CHAPITRE 1

LES SÉRIES DE FONCTIONS

Prérequis

- Les séries numériques
- L'étude fonctions réelles

Objectifs

- Savoir étudier une fonction définit par une série numérique définit par un paramètre

Sommaire

Dans ce chapitre, On considère une suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit sur une ensemble $A \subset \mathbb{C}$ et à valeurs réelles. On étudiera dans ce chapitre la fonction f définit par : $f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sous le contraint de convergence. On verra les outils qui vont nous aider à étudier cette fonction :

- Leur limites/continuité : pour avoir une idée sur les branches infinies
- Leurs Dérivés/variations : qui nous indiquent la variation / la convexité...

1.1 Les quatre modes de convergences

1.1.1 Convergence Simple

Definition 1.1.1: Convergence Simple

Lorsque pour tout réel x dans A la série numérique : $\sum f_n(x)$ converge vers un réel noté $f(x)$, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVS} f$$

Example :
Montrez que la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$:
Solution :
Soit $x \geq 0$:
Étudions la convergence de série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx)}$, On a :

$$\frac{x}{n(1+2nx)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Ainsi la série : $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série classique de Riemann - voir corr (**??**)), alors la série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx)}$ est également convergente. En conclut la convergence simple de série.

1.1.2 Convergence Absolue

Definition 1.1.2: Convergence Absolue

Lorsque pour tout réel x dans A la série numérique : $\sum |f_n(x)|$ converge vers un réel, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Absolument. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVA} f$$

Example :
Montrez que la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx^2)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est Absolument convergente sur $\mathbb{R}$:
Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$:
Étudions la convergence de série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx^2)}$, On a :

$$\left|\frac{x}{n(1+2nx^2)}\right| \sim \frac{1}{|x| \times n^2}$$

Ainsi la série : $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série classique de Riemann - voir corr (??)), alors la série $\sum_n \frac{x}{n(1+2nx^2)}$ est également convergente. En conclut la convergence absolue de série.

1.1.3 Convergence Normale

Definition 1.1.3: Convergence Normale

Lorsque la série numérique : $\sum ||f_n||_\infty^A$ converge vers un réel, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Normalement. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVN} f$$

Method : Étude directe
Il suffit de calculer la norme infinie en fonction de n, par les méthodes enseignées en terminale (table de variation), puis on examine la convergence de la série : $\sum ||f_n||_\infty^A$: cela nous donne une condition nécessaire et suffisante de convergence normale.

Example :
soit la série des fonctions de terme générale : $(\frac{x}{n(1+2nx)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, Étudier la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}^+$.
Solution :
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $u_n : x \to \frac{x}{n(1+2nx)}$. soit $n \in \mathbb{N}^*$,la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ ainsi sa dérivée est : $u_n'(x) = \frac{1}{n(1+2nx)^2}$, donc la fonction est croissante, ainsi sa borne-sup est $||u_n||_\infty^{\mathbb{R}^+} = \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{2n^2}$

Method : En utilisant des conditions suffisantes
Dans les exercices, on rencontre souvent des questions type : (Mq la série converge normalement / Mq la série ne converge pas normalement). C'est pour cela qu'on préfère d'utiliser les conditions suffisantes parce qu'ils sont faciles à montrer :

- S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :
  1. $\forall x \in A \quad \text{tq} \quad : |f_n(x)| \leq \alpha_n$
  2. la série : $\sum_n \alpha_n$ converge

  Alors la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement
- S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :
  1. $\forall x \in A \quad \text{tq} \quad : |f_n(x)| \geq \alpha_n$
  2. la série : $\sum_n \alpha_n$ diverge

  Alors la série des fonctions $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement

Example :
Mq la série des fonctions $\sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
Solution :

on a clairement pour tout réel $x \geq 1$ tq $: e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-\sqrt{n}}$ la série $\sum_n e^{-\sqrt{n}}$ est convergente (il suffit de voir que $e^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$ et appliqué une règle de comparaison vu en (??)).
Cela montre la convergence normale de série.

1.1.4 Convergence Uniforme

Definition 1.1.4: Convergence Uniforme – Suite de fonctions

soit une suite des fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit sur une ensemble $B \subset \mathbb{R}$. On dit que la suite converge uniformément vers une fonction $u : x \in A \to u(x)$ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \text{ tq }\ : \forall n \geq N_\epsilon \text{ On a} : \forall x \in A\ \text{ tq }\ : |u_n(x) - u(x)| < \epsilon$$

Definition 1.1.5: Convergence Uniforme – Série de fonctions

Lorsque la suite des fonctions : $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_{n\geq 0}$ converge **Uniformément** vers une fonction f, on dit que la série des fonctions : $\sum f_n$ converge Uniformément. Et si c'est le cas, alors la série converge aussi simplement sur A vers une fonction : $f : x \to f(x)$ et on écrit :

$$\sum f_n \xrightarrow{CVU} f$$

Method : Convergence normale
La convergence Normale entraîne la convergence Uniforme.
Il suffit alors d'établir la convergence normale (qui nous amène à une série numérique) pour montrer la convergence uniforme.

Example :
Dans l'exemple précédent, la série des fonctions $\sum_n e^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, et alors, elle converge uniformément sur $[1, +\infty[$

Method : Convergence du Reste
Pour que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément, il faut et il suffit que le reste de série converge uniformément vers la fonction nulle. c.-à-d. :

$$\sum_n f_n \xrightarrow{CVU} f \quad \textbf{SSI} \quad : \left|\left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_n\right|\right|_\infty^A \longrightarrow 0$$

Example :
L'exemple le plus classique est des séries de fonctions alternées :
Soit la série des fonctions $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^x}$,Mq, elle converge uniformément sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
Solution :
Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge étant une série alternée (voir propt (??)), d'où la convergence simple de série des fonctions.
La convergence simple nous permet d'utiliser **la méthode de convergence de reste**

, car le reste existe.
On peut majorer le reste $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}\right)_{n\geq 1}$ en utilisant l'extension de (??) on a pour tout réel $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi cela montre que :

$$\Big|\Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \Big|\Big|_{\infty}^{[\frac{1}{2},+\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$$

D'où la convergence uniforme de série. ■

1.2 Étude pratique d'une série des fonctions

Dans cette section, on conserve toujours les notations de l'Introduction de chapitre. Pour les exemples, on considère la fonction dite **Zeta de Riemann** définit par :

$$\zeta : x \longleftarrow \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Domaine de Définition : On rappelle que d'après corr (??) - Série Référentielle de Riemann, la série $\sum_n \frac{1}{n^x}$ converge ssi $x > 1$. Et donc c'est notre domaine de définition. Énonçons dans ce qui suit les théorèmes qui permettent l'étude de cette fonction et les appliquons sur elle-même.

1.2.1 Limite d'une série des fonctions

Theorem 1.2.1: Théorème de limite

soit $a \in \bar{A}$, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n admettent une limite en a .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n \lim_{x\to a} f_n(x)$ converge
- La fonction f admet une limite en a
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \tag{1.2.1}$$

Example :

Limite en $+\infty$:

Considérons la partie $A = [2, +\infty[$: un voisinage de $+\infty$.

On a :

1. La fonction Zêta est bien définie sur A
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ admet une limite en $+\infty$ qu'on notera l_n ... un calcul simple nous donne :

$$l_n = \begin{cases} 1 & \text{Si : } n = 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

3. La série converge normalement sur $[2, +\infty[$ en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ une série numérique convergente}$$

donc la série converge uniformément sur $[2, +\infty[$

On conclut alors la formule d'inversion $\lim - \Sigma$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n = 1$$

Limite en 1 :

Ici, on n'a pas de convergence uniforme sur un voisinage de 1, donc on cherche la limite manuellement se dépendre de théorème de limite.

Solution :

Soit $A > 0$, on a : $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tq :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 2A$$

Ensuite, on sait pour chaque $k \in \{1, .., n\}$: $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{k}$

Donc il existe $\alpha > 0$ tq pour tout $x \in [1, 1 + \alpha[$:

$$\frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{k} - \frac{A}{n}$$

D'où pour tout $x \in [1, 1 + \alpha[$:

$$\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{n} \geq 2A - A = A$$

Ce qui montre que ζ diverge vers $+\infty$ en $x = 1$. ■

1.2.2 Continuité d'une série des fonctions

Theorem 1.2.2: Théorème de continuité

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n sont continues sur A.
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La fonction f est continue sur A.

Example :
Montrons la continuité de la fonction Zêta sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien définie sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est continue sur $[a, +\infty[$
3. La série converge normalement sur $[a, +\infty[$ en effet :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{n^a} \text{ une série numérique convergente}$$
donc la série converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la continuité de Zêta sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est continue sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors elle est continue sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)

1.2.3 Dérivés d'une série des fonctions

Theorem 1.2.3: Théorème de Dérivée première

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien défini sur A.
2. Les fonctions f_n sont de C^1 sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f'_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' \tag{1.2.2}$$

Example :
Montrons que la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien défini sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est égale à $\frac{-\ln(n)}{n^x}$
3. La série des dérivées converge normalement sur $[a, +\infty[$ en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \left|\frac{-\ln(n)}{n^x}\right| \leq \frac{1}{\ln(n)^{-1}n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{\ln(n)^{-1}n^a} \text{ une série numérique convergente (??)}$$

donc la série des dérivés converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)
Ainsi l'expression de Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad : \quad \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}$$

On remarque bien que la dérivée est négative, la fonction Zêta et alors décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Theorem 1.2.4: Théorème des Dérivés supérieurs

Lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n^{(p)}$ converge uniformément vers f, pour tout entier $p \geq 0$.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A
- La formule d'inversion :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)}$$

Example :
Montrons que la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ avec a un réel supérieur strictement à 1.
Solution :
Soit a un réel supérieur strictement à 1 ,On a :

1. La fonction ζ est bien définie sur $[a, +\infty[$ (voir l'introduction de section)
2. soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$ étant une composée des fonctions usuelle (exponentielle avec une fonction affine) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée p-ème est égale à $\frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$
3. Les séries des -ème dérivés convergent normalement sur $[a, +\infty[$ en effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \left|\frac{(-\ln(n))^p}{n^x}\right| \leq \frac{1}{\ln(n)^{-p} n^a} \quad \text{et} \quad \sum_n \frac{1}{\ln(n)^{-p} n^a} \ \text{une série numérique convergente (??)}$$

Donc la série des dérivés converge uniformément sur $[a, +\infty[$

Puis les conditions de théorème sont tous vérifiés, on déduit alors la fonction Zêta est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$.
Puisque ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$ alors, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $]0, +\infty[$.(voir sous-section III.5 pour comprendre plus ce genre de raisonnement)
Ainsi l'expression de Ses dérivés sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ \quad : \quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$$

On remarque bien que la deuxième dérivée $(p = 2)$ est positive, la fonction Zêta et alors convexe sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.4 Intégrale d'une série des fonctions

Theorem 1.2.5: Théorème de l'Intégrale

soit $a, b \in A$, Lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f est bien définie sur A.
2. Les fonctions f_n continues sur A .
3. La série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f.

On a le résultat suivant :

- La série $\sum_n \int_a^b f_n(x)dx$ converge
- La fonction f est continue sur A
- La formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx \qquad (1.2.3)$$

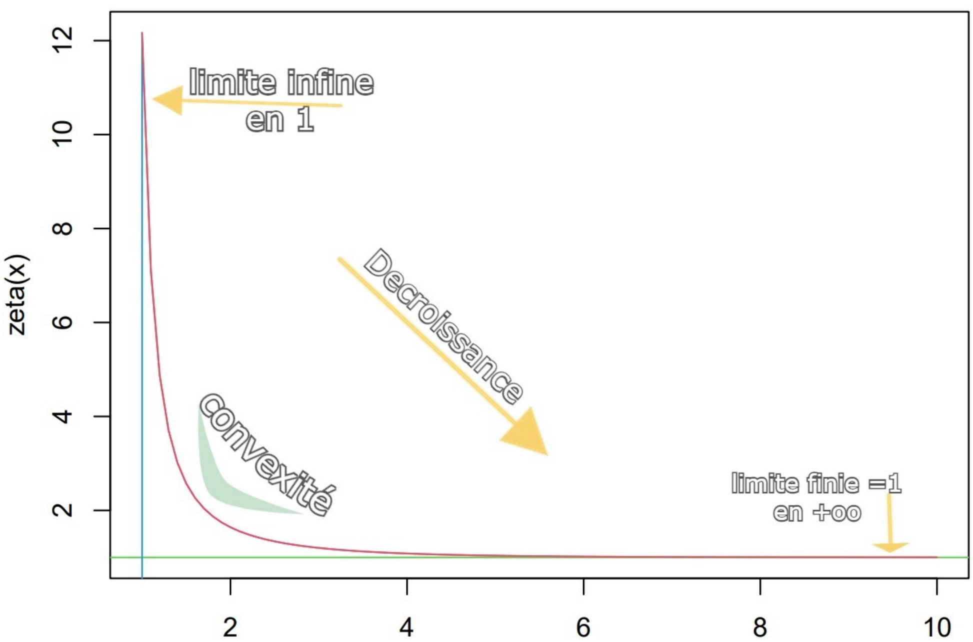
Example :

Cherchons une primitive de la fonction Zêta ζ , en fait la fonction $F : x \longrightarrow \int_2^x \zeta(u)du$ est une primitive évidente. cherchons une expression de cette primitive sous forme d'une somme.

On applique le théorème précédent sur l'ensemble $A = [\frac{\min(2,x)}{2}, +\infty[$ (qui est de la forme $[a, +\infty[$) On a montré les trois conditions sur une telle sorte des ensemble dans l'étude de continuité, il suffit d'énoncer la formule d'inversion :

$$\int_2^x \zeta(u)du = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_2^x \frac{1}{n^u}du = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{\ln(n)n^x} + C^{te}$$

Trace finale de la fonction Gamma



Trace de la fonction zêta

1.2.5 Propriété de LOCALITÉ

Pour comprendre cette notion, on vous rappelle que la définition de la continuité (resp. dérivabilité) sur un ensemble : lorsque la fonction est continue (resp. dérivable) en tout point de cet ensemble. En conséquence de cela, si on veut démontrer la continuité (resp. dérivabilité) d'une fonction sur un intervalle $I = \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ il suffit de démontrer la continuité (resp. dérivabilité) de cette fonction sur tout intervalle I_α. On pourra de même voir la classe comme une propriété local. Ainsi, on vous avertit de ne jamais utiliser des assertions comme : " f est continue " sans indiquer la région de continuité... il faut dire " f est continue sur l'intervalle ... "
On donne alors la méthode suivante :

Method : Étude sur un ouvert
Il est souvent de rencontrer des exercices qui proposent l'étude sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ dont la convergence uniforme n'est pas établie, Dans ce cas, il est ultime d'utilité de décomposé cet intervalle en union des intervalles faciles a traité par exemple :

- $I =]a, b[= I = \bigcup\limits_{a<\alpha<b} [\alpha, b[$
- $I =]a, b[= I = \bigcup\limits_{a<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup\limits_{a<\alpha<\beta<b}]a, \beta]$
- $I =]a, b[= I = \bigcup\limits_{n\geq 1} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

Puis, on les étudie sur ces intervalles, on déduire l'étude sur l'intervalle tout entière.

1.3 Étude des séries entières

Dans toute cette section on considère deux suites complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.
Dans cette section, on étudiera les séries de fonctions définit par : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (sous contrainte de convergence), et aussi f_b définit de la même façon. On rappelle que ce type de séries se caractérisent par un rayon de convergence qu'on note **rcv** (pour f_a c'est $\mathbf{rcv}_a$ et pour f_b c'est $\mathbf{rcv}_b$), Si $\mathbf{rcv} \neq 0$ alors :

- La série converge sur $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$
- La série diverge sur $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}_{\text{fer}}(0, \mathbf{rcv})$
- La région restante $\mathfrak{S}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$ est indécidable, il faut toujours vérifier manuellement.

Notre étude sera restreinte sur $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$ où la convergence est sûre.

1.3.1 Étude dans $\mathbb{C}$:

Dans cette sous-section, on spécifiera les théorèmes permettant la manipulation des séries entières avec les opérations classiques (arithmétiques et fonctionnelles).

Theorem 1.3.1: Convergence — continuité

On a les deux propriétés suivantes :

1. La série des fonctions : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, r)$ tq : $a < \mathbf{rcv}_a$
2. La série des fonctions : $f_a : z \in \mathbb{C} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $\mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$

Theorem 1.3.2: somme — multiplication — dilatation

Posons : $\mathbf{rcv} = \min(\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_b)$,On a les trois propriétés suivantes :

1. $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$:
$$(f_a + f_b)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$
2. $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}}(0, \mathbf{rcv})$:
$$(f_a \times f_b)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} \right) z^n$$
3. soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathfrak{D}_{\text{ouv}} \left(0, \frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|}\right)$:
$$f_a(\lambda z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n z^n$$

Cette étude va nous permettra de faire le calcul de plusieurs séries à l'aide des nombres complexes (voir chapitre-6). On énonce les deux séries qui vont nous permettra de faire ces calculs.

—— Séries fondamentales ——

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\forall z \in \mathfrak{D}(0, 1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

1.3.2 Étude dans $\mathbb{R}$:

Dans les exercices pratiques, il est souvent suffisant de se restreindre à l'étude dans $\mathbb{R}$. Dans cette sous-section, on conserve la notation f_a pour designer la série des fonctions définit par : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (sous contrainte de convergence), et de même pour f_b.

Theorem 1.3.3: Convergence — continuité — classe

On a les trois propriétés suivantes :

1. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur tout disque $[-r, r]$ tq : $r < \mathbf{rcv}_a$
2. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur le disque ouvert $]-\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_a[$
3. La série des fonctions : $f_a : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouverte $]-\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_a[$

Theorem 1.3.4: somme — multiplication — dilatation

Posons : $\mathbf{rcv} = \min(\mathbf{rcv}_a, \mathbf{rcv}_b)$,On a les trois propriétés suivantes :

1. $\forall x \in]-\mathbf{rcv}, +\mathbf{rcv}[$:

$$(f_a + f_b)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

2. $\forall x \in]-\mathbf{rcv}, +\mathbf{rcv}[$:

$$(f_a \times f_b)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} \right) x^n$$

3. soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \left[-\frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|}, +\frac{\mathbf{rcv}_a}{|\lambda|} \right]$:

$$f_a(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n a_n x^n$$

Theorem 1.3.5: Dérivation — Intégration

soit $u, v \in]-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a[$,On a la formule de l'intégrale d'une série entière est :

soit $x \in [-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a]$ On a la formule de la dérivée d'une série entière est :

$$f_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

soit un entier $p \geq 1$, soit $x \in [-\mathbf{rcv}_a, +\mathbf{rcv}_a]$ On a la formule de la p-ème dérivé d'une série entière est :

$$f_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} A_p^n a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_p^{n+p} a_{n+p} x^n$$

1.3.3 Développement en série entière :

Definition 1.3.6: Fonction développable en série entière

soit un réel $r > 0$ et, soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$,on dit que la fonction est développable en série entière sur $]-r, +r[$ssi :
il existe une suite des réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

- le rayon de convergence $\mathbf{rcv}_a$ de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est supérieur à r : $\mathbf{rcv}_a \geq r$
- $\forall x \in [-r, +r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

On présente d'abord les fonctions usuelles et leurs développements en série entière, les développements sont faciles à vérifier, mais il est recommandé de faire le calcule au moins une fois vous-même pour s'habituer à ce genre de calcul.

Corollary 1.3.7: Séries usuelles exponentielles

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R} \quad \textbf{et} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \textbf{tq} \quad \textbf{:}\ x \in \mathbb{R}$$

Corollary 1.3.8: Séries usuelles géométriques

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n} x^n \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

$$\text{arcth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{tq} \quad : x \in [0,1]$$

Ainsi, on présente ci - dessus les deux méthodes majeures qui permettent de développer une fonction en séries entière :

Method : en utilisant les opérations arithmétiques et analytiques
Il suffit de décomposer la fonction en somme / produit / dérivé / primitive des fonctions usuelles (exp/sin/cos/cosh/sinh/ln/arctan...)

Example :
soit la fonction définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-1.2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$. Calculer (s'il existe) le développement limité de cette fonction.

Solution :
On vérifie facilement en réduisant au même dénominateur ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples que

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x/2}\right)$$

Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme aura 1 comme rayon de convergence. Alors, pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

Method : en utilisant les équations différentielles
pour développer une fonction f en série entière, on cherche une équation différentielle vérifiée par f, et puis on cherche les solutions développables en série entière de cette equa-diff ... par identification, on trouve le développement de f.

Example :
soit la fonction définit sur $]-1,+1[$ par : $f(x) = (\text{arcsinh}(x))^2$. Calculer (s'il existe) le développement limité de cette fonction.
Solution :
En effet, la fonction f est dérivable sur $]-1,+1[$ ainsi pour tout réel la dérivée est :

$$f'(x) = \frac{2 \times \text{arcsinh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

On note cette dérivée ϕ , on a ϕ est aussi dérivable et pour tout réel la dérivée est :

$$\phi'(x) = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \text{arcsinh}(x)}{1+x^2} = \frac{1 - x\phi(x)}{1+x^2}$$

alors la fonction ϕ vérifie l'équa-diff (E) : $(1+x^2)y' + xy = 1$ avec la condition initiale : $y(0) = 0$.
Cherchons les solutions de cette équation qui sont développables en série entière. On suppose par analyse-synthèse qu'une telle solution existe et de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $x \in]-r,+r[$. Si c'est le cas, on peut remplacer dans (E), et par un calcul qu'on ne ferra pas ici, on trouve que la solution doit être :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n\ 4^n\ (n!)^2}{(2n+1)!}\right)x^{2n+1}$$

Cette série vérifie bien (E) et elle est de rayon de convergence $= 1$ ... puisque (E) peut être transformer en problème de Cauchy-Lipschitz alors, il ne peut admettre qu'une seule solution, Donc :

$$\phi(x) = y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \ 4^n \ (n!)^2}{(2n+1)!} \right) x^{2n+1}$$

Puis en intégrant ϕ on trouve le développement de f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \ 4^n \ (n!)^2}{(2n+2)!} \right) x^{2n+2}$$

1.4 Exercices

Exo 1.4.1: Étude d'une série des fonctions

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : \left[0;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$.

1. Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$. On note S la somme de cette série d'applications.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et étudier le signe de $S'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de S.
5. Tracer l'allure de la fonction.

Solution of Exercise :

1. Soit $x \in [0;+\infty[$.
   - Si $0 \leqslant x < 1$, alors $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \leqslant \frac{x^n}{n} \leqslant x^n$. Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   - Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge.
   - Si $x > 1$, alors :

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \leqslant \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leqslant \frac{1}{x^n}$$

   Comme $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^n}$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Finalement, la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $D = [0;1[\cup]1;\infty[$, et diverge en 1 .
2. soit $a \in [0,1[$:
   - $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;a]$, comme on vient de le voir en a).
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$, pour tout $x \in [0,a]$:

   $$f_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{nx^{n-1}\left(x^{2n}+1\right) - x^n 2nx^{2n-1}}{\left(x^{2n}+1\right)^2} = \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}.$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;a]$. On a :

   $$\begin{aligned} |f_n'(x)| = \left|\frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}\right| &\leqslant \frac{x^{n-1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1} \leqslant x^{n-1} \leqslant a^{n-1}, \end{aligned}$$

Comme $|a| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} a^{n-1}$ converge, donc, par la méthode de condition suffisante, il découle que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n' \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [0;a].}$$

D'après le théorème du Cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[0,a]$ avec $a \in [0,1[$ ... et que l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in [0,1], \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Par un raisonnement analogique on montre que pour tout $a \in]1,+\infty[$:

- $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[a;+\infty[$, comme on vient de le voir en a).
- Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;+\infty[$ de même expression de dérivé exprimé en avant.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
|f_n'(x)| = \left|\frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}\right| &\leqslant \frac{x^{n-1}\left(1+x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2} \\
&= \frac{x^{n-1}\times 2x^{2n}}{\left(x^{2n}\right)^2} \leqslant \frac{2}{x^{4n-2n-n+1}} = \frac{2}{x^{n+1}} \\
&\leqslant \frac{2}{a^{n+1}} = 2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n,
\end{aligned}$$

Comme $|a^{-1}| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n$ converge, donc, par la méthode de condition suffisante, il découle que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n' \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [a;+\infty[.}$$

D'après le théorème du Cours sur convergence uniforme et dérivation, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a;+\infty[$ avec $a \in]1,+\infty[$ ... et que l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Conclusion :

$$\forall x \in D, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}\left(1-x^{2n}\right)}{\left(x^{2n}+1\right)^2}$$

Il est clair alors que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0;1\,[, \quad S'(x) > 0 \\ \forall x \in]1;+\infty\,[, \quad S'(x) < 0 \end{cases}$$

3. **Étude en 1 :**
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)} \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2n}$. Soit $A > 0$ fixé. Puisque la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n}$ diverge et est à termes réels $\geqslant 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geqslant 2A$. On a :

$$\forall x \in D, S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$$

Comme $\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$, et que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \geqslant 2A$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, |x-1| \leqslant \eta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} f_k(x) \geqslant A.$$

On a donc :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-1| \leqslant \eta \Longrightarrow S(x) \geqslant A.$$

On conclut :

$$\boxed{S(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Étude en $+\infty$:

- On rappelle que la série converge simplement sur $[2; +\infty[$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \quad \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  càd : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f_n = 0$
- Montrons que la série d'applications $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2; +\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left[2; +\infty\right[, |f_n(x)| = \frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)} \leqslant \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^n} \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{2^n},$$

  comme la série géométrique $\sum_n \frac{2}{2^n}$ converge donc : par la méthode de condition suffisante

  $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} f_n \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [2; +\infty[.}$

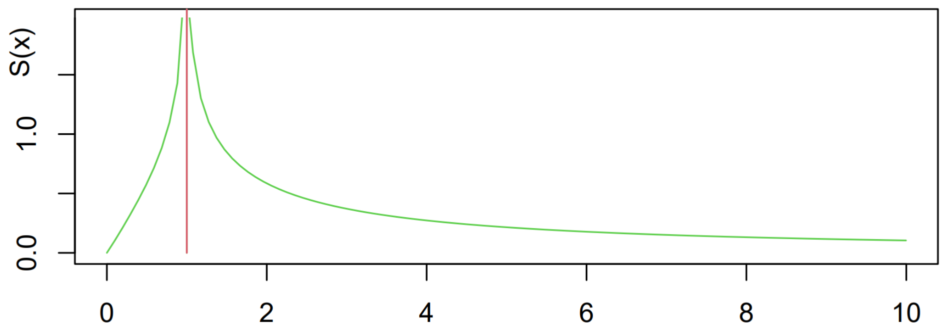
On conclut alors par théorème d'inversion limite-somme que :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^n}{n\left(x^{2n}+1\right)}=\sum_{n=1}^{+\infty}0=0$$

4. Le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0

5. Trace de la fonction :



Trace de la fonction

6. On peut s'intéresser aux comportement asymptotique de S au voisinage de l'infinie En effet , considérons la fonctions définit pour tout $x\in[2,+\infty[$ par :

$$\mathbb{S}S(x)=x\times S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\phi_n(x)$$

Utilisant théorème d'inversion limite-somme 1.2.1 :

- Il est facile de vérifier que la série converge simplement sur $[2;+\infty[$.
- On a, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixé :

$$\phi_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^{n+1}}{nx^{2n}}=\frac{1}{nx^{n-1}}\quad\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

pour $n=1$:

$$\phi_1(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{x^2}=1\quad\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

càd :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n=1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

- Montrons que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1}\phi_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2;+\infty[$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[2;+\infty[$

$$|\phi_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)} \leqslant \frac{x^{n+1}}{nx^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}} \leqslant \frac{2}{2^n}$$

comme la série géométrique $\sum_n \frac{2}{2^n}$ converge donc : par la méthode de condition suffisante

$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\phi_n \text{ converge normalement, donc uniformément, sur } [2;+\infty[.}$

On conclut alors par théorème d'inversion limite-somme que :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^{n+1}}{n\left(x^{2n}+1\right)} = 1+\sum_{n=2}^{+\infty}0 = 1$$

Cela montre que :

$$\boxed{S(x) \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Exo 1.4.2: Une autre utilité de développement en série entière

Mq la fonction suivante définit sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{Si } x\neq 0 \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Solution of Exercise :

L'idée ici est de démontrer que la fonction est développable en série entière, et si c'est le cas : la fonction sera de classe $\mathcal{C}^\infty$ immédiatement sur le disque de convergence. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

Pour le cas $x=0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}0^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} = 1 = f(0)$$

Ce qui montre que :

$$\forall x\mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{x}$$

Alors f est développable en série entière, donc de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. ∎