因为 DS 方程在 $D=0$ 时是代数的，我们可以解析地推导出这种渐近行为：我们代入 $G_{2n}=(-1)^{n+1}(2n-1)!g_{2n}$，将第 $2n$ 个 DS 方程乘以 x^{2n}，从 $n=1$ 到 ∞ 求和，并定义生成函数 $u(x)\equiv xg_2+x^3g_4+x^5g_6+\cdots$。$u(x)$ 满足的微分方程是非线性的：

$$u''(x)=3u'(x)u(x)-u^3(x)-x,$$

其中 $u(0)=0$ 和 $u'(0)=G_2$。我们通过代入 $u(x)=-y'(x)/y(x)$ 对 (5) 进行线性化，得到 $y'''(x)=xy(x)$，其中 $y(0)=1,y'(0)=0,y''(0)=-G_2$。满足这些初始条件的精确解是

$$y(x)=\frac{2\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)}\int_0^\infty dt\cos(xt)e^{-t^4/4}.$$

如果 $y(x)=0$，则生成函数 $u(x)$ 变为无穷大，因此 $|x|$ 的最小值 $y(x)=0$ 是级数对 $u(x)$ 的收敛半径。一个简单的图显示 $y(x)$ 在 $x_0=\pm 2.4419682\ldots$ [9] 处消失。因此，$r=1/x_0=0.409506\ldots$，证实了（4）。

(4) 中的渐近行为表明 G_{2n} 比 γ_{2n} 的 $n\to\infty$ 增长得快得多：

$$\gamma_{2n}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dx x^{2n}e^{-x^4/4}}{\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-x^4/4}}\sim 2^n\frac{\Gamma(n/2+1/4)}{\Gamma(1/4)}$$