Maths pour GPGE

Méthodes Pour l'Analyse en Prépa

First Edition

Author : *EL YOUSEFI AHMED*
Institut : *Institut National de Statistique et d'Économie Appliqué*
E-mail : elyousefi.ahmed@outlook

PREFACE

Cet ouvrage d'ANALYSE RÉEL s'adresse aux étudiants des classes prépa SPÉ. On suppose de leur part une maîtrise des techniques de l'étude d'une fonction réel telle qu'elle est enseignée dans les années de SUP et de TERMINALE. Ce bagage mathématique étant supposé acquis, nous avons délibérément pris le parti de développer, au début de ce livre, en fait le premier chapitre présente les techniques de majoration/minoration qui sont fréquemment utilisée. Les deux chapitres (2-3) présente les techniques nécessaires pour l'étude d'une fonction définie par une série des fonctions, puis les deux derniers chapitres (2-3) présentent les techniques nécessaires pour l'étude d'une fonction définie par une intégrale paramétrée. Cet ouvrage comporte de nombreux exercices, traditionnels comme le fameuses fonctions Zêta de Riemann et Gamma, comme les transformée usuelles Laplace et Fourier. La plupart reçoivent une solution détaillée. Il y a aujourd'hui beaucoup de traités d'analyse réel, en beaucoup de langues. Il ne nous est pas possible de les citer tous. On peut juste citer quelque exemple fameux entre les étudiants :

1. La série des ouvrages de *Jean Marie Mounier* : ANALYSE MPSI / ANALYSE SPÉ.
   - Une série qui propose un cours parfait pour les étudiants qui visent les divers concours (Mines-Pont, CentraleSupélec, ...)
   - La série d'ailleurs touche les limites de programme, il sera alors indispensable de lui consacrer le temps nécessaire.
2. Le classique *TOUT EN UN* :
   - Un ouvrage très détaillé pour le Self-Learning.
   - L'ouvrage explique avec richesse toutes les parties de cours alors, il sera alors indispensable de lui consacrer le temps nécessaire.
   - Il est déconseillé pour la période de préparation.
3. L'annale *100% CONCOURS PRÉPA : TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE MP* :
   - Un ouvrage riche des exercices et méthodes.
   - Il est vivement conseillé pour la période de préparation (écrits/oraux).
   - Il est déconseillé pour la compréhension de cours (il ne présente que des résumés)

En outre notre travail ne différera pas de l'esprit le dernier travail : Nous présentons les théorèmes les plus utilisés et les méthodes fréquentes dans les concours. Tout cela enrichit avec tous les exemples nécessaires pour comprendre les techniques qui vous permettront de faire une grande variété d'exercices.
Si quelqu'un veut améliorer le travail merci de me contacter en : elyousefi.ahmed@outlook

TABLE DE MATIÈRE

CHAPITRE 1

LES INÉGALITÉS

Prérequis

- Développement limité
- La notion de Norme
- La notion de Produit scalaire
- Les fonctions dans $\mathbb{R}$ [limite , dérivation, convexité]

Objectifs

- Savoir manipuler les inégalités
- Majorer / Minorer les quantités aisément

Sommaire

« Le Calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER. » — Jean Dieudonné, Calcul Infinitésimal, (1968).

Avec cette citation on vous montre l'importance de ce chapitre qui doit être bien maîtrisé.

1.1 Techniques générales

1.1.1 Majorer un Produit/Rapport

Soit $P, Q, p, q \geq 0$ tq $: p \leq P$ et $q \leq Q$ On a :

Method : Majoration de Produit

$$pq \leq PQ$$

Method : Majoration de Produit

$$\frac{p}{Q} \leq \frac{p}{q}$$

1.1.2 Étude de fonction

Parmi les méthodes déconseillées, mais ça marche en plusieurs fois si vous n'avais pas d'énergie pour penser, il suffit de poser une fonction et d'étudier sa variation, ou elle est positive/négative, son maximum/minimum.

Example : Inégalité $sin(x) \leq x$
Montrons que $\sin(x) \leq x, \ \forall x \in \mathbb{R}$:
Il suffit de Poser la fonction, $f : x \mapsto \sin(x) - x$ elle est dérivable [différence entre deux fonctions usuelles] et sa dérivée : $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$ donc la fonction est décroissante, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \sin(x) - x = f(x) \leq f(0) = 0$$

d'où :

$$\sin(x) \leq x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

1.2 Inégalités Locales

1.2.1 En utilisant la limite

Definition 1.2.1: Définition de la limite d'une suite

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l – ou bien converge vers l, SSI :

$$\forall \ \epsilon \geq 0, \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \ : \forall n \geq n_0 \ : \ |u_n \ - \ l| \leq \epsilon$$

Cette Définition va nous permet d'obtenir des inégalités Locales en calculons les limites nécessaires.

Example :
Mq : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge également vers 0.
En effet : soit $\epsilon > 0$ alors par définition de la convergence de u_n il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : pour tout $n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$
soit $n \geq n_0 + 1$ alors :

$$\left|\frac{\sum_{k=n_0}^{n} ku_k}{n^2}\right| \leq \frac{\sum_{k=n_0}^{n} |k \cdot \frac{\epsilon}{2}|}{n^2} \leq \sum_{k=n_0}^{n} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

donc on peut déduire :

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{ku_k}{n^2}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} \frac{ku_k}{n^2}\right| + \left|\sum_{k=n_0}^{n} \frac{ku_k}{n^2}\right| \\ &\leq \frac{S}{n^2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Là, On peut encore utiliser la notion de limite intelligemment : au lieu de chercher n tq : $\frac{S}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$ On peut utiliser le fait que ce terme converge vers 0 donc à partir d'un certain range n_1 il sera inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ càd : $\exists n_1 \in \ \mathbb{N} \ : \forall \ n \ \geq n_1 \ \frac{S}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$
donc pour $n \geq n' = \max(n_1, n_0)$:

$$v_n \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Ce qui montre la convergence vers 0. ∎

Même si on a énoncé seulement la définition de limite des suites et on a traité juste exemple des suites, mais l'idée reste valable pour les fonctions... en faite les fonctions nous fournit beaucoup plus de limites grâce au développement de Taylor.

1.2.2 En utilisant le Développement limité

Theorem 1.2.2: Développement de Taylor

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I d'intérieur non vide et contenant 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{1.2.1}$$

On rappelle que $o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $\frac{o(x^n)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc en choisissant un nombre quelconque

– par exemple 1 On a : $\exists \alpha > 0 \quad$ tq : $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad$ tq : $|x| \leq \alpha \quad |o(x)| \leq 1 \cdot x^n$ Ainsi on peut utiliser le même raisonnement développé dans la sous-section précédente.

1.3 Quelques Inégalités classiques

1.3.1 Inégalités des Accroissements Finis [IAF]

Theorem 1.3.1: IAF– Forme Dérivé

soit $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \quad$ tq : $a < b$ et, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ Alors :

$$\inf_{t\in[a,b]} |f'(t)| \cdot (b-a) \leq |f(b) - f(a)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| \cdot (b-a) \tag{1.3.1}$$

Theorem 1.3.2: IAF– Forme Intégrale

soit $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \quad$ tq : $a < b$ et, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^0([a,b])$ Alors :

$$\inf_{t\in[a,b]} |f(t)| \cdot (b-a) \leq \left| \int_a^b f(t) \cdot dt \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \cdot (b-a) \tag{1.3.2}$$

Example :

Mq : La suite Définit par $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ est équivalente à $\ln(n)$ lorsque $n \to \infty$. On prend la fonction $f : t \to \frac{1}{t}$ et soit $i \in \mathbb{N}^*$ on applique l'inégalité des accroissements finis **??** sur l'intervalle $[i, i+1]$ on trouve que :

$$\frac{1}{i+1} = \inf_{t\in[i,i+1]} \left|\frac{1}{t}\right| \cdot (i+1-i) \leq \underbrace{\left|\int_i^{i+1} \frac{1}{t} \cdot dt\right|}_{=\ln(i+1)-\ln(i)} \leq \sup_{t\in[i,i+1]} \left|\frac{1}{t}\right| \cdot (i+1-i) = \frac{1}{i}$$

ce qui montre que : $\frac{1}{i+1} \leq \ln(i+1) - \ln(i) \leq \frac{1}{i}$ puis on applique encore une fois **??** sur $[i+1, i+2]$ on aura : $\frac{1}{i+2} \leq \ln(i+2) - \ln(i+1) \leq \frac{1}{i+1}$ ce qui montre :

$$\ln(i+2) - \ln(i+1) \leq \frac{1}{i+1} \leq \ln(i+1) - \ln(i)$$

puis :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(i+2) - \ln(i+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \ln(i)$$

alors :

$$\ln(n+2) - \ln(2) \leq S_n - 1 \leq \ln(n+1) - \ln(1)$$

NB	Remarquer qu'on a utilisé le principe de télescopage, c'est lorsqu'on a un somme des termes $u_{n+1} - u_n$

En divisant par $\ln(n)$:

$$\frac{\ln(n+2)-\ln(2)+1}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)+1}{\ln(n)}$$

Les deux bornes tendent vers 1, donc : $\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ce qui montre l'équivalence.

1.3.2 Inégalité Triangulaire

Theorem 1.3.3: Inégalité Triangulaire

soit $||.||$ une norme sur l'ev $\mathbb{R}^n$ et, soit $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ alors, on a :

$$|\ ||\vec{x}|| - ||\vec{y}||\ | \leq ||\ \vec{x}+\vec{y}\ || \leq ||\ \vec{x}\ || + ||\ \vec{y}\ || \tag{1.3.3}$$

Example :
L'un des simples exemples est pour l'espace $\mathbb{R}$ muni de la norme – valeur absolue – On a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

1.3.3 Inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ

Theorem 1.3.4: Inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ

soit $(.\ ,\ .)$ une norme sur un evn E et, soit $\vec{x}$, $\vec{y} \in E$ alors, on a :

$$|\ (\vec{x}\ ,\ \vec{y})\ | \leq ||\ \vec{x}\ || \cdot ||\ \vec{y}\ || \tag{1.3.4}$$

Example :
Les deux inégalités les plus classiques qui en résultent sont : sur l'espace $\mathbb{R}^n$ soit $x_1, x_2 \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \cdots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

sur l'espace des fonctions continues $C^0([a,b])$ soit $f, g \in C^0([a,b])$

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)dt}\sqrt{\int_a^b g(t)dt}$$

1.3.4 Inégalités de Convexité

Dans cette sous-section, On suppose que f est une fonction convexe sur I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Il y en a plusieurs méthodes pour montrer la convexité, mais la façon la plus pratique de le faire est de se servir de la seconde dérive :

Method : Montrer la convexité
Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et si $f \in C^2(I)$ alors pour que f soit convexe, il suffise de montrer que $f^{(2)} \geq 0$ sur cet intervalle.

Cette propriété (convexité) nous permet de faire plusieurs inégalités qu'on a citées au-dessous :

Theorem 1.3.5: Inégalité de JENSEN

Soit $a, b \in I$, Alors :
$\forall x_1, x_2 \cdots, x_n \in \mathbb{R},\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ tq : $\lambda_1 + \lambda_2 \cdots, \lambda_n = 1$ On a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \tag{1.3.5}$$

Si on utilise juste $n = 2$ alors On a :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in [0,1]$ On a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.3.6}$$

Example :
Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tq : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Si u, v sont des réels positifs, Montrons que :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

En effet, par concavité du ln :

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geq \frac{\ln(u^p)}{p} + \frac{\ln(v^q)}{q} = \ln(uv).$$

Il suffit alors de passer à l'exponentielle.

Theorem 1.3.6: Inégalité de Tangente

soit $a \in I$ alors :

$$y(x) = f(a) + (x-a) f'(a) \leq f(x) \tag{1.3.7}$$

Example :
Mq les inégalités suivantes :

1. $x + 1 \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En effet :

1. ici, il suffit de considérer la fonction, exp cette fonction étant convexe [sa dérivé seconde est positive sur tout $\mathbb{R}$] alors pour $a = 0$ et $x \in \mathbb{R}$ l'application de

l'inégalité de Tangente 1.3.7 nous donne :

$$\exp'(0)x + \exp(0) = x + 1 \leq \exp(x)$$

2. ici, on doit considérer la fonction $f : x \to -\ln(x)$ pour que sa dérivée seconde, soit positive sur $\mathbb{R}^+$ et alors de même pour $a = 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$ l'application de l'inégalité de Tangente 1.3.7 nous donne :

$$f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) \leq f(x) = -\ln(x)$$

d'ou :

$$\ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3.5 Inégalité des Moyennes

Theorem 1.3.7: Inégalité des moyennes

soit $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \ \in (\mathbb{R}^+)^n$ On définit les quantités :

$$\mathtt{A}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i \qquad \text{appelé moyenne arithmetique}$$

$$\mathtt{G}(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n} x_i} \qquad \text{appelé moyenne geometrique}$$

$$\mathtt{H}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad \text{appelé moyenne Harmonique}$$

$$\mathtt{Q}(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i^2} \qquad \text{appelé moyenne quadratique}$$

alors on a :

$$H \leq G \leq A \leq Q \tag{1.3.8}$$

Example :
On pratique, on utilise énormément de fois le cas $n = 2$ ce qui donne :

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\text{prendre } x_1 = a^2 \quad x_2 = b^2$$

1.4 Exercices

Exo 1.4.1

Montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \sin(x) \leq x, \\
&\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \\
&\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1, \\
&\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x), \\
&\forall x \geq 0 \quad \sinh(x) \geq x, \\
&\forall x \geq 0 \quad \cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \\
&\forall x \geq 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \\
&\forall x \geq 0 \quad \ln(x) + 1 \leq x \leq e^x - 1.
\end{aligned}$$

Exo 1.4.2

Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Mq :

$$\forall a > 0 \quad \left| \frac{f(a+x,y) - y}{||(x,y)||} \right| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

CHAPITRE 2

LES SÉRIES NUMÉRIQUES

Prérequis

- Développement limité.
- Manipuler les Inégalités.

Objectifs

- Savoir montrer la convergence/divergence d'une série Numérique.
- Savoir utiliser les séries numériques pour étudier les suites.

Sommaire

Dans ce chapitre, on acquerra l'un des compétences indispensables pour faire le chapitre d'étude des fonctions définit par série, ce qui est le tiers de programme d'analyse.
Dans ce chapitre, on prend $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle somme partielle de u_n la suite $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$, s'elle diverge, on dit que la série de terme générale u_n est divergente et on écrit $\sum u_n$ div , sinon s'elle converge, on dit que la série de terme générale u_n est convergente et on écrit $\sum u_n$ conv ,et Dans le cas de convergence, on définit la série reste $R_n(u) = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Dans tout chapitre, on verra les méthodes qui vont nous permettent de décider la nature d'une série numérique [conv ou div].

2.1 Séries Numériques définis explicitement

Dans cette section, on verra des théorèmes qui permettent de juger la nature d'une série lorsque qu'on sait une expression explicite de son terme générale. Sinon, on verra dans les sections suivantes une utilisation indirecte de ces théorèmes pour déterminer la nature des séries qui ne sont pas explicitement exprimées.

2.1.1 Les théorèmes fondamentaux des séries numériques

Theorem 2.1.1: Critère séquentiel des séries alternés

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie critère séquentiel des séries alternées [CSSA] lorsqu'elle vérifie :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = (-1)^n |u_n|$
- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- $u_n \longrightarrow 0$

Et dans ce cas $\sum u_n$ conv

Theorem 2.1.2: Règle de D'Alembert

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang [APCR] alors : on calcule, si elle existe,

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 0$$

et on discute les cas :

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ conv
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ div
- Si $l = 1$ On ne peut rien conclure

Theorem 2.1.3: Règle de Cauchy

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive [APCR] alors :
on calcule, si elle existe,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \geq 0$$

et on discute les cas :

- Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ conv
- Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ div
- Si $l = 1$ On ne peut rien conclure

Theorem 2.1.4: Règles de comparaison

Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives [APCR] Alors, on a :

- $u_n = o(v_n)$ Alors, on a : $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv et $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div
- $u_n = O(v_n)$ Alors, on a : $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv et $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div
- $u_n \leq v_n$ Alors, on a : $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv et $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div
- $u_n \sim v_n$ Alors, on a : $\sum v_n$ conv $\Leftrightarrow \sum u_n$ conv et $\sum u_n$ div $\Leftrightarrow \sum v_n$ div

Corollary 2.1.5: Séries Référentielles :

Les Règles de comparaison ne sont pas assez utiles si on n'a pas des séries de référence pour comparer avec, c'est le but de ce corollaire :

Série géométrique :

- La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv ssi $|q| < 1$

Série de Riemann :

- La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ conv ssi $\alpha > 1$

Theorem 2.1.6: comparaison avec intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$.
Si on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = f(n)$ alors :
les deux suites suivantes ont la même nature :

$$\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

cad : $\sum u_n$ conv (div) lorsque $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ conv (div)
De plus :
- En cas de conv :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

- En cas de div :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

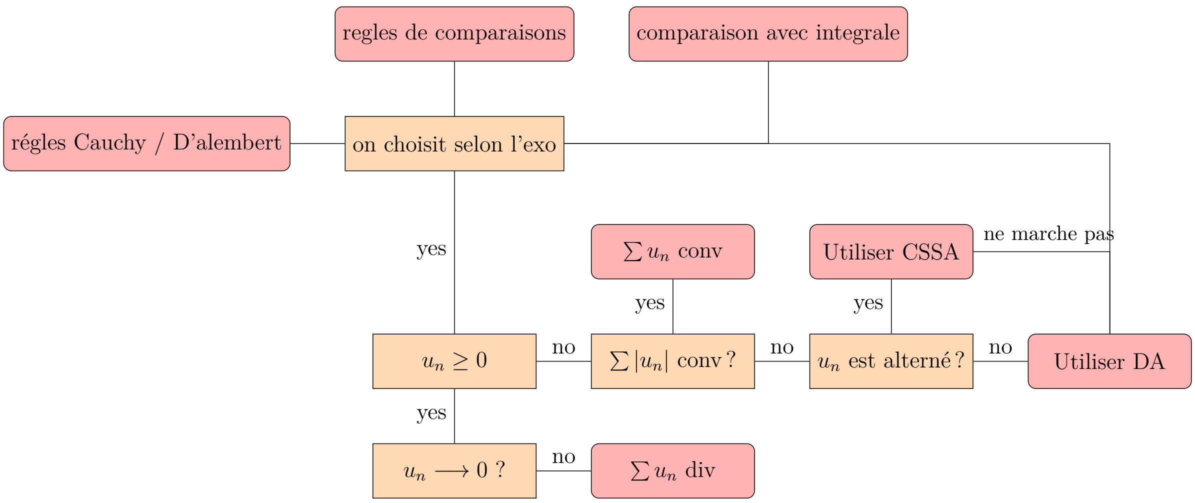
Exo 2.1.7: Série de Bertrand

Mq la suite $\left(\frac{1}{\ln(n)^\beta \cdot n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ conv ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1 \quad$ et $\quad \beta > 1$

Solution of Exercise :

1. Cas $\alpha > 1$:
   L'idée consiste à décomposer n^α en $n^{\alpha-\gamma} \times n^\gamma$ (avec $\gamma > 0$) pour qu'on élimine l'effet de logarithme... en effet :
   $$\frac{1}{n^\gamma \times \ln(n)^\beta} = o(1)$$
   Donc :
   $$\frac{1}{n^\alpha \times \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}\right)$$
   Pour s'assurer de la convergence, il suffit que $\alpha - \gamma > 1$ soit alors : $0 < \gamma < \alpha - 1$, le choix le plus simple est $\gamma = \frac{\alpha-1}{2}$ comme $0 < \frac{\alpha-1}{2} < \alpha - 1$ donc on a la convergence pour chaque valeur de β (par la règle de comparaison **??**)
2. Cas $\alpha < 1$: La même idée
   On essaie à décomposer n^α en $\frac{n^\gamma}{n^{\alpha+\gamma}}$ (avec $\gamma > 0$) pour qu'on élimine l'effet de logarithme... en effet :
   $$1 = o\left(\frac{n^\gamma}{\ln(n)^\beta}\right)$$
   Donc :
   $$\frac{1}{n^\alpha \times \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+\gamma}}\right)$$
   Pour s'assurer de la divergence, il suffit que $\alpha + \gamma < 1$ soit alors : $0 < \gamma < 1 - \alpha$, le choix le plus simple est $\gamma = \frac{1-\alpha}{2}$ comme $0 < \frac{1-\alpha}{2} < \alpha - 1$ donc on a la divergence pour chaque valeur de β (par la règle de comparaison **??**)
3. Cas $\alpha = 1$: Très simple
   Il suffit d'utiliser la règle de comparaison avec une intégrale qui est le théorème précédent.

2.1.2 Schéma représentatif regroupons ces théorèmes



Example :
Étudier la convergence des séries de terme générales u_n aux cas suivantes :
(1) : $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$
(2) : $u_n = \frac{n!}{n^n}$
(3) : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$
Solution de (1) :
soit $n \geq 2$:
On peut voir bien que : $\ln(n^2+3) \leq \ln(n^2+2n+1) = 2\ln(n+1) \leq 2n$ car $\ln(x) \leq x-1$.
De plus : $2n \leq 2^{n+1}$.
De plus : $\sqrt{2^n+1} \leq 2\cdot(\sqrt{2})^n$.
Finalement : $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n} \leq \frac{2\cdot(\sqrt{2})^n \times 2^{n+1}}{4^n} = 4 \times \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right)^n$
Puisque $\sum \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right)^n$ converge (cf.corollaire 2.1.1) alors $\sum u_n$ conv . par règles de comparaison **??**
Solution de (2) :
Il suffit d'appliquer Règle de D'Alembert **??** sur la suite étant strictement positive pour tout entier n.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1$$

Donc par la critère la série est convergente $\sum u_n$ conv .
Solution de (3) :
Il suffit de faire un Dev Limité : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - e = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Puisque $\sum \frac{1}{2n}$ est divergent et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergent en appliquons le critère de comparaison **??**. Alors leur somme est une série divergente d'où $\sum u_n$ div .

Example :
Étudier la convergence des séries de terme générales u_n aux cas suivantes :
(1) : $u_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\right)$
(2) : $u_n = (-1)^n\frac{1}{n}$
(3) : $u_n = \frac{n(-1)^n+n^2}{\sqrt{2+n^5}}$
Solution de (1) :
Il suffit d'étudier $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ qui converge évidement étant une série de Référence : Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente.
Solution de (2) :
On peut remarque que la suite vérifie le **CSSA** 2.1.1 :
- $u_n = (-1)^n \times |u_n|$
- $(\frac{1}{n})_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

D'où on conclut sa convergence ie $\sum u_n$ conv
Solution de (3) :

On fait un Dév Limité :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n(-1)^n + n^2}{\sqrt{2+n^5}} \\
&= \frac{(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}n^5}}} \\
\sqrt{2}u_n &= \left((-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}n^5} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Le 1^{er} est convergent, car la série est valeur absolue est une série de Riemann convergent, le 2^{em} terme est divergent série de Riemann avec $\alpha \leq 1$ et le dernier terme est convergente donc : série conv + série div + série conv = série div alors $\sum u_n$ div . ■

2.2 Application : Étude des suites en utilisant les séries numériques

2.2.1 L'extension des théorèmes fondamentales des séries numériques

Ces théorèmes sont une extension des théorèmes vus en sous-section 1.1 de ce chapitre, il fournit une comparaison des restes et des sommes partielles des séries sous les conditions nécessaires :

Theorem 2.2.1

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la CSSA 2.1.1 alors, on a :

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i \leq |u_{n+1}|$$

Theorem 2.2.2

Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives [APCR] tq $u_n = o(v_n)$ ALors, on a :

- cas de convergence :
  si $\sum v_n$ conv alors $\sum u_n$ conv De plus :
  $$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = o\left(\sum_{i=n}^{+\infty} v_i\right)$$
- cas de divergence :
  si $\sum u_n$ div alors $\sum v_n$ div De plus :
  $$\sum_{i=0}^{n} u_i = o\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$$

Theorem 2.2.3

Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives [APCR] tq $u_n = o(v_n)$ Alors, on a :

- cas de convergence :
  si $\sum v_n$ conv alors $\sum u_n$ conv De plus :
  $$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = o\left(\sum_{i=n}^{+\infty} v_i\right)$$
- cas de divergence :
  si $\sum u_n$ div alors $\sum v_n$ div De plus :
  $$\sum_{i=0}^{n} u_i = o\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$$

Theorem 2.2.4

Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives [APCR] tq $u_n \sim v_n$ Alors, on a :

- cas de convergence :
  si $\sum v_n$ conv alors $\sum u_n$ conv De plus :

$$\sum_{i=n}^{+\infty} u_i \sim \sum_{i=n}^{+\infty} v_i$$

- cas de divergence :
  si $\sum u_n$ div alors $\sum v_n$ div De plus :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i \sim \sum_{i=0}^{n} v_i$$

Ces théorèmes sont des outils très puissants pour l'étude des sommes partielles et des restes des suites. On verra dans les exemples suivants quelque applications :

Example :
Soit la série Harmonique définit par : $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
Mq : $H_n \sim \ln(n)$
Il suffit de voir que $\frac{1}{i} \sim \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(i+1) - \ln(i)$ donc en utilisant la 3^{eme} théorème en cas de divergence, on a clairement :

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) \ \sum_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \ln(i) = \ln(n+1) - \ln(1) \sim ln(n)$$

Une autre équivalence classique est la somme partielle [en cas de divergence] et le reste [en cas de convergence] de série de terme générale : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$
Pour cela, on est besoin de remarquer l'équivalence clé [qu'on vous laisse le soin de le montrer] :

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

En cas de Convergence : $(\alpha > 1)$

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\alpha-1}{i^\alpha} \sim \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{i^{\alpha-1}} - \frac{1}{(i+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

donc :

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{i^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En cas de Divergence : $(\alpha < 1)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha-1}{i^\alpha} \sim \sum_{i=1}^{i} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(i+1)^{\alpha-1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - n^{1-\alpha}\right)$$

Le cas $\alpha = 1$: est déjà traité indépendamment.

2.2.2 L'étude d'une suite à l'aide des séries

L'idée qui fait intermédiaire suite-série est le fait d'étudier la somme partielle de la série de terme $v_n = u_{n+1} - u_n$ qui n'est autre que $u_{n+1} - u_0$. Cela nous permet de déduire la proposition suivante.

Theorem 2.2.5: Passage suite-série

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} v_i = u_{n+1} - u_0 \tag{2.2.1}$$

Si de plus, on a la divergence ie $u_n \longrightarrow +\infty$ alors :

$$\sum_{i=0}^{n} v_i \sim u_{n+1} \tag{2.2.2}$$

Example :
l'exemple qu'on propose ici est de montrer que :

$$\exists \gamma > 0 \quad : \quad H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Solution :
Il suffit de considérer : $u_n = H_n = \ln(n)$ puis l'étudier pour montrer sa convergence vers un nombre qu'on a noté γ. pour ce fait, on pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$, Montrer la convergence de v_n revient à montrer la convergence de u_n. en effet :

$$\begin{aligned} v_n = u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)\right) \\ &\sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc $\sum v_n$ conv donc la suite (u_n) conv également.

2.3 Séries Numériques définis explicitement

On verra dans cette section une utilisation indirecte des théorèmes précédentes pour déterminer la nature des séries qui ne sont pas explicitement exprimées. En fait, il y en a trois types selon la façon de définition de leur terme générale :

- définit par récurrence.
- définit par solution d'une équation.
- définit par une intégrale [ces suites définies par intégrale seront vues ultérieurement voir ??]

2.3.1 Suite Définit par récurrence

Example :
Soit la suite définit comme suit :

$$a_n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{Si } n = 0 \\ \sin(a_{n-1}) & \text{Sinon} \end{cases}$$

Mq : la série $\sum_n a_n$ diverge
Solution :
En effet , On a :

- $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \max(a, 1)$ donc la suite est bornée.
- $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \sin(a_n) \leq a_n$ Donc la suite est décroissante.

Ce qui montre la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus :

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \sin(a_n) = \sin(\lim a_n)$$

Alors : $\lim a_n$ est une solution de l'équation : $\sin(x) = x$ qui n'admet qu'une seule solution qui est 0 , $\boxed{\text{donc } \lim a_n = 0.}$
L'idée pour traiter ce genre des suites est de chercher une équivalence de a_n, rappeler bien le passage suite-série (2.2.2). On doit alors construire une telle suite qui diverge vers l'infini... le choix le plus simple est : $u_n = \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow +\infty$
Avec les mêmes notations de (2.2.2)

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sin(a_n)} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \sin(a_n)}{\sin(a_n)a_n} = \frac{a_n - a_n + \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)}{\sin(a_n)a_n} \sim \frac{a_n}{6}$$

Rappelons que :

$$\frac{1}{a_n} = u_n \sim \sum_{k=1}^{n} v_n$$

Alors la série : $\sum_n v_n$ diverge, d'où par comparaison des séries en cas de divergence (théorème | 17) :

$$\sum_{k=1}^{n} v_n \sim \sum_{k=1}^{n} a_n \sim \frac{1}{a_n}$$

Donc la divergence de série $\sum_n a_n$ étant équivalente à une suite divergente . ■

2.3.2 Suite définit par solution d'une équation

Example :
soit $n \in \mathbb{N}$ l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une solution unique qu'on note x_n. Étudier la convergence de $\sum_n \frac{1}{x_n}$.
Solution :
Une première observation qu'on peut remarquer est que

$$n = x_n + \ln(x_n) \leq 2x_n \ \therefore \ \frac{n}{2} \leq x_n$$

ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \quad x_n \geq 0$ et que $x_n \longrightarrow +\infty$
De cela on déduit que : $n = x_n + \ln(x_n) \sim x_n$ donc : $\frac{1}{x_n}$ est une série à termes positifs et $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n}$ donc la divergence de $\sum_n \frac{1}{x_n}$. ■

2.3.3 Suite définit par une somme

Pour cela on utilise le théorème de Fubini qui énonce :

Theorem 2.3.1: Théorème de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite numérique double. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geqslant 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{m\geqslant 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge.
3. La série $\sum_{n\geqslant 0} \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} |a_{p,q}|$ converge.

Auquel cas on dit que la suite double $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, De plus on a les égalités suivantes :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ (n,m)\in\mathbb{N}^2}} a_{p,q} \tag{2.3.1}$$

Il en résulte un corollaire très intéressant sur ce qu'on appelle produit de Cauchy :

Corollary 2.3.2: Produit de Cauchy

Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right)$ est absolument convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

2.4 Série Entière | rayon de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Dans cette section, on étudiera un genre intéressant des séries, ce sont les séries entières cad les séries de la forme : $\sum a_n z^n \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}$, on cherche dans cette section une condition sur z pour la série converge. On énonce d'abord un Lemme très important qui va nous permettra de déterminer la forme de la région de convergence d'une manière plus précise.

Lemma 2.4.1: Lemme d'Abel

soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$,

- si pour $z = z_0$: $\sum a_n z_0^n$ conv alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad : |z| < |z_0| \quad : \quad \sum a_n z^n \text{ conv}$$

- si pour $z = z_1$: $\sum a_n z_1^n$ div alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad : |z| > |z_1| \quad : \quad \sum a_n z^n \text{ div}$$

Cela peut être illustré comme suit :

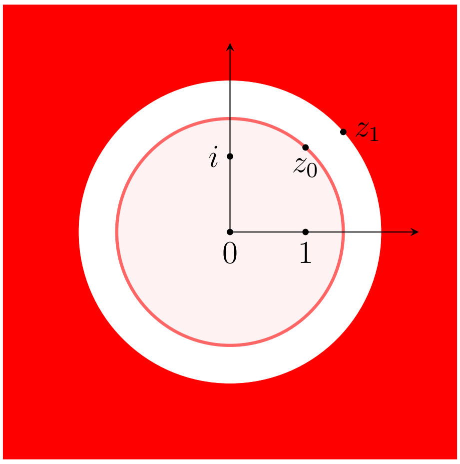


FIGURE 1 – Une petite illustration de lemme d'Abel

Dans cette figure z_0 est une point de convergence de série... Il donne comme conséquence la convergence de série en tout point dans le cercle rose (c.-à-d. lorsque $|z| < |z_0|$), mais on ne peut rien dire la frontière en rouge.
D'autre part : z_1 est une point de divergence de série... il résulte de cela que tout la en gris ne contient que des points de divergence (c.-à-d. lorsque $|z| > |z_1|$.
De cela, on a déterminé la nature de série en tout point sauf le cercle blanche [et la

frontière rose] ... pour fixer ce problème, on cherche à "maximiser" $|z_0|$ et "minimiser" $|z_1|$ pour éliminer cette partie blanche. D'où la définition suivante :

Definition 2.4.2: Définition de Rayon de Convergence

On définit le rayon de convergence pour la série entière : $\sum a_n z^n \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}$ par :

$$\mathbf{rcv} = \sup \{|z| \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}, \sum_n a_n z^n \text{ conv}\}$$

NB : avec les conventions.

- Si $\{|z| \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}, \sum_n a_n z^n \text{ conv}\} = \emptyset \quad$: on convient $\mathbf{rcv} = 0$
- Si $\{|z| \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}, \sum_n a_n z^n \text{ conv}\} = \mathbb{R}^+$: on convient $\mathbf{rcv} = +\infty$

on peut aussi noter : $\mathbf{rcv} = \mathbf{rcv}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$

On peut déduire la méthode suivante qui permet en plusieurs cas de déterminer le **rcv**

Method : Détermination de rcv

Soit la série entière : $\sum a_n z^n \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}$ et soit $r \in \mathbb{R}^+$, pour montrer que $\mathbf{rcv} = r$ il suffit de vérifier ces deux conditions :

1. $\forall x \in [0, r[\ : \sum_n a_n x^n$ conv [ce qui fait ,généralement, l'appelle aux séries géométriques].
2. $\sum_n a_n r^n$ div [cette cas est fréquente dans les exercices].

Example :

Mq rayon de convergence de série entière : $\sum_n cos(n) z^n$ est égal à 1 :

Solution :

soit $x \in [0, 1[$ on a : $|cos(n)x^n| = O(x^n)$ et comme $|x| < 1$ alors : $\sum_n x^n$ conv et par conséquence $\sum_n cos(n)x^n$ conv.

Pour $x = 1$: $\sum_n cos(n)$ div, car $(cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ div (donc ne converge pas vers 0) ... cela sera laissé exercice pour le lecteur.

Il y en a aussi les deux théorèmes suivants :

Theorem 2.4.3: Règle D'Alembert pour calculer le rcv

Soit la série entière : $\sum a_n z^n \quad \text{tq} \quad : z \in \mathbb{C}$ tq [APCR] la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, et si on pose [sous la condition d'existence] $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Sous ces deux conditions [ne s'annule pas, existence de limite] on a :

$$\mathbf{rcv} = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Theorem 2.4.4: Comparaison des rcv

Soit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, soit $a = \mathbf{rcv}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $b = \mathbf{rcv}((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$
Alors, on a :

- Si $a_n = o(b_n)$ alors : $a \leq b$
- Si $a_n = O(b_n)$ alors : $a \leq b$
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$ alors : $a \leq b$
- Si $a_n \sim b_n$ alors : $a = b$

Example :
Calculer rcv des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{n^n}{n!} z^n$
2. $\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^n} z^n$

Solution :

1. Il suffit là appliquer la règle d'Alembert (les conditions sont bien vérifiées, la suite ne s'annule pas), en effet :

$$\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} e$$

Et alors **rcv**= e.

2. Il suffit de remarque que : $\forall t \in [0,1] : (1+t) \leq (1+t+t^2) \leq (1+2t+t^2) = (1+t)^2$ et alors :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^{2n}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^n} \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} =$$

Or :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \sim \frac{1}{n}$
- De même : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^{2n}} \sim \frac{1}{2n}$

De plus $\mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} z^n\right) = \mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^{2n}} z^n\right) = 1$ et comme :

$$\mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^{2n}} z^n\right) \leq \mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^n} z^n\right) \leq \mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} z^n\right)$$

Ce qui donne : $\mathbf{rcv}\left(\sum_n \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^n} z^n\right) = 1$

2.5 Exercices

Exo 2.5.1: Développement asymptotique de série Harmonique | extrait CNC'2021

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$,

1. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ ta limite.
   (b) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   (c) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.
   (a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.
   (b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.
   (c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.
   (a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.
   (b) Trouver un équivalence simple de : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$
   (c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Solution of Exercise :

1. (a) On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

De plus

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

et

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Par suite $u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ et $\boxed{(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}}$.

Comme $(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ alors $(u_n - u_{n+1})$ est positive à partir d'un certain rang , la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge , par comparaison la série $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ converge . Soit S_n la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$$

donc $u_n = u_1 - S_{n-1}$. La convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n - u_{n+1})$ entraine la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$et de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

(b) Soit $n \geq 2$,et $1 \leq k \leq n-1$. Pour $t \in [k, k+1]$ on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$ ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ainsi

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

(c) D'après d) $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n} \leq H_n - \ln(n) \leq 1$, par passage à la limite on obtient $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$.

2. (a) D'après c) on a $u_n = u_1 - S_{n-1}$ et $u_1 = 1$ de plus $u_n - u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1}) \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient

$$\boxed{\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)}$$

.

(b) On a :

$$v_n = u_n - \gamma = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1}) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} - \ln(\frac{k}{k-1})$$

donc :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$$

C'est le reste de la série

$$\sum_{k\geq 2} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} &= -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) \end{aligned}$$

donc $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$, les deux séries $\sum \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}$ et $\sum \frac{1}{2k^2}$ convergents, donc les restes sont équivalents, ce qui donne $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$, ainsi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

car si $\alpha > 1$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
On a $v_n = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ donc :

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + v_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

(a) On a

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

et

$$u_n - u_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$$

donc

$$w_{n+1} - w_n = -\ln(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}.$$

Comme

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3}\right) + o(\frac{1}{n^3})\\ &= \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

et

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\right)\\ &= \frac{2}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

les deux séries $\sum \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}, \sum \frac{2}{n^3}$ convergent donc les restes sont équivalents , de plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}$$

(c) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n} \text{ et } w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$$

donc la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge.

Remarquons que la somme partielle $\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = w_n - w_1$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) = -w_1$$

et le reste

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Des relations

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) &= -w_1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) + \sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) \\
&= w_n - w_1 + \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).
\end{aligned}$$

on a

$$w_n = \frac{-1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Comme $H_n = w_n + \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}$ alors

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

CHAPITRE 3

LES SÉRIES DE FONCTIONS

Prérequis

- Les séries numériques
- L'étude fonctions réelles

Objectifs

- Savoir étudier une fonction définit par une série numérique définit par un paramètre

Sommaire

Dans ce chapitre, On considère une suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit sur une ensemble $A \subset \mathbb{C}$ et à valeurs réelles. On étudiera dans ce chapitre la fonction f définit par : $f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sous le contraint de convergence. On verra les outils qui vont nous aider à étudier cette fonction :

- Leur limites/continuité : pour avoir une idée sur les branches infinies
- Leurs Dérivés/variations : qui nous indiquent la variation / la convexité...

3.1 Les quatre modes de convergences

3.1.1 Convergence Simple

Definition 3.1.1: Convergence Simple

Lorsque pour tout réel x dans A la série numérique : $\sum f_n(x)$ converge vers un réel noté $f(x)$, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVS} f$$

Example :
Montrez que la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$:
Solution :
Soit $x \geq 0$:
Étudions la convergence de série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx)}$, On a :

$$\frac{x}{n(1+2nx)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Ainsi la série : $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série classique de Riemann - voir corr (2.1.1)), alors la série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx)}$ est également convergente. En conclut la convergence simple de série.

3.1.2 Convergence Absolue

Definition 3.1.2: Convergence Absolue

Lorsque pour tout réel x dans A la série numérique : $\sum |f_n(x)|$ converge vers un réel, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Absolument. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVA} f$$

Example :
Montrez que la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx^2)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est Absolument convergente sur $\mathbb{R}$:
Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$:
Étudions la convergence de série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx^2)}$, On a :

$$\left|\frac{x}{n(1+2nx^2)}\right| \sim \frac{1}{|x| \times n^2}$$

Ainsi la série : $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série classique de Riemann - voir corr (2.1.1)), alors la série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx^2)}$ est également convergente. En conclut la convergence absolue de série.

3.1.3 Convergence Normale

Definition 3.1.3: Convergence Normale

Lorsque la série numérique : $\sum ||f_n||_\infty^A$ converge vers un réel, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Normalement. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVN} f$$

Method : Étude directe

Il suffit de calculer la norme infinie en fonction de n, par les méthodes enseignées en terminale (table de variation), puis on examine la convergence de la série : $\sum ||f_n||_\infty^A$: cela nous donne une condition nécessaire et suffisante de convergence normale.

Example :

soit la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, Étudier la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}^+$.

Solution :

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $u_n : x \to \frac{x}{n(1+2nx)}$. soit $n \in \mathbb{N}^*$,la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ ainsi sa dérivée est : $u_n'(x) = \frac{1}{n(1+2nx)^2}$, donc la fonction est croissante, ainsi sa borne-sup est $||u_n||_\infty^{\mathbb{R}^+} = \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{2n^2}$

Method : En utilisant des conditions suffisantes

Dans les exercices, on rencontre souvent des questions type : (Mq la série converge normalement / Mq la série ne converge pas normalement). C'est pour cela qu'on préfère d'utiliser les conditions suffisantes parce qu'ils sont faciles à montrer :

- S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :
  1. $\forall x \in A$ tq : $|f_n(x)| \leq \alpha_n$
  2. la série : $\sum_n \alpha_n$ converge

  Alors la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement
- S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :
  1. $\forall x \in A$ tq : $|f_n(x)| \geq \alpha_n$
  2. la série : $\sum_n \alpha_n$ diverge

  Alors la série des fonctions $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement

Example :

Mq la série des fonctions $\sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Solution :

on a clairement pour tout réel $x \geq 1$ tq $: e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-\sqrt{n}}$ la série $\sum_n e^{-\sqrt{n}}$ est convergente (il suffit de voir que $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$ et appliqué une règle de comparaison vu en (**??**)).
Cela montre la convergence normale de série.

3.1.4 Convergence Uniforme

Definition 3.1.4: Convergence Uniforme – Suite de fonctions

soit une suite des fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit sur une ensemble $B \subset \mathbb{R}$. On dit que la suite converge uniformément vers une fonction $u : x \in A \to u(x)$ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \;\; \text{tq} \;\; : \forall n \geq N_\epsilon \text{ On a} : \forall x \in A \;\; \text{tq} \;\; : |u_n(x) - u(x)| < \epsilon$$

Definition 3.1.5: Convergence Uniforme – Série de fonctions

Lorsque la suite des fonctions : $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\geq 0}$ converge **Uniformément** vers une fonction f, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Uniformément. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVU} f$$

Method : Convergence normale
La convergence Normale entraîne la convergence Uniforme.
Il suffit alors d'établir la convergence normale (qui nous amène à une série numérique) pour montrer la convergence uniforme.

Example :
Dans l'exemple précédent, la série des fonctions $\sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, et alors, elle converge uniformément sur $[1, +\infty[$

Method : Convergence du Reste
Pour que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément, il faut et il suffit que le reste de série converge uniformément vers la fonction nulle. c.-à-d. :

$$\sum_n f_n \xrightarrow{CVU} f \quad \textbf{SSI} \quad : \left|\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_n \right|\right|_\infty^A \longrightarrow 0$$

Example :
L'exemple le plus classique est des séries de fonctions alternées :
Soit la série des fonctions $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^x}$,Mq, elle converge uniformément sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
Solution :
Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge étant une série alternée (voir propt (2.1.1)), d'où la convergence simple de série des fonctions.
La convergence simple nous permet d'utiliser **la méthode de convergence de reste**

, car le reste existe.
On peut majorer le reste $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^x}\right)_{n\geq 1}$ en utilisant l'extension de (2.1.1) on a pour tout réel $x\in[\frac{1}{2},+\infty[$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^x}\leq\frac{1}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi cela montre que :

$$\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^x}\Big\|_{\infty}^{[\frac{1}{2},+\infty[}\leq\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\longrightarrow 0$$

D'où la convergence uniforme de série. ■

3.2 Étude pratique d'une série des fonctions

Dans cette section, on conserve toujours les notations de l'Introduction de chapitre. Pour les exemples, on considère la fonction dite **Zeta de Riemann** définit par :

$$\zeta : x\longleftarrow\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

Domaine de Définition : On rappelle que d'après corr (2.1.1) - Série Référentielle de Riemann, la série $\sum_n\frac{1}{n^x}$ converge ssi $x>1$. Et donc c'est notre domaine de définition. Énonçons dans ce qui suit les théorèmes qui permettent l'étude de cette fonction et les appliquons sur elle-même.

3.2.1 Limite d'une série des fonctions

Theorem 3.2.1: Théorème de limite

soit $a\in\bar{A}$, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n admettent une limite en a .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n\lim_{x\to a}f_n(x)$ converge
- La fonction f admet une limite en a
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a}f_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\tag{3.2.1}$$

Example :
Limite en $+\infty$:
Considérons la partie $A = [2, +\infty[$: un voisinage de $+\infty$.
On a :

1. La fonction Zêta est bien définie sur A
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ admet une limite en $+\infty$ qu'on notera l_n ... un calcul simple nous donne :

$$l_n = \begin{cases} 1 & \text{Si} : n = 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

3. La série converge normalement sur $[2, +\infty[$ en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ une série numérique convergente}$$

   donc la série converge uniformément sur $[2, +\infty[$

On conclut alors la formule d'inversion $\lim - \Sigma$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 1$$

Limite en 1 :
Ici, on n'a pas de convergence uniforme sur un voisinage de 1, donc on cherche la limite manuellement se dépendre de théorème de limite.
Solution :
Soit $A > 0$, on a : $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tq :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 2A$$

Ensuite, on sait pour chaque $k \in \{1, .., n\}$: $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{k}$
Donc il existe $\alpha > 0$ tq pour tout $x \in [1, 1 + \alpha[$:

$$\frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{k} - \frac{A}{n}$$

D'où pour tout $x \in [1, 1 + \alpha[$:

$$\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{n} \geq 2A - A = A$$

Ce qui montre que ζ diverge vers $+\infty$ en $x = 1$. ■

3.2.2 Continuité d'une série des fonctions

Theorem 3.2.2: Théorème de continuité

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n sont continues sur A.
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La fonction f est continue sur A.

Example :
Montrons la continuité de la fonction Zêta sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien définie sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est continue sur $[a, +\infty[$
3. La série converge normalement sur $[a, +\infty[$ en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{n^a} \text{ une série numérique convergente}$$

   donc la série converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la continuité de Zêta sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est continue sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors elle est continue sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)

3.2.3 Dérivés d'une série des fonctions

Theorem 3.2.3: Théorème de Dérivée première

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien défini sur A.
2. Les fonctions f_n sont de C^1 sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n'$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' \tag{3.2.2}$$

Example :
Montrons que la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien défini sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est égale à $\frac{-\ln(n)}{n^x}$
3. La série des dérivées converge normalement sur $[a, +\infty[$ en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \left|\frac{-\ln(n)}{n^x}\right| \leq \frac{1}{\ln(n)^{-1} n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{\ln(n)^{-1} n^a} \text{ une série numérique convergente (2.1.1)}$$

donc la série des dérivés converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)
Ainsi l'expression de Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad : \quad \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}$$

On remarque bien que la dérivée est négative, la fonction Zêta et alors décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Theorem 3.2.4: Théorème des Dérivés supérieurs

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n^{(p)}$ converge uniformément vers f, pour tout entier $p \geq 0$.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A
- La formule d'inversion :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad : \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)}$$

Example :
Montrons que la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
Soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien définie sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée p-ème est égale à $\frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$
3. Les séries des -ème dérivés convergent normalement sur $[a, +\infty[$ en effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \left|\frac{(-\ln(n))^p}{n^x}\right| \leq \frac{1}{\ln(n)^{-p} n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{\ln(n)^{-p} n^a} \text{ une série numérique convergente (2.1.1}$$

Donc la série des dérivés converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)
Ainsi l'expression de Ses dérivés sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad : \quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$$

On remarque bien que la deuxième dérivée $(p = 2)$ est positive, la fonction Zêta et alors convexe sur $\mathbb{R}^+$.

3.2.4 Intégrale d'une série des fonctions

Theorem 3.2.5: Théorème de l'Intégrale

soit $a, b \in A$, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n continues sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

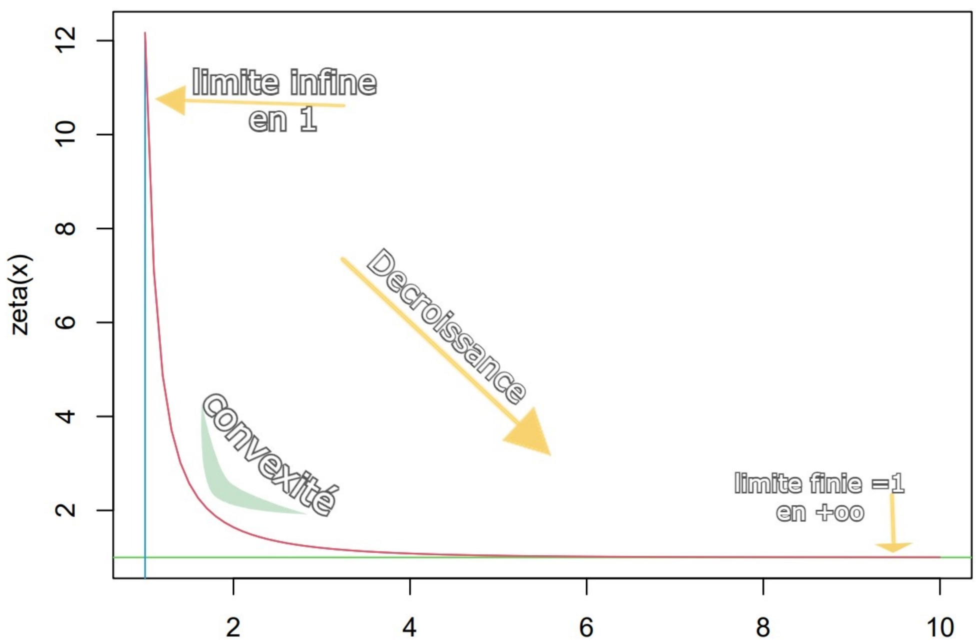
- La série $\sum_n \int_a^b f_n(x)dx$ converge
- La fonction f est continue sur A
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \tag{3.2.3}$$

Example :
Cherchons une primitive de la fonction Zêta ζ , en fait la fonction $F : x \longrightarrow \int_2^x \zeta(u)du$ est une primitive évidente. cherchons une expression de cette primitive sous forme d'une somme.
On applique le théorème précédent sur l'ensemble $A = [\frac{\min(2,x)}{2}, +\infty[$ (qui est de la forme $[a, +\infty[$) On a montré les trois conditions sur une telle sorte des ensemble dans l'étude de continuité, il suffit d'énoncer la formule d'inversion :

$$\int_2^x \zeta(u)du = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_2^x \frac{1}{n^u}du = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{\ln(n)n^x} + C^{te}$$

Trace finale de la fonction Gamma



Trace de la fonction zêta

3.2.5 Propriété de LOCALITÉ

Pour comprendre cette notion, on vous rappelle que la définition de la continuité (resp. dérivabilité) sur un ensemble : lorsque la fonction est continue (resp. dérivable) en tout point de cet ensemble. En conséquence de cela, si on veut démontrer la continuité (resp. dérivabilité) d'une fonction sur un intervalle $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ il suffit de démontrer la continuité (resp. dérivabilité) de cette fonction sur tout intervalle I_α. On pourra de même voir la classe comme une propriété local. Ainsi, on vous avertit de ne jamais utiliser des assertions comme : " f est continue " sans indiquer la région de continuité... il faut dire " f est continue sur l'intervalle ... "
On donne alors la méthode suivante :

Method : Étude sur un ouvert
Il est souvent de rencontrer des exercices qui proposent l'étude sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ dont la convergence uniforme n'est pas établie, Dans ce cas, il est ultime d'utilité de décomposé cet intervalle en union des intervalles faciles a traité par exemple :

- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\alpha<b} [\alpha, b[$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\alpha<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{n\geq 1} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

Puis, on les étudie sur ces intervalles, on déduire l'étude sur l'intervalle tout entière.

3.3 Étude des séries entières

Dans toute cette section on considère deux suites complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$. Dans cette section, on étudiera les séries de fonctions définit par : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (sous contrainte de convergence), et aussi f_b définit de la même façon. On rappelle que ce type de séries se caractérisent par un rayon de convergence qu'on note **rcv** (pour f_a c'est $\mathbf{rcv}_a$ et pour f_b c'est $\mathbf{rcv}_b$), Si $\mathbf{rcv} \neq 0$ alors :

- La série converge sur $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$
- La série diverge sur $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}_{\text{fer}}(0, \mathbf{rcv})$
- La région restante $\mathfrak{S}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$ est indécidable, il faut toujours vérifier manuellement.

Notre étude sera restreinte sur $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$ où la convergence est sûre.

3.3.1 Étude dans $\mathbb{C}$:

Dans cette sous-section, on spécifiera les théorèmes permettant la manipulation des séries entières avec les opérations classiques (arithmétiques et fonctionnelles).

Theorem 3.3.1: Convergence — continuité

On a les deux propriétés suivantes :

1. La série des fonctions : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, r)$ tq : $a < \mathbf{rcv}_a$
2. La série des fonctions : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$

Theorem 3.3.2: somme — multiplication — dilatation

Posons : $\mathbf{rcv} = \min(\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_b)$,On a les trois propriétés suivantes :

1. $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$:
$$(f_a + f_b)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$
2. $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$:
$$(f_a \times f_b)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} \right) z^n$$
3. soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}} \left(0, \frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|}\right)$:
$$f_a(\lambda z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n z^n$$

Cette étude va nous permettra de faire le calcul de plusieurs séries à l'aide des nombres complexes (voir chapitre-6). On énonce les deux séries qui vont nous permettra de faire ces calculs.

—— Séries fondamentales ——

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\forall z \in \mathfrak{D}(0, 1) \quad \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

3.3.2 Étude dans $\mathbb{R}$:

Dans les exercices pratiques, il est souvent suffisant de se restreindre à l'étude dans $\mathbb{R}$. Dans cette sous-section, on conserve la notation f_a pour designer la série des fonctions définit par : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (sous contrainte de convergence), et de même pour f_b.

Theorem 3.3.3: Convergence — continuité — classe

On a les trois propriétés suivantes :

1. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur tout disque $[-r, r]$ tq : $r < \mathbf{rcv}_a$
2. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur le disque ouvert $]-\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_a[$
3. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouverte $]-\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_a[$

Theorem 3.3.4: somme — multiplication — dilatation

Posons : $\mathbf{rcv} = \min(\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_b)$,On a les trois propriétés suivantes :

1. $\forall x \in]-\mathbf{rcv}, +\mathbf{rcv}[$:

$$(f_a + f_b)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

2. $\forall x \in]-\mathbf{rcv}, +\mathbf{rcv}[$:

$$(f_a \times f_b)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} \right) x^n$$

3. soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \left[-\frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|}, +\frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|} \right]$:

$$f_a(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n x^n$$

Theorem 3.3.5: Dérivation — Intégration

soit $u, v \in]-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a[$,On a la formule de l'intégrale d'une série entière est :

soit $x \in [-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a]$ On a la formule de la dérivée d'une série entière est :

$$f_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

soit un entier $p \geq 1$, soit $x \in [-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a]$ On a la formule de la p-ème dérivé d'une série entière est :

$$f_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} A_p^n a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_p^{n+p} a_{n+p} x^n$$

3.3.3 Développement en série entière :

Definition 3.3.6: Fonction développable en série entière

soit un réel $r > 0$ et, soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$,on dit que la fonction est développable en série entière sur $]-r, +r[$ssi :
il existe une suite des réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :

- le rayon de convergence $\mathbf{rcv}_a$ de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est supérieur à r : $\mathbf{rcv}_a \geq r$
- $\forall x \in [-r, +r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

On présente d'abord les fonctions usuelles et leurs développements en série entière, les développements sont faciles à vérifier, mais il est recommandé de faire le calcule au moins une fois vous-même pour s'habituer à ce genre de calcul.

Corollary 3.3.7: Séries usuelles exponentielles

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R} \quad \textbf{et} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

Corollary 3.3.8: Séries usuelles géométriques

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\text{arcth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

Ainsi, on présente ci - dessus les deux méthodes majeures qui permettent de développer une fonction en séries entière :

Method : en utilisant les opérations arithmétiques et analytiques
Il suffit de décomposer la fonction en somme / produit / dérivé / primitive des fonctions usuelles (exp/sin/cos/cosh/sinh/ln/arctan...)

Example :
soit la fonction définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-1.2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$. Calculer (s'il existe) le développement limité de cette fonction.

Solution :
On vérifie facilement en réduisant au même dénominateur ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples que

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}\right)$$

Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme aura 1 comme rayon de convergence. Alors, pour $|x|<1$,

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

Method : en utilisant les équations différentielles
pour développer une fonction f en série entière, on cherche une équation différentielle vérifiée par f, et puis on cherche les solutions développables en série entière de cette equa-diff ... par identification, on trouve le développement de f.

Example :
soit la fonction définit sur $]-1,+1[$ par : $f(x)=(\text{arcsinh}(x))^2$. Calculer (s'il existe) le développement limité de cette fonction.
Solution :
En effet, la fonction f est dérivable sur $]-1,+1[$ ainsi pour tout réel la dérivée est :

$$f'(x)=\frac{2\times\text{arcsinh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

On note cette dérivée ϕ , on a ϕ est aussi dérivable et pour tout réel la dérivée est :

$$\phi'(x)=\frac{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times\text{arcsinh}(x)}{1+x^2}=\frac{1-x\phi(x)}{1+x^2}$$

alors la fonction ϕ vérifie l'équa-diff (E) : $(1+x^2)y'+xy=1$ avec la condition initiale : $y(0)=0$.
Cherchons les solutions de cette équation qui sont développables en série entière. On suppose par analyse-synthèse qu'une telle solution existe et de la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec $x\in]-r,+r[$. Si c'est le cas, on peut remplacer dans (E), et par un calcul qu'on ne ferra pas ici, on trouve que la solution doit être :

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n\ 4^n\ (n!)^2}{(2n+1)!}\right)x^{2n+1}$$

Cette série vérifie bien (E) et elle est de rayon de convergence = 1 ... puisque (E) peut être transformer en problème de Cauchy-Lipschitz alors, il ne peut admettre qu'une seule solution, Donc :

$$\phi(x) = y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \; 4^n \; (n!)^2}{(2n+1)!} \right) x^{2n+1}$$

Puis en intégrant ϕ on trouve le développement de f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \; 4^n \; (n!)^2}{(2n+2)!} \right) x^{2n+2}$$

$\blacksquare$

3.4 Exercices

Exo 3.4.1: Étude d'une série des fonctions

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : \left[0;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$.

1. Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$. On note S la somme de cette série d'applications.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et étudier le signe de $S'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de S.
5. Tracer l'allure de la fonction.

Solution of Exercise :

1. Soit $x \in [0;+\infty[$.
   - Si $0 \leqslant x < 1$, alors $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \leqslant \frac{x^n}{n} \leqslant x^n$. Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   - Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge.
   - Si $x > 1$, alors :
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \leqslant \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leqslant \frac{1}{x^n}$$
   Comme $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^n}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Finalement, la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0;1[\cup]1;\infty[$, et diverge en 1 .
2. soit $a \in [0,1[$:
   - $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;a]$, comme on vient de le voir en a).
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, pour tout $x \in [0,a]$:
   $$f_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{nx^{n-1}\left(x^{2n}+1\right) - x^n 2nx^{2n-1}}{\left(x^{2n}+1\right)^2} = \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}.$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;a]$. On a :
   $$\begin{aligned}|f_n'(x)| = \left|\frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}\right| &\leqslant \frac{x^{n-1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1} \leqslant x^{n-1} \leqslant a^{n-1},\end{aligned}$$

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} a^{n-1}$ converge, donc, par la méthode de condition suffisante, il découle que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n' \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [0;a].}$$

D'après le théorème du Cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[0,a]$ avec $a \in [0,1[$ ... et que l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in [0,1], \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Par un raisonnement analogique on montre que pour tout $a \in]1,+\infty[$:

- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[a;+\infty[$, comme on vient de le voir en a).
- Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;+\infty[$ de même expression de dérivé exprimé en avant.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
|f_n'(x)| = \left|\frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}\right| &\leqslant \frac{x^{n-1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2} \\
&= \frac{x^{n-1}\times 2x^{2n}}{\left(x^{2n}\right)^2} \leqslant \frac{2}{x^{4n-2n-n+1}} = \frac{2}{x^{n+1}} \\
&\leqslant \frac{2}{a^{n+1}} = 2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n,
\end{aligned}$$

Comme $|a^{-1}| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n$ converge, donc, par la méthode de condition suffisante, il découle que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n' \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [a;+\infty[.}$$

D'après le théorème du Cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a;+\infty[$ avec $a \in]1,+\infty[$ ... et que l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Conclusion :

$$\forall x \in D, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Il est clair alors que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1[, & S'(x) > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, & S'(x) < 0 \end{cases}$$

3. **Étude en 1 :**
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2n}$. Soit $A > 0$ fixé. Puisque la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n}$ diverge et est à termes réels $\geqslant 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geqslant 2A$. On a :

$$\forall x \in D, S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$$

Comme $\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$, et que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geqslant 2A$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, |x-1| \leqslant \eta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} f_k(x) \geqslant A.$$

On a donc :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-1| \leqslant \eta \Longrightarrow S(x) \geqslant A.$$

On conclut :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Étude en $+\infty$:

- On rappelle que la série converge simplement sur $[2; +\infty[$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \quad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  càd : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f_n = 0$
- Montrons que la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2; +\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[2; +\infty\right[, |f_n(x)| = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \leqslant \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{2^n},$$

  comme la série géométrique $\sum_n \frac{2}{2^n}$ converge donc : par la méthode de condition suffisante

  $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} f_n \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [2; +\infty[.}$

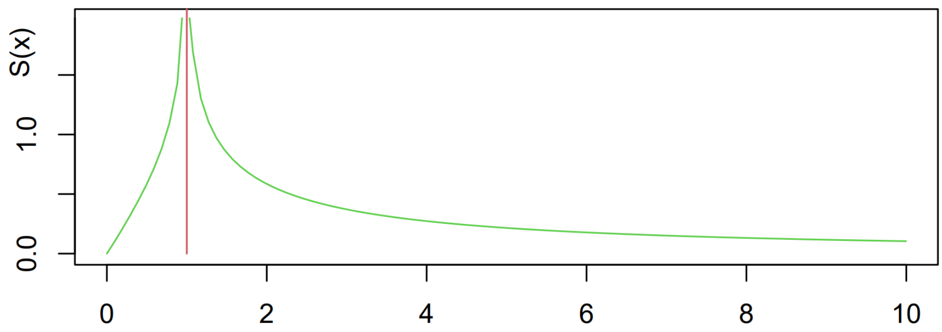
On conclut alors par théorème d'inversion limite-somme que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

4. Le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0

5. Trace de la fonction :



Trace de la fonction

6. On peut s'intéresser aux comportement asymptotique de S au voisinage de l'infinie En effet , considérons la fonctions définit pour tout $x \in [2, +\infty[$ par :

$$\mathbb{S}S(x) = x \times S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x)$$

Utilisant théorème d'inversion limite-somme 3.2.1 :

- Il est facile de vérifier que la série converge simplement sur $[2; +\infty[$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fixé :

$$\phi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{n+1}}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}} \quad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

pour $n = 1$:

$$\phi_1(x) = \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

càd :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\phi_n(x)=\begin{cases}1 & \text{Si } n=1\\ 0 & \text{Sinon}\end{cases}$$

- Montrons que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1}\phi_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2;+\infty[$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[2;+\infty[$

$$|\phi_n(x)|=\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)}\leqslant\frac{x^{n+1}}{nx^{2n}}=\frac{1}{nx^{n-1}}\leqslant\frac{1}{x^{n-1}}\leqslant\frac{2}{2^n}$$

comme la série géométrique $\sum_n\frac{2}{2^n}$ converge donc : par la méthode de condition suffisante

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\phi_n \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [2;+\infty[.}$$

On conclut alors par théorème d'inversion limite-somme que :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)}=1+\sum_{n=2}^{+\infty}0=1$$

Cela montre que :

$$\boxed{S(x)\underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim}\frac{1}{x}}$$

Exo 3.4.2: Une autre utilité de développement en série entière

Mq la fonction suivante définit sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & \text{Si } x\neq 0\\ 1 & \text{Sinon}\end{cases}$$

Solution of Exercise :

L'idée ici est de démontrer que la fonction est développable en série entière, et si c'est le cas : la fonction sera de classe $\mathcal{C}^\infty$ immédiatement sur le disque de convergence. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus 0$:

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

Pour le cas $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}0^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}=1=f(0)$$

Ce qui montre que :

$$\forall x \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{x}$$

Alors f est développable en série entière, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

CHAPITRE 4

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Prérequis

- Développement limité.
- Manipuler les Inégalités.

Objectifs

- Rencontre l'extension des intégrales de Riemann sur un intervalle quelconque.
- Savoir montrer la convergence/divergence d'une intégrale généralisée.

Sommaire

Dans ce chapitre, on acquerra l'un des compétences indispensables pour faire le chapitre d'étude des fonctions définit par une intégrale généralisée, ce qui est le tiers de programme d'analyse. Dans ce chapitre :

1. On prend I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une des formes suivante : ($[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$) qu'on traitera chaque tout seul.
2. Une fonction définie sur cet intervalle $f : x \in I \longrightarrow f(x)$. On supposera la fonction est continue par morceaux sur cet intervalle.

4.1 Définitions et propriétés fondamentales

4.1.1 Définition de la convergence d'une intégrale – Intégrabilité

Pour ne pas sortir de cadre de ce livre, on ne redéfinira pas l'intégrabilité au sens de Riemann, en fait, on rappellera la propriété qui nous suffira pour la compréhension du contenu de cet ouvrage...

Proposition 4.1.1: Intégrabilité sur un segment

Supp que l'intervalle I est un segment, c.-à-d. s'écrit sous la forme $I = [a, b]$ (avec $a < b$ deux réels)
ALORS : la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur I.

En outre, cette propriété va nous permettre de définir dans les cas restants :

Cas d'un intervalle semi-ouvert :

Definition 4.1.2

Supp que l'intervalle I s'écrit sous la forme : $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge lorsque :
La fonction $F : x \in [a, b[\longrightarrow F(x) = \int_a^x f(u)du$ admet une limite finie en b. Et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{par\ def}{=} \lim_{x\to b} F(x) \quad \text{qu'on note également} \quad \int_I f(x)dx$$

() resp. La fonction $F : x \in]a, b] \longrightarrow F(x) = \int_x^b f(u)du$ admet une limite finie en a.Et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{par\ def}{=} \lim_{x\to a} F(x) \quad \text{qu'on note également} \quad \int_I f(x)dx$$

NB : la fonction F qu'on a défini dans les deux cas est bien définie puisque f est continu par morceaux en tout segment $[a, x]$ tq : $a \leq x < b$ (resp. $[x, b]$ tq : $a < x \leq b$)

Cas d'un intervalle ouvert :

Definition 4.1.3

Supp que l'intervalle I s'écrit sous la forme : $[a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge lorsque :
La fonction $F : x \in]a, b[\longrightarrow F(x) = \int_c^x f(u)du$ admet une limite finie en a et en b.
Et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)dx \underset{par\ def}{=} \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x) \quad \text{qu'on note également} \quad \int_I f(x)dx$$

NB : la fonction F qu'on a défini dans les deux cas est bien définie puisque f est continu par morceaux en tout segment $[c, x]$ si : $c \leq x < b$ et $[x, c]$ tq : $a < x \leq c$

Définition de l'intégrabilité

Definition 4.1.4: Définition de l'intégrabilité

On dit que la fonction f est intégrable sur l'intervalle I lorsque l'intégrale $\int_I |f(x)|dx$ converge.
NB : Lorsque la fonction f est positive, la notion de l'intégrabilité se confondre avec la notion de la convergence de l'intégrale.

4.1.2 MÉTHODES — Intégrabilité des fonctions

On suppose dans cette sous-section que la fonction f est bien positive, et on considère une autre fonction g définit sur le même intervalle que g est également continue par morceaux et positive sur cet intervalle.
Alors : la notion de convergence, d'intégrale et d'intégralité se confondre... on préfère utiliser la notion d'intégrabilité.

Theorem 4.1.5: La comparaison des intégrales

On suppose ici que l'intervalle $I = [a, b[$... On a les assertions suivantes qui démontrent l'intégrabilité de f.

1. Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
2. Si $f(x) \underset{x \to b}{=} o\,(g(x))$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
3. Si $f(x) \underset{x \to b}{=} O\,(g(x))$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
4. Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.

On suppose ici que l'intervalle $I =]a, b]$... On a les assertions suivantes qui démontrent l'intégrabilité de f.

1. Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o\,(g(x))$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} O\,(g(x))$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et la fonction g est intégrable sur I :
   Alors : f est aussi intégrable sur I.

NB Rappelez bien que dans tout le chapitre on suppose que f est continue par morceaux sur l'Intervalle I, N'oublier pas à mentionner cela dans la rédaction de vos exercices

Method : En utilisant la comparaison aux intégrales classiques :
Il suffit d'utiliser le théorème précédent en comparons l'intégrale aux intégrales classiques qu'on citera dans le corollaire suivant... On peut aussi penser à utiliser le développement limité si la fonction n'est pas évidente à se comparer.

Corollary 4.1.6: Intégrales classiques

Intégrales classiques :

1. **Sur** $[1,+\infty[$ **:**
   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge ssi : $\alpha > 1$
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ converge ssi : $\alpha > 0$
   (c) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}dx$ converge ssi : $(\alpha > 1)$ **ou bien** $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$
2. **Sur** $]0,1]$ **:**
   (a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge ssi : $\alpha < 1$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}dx$ converge ssi : $(\alpha < 1)$ **ou bien** $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

Example :
Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$ sur $[1,+\infty[$.

Solution :

- On a la fonction f est continue sur $[1,+\infty[$.
- On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x^2\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$, par la méthode de comparaison à l'intégrale de Riemann (4.1.2).

Exemple Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$ sur $]0,1]$.
Solution :

- On a la fonction f est continue sur $]0,1]$.
- On a $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}$, et puisque : $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} = \frac{x}{\ln(x+1)} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}$

Donc f est intégrable sur $]0,1]$, par la méthode de comparaison à l'intégrale de Riemann (4.1.2). ■

Method : En utilisant CHÂLES :
On a vu précédemment les cas où $I = [a,b[$ ou bien $I =]a,b]$, Pour le cas où $I =]a,b[$ on peut utiliser la relation de CHÂLES pour revenir au cas de $I = [a,b[$ ou bien $I =]a,b]$ ...
En effet, soit $c \in]a,b[$:
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge SSI Les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ converge et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Example :
Dans l'exemple précédent, on a montré l'intégrabilité de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$$

sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$
Alors, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4.1.3 MÉTHODES — Convergence d'intégrales généralisées

Theorem 4.1.7

Si une fonction f est intégrable dans un intervalle I, alors l'intégrale $\int_I f(x)dx$ converge.

Method : En utilisant l'intégrabilité :
Pour Étudier la convergence d'une intégrale, il suffit d'étudier l'intégrabilité pour se rendre aux méthodes de sous-section précédente.

Method : En utilisant la Définition :
Il est généralement très utile d'utiliser la définition pour montrer l'intégrabilité... Cela se fait en pratique en considérons un $X \in I = [a, b[$ (resp. $X \in I =]a, b]$) puis en essaie à montrer que la fonction $F(X) = \int_a^X$ admet une limite finie en b (resp. $F(X) = \int_X^b$ admet une limite finie en a) à l'aide des manipulations classiques des intégrales sur un segment (Intégration par partie, changement de variable ...).

Example :
Soit $\alpha > 0$, soit la fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

1. **cas :** $\alpha > 1$ **:**
   On a pour tout $t > 0$, $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ lorsque $\alpha > 1$. Donc f_α est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge.
2. **cas :** $0 < \alpha \leq 1$ **:**
   Soit $X > 1$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^X - \alpha \int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt = \cos 1 - \frac{\cos X}{X^\alpha} - \alpha \int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$$

   Puisque $\alpha + 1 > 1$, on montre comme précédemment que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$, il en est de même pour $\dfrac{\cos X}{X^\alpha}$ et $\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.
   Ce qui donne la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

4.1.4 MÉTHODES — Divergences d'intégrales généralisées

Method : une condition suffisante pour les intervalles infinis
On suppose que l'intervalle $I = [a, +\infty[$: Si la fonction f admet une limite en $+\infty$ différente de 0 alors l'intégrale : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Example :
Expliquer pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ diverge.

Method : Réciproque des comparaisons
Il suffit d'utiliser la réciproque des règles de comparaison lorsque la fonction étudiée est positive et l'intervalle I est de l'un des formes $[a, b[$ ou bien $]a, b]$.

Example :
Montrer que si $x \leq 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ diverge.
Solution :
soit $x \leq 0$,donc $-x \geq 0$:

1. si $0 \leq -x \leq 1$:
   Il suffit de Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ diverge.
   En effet :
   - la fonction $f : x \mapsto t^x e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$
   - on a : $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(1)$ donc : $t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(\frac{1}{t^{-x}})$ ... ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{-x}}$ diverge.

   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ diverge, et par conséquence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}dt$
2. si $-x > 1$:
   Il suffit de Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^x e^{-t}dt$ diverge.
   En effet :
   - la fonction $f : x \mapsto t^x e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$
   - on a : $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$ donc : $t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}1$ ... ainsi $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{-x}}$ diverge.

   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^x e^{-t}dt$ diverge, et par conséquence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}dt$

Method : En utilisant la définition
La définition forme une condition nécessaire et suffisante, donc on peut l'utiliser pour montrer la divergence d'une intégrale. (On utilise IPP,CHÂLES...)

Example :

Method : En utilisant le CRITÈRE DE CAUCHY
Supp que l'intervalle $I = [a, b[$ (resp. $I =]a, b]$). On cherche une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) à valeur dans I tq : $b_n \longrightarrow b$ (resp. $a_n \longrightarrow a$)

Si de plus : la série $\sum_n \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ diverge (resp. la série $\sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$ diverge)

Alors : l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge également.

Example :

Montrer que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}dx$ diverge.

Solution :

prenons la suite $(b_n = n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$, On a :

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx &= \int_0^{(\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+n\pi}du \quad \text{en utilisant le changement : } u = x - n\pi \\
&\geq \int_0^{(\pi} \frac{\sin(u)}{(1+n)\pi}du \\
&= \left(\int_0^{(\pi} \sin(u)du\right) \frac{1}{(1+n)\pi} \\
&= \frac{2}{(1+n)\pi} \\
&\sim \frac{2}{n\pi} \quad \text{qui est une suite harmonique divergente}
\end{aligned}$$

4.2 Théorèmes de convergence dominée

Les trois théorèmes suivants sont admis, elles permettent de manipuler les suites/séries des intégrales... Ils sont les plus puissants dans le programme!!.

Theorem 4.2.1: Théorème de convergence dominée pour les suites

soit I un intervalle, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions définit sur I, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. pour tout entier n la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
2. $f_n \xrightarrow{CVS \text{ sur } I} f$ avec f une fonction définit sur I et continue par morceaux sur cet intervalle.
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I tq :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |f(x)| \leq \phi(x)\ \forall x \in I$$

On a le résultat suivant :

- f et f_n sont intégrables sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La suite $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- La formule d'inversion :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \tag{4.2.1}$$

Theorem 4.2.2: Théorème de convergence dominée pour les séries

soit I un intervalle, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions définit sur I, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. pour tout entier, n la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
2. $\sum_n f_n \xrightarrow{CVS \text{ sur } I} f$ avec f une fonction définie sur I et continue par morceaux sur cet intervalle.
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I tq :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|\sum_{k=0}^{n} f_n(x)\right| \leq \phi(x)\ \forall x \in I$$

On a le résultat suivant :

- f et f_n sont intégrables sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La série $\sum_n \int_I f_n(x)dx$ converge
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \tag{4.2.2}$$

Theorem 4.2.3: Théorème d'intégration terme à terme

soit I un intervalle, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions définit sur I, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. pour tout entier n la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
2. $\sum_n f_n \xrightarrow{CVS \text{ sur } I} f$ avec f une fonction définit sur I et continue par morceaux sur cet intervalle.
3. La série $\displaystyle\sum_n \int_I |f(x)|dx$ converge

On a le résultat suivant :

- f est intégrable sur I.
- La série $\displaystyle\sum_n \int_I f_n(x)dx$ converge
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \tag{4.2.3}$$

Ces théorèmes peuvent avoir une application directe, comme le montre l'exemple suivante :

Example :
Montrer les formules suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}dx$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$

1. (a) On a pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ donc également continue par morceaux.

   (b) Soit $x\in[0,+\infty[$ alors : $\dfrac{\sin(nx)}{1+nx+x^2} \sim \dfrac{\sin(nx)}{nx} \longrightarrow 0$
   ainsi pour $x=0$ la fonction $\dfrac{\sin(nx)}{1+nx+x^2} \sim 0 \longrightarrow 0$ donc la suite des fonctions convergent simplement vers la fonction null sur $[0,+\infty[$

   (c) Pour tout $x\geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Les hypothèses de théorème de convergence dominée étant vérifiées alors on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$$

2. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction : $f_n : x\in\mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{n+n^2x^2}$

   (a) Soit $x>0$. On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$ et la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, On note sa limite

S. alors : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

(b) La fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout entier n.

NB	Il faut bien noter que : La fonction S ne peut pas etre calculé explicitement ce qui nous empêche à démontrer qu'elle est continue par morceaux, donc on montre qu'elle est continue par morceaux en l'étudions comme fonction définit par une série.

Montrons que la fonction S est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour cela on montre la continuité en tout segment $[a, +\infty[$. En effet, soit $a > 0$:

i. La série $\sum_n f_n$ converge simplement vers S donc S est bien définie sur $[a, +\infty[$.
ii. Chacune des fonctions f_n est continue sur $[a, +\infty[$.
iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante alors pour tout $x \geqslant a$, on a : $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$.
Puisque $\sum f_n(a)$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty\,[$.

Donc S est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Finalement S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. et pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A |f_n(t)|\, dt = \int_0^A f_n(t)dt = \frac{1}{n^2}\int_0^A \frac{1}{t^2+\frac{1}{n}}dt = \frac{\sqrt{n}}{n^2}\,\mathrm{Arctan}(A\sqrt{n}).$$

On obtient :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{\pi}{2n^{3/2}} \quad \text{qui est une série convergence}$$

Le théorème d'intégration terme à terme donne d'une part l'intégrabilité de S sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'autre part, on obtient la formule voulue :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}dx = \int_0^{+\infty} S(t)dt = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

On outre, il se peut que l'intégrale ait des bornes non fixes (on peut pas alors utiliser directement les théorèmes parce qu'ils supposent que l'intervalle est fixes) dans ce cas on peut utiliser la méthode suivante :

Method : Intégrales aux bornes non fixes
Dans ce cas on peut penser à utiliser l'un des méthodes suivantes :

1. On fait un changement de variable, par exemple :

une intégrale de type $\displaystyle\int_0^n$ peut traité en utilisant le changement de variable $u = \frac{x}{n}$.

2. En utilisant la fonction indicatrice, par exemple :
une intégrale de type $\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx$ peut traiter en utilisant la formule suivante :

$$\int_0^n f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)dx$$

Example :
Montrer la formule suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u}du$$

Soit f_n et f définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = -\ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \times \mathbb{1}_{[0,n]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq x \\ -\ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 < x \leq n \end{cases}$$

et :

$$f(x) = (-\ln x)\mathrm{e}^{-x}$$

On applique le théorème de la convergence dominée :

1. f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
2. Soit $x \in]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq x$ on a

$$f_n(x) = -\ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ et } \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{e}^{-x}$$

donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} -\ln(x)\mathrm{e}^{-x}$.
Par suite la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f,
Ainsi f est continue sur $]0,+\infty[$ donc continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

3. Si $0 < x \leq n$ on a $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$ donc $|f_n(x)| \leq |\ln x|\,\mathrm{e}^{-x} = |f(x)|$, inégalité qui est aussi valable sur $[n,+\infty[$.
La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ car :
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $f(x) \underset{x\to0}{=} o(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})$.
Ainsi les f_n sont dominées sur $]0,+\infty[$ par une fonction intégrable.

Le théorème de la convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} f(u)du$, qui s'écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)\mathrm{e}^{-u}du.}$$

4.3 Exercices

Exo 4.3.1: Une ensemble intéressante :

Dans tout le problème, on note :
$\mathcal{S}$: { l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^+$, telle que, pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$} . Soit $f \in \mathcal{S}$,

1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geq 0$:
$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}dt$$
2. Montrer que chacune des fonctions suivantes est un élément de $\mathcal{S}$:
   - $t \mapsto e^{-\alpha t}$ pour tout $\alpha > 0$
   - $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ pour tout $\alpha > 1$

Solution of Exercise :

Soit $f \in \mathcal{S}$,

1. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
   - on a : la fonction $t \mapsto t^n f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur l'intervalle : $[0, +\infty[$.
   - Ainsi, on a : $\dfrac{t^n f(t)e^{-xt}}{f(t)e^{-\frac{x}{2}t}} = t^n e^{-\frac{x}{2}t}$ ce qui montre que :
   $$t^n f(t)e^{-xt} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(t)e^{-\frac{x}{2}t}\right)$$

   La fonction $t \mapsto f(t)e^{-\frac{x}{2}t}$ étant intégrable, alors, on déduit que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}dt$ est convergent.
2. (a) soit $\alpha > 0$ et $x > 0$:
   $$\int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{-\alpha t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\alpha)t}dt \text{ qui est convergente, car } \alpha + x > 0$$
   (b) soit $\alpha > 0$ et $x > 0$: On écrit :
   $$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}dt = \int_1^{1} e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}dt + \int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}dt$$
   Puis on montre les deux intégrales convergentes :
   - la fonction $t \mapsto e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ donc sur les deux intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$
   - **Au voisinage de 0 :**
   $e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge.

Alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge également.

- **Au voisinage de $+\infty$:**
  $e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha} \underset{x\to 0}{=} o\left(e^{-\frac{x}{2}t}\right)$ ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}t}dt$ converge.
  Alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge également.

$\blacksquare$

CHAPITRE 5

INTÉGRALES PARAMÉTRÉS

Prérequis

- Les généralisées
- L'étude fonctions réelles

Objectifs

- Savoir étudier une fonction définit une paramétrée

Sommaire

Dans ce chapitre, On considère une fonction à deux variables $f : (x,t) \in A \times I \mapsto f(x,t)$ avec $A \subset \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On propose d'étudier dans ce chapitre la fonction f définit par : $F : x \to \int_I f_x(t)dt$ sous le contraint de convergence. On verra les outils qui vont nous aider à étudier cette fonction :

- Leur limites/continuité : pour avoir une idée sur les branches infinies
- Leurs Dérivés/variations : qui nous indiquent la variation / la convexité ...

5.1 Étude pratique d'une intégrale paramétré

Dans cette section, on conserve toujours les notations de l'Introduction de chapitre. Pour les exemples, on considère la fonction dite **Gamma d'EULER** définit par :

$$\Gamma : x \longleftarrow \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Domaine de Définition : On rappelle que d'après un exemple précédent 4.1.4, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ diverge lorsque $x \leq 0$.
Reste à montrer qu'elle converge pour $x > 0$, en effet : on divise l'intégrale en deux parties $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, puis on montre que chacune converge.
Soit $x > 0$ on a :

1. la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ donc sur les deux intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.
2. Traitons chaque intervalle toute seule :
   - pour $]0, 1]$:
     $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ ainsi comme $1 - x < 1$ donc l'intégrale est convergente par comparaison.
   - pour $[1, +\infty[$:
     $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ car $t^{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc l'intégrale est convergente par comparaison.

On conclut alors que les deux intégrales convergentes donc également $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
Finalement l'intégrale converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ SSI $x > 0$, donc le domaine de définition est $\mathbb{R}_*^+$.
Énonçons dans ce qui suit les théorèmes qui permettent l'étude de cette fonction et les appliquons sur elle-même.

5.1.1 Limite d'une intégrale paramétrée

Theorem 5.1.1: Théorème de limite

soit $a \in \bar{A}$, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. **Limite**
   La fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une limite en a.
2. **Continuité par morceau**
   Pour tout $x \in A$ les deux fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \lim x \to af(x,t)$ sont continues par morceaux sur I.
3. **Intégrabilité**
   (pas nécessaire)
4. **Hypothèse de domination**
   Il existe une fonction ϕ définit et intégrable sur I tq :
$$|f(x,t)| \leq \phi(t) \quad \forall (x,t) \in A \times I$$

On a le résultat suivant :

- L'intégrale $\int_I \lim_{x\to a} f(x,t)dt$ converge.
- L'intégrale $\int_I f(x,t)dt$ converge pour tout $x \in A$.
- La fonction F admet une limite en a
- La formule d'inversion :
$$\int_I \lim_{x\to a} f(x,t)dt = \lim_{x\to a} \int_I f(x,t)dt \tag{5.1.1}$$

Example :

Étude de limite en 0 de la fonction Γ :
Pour utiliser le théorème de limite en 0 il nous suffit de restreint la fonction Γ sur l'intervalle $]0,1/2]$ (qui est un voisinage de 0 c.-à-d. $0 \in]0,1/2]$).
En effet :

1. Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ admet une limite en 0 qui est : $\frac{e^{-t}}{t}$.
2. Pour tout $x \in]0,1/2]$ la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \lim_{x\to 0} t^{x-1}e^{-t} = \dfrac{e^{-t}}{t}$ est également continue par morceaux.
4. Soit $(x,t) \in]0,1/2] \times]0,+\infty[$ on a :
$$|t^{x-1}e^{-t}| = \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-t}$$
   Alors en prenons $\phi : t \in]0,+\infty[\mapsto \left(1 + \frac{1}{t^{1/2}}\right) e^{-t}$ qui est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, alors on vérifie bien l'hypothèse de domination.

D'où la fonction Γ admet une limite en 0 Ainsi la formule d'inversion limite-Intégrale **??** nous donne :

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt = +\infty$$

Étude de limite en $+\infty$ de la fonction Γ :

NB On peut essayer d'abord le théorème de limite, néanmoins ce théoreme exige que $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ ait une limite finie en tout $t > 0$ ce qui n'est pas le cas ici en effet :

$$\lim_{x\to+\infty} t^{x-1}e^{-t} = l(t) = \begin{cases} +\infty & \text{Si } t > 1 \\ e^{-1} & \text{Si } t = 1 \\ 0 & \text{Si } t < 1 \end{cases}$$

On voit alors qu'on peut pas appliquer le théorème... mais on deduit l'intuition que cette limite sera $+\infty$ donc on essaie a faire une inégalité de type :

$$t^{x-1}e^{-t} > qlqchose(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Il est souvent qu'une telle égalité ne se produit que lorsqu'on décompose l'intégrale en plusieurs parties

---

Soit $x > 2$, en écrivant :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^2 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Puis on montre que $\displaystyle\int_0^2 t^{x-1}e^{-t}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En effet :

Soit $t \in]0,2]$ alors : $e^{-t} \geq e^{-2}$ puis :

$$\int_0^2 t^{x-1}e^{-t}dt \geq e^{-2}\times\left(\int_0^2 t^{x-1}dt\right) = e^{-2}\times\left(\frac{2^x-1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\times\left(\frac{2}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

■

5.1.2 Continuité d'une intégrale paramétrée

Theorem 5.1.2: Théorème de continuité

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. **continuité**
   La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A pour tout $t \in I$.
2. **continuité** par morceau
   Pour tout $x \in A$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
3. **intégrabilité**
   (par nécessaire)
4. **hypothèse de domination**
   Il existe une fonction ϕ définit et intégrable sur I tq :

$$|f(x,t)| \leq \phi(t) \quad \forall (x,t) \in A \times I$$

On a le résultat suivant :

- L'intégrale $\int_I f(x,t)dt$ pour tout $x \in A$.
- La fonction F est continue sur A.

Example :

Pour utiliser le théorème de continuité, on peut montrer la continuité sur tout intervalle $[a,b]$, tq : $b > 1 > a > 0$ puis déduire la continuité sur tout l'intervalle $]0,+\infty[$ en effet soit $b > a > 0$:

1. La fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[a,b]$ pour tout $t > 0$.
2. Pour tout $x \in [a,b]$ la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
4. Soit $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ on a :

$$|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{b-1}e^{-t} + t^{a-1}e^{-t}$$

   Alors en prenons $\phi : t \in]0,+\infty[\mapsto t^{b-1}e^{-t} + t^{a-1}e^{-t}$ qui est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, alors on vérifie bien l'hypothèse de domination.

D'où la fonction Γ est continue sur tout intervalle $[a,b]$ et alors continue sur $]0,+\infty[$.

5.1.3 Dérivés d'une intégrale paramétrée

Theorem 5.1.3: Théorème de Dérivée première

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. **dérivabilité**
   La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A pour tout $t \in I$.
2. **continuité par morceau**
   Pour tout $x \in A$ les deux fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur I.
3. **intégrabilité**
   Pour tout $x \in A$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
4. **hypothèse de domination**
   Il existe une fonction ϕ définit et intégrable sur I tq :
   $$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \phi \quad \forall (x,t) \in A \times I$$

On a le résultat suivant :

- L'intégrale $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge pour tout $x \in A$
- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- La formule d'inversion :
  $$\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_I f(x,t)\right) \tag{5.1.2}$$

Example :
Pour utiliser le théorème de dérivée première, on peut montrer la continuité sur tout intervalle $[a,b]$, tq : $b > 1 > a > 0$ puis déduit la classe sur tout l'intervalle $]0,+\infty[$.
En effet, soit $b > a > 0$:

1. La fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ pour tout $t > 0$.
   Ainsi l'expression de sa dérivée :
   $$\frac{\partial t^{x-1}e^{-t}}{\partial x} = \ln(t) \times t^{x-1}e^{-t} \quad \forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$$
2. Pour tout $x \in [a,b]$ les deux fonctions :
   $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto \ln(t) \times t^{x-1}e^{-t}$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
3. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $b > x > a$.
4. On peut remarquer d'abord que : $|\ln(t)| \leq |t| \quad \forall t > 0$
   Puis , soit $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$ on a :
   $$|\ln(t) \times t^{x-1}e^{-t}| \leq t \times (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} = (t^a + t^b)e^{-t}$$
   Alors en prenons $\phi : t \in]0,+\infty[\mapsto (t^a + t^b)e^{-t}$ qui est bien intégrable sur $]0,+\infty[$,

alors on vérifie bien l'hypothèse de domination.

D'où la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a,b]$ et alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi la formule d'inversion dérivée intégrale 5.1.2 nous donne :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) \times t^{x-1} e^{-tx} dt$$

Theorem 5.1.4: Théorème des Dérivés supérieurs

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. **dérivabilité**
   La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A pour tout $t \in I$.
2. **continuité par morceau**
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in A$, les deux fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial^n x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur I.
3. **intégrabilité**
   Pour tout $x \in A$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
4. **hypothèse de domination**
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction ϕ_n définit et intégrable sur I tq :

$$|\frac{\partial^n f}{\partial^n x}(x,t)| \leq \phi_n \quad \forall (x,t) \in A \times I$$

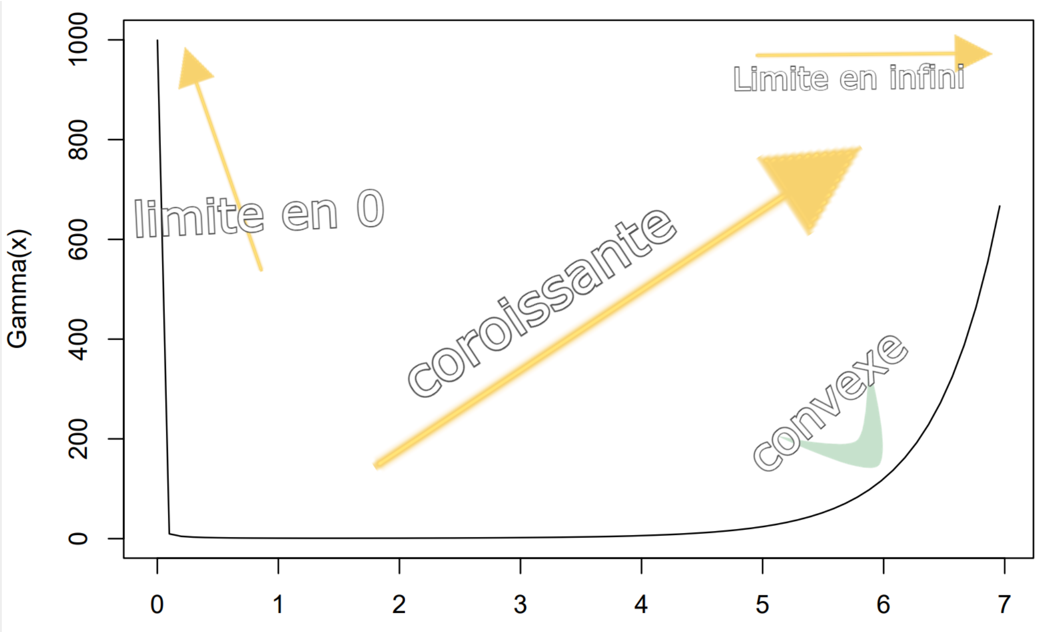
On a le résultat suivant :

- L'intégrale $\int_I \frac{\partial^n f}{\partial^n x}(x,t)dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in A$.
- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A.
- La formule d'inversion :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad : \qquad \int_I \frac{\partial^p f}{\partial^p x}(x,t)dt = \frac{\partial^p}{\partial^p x}\left(\int_I f(x,t)dt\right)$$

Example :
On vous laisse le soin de montrer la convexité de la fonction gamma.

Trace finale de la fonction Gamma



Courbe de la fonction Gamma

5.1.4 Propriété de LOCALITÉ

Pour comprendre cette notion, on vous rappelle que la définition de la continuité (resp. dérivabilité) sur un ensemble : lorsque la fonction est continue (resp. dérivable) en tout point de cet ensemble. En conséquence de cela, si on veut démontrer la continuité (resp. dérivabilité) d'une fonction sur un intervalle $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ il suffit de démontrer la continuité (resp. dérivabilité) de cette fonction sur tout intervalle I_α. On pourra de même voir la classe comme une propriété locale. Ainsi, on vous avertit de ne jamais utiliser des assertions comme : " f est continue " sans indiquer la région de continuité... il faut dire " f est continue sur l'intervalle ... "
On donne alors la méthode suivante :

Method : Étude sur un ouvert
Il est souvent de rencontrer des exercices qui proposent l'étude sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ dont la convergence uniforme n'est pas établie, Dans ce cas, il est ultime d'utilité de décomposé cet intervalle en union des intervalles faciles a traité par exemple :

- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\alpha<b} [\alpha, b[$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{a<\alpha<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup_{n\geq 1} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

Puis, en l'étudiant sur ces intervalles, on déduit l'étude sur l'intervalle tout entière. ■

Example :
Cela est déjà illustré dans les exemples de la fonction Γ

5.1.5 Quelque pistes supplémentaires

Method : Étude de monotonie
Lorsqu'on veut démontrer l'hypothèse de domination, il est utile d'observer la monotonie de la fonction, surtout pour les fonctions usuelles (exp / ln / cos / sin / sinh ...)

Example :
Pour la fonction F définit par l'intégrale suivante :
$F : x \in [1, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-xt} dt$, puisque la fonction $x \mapsto e^{-xt}$ est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ pour tout $t > 0$ ce qui justifie le passage suivant
$\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-t}$ pour tout $x \geq 1$ et tout $t > 0$.

Method : Étude de fonction
Lorsqu'on veut démontrer l'hypothèse de domination, il se peut qu'on ne puisse pas observer la monotonie facilement, donc il faut faire une étude de la fonction (en faisant la dérivée, le tableau de variation puis en déterminant le maximum)

Method : Faire les cas
Parfois, lorsqu'on veut démontrer l'hypothèse de domination, on peut être obligé à faire des inégalités selon le cas de t (la variable sur laquelle on intègre). Par exemple :

$$f(x,t) \leq \begin{cases} \phi_1(t) & \text{Si } t \in]a, c] \\ \phi_2(t) & \text{Si } t \in [c, b[\end{cases}$$

Dans une telle situation, on peut regrouper les deux cas en prenons la somme : $\phi = \phi_1 + \phi_2$ on aura :

$$f(x,t) \leq \phi(t) \quad \forall t \in]a, b[$$

Example :
Précédemment, on a montré que si : $b > 1 > a > 0$ alors :

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{b-1} e^{-t} + t^{a-1} e^{-t}$$

En effet, cela découle de l'inégalité suivante :

$$e^{\ln(t)(x-1)} e^{-t} \leq \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{Si } t \in [a, 1] \text{ car la fonction } x \mapsto e^{\ln(t)(x-1)} \text{ est croissante } \ln(t) \geq 0 \\ t^{a-1} e^{-t} & \text{Si } t \in [1, b] \text{ car la fonction } x \mapsto e^{\ln(t)(x-1)} \text{ est décroissante } \ln(t) \leq 0 \end{cases}$$

Method : Élimination des cas limites
Lorsqu'on veut démontrer l'hypothèse de domination, il se peut que le "x" soit dans un domaine très léger et qu'on ait des problèmes aux limites de ce domaine qui nous empêche vérifier l'hypothèse. Dans ce cas, il est préférable de restreindre l'étude sur des segments puis déduire le comportement global en utilisant la propriété de localité.

Example :
Dans l'exemple de la fonction Γ on a : limiter l'étude sur les segments : $[a, b]$ car les deux bornes posent un problème :

- au voisinage de $+\infty$: si $t > 1$ la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ diverge vers $+\infty$ alors, elle n'est pas majorable.
- au voisinage de 0 : si $t < 1$ la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ diverge vers $+\infty$ alors, elle n'est pas majorable.

Dans le cas général :

- Si la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est décroissante, on préfère d'utiliser les intervalles : $[\alpha, b[$
- Si la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est croissante, on préfère d'utiliser les intervalles : $]a, \beta]$
- Sinon, généralement les intervalles $[\alpha, \beta]$ marchent dans la majorité des cas

Method : Étude combinée suites/série des fonctions avec intégrales à paramètre
Il est parfois nécessaire qu'on utilise une étude combinée pour aboutir au résultat voulu. Par exemple on peut remplacer l'étude de la fonction : $\int_0^{+\infty} f(x, t)dt$ par :

- L'étude de la suite :
$$\left(f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f(x, t)dt\right)_{n \geq 1}$$
lorsqu'on a un problème de zéro.
- L'étude de la suite :
$$\left(f_n = \int_0^{n} f(x, t)dt\right)_{n \geq 1}$$
ou bien la série :
$$\sum_n f_n = \sum_n \int_n^{n+1} f(x, t)dt$$
lorsqu'on a un problème à l'infini.

Example :
Montrer que la fonction F est continue en 0 :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

On admet que le domaine de définition de la fonction est $\mathcal{R}^+$

Si on veut utiliser théorème d'inversion limite-intégrale en un voisinage $[0, a]$ de 0, on doit montrer l'hypothèse de domination. cad on doit chercher une fonction $\phi(t)$ indépendante de x qui majore $\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in [0, a]$. Une étude simple de la fonction montre que la meilleure majoration qu'on peut faire est par : $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ qui est la borne sup de la fonction. Malheureusement cette majoration ne fournit pas une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.
On se serve de l'étude de la suite des fonctions :

$$\left(f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt\right)_{n\geq 1}$$

On note d'abord :

- Pour tout $x > 0$:
  $F_x : X > 0 \mapsto \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$
- Pour tout $n \in \mathcal{N}^*$:
  $f_n : x > 0 \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$

1. **Convergence simple :**
   soit $x > 0$ l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ converge, alors par définition de la convergence d'une intégrale généralisée : la fonction F admet des limites en 0 et en $+\infty$ ainsi on a :

$$\lim_{X\to 0} F(X) - \lim_{Y\to+\infty} F(Y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

   Puis par caractérisation séquentielle de la limite :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt &= \lim_{X\to 0} F(X) - \lim_{Y\to+\infty} F(Y)\\ &= \lim_{X\to 0}\left(F(X) - \lim_{Y\to+\infty} F(Y)\right)\\ &= \lim_{X\to 0}\left(\int_X^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt\right)\end{aligned}$$

   Ce qui montre :

$$\boxed{f_n \xrightarrow{\textbf{CVS}} F}$$

2. **La fonction limite :**
   Soit un entier $n \geq 0$:
   Montrons que :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

   En fait, c'est une intégrale à paramètre qu'on peut calculer sa limite en utilisant la formule d'inversion limie-intégrale :

(a) Soit $t \geq \frac{1}{n}$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ admet une limite lorsque x tend vers 0 qui est : $\frac{\sin(t)}{t}$

(b) Soit $x > 0$, les deux fonctions : $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sont continues par morceaux sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$

(c) Soit $(x,t) \in]0,+\infty[\times[\frac{1}{n}, +\infty[$:

$$\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt} \leq e^{-\frac{t}{n}} = \phi_n(t)$$

Ainsi la fonction $\phi_n : t \in [\frac{1}{n}, +\infty[\longmapsto e^{-\frac{t}{n}}$ est intégrable, donc on vérifie bien l'hypothèse de domination.

Les condition d'application étant vérifiées on peut déduire :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt}$$

3. **Convergence uniforme :**
On propose de montrer que $f_n \xrightarrow{\textbf{CVU}} F$ pour cela on montre que :

$$||f_n - F||_{\infty}^{]0,+\infty[} \to 0$$

.

En effet, soit $n \in \mathcal{N}^*$ et $x > 0$ alors :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - F(x)| &= \left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt\right| \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| dt \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \underbrace{|\frac{\sin(t)}{t}|}_{\leq 1}\underbrace{|e^{-xt}|}_{\leq 1}dt \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} 1dt \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que :

$$||f_n - F||_{\infty}^{]0,+\infty[} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

D'où :

$$\boxed{f_n \xrightarrow{\textbf{CVU}} F}$$

On déduit finalement que :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x)$$
$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt = F(0)}$$

Ce qui montre la continuité de F en 0. ■

5.2 Transformé de LAPLACE

Exo 5.2.1: Transformé de LAPLACE

Dans tout ce problème, on rappelle que l'ensemble $\mathcal{S}$ est celui définit dans l'exercice : (4.3)
Pour toute fonction f élément de $\mathcal{S}$, on définit la fonction $\mathcal{L}(f)$ qui associe à chaque réel $x \in \mathcal{R}^+$ l'élément (la convergence est établie par appartenance à $\mathcal{S}$) :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

Lorsque la fonction f est un élément de $\mathcal{S}$ la fonction $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $\mathcal{R}^+$.

1. **Étude asymptotique :**

   (a) On suppose que f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$.
      i. Déterminer la limite de $\mathcal{L}(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
      ii. Montrer que, si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

   (b) On suppose que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$ où l est un réel.
      i. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
      ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t}dt$$

      .
      iii. En déduire $\lim_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x)$.

2. **Étude de fonction :**

   (a) i. Démontrer que pour tout élément f de $\mathcal{S}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que l'on a $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est une fonction à déterminer.
      ii. Plus généralement, démontrer que pour tout élément f de $\mathcal{S}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{L}(f))^{(k)} = (-1)^k\mathcal{L}(g_k)$$

      Où g_k est une fonction (dépendante de k) à déterminer.

   (b) Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $p \in \mathcal{N}^*$
      i. Montrer que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f' \in \mathcal{S}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

ii. Montrer que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(p)} \in \mathcal{S}$ ainsi que toutes les dérivées $f^{(k)}$ tq $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et tout $k \in \{1, \cdots, p-1\}$:

$$\mathcal{L}\left(f^{(p)}\right)(x) = x^k \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^{p} x^{i-1} f^{(p-i)}(0)$$

3. **Étude d'injectivité :**

(a) Soit h une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^m h(t)dt = 0$.

i. Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels,

$$\int_0^1 P(t)h(t)dt = 0$$

ii. En déduire que h est la fonction nulle.

(b) Soit f un élément de $\mathcal{S}$, on pose pour tout $t \geq 0, h(t) = \int_0^t e^{-u} f(u)du$.

i. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(1+k) = k\mathcal{L}(h)(k)$$

ii. On suppose que pour tout entier $k > 0, \mathcal{L}(f)(1+k) = 0$.

A. Montrer que pour tout entier $k > 0, \int_0^1 u^k h(\ln u)\, du$ converge et il vaut 0.

B. En déduire que h_n est la fonction nulle.

(c) Montrer que l'application $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{S}$ est injective.

Solution of Exercise :

1. **Étude asymptotique :**

(a) soit f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$.

i. *Déterminons la limite de $\mathcal{L}(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*
La fonction f étant bornée alors il existe un $M > 0$ tq pour tout réel $x \geq 0$ $|f(x) \leq M|$ alors :

$$\forall x > 0 \quad |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \leq M \times \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0}$$

ii. *supposons de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, Montrons alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$*

soit $x > 0$ et $X > 0$ les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-xt}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^X f'(t)e^{-xt}dt = \left[f(X)e^{-Xx} - f(0)\right] + \int_0^X xf(t)e^{-xt}dt$$

Puisque le chacune des termes ont une limite finie :
$\left[f(X)e^{-Xx} - f(0)\right]$ (la fonction f est bornée)
et $\int_0^X xf(t)e^{-xt}dt$ (la fonction f est un élément de $\mathcal{S}$)
alors, on peut faire un passage à la limite : $X \to +\infty$ on obtient la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} xf(t)e^{-xt}dt - f(0)$$

Puisque $f' \in \mathcal{S}$ on peut lui associer la fonction $\mathcal{L}(f)$, Ce qui permet d'ecritre : $\mathcal{L}(f')(x) = f(0) + x\mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $x > 0$, Ainsi f' étant bornée alors d'après question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$$

ce qui nous fournit la formule suivante :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)}$$

(b) *Supposons que* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$ *où* l *est un réel.*

i. *Montrons que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$*.*
En effet : Comme $\lim_{x\to+\infty} f(t) = l$, alors il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - l| \leq 1$ pour tout $x \geq A$.
Sur le segment $[0, A]$ f est bornée (cf. toute fonction continue est bornée sur les segments) donc il existe un certain $M > 0$ tq $|f(x)| \leq M$.
En regroupons les deux cas, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \max(M, |l| + 1)$.
Donc la fonction f est bornée sur $\mathcal{R}^+$.

ii. *Soit* $x \in \mathbb{R}^{*+}$*, Montrons que :* $x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}dt$*.*

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt \underset{u=xt}{=} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}\frac{du}{x}$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}dt}$$

iii. *Déduisons :* $\lim_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x)$*.*
Appliquons théorème d'inversion limite-Intégrale n sur $]0, +\infty[$ au point

$0 \in]0, \bar{+}\infty[$.

- La fonction $t \mapsto f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t}$ admet une limite en 0 pour tout $t > 0$ ainsi la fonction limite :

$$t \mapsto \lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t} = l \times e^{-t}$$

- Les deux fonctions $t \mapsto f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t}$ et $t \mapsto l \times e^{-t}$ sont continues par morceaux pour tout $x > 0$
- Soit $(x, t) \in (\mathcal{R}_*^+)^2$ On a :

$$\left| f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t} \right| \leq M \times e^{-t}$$

Avec M est celui de question 1(b)i

Par théorème d'inversion limite-Intégrale, on déduit qui :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) \lim_{x \to 0^+} = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} l \times e^{-t}dt = l}$$

2. **Étude de fonction :**

(a) i. *Soit f un élément de $\mathcal{S}$, Montrons que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculons sa dérivé.*

Appliquons théoreme d'inversion dérivé-intégrale sur chaque intervalle $([a, +\infty[)_{a>0}$..

En effet, soit $a > 0$:

- Pour tout $t > 0$ La fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ ainsi sa dérivée est :

$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t)e^{-xt} = -tf(t)e^{-xt}$$

- Pour tout $x \geq a$ les fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto -tf(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$
- Pour tout $x \geq a$ la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable (étant un élément de $\mathcal{S}$)
- Soit $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$ on a :

$$\left| -tf(t)e^{-xt} \right| \leq t|f(t)|e^{-at}$$

On prend la fonction $\phi : t \mapsto t|f(t)|e^{-at}$ cette fonction est bien intégrable donc on vérifie bien l'hypothèse de domination

On en déduit par théorème d'inversion dérivée-intégrale que sur chaque intervalle $([a, +\infty[)_{a>0}$ la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et puis par localité de la propriété "classe" il en découle que : la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ainsi sa dérivée pour tout $x>0$:

$$\boxed{\mathcal{L}(f)'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right) = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-xt}dt = \mathcal{L}(g_1)(x)}$$

avec $g_1 : t \mapsto -tf(t)$

ii. *Soit f un élément de $\mathcal{S}$, Montrons que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculons tous ses dérivées successives.*
Appliquons théorème d'inversion dérivé-intégrale (dérivées supérieures) sur chaque intervalle $([a,+\infty[)_{a>0}\cdots$
En effet, soit $a>0$:

- pour tout $t>0$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $[a,+\infty[$ ainsi ses dérivées est :

$$x \mapsto \frac{\partial^p}{\partial^p x} f(t)e^{-xt} = (-t)^p f(t)e^{-xt} \qquad \forall p \in \mathcal{N}^*$$

- Soit $p \in \mathcal{N}$, pour tout $x \geq a$ les fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto (-t)^p f(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$
- Pour tout $x \geq a$ la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable (étant un élément de $\mathcal{S}$)
- Soit $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$ on a :

$$\left|(-t)^p f(t)e^{-xt}\right| \leq t^p|f(t)|e^{-at}$$

  On prend la fonction $\phi : t \mapsto t^p|f(t)|e^{-at}$ cette fonction est bien intégrable donc on vérifie bien l'hypothèse de domination.

On en déduit par théorème d'inversion dérivé-intégrale que sur chaque intervalle $([a,+\infty[)_{a>0}$ la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, et puis par localité de la propriété "classe" il en découle que : la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]0,+\infty[$ ainsi ses dérivées pour tout $x>0$:

$$\boxed{\mathcal{L}(f)^{(p)}(x) = \frac{\partial^p}{\partial^p x}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right) = \int_0^{+\infty} (-t)^p f(t)e^{-xt}dt}$$

Donc :

$$\mathcal{L}(f)^{(p)}(x) = \mathcal{L}(g_p)(x)$$

avec $g_p : t \mapsto (-t)^p f(t)$

(b) Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $p \in \mathcal{N}^*$

i. *supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $f' \in \mathcal{S}$, puis montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$:*

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

soit $x > 0$ et $X > 0$ les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{-xt}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_0^X f'(t)e^{-xt}dt = \left[f(X)e^{-Xx} - f(0)\right] + \int_0^X xf(t)e^{-xt}dt$$

Puisque le chacune des termes ont une limite finie :
$\left[f(X)e^{-Xx} - f(0)\right]$ (la fonction f est bornée)
et $\int_0^X xf(t)e^{-xt}dt$ (la fonction f est un élément de $\mathcal{S}$)
alors, on peut faire un passage à la limite : $X \to +\infty$ on obtient la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} xf(t)e^{-xt}dt - f(0)$$

Puisque $f' \in \mathcal{S}$ on peut lui associer la fonction $\mathcal{L}(f)$, Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = f(0) + x\mathcal{L}(f)(x) \quad \text{pour tout } x > 0}$$

ii. *Énonçons l'assertion qu'on va montrer par récurrence :*

$$\mathcal{H}_p : \textbf{Si :} \begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f^{(p)} \in \mathcal{S} \\ \forall k \in \{0, \cdots, p-1\} \quad f^{(k)} \text{ est bornée} \end{cases}$$

$$\textbf{Alors :} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } \forall k \in \{1, \cdots, p-1\} \ : \\ \\ \mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(x) = x^k \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^k x^{i-1} f^{(k-i)}(0) \end{cases}$$

- Pour $p = 0$ c'est déja vérifié 2(b)i
- supp que $\mathcal{H}_p$ est vérifié pour un certain $p \in \mathcal{N}$ et montrons que : $\mathcal{H}_{p+1}$ l'est aussi :
  En effet, supposons que :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^{p+1} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f^{(p+1)} \in \mathcal{S} \\ \forall k \in \{0, \cdots, p\} \quad f^{(k)} \text{ est bornée} \end{cases}$$

  Puisque cela entraîne que f vérifie les hypothèses de H_p alors par conséquence :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } \forall k \in \{1, \cdots, p-1\} : \\ \\ \mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(x) = x^k \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^k x^{i-1} f^{(k-i)}(0) \end{cases}$$

Reste à montrer le cas $k = p+1$, pour ce fait on prend $\psi = f^{(p)}$ et on applique H_0.. comme :

$$\begin{cases} \psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ (\text{car } \psi = f^{(p)} \text{ est dérivable et } \psi' = f^{(p+1)} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+) \\ \psi = f^{(p+1)} \in \mathcal{S} \\ \ \psi = f^{(p)} \text{ est bornée} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi')(x) &= x\mathcal{L}(\psi)(x) - \psi(0) \\ \mathcal{L}(f^{(p+1)})(x) &= x\mathcal{L}(f^{(p)})(x) - f^{(p)}(0) \\ \mathcal{L}\left(f^{(p+1)}\right)(x) &= x\left(x^p\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^{p} x^{i-1} f^{(p-i)}(0)\right) - f^{(p)}(0) \\ &= x^{p+1}\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^{p+1} x^{i-1} f^{(p+1-i)}(0) \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f^{(p+1)}\right)(x) = x^{p+1}\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^{p+1} x^{i-1} f^{(p+1-i)}(0)}$$

3. **Étude d'injectivité :**

   (a) Soit h une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^m h(t)dt = 0$.

      i. *soit un polynôme P à coefficients réels, montrons que :*

      $$\int_0^1 P(t)h(t)dt = 0$$

      En effet, puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P :

      $$\int_0^1 P(t)h(t)dt = 0$$

      ii. *Déduisons que h est la fonction nulle.*
      D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[0,1]$.
      On applique le théorème d'inversion limite-intégrale :

      - La suite des fonctions $(P_n \times h)_{n\geq 0} \xrightarrow{CVS} h^2$
      - Pour tout $n \in \mathcal{N}$ la fonction $x \mapsto P_n(x)h(x)$ est intégrable sur $[0,1]$

d'intégrale égale à :

$$\int_0^1 P_n(x)h(x)dx = 0$$

- La suite des fonctions $(P_n \times h)_{n\geq 0} \xrightarrow{CVU} h^2$

Donc on déduit que :

$$\boxed{\int_0^1 h^2(x)dx = \int_0^1 \lim_n P_n(x)h(x)dx = \lim_n \int_0^1 P_n(x)h(x)dx = 0}$$

ce qui montre que $\int_0^1 (h(x))^2 \, \mathrm{d}x = 0$, d' où, puisque h est continue sur $[0,1], h = 0$.

(b) Soit f un élément de $\mathcal{S}$, posons pour tout $t \geq 0, h(t) = \int_0^t e^{-u} f(u)du$.

i. *Montrons que pour tout entier $k > 0$:*

$$\mathcal{L}(f)(1+k) = k\mathcal{L}\left(h\right)\left(k\right)$$

ii. Soit $x \in]0, +\infty[$ et $k > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(1+k) &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+k)t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) e^{-kt} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} h'(t) e^{-kt} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-kt} h(t)\right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} h(t) e^{-kt} \, \mathrm{d}t \\
&= k\mathcal{L}\left(h\right)\left(k\right)
\end{aligned}$$

car $\lim_{t\to+\infty} e^{-kt}h(t) = 0$ (h est bornée sur $]0, +\infty[$.)

iii. *supposons que pour tout entier $k > 0, \mathcal{L}(f)(1+k) = 0$.*

A. *Montrons que pour tout entier $k > 0$, l'intégrale $\int_0^1 u^k h\left(\ln u\right) du$ converge et il vaut 0.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}(f)(1+(k+1)) \\
&= (k+1) \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t} h(t)\mathrm{d}t \\
&\underset{u=e^{-t}}{=} (k+1) \int_0^1 u^k g\left(-\ln(u)\right) \mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\int_0^1 u^k h\left(-\ln(u)\right) \mathrm{d}u = 0}$$

B. *Déduisons que h est la fonction nulle :*

Soit g l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$g(u) = \begin{cases} h\left(-\ln(u)\right) & \text{si } u \in]0,1] \\ \int_0^{+\infty} e^{-v} f(v)\mathrm{d}v & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u = 0$ et d'après le théorème de Weierstrass g est nulle sur $[0,1]$ et donc h est nulle sur $]0,+\infty[$.

(c) *Montrerons l'injectivité de l'application $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{S}$.*
D'abord l'application $\mathcal{L}$ est lineaire donc il suffit de montrer que son noyau est réduit à zéro.
Soit $f \in \mathbf{Ker}(\mathcal{L})$ donc : $\mathcal{L}(f) = 0$ en particulier $\mathcal{L}(f)(1+k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme dans les questions précédentes $h = 0$ et donc $\forall t \geq 0, 0 = h'(t) = e^{-t} f(t)$, on conclut que $f = 0$ sur $[0,+\infty[$.

■

5.3 Transformé de FOURIER

Exo 5.3.1: Transformé de FOURIER

On considére l'ensemble suivante :

- $\mathcal{B}$ le $\mathcal{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathcal{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi,\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

1. **Étude de fonction :**

   (a) Soit $f \in \mathcal{B}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $f \in \mathcal{B}$.

      i. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

      ii. Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathcal{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$$

2. **Un exemple :**
   On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

   (a) justifier que $\theta \in \mathcal{B}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

   (b) Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.
   On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$.

3. **Formule d'inversion de Fourier :**
   Soit $f \in \mathcal{B}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) dt$$

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, d\xi$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} J_n$.

(c) Prouver que $\forall n \in \mathcal{N}^*,\ I_n = J_n$.
On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} d\xi \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} dt \right) d\xi$$

(d) Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, d\xi$.
En déduire, en utilisant la fonction $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

Solution of Exercise :

1. **Étude de fonction :**

(a) *Soit $f \in \mathcal{B}$. montrons que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur chaque intervalle $[-a, a]$ avec $a > 0$.
Soit donc $f \in \mathcal{B}$ et $a > 0$.

i. $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $[-a, a]$.
ii. $\forall x \in [-a, a],\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
iii. $\forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f)$ est continue sur chaque segment $[-a, a]$ et par conséquence continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) *Soit $f \in \mathcal{B}$.*

i. *Soit un entier naturel n, montrons que la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
ii. *Démontrons que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculons ses dérivées successives :*
On veut maintenant utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres sur tout segment $[-a, a]$ avec $a > 0$.
Soit $a > 0$:

A. $\forall n \in \mathcal{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a, a]$ de dérivée n-ième $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$.
B. $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ et $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
C. $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D. $\forall n \in \mathcal{N},\ \forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},$

$$|(-2i\pi)^n t^n f(t) e^{-2i\pi x t}| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f) \in C^\infty([-a, a])$ pour tout $a > 0$ et alors : $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathcal{R})$ avec :

$$\boxed{\forall n \in \mathcal{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi\xi t}\, dt}$$

2. **Un exemple :**

(a) *Montrons que $\theta \in \mathcal{B}$*

θ est continue et $\theta(x)$ est négligeable devant toute puissance de x au voisinage des infinis par croissances comparées. En particulier pour tout $n \in \mathcal{N}$, $x \mapsto x^n \theta(x)$ est continue et de limite finie (et même nulle) en $\pm\infty$ et donc bornée. Ainsi

$$\theta \in \mathcal{B}$$

Montrons que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

La question précédente donne la dérivabilité de $y = \mathcal{F}(\theta)$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi x t}\, dt$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi x y(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x) e^{-\pi t^2 - 2i\pi x t}\, dt$$

La fonction (de t) sous l'intégrale est la dérivée de $t \mapsto e^{-\pi t^2 - 2i\pi x t}$ dont la limite en $\pm\infty$ est nulle (son module vaut $\theta(t)$). L'intégrale est donc nulle et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi x y(x) = 0}$$

(b) *Déduisons que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.*

On résout cette équation différentielle linéaire d'ordre 1. Il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = c e^{-\pi x^2}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, on sait que $y(0) = 1$ et donc que $c = 1$. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-\pi x^2}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations de l'énoncé,

$$\boxed{\mathcal{F}(\theta) = \theta}$$

3. **Formule d'inversion :**

   (a) *Montrons que* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\ d\xi$.
   On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

   $$u_n\ :\ x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$$

   i. Pour tout n, u_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   ii. Comme θ est continue en 0, (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$ ($\theta(0) = 1$) et cette limite simple est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   iii. Pour tout n, $|u_n| \leq |\mathcal{F}(f)|$ ($|\theta|$ est majorée par 1) et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique et indique que

   $$\boxed{\lim_{n \mapsto +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\ dx}$$

   (b) *Calculons* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} J_n$.
   On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

   $$v_n\ :\ t \mapsto \mathcal{F}(\theta)(t) f\left(\frac{t}{n}\right) = \theta(t) f\left(\frac{t}{n}\right)$$

   i. Pour tout n, v_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   ii. Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$ et cette limite simple est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   iii. f étant dans $\mathcal{B}$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ ($f(t) = t^0 f(t)$).
   Pour tout n, $|v_n| \leq \|f\|_\infty \theta$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique et indique que

   $$\boxed{\lim_{n \mapsto +\infty} J_n = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\ dt = f(0)}$$

   (c) *Montrons que* $\forall n \in \mathcal{N}^*,\ I_n = J_n$.
   En revenant à la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a

   $$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \theta\left(\frac{x}{n}\right)\ dt \right)\ dx$$

La formule de Fubini donne alors

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \theta\left(\frac{x}{n}\right)\, dx \right)\, dt$$

Dans l'intégrale interne, on effectue le changement de variable linéaire $u = x/n$ pour obtenir

$$I_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2in\pi ut} \theta(u)\, du \right)\, dt$$

Dans l'intégrale extérieure, on effectue le changement de variable linéaire $v = nt$ pour obtenir

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-2i\pi ut} \theta(u)\, du \right)\, dt$$

$f(t/n)$ ne dépendant pas de u, on peut le sortir par linéarité du passage à l'intégrale. On reconnaît alors $\mathcal{F}(\theta)(u)$ et on conclut que

$$\boxed{I_n = J_n}$$

(d) *Démontrons que* $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, d\xi$.

Il suffit de combiner les trois questions qui précèdent et l'unicité de la limite pour conclure que

$$\boxed{f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, dx}$$

Déduisons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$. h est continue, comme f. De plus, pour $|t|$ assez grand,

$$t^n h(t) = \frac{t^n}{(x+t)^n} (x+t)^n f(x+t) \underset{t \mapsto \pm\infty}{\sim} (x+t)^n f(x+t)$$

ce qui montre que $t \mapsto t^n h(t)$ est bornée, comme f, aux voisinages des infinis et donc sur $\mathbb{R}$ (puisque continue et donc bornée sur tout segment). On peut alors appliquer ce qui précède à h et affirmer que

$$f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(y)\, dy$$

On remarque alors, avec le changement de variable affine $u = x + t$, que

$$\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-2i\pi ty} dt = e^{2i\pi yx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi uy} du = e^{2i\pi yx} \mathcal{F}(f)(y)$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)\, dy}$$

5.4 Exercices

Exo 5.4.1: Plus sur la fonction Gamma

Dans cette exercice la fonction Γ ici est le même dans les exemples précédents.
On rappelle que : pour $x \in \mathbb{R}$ $x_+ := \max(0, x)$ est la partie positive de x.

1. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

2. Soit $x > 0$, considérons la fonction :

$$f_x : s \in \mathbb{R} \mapsto \left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right)_+^x e^{-\sqrt{x}s}$$

Montrer que :

$$\Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\int_{-\infty}^{\infty} f_x(s)\, \mathrm{d}s$$

3. En déduire :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$$

On admet que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, \mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}$

Solution of Exercise :

1. Il suffit de faire une intégration par parties, soit $x > 0$ et soit $A > 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^A t^x e^{-t} dt \\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^A + x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= -A^x e^{-A} + x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

Par passage à la limite $A \to +\infty$ on déduit :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

2. Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\
&\underset{t=x+\sqrt{x}s}{=} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(x+\sqrt{x}s\right)^x e^{-(x+\sqrt{x}s)} \sqrt{x}\, \mathrm{d}s \\
&= x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}s}\, \mathrm{d}s \\
&= x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(s)\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(s)\, \mathrm{d}s}$$

3. Il suffit en fait de démontrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(s) ds = \sqrt{2\pi}$$

- Soit $s \in \mathbb{R}$ cherchons la limite de $x \mapsto f_x(s) = \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)_+^x e^{-\sqrt{x}s}$
Pour $x \geq |s|$ on a : $\left|\frac{s}{x}\right| \leq 1$ alors : $\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)_+ = \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)$
Puis :

$$\begin{aligned}
f_x(s) &= \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}s} \\
&= \exp\left[x \ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}s\right] \\
&= \exp\left[x\left(\frac{s}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{s^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \sqrt{x}s\right] \\
&= \exp\left[-\frac{s^2}{2} + o(1)\right] \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}$$

Cela montre que : $x \mapsto f_x(s) = \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)_+^x e^{-\sqrt{x}s}$ a une limite finie et il vaut : $e^{-\frac{s^2}{2}}$
- Pour tout $x > 0$: la fonction f_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Soit $(x,s) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ puisque $f_x(s)$ dépend d'est ce $s < -\sqrt{x}$ ou $s < -\sqrt{x}$, on va faire deux inégalité puis on fait la somme.

  (a) **cas :** $s < -\sqrt{x}$
  Dans ce cas $f_x(s) = 0 \leq 0$

  (b) **cas :** $s > -\sqrt{x}$

Il en découle de cela que : $x > s^2$ puis :

$$\begin{aligned} f_x(s) &= \exp\left[x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-\sqrt{x}s\right] \\ &\leq \exp\left[x\left(\frac{s}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{s^2}{x}\right)-\sqrt{x}s\right] \\ &\leq \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right] \\ &\leq e^{-\frac{s^2}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi on regroupons les deux cas :

$$0 \leq f_x(s) \leq e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Alors, on verifie bien l'hypothèse de domination.

Il en decoule de théorème d'inversion limite-intégrale **??** que :

$$\boxed{\lim_{x\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_x(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{x\mapsto\infty} f_x(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}}$$

Puis :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}$$

Exo 5.4.2: Extension de la fonction Gamma – *Extrait CNC'2007*

Considérons maintenant la même fonction Gamma mais dans le plan complexe (sous condition d'intégrabilité) :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

1. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?
2. On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}$ et $\Re(z) > 0$.
   (a) Soit z un complexe tel que $\Re(z) > 0$; montrer que
   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$
   (b) En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité
   $$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\ldots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$

(c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

(d) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

3. (a) Soit z un complexe tel que $\Re(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt.$$

(b) Montrer que la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est définie sur la partie $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

4. Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

(a) Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t.

(b) Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

(c) En déduire que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

(d) Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.

Solution of Exercise :

1. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $t > 0$, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par l'exercice précédente l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\Re(z) > 0$.

2. Quelques formules utiles :

(a) Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ : \Re(z) > 0 \quad : \left| e^{-t}t^z \right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \underset{t \to +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc on peut appliquer l'intégration par parties à l'intégrale : $\int\limits_0^{+\infty} t^z e^{-z-1} dt$, Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int\limits_0^{+\infty} t^z e^{-z-1} dt \\
&= \left[-e^{-t}t^z \right]_{t=0}^{+\infty} + z \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Ce qui montre la formule :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad : \Re(z) > 0 \quad : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+p) &= \Gamma((z+p-1)+1) \\
&= (z+p-1)\Gamma(z+p-1) \\
&= (z+p-1)(z+p-2)\Gamma(z+p-2) \\
&= \prod_{k=1}^{p}(z+p-k)\Gamma(z)
\end{aligned}$$

et par suite :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad : \Re(z) > 0 \quad : \Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p}(z+p-k)\Gamma(z)$$

On prend $z = \alpha + 1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha+1) = \Re(\alpha) + 1 > 0$ et par suite

$$\begin{aligned}
\Gamma((\alpha+1)+p) &= \prod_{k=1}^{p}((\alpha+1)+p-k)\Gamma(\alpha+1) \\
&= \prod_{k=1}^{p}(\alpha+k)\Gamma(\alpha+1) \\
\Gamma((\alpha+1)+p) &= (\alpha+p)(\alpha+p-1)\cdots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.

(d) Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par $b)$ pour $\alpha = 0$, $p = n$, on a ::

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

3. Développement en série de Γ.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, Écrivons $e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}t^n$, on a alors :

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$$

Et par conséquence :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}\right)\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{(-1)^0}{0!} t^{z+0-1} + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}\right)\,dt
\end{aligned}$$

Nous cherchons à inverser somme-intégrale, pour ce faire nous allons utiliser théorème d'intégration terme à terme 4.2 :

- pour tout entier, $n \geq 1$ la fonction $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ est continue par morceaux sur $I =]0, 1[$.
- $\sum_n f_n$ Converge simplement sur I, (série exponentielle classique)
- On $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \Re(z) + n - 1 \geq 0$:

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n!}|t^{z+n-1}| = \frac{1}{n!}|t^{\Re(z)+n-1}| \leq \frac{1}{n!} \quad \forall t \in I$$

Étant les conditions vérifiés, nous pouvons conclure :

- La série $\sum_n \int_0^1 f_n(t)dt$ converge
- La formule d'inversion est valide, ce qui permet de continuer le calcul :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{(-1)^0}{0!} t^{z+0-1} + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}\,dt\right) \\
&= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{(-1)^0}{0!} t^{z+0-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}\,dt\right) \\
&= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}\,dt\right) \\
\Gamma(z) &= \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}
\end{aligned}$$

On conclut donc :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ : \Re(z) > 0, \quad \Gamma(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}}$$

(b) Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|n + \Re(z)| \leq |n + z|$, Donc : $\left|\frac{1}{n+z}\right| \leq \left|\frac{1}{n+\Re(z)}\right|$ D'où :

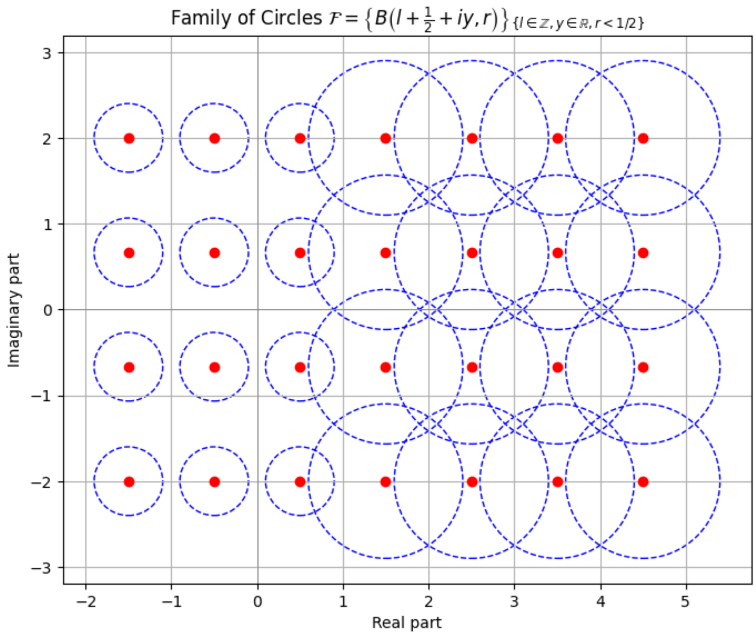
$$|f_n(z)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+\Re(z)|}$$

donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Montrons maintenant la continuité : On peut constaté aisément que la continuité n'est pas satisfait sur tout l'ouvert :$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Donc nous exploitons le fait que la continuité est une propriété local pour restreint l'étude sur une famille des compacts $B(a, r)$ que leur réunion égale l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Pour notre cas nous cherchons une famille qui évite les valeurs de $\mathbb{Z}^-$, un choix possible est :

$$\mathcal{F} = \left\{ B\left(l + \frac{1}{2} + iy, r + \frac{\mathbb{1}_{l>0}}{2}\right) \right\}_{\{l\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{R}, r<1/2\}}$$

Nous expliquons ce choix par le fait qu'on prend des cercle des centres en $-1.5, -2.5....$ et des rayons $r < \frac{1}{2}$ pour ne pas *toucher* les valeurs $-1, -2...$, cependant pour les centres $1.5, 2.5, ...$ on veut toucher les valeurs $1, 2...$ donc nous augmentons le rayon à 1, voir ce figure illustrative :



Soit : $l \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}, r < 1/2$, et soit le compact $K = B\left(\frac{1}{2} + iy, r\right)$ nous pourrons vérifier aisément :

i. La fonction f est bien définie sur $B\left(\frac{1}{2} + iy, r\right)$.

ii. Les fonctions f_n sont continues sur $B\left(\frac{1}{2} + iy, r\right)$.

iii. $\forall z \in B\left(\frac{1}{2} + iy, r\right) \quad : |n + z| > |n + \Re(z)| = |n + \frac{1}{2} + l + r + \frac{\mathbb{1}_{l\geq 0}}{2}| \Longrightarrow$

$\frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{|n+\frac{1}{2}+l+r+\frac{\mathbb{1}_{l>0}}{2}|}$ (car $n+l+1/2$ ne s'annule pas). et donc :

$$||f_n||_{+\infty}^K \leq \frac{1}{|n+\frac{1}{2}+l+r+\frac{\mathbb{1}_{l>0}}{2}|} \times \frac{1}{n!}$$

Ce qui montre la convergence en norme car : $\sum \frac{1}{|n+l+1/2|} \times \frac{1}{n!}$ converge donc : la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La fonction f est continue sur K pour tout $K \in \mathcal{F}$, et par conséquence f continue en $\bigcup_{K\in\mathcal{F}} K = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

(a) Si $t \in]0,1]$, , alors $\ln(t) \leq 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$. Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1} et$ par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$. Donc : Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{Si} t \in]0,1] \\ t^{b-1} & \text{Si} t > 1 \end{cases}$$

(b) Évidement on voit que : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{Si} \ : \ t \in]0,1] \\ t^{b-1} & \text{Si} \ : \ t > 1 \end{cases} \leq t^{a-1} + t^{b-1}.$$

(c) C'est déjà fait dans la parti d'étude de la fonction gamma : 5.1.3, nous concluons aisément que pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.}$$

(d) On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

■

CHAPITRE 6

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Prérequis

- Les séries entières.

Objectifs

- Savoir résoudre une équation différentielle ordinaire

Sommaire

Les équations différentielles ordinaires (EDO) consistent en des relations mathématiques entre une fonction inconnue et ses dérivées. Elles se présentent sous la forme générale $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, où $y = f(x)$ est la fonction inconnue, et leurs solutions dépendent de conditions initiales et de la nature de l'équation. Ce chapitre explore les EDO à travers leurs classifications, les méthodes de résolution et les théorèmes d'existence et d'unicité, offrant ainsi une analyse des propriétés fondamentales de ces équations.

Une équation différentielle Ordinaire est une équation du type $y' = f(t, y)$ où f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (U est appelé le domaine de l'équation différentielle). Une solution de cette équation différentielle est une fonction y, définie et dérivable sur un intervalle I, et telle que, pour tout t de $I, (t, y(t))$ est dans U, et $y'(t) = f(t, y(t))$.
Une équation différentielle de la forme précédente s'appelle une équation différentielle du premier ordre. On rencontre aussi souvent des équations du deuxième ordre, du type $y'' = f(t, y, y')$. Plus généralement, une équation différentielle d'ordre m est une équation du type $y^{(m)} = f\left(t, y', \ldots, y^{(m-1)}\right)$.

6.1 Problème de Cauchy

Il y a en général plusieurs solutions à une équation différentielle. Pour espérer caractériser une solution, il faut ajouter une condition initiale qui décrit le système à un instant initial.

Definition 6.1.1: Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et (t_0, y_0) un point de U. On appelle **problème de Cauchy** en (t_0, y_0) la recherche d'une solution à l'équation différentielle, sous les hypothèses supplémentaires que y est définie sur un intervalle contenant t_0 et que $y(t_0) = y_0$.

Lorsqu'on a une équation différentielle du second ordre, le problème de Cauchy correspond à la recherche d'une solution avec $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, et ainsi de suite si l'ordre est m.
Une solution d'une équation différentielle est maximale si elle n'est la restriction d'aucune autre solution. Sous ces hypothèses, on a le théorème d'existence et d'unicité des solutions suivant :

Theorem 6.1.2: Condition de Cauchy-Lipschitz

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

avec f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Si (t_0, y_0) est un point de U, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Cette solution est définie sur un intervalle ouvert contenant t_0. En outre, toute autre solution à ce même problème de Cauchy est restriction de la solution maximale.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est localement lipschitzienne en la seconde variable. C'est souvent ce que l'on rencontre dans la pratique, et le théorème de Cauchy-Lipschitz est alors applicable.

Corollary 6.1.3: Cas pratique :

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

avec f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la seconde variable. Si (t_0, y_0) est un point de U, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

6.1.1 Des méthodes Générales pour les EDO d'ordre 1

Method : Séparabilité de l'équation

Si on peut écrire : $y' = \alpha(t)\beta(y)$, Alors sous la condition que β ne s'annule pas on peut faire ce calcul :

$$\begin{aligned} y' &= \alpha(t)\beta(y) \\ y'\frac{1}{\beta(y)} &= \alpha(t) \\ B(y)' &= A'(t) \end{aligned}$$

Avec B primitive de : $t \mapsto \frac{1}{\beta(t)}$ et A primitive de : $t \mapsto \alpha(t)$.
Et puis déduire que :

$$B(y) = A(t) + C$$

Et si B est bijective alors :

$$y(t) = B^{-1}\left[A(t) + c\right]$$

Cette méthode est certainement puissante, mais c'est très rare qu'on peut retrouver tout ces conditions vérifiés. Toujours fait attention dans votre application. ■

Example :

Résoudre : $y'(t) = e^{t+y(t)} \quad t \in \mathbb{R}$

Solution :

On peut remarquer que : $y'(t) = e^t e^{y(t)}$, Alors comme l'exponentielle est une fonction qui ne s'annule pas on peut déduire :

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t e^{y(t)} \\ y'(t)e^{-y(t)} &= e^t \\ (-e^{-y(t)})' &= (e^t)' \end{aligned}$$

Et puis déduire que :

$$e^{-y(t)} = -e^t + C$$
$$y(t) = -\ln\left(c - e^t\right)$$

Ainsi, on remarque que $t \in]-\infty, \ln(c)[$. alors $c > 0$, et il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. On conclut finalement :

$$\boxed{\text{Solution} = \left\{ t \in]-\infty, \ln(c)[\mapsto -\ln\left(c - e^t\right) \middle| c \in \mathbb{R}^+ \right\}}$$

Si nous avons : $y(t_0) = y_0$ donc le choix de c est la suivante :

$$-\ln\left(c - e^{t_0}\right) = y_0 \iff c = e^{-y_0} + e^{t_0} \geq 0$$

Et l'intervalle de définition est : $]-\infty, t_0 - y_0[$.
On doit pas oublié que notre raisonnement était analyse synthèse, donc il faut vérifier que c'est bien une solution (à faire par vous même).

6.2 Les équation Linéaires

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2** définie sur I toute équation de la forme

$$y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t)$$

avec a_0, a_1 et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction inconnue 2 fois dérivable sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** définie sur I toute équation de la forme

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) + b(t)$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction inconnue n fois dérivable sur I.
Résoudre l'équation différentielle, c'est déterminer les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ dérivables (selon l'ordre étudié) qui satisfont l'équation précédente.
Lorsque b est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogène.

6.2.1 Méthodes de résolution

Pour les EDO d'ordre 1

Les EDO linéaires d'ordre 1 sont les plus facile à traiter puisqu'on dispose d'une méthode générale qui passe par tout :

Method : Solution Générale
Soit l'ODE :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad t \in I$$

Si on pose A une primitive de a, alors :

$$(y(t)e^{A(t)})' = b(t)e^{A(t)}$$

On il suffit de calculer la primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$, si on note cette primitive B alors la solution est :

$$y(t) = e^{-A(t)}(B(t) + c)$$

La difficulté est généralement dans le calcul de la primitive B, on peut parfois essayer de simplifier les coefficients avec un changement de variable ou de la fonction (cf. section 6.2.1) .

Example :
Résoudre : $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = \cos t \quad t \in \mathbb{R}_+^*$
Solution :
On a $t \mapsto \ln(t)$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$, alors :

$$(y(t)e^{\ln(t)})' = \cos(t)e^{\ln(t)}$$

On il suffit de prendre une primitive de $t \mapsto \cos(t)e^{\ln(t)} = t\cos(t)$, par exemple : $t \mapsto t\sin t + \cos t$ ainsi on déduit ($c \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} ty(t) &= t\sin t + \cos t + c \\ y(t) &= \sin t + \frac{1}{t}\cos t + \frac{1}{t}c \end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\text{Solution} = \left\{ t \mapsto \sin t + \frac{1}{t}\cos t + \frac{1}{t}c \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}}$$

Pour les EDO d'ordre 2

Soit une EDO d'ordre 2 :

$$(E): \quad y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t)$$

Généralement, on le résoudre en deux étapes :

- **Solution Homogène :** On trouve les solutions homogènes de l'équation homogène :

$$(E_h): \quad y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)$$

- **Solution Particulière :** On cherche *au moins une* solution particulière y_p vérifiant l'ODE (E) :

$$(E): \quad y_p''(t) = a_1(t)y_p'(t) + a_0(t)y_p(t) + b(t)$$

- **Superposition des solutions :** On déduit que :

$$\text{Solution E} = \{y_p + y_h | y_h \in \text{Solution E}_\text{h}\}$$

Nous devrons donc savoir comment résoudre les EDO homogènes et comment trouver les solutions particulière
En effet, il y'a pas de méthode générale de résolution ODE, on donnera juste la résolution dans le cas des coefficient constante et le cas où les coefficients sont assez simple que peut faire un développement en série entière :

Method : Équation aux coefficients constantes
On suppose qu'on a une équation homogène

$$y'' = ay' + by$$

à coefficients constants. On introduit l'équation caractéristique

$$r^2 = ar + b$$

1. **Résolution sur $\mathbb{C}$:**
   (a) **Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes** r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions :
   $$x \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$
   (b) **Si l'équation caractéristique admet une racine double** r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions :
   $$x \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$
2. **Résolution sur $\mathbb{R}$:**
   (a) **Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes**

r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) **Si l'équation caractéristique admet une racine double** r, alors les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(c) **Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées** $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Example :

L'équation différentielle $z''(u) + z(u) = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Sa solution générale peut être trouvée en résolvant l'équation caractéristique associée.

1. **Formulation de l'équation caractéristique :** L'équation caractéristique associée est :
$$r^2 + 1 = 0$$
Cela donne :
$$r^2 = -1$$
Les solutions de cette équation sont :
$$r = i \quad \text{et} \quad r = -i$$

2. **Solutions de l'équation :** Les racines complexes $r = i$ et $r = -i$ nous permettent de formuler la solution générale. Par le théorème d'Euler, nous savons que les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :
$$z(u) = C_1 \cos(u) + C_2 \sin(u)$$
où C_1 et C_2 sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

3. **Conclusion :** La solution générale de l'équation $z''(u) + z(u) = 0$ est donc :
$$\boxed{z(u) = C_1 \cos(u) + C_2 \sin(u)}$$

Method : Recherche d'une solution développable en série entière

Là on suppose que l'ODE admet une solution Développable en Série Entière avec un rcv non nulle :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$$

Et on cherche la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'ODE directement :

$$(E): \quad y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t)$$

Cette méthode est généralement utilisé lorsque les coefficients sont des puissances de t (ou même des polynômes). Sinon, on aurait besoin de multiplier deux série entière ce qui peux engendré des calculs complexes (même c'est pas impossible).

Example :
Résoudre : $4ty''(t) + 2y'(t) - y = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+^*$
Solution :

On suppose qu'il existe une solution sous la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, avec un rcv non nul. Ainsi, les dérivées de y sont :

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1},$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}.$$

En remplaçant dans l'équation $4ty'' + 2y' - y = 0$, nous avons :

$$4t\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

En simplifiant chaque terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 4a_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

Regroupement des puissances de t nous donne :

$$(2a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 4a_{n+1}(n+1)nt^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n+1}(n+1)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

On obtient une relation de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Pour les conditions initiales, si $a_0 = 0$, alors la solution est triviale $y(t) = 0$.
Sinon, on a :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

Donc, on trouve la série entière de rcv infinie suivante :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}^{2n}}{(2n)!} = a_0 \cosh(\sqrt{t})$$

Il est facile de vérifier que cette série est effectivement une solution.
Cependant, nous n'avons pas encore répondu à la question complète, qui est de trouver l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$; nous avons uniquement déterminé les solutions développables en séries entières. Heureusement, nous savons que l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ constitue un espace vectoriel de dimension 2, dont nous avons trouvé une base partielle, $t \mapsto \cosh(\sqrt{t})$. Il nous reste à identifier une seconde base.

En général, on utilise les mêmes méthodes pour rechercher une solution particulière, comme la variation de la constante ou l'essai de solutions de structure similaire. Dans ce cas, puisque nous avons déjà trouvé une solution de forme hyperbolique, cosh, il est naturel de tester si sinh pourrait également être une solution.
Essayons la fonction : $t \mapsto \sinh(\sqrt{t})$, en effet :

$$\begin{cases} y'(t) & = \cosh(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\cosh(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}. \\ y''(t) & = \frac{-\cosh(\sqrt{t})}{4t^{3/2}} + \frac{\sinh(\sqrt{t})}{4t}. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Terme} &= 4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) \\ &= 4t\left(\frac{-\cosh(\sqrt{t})}{4t^{3/2}} + \frac{\sinh(\sqrt{t})}{4t}\right) + 2\left(\cosh(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) - \sinh(\sqrt{t}) \\ &= \left(\frac{-\cosh(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} + \sinh(\sqrt{t})\right) + \left(\cosh(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \sinh(\sqrt{t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\cosh(\sqrt{t}) + \sinh(\sqrt{t})\sqrt{t} + \cosh(\sqrt{t}) - \sqrt{t}\sinh(\sqrt{t})\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $t \mapsto \sinh(\sqrt{t})$ est clairement une solution, donc on conclut que :

$$\boxed{\text{Solution E} = \left\{ a_0 \cosh(\sqrt{t}) + a_1 \sinh(\sqrt{t}) \,\middle|\, a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Pour la recherche des solutions particulières , généralement on a deux méthodes :

- *Essayer des fonctions usuelles de même structure.*
- *Variation de la constante*

Method : Essaie des fonctions usuelles de même structure
Il est parfois pertinent d'explorer des fonctions de structures similaires pour résoudre certaines équations différentielles. Par exemple, si l'on identifie une fonction $b(t)$ de la

forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ (cas général), il est judicieux de tester une solution particulière de même type. Pour plus de détails, vous pouvez consulter ce lien :

https://cours.jufont.net/Fontanet/EDO1/co/module_EDO_28.html.

De même, lorsqu'on détermine une dimension de l'espace des solutions et que l'on souhaite en identifier une seconde, on peut appliquer cette logique en recherchant une solution de structure analogue. Par exemple, les fonctions trigonométriques et hyperboliques partagent des structures similaires.

Sinon on utilise la méthode de la variation de la constante :

Method : Variation de la constante

Puisque l'espace des solutions de l'équation homogène (E_h) est de dimension 2, on peut l'écrire sous la forme :

$$\text{Solution } \mathrm{E_h} = \{\lambda_1 \times y_1(t) + \lambda_2 \times y_2(t)\}$$

L'idée de la méthode de variation de la constante est de prendre la solution particulière sous la forme :

$$y_p(t) = \lambda_1(t) \times y_1(t) + \lambda_2(t) \times y_2(t)$$

Et on remplace dans l'équation (E) ce qui donne le système : La méthode de variation des constantes s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) = b(t) \end{cases}$$

Cela permettre Généralement de trouver un système des EDO d'ordre 1 très simples.

Example :

Résoudre : $y''(t) + y(t) = \frac{1}{\tan(t)} \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Solution :

On sait déjà, d'après l'exemple 6.2.1, que la solution homogène s'écrit sous forme :

$$y_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

Pour chercher une solution particulier nous considérons la forme :

$$y_p(t) = C_1(t) \cos(t) + C_2(t) \sin(t)$$

Donc, après un simple remplacement :

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos(t) + C_2'(t) \sin(t) = 0 \\ C_1'(t) \cos'(t) + C_2'(t) \sin'(t) = \frac{1}{\tan(t)} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(t) + C_2'(t)\sin(t) = 0 \\ -C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = \frac{1}{\tan(t)} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} C_2'(t) & = \frac{\cos(t)}{\tan(t)} = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \\ C_1'(t) & = -\frac{\sin(t)}{\tan(t)} = -\cos(t) \end{cases}$$

Comme $\ln|\tan(t/2)| + \cos(t)$ est une primitive de $\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}$ alors :

$$\begin{cases} C_2(t) & = \ln(\tan(t/2)) + \cos(t) \\ C_1(t) & = \sin(t) \end{cases}$$

Ce qui donne finalement,

$$\boxed{\text{Solution E} = \left\{ t \mapsto C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \ln(\tan(t/2))\sin(t) \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Méthodes de simplification des EDO

Method : Changement de la fonction Inconnue

Cette méthode consiste à changer la fonction y en une autre z avec $z(t) = h(t)y(t)$. On obtient les dérivés comme suit :

$$\begin{cases} (y(t)h(t))' & = y(t)\cdot h'(t) + y'(t)\cdot h(t) \\ (y(t)h(t))'' & = y(t)\cdot h''(t) + 2y'(t)\cdot h'(t) + y''(t)\cdot h(t) \end{cases}$$

- Lorsqu'on remplace, il est souvent, avec un choix adéquate de h, que les coefficients se simplifient en des coefficients constante.
- Généralement la fonction h est donnée par l'exercice il faut juste maîtriser l'application.

Example :

Résoudre : $ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0 \quad t \in]0, \infty[$

Solution :

En posant $z(t) = ty(t)$, commençons par exprimer $z(t)$ et ses dérivées en termes de $y(t)$.

On a :

$$\begin{cases} z'(t) & = ty'(t) + y(t) \\ z''(t) & = ty''(t) + 2y\prime(t) \end{cases}$$

On trouve alors facilement que :

$$z''(t) + z(t) = 0$$

Cette équation est déjà résolution dans l'exemple 6.2.1, sa solution s'écrit sous forme :

$$z(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

Et donc :

$$y(t) = \frac{C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)}{t}$$

On conclut finalement, la solution générale de l'équation :

$$\boxed{\text{Solution E} = \left\{ t \mapsto \frac{C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)}{t} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Method : Changement de la variable

Il se peut qu'il soit nécessaire de changer la variable, on pose alors $t = \varphi(u)$. et $z(u) = y(\varphi(u))$ Et on cherche à reformuler l'équation en une autre plus simple. Avec ce changement on obtient :

$$\begin{cases} z'(u) & = \varphi'(u) \times y'(t) \\ z''(u) & = \varphi''(u) \times y'(t) + \varphi'(u)^2 \times y''(t) \end{cases}$$

- Lorsqu'on remplace, il est souvent, avec un choix adéquate, que les coefficients se simplifient en des coefficients constante.
- Généralement le changement de variable est donnée par l'exercice il faut juste maîtriser l'application rigoureuse de changement.
- On donne des changements célèbres qui peuvent marcher dans qlq exercices :

$$\begin{cases} \varphi(u) & = A^{-1}(u) \quad \textit{Avec : A Primitive de } a_1 \\ \varphi(u) & = B^{-1}(u) \quad \textit{Avec : B Primitive de } \sqrt{a_0} \end{cases}$$

Example :

Résoudre : $y''(t) + \frac{2t}{(1+t^2)} y'(t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} y(t) = 0 \quad t \in]0, \infty[$

Solution :

Puisque les coefficients ne sont pas constants, il n'existe pas de méthode générale applicable. Bien que le développement en séries entières soit une possibilité, il semble difficile, notamment parce que les coefficients eux-mêmes ont des développements en séries entières complexes.

Nous optons alors pour un changement de variable. Parmi les choix les plus célèbres, nous considérons les suivants :

- Pour $a_1(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, la primitive est : $t \mapsto \ln(1 + t^2)$. Ainsi, nous avons : $t = \varphi_{choix\ 1}(u) = \sqrt{e^u - 1}$, ce qui semble compliquer les calculs.
- Pour $a_0(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, la primitive de $\sqrt{a_0}$ est : $t \mapsto \arctan(t)$. Nous définissons alors : $t = \varphi_{choix\ 2}(u) = \tan(u)$, ce qui est simple et semble convenir. Nous allons

l'utiliser.

Nous posons $t = \tan(u)$ et $z(u) = y(\tan(u))$. Avec ce changement de variable, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} z'(u) &= \tan'(u) \times y'(t) \\ &= (1+\tan^2(u))y'(t) \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} z''(u) &= \tan''(u) \times y'(t) + \tan'(u)^2 \times y''(t) \\ &= (1+\tan^2(u))\tan(u) \times y'(t) + (1+\tan^2(u))^2 \times y''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant, nous trouvons :

$$\begin{aligned} y''(t) + \frac{2\tan(u)}{1+\tan^2(u)}y'(t) + \frac{1}{(1+\tan^2(u))^2}y(t) &= 0 \\ (1+\tan^2(u))^2y''(t) + 2\tan(u)(1+\tan^2(u))y'(t) + y(t) &= 0 \\ z''(u) + z(u) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation résultante est linéaire avec des coefficients constants, ce qui permet de résoudre la solution sans difficulté.

$$z''(u) + z(u) = 0 \quad u \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

En effet c'est déjà résolut dans l'exemple 6.2.1. La solution générale est :

$$z(u) = C_1\cos(u) + C_2\sin(u)$$

Et donc, comme $u = \arctan(t)$ on déduit :

$$y(t) = z(\arctan(t)) = C_1\cos(\arctan(t)) + C_2\sin(\arctan(t))$$

Ce qui donne l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\text{Solution} = \left\{t \mapsto C_1\cos(\arctan(t)) + C_2\sin(\arctan(t)) \middle| C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}}$$

6.2.2 Problème de raccordement

Parfois on se retrouve dans des cas où la dérivé d'ordre supérieur dispose d'un coefficient non unitaire et qui s'annule en une point t_0 (S'il ne s'annule pas, on peut diviser par ce coefficient pour s'en débarrasser et ainsi revenir au cas normal). Càd :

$$\begin{cases} (E_1) : & \alpha(t)y' + a(t) = b(t) \\ (E_2) : & a_2(t)y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t) \end{cases}$$

Une telle cas s'appelle un problème de raccordement, la résolution de cette problème se fait en trois étapes :

- On divise l'intervalle I en des petits intervalles I_1, I_2 de telle façon que ce coefficient ne s'annule pas avec : $I = I_1 \cap \{t_0\} \cap I_2$.
- On résoudre les EDO sur chaque intervalle, on trouve par exemple une fonction de t et des constantes :
$$\begin{cases} y_1(t) & = f(t, ctes_1) \ Si : t \in I_1 \\ y_1(t) & = f(t, ctes_2) \ Si : t \in I_2 \end{cases}$$
- On utilise la condition de continuité et la dérivabilité au point t_0 pour déduire une relation entre les deux constantes.

Example :
Résoudre : $4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$
Solution :

1. On peut constater ici que t s'annule dans $\mathbb{R}$ donc il faut divise l'intervalle en $\mathbb{R} = \mathbb{R}^*_- \cap \{0\} \cap \mathbb{R}^*_+$. Et on considère deux EDOs :
$$\begin{cases} (E_+) & : 4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}^*_+ \\ (E_-) & : 4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}^*_- \end{cases}$$
2. Puis on résoudre l'équation dans chaque intervalle.
   - **Résolution dans $\mathbb{R}^*_+$:** Déjà fait, l'ensemble des solutions est :
   $$\text{Solution E}_+ = \left\{ a_0 \cosh(\sqrt{t}) + a_1 \sinh(\sqrt{t}) \middle| a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$$
   - **Résolution dans $\mathbb{R}^*_-$:** Laissé exercice pour le lecteur, l'ensemble des solutions est :
   $$\text{Solution E}_- = \left\{ b_0 \cosh(\sqrt{-t}) + b_1 \sinh(\sqrt{-t}) \middle| b_0, b_1 \in \mathbb{R} \right\}$$
3. Maintenant il faut utiliser les conditions de la continuité/dérivabilité au point 0.
   - **Continuité :**
   $$a_0 = \lim_{t \to 0^+} a_0 \cosh(\sqrt{t}) + a_1 \sinh(\sqrt{t}) = \lim_{t \to 0^-} b_0 \cosh(\sqrt{-t}) + b_1 \sinh(\sqrt{-t}) = b_0$$
   Donc : $b_0 = a_0$
   - **Dérivabilité ordre 1 :** La fonction $t \mapsto \cosh(\sqrt{t})$ (resp. $t \mapsto \cosh(\sqrt{-t})$) est dérivable en 0^+ (resp. 0^-)
   La fonction $t \mapsto \sinh(\sqrt{t})$ (resp. $t \mapsto \sinh(\sqrt{-t})$) n'est pas dérivable en 0^+ (resp. 0^-)
   (essaie d'étudier la limite : $\lim_{t \to 0^+} \frac{\sinh(\sqrt{t})}{t}$ Donc $a_1 = 0$ (resp. $b_1 = 0$).

- **Continuité de la dérivé d'ordre 1 :**

$$\frac{1}{2}a_0 = \lim_{t\to 0^+} a_0 \frac{\sinh(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^-} -b_0 \frac{\sinh(\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}} = -\frac{1}{2}b_0$$

  Donc : $b_0 = -a_0$. Cela montre que $a_0 = b_0 = 0$

4. Conclusion : On conclut finalement, que seul la fonction nulle qui est solution de l'EDO dans $\mathbb{R}$ tout entière.

6.3 Exercices

Exo 6.3.1: Une famille des EDO – *Extrait de CNC'2007*

Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}^+,\quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{F_λ}$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

On rappelle la fonction Gamma, notée $\Gamma(n)$, est une généralisation de la fonction factorielle pour les nombres réels et complexes. Elle est définie pour tout nombre réel $x > 0$ par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Pour les entiers naturels, la relation entre la fonction Gamma et les factorielles est donnée par :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ou dans le cas générale :

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)\quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*$$

1. On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2,\quad \Big((\alpha+1)^2 - \lambda^2\Big)a_1 = 0,\quad \text{et}\quad \forall\, n \geq 2,\ \Big((\alpha+n)^2 - \lambda^2\Big)a_n = a_{n-2}.$$

2. On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.
   (a) Montrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

   (b) Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

(c) Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall\, x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

3. On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

(a) En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

(b) Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

Solution of Exercise :

Soit $\lambda > 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, Et considérons la série entière :

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

1. On a : $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation (F_λ).

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, R[$ (produit de fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$).

Par un calcul simple :

$$\begin{cases} y_\alpha'(x) & = \alpha x^{\alpha-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha+n) a_n x^{\alpha+n-1} \\ y_\alpha''(x) & = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n-1) a_n x^{\alpha+n-2} \end{cases}$$

Si y_α est solution sur $]0, R[$ de (F_λ), Donc pour tout $x \in]0, R[$ on a es équivalence suivantes :

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

$$-(x^2+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)^2-\lambda^2\Big)a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{\alpha+n} = 0$$

$$[\text{comme } : x^\alpha \neq 0.] \quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)^2-\lambda^2\Big)a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n} = 0,$$

On fait tendre x vers $0^{+,}$ obtenir $\alpha^2-\lambda^2=0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1 = 0$ et on obtient finalement une relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2 : \quad ((\alpha+n)^2-\lambda^2)a_n = a_{n-2} \tag{1}$$

2. $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0, R[$ de (F_λ) .

   (a) On a : $y_\lambda(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} = x^\lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On d'après (1) on a : pour tout $n \geq 2$

   $$((\lambda+n)^2-\lambda^2)a_n = a_{n-2} \tag{2}$$

   Puisque : $(\lambda+1)^2-\lambda^2 \neq 0$, on a $a_1 = 0$ et par la relation (2), on a : $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ .et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

   $$a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2-\lambda^2}a_{2(p-1)}$$

   On peut donc déduire facilement que :

   $$\begin{aligned} a_{2p} &= a_0 \times \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} \\ &= a_0 \times \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{4k(k+\lambda)} \\ &= a_0\frac{1}{4^p p!}\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda+k} \\ &= a_0\frac{1}{4^p p!}\prod_{k=1}^{p}\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+k+1)} \quad [Car : \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)] \\ &= a_0\frac{1}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}. \end{aligned}$$

   En conclusion :

   $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}}$$

(b) Pour $x > 0$, Appliquons la règle de D'Alembert 2.1.1, on a :

$$\left|\frac{a_{2p}x^{2p}}{a_{2(p-1)}x^{2(p-1)}}\right| = \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}}x^2 = \frac{1}{(\lambda+2p)^2+\lambda^2}x^2 \underset{p\to+\infty}{\to} 0,$$

donc le rayon de convergence R est infini .

(c) On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$.
On a : $\forall x > 0$, :

$$\begin{aligned} y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}2^\lambda \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} \qquad [\mathit{Car} : a_0 2^\lambda\Gamma(\lambda+1) = 1.] \end{aligned}$$

Équivalent au voisinage de 0 :
D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc

$$y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$$

3. On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

(a) D'après la formule (1) et par un raisonnement analogique au question 2) et en exploitant l'extension de la fonction Gamma (cf. 5.4), on peut déduire aisément que la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ).

(b) Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) .

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.
Comme $y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(\dfrac{x}{2})^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}(\dfrac{x}{2})^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\to} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to0^+}{\to} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.
On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes .
(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : ($y_\lambda, y_{-\lambda}$) est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de

(F_λ) est de la forme :

$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad \textit{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

CHAPITRE 7

LES TECHNIQUES DE CALCUL DES INTÉGRALES ET DES SÉRIES

7.1 Techniques de base

7.1.1 Pour les intégrales

Les méthodes de base sont des techniques fondamentales pour résoudre des intégrales simples. Elles reposent sur des manipulations directes de l'intégrande pour simplifier le calcul.

Method : Addition
Utilisée lorsque l'intégrande est une somme de termes intégrables individuellement. Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}1$ telles que $\int_{]a,b[} f(x)dx$ et $\int_{]a,b[} g(x)dx$ convergent, alors la formule est :

$$\int_{]a,b[} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{]a,b[} f(x)\, dx + \int_{]a,b[} g(x)\, dx.$$

Example :
Calculons $\int (x^2 + 3x)\, dx$.
Solution :
En séparant les termes, on obtient

$$\int (x^2 + 3x)\, dx = \int x^2\, dx + \int 3x\, dx.$$

Chaque terme est ensuite intégré séparément :

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C,$$

où C est la constante d'intégration.

Method : Intégration par parties

Basée sur la formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, cette méthode est utile lorsque l'intégrande est le produit de deux fonctions dont l'une est facilement dérivable et l'autre intégrable. Soient $f, g\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}1$ telles que $\lim_{t\to a} f(t)g(t)$ et $\lim_{t\to b} f(t)g(t)$ existent. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ sont de même nature. Lorsqu'elles sont convergentes, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Example :

Calculons $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

Solution :

Choisissons les fonctions :

$$\begin{cases} u(x) & = x \\ v'(x) & = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) & = 1 \\ v(x) & = -e^{-x} \end{cases}$$

On vérifie aisément que :

- Ils s'agissent sont de classe $\mathcal{C}^1$,
- Les limites existent : $\lim_{x\to 0} u(x)v(x)dx = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} u(x)v(x)dx = 0$
- La convergence de $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx$

Donc on peut appliquer la formule,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\,dx.$$

On obtient finalement

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$$

Method : Changement de variable

Consiste à transformer l'intégrale avec une nouvelle variable pour simplifier l'intégrande. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,du$ sont de même nature et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,du$$

Example :

Calculons $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

Solution :

Posons, $x = \phi(u) = \sqrt{u}$, on a $\phi :]0,+\infty[\mapsto]0,+\infty[$ est une fonction bijective, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus on a : Donc, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ est celle de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} xe^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u}\,du$ et de plus :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u}\,du = 1$$

7.2 Méthode de Feynman

7.2.1 Application aux intégrales

La méthode de Feynman permet de simplifier le calcul d'intégrales complexes en introduisant un paramètre supplémentaire pour obtenir une formulation paramétrique.

Method : Méthode de Feynman pour les intégrales
Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(u)\,du$, on peut définir une fonction paramétrée comme suit :

$$F(x) = \int_a^b \varphi(u,x)\,du$$

L'objectif est ensuite d'étudier la fonction $F(x)$ en trouvant, par exemple, une équation différentielle ordinaire (EDO) dont elle est solution. En résolvant cette EDO, on obtient une expression pour $F(x)$, permettant ainsi de déduire une expression de l'intégrale initiale.
Les choix célèbres de la fonction $\varphi(u,x)$ sont :

- **Transformé de Laplace :** $\varphi(u,x) = f(x)e^{-xu}$
- **Transformé de Fourier :** $\varphi(u,x) = f(x)e^{-ixu}$
- **Dilatation de variable :** $\varphi(u,x) = f(x.u)$

Example : Intégrale de Gauss
Calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Solution :
Considérons,

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

La dérivée de $f(t)$ par rapport à t est [nous laissons la vérification des hypothèses pour le lecteur] :

$$f'(t) = \int_0^{\infty} \frac{-2te^{-t^2(1+x^2)}(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ce qui se simplifie en :

$$f'(t) = -2te^{-t^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Posons $u = tx$, ce qui donne $\mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}x$, où t est une constante. En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$f'(t) = -\frac{2te^{-t^2}}{t}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Nous savons que

$$I = \int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Par conséquent,

$$f'(t) = -2e^{-t^2}I$$

où I est une constante. Maintenant, en intégrant les deux côtés avec les bornes de 0 à ∞, on a :

$$\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty -2e^{-t^2}I\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t = -2I\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$f(\infty) - f(0) = -2I^2 \quad \text{(Équation (2))}$$

Calculons maintenant les valeurs limites de $f(t)$:

$$f(\infty) = \int_0^\infty \frac{e^{-\infty\cdot(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$f(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad [C\text{'}est\ un\ arctangente]$$

■

7.2.2 Application aux séries

Cette méthode peut également être étendue aux séries pour faciliter le calcul de certaines sommes en introduisant un paramètre supplémentaire.

Method : Méthode de Feynman pour les séries

Pour calculer une somme de la forme $\sum u_n$, on peut considérer une fonction paramétrée de la série :

$$F(x) = \sum u_n(x)$$

L'objectif est ensuite d'étudier la fonction $F(x)$, souvent en trouvant une série entière associée ou, si possible, une EDO. En résolvant cette équation, on peut alors obtenir une expression pour $F(x)$ et, par conséquent, pour la somme initiale.
Les choix célèbres de la série des fonctions $u_n(x)$ sont :

- **Série entière :** $u_n(x) = u_n z^n$
- **Séries de Fourier [Hors programme] :** $u_n(x) = u_n e^{inx}$

■

Vous trouverez plus des exemples dans la partie des exercices.

7.3 Méthode de AMD

C'est un truque qui consiste à changer une intégrale en une série ou une série en une intégrale à l'aide des théorèmes d'inversion *Intégrales - Somme.*

Method : Méthode de AMD

Cas des intégrales : Pour calculer un intégrale $\int_{]a,b[} f(u)du$ on essaie d'exprimer f en somme d'une série des fonctions $\sum f_n$ puis on utilise une formule d'inversion (**après avoir vérifier les conditions d'application**) pour déduire :

$$\int_{]a,b[} f(u)du = \sum \int_{]a,b[} f_n(u)du$$

De telle façons que la série résultant est plus facile à calculer.

Cas des séries : Analogiquement, et c'est le cas le plus pratique, on peut pour calculer une série $\sum_n u_n$ exprimer les termes u_n en une intégrale $\int_{]a,b[} f_n(u)du$ et puis on utilise une formule d'inversion (**après avoir vérifier les conditions d'application**) pour déduire :

$$\sum_n u_n = \int_{]a,b[} \left(\sum f_n(u)\right) du$$

On pourra penser à utiliser les remplacements suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \int_0^1 t^{n-1}\, dt \\
\frac{1}{\alpha n+\beta} &= \int_1^{\infty} t^{\alpha n+\beta-1}\, dt \\
\frac{1}{n^{\alpha}} &= \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-\alpha t}\, dt \\
n! &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\, dt
\end{aligned}$$

Exo 7.3.1

Calculer la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

Solution of Exercise :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. calculons pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0\ [2\pi]$, la somme :

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

Soit θ une telle réelle. L'idée consiste à transformer :

$$\frac{\cos(k\theta)}{n} \quad \textit{vers} \quad \int_0^1 x^{n-1}\cos(n\theta)\, dx$$

Et donc :

$$\sum \frac{\cos(k\theta)}{n} \quad \textit{vers} \quad \sum \int_0^1 x^{n-1}\cos(n\theta)\,dx$$

. Et si on peut inverser intégrale-somme (c'est ce qu'on va voir) on obtiendra :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{n} \quad \textit{vers} \quad \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\cos(n\theta)\,dx$$

Ainsi on sera obligé de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\cos(n\theta)$. Ce calcul est plus facile en utilisant les complexes. En effet :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\cos(n\theta) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{i\theta}\right) = \Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)$$

Pour la rédaction, on commencera par poser :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{i(n+1)\theta} = \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}$$

Cette série est bien définie sur $[0,1[$. On va appliquer le théorème de convergence terme à terme 4.2

1. pour tout entier, n la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{i(n+1)\theta}$ est continue par morceaux sur I.
2. $\sum_n f_n \xrightarrow{CVS \text{ sur } I} C$ avec C une fonction définie sur $[0,1[$ et continue par morceaux sur cet intervalle.
3. $\sum \int_0^1 |x^n e^{i(n+1)\theta}|\,dx = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge

Donc on peut par appliquer cette théorème!!!, nous essayons une autre théorème, la théorème de convergence dominé 4.2 :

1. pour tout entier, n la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0,1[$.
2. $\sum_n f_n \xrightarrow{CVS \text{ sur } [0,1[} C$ avec C une fonction définie sur $[0,1[$ et continue par morceaux sur cet intervalle.
3. On a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} x^n e^{i(n+1)\theta} = C(x)\left(1 - x^N e^{N\theta}\right)$$

Donc :

$$|S_N| \leq \left|C(x)1 + x^N e^{N\theta}\right| \leq |C(x)||1 + x^N e^{N\theta}| \leq |C(x)|\left(|1| + |x^N e^{N\theta}|\right) \leq 2|C(x)|$$

Il existe donc une fonction ϕ (à savoir $= 2|C(x)|$) continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$ tq :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|\sum_{k=0}^{N} f_n(x)\right| = |S_N| \leq \phi(x)\ \forall x \in I$$

On a le résultat suivant :

- C et f_n sont intégrables sur $[0,1[$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La série $\sum_n \int_0^1 f_n(x)dx$ converge et La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = C(x) \tag{7.3.1}$$

Nous avons aboutit à notre objective :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} &= \Re \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \right) \\
&= \Re \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{n-1} e^{in\theta} dx \right) \\
&= \Re \left(\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{in\theta} dx \right) \quad \textit{Par inversion} \\
&= \Re \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} dx \right) \quad \textit{Déjà calculé.} \\
&= -\ln \left\{ |2\sin(\frac{\theta}{2})| \right\} \quad \textit{Laissé au lecteur}
\end{aligned}$$

■

7.4 Résumé de probabilité

Nous donnons un résumé des formules probabilités utile (c'est pas un cours, il faut lire votre cours)

7.4.1 Espérance

Cas Discret Soit X une variable aléatoire discrète prenant des valeurs x_i avec des probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Cas Continu Soit X une variable aléatoire continue avec une densité de probabilité $f(x)$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

7.4.2 Formule de Transfert

Cas Discret Pour une fonction $g(X)$ d'une variable discrète X :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p_i$$

Cas Continu Pour une fonction $g(X)$ d'une variable continue X :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

7.4.3 Variance et Écart-type

La variance de X est définie par :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Cas Discret

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \cdot p_i$$

Cas Continu

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f(x)\, dx$$

L'écart-type est donné par : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

7.4.4 Fonction Génératrice des Moments (MGF)

La fonction génératrice des moments de X, notée $M_X(t)$, est définie par :

Cas Discret

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} \cdot p_i$$

Cas Continu

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

7.4.5 Fonction Caractéristique

La fonction caractéristique de X, notée $\phi_X(t)$, est définie par :

Cas Discret

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_i e^{itx_i} \cdot p_i$$

Cas Continu

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)\, dx$$

7.5 Exercices

Exo 7.5.1

Nous cherchons à calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t^2)}$$

Pour ce faire nous considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}$$

Et la fonction :

$$h(x) = \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$$

1. Montrer les fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}$. et que la fonction f est paire et la fonction h est impaire.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} : xf(x) = 2h(x)$$
3. Montre que la fonction f est continue et borné sur $\mathbb{R}$.
4. Montre que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis établir :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : h'(x) = f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$$
5. Notons $k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)} dt$, montre que k est de classe $\mathcal{C}^1$, et que :
$$k'(x) = -h(x)$$
6. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que :
$$f''(x) = f(x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$$
Et puis montrer que :
$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
7. Conclure la valeur de l'intégrale.

Solution of Exercise :

1. Soit, $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t > 0$: $\left|\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ ainsi comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}$ et par conséquence $f(x)$ est bien définie. même chose pour la fonction h.

2. C'est facile à le montrer, déjà on a l'hypothèse de dominance vérifié :

$$\left|\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

De plus, la bornitude se découle aisément par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout T de $[0;+\infty[$:

$$x \int_0^T \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sin xT}{1+T^2} + 2\int_0^T \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

d'où, en faisant tendre T vers $+\infty$: $xf(x) = 2h(x)$.

4. Montrons que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, notons $\phi(x,t) = \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ on a :
   - **Dérivabilité**
     La fonction $x \mapsto \phi(x,t)$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, ainsi la dérivée par rapport au x sont :
     $$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) = \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$$
   - **Continuité par morceau**
     Pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, les deux fonctions $t \mapsto \phi(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   - **Intégrabilité**
     Pour tout $x \in]0,+\infty[$ la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   - **Hypothèse de domination**
     Il existe une fonction $\psi(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ définit et intégrable sur $]0,+\infty[$, et on a :
     $$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \quad \forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

   Donc on conclut que, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

   $$\boxed{h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - k(x)}$$

5. La même argumentation s'applique à $k : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t$, et montre que k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et que :

   $$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, k'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\ \mathrm{d}t = -h(x)}$$

6. On a : $f(x) = \frac{1}{x}h(x)$ donc f est de classe $\mathcal{C}C^1$ sur $]0,+\infty[$ donc $h'(x) = f(x) - k(x)$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et par suite h et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. On déduit finalement $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
xf(x) &= 2h(x) \\
xf'(x) + f(x) &= 2h'(x) \\
xf'(x) + f(x) &= 2f(x) - 2k(x) \\
xf'(x) &= f(x) - 2k(x) \\
xf''(x) + f'(x) &= f'(x) - 2k'(x) \\
xf''(x) &= 2h(x) \\
xf''(x) &= xf(x)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{f''(x) = f(x)}$$

7. L'équation différentielle est de second ordre, ses solutions sont de la forme :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad : f(x) = C_0 e^x + C_1 e^{-x}$$

Or puisque la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en 0 alors :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad : f(x) = C_0 e^x + C_1 e^{-x}$$

De plus, puisque la fonction est borné alors $C_0 = 0$, Donc :

$$f(x) = f(0)e^{-x}$$

On la condition initiale :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Donc, $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ et finalement par parité de la fonction on déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad : f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}}$$

On peut maintenant déduire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Exo 7.5.2

On cherche à évaluer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t \ \mathrm{d}t$, nous cherchons à évaluer cette fonction pour tout x.

1. Montrer que la fonction est bien définie, càd pour tout x de $[0; +\infty[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t \ \mathrm{d}t$ converge ;
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + C.$$

4. Montre que pour tout $x > 0$:

$$0 \leq f(x) - f(0) \leq 2x$$

5. Montre que f est continue en 0, puis déduire C.
6. En déduire la valeur de l'intégrale objectif de l'exercice.

Solution of Exercise :

1. Soit $x \in [0; +\infty[$. L'application $t \longmapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t$ est continue sur $]0; +\infty\left[, \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0\right.$; comme $\frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t = \frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}$, que l'intégrale impropre $\int_1^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t} \ \mathrm{d}t$ converge, et que (si $x > 0$)$t \longmapsto \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, l'intégrale impropre $\int_0^{\to +\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{t} \sin t \ \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, il suffit d'étudier : $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin(t)}{t} dt$, sur des intervalles $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
   Soit $a > 0$, notons $\phi(x,t) = \frac{e^{-xt} \sin(t)}{t}$ on a :
   - **Dérivabilité**
     La fonction $x \mapsto \phi(x,t)$ est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, ainsi la dérivée par rapport au x sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t) = -e^{-xt} \sin(t)$$

   - **Continuité par morceau**
     Pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, les deux fonctions $t \mapsto \phi(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- **Intégrabilité**
  Pour tout $x \in [a, +\infty[$ la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- **Hypothèse de domination**
  Il existe une fonction $\psi(t) = e^{-at}$ définit et intégrable sur $]0, +\infty[$, et on a :

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \quad \forall (x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$$

Donc on conclut que, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt\right) = \Im\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Cette propriété, s'étendre sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$ car $\bigcup_{a>0}[a, +\infty[=]0, +\infty[$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[\quad : f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

3. Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tq :

$$\boxed{f(x) = \arctan(x) + C \quad \forall x > 0}$$

4. On peut montrer aisément que :

$$A(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^n$$

Et donc la fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de plus sa dérivé premier est :

$$A'(t) = \frac{(1+t)e^{-t} - 1}{t^2} \leq 0 \quad \forall t > 0$$

Puis, Soit $x \in]0; +\infty[$. Par le changement de variable $u = xt$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-u}}{u} \sin\frac{u}{x} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} A(u) \sin\frac{u}{x} \, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On obtient, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout U de $[0; +\infty[$:

$$\int_0^U A(u) \cos\frac{u}{x} \, \mathrm{d}u = x - xA(U) \cos\frac{U}{x} + x \int_0^U A'(u) \cos\frac{u}{x} \, \mathrm{d}u.$$

D'une part : $xA(U)\cos\frac{U}{x} \xrightarrow[U\to+\infty]{} 0$, car $A(U) \xrightarrow[U\to+\infty]{}$. D'autre part, comme

$A' \leqslant 0$:

$$\left|\int_0^U A'(u)\cos\frac{u}{x}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^U (-A'(u))\left|\cos\frac{u}{x}\right|\mathrm{d}u$$
$$\leqslant \int_0^U -(A'(u))\,\mathrm{d}u = 1 - A(U)$$

On en déduit, en faisant tendre U vers : $+\infty$:

$$0 \leqslant f(x) - f(0) = f(x)$$
$$= \int_0^{+\infty} A(u)\cos\frac{u}{x}\,\mathrm{d}u \leqslant 2x.$$

5. Puisque : $0 \leq f(x) - f(0) \leq 2x$ alors en tendant $x \to 0$ on aurait la continuité en 0. Et par conséquence $C = 0$ donc :

$$\boxed{f(x) = \arctan(x) \quad \forall x > 0}$$

6. On a, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. D'autre part : $f(x) = \operatorname{Arctan} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. On conclut :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

7.5.1 Espérance

Cas Discret Soit X une variable aléatoire discrète prenant des valeurs x_i avec des probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Cas Continu Soit X une variable aléatoire continue avec une densité de probabilité $f(x)$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

7.5.2 Formule de Transfert

Cas Discret Pour une fonction $g(X)$ d'une variable discrète X :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p_i$$

Cas Continu Pour une fonction $g(X)$ d'une variable continue X :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

7.5.3 Variance et Écart-type

La variance de X est définie par :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Cas Discret

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \cdot p_i$$

Cas Continu

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f(x)\, dx$$

L'écart-type est donné par : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

7.5.4 Fonction Génératrice des Moments (MGF)

La fonction génératrice des moments de X, notée $M_X(t)$, est définie par :

Cas Discret

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} \cdot p_i$$

Cas Continu

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

7.5.5 Fonction Caractéristique

La fonction caractéristique de X, notée $\phi_X(t)$, est définie par :

Cas Discret

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_i e^{itx_i} \cdot p_i$$

Cas Continu

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)\, dx$$