IQ3111 - Modelamiento y Optimización de Procesos
Cuerpo docente: Andrés I. Cárdenas*, Jorge Aracena, Guillermo Lillo, Carolina Navarro y Alberto Peña

Pauta P2 Auxiliar 4

a) 1)

$$P_C \vee P_D \implies P_R \vee P_{R'}$$

La idea es utilizar los pasos vistos en clases para llegar a una expresión que dependan de claúsulas $\wedge_i^S Q_i$ en donde cada claúsula se define como $Qi : \vee_i^r P_i$,los pasos a seguir son los siguientes:

- Eliminar las implicancias de la expresión:

$$\neg(P_C \vee P_D) \vee (P_R \vee P_{R'})$$

- Aplicar ley de Morgan:

$$(\neg P_C \wedge \neg P_D) \vee (P_R \vee P_{R'})$$

- Distribuir repetidamente los y u o logicos presentes en la expresión hasta llegar a una expresión del estilo $\wedge_i^S Q_i$, en este caso obtenemos dos claúsulas:

$$(\neg P_C \vee P_R \vee P_{R'}) \wedge (\neg P_D \vee P_R \vee P_{R'})$$

  De esta forma obtenemos nuestro CNF,ahora si le asignamos una restricción tendremos que para las clausúlas se obtiene que:

$$1 - y_C + y_R + y_{R'} \geq 1 \implies y_R + y_{R'} \geq y_C$$
$$1 - y_D + y_R + y_{R'} \geq 1 \implies y_R + y_{R'} \geq y_D$$

  Dentro de las expresiones obtenidas se puede ir jugando con los valores enteros a forma de comprobar que se cumplen las relaciones logicas originales.

2)

$$P_L \implies P_D \vee P_d$$
$$P_S \implies \neg P_D \wedge P_M$$

Para este caso tenemos dos implicancias que debemos trabajar por separado. En el caso de la primera proposición tendremos que removiendo la implicancia (primer paso) llegamos a lo siguiente:

$$\neg P_L \vee P_D \vee P_d$$
$$\implies 1 - y_L + y_D + y_d \geq 1$$
$$\implies y_D + y_d \geq y_L$$

Luego, para la otra proposición se requiere un poco más de trabajo para llegar al resultado, iniciando con la eliminación de la implicancia, pero esta posterior a eso hay que agregar una pequeña distribución:

$$\neg P_S \vee (\neg P_D \wedge P_M)$$
$$\implies (\neg P_S \vee \neg P_D) \wedge (\neg P_S \vee P_M)$$

Para obtener la CNF y finalmente la restricción deseada, se tiene que

$$\neg P_S \vee \neg P_D \implies 1 - y_S + 1 - y_D \geq 1 \implies y_S + y_D \leq 1$$
$$\neg P_S \vee P_M \implies 1 - y_S + y_M \geq 1 \implies y_S \geq y_M$$

De esta forma obtuvimos tres restricciones las cuales son

$$
\begin{aligned}
&y_D + y_d \geq y_L \\
&y_S + y_D \leq 1 \\
&y_S \geq y_M
\end{aligned}
$$

3)

$$(P_1 \wedge P_2) \vee P3 \implies P4 \vee P5$$

Al igual que en los dos ejercicios anteriores, comenzamos con la eliminación de las implicancias, luego aplicamos ley de morgan y distribuimos los $\vee$ e $\wedge$

$$
\begin{aligned}
&\neg((P_1 \wedge P_2) \vee P_3) \vee (P_4 \vee P_5) \\
\implies &(\neg(P_1 \wedge P_2) \wedge \neg P_3) \vee (P_4 \vee P_5) \\
\implies &\neg(P_1 \wedge P_2) \vee (P_4 \vee P_5) \wedge (\neg P_3 \vee (P_4 \vee P_5))
\end{aligned}
$$

Por último debemos ocupar la ley de morgan una vez más para obtener nuestras claúsulas

$$(\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_4 \vee P_5) \wedge (\neg P_3 \vee P_4 \vee P_5)$$

De esta forma obtenemos las siguientes dos restricciones

$$
\begin{aligned}
1 - y_1 + 1 - y_2 + y_4 + y_5 \geq 1 &\implies 1 + y_4 + y_5 \geq y_1 + y_2 \\
1 - y_3 + y_4 + y_5 \geq 1 &\implies y_4 + y_5 \geq y_3
\end{aligned}
$$

b) Primero denomiramos la variable y_1 e y_2 donde $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}\{0,1\}$. Por un lado y_1 es igual a 1 si es que se instala el reactor I y 0 sino, lo mismo con y_2. Dado que solamente podemos escoger uno de los dos reactores tenemos una restricción asociada a unicidad, la cual se modela por

$$y_1 + y_2 = 1$$

Luego dado que tenemos dos decisiones que tomar respecto a la instalación de los reactores, nos hayamos frente a dos disjunciones.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ F_2 = F_4 \\ F_2, F_4 \geq 0 \end{bmatrix} \underline{\vee} \begin{bmatrix} \neg y_1 \\ F_2 = F_4 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ F_3 = F_5 \\ F_3, F_5 \geq 0 \end{bmatrix} \underline{\vee} \begin{bmatrix} \neg y_2 \\ F_3 = F_5 = 0 \end{bmatrix}$$

La logica de la Big M es acotar nuestras variables por una constante M lo suficientemente grande, lo cual se ve como un gran cuadrado que encierra a nuestros conjuntos factibles, el metodo en si no conlleva mayor complejidad, pero hay que tener cuidado con el M escogido al momento de optimizar ya que el tiempo de operación depende de que tan lejos se encuentre nuestra cuota M de los puntos factibles. Para nuestra primera disjunción tendremos que añadir dos restricciones mediante Big

$$F_2 = F_4$$
$$F_2 \leq My_1$$
$$F_4 \leq My_1$$

En la segunda disfunción se tendra exactamente lo mismo, obteniendo las mismas conclusiones

$$F_3 = F_5$$
$$F_3 \leq My_2$$
$$F_5 \leq My_2$$

De esta forma si y_1 es 1 tendremos que nuestros flujos estaran acotados por M, en caso contrario, ambos flujos valen 0.

Otra alternativa para modelar problamas enteros es por envoltura convexa, mediante un truco (definición de variable z o disgregadas) introducimos una variable que en un principio es no lineal pero que al sumarlas tenga un valor en concreto con lo cual las cosas se comportan de forma lineal. Para armar nuestra envoltura convexa seguiremos la construcción vista en clases, primero tenemos que para nuestra primera disjunción

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ F_2 = F_4 \\ F_2, F_4 \geq 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} \neg y_1 \\ F_2 = F_4 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ F_3 = F_5 \\ F_3, F_5 \geq 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} \neg y_2 \\ F_3 = F_5 = 0 \end{bmatrix}$$

Tendremos un problema restringido de la siguiente forma$A_i x = b_i$, donde en este caso las restricciones estaran dadas por $F_2 - F_4 = 0$ y $F_3 - F_5 = 0$ donde nuestras x serian los flujos, de está forma al multiplicar estas restricciones por y_i tendremos que

$$Ay_i x_i = b_i y_i$$

La última expresión es no lineal, es aqui donde introducimos nuestras variables de disgregación z_i, luego se tendra que

$$\sum_{i\in D} z_i = \sum_{i\in D} xy_i = x\sum_{i\in D} y_i \implies \sum_{i\in D} z_i = x$$

Donde la última expresión se obtiene asumiendo que $\sum_{i\in D} y_i = 1$

$$\begin{aligned} F_2 &= z_1^1 + z_1^2 \\ F_4 &= z_2^1 + z_2^2 \\ F_3 &= z_3^1 + z_3^2 \\ F_5 &= z_4^1 + z_4^2 \end{aligned}$$

En donde cada z_i o varible deisgregada va a estar acotada por

$$0 \leq z_i \leq Uy_i$$

De esta forma tendremos una mejor cota para nuestro problema entero, ya que si nos damos cuenta el problema queda dado por $A_i z_i = b_i y_i$, en donde cada z_i estara acotado por lo expuesto anteriormente lo que en el plano se ve como rectas diagonales que acotan a nuestros conjuntos, asi poseemos dos maneras de modelar nuestro problema entero. Para aplicaciones normalmente se utiliza big M ya que es bastante simple de implementar, pero hay que tener cuidado al valor que se le brinda a esta cota en particular, ya que nos puede alejar de las regiones factibles de nuestro problema.