ROYAUME DU MAROC
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
INSTITUT NATIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

INSEA

Sujet:

MODÈLISATION STATIQUE DES COUBES DE TAUX ET DETECTION D'EFFET COVID.

Réalisé par :

EL YOUSEFI	Ahmed	AF
OUKHOUYA	Loubna	AF
DHAIOUIR	Youssef	AF
ESSAKINE	Omar	AF
CHARET	Mohamed	AF

Encadré par :

MANADIR Abdellah

Chapitre 1

INTRODUCTION

1 Les courbes de taux

Les courbes de taux sont des représentations graphiques des rendements offerts par les titres obligataires d'un même émetteur selon leur échéance, de la plus courte à la plus longue. Elles renseignent sur les anticipations des investisseurs sur les risques de défaut de l'émetteur, le niveau de l'inflation et des taux d'intérêt futurs. Elles constituent donc *un bon indicateur de la santé économique et financière du pays émetteur*.

Les courbes de taux les plus communes sont celles des emprunts d'Etat, qui servent de référence à l'ensemble du marché obligataire d'un pays donné. La forme que prend la courbe des taux d'intérêt sur les emprunts souverains dépend de plusieurs facteurs, notamment la politique monétaire de la banque centrale, la demande et l'offre de titres obligataires, et les événements géopolitiques ou économiques.

En général, dans un environnement économique stable marqué par une inflation faible et un endettement public soutenable, les rendements obligataires croissent avec la maturité des titres, c'est-à-dire que les taux d'intérêt s'élèvent de façon régulière au fur et à mesure que l'échéance du titre s'éloigne. Cela s'explique par le fait que plus l'échéance est lointaine, plus le risque de réalisation d'événements pouvant affecter défavorablement la valeur du titre obligataire est fort. Les investisseurs exigent alors une prime de risque pour prêter sur des échéances longues par rapport au fait de prêter sur des échéances courtes.

Les courbes de taux sont donc des outils essentiels pour les acteurs du monde de la finance, car elles leur permettent d'évaluer les opportunités et les risques liés aux placements obligataires, ainsi que d'anticiper les évolutions macroéconomiques..

2 Modélisation des courbes

Il existe différents modèles de modélisation des courbes de taux, qui peuvent être classés en deux catégories : les modèles statiques et les modèles dynamiques.

— **Les modèles dynamiques :** sont des modèles qui décrivent la dynamique de la courbe des taux dans le temps, en tenant compte des facteurs stochastiques qui influencent son évolution. Ils utilisent généralement des processus aléatoires, comme des mouvements browniens ou des processus de diffusion, pour modéliser les variations des taux. Ces modèles sont utiles pour évaluer les produits dérivés de taux, comme les options ou les swaptions, ou pour mesurer le risque de taux.

— **Les modèles statiques :** sont des modèles qui décrivent la forme de la courbe des taux à un instant donné, sans prendre en compte son évolution dans le temps. Ils utilisent généralement des fonctions mathématiques simples, comme des polynômes, des exponentielles ou des splines cubiques, pour ajuster les données observées sur le marché. Ces modèles sont utiles pour interpoler ou extrapoler les taux entre deux échéances données, ou pour calculer les taux forward implicites.

Un exemple de modèle dynamique est le modèle de *Vasicek*, qui utilise un processus de diffusion avec une tendance vers une moyenne à long terme pour modéliser l'évolution du taux court. Un exemple de modèle statique est le modèle de *Nelson-Siegel*, qui utilise une fonction exponentielle pondérée par trois paramètres (niveau, pente et courbure) pour ajuster la courbe des taux. La fonction s'exprime comme suit :

$$\boxed{y(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - \frac{\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau}\right) + \beta_2 \left(\left(1 - \frac{\exp(-\lambda\tau)}{\lambda\tau}\right) - \exp(-\lambda\tau)\right)} \tag{2.1}$$

Ce modèle[1] serait la base de notre modélisation ensuite.

3 Notre modèlisation

Pour analyser les différences entre les courbes de taux pendant la période de COVID-19 et avant celle-ci, nous allons utiliser deux modèles de régression linéaire distincts. Le premier modèle sera appliqué à la période de COVID-19, tandis que le deuxième sera utilisé pour la période précédente. En comparant les coefficients de chaque modèle, nous pourrons évaluer les variations dans les relations entre les facteurs économiques et les taux d'intérêt, permettant ainsi une meilleure compréhension des changements survenus.

1. On va prendre $\lambda = 1$ pour simplifier le modèle et le rendre linéaire

Chapitre 2

MODÈLISATION ÉCONOMÉTRIQUE

1 Les données utilisées

Les données qu'on va utiliser sont des données scrappées de site offciel Federal Reserve Economic Data [1] qui regroupe plusieurs données macroéconomiques et financières concernant l'USA.

— On importe toutes les données des coubes de taux des obligation emises par l'état.
— La période étudiée serait du **16-03-2019** jusqu'à **16-03-2021**
— On divise le data en deux périodes : période avant covid et période après covid
— On cherche à appliquer le modèle de Nilson-Siegle dans chacune des période, et comparer les coefficients estimés.

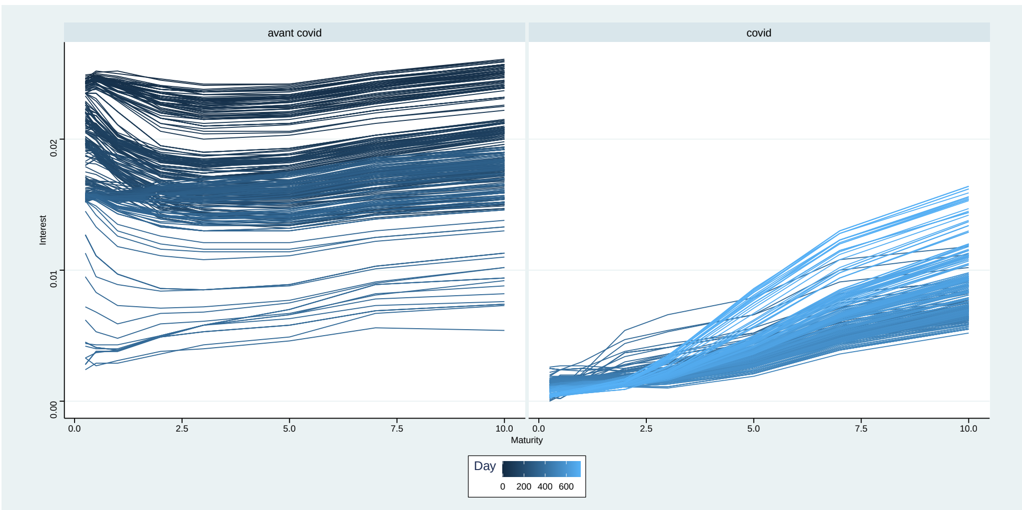

FIGURE 1.1 – Visualisation des courbes de taux pour chaque jour durant la période designée.

1. Ce code et tout les autres codes peuvent être trouvés en Github – click sur l'icon : .

2 Spécification de modèle

Soit les deux modèles de regression suivantes :

$$\begin{cases} Taux_{Covid}(Matur) & = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}\right) + \beta_2 \left(\left(1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}\right) - \exp(-Matur)\right) \\ Taux_{avant\ Covid}(Matur) & = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}\right) + \beta_2 \left(\left(1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}\right) - \exp(-Matur)\right) \end{cases}$$

On va poser les variables suivantes :

$$X_1 = 1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}$$
$$X_2 = \left(1 - \frac{\exp(-Matur)}{Matur}\right) - \exp(-Matur)$$

Cela va nous permettre de définir le modèle linéaire équivalent :

$$\begin{cases} Taux_t^{Covid} & = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \epsilon_t^{covid} \\ Taux_t^{avant\ Covid} & = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \epsilon_t^{avant\ covid} \end{cases}$$

En trainsny les modèles on trouve les coeficient suivants :

1. Pour période covid :

Table 2.1 – Modèle de regression pour période covid

	Dependent variable :
	Interest
term1	-0.011^{***}
term2	-0.018^{***}
Constant	0.013^{***}
Observations	2,920
R^2	0.792
Adjusted R^2	0.792
Residual Std. Error	0.001 (df = 2917)
F Statistic	$5{,}558.814^{***}$ (df = 2 ; 2917)
Note :	*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

2. Pour période avant covid :

TABLE 2.2 – Modèle de regression pour période avant covid

	Dependent variable :
	Interest
term1	-0.001^{***}
term2	-0.011^{***}
Constant	0.021^{***}
Observations	2,920
R^2	0.033
Adjusted R^2	0.032
Residual Std. Error	0.004 (df = 2917)
F Statistic	49.750^{***} (df = 2 ; 2917)
Note :	*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

Interprétaion

On tire les remarques suivantes :

— Les deux modèles sont significatifs par rapport au modèle constant.

— Les coeficients sont significativement differents de zéro.

— Le R^2 pour période covid est très significatif, cependant avant covid il ne dépasse à peine le 3%.

3 Vérification des Hypothèses

3.1 Pour le modèle avant covid :

1. Visualisons d'abord le modèle trainée :

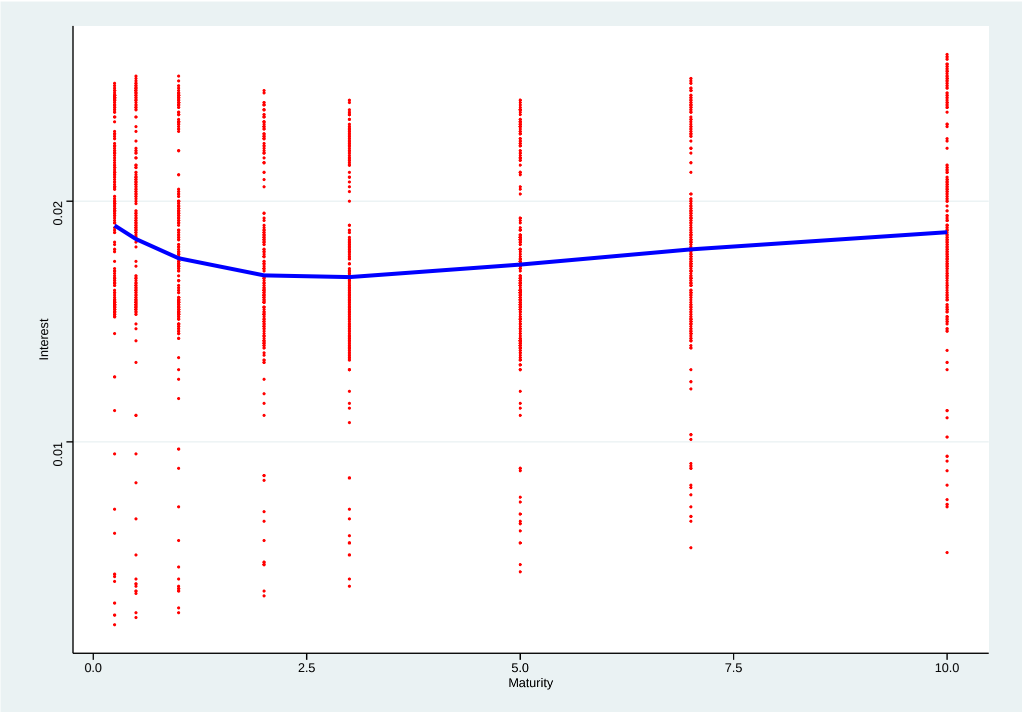

FIGURE 3.1 – Visualisation du modèle trainé

2. Testons l'autocorrélation :
   On effectue le test de Durbin Watson :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & : \textit{Pas d'autocorrélation} \\ \mathcal{H}_1 & : \textit{L'alternative} \end{cases}$$

   Le logiciel nous donne :

Lag	Autocorrelation	D-W Statistic	p-value
1	0.9700434	0.05664349	0

TABLE 3.1 – Autocorrelation Analysis

Interprétaion

On remarque l'existance d'une autocorréation entre les deux variables X_1 et X_2, cependant cela ne pose pas un problème pour notre modèle pour les raisons suivantes :

— Le modèle à été bien estimé, donc la matrice à été bien inversée sans aucun problème.

— Certe que l'estimation des coeficients n'est pas efficace, mais on ne dispose en réalité que d'une seule variable qui nous a génerer deux autres variables explicatifs.

3. Testons L'homoscédasticité : On peut la detecter visualement à travers ce graphe :

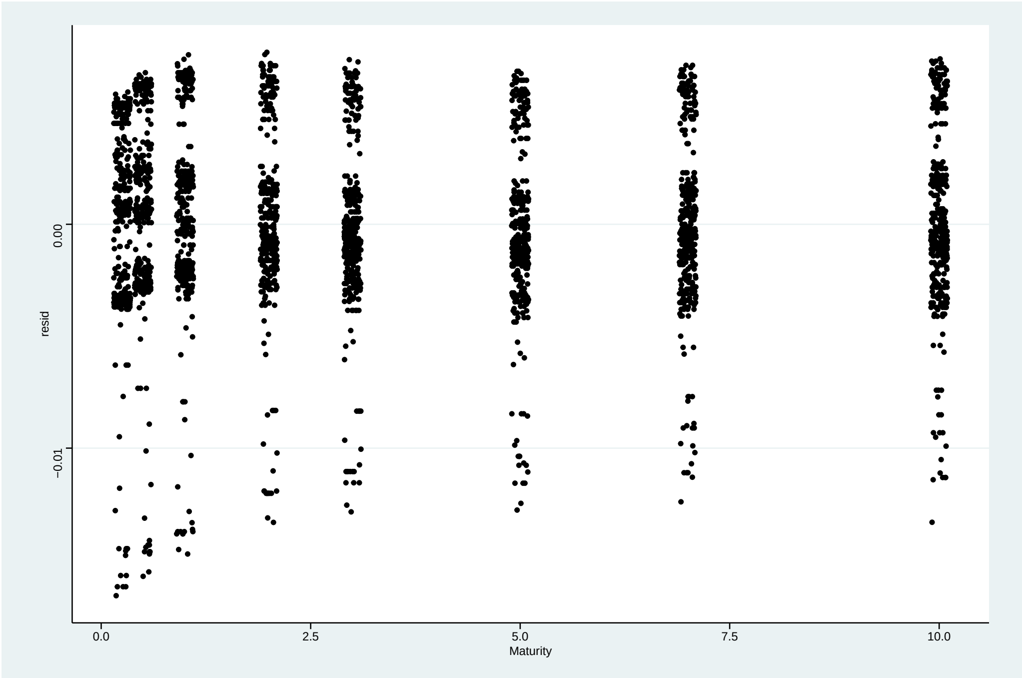

Figure 3.2 – L'erreur en fonction de maturité

En plus, on peut la detecter statistiquement en modélisant les carrées des résidus en fonction de maturité, voici le résultat du modèle :

Table 3.2

	Dependent variable :
	resid
Maturity	0.00001
Constant	−0.00002
Observations	2,920
R^2	0.00002
Adjusted R^2	−0.0003
Residual Std. Error	0.004 (df = 2918)
F Statistic	0.067 (df = 1 ; 2918)
Note :	*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

Interprétaion

On remarque la non significativité du modèle ce qui indique une homosédasticité

4. Testons la normalité des résidus :

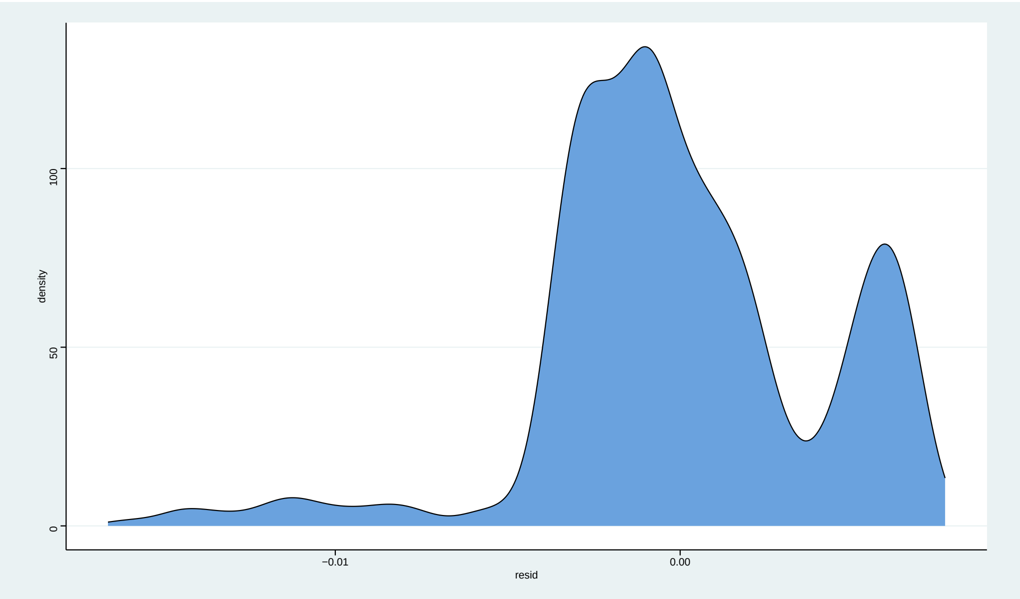

Figure 3.3 – Histogramme des résidus

Interprétaion

Il est claire que les résidus ne sont pas normaux, donc il faut interpreter les résultats très attentivement

3.2 Pour le modèle durant covid :

1. Visualisons d'abord le modèle trainée :

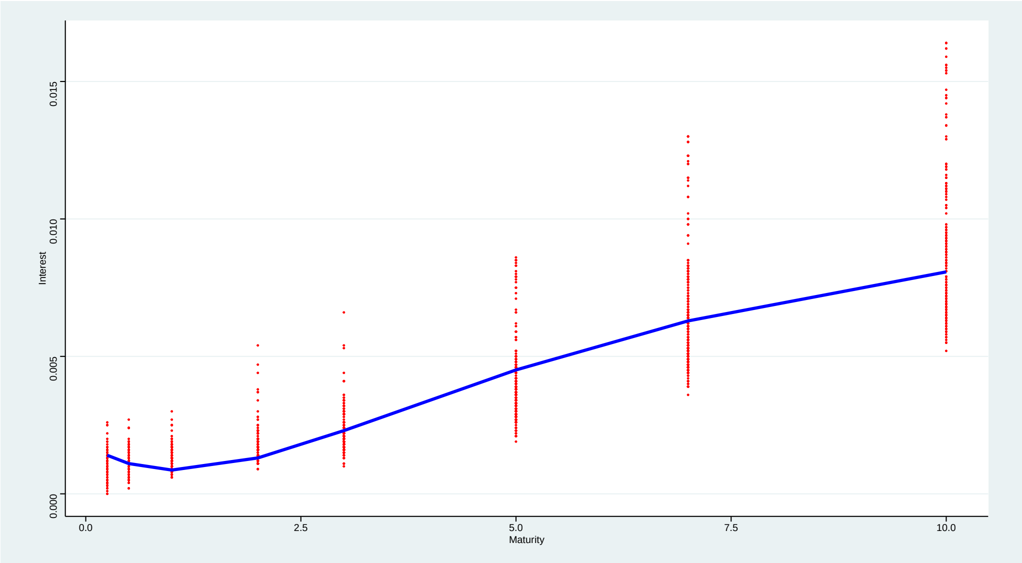

Figure 3.4 – Visualisation du modèle trainé

2. Testons l'autocorrélation :
   On effectue le test de Durbin Watson :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & : \textit{Pas d'autocorrélation} \\ \mathcal{H}_1 & : \textit{L'alternative} \end{cases}$$

   Le logiciel nous donne :

Lag	Autocorrelation	D-W Statistic	p-value
1	0.56847	0.8498747	0

Table 3.3 – Autocorrelation Analysis

Interprétaion

On remarque l'existance d'une autocorréation entre les deux variables X_1 et X_2, cependant cela ne pose pas un problème pour notre modèle pour les raisons suivantes :

— Le modèle à été bien estimé, donc la matrice à été bien inversée sans aucun problème.

— Certe que l'estimation des coeficients n'est pas efficace, mais on ne dispose en réalité que d'une seule variable qui nous a génerer deux autres variables explicatifs.

3. Testons L'homoscédasticité : On peut la detecter visualement à travers ce graphe :

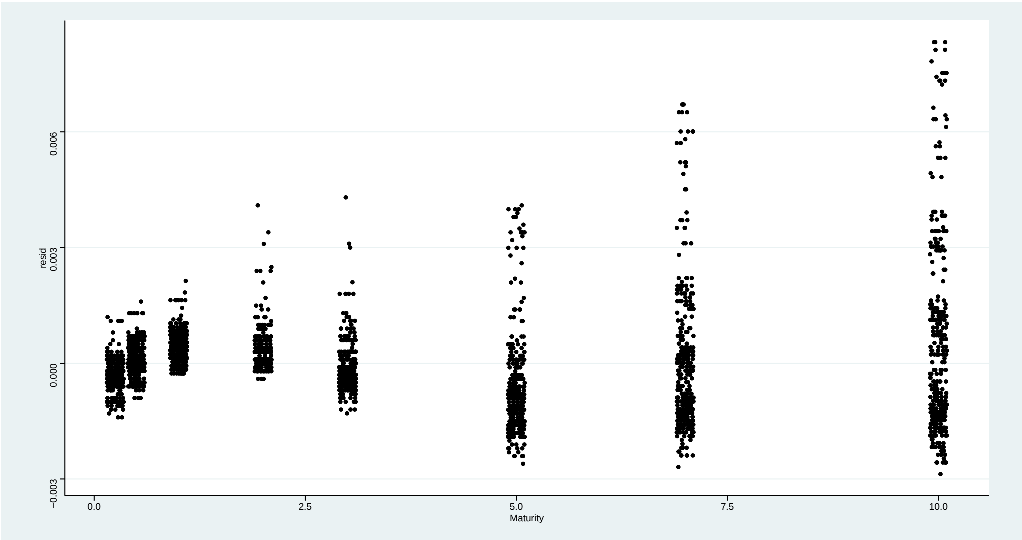

FIGURE 3.5 – L'erreur en fonction de maturité

En plus, on peut la detecter statistiquement en modélisant les carrées des résidus en fonction de maturité, voici les résultat du modèle :

TABLE 3.4

	Dependent variable :
	resid
Maturity	0.00001
Constant	−0.00004
Observations	2,920
R^2	0.001
Adjusted R^2	0.0005
Residual Std. Error	0.001 (df = 2918)
F Statistic	2.364 (df = 1 ; 2918)
Note :	*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

Interprétaion

On remarque la non significativité du modèle ce qui indique une homosédasticité

4. Testons la normalité des résidus :

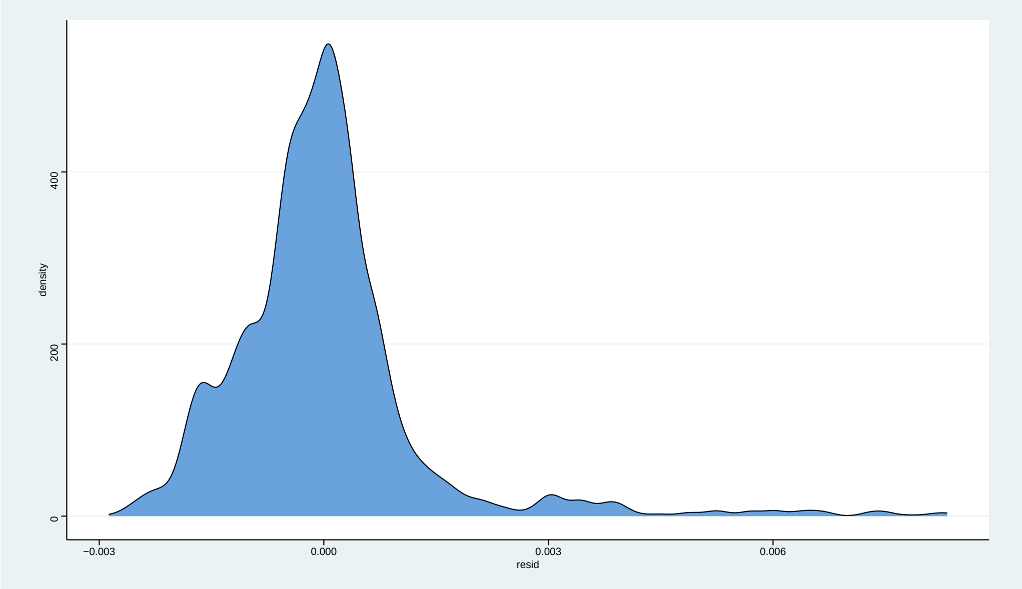

FIGURE 3.6 – Histogramme des résidus

Interprétaion

On peut considérer que les résidus sont normaux

4 Comparaison

On effectue le test de restriction sur les coeficients appliqué pour l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} Y_{Avant} \\ Y_{Covid} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{avant} & 0 \\ 0 & X_{après} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_{Avant} \\ \beta_{Covid} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{Avant} \\ \epsilon_{Covid} \end{pmatrix}$$

Ainsi on test :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & : \begin{pmatrix} -I_3 & I_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_{Avant} \\ \epsilon_{Covid} \end{pmatrix} = 0 \\ \mathcal{H}_1 & : Alternative \end{cases}$$

Pour cela on utilise la statistique :

$$\mathcal{F} = \frac{(\beta_{Avant} - \beta_{Covid})^T \times \left(R(X^TX)^{-1}R^T\right)^{-1} \times (\beta_{Avant} - \beta_{Covid})/ddl_1}{SCR/ddl_2}$$

avec : $ddl_1 = 1$ et $ddl_2 = n_{tot} - 2(2+1)$
Le calcul matricielle sur logicielle R nous donne la statistique de Fisher : $\mathcal{F} = 575.3779$ qui est significativement different de zéro, ainsi on déduit qu'il a une difference significative entre les deux périodes, cette difference serait expliqué dans le chapitre suivante.

Chapitre 3

Conclusion et intérprétation économique

1. *Le modèle de Nelson-Siegel explique une grande proportion de la variance des taux durant la période de COVID-19, mais seulement une petite proportion avant la pandémie :*

   Interprétaion

   Le modèle de Nelson-Siegel a expliqué une plus grande part de la variance des taux pendant la crise de la COVID-19, caractérisée par une volatilité et des changements rapides, tandis que les facteurs qui influençaient les taux avant la pandémie étaient probablement plus stables et moins adaptés à ce modèle.

2. *Les coefficients du modèle sont différents entre les deux périodes :*

   Interprétaion

   Les différences dans les coefficients du modèle de Nelson-Siegel entre les périodes avant et pendant la COVID-19 reflètent des changements significatifs dans la structure des taux d'intérêt, ayant des implications pour les décisions d'investissement et les stratégies de gestion des risques.

3. *Les courbes avant la COVID-19 sont inversées, tandis qu'elles sont croissantes pendant la période de COVID-19 :*

   Interprétaion

   Avant la pandémie, une courbe de rendement inversée peut indiquer un ralentissement économique anticipé, poussant les investisseurs vers des placements à long terme plus sûrs, ce qui fait baisser les taux à long terme. Pendant la pandémie, les politiques monétaires expansionnistes ont entraîné des taux à court terme plus bas, tandis que les attentes de reprise économique ont conduit à des taux à long terme plus élevés, créant une courbe de rendement croissante.