة من A إلى B ، الدالة العكسية من f هي دالة تشير إلى أن العنصر $b \in B$ هو العنصر الوحيد لِـ $a \in A$ بحيث أن $f(a) = b$.

نرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} . أي أن $f^{-1}(b) = a$ عندما $f(a) = b$.

مثال:

إذا كانت $f: Z \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x+1$ ، فهل f دالة عكسية ؟

الحل:

الدالة f عكسية لأنها دالة متناظرة ولإيجاد معكوس الدالة، نفرض y هو صورة x لذلك

$y = x+1$ فإن $x = y-1$.

هذا يعني أن $y-1$ هي العنصر الوحيد من Z المرسل لِ y بواسطة f .

إذاً $f^{-1}(y) = y-1$.

– الدوال المركبة Compositions of Functions:

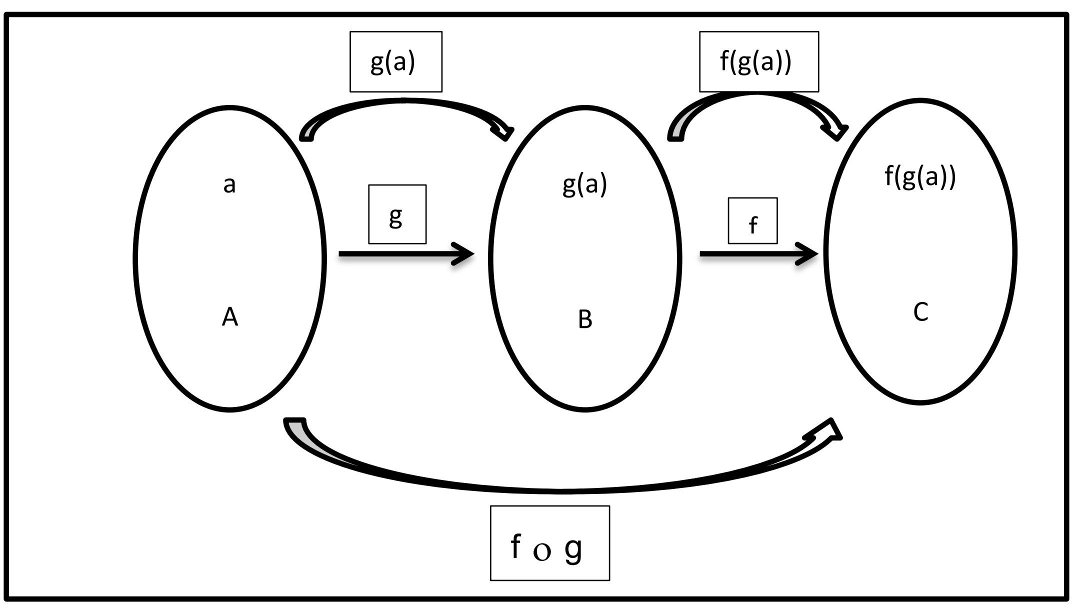
تعريف:

نفرض f دالة من A إلى B ونفرض g دالة من B إلى C . الدالة المركبة من الدوال f , g نرمز لها بالرمز $f \circ g$ لكل $a \in A$ وتعرف بالشكل $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

أي أن الدالة $f \circ g$ تحدد العنصر a من A هو العنصر المحدد بواسطة f لِ g(a) ، لذلك لإيجاد

$(f \circ g)(a)$ أولاً سنطبق الدالة g لِ a للحصول على g(a) ثم نطبق الدالة f على ناتج g(a) للحصول على الدالة المركبة.

لاحظ أن الدالة المركبة $f \circ g$ لا يمكن تعريفها إلا إذا المدى لِ g هو مجموعة فرعية من نطاق f.



مثال:

نفرض g , f دوال من $Z \to Z$ ومعرفة بالشكل $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = 3x+2$

أوجد : $f \circ g$ و $g \circ f$ ؟

الحل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11.$$

– رسم الدوال The Graphs of Functions:

تعريف:

نفرض f دالة من المجموعة A إلى المجموعة B. رسم الدالة f هو مجموعة من الأزواج المرتبة حيث $\{ (a , b) | a \in A \text{ and } f(a)=b \}$.

مثال:

لتكن $f : Z \to Z$ حيث $f(n) = 2n+1$ ، ولرسم الدالة نفرض نقاط من الأزواج المرتبة $(n , 2n+1)$.

– دوال الأرضية والسقف The floor and ceiling functions :

تعريف:

تشير دالة الأرضية للعدد الحقيقي x بأكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

إن قيمة دالة الأرضية للعدد x يرمز لها بالرمز $\lfloor x \rfloor$.

، تشير دالة السقف للعدد الحقيقي x بأصغر عدد صحيح أكبر من أو يساوي x.

إن قيمة دالة السقف للعدد x يرمز لها بالرمز $\lceil x \rceil$.

مثال:

$\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$ $\qquad$ $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

$\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$ $\qquad$ $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$

$\lceil 3.1 \rceil = 4$ $\qquad$ $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$

$\lceil 7 \rceil = 7$ $\qquad$ $\lfloor 7 \rfloor = 7$

لاحظ أن :

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$

$$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$$

تمرين (واجب) :

س1 : إذا كانت $f : Z \to Z$ ، حدد أي من الدوال التالية متباينة و شاملة:

- $f(x) = x - 1$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^2 + 1$

Sequences & Summation:

– Sequences:

تعريف :

المتسلسلة هي هيكل متقطع يستخدم لتمثيل قائمة مرتبة، مثل $1,2,3,5,8,\ldots$.

مثال:

المتسلسلة $1,2,3,4,5$ سلسلة منتهية مكونة من 5 عناصر ،

المتسلسلة $1,3,9,27,81,\ldots,3^n,\ldots$ سلسلة غير منتهية.

تعريف:

المتسلسلة هي دالة من مجموعة فرعية من مجموعة الأعداد الصحيحة (غالباً المجموعة إما N أي $\{0,1,2,3,\ldots\}$ أو $N-0$ أي $\{1,2,3,\ldots\}$ إلى المجموعة S.

نستخدم الرمز a_n ليمثل صورة العدد الصحيح n و a_n عنصر في السلسلة، ويستخدم الرمز $\{a_n\}$ لوصف السلسلة.

مثال:

نفرض المتسلسلة $\{a_n\}$ معرفة بالشكل $a_n=\frac{1}{n}$ فإن قائمة العناصر في هذه المتسلسلة تبدأ بـ a_1 يعني $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots$ وتصبح المتسلسلة هي $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$.

تعريف:

المتسلسلات بالشكل $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n$ غالباً تستخدم في علوم الحاسوب وهذه المتسلسلات المنتهية تسمى أيضاً سلسلة نصية Strings (bit string هي متسلسلة منتهية من بتات ، وطول string هو عدد العناصر فيها.

السلسلة الفارغة empty string هي سلسلة ليس فيها عناصر وطول السلسلة الفارغة هو صفر ويرمز لها بالرمز ε أو " " .

مثال : السلسلة abcd هي سلسلة طولها 4.

تعريف : Recurrence relation

علاقة العودة للمتسلسلة $\{a_n\}$ هي المعادلة التي تظهر عناصر a_n من واحد أو أكثر للعناصر السابقة من المتسلسلة ، يعني $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_{n-1}$ لكل الأعداد الصحيحة n حيث $n \geq n_0$ حيث n_0 عدد صحيح غير سالب.

السلسلة تسمى الحل لعلاقة العودة إذا توافق عناصرها علاقة العودة.

مثال :

نفرض $\{a_n\}$ متسلسلة معرفة بالعلاقة $\mathbf{a_n} = a_{n-1}+3$ لكل $n=1,2,3,\ldots$ ونفرض أن $a_0=2$ ، ما قيمة a_1,a_2,a_3؟

الحل:

نلاحظ من العلاقة أن : $a_1 = a_0+3 = 2+3 = 5$

وكذلك $a_2 = 5+3 = 8$

و $a_3 = 8+3 = 11$

مثال :

نفرض $\{a_n\}$ متسلسلة معرفة بالعلاقة $a_n = a_{n-1}- a_{n-2}$ لكل $n=1,2,3,\ldots$ ونفرض أن $a_0=3$ ، $a_1=5$ ، ما قيمة a_2,a_3 ؟

الحل: نلاحظ من العلاقة أن : $a_2 = a_1- a_0 = 5-3 = 2$

وكذلك $a_3 = a_2 - a_1 = 2-5 = -3$.

ويمكن أن نجد قيمة a_4 , a_5 وكل ما يليه على نحو مماثل.

تعريف:

متسلسلة Fibonacci ، تعرف بالعلاقة $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ لكل $n = 2,3,4,\ldots$ حيث $f_0 = 0$ و $f_1 = 1$.

مثال :

أوجد أعداد Fibonacci، f_2، f_3، f_4، f_5 ، f_6 ؟

الحل:

من التعريف السابق نجد أن $f_0 = 0$ و $f_1 = 1$ والعلاقة $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ، فنجد أن :

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1+0 = 1$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1+1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2+1 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3+2 = 5$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5+3 = 8$$

مثال:

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\{a_n\}$ الحل للعلاقة $a_n = 2\,a_{n-1} + a_{n-2}$ لكل $n = 2,3,4,\ldots$ للحالات التالية :

* $a_n = 3n$

* $a_n = 2^n$

* $a_n = 5$

الحل:

* نفرض $a_n = 3n$ لكل n، فإن لكل $n \geq 2$ نلاحظ أن:

$a_2 = 3*2 = 6$

ومن العلاقة $a_n = 2\, a_{n-1} + a_{n-2}$ فإن $a_2 = 2a_1 + a_0$

أي$a_2 = 2*3 + 0 = 6 = a_2$

لذلك $\{a_n\}$ حيث $a_n = 3n$ تمثل الحل للعلاقة.

* نفرض $a_n = 2^n$ لكل n، نلاحظ أن:

$a_0= 1$ ، $a_1= 2$ ، $a_2= 4$.

وحسب العلاقة فإن $a_2 = 2a_1 + a_0 = 2*2 + 1 = 5 \neq a_2$

لذلك $\{a_n\}$ حيث $a_n = 2^n$ هي ليست الحل للعلاقة.

* نفرض $a_n = 5$ لكل n، فإن لكل $n \geq 2$ نلاحظ أن:

$a_2=5$, $a_1=5$, $a_0= 5$

وحسب العلاقة فإن $a_2= 2a_1 + a_0= 2*5 + 5 = 15 \neq a_2$

لذلك $\{a_n\}$ حيث $a_n = 5$ لا تمثل حل للعلاقة.

- Summations:

تعريف:

يعتبر جمع العناصر في المتسلسلة مجموع summation ويرمز له بالرمز $\sum$ ، حيث أن مجموع العناصر $a_m , a_{m+1} , \dots , a_n$ من المتسلسلة $\{a_n\}$ يعبر عنها بالشكل: $\sum_{j=m}^{n} a_j$ أو $\sum_{j=m}^{n} a_j$ أو $\sum_{m\le j\le n} a_j$.

وتقرأ " المجموع من $j=m$ إلى $j=n$ لِـ a_j ".

* المتغير j يسمى الدليل للمجموع **index of summation** ، وهذا الدليل يأخذ كل القيم الصحيحة التي تبدأ من الحد الأدنى m وتنتهي بالحد الأعلى n.

* القواعد الرياضية تطبق غالباً على المجموع مثل إذا كان a , b أعداد حقيقية و

$$\sum_{j=1}^{n}(ax_j + by_j) = a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j$$

حيث $x_1,x_2, \dots , x_n$ و $y_1,y_2, \dots , y_n$ هي أعداد حقيقية.

مثال:

استخدم ترميز المجموع للتعبير عن مجموع العناصر الـ 100 الأولى من المتسلسلة $\{a_j\}$ حيث $a_j=1/j$ لكل $j = 1,2,3,\dots$

الحل:

الحد الأدنى للمجموع هو 1 والحد الأعلى هو 100 ، نكتب المجموع بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{100}\frac{1}{j}$$

مثال :

ما قيمة $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$ ؟

الحل:

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1$$

مثال:

المجموع الثنائي يظهر في العديد من السياقات (كما في تحليل الحلقات المتداخلة في برامج الحاسوب) ومثال على ذلك:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$$

ولحساب قيمة المجموع الثنائي أولاً نفتح المجموع الداخلي ثم نستمر في حساب المجموع الخارجي.

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i$$

$$= 6+12+18+24 = 60$$

*** ملاحظة :**

يستخدم $\sum_{s\in S} f(s)$ لإظهار المجموع من القيم f(s) لكل العناصر s من S.

مثال:

ما قيمة $\sum_{s\in(0,2,4)} S$ ؟

الحل:

لأن S $\sum_{s\in(0,2,4)}$ يظهر المجموع من القيم في S لكل العناصر من المجموعة (0,2,4) فإن

$$\sum_{s\in(0,2,4)} S = 0 + 2 + 4 = 6$$

تمرين (واجب) :

س1: أوجد عناصر المتسلسلة $\{a_n\}$ ، a_0,a_1,a_4,a_5 ، حيث $a_n = (-3)^n + 5^n$ ؟

س2: احسب قيمة :

- $\sum_{j=0}^{8} 3^j - 2^j$
- $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} (2i + 3j)$

Algorithms:

يوجد العديد من أصناف المسائل التي تظهر في الرياضيات المتقطعة مثل إيجاد أكبر عدد صحيح ضمن سلسلة من الأعداد الصحيحة، ترتيب سلسلة من الأعداد،...إلخ ، عند التعامل مع هذا النوع من المسائل ، أول خطوة نقوم بها هي بناء نموذج يترجم المسألة ليضعها ضمن سياق رياضي.

تعريف:

الخوارزمية هي عبارة عن مجموعة محددة من الخطوات المتسلسلة لمعالجة حاسوبية من أجل أداء مهمة أو حل مسألة ما، وتهدف إلى الحصول على نتائج محددة اعتباراً من معطيات ابتدائية. ويمكن أن تكتب باللغة العربية أو الانجليزية أو باستخدام رسوم توضيحية تمثل الخطوات وتسلسلها.

مثال:

خوارزمية ايجاد العدد الأكبر maximum ضمن سلسلة محددة من الأعداد الصحيحة؟

الحل:

1- تعيين أكبر عدد صحيح (مؤقت) مساوياً لأول عدد من السلسلة.

2- نقارن العدد الصحيح التالي من السلسلة مع العدد المؤقت، فإذا كان أكبر منه نضع أكبر عدد صحيح (مؤقت) مساوياً لهذا العدد الصحيح التالي.

3- نكرر الخطوة السابقة إذا كان هناك المزيد من الأعداد الصحيحة ضمن السلسلة.

4- نتوقف عندما لا يبقى أي عدد صحيح في السلسلة، عندما يكون أكبر عدد صحيح المؤقت في هذه المرحلة الأخيرة هو أكبر عدد صحيح في السلسلة.

* لاحظ أنه ..

يوجد العديد من الطرق النصية والبيانية للتعبير عن الخوارزمية. إن استخدام طريقة منتظمة للتعبير عن الخوارزمية يوفر حرية التعبير عن الحل مع الاحتفاظ بسهولة نقل الحل إلى لغة برمجة يفهمها الحاسوب، يمكن أن تسمى هذه الطريقة تجاوزاً لغة خوارزمية Pseudo code وترجمتها الحرفية " شبه الترميز " إذ تشكل حلاً وسطاً بين لغتنا الطبيعية ولغات البرمجة.

على سبيل المثال يمكن ايجاد أكبر عدد صحيح ضمن سلسلة من الأعداد الصحيحة $a_1,a_2,\ldots,a_n$ باستخدام الـ Pseudo code على النحو التالي:

Procedure max($a_1,a_2,\ldots,a_n$: integers)

max=a_1

For i=2 to n

If max < a_i then max = a_i

return max { max is the largest element}

– خصائص الخوارزميات Algorithm Properties :

يوجد العديد من الصفات المشتركة بين الخوارزميات منها:

1) المدخل Input : لكل خوارزمية معطيات مدخلة من مجموعة محددة.
2) المخرجات Output : من أجل كل مجموعة معطيات مدخلة تُنتج الخوارزمية معطيات مخرجة من مجموعة محددة، وتعتبر هي حل السلسلة.
3) الوضوح Definiteness : يجب أن تكون تعليمات وخطوات الخوارزمية واضحة بحيث يمكن قراءتها وفهمها.

4) الصحة Correctness : يجب على الخوارزمية أن تُنتج قيم مخرجة صحيحة من أجل كل مجموعة من قيم الدخل.
5) المحدودية Finiteness : يجب على الخوارزمية أن تُنتج قيم المخرجات المرجوّة بعد عدد معين من الخطوات وذلك من أجل كل مجموعة من قيم المدخلات.
6) الفعالية Effectiveness : إمكانية تنفيذ كل خطوة من خطوات الخوارزمية بالضبط وضمن فترة زمنية محدودة.
7) العمومية Generality : يجب على الإجرائية أن تكون قابلة للتطبيق من أجل كل المسائل من النموذج المطلوب، وليس فقط من أجل مجموعة معينة من قيم المدخلات.

تمرين (واجب) : ماهي الخصائص التي تنطبق على الخوارزمية في مثال السابق؟

- **أنواع الخوارزميات Algorithms Types :**

يمكن تصنيف الخوارزميات بحسب الوظيفة التي تقوم بها، والمسألة الرئيسية التي تحلها، مثل :

- خوارزميات البحث Search Algorithms: هدفها البحث عن عنصر معطيات محدد.
- خوارزميات الفرز Sort Algorithms : هدفها ترتيب مجموعة من عناصر المعطيات ترتيباً متتالياً اعتماداً على أحد بنود العناصر أو على اجتماع عدة بنود محددة.

كما يمكن اتباع أسلوب آخر في التصنيف يعتمد على التقنية المستخدمة في تشكيل التعليمات وتسلسلها مثل :

- الخوارزميات التتابعية Sequential Algorithms : يجري تنفيذها لاحقاً وفق تتابع التعليمات وبترتيب معين.
- الخوارزميات المتوازية Parallel Algorithms : يجري تنفيذ أكثر من جزء منها في آن واحد ويجري ذلك عادة على عدة معالجات.
- الخوارزمية التراجعية Backtracking Algorithms : وهي خوارزميات تستخدم لإيجاد حل ضمن مجموعة محاولات ممكنة حيث تمثل المحاولات على شكل فروع في شجرة يجري

تجريب أحد الفروع، فإن لم تجد الحل نعود إلى الوراء لنختار مساراً آخر نجربه ، وهكذا حتى نعثر على المسار المناسب ، ومثال ذلك تلوين خارطة بما لا يزيد على أربعة ألوان.

- الخوارزميات العوديّة Recursive Algorithms : وهي خوارزميات تستخدم ضمن تعليماتها استدعاءً للخوارزمية نفسها مثل خوارزمية حساب !n.

ويمكن تصنيف الخوارزميات التي تستخدم طرق متشابهة في حل المسائل مع بعضها البعض، التصنيف ليس شمولياً وليس منفصلاً (أي يمكن لتصنيفين أن يتقاطعا) مثل:

- خوارزميات فرق تسد Divide and Conquer Algorithms: يتم تقسيم المسألة المراد حلها إلى مسائل جزئية أصغر من نفس النمط ومن ثم حل تلك المسألة الجزئية بطريقة عودية. ثانياً تجميع حلول المسائل الجزئية التي تم الحصول عليها ضمن حل واحد للمسألة الأصلية. مثال على ذلك خوارزمية الفرز السريع quicksort وكذلك خوارزمية الدمج merge sort.
- خوارزميات البرمجة الديناميكية Dynamic Programming Algorithms : عبارة عن خوارزميات تتذكر النتائج السابقة وتستخدمها لإيجاد نتائج جديدة. تستخدم هذه الخوارزميات عادة لإيجاد الحلول المثلى Optimization Problems . مثال على ذلك خوارزمية Dijkstra في إيجاد أقصر مسار بين عقدتين.
- خوارزميات الطموحة Greedy Algorithms: تستخدم لإيجاد الحل الأمثلي للمسائل المطروحة، وهي تعمل على مراحل، في كل مرحلة أولاً نأخذ في لحظة معينة الحل الأمثل بدون النظر إلى النتائج المستقبلية وثانياً نأمل باختيار حل أمثلي محلي local في كل خطوة، بالحصول بالنهاية على حل أمثلي عام global. مثال على ذلك عد النقود.

– خوارزمية البحث Search Algorithm :

يمكن وصفها كما يلي:

البحث عن موقع العنصر x ضمن سلسلة من العناصر المختلفة $a_1,a_2,\ldots,a_n$ أو اظهار أنه غير موجود ضمن السلسلة (أي مخرج خوارزمية البحث هو الموقع i إذا كان $x=a_i$ أو 0 إذا لم يكن x ضمن السلسلة).

ويمكن تصنيف خوارزمية البحث إلى :

- البحث التسلسلي (الخطي) Linear Search :

نبدأ بمقارنة العنصر x بالعنصر a_1 ، إذا كان $x=a_1$ فالحل هو 1 ، وإذا كان $x\neq a_1$ نقارن العنصر x بالعنصر a_2 ، إذا كان $x=a_2$ فالحل هو 2 ، وإذا كان $x\neq a_2$ نقارن العنصر x بالعنصر a_3 ... وهكذا حتى نجد العنصر الذي نبحث عنه أو أن السلسلة تنتهي بدون إيجاد العنصر x والحل في هذه الحالة هو 0.

خوارزمية البحث الخطي هي:

```
Procedure linear search ( x: integer, a1,a2,...,an: distinct integers)
i=1
while ( i≤n and x≠ai)
i=i+1
If   i ≤ n    then     location = i
else
location = 0
return location { subscript i of the term that equals x , or is 0 if x is
not found}
```

- البحث الثنائي Binary Search :

نبدأ بمقارنة العنصر x مع العنصر الذي دليله m الموجود في منتصف السلسلة المرتبة (تصاعدياً على سبيل المثال) ونناقش الحالات التالية:

أ) $x=a_m$ يتوقف البحث ونكون قد وجدنا العنصر.

ب) $x > a_m$ العنصر x لا يمكن أن يوجد قبل a_m ونتابع البحث ضمن النصف اليميني من السلسلة.

ت) $x < a_m$ نتابع البحث ضمن النصف اليساري من السلسلة.

نتابع البحث بحيث نقسم على 2 عدد العناصر الواجب مناقشتها في كل مرحلة.

Procedure binary search (x: integer, $a_1,a_2,\ldots,a_n$: increasing integers)

i=1 { i is left endpoint of search interval}

j=n { j is right endpoint of search interval}

while i < j

$m=\lfloor (i+i)/2 \rfloor$

if $x > a_m$ then i=m+1

else

j=m

if $x = a_i$ then location = i

else

location = 0

return location { subscript i of the term a_i equal to x , or 0 if x is not found}

مثال:

للبحث عن العنصر 19 ضمن سلسلة الأعداد ,1, 2 ,3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16 18, 19, 20, 22 المكونة من 16 عنصر، نقسمها إلى سلسلتين كل منها 8 عناصر 1, 2 ,3, 5, 6, 7, 8, 10 و 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 22

بما أن 19 أكبر من عنصر المنتصف(10) بالتالي سيكون البحث في السلسلة الأكبر (النصف اليميني). يتم تقسيم السلسلة اليمينية إلى سلسلتين كل منها 4 عناصر 12, 13, 15, 16 و 18, 19, 20, 22. بما أن 16<19 يتم البحث في السلسلة النصف اليسارية حيث سيتم

تقسيمها إلى سلسلتين كل منها عنصرين 18,19 و 20,22 . بما أن 19 ليس أكبر من 19 بالتالي يتم البحث في السلسلة اليمينية التي يتم تقسيمها إلى سلسلتين كل منها عنصر واحد 18 و 19. بما أن 18<19 بالتالي يتم البحث ضمن السلسلة التي تحوي عنصر واحد 19 والذي دليله 14 وهو مخرج الخوارزمية (لأن 19=19).

– خوارزمية الفرز Sorting Algorithm:

لدينا سلسلة تحوي n عنصراً، يرتبط بكل عنصر من عناصر السلسلة مفتاح ينتمي إلى مجموعة مرتبة كلياً. نريد الحصول على سلسلة تكون بديلاً لعناصر السلسلة الأصلية. بحيث تكون مفاتيح الفرز مرتبة تصاعدياً حيث نقرأ السلسلة من البداية إلى النهاية. الغاية من الفرز هي الوصول السريع إلى المعلومات بطرق البحث.

ملاحظة: يمكن اعتماد أي من مكونات عناصر السلسلة كمفتاح الفرز، كما يمكن ايجاد تراكيب مختلفة من مكونات العناصر لإنشاء الفرز.

مثال:

يمكن فرز مجموعة أشخاص حسب الاسم أو حسب العمر أو حسب الطول.

يمكن تصنيف خوارزميات الفرز إلى :

- **الفرز بطريقة الفقاعات Bubble Sort:**

لإيجاد أصغر عنصر في السلسلة يمكن مسحها ابتداءً من نهايتها، وتبديل العناصر المتجاورة إذا كانت لا تراعي الترتيب. في نهاية عملية المسح والترتيب يكون أصغر عنصر موجود في بداية السلسلة.

خوارزمية الفرز بالفقاعات كالتالي:

Procedure bubblesort($a_1,\dots,a_n$: real numbers with $n\geq 2$)

For $i=1$ to $n-1$

For $j=1$ to $n-i$

If $a_j>a_{j+1}$ then interchange a_j and a_{j+1}

{$a_1,a_2,\dots,a_n$ is in increasing order}

مثال:

افرز العناصر $3,2,4,1,5$ باستخدام خوارزمية الفرز بالفقاعات؟

الحل:

المرور الأول : نبدأ بمقارنة $3,2$. بما أن $2 < 3$ بالتالي نبدل بينهما ونحصل على السلسلة $2,3,4,1,5$ وهكذا حتى نضمن أن أكبر عنصر (5) موجود في الموضع الصحيح.

نكمل بنفس الطريقة المرور الثاني (3 مقارنات) ومن ثم الثالث (مقارنتين) وأخيراً المرور الرابع مقارنة واحدة نحصل على السلسلة مرتبة تصاعدياً $1,2,3,4,5$.

- **الفرز بالإقحام Selection Sort:**

تعتبر هذه الخوارزمية فعالة من أجل عدد صغير من القيم، وهذه الخوارزمية مستوحاة من الطريقة التي يتبعها معظم الناس في ترتيب أوراق اللعب. تفترض خوارزمية الإقحام أنه في المرحلة j أن العناصر الـ $j-1$ الأولى من السلسلة مرتبة، ونريد ايجاد موقع العنصر رقم j بين هذه العناصر، تتم العملية بمقارنة العنصر المذكور مع عناصر السلسلة المذكورة عنصر عنصر بدءاً من أول عنصر منها. في نهاية المرحلة j نحصل على سلسلة حدودها الـ j الأولى مرتبة.

خوارزمية الفرز بالإقحام كالتالي:

Procedure insertionsort($a_1,\ldots,a_n$: real numbers with $n\geq 2$)

For $j=2$ to n

$i= 1$

while $a_j > a_i$

$i=i+1$

$m=a_j$

for $k=0$ to $j-i-1$

$a_{j-k} =a_{j-k-1}$

$a_i=m$

{$a_1,\ldots,a_n$ is in increasing order}

مثال:

افرز العناصر 3,2,4,1,5 باستخدام خوارزمية الإقحام؟

الحل:

نقارن العنصر 2 مع 3. بما أن 3>2 نضع العنصر 2 في بداية السلسلة 2,3,4,1,5 (لدينا العنصرين 3, 2 في الترتيب الصحيح). الآن نضع العنصر 4 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة 3 ,2 وذلك عن طريق المقارنة 2<4 و 3<4 فنحصل على السلسلة 2,3,4,1,5 (العناصر الثلاثة الأولى مرتبة). نضع العنصر 1 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة 2,3,4 . بما أن 2>1 نحصل على السلسلة 1,2,3,4,5 . أخيراً نقحم العدد 5 في الموضع الصحيح ضمن السلسلة المرتبة 1,2,3,4 عن طريق المقارنة مع عناصر تلك السلسلة المرتبة. بما أن 4<5 بالتالي يبقى العنصر 5 مكانه في الموضع الأخير منتجاً السلسلة المرتبة 1,2,3,4,5.

- تعقيد الخوارزميات **Complexity of Algorithms:**

بشكل عام، من أجل مسألة ما يمكن أن يوجد أكثر من خوارزمية لحل تلك المسألة، لذلك كيف نختار الخوارزمية الفعالة التي سنستخدمها لحل تلك المسألة؟

يمكننا الاعتماد على زمن التنفيذ ولكنها فكرة غير جيدة لأن زمن تنفيذ البرنامج يعتمد على الحاسوب (بطئ ، سريع) ، وخلال تنفيذ البرنامج قد ينشغل الحاسوب بتنفيذ مهام أخرى، لذلك فإنه من المستحسن إيجاد قياس فعالية خوارزمية ما بشكل مستقل عن الآلة، عن لغة البرمجة، وعن المبرمج.

- زمن التعقيد Time Complexity :

يعبر عنه بعدد العمليات المستخدمة من قبل الخوارزمية. العمليات المستخدمة في قياس زمن التعقيد يمكن لها أن تكون مقارنة أو جمع أو ضرب أو قسمة أعداد صحيحة بالإضافة إلى أي عمليات أساسية أخرى.

- التعقيد في أسوأ الأحوال Worst-case Complexity:

ويعني أكبر عدد من العمليات اللازمة التي تحتاجها الخوارزمية لضمان الحصول على حل للمسألة.

- التعقيد في أحسن الأحوال Best-case Complexity:

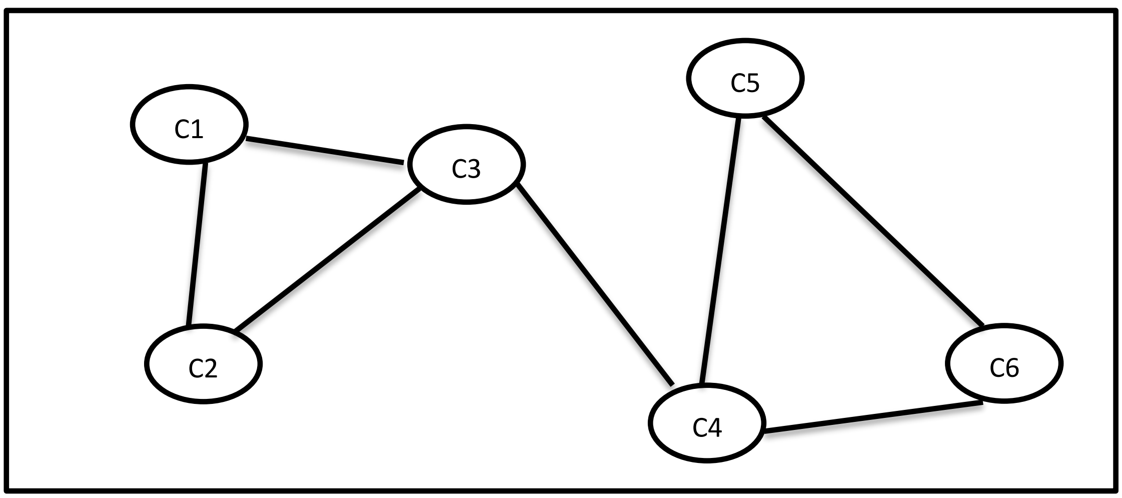
يعني أقل عدد من العمليات اللازمة لحل المسألة باستخدام هذه الخوارزمية.

- التعقيد الوسطي Average-case Complexity:

يعني العدد الوسطي للعمليات اللازمة لحل المسألة باستخدام هذه الخوارزمية.

Graphs:

ليكن لدينا مجموعة المطارات في دولة ما، بعض تلك المطارات يرتبط برحلات مباشرة مع مطارات أخرى في نفس البلد أو من بلدان أخرى والبعض الآخر يرتبط بقلة مع باقي المطارات. من المفيد ايجاد بنية لربط تلك المطارات مع بعضها (ومن الممكن أيضاً إضافة معلومات إضافية كالتكلفة أو المسافة أو الزمن اللازم لكل رحلة مباشرة). يمكننا تمثيل ذلك برسم خارطة نعبر فيها عن كل مطار بنقطة وإذا كان مطاران مرتبطان برحلة مباشرة نمثلها بخط بينهما وعلى الخط يمكن أن نضع التكلفة أو المسافة أو الزمن، نسمي هذا التمثيل بالبيان Graph.



تعريف:

البيان G عبارة عن ثنائية مرتبة (V,E)، حيث V هي مجموعة غير خالية و منتهية من العقد Vertices و E هي مجموعة الأسهم (الأضلاع) Edges.

كل سهم له عقدة واحدة أو عقدتين مرتبطتين به، ندعوها **طرفي السهم** endpoints.

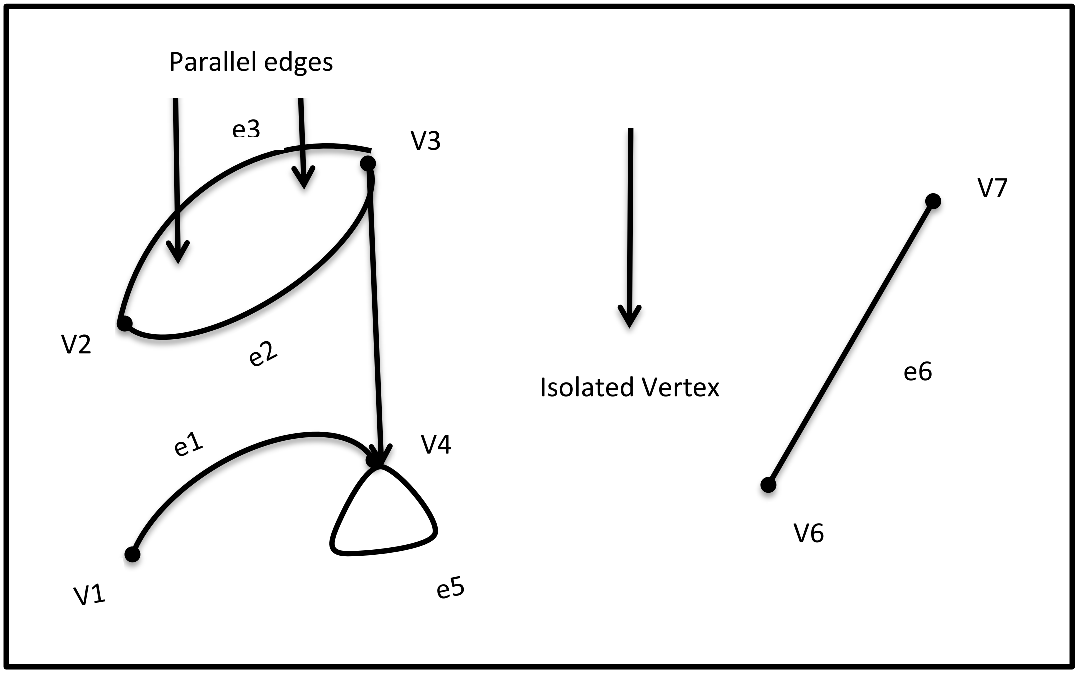
نسمي كل سهم له عقدة واحدة مرتبطة به ، **حلقة** Loop، مثال ذلك السهم e5،

ونسمي الأسهم التي تتشارك بنفس النهايات **أسهماً متوازية** Parallel مثل السهمين e2,e3.

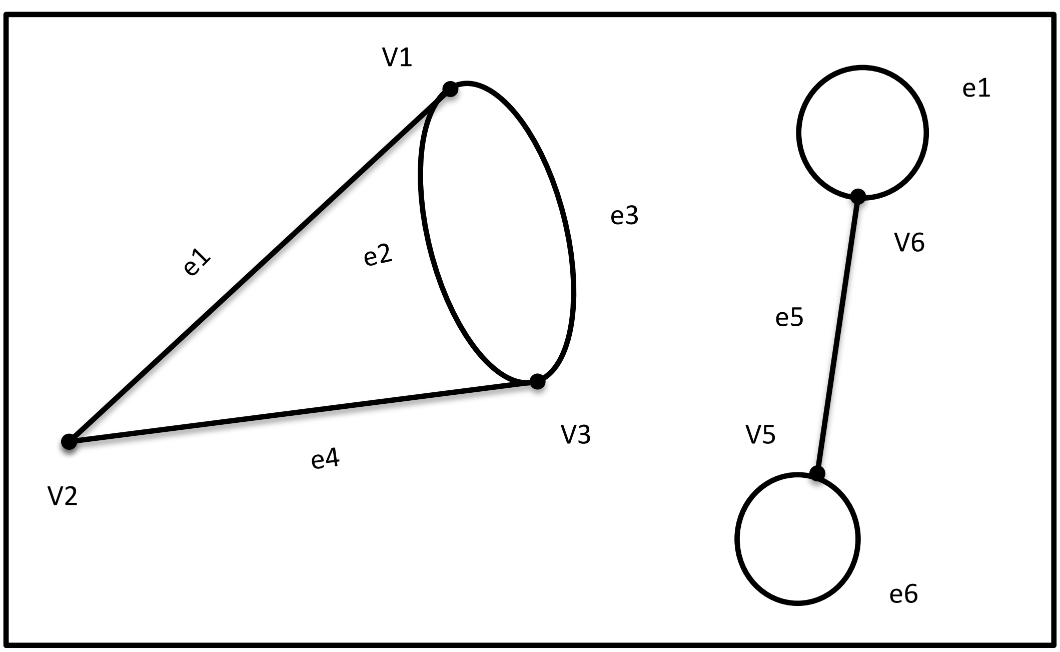
نسمي العقدتين المرتبطتين بالسهم على أنهما **متجاورتين** adjacent مثال على ذلك V6,V7 ،

بينما نسمي عقدة الحلقة على أنها **مجاورة لنفسها** مثل العقدة V4 ،

ونسمي العقدة التي ليس لها أسهم واردة ب**المعزولة** Isolated مثل العقدة V5 .



مثال : ليكن لدينا البيان التالي:



1) اكتب مجموعة العقد ومجموعة الأسهم وكذلك طرفي الأسهم؟

2) أوجد: * كل الأسهم الواردة إلى V1؟

* كل العقد المجاورة لِ V1؟   * الحلقات؟

* كل الأسهم المجاورة لِ e1 ؟   * الأسهم المتوازية؟

* العقد المجاورة لنفسها؟   * العقد المعزولة؟

الحل:

1) مجموعة العقد = {V1,V2,V3,V4,V5,V6}.

2) مجموعة الأسهم = {e1,e2,e3,e4,e5,e6}.

3) طرفي الأسهم:

Edge	Endpoint
e1	{V1,V2}
e2	{V1,V3}
e3	{V1,V3}
e4	{V2,V3}
e5	{V5,V6}
e6	{V5 }
e7	{V6}

* الأسهم الواردة إلى V1 : e1,e2,e3.

* العقد المجاورة لِ V1 : V2,V3.

* الأسهم المجاورة لِ e1 : e2,e3,e4.

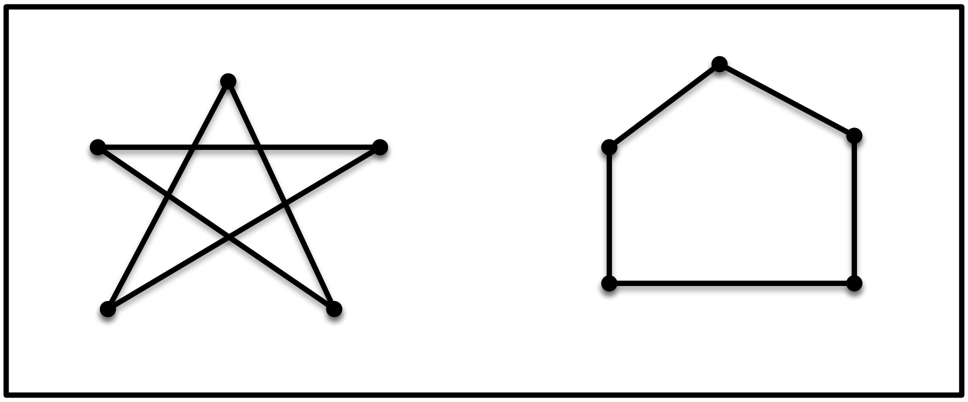
* الحلقات : e6,e7.

* الأسهم المتوازية : e2,e3.

* العقد المجاورة لنفسها : V5,V6.

* العقد المعزولة : V4.

تمرين (واجب) : ليكن لدينا البيانين التاليين، سمّ العقد و الأسهم لكل منهما بحيث يمثلان نفس البيان:



ملاحظة :

يمكن لمجموعة العقد V للبيان G أن تكون غير منتهية. نسمي البيان الذي له عدد غير منته من العقد أو عدد غير منته من الأسهم بالبيان غير المنتهي infinite.

_ أمثلة تطبيقية عن البيان Graph Examples:

يتم استخدام البيانات في نمذجة العديد من المسائل المعقدة بهدف حلها.

- الشبكات الاجتماعية Social Network
- شبكات الاتصال Communication Network
- شبكات المعلومات Information Network

– خواص البيان Graph Properties:

* بيان بسيط Simple Graph : الذي لا يحوي أي حلقات أو أسهماً متوازية.

* بيان موجه Directed Graph : البيان G=(V,E) ، حيث V مجموعة غير خالية من العقد، E مجموعة الأسهم الموجهه، حيث كل سهم يرتبط بزوج مرتب من العقد ندعوها طرفي السهم endpoint.

ملاحظة :

في البيان الموجه إذا وجد سهم من V إلى W فليس من الضروري أن يوجد سهم من W إلى V. أي لدينا زوج مرتب (V,W)، بمعنى {V,W} ≠ {W,V} . نسمي العقدة V الذيل tail ونسمي العقدة W الرأس head.

ملاحظة :

في البيان غير الموجه تكون الثنائيات (V، W) غير مرتبة ،أي أنه إذا كانت V في جوار W فإن W هي في جوار V أيضاً (السهم في الاتجاهين) ، أي أن {W,V} = {V,W}

Trees:

الشجرة جزء من أنواع البيان، وسميت بذلك لأنها تشبه الشجرة مثل أشجار العائلة حيث تستخدم العقد لتمثيل أعضاء العائلة والأسهم لتمثل العلاقة بين الأبناء.

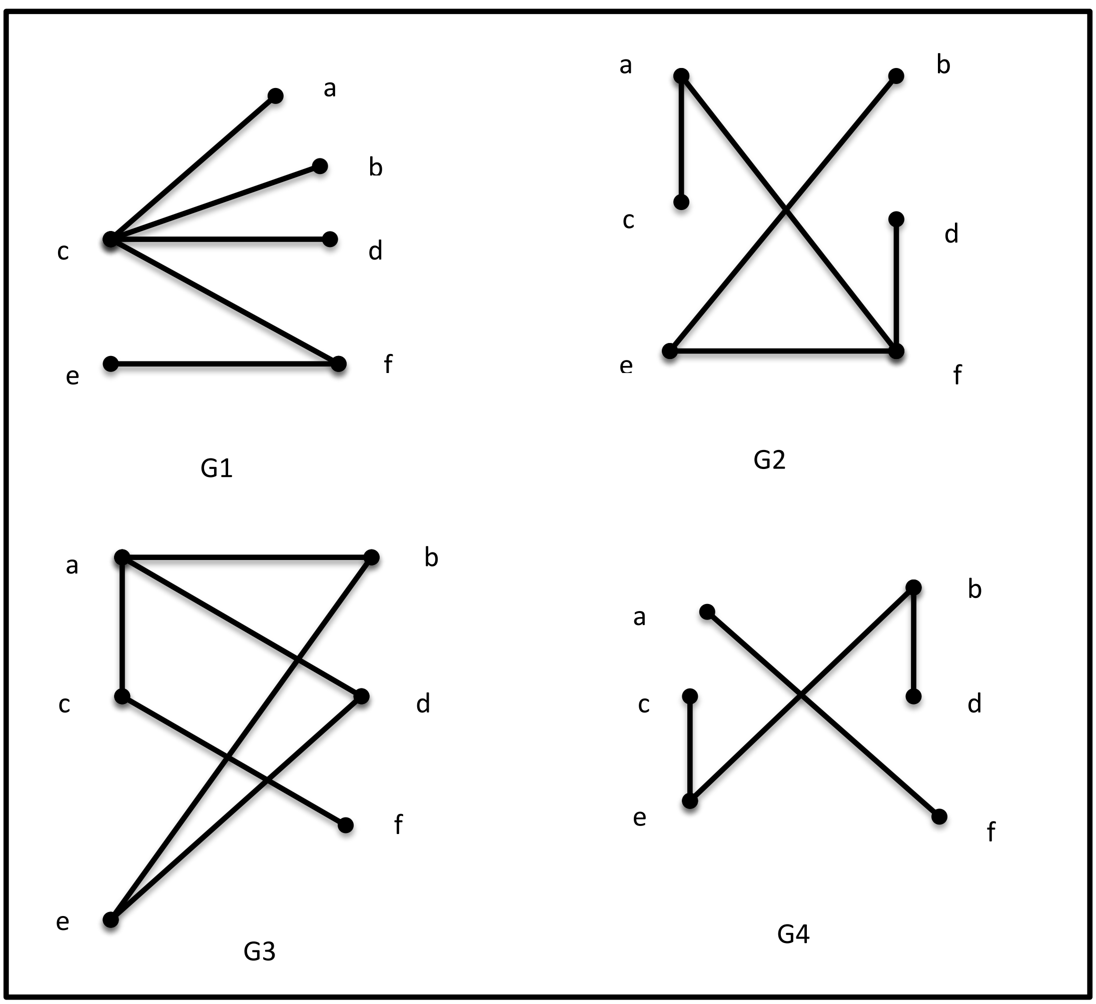
تعريف:

الشجرة هي بيان غير موجه مرتبط لا يحوي دارات بسيطة.

ملاحظة :

لأن الشجرة لا تحوي دارة بسيطة، الشجرة لا تحتوي أسهم مزدوجة أو حلقات لذلك أي شجرة يجب أن تكون بيان بسيط.

مثال : أي من البيانات التالية تمثل أشجار؟



الحل:

G1 و G2 عبارة عن شجرة لأن كل منها عبارة عن بيان مترابط بدون دارات بسيطة.

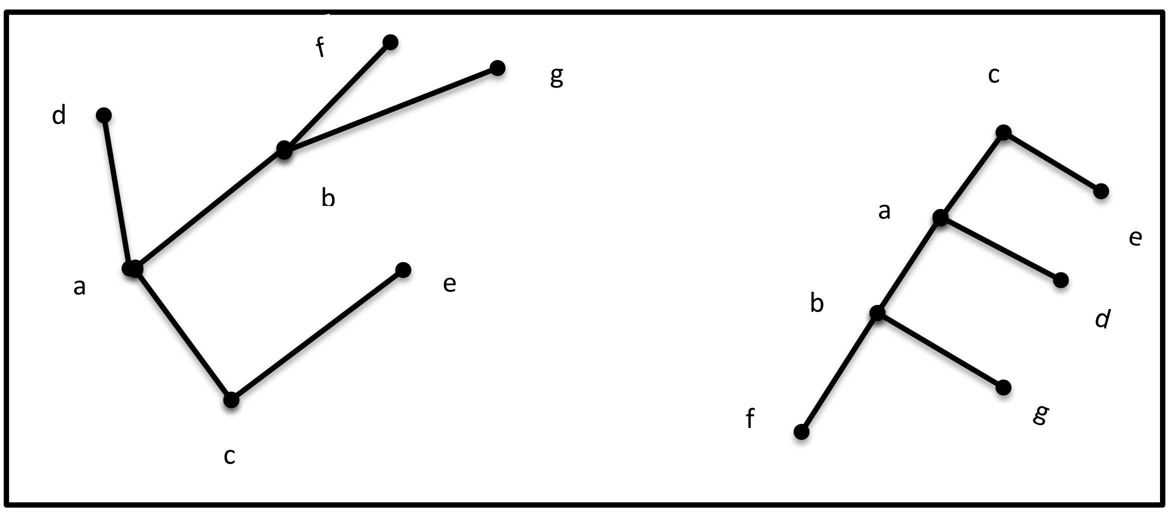
G3 ليس شجرة لأن المسار e,d,a,d,e يمثل دارة بسيطة.

G4 ليس شجرة لأنه بيان غير مترابط.

تعريف :

الشجرة ذات الجذر rooted tree ، شجرة لها عقدة مميزة نسميها الجذر، ويمكن بواسطتها الوصول إلى مجموعة من العقد، ومن هذه العقدة نستطيع الوصول إلى عقد أخرى وهكذا.

مثال :



تعريف :

لتكن T شجرة ذات جذر، إذا كان لدى الشجرة عقدة واحدة أو عقدتين نسمي كل منها عقدة نهائية terminal node (أو ورقة leaf). أما إذا كان للشجرة ثلاث عقد على الأقل، عندها نسمي كل عقدة منها درجتها تساوي الواحد ورقة.

والعقد التي درجتها أكبر من الواحد نسميها عقد داخلية.

مثال :

في الشجرة السابقة (الشكل اليمين) التي جذرها c، العقد a, b, c هي عقد داخلية بينما العقد d, e, f, g عبارة عن أوراق.

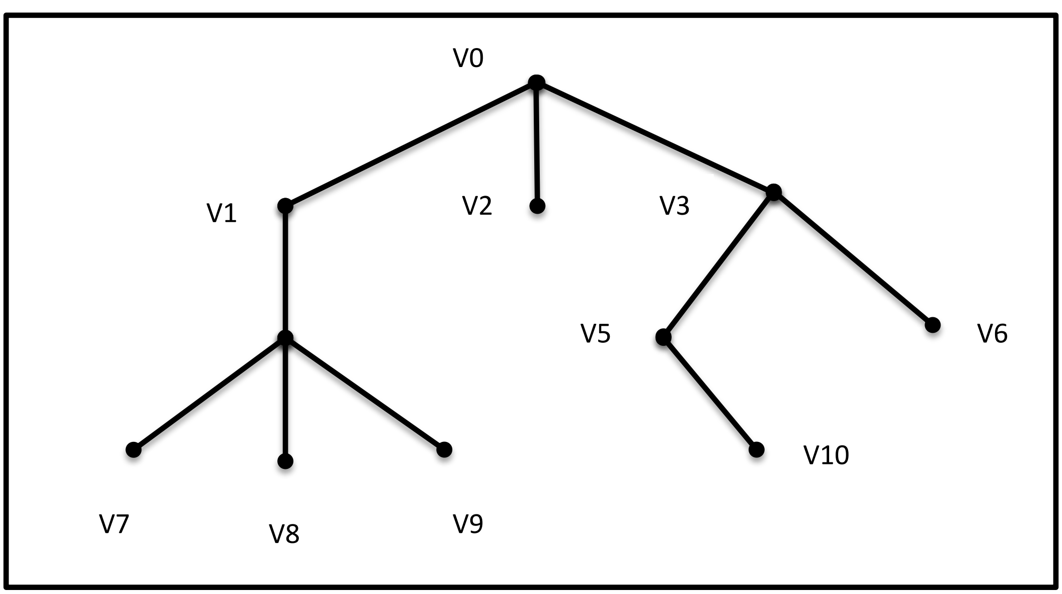
تعريف :

لتكن T شجرة ذات جذر، نسمي مستوى level عقدة عدد الأسهم التي تصل المسار الوحيد بين تلك العقدة والجذر. كما نسمي ارتفاع شجرة high ذات جذر بالارتفاع الأعظمي لعقد الشجرة.

تعريف :

لتكن T شجرة ذات جذر، لتكن V عقدة داخلية، نسمي أولاد (أبناء) children لِـ V كل العقد المجاورة لِـ V والتي تقع في مستوى أكبر بواحد من مستوى V. لتكن العقدة W ابن لِـ V، عندها نسمي V أب parent لِـ W. نسمي العقدتان المختلفتان V، W اللذان لهما نفس الأب U بالأشقاء siblings، ونسمي سلف ancestor عقدة هو أي عقدة أعلى منها مستوى، وخلف descendant عقدة هو أي عقدة أسفل منها مستوى.

مثال : لتكن T الشجرة ذات الجذر التالية:



مستوى العقدة V5 هو 2، ومستوى العقدة V0 هو 0، ومستوى العقدة V10 هو 3

ارتفاع الشجرة هو 3، أولاد العقدة V3 هما V5,V6، أب العقدة V2 هو V0

أشقاء العقدة V8 هما V9 , V7 وأخيراً خلف العقدة V3 هم V5, V6, V10.

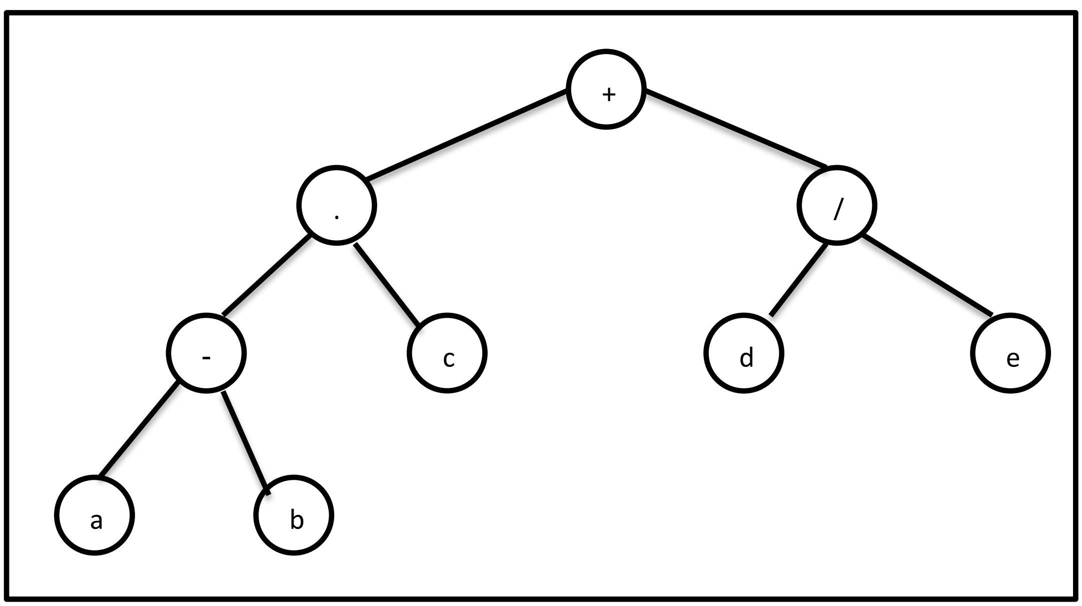
تعريف :

نسمي شجرة ثنائية binary tree ،شجرة ذات جذر بحيث لكل عقدة أب يوجد ولدان على الأكثر.
يتم تسمية كل ولد من الشجرة الثنائية إما الولد اليساري left child أو الولد اليمينيright child .

نسمي شجرة ثنائية تامة full binary tree شجرة ثنائية ذات جذر بحيث لكل عقدة أب يوجد ولدان تماماً.

مثال : تمثيل عبارة حسابية

ليكن لدينا العبارة التالية: ((a–b).c)+(d/e) ، يتم تمثيل المعادلة بالشكل التالي :



تمرين (واجب) :

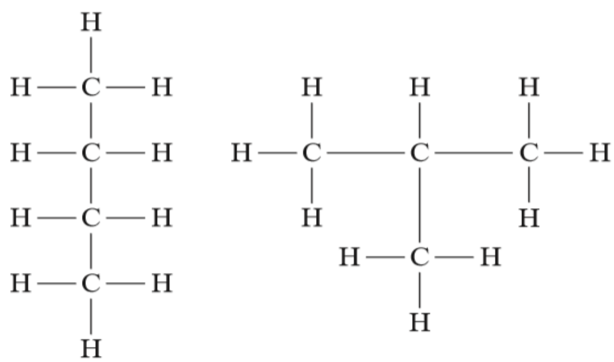
ما هو الولد اليساري والولد اليميني للعقدة (–) من الشجرة الثنائية السابقة (المثال السابق)؟

– أمثلة تطبيقية عن الأشجار Example of Trees:

تستخدم الأشجار كنماذج في حالات متنوعة مثل علم الحاسوب، الكيمياء، الجيولوجيا، علم النبات ...

مثل:

* بنية الجزيئات الهيدروكربونية.



* أنظمة الملفات الحاسوبية.

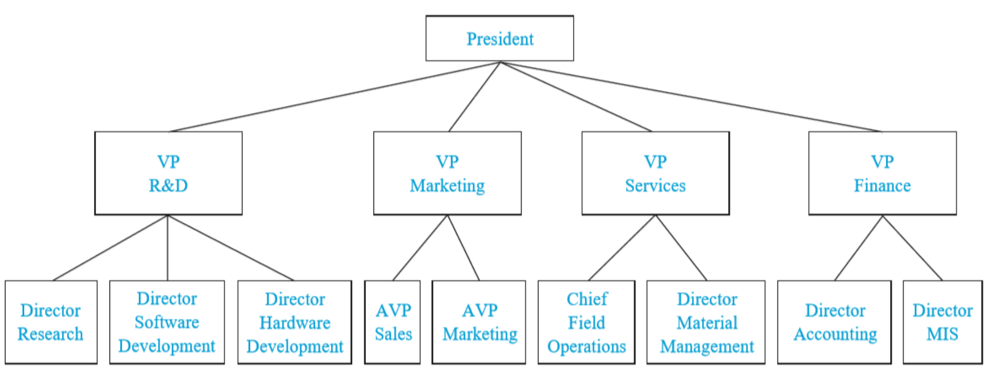


FIGURE 10 **An Organizational Tree for a Computer Company.**

تمرين (واجب):

حدد أي من الـ Graphs التالي يمثل Trees :