Matematyka

Tablice rozszerzone

A.D. 2022

Spis treści

1 Symbole i notacja

Litery greckie

Nazwa	Mała litera	Duża litera
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	E
Dzeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Jotta	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Ksi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ipsylon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Zbiory

Symbol	Znaczenie
$\varnothing$	Zbiór pusty
$A \cup B$	Suma zbiorów
$A \cap B$	Część wspólna zbiorów
$A \setminus B$	Różnica zbiorów
$A \times B$	Iloczyn kartezjański
$\overline{A}$, A'	Dopełnienie zbioru
$A \subset B$	Podzbiór zbioru
$A \not\subset B$	Nie jest podzbiorem zbioru
$x \in A$	Należy do zbioru
$x \notin A$	Nie należy do zbioru
$\lvert A \rvert$, $\bar{\bar{A}}$	Liczebność zbioru

Logika

Symbol	Znaczenie
$\wedge$	I (iloczyn logiczny)
$\vee$	Lub (suma logiczna)
$A \Leftrightarrow B$	Równowartość logiczna
$A \Rightarrow B$	Konsekwencja logiczna
$\neg A$	Negacja logiczna
$A \therefore B$	Dlatego
$A \because B$	Ponieważ
$\forall\, x$, $\bigwedge\limits_{x}$	Dla każdego x
$\exists\, x$, $\bigvee\limits_{x}$	Istnieje x
$\exists!\, x$, $\dot{\bigvee\limits_{x}}$	Istnieje dokładnie jeden x

Zbiory liczbowe

Nazwa	Symbol	Nazwa	Symbol
Naturalne	$\mathbb{N}$	Wymierne	$\mathbb{Q}, \mathbb{W} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$
Naturalne dod.	$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Niewymierne	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{NW}$
Całkowite	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$	Rzeczywiste	$\mathbb{R}$

Operacje arytmetyczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$a + b$	Dodawanie	$a < b$	Mniejsze od
$a - b$	Odejmowanie	$a > b$	Większe od
$a \cdot b$, $a \times b$	Mnożenie	$a \leq b$	Mniejsze bądź równe od
a/b, $\frac{a}{b}$	Dzielenie	$a \geq b$	Większe bądź równe od
x^n	Potęgowanie	$a \approx b$	Aproksymacja
$\sqrt{x}$	Pierwiastek kwadratowy	$x\%$	Procent
$\sqrt[n]{x}$	Pierwiaster n-tego stopnia	x‰	Promil
$\log_a x$	Logarytm o podstawie a	$\lvert x \rvert$	Wartość bezwzględna
$\log x$	Logarytm dziesiętny	$\lceil x \rceil$	Sufit
$\ln x$	Logarytm naturalny	$\lfloor x \rfloor$	Podłoga
$a = b$	Znak równości	$\{x\}$	Mantysa (część ułamkowa)
$a \neq b$	Nierówność	$x \bmod a$	Dzielenie całkowite (modulo)

Stochastyka i statystyka

Symbol	Znaczenie
$n!$	Silnia
$\binom{n}{k}$	Symbol Newtona
Ω	Przestrzeń probabilistyczna
$P(A)$	Prawdopodobieństwo
$P(A \mid B)$	Prawdopodobieństwo warunkowe
σ^2	Wariancja
σ	Odchylenie standardowe
$\bar{x}$	Średnia arytmetyczna

Geometria

Symbol	Znaczenie
$\lvert AB \rvert$	Odcinek
$\overrightarrow{AB}$	Wektor
$\angle$, $\measuredangle$, $\sphericalangle$	Kąt
$\triangle ABC$	Trójkąt
$k \parallel l$	Proste równoległe
$k \perp l$	Proste prostopadłe
$\sim$	Figury podobne
$\equiv$	Figury przystające

2 Prawa działań, informacje ogólne

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł liczby) - operacja, która zwraca nienegatywną wartość. Zdefiniowana jest następującym równaniem:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Nienegatywność: $|a| \geq 0$,
- Określoność dodatnia: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- Multiplikatywność: $|ab| = |a||b|$,
- Podaddytywność: $|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a-b| \geq |a| - |b|$,
- Idempotencja: $||a|| = |a|$,
- Parzystość: $|-a| = |a|$,
- Zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych: $|a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- Zachowanie dzielenia: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow b \neq 0$,

Dodatkowo:

$$|a| = \sqrt{(a)^2}, \qquad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \qquad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

Potęgi, pierwiastki i logarytmy

Potęgowanie (podniesienie do n-tej potęgi) - operacja dwuargumentowa, która jest zdefiniowana jako iloczyn $a, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$(podstawa) $n, n \in \mathbb{N}_+$(wykładnik) razy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Szczególne przypadki:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad 0^n = 0$$

Pierwiastkowanie - operacja odwrotna do potęgowania, która dla a przyjmuje wartość b taką, że pomnożona n razy jest równa b:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a,$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}, \qquad b \in \mathbb{R}, \qquad n = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ prawdziwe są następujące zależności:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\dfrac{m}{n}}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \sqrt{(a)^2} = |a|$$

Logarytm - operacja odwrotna do potęgowania, która dla podstawy a oraz argumentu b przyjmuje wartość n taką, że a podniesione do potęgi n jest równe b:

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}, \qquad b \in \mathbb{R}_+, \qquad n \in \mathbb{R}$$

Szczególne przypadki:

$$\log_a 0 - \text{niezdefiniowany}, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

Dla $a, b = \{x : x \in \mathbb{R} \land x > 0 \land x \neq 1\}; x, y \in \mathbb{R}_+$ prawdziwe są następujące zależności:

- Prawo iloczynu: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Prawo ilorazu: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- Prawo potęgi: $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
- Redukcja potęgi podstawy: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$
- Zmiana podstawy logarytmu: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- Logarytm potęgi podstawy: $\log_a(a^x) = x$
- a do potęgi logarytmu a z x: $a^{\log_a x} = x$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b, c \in \mathbb{R};\ \ n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Kwadrat różnicy: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Kwadrat sumy trzech składników: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

- Sześcian sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Sześcian różnicy: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Różnica sześcianów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Suma sześcianów: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- Suma n-tych potęg (tylko dla n nieparzystych):
  $a^n + b^n = (a + b)(a^{(n-1)} - a^{(n-2)}\,b + a^{(n-3)}\,b^2 - \ldots - ab^{(n-2)} + b^{(n-1)})$
- Różnica n-tych potęg:
  $a^n - b^n = (a - b)(a^{(n-1)} + a^{(n-2)}b + a^{(n-3)}\,b^2 + \ldots + ab^{(n-2)} + b^{(n-1)})$

Za pomocą **trójkąta Pascala** można wyznaczyć współczynniki arugmentów dla sumy i różnicy podniesionej do potęgi dowolnego $n, n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

lub skorzystać ze wzoru:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{(n-1)}b + \binom{n}{2}a^{(n-2)}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{(n-1)} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Średnie

- Arytmetyczna: $S_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Geometryczna: $S_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$
- Kwadratowa: $S_k = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Harmoniczna: $S_h = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Nierówność Cauchy'ego między średnimi - średnie wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich układają się w charakterystyczną nierówność:

$$S_k \geq S_a \geq S_g \geq S_h$$

Błędy przybliżenia

Dla r oznaczającego wartość dokładną i p oznaczającego wartość przybliżoną zdefiniowane są błędy przybliżenia:
Błąd bezwzględny przybliżenia - wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a przybliżoną, wyrażona wzorem: $|r - p|$.
Błąd względny przybliżenia - iloraz błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej rzeczywistej wielkości, wyrażona: $\frac{|r-p|}{|r|}$.
Błąd procentowy przybliżenia - wartość procentowa błędu względnego:
$\frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$.

Największy wspólny dzielnik

Funkcja $\mathrm{NWD}(a, b),\ a, b \in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje największą liczbę c ze zbioru jednoczesnych dzielników liczb a i b. Znalezienie liczby $\mathrm{NWD}(a, b)$ sprowadza się do zastosowania **algorytmu Euklidesa**:

1. Dla a, b znajdź większą z nich,
2. Od większej liczby odejmij tę mniejszą,
3. Powtarzaj, aż odejmowanie liczb da zero.

Przykład:

$$\mathbf{NWD(798, 1008)} = \left\{ \begin{array}{lcl} 1008 - 798 & = & 210 \\ 798 - 210 & = & 588 \\ 588 - 210 & = & 378 \\ 378 - 210 & = & 168 \\ 210 - 168 & = & 42 \\ 168 - 42 & = & 126 \\ 126 - 42 & = & 84 \\ 84 - 42 & = & 42 \\ 42 - 42 & = & \mathbf{0} \end{array} \right\} = \mathbf{42}$$

Najmniejsza wspólna wielokrotność

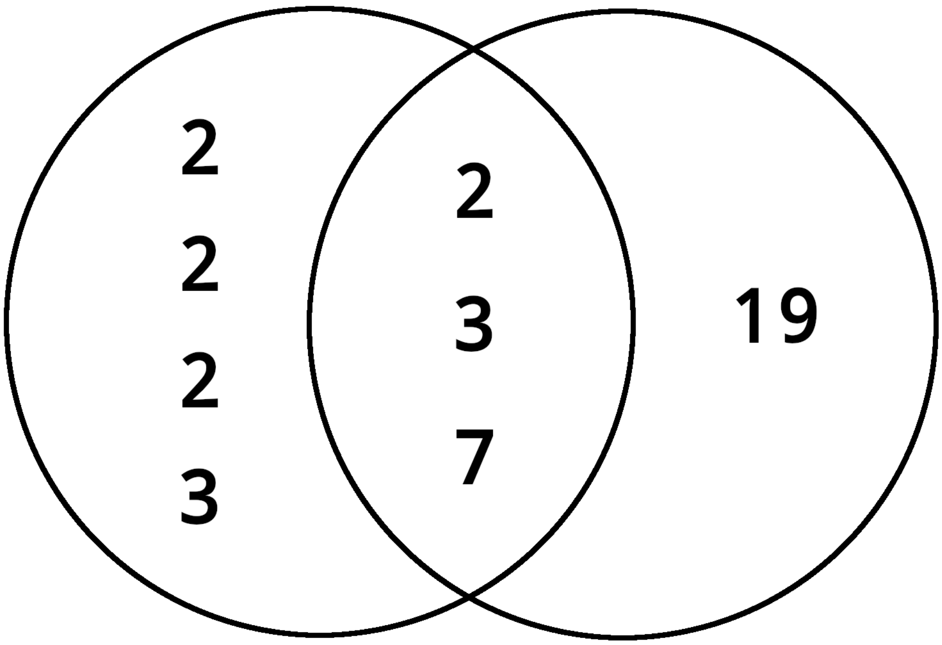
Funkcja NWW(a, b), $\in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje najmniejszą liczbę c taką, że a i b są jednocześnie podzielne przez c. Aby znaleźć NWW(a, b) można posłużyć się następującym wzorem:

$$\mathrm{NWW}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{NWD(a, b)}}$$

NWW oraz NWD można też obliczyć znając rozkład liczb na czynniki pierwsze. NWW oblicza się jako iloczyn największych potęg unikalnych czynników. NWW to iloczyn wspólnych dla obu liczb czynników.

Przykład:

$$\mathbf{1008} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad \mathbf{798} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$$



Więc:

$$\mathrm{NWW}(798, 1008) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 19152$$

$$\mathrm{NWD}(798, 1008) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

Oprocentowanie lokat i kredytów

Procent prosty - rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do wkładu nie podlegają oprocentowaniu.
Procent składany - rodzaj oprocentowania, który nalicza procent od odsetek doliczonych do wkładu w każdym kolejnym rozpatrywanym okresie.
Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**, a czas między kapitalizacjami **okresem kapitalizacji**.

Niech K_0 będzie początkowym wkładem pieniężnym, K - końcową otrzymaną kwotą, n - liczbą równych okresów kapitalizacji, które miały miejsce w okresie m, m - liczbą okresów oszczędzania, r - stopą oprocentowania, p - podatkiem od dochodów kapitałowych. Wtedy:

Procent prosty: $$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot m}$$

Procent składany: $$K = K_0 \cdot \left[1 + \frac{r}{n}\left(1 - \frac{p}{100}\right)\right]^{n \cdot m}$$

Cechy podzielności

- **2** - ostatnia cyfra liczby jest parzysta.

$$7236 : 6 \text{ - parzysta} \Rightarrow 2 \,|\, 7236$$

- **3** - suma wszystkich cyfr liczby jest podzielna przez 3.

$$828 : 8 + 2 + 8 = 18,\ 3 \,|\, 18 \Rightarrow 3 \,|\, 828$$

- **4** - liczba złożona z cyfr dziesiątek i jedności cyfry jest podzielna przez 4.

$$102\,472 : 4 \,|\, 72 \Rightarrow 4 \,|\, 102\,472$$

- **5** - ostatnia cyfra liczby to 0 lub 5.

$$128\,490 : 0 \in \{0, 5\} \Rightarrow 5 \,|\, 128\,490$$

- **6** - liczba jest podzielna przez 2 i 3.

$$39\,504 : 4 \text{ - parzysta} \wedge 3 + 9 + 5 + 0 + 4 = 21,\ 3 \,|\, 21 \Rightarrow 6 \,|\, 39\,504$$

- **7** - różnica liczby bez cyfry jedności i podwojonej cyfry jedności jest podzielna przez 7.

$$637 : 63 - 2 \cdot 7 = 49,\ 7 \mid 49 \Rightarrow 7 \mid 637$$

- **8** - liczba złożona z cyfr setek, dziesiątek i jedności cyfry jest podzielna przez 8.

$$340\,696 : 8 \mid 696 \Rightarrow 8 \mid 340\,696$$

- **9** - suma wszystkich cyfr liczby jest podzielna przez 9.

$$59\,247 : 5 + 9 + 2 + 4 + 7 = 27,\ 9 \mid 27 \Rightarrow 9 \mid 59\,247$$

- **10** - ostatnia cyfra liczby to 0.

$$23\,140 : 0 \in \{0\} \Rightarrow 10 \mid 23\,140$$

- **11** - naprzemienne dodawanie i odejmowanie cyfr liczby daje wynik podzielny przez 11.

$$1\,062\,292 : 1 - 0 + 6 - 2 + 2 - 9 + 2 = 0,\ 11 \mid 0 \Rightarrow 11 \mid 1\,062\,292$$

- **12** - liczba jest podzielna przez 3 i 4.

$$78\,624 : 7 + 8 + 6 + 2 + 4 = 27,\ 3 \mid 27 \wedge 4 \mid 24 \Rightarrow 12 \mid 78\,624$$

3 Wielomiany, funkcje wielomianowe

Informacje i twierdzenia

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_+$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$. Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ to współczynniki wielomianu. Wielomian stopnia zerowego to każda liczba rzeczywista różna od zera. Wielomian zerowy to liczba równa zeru; nie ma określonego stopnia.

Wielomian W(x) jest podzielny przez wielomian P(x) rózny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian Q(x), dla którego prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wówczas Q(x) nazywany jest ilorazem wielomianu W(x) przez P(x), a P(x) jest dzielnikiem wielomianu W(x).

Pierwiastek wielomianu W(x) to liczba rzeczywista a, dla której $W(a) = 0$.

Pierwiastek k-krotny wielomianu W(x), gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ to liczba a taka, że W(x) jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczba k jest nazywana krotnością pierwiastka.

Twierdzenie o dzieleniu (rozkładzie) wielomianu
Jeśli W(x) oraz P(x) są wielomianami i P(x) nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany Q(x) oraz R(x) takie, że prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie R(x) jest wielomianem zerowym lub wielomianem o stopniu mniejszym od stopnia wielomianu P(x).

Twierdzenie o reszcie wielomianu
Reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian $(x-a)$ jest równa W(a).

Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych
Jeżeli wielomian W(x) ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{C} \wedge q \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q - dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Twierdzenie Bézouta
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny bez reszty przez dwumian $(x - a)$.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu
Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki
Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki sponia co najwyżej drugiego. Rozkład w taki sposób jest jednoznaczny (z dokładnością co do kolejności czynników i stałej).

Reguła znaków Kartezjusza
Dla dowolnego wielomianu o rzeczywistych współczynnikach, uporządkowanych według malejącej potęgi zmiennej, ilość dodatnich miejsc zerowych wielomianu jest równa liczbie zmian znaków między niezerowymi współczynnikami, albo jest mniejsza o wielokrotność liczby 2.

Schemat Hornera
Sposób oblicznia wartości wielomianu dla danej wartości argumentu. Wykorzystywany również do przeprowadzania dzielenia wielomianu przez dwumian w formie $(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$ na podstawie twierdzenia Bézouta.

Przykład:

$$\text{Podziel } W(x) = x^4 - 22x^2 - 56x + 77 \text{ przez dwumian } x - 1$$

1. Zapisz wszystkie współczynniki wielomianu od najwyższej potęgi (także z zerowymi) oraz a z dwumianu. Przepisz pierwszy współczynnik do najniższej linijki:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & \downarrow & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & \multicolumn{1}{|c}{}
\end{array}$$

2. Pomnóż przeniesiony współczynnik przez a zapisane po lewej stronie:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1\cdot 1 & & & \\
\hline
 & 1 & & & & \multicolumn{1}{|c}{}
\end{array}
$$

3. Dodaj ze sobą współczynnik z górnego wiersza do właśnie policzonego iloczynu poniżej:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0+1 & & & \multicolumn{1}{|c}{}
\end{array}
$$

4. Powtarzaj operacje mnożenia i dodawania aż do ostatniej kolumny:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & 1\cdot 1 & -21\cdot 1 & -77\cdot 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & -22+1 & -56+(-21) & \multicolumn{1}{|c}{77+(-77)}
\end{array}
$$

Otrzymujemy tabelkę wypełnioną w następujący sposób:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & 1 & -21 & -77 \\
\hline
 & 1 & 1 & -21 & -77 & \multicolumn{1}{|c}{\mathbf{0}}
\end{array}
$$

Więc:

$$\underbrace{(x^4-22x^2-56x+77)}_{W(x)} = \underbrace{(x-1)}_{P(x)}\underbrace{(1x^3+1x^2-21x-77)}_{\text{Q(x)}} + \underbrace{0}_{\text{R(x)}} \Leftrightarrow W(1)=0$$

Funkcja liniowa

Wzór ogólny:

$$f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Liczba a nazywana jest współczynnikiem kierunkowym, b wyrazem wolnym. Dziedziną i zbiorem wartości funkcji liniowej są liczby rzeczywiste.

Funkcja liniowa przecina oś OY w punkcie $(0, b)$, a oś OX w $(-\frac{b}{a}, 0)$. Wykres funkcji liniowej jest nachylony do osi OX pod kątem α takim, że tg $\alpha = a$.

Funkcja liniowa jest:

- nieograniczona,
- nieokresowa,
- monotoniczna ($a > 0$ - rosnąca, $a < 0$ - malejąca, $a = 0$ - stała),
- różnowartościowa (gdy $a \neq 0$),
- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = a$.

Funkcja kwadratowa

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q; \;\; p = -\frac{b}{2a}, \;\; q = -\frac{\Delta}{4a}, \;\; \Delta = b^2 - 4ac$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0; \;\; x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \;\; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Delta, wyróżnik wielomianu stopnia drugiego - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji kwadratowej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem $\Delta_2 = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- $\Delta = 0$ - Jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny: $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- $\Delta < 0$ - Brak pierwiastków rzeczywistych: ($x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ (zespolonych)).

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której ramiona skierowane są do góry gdy $a > 0$ a do dołu, gdy $a < 0$.

Wierzchołek funkcji kwadratowej znajduje się w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Alternatywnie, współrzędną **x** wierzchołka można wyliczyć średnią arytmetyczną miejsc zerowych: $p = \frac{x_1+x_2}{2}$, a współrzędną **y** wartością funkcji w punkcie p: $q = f(p)$.

Wzory Viète'a - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia drugiego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest przedział $\langle q, +\infty)$ dla $a > 0$, $(-\infty, q\rangle$ dla $a < 0$.

Funkcja kwadratowa jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:

$$\text{malejąca w } (-\infty, p\rangle,\ \text{rosnąca w } \langle p, +\infty),\quad a > 0$$

$$\text{rosnąca w } (-\infty, p\rangle,\ \text{malejąca w } \langle p, +\infty),\quad a < 0$$

- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = 2ax + b$,
- ściśle wypukła dla $a > 0$, ściśle wklęsła dla $a < 0$.

Funkcja sześcienna

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(t) = t^3 + pt + q;\quad t = x + \frac{b}{3a},\quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2},\quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Wyróżnik wielomianu stopnia trzeciego - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji sześciennej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem $\Delta_3 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

- $\Delta_3 > 0$ - Trzy różne pierwiastki rzeczywiste: x_1, x_2, x_3,
- $\Delta_3 = 0$ - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z czego jeden dwukrotny lub jeden pierwiastek trzykrotny,
- $\Delta_3 < 0$ - Jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa pozostałe w liczbach zespolonych.

Ekstrema funkcji sześciennej (punkty krytyczne) znajdują się w punktach $(p, f(p))$, gdzie p wyznaczone jest wzorem: $p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. Jeżeli $b^2 - 3ac$ jest mniejsze bądź równe 0, wtedy ekstrem nie ma (funkcja $f(x)$ jest monotoniczna w całej dziedzinie).

Środek symetrii funkcji sześciennej (punkt przegięcia) znajduje się w punkcie o współrzędnych $\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$.

Wzory Viète'a - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia trzeciego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Dziedziną i zbiorem wartości funkcji sześciennej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja sześcienna jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:
  - rosnąca w $(-\infty, p_1\rangle$ i $\langle p_2, +\infty)$, malejąca w $\langle p_1, p_2\rangle$, $a > 0,\ b^2 - 3ac > 0$

- malejąca w $(-\infty, p_1\rangle$ i $\langle p_2, +\infty)$, rosnąca w $\langle p_1, p_2\rangle$, $a < 0,\ \ b^2 - 3ac > 0$
- rosnąca w całej dziedzinie, $a > 0,\ \ b^2 - 3ac \leq 0$
- malejąca w całej dziedzinie, $a < 0,\ \ b^2 - 3ac \leq 0$

- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,
- ściśle wypukła w przedziale:

$$\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla a} > 0, \left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla a} < 0$$

- ściśle wklęsła w przedziale:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla a} > 0, \left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla a} < 0$$

Funkcja wymierna

Funkcja będąca ilorazem funkcji wielomianowych. Iloraz wielomianów realizujących dane funkcje wielomianowe nazywa się wyrażeniem wymiernym. **Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)};\ \ P(x), Q(x) - \text{wielomiany},\ Q(x) \not\equiv 0$$

Asymptoty funkcji wymiernej

- Pionowa:
  Wszystkie miejsca, gdzie mianownik funkcji wymiernej $Q(x) = 0$.

- Pozioma:
  Niech L będzie stopniem licznika funkcji wymiernej, M stopniem mianownika funkcji wymiernej, a a_L, a_M to kolejno współczynniki przy największej potędze licznika i mianownika. Wtedy:

$L < M$	$L = M$	$L > M$
$y = 0$	$y = \frac{a_L}{a_M}$	Brak asymptoty poziomej

- Ukośna:
  Występuje, gdy stopień licznika jest o jeden większy od mianownika. Aby policzyć wzór jej prostej należy przeprowadzić pisemne dzielenie licznika przez mianownik. Wynikiem jest iloraz dzielenia.

Przykład:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 10x + 4}$$

Stopień licznika jest o 1 większy od mianownika, więc:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & +3 \\ \cline{2-5}
2x^2 - 10x + 4) & 2x^3 & -4x^2 & +6x & +9 \\
 & -2x^3 & +10x^2 & -4x & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^2 & +2x & +9 \\
 & & -6x^2 & +30x & -12 \\ \cline{3-5}
 & & & 32x & -3
\end{array}
$$

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 = \underline{(x+3)}(2x^2 - 10x + 4) + 32x - 3$$

Asymptota ukośna: $y = x + 3$

Specjalnym przypadkiem funkcji wymiernej jest **funkcja homograficzna**.
Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \; c \neq 0, \; ad - bc \neq 0$$

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem jednego miejsca zerowego opisanego wzorem $-\frac{d}{c}$.

Zbiór wartości to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem punktu $\frac{a}{c}$, którego zawarcie sprawiłoby, że funkcja homograficzna spełniałaby równanie $ad - bc = 0$.

Asymptota pionowa opisana jest równaniem $x = -\frac{d}{c}$, a asymptota pozioma $y = \frac{a}{c}$.

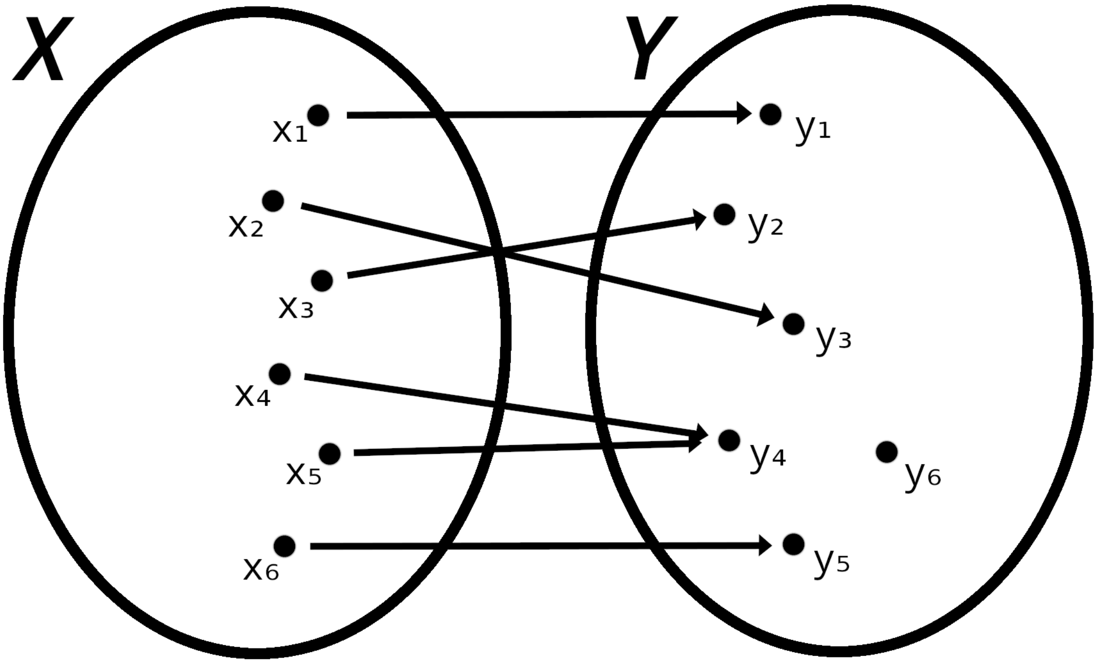
Środkiem symetrii a zarazem punktem przecięcia asymptot jest punkt o współrzędnych $S = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Funkcja homograficzna jest monotoniczna w przedziałach $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ i $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$. Jest przedziałami rosnąca, gdy $ad - bc > 0$ a przedziałami malejąca, gdy $ad - bc < 0$.

4 Właściwości i wykresy funkcji

Funkcja - relacja między elementami zbioru X i Y taka, że każdemu elementowi zbioru X przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru Y.

$$f : X \to Y$$



Funkcja f przedstawiona jako graf. Każdemu argumentowi ze zbioru X przyporządkowano dokładnie jeden element ze zbioru Y. Dwóm różnym elementom w zbiorze X może odpowiadać ten sam element Y. Nie każdy element zbioru Y musi być wartością funkcji f.

Zbiór X nazywa się dziedziną lub zbiorem argumentów, a zbiór Y - przeciwdziedziną lub zbiorem wartości.
Każdy $x \in X$ to argument funkcji f, a $y \in \{n : n \in Y \wedge n = f(x)\}$ - wartością funkcji.
Funkcja f to przekształcenie (odwzorowanie) zbioru X w zbiór Y.

Twierdzenie Darboux - Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, a na jej dziedzinie niech będzie zdefiniowany przedział domknięty $\langle a, b\rangle$. Wtedy, jeżeli $f(a) > f(c) > f(b)$ lub $f(a) < f(c) < f(b)$ to punkt $c \in \langle a, b\rangle$. Szczególnym przypadkiem jest, gdy a i b mają różne znaki. Wtedy w przedziale domkniętym między nimi gwarantowane jest istnienie c takiego, że $f(c) = 0$.

Właściwości funkcji

- Różnowartościowa (iniekcja)
  Funkcja dla każdego elementu dziedziny przyjmuje różny element z przeciwdziedziny co najwyżej raz:

$$f : X \to Y \text{ - różnowartościowa } \Leftrightarrow \bigwedge_{a,b \in X} a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

- Funkcja "na" (suriekcja)
  Funkcja, która przyjmuje wszystkie wartości z przeciwdziedziny:

$$f : X \to Y \text{ - "na" } \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y$$

- Funkcja wzajemnie jednoznaczna (bijekcja)
  Funkcja, w której każdemu elementowi dziedziny odpowiada jeden i tylko jeden element z przeciwdziedziny, przy czym każdy y należący do zbioru Y jest obrazem zbioru X. Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest jednocześnie różnowartościowa i "na".

- Addytywna
  Funkcja zachowuje operację dodawania: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- Multiplikatywna
  Funkcja zachowuje operację mnożenia: $f(xy) = f(x)f(y)$

- Parzysta
  Wykres funkcji jest symetryczny względem osi rzędnych (OY): $f(x) = f(-x)$

- Nieparzysta
  Wykres funkcji jest symetryczny wzglęgem środka układu współrzędnych: $f(x) = -f(x)$

- Ciągła
  Arbitralnie mała zmiana wartości funkcji jest uzasadniona arbitralnie małą zmianą argumentu funkcji. Pozbawiona jest też punktów nieciągłości pierwszego rodzaju usuwalnych, pierwszego rodzaju i drugiego rodzaju.

- Monotoniczna
  Funkcja, która zachowuje pewien określony porządek zbiorów. Niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją na uporządkowanych zbiorach X, Y, a x_1, x_2 elementami dziedziny funkcji f. Wówczas funkcja f jest:

- rosnąca (silnie rosnąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- malejąca (silnie malejąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- nierosnąca (słabo rosnąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- niemalejąca (słabo malejąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- stała, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

- Różniczkowalna
  Funkcja ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, oraz wartość tej pochodnej jest skończona.

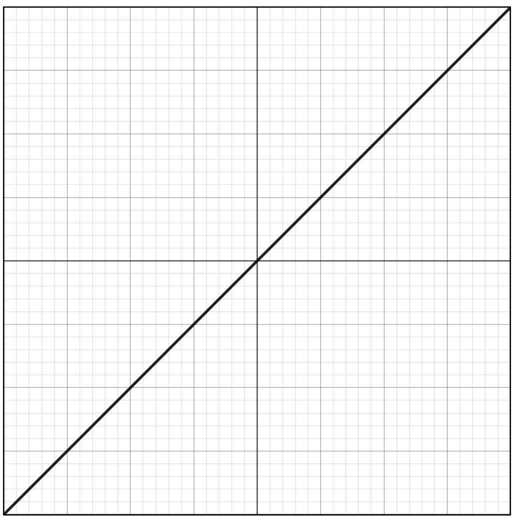
- Okresowa
  Funkcja jest okresowa, gdy pewne wartości pojawiają się cyklicznie co pewien regularny odstęp. Niech C, $C \neq 0$ będzie pewną stałą wartością (okresem funkcji). Wtedy dla funkcji okresowej prawdziwa jest równość:

$$f(x + C) = f(x)$$

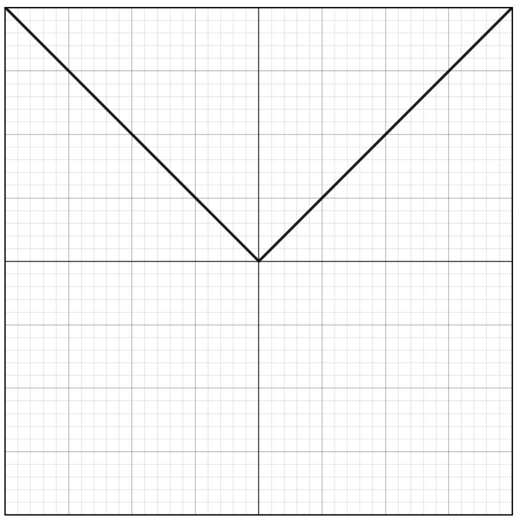
- Wypukła
  Wykres funkcji f w przedziale (a, b) leży ponad prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$

- Wklęsła
  Wykres funkcji f w przedziale (a, b) leży pod prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$

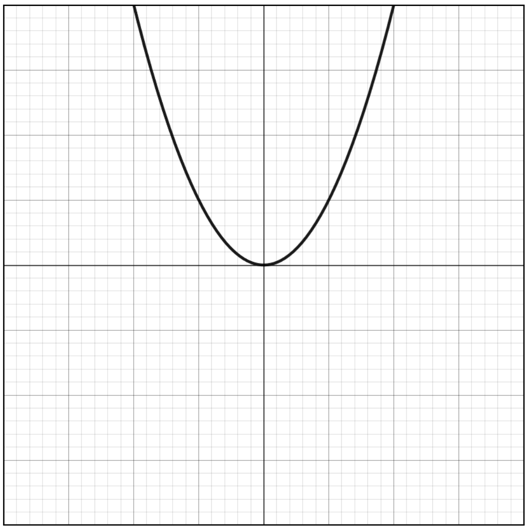
Wykresy funkcji



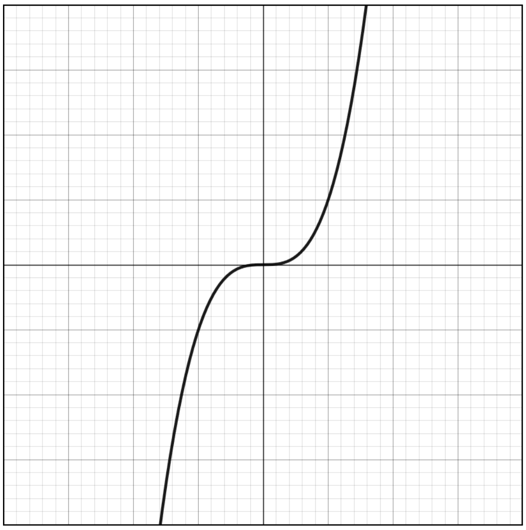
$f(x) = x$



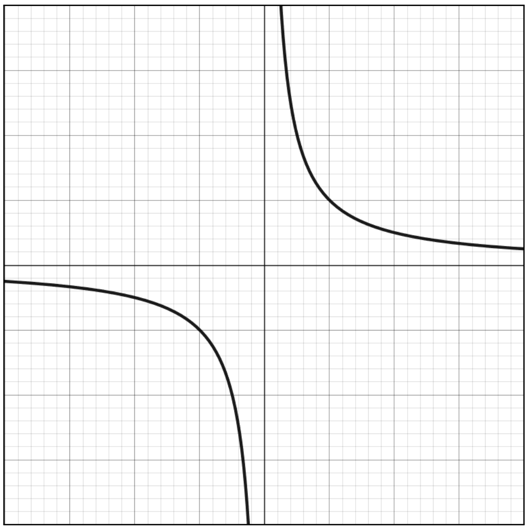
$f(x) = |x|$



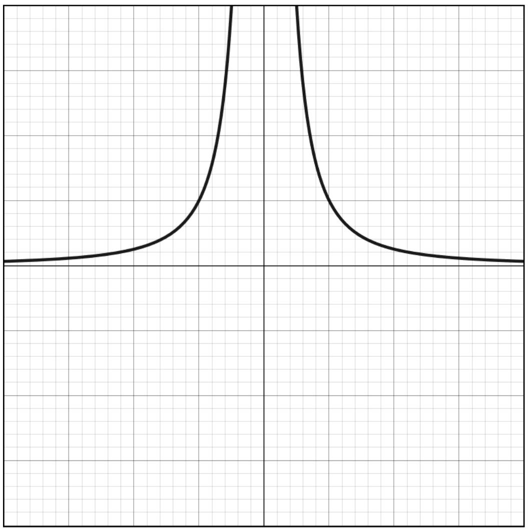
$f(x) = x^2$ - **parabola**



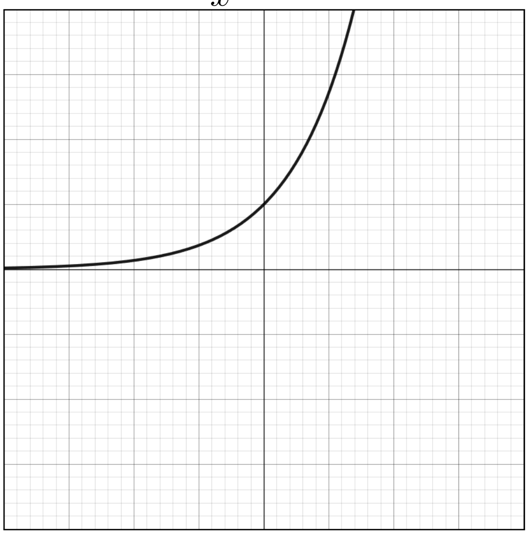
$f(x) = x^3$



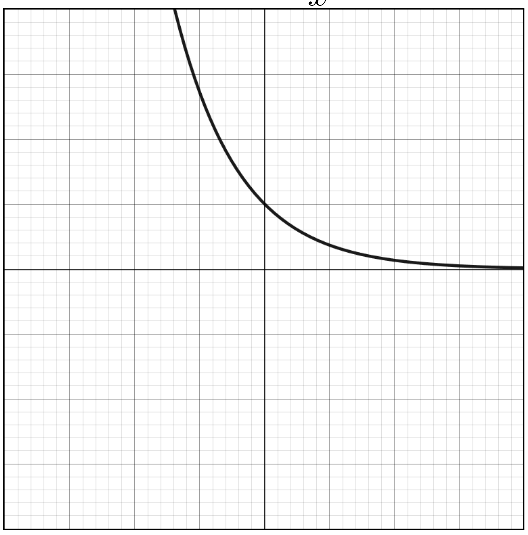
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ - **hiperbola**



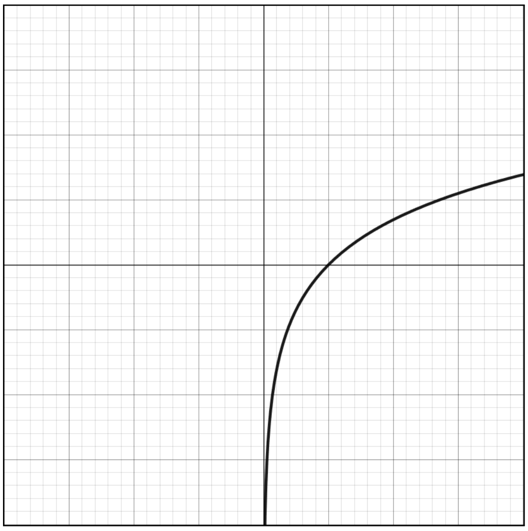
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



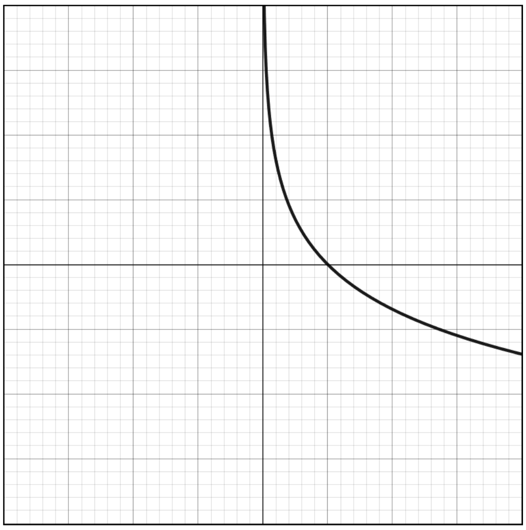
$f(x) = a^x, \ a > 1$



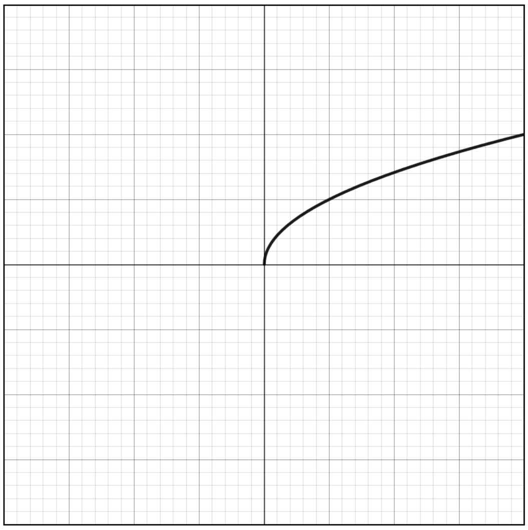
$f(x) = a^x, \ 0 < a < 1$



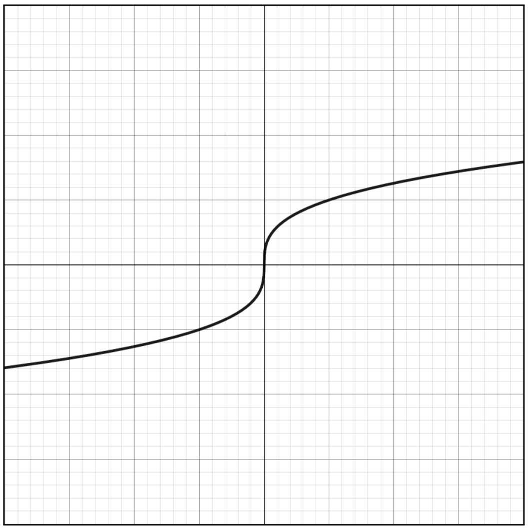
$f(x) = \log_a x,\ a > 1$



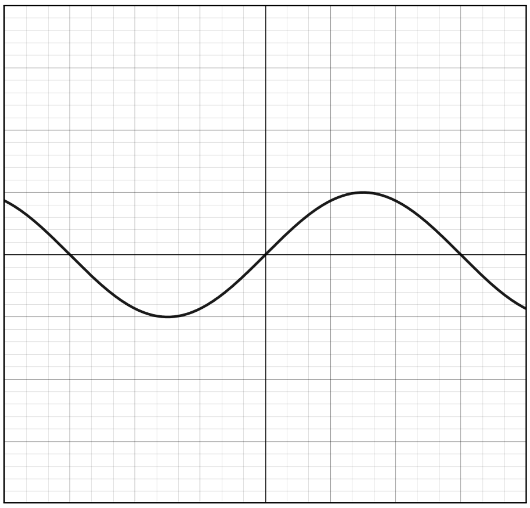
$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$



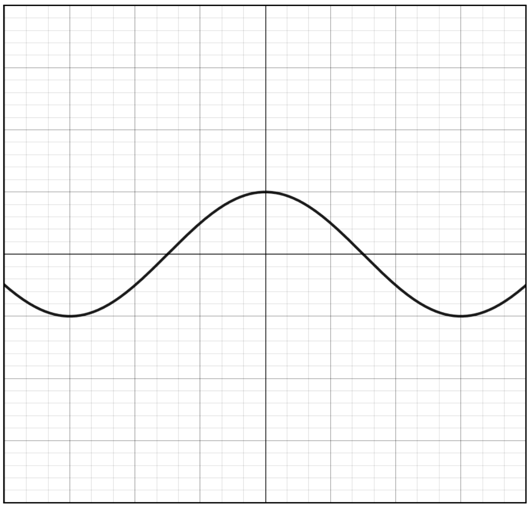
$f(x) = \sqrt{x}$



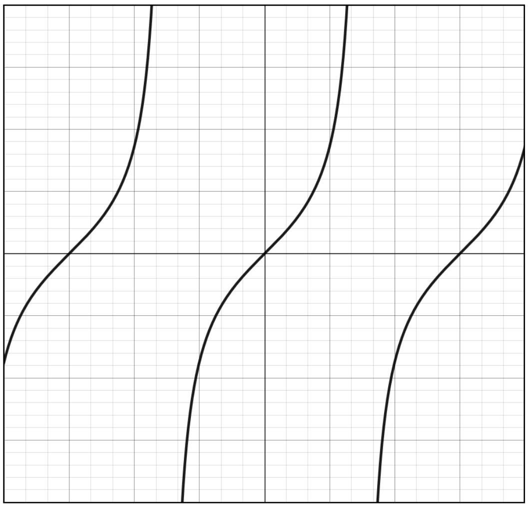
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



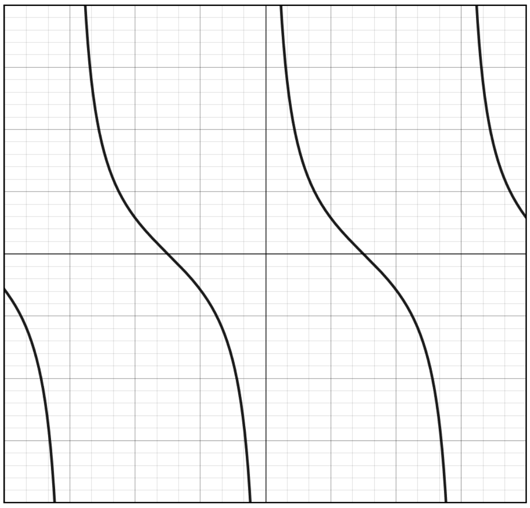
$f(x) = \sin x$ - **sinusoida**



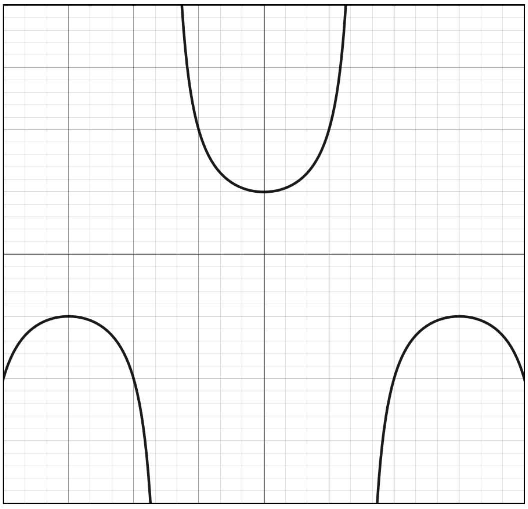
$f(x) = \cos x$ - **cosinusoida**



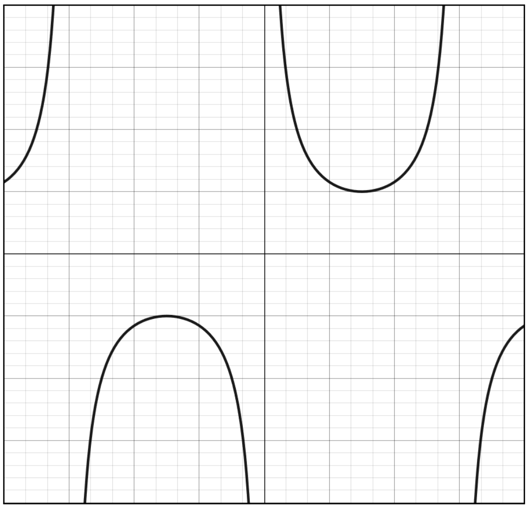
$f(x) = \text{tg } x$ - **tangensoida**



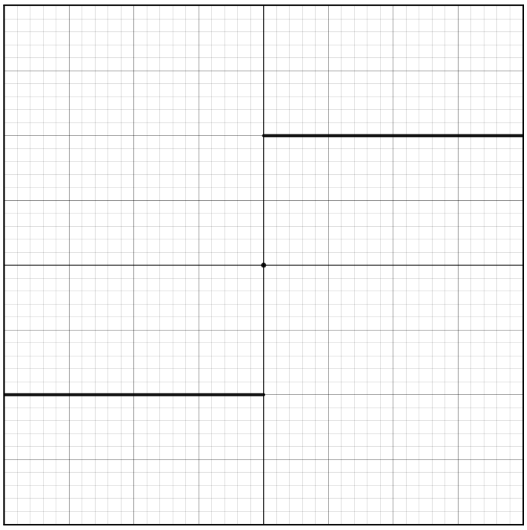
$f(x) = \text{ctg } x$ - **cotangensoida**



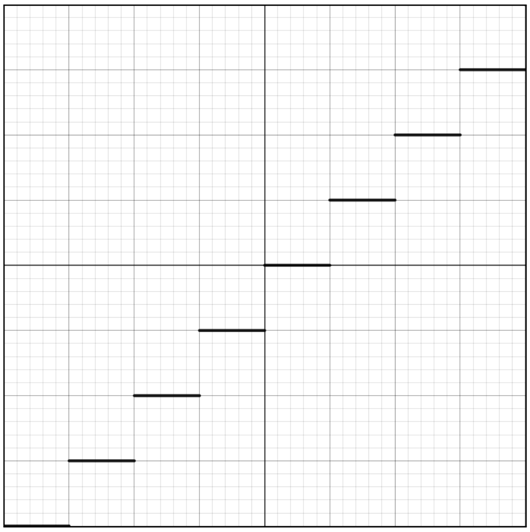
$f(x) = \sec x$



$f(x) = \text{cosec } x$



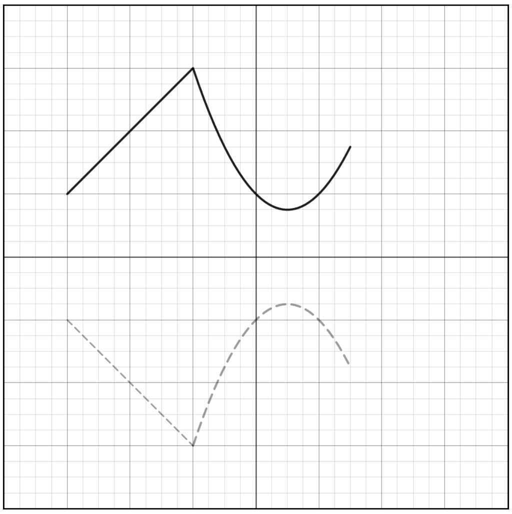
$f(x) = \text{sgn}(x)$



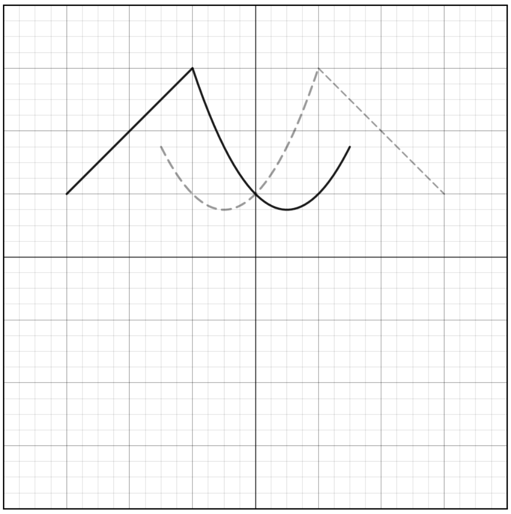
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

Przekształcenia funkcji

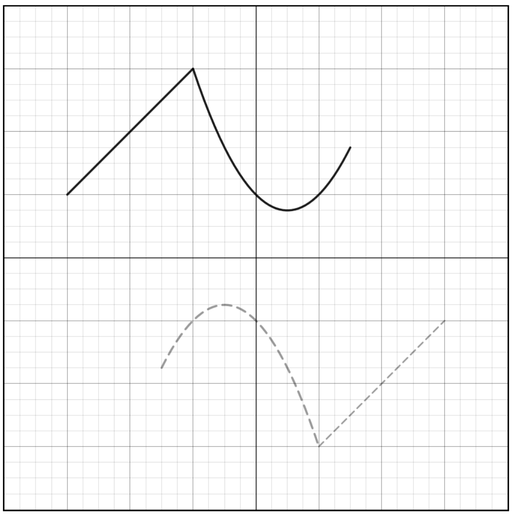
Symetria osiowa względem osi OX:
$y = -f(x)$



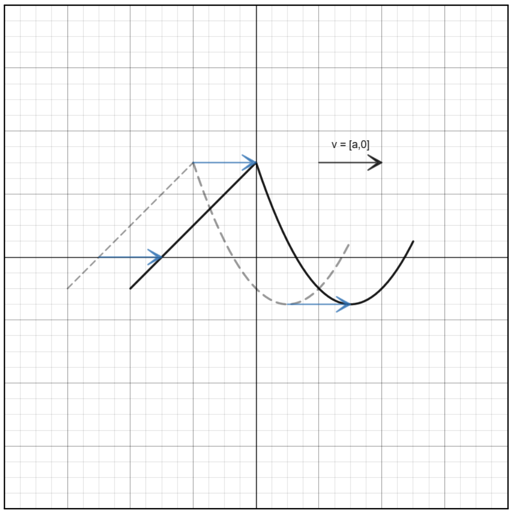
Symetria osiowa względem osi OY:
$y = f(-x)$



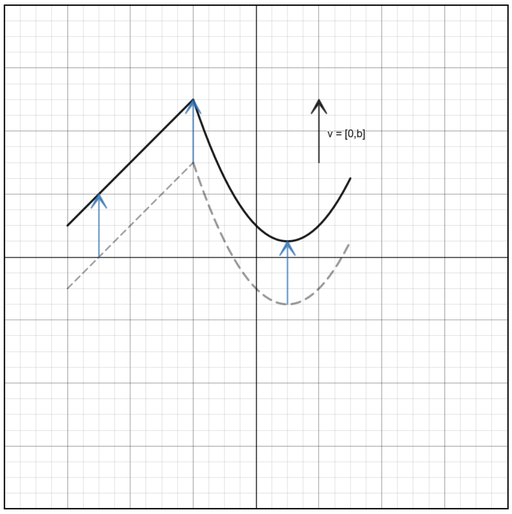
Symetria osiowa względem
środka układu współrzędnych:
$y = -f(-x)$



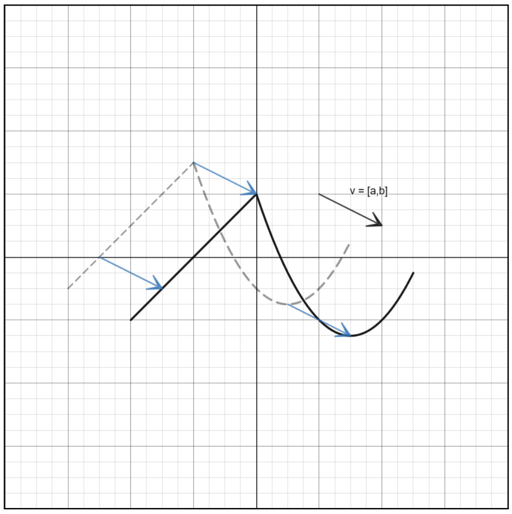
Przesunięcie równoległe poziome:
$y = f(x - a), \quad \vec{v} = [a, 0]$

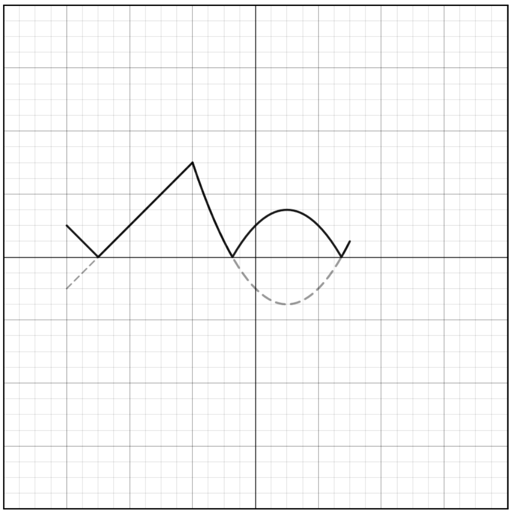


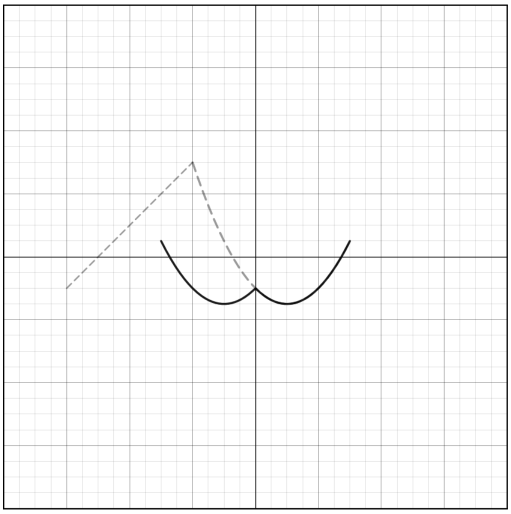
Przesunięcie równoległe pionowe:
$y = f(x) + b, \quad \vec{v} = [0, b]$



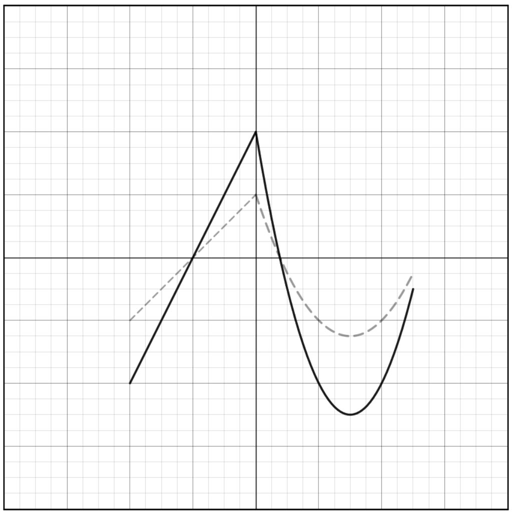
Przesunięcie równoległe ukośne:
$y = f(x - a) + b, \quad \vec{v} = [a, b]$

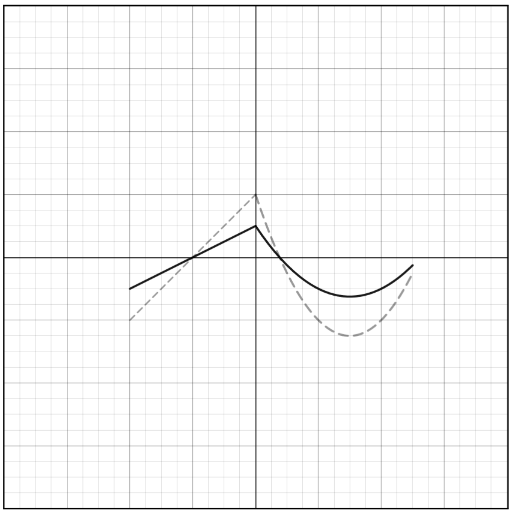






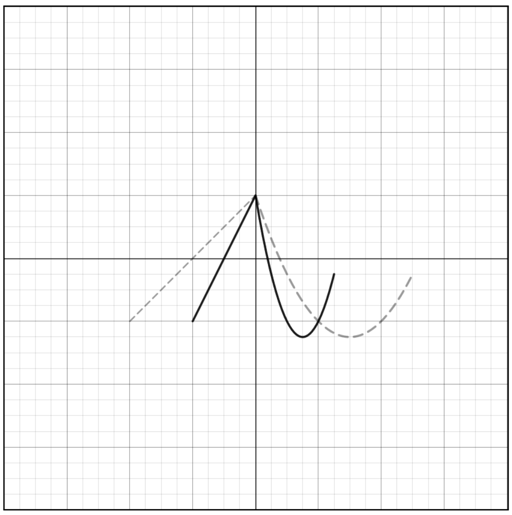
$y = |f(x)|$ $y = f(|x|)$

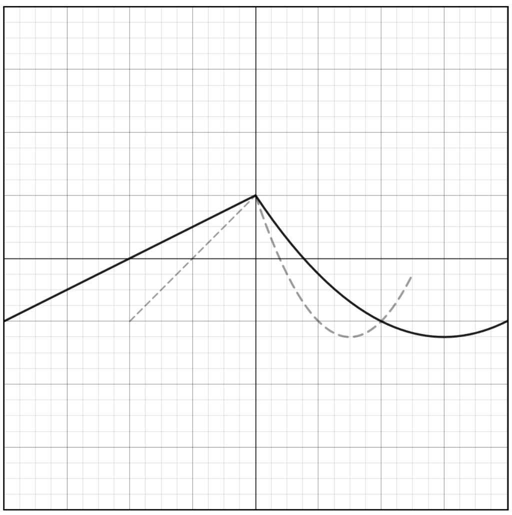




Powinowactwo prostokątne o osi OX: $y = af(x), \quad a > 1$

Powinowactwo prostokątne o osi OX: $y = af(x), \quad 0 < a < 1$





Powinowactwo prostokątne o osi OY: $y = f(ax), \quad a > 1$

Powinowactwo prostokątne o osi OY: $y = f(ax), \quad 0 < a < 1$

5 Ciągi

Informacje i twierdzenia

Ciąg - Przyporządkowanie zbiorowi liczb $A = \langle 1, n \rangle,\ A \subset \mathbb{N}_+$ zwanemu zbiorowi indeksów kolejnych elementów, zwanymi **wyrazami ciągu**.

Ciąg skończony to ciąg, w którym występuje skończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest podzbiorem właściwym liczb naturalnych dodatnich.
Ciąg nieskończony to ciąg, w którym występuje nieskończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest zbiorem liczb naturalnych dodatnich.

Monotoniczność ciągu

- Stały - wyrazy ciągu są sobie równe dla dowolnej pary indeksów:
  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \;\; a_n = a_{n+1}$
- Rosnący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu o mniejszym indeksie:
  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \;\; a_n < a_{n+1}$
- Niemalejący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \;\; a_n \leq a_{n+1}$
- Nierosnący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \;\; a_n \geq a_{n+1}$
- Malejący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \;\; a_n > a_{n+1}$

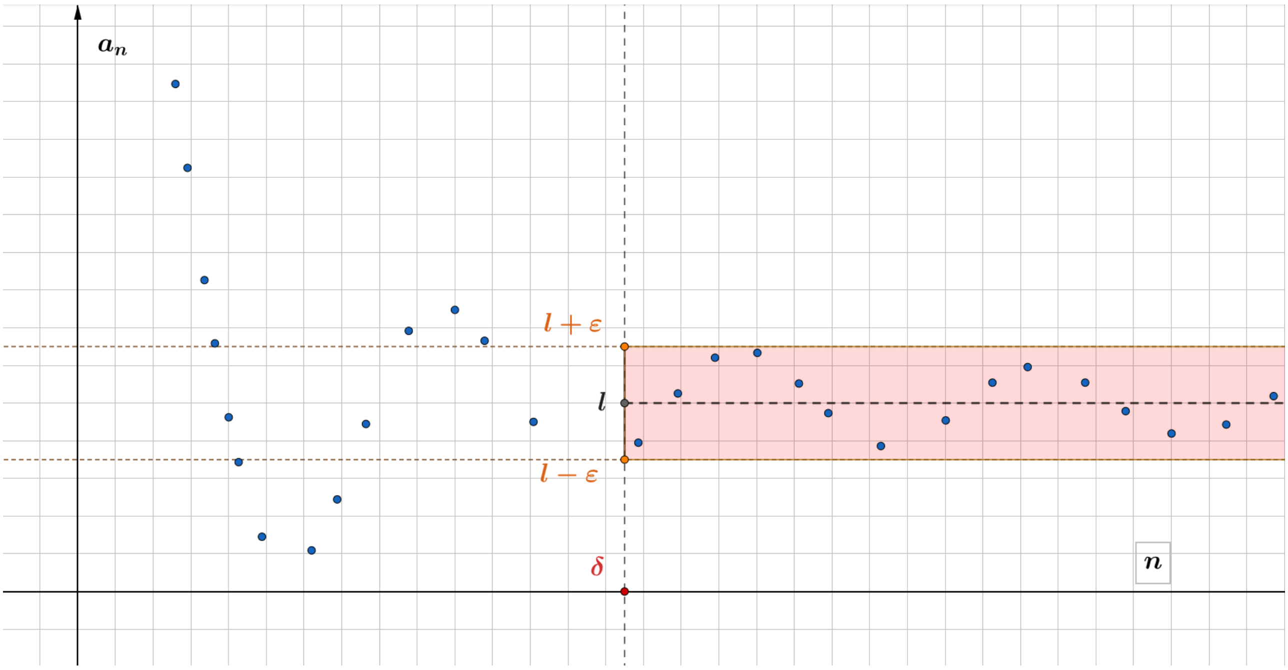
Monotoniczność ciągu można określić, badając znak różnicy kolejnych wyrazów ciągu: $a_{n+1} - a_n$.

$$\begin{array}{lcl} a_{n+1} - a_n > 0 & - & \text{rosnący} \\ a_{n+1} - a_n \geq 0 & - & \text{niemalejący} \\ a_{n+1} - a_n \leq 0 & - & \text{nierosnący} \\ a_{n+1} - a_n < 0 & - & \text{malejący} \end{array}$$

Granica ciągu liczbowego

Liczba l jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ zachodzi nierówność $|a_n - l| < \varepsilon$, tj. odległość od granicy l do wartości a_n jest mniejsza od ε. Definicja ta jest znana jako definicja epsilon - delta granicy ciągu.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} |a_n - l| < \varepsilon$$



Ciąg zbieżny to ciąg nieskończony, którego granicą jest liczba rzeczywista. Taki ciąg ma tylko jedną granicę.
Ciąg jest rozbieżny, gdy granicą jest dodatnia bądź ujemna nieskończoność.

Twierdzenia o działaniach na granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to zachodzą następujące równości:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych: $(a_n), (b_n), (c_n)$. Jeżeli dla wszystkich wyrazów ciągu o indeksach większych od pewnego N zachodzi nierówność:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz prawdziwa jest równość:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = l$$

to wtedy:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = l$$

Ciąg arytmetyczny

Niech ciąg (a_n) będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem arytmetycznym nazywamy takie (a_n), gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez dodanie stałej r, nazywanej **różnicą ciągu arytmetycznego**.

Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Postać jawna

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na różnicę ciągu

$$r = a_n - a_{n+1}$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Warunek wystarczający ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg geometryczny

Niech ciąg (a_n) będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem geometrycznym nazywamy takie (a_n), gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez pomnożenie przez stałą q, nazywaną **ilorazem ciągu arytmetycznego**.

Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Postać jawna

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na iloraz ciągu

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1 \qquad a_1 \cdot n,\ q = 1$$

Warunek wystarczający ciągu geometrycznego

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Dla $|q| < 1$ ciąg geometryczny staje się zbieżny i można go rozważać jako **szereg geometryczny**. Sumę wszystkich wyrazów szeregu geometrycznego można wyliczyć ze wzoru:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

6 Elementy analizy matematycznej

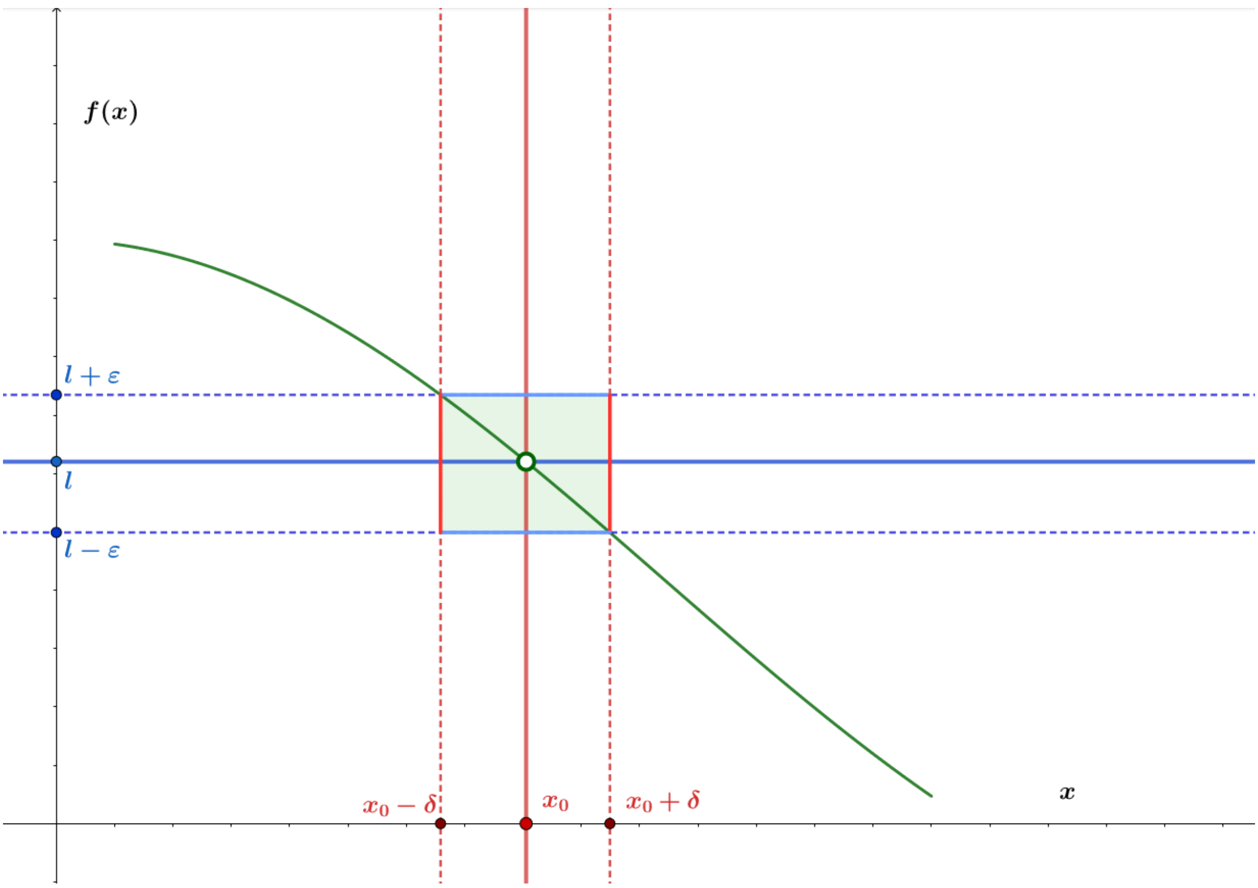
Granica funkcji

Granica - wartość, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie dla argumentów z dziedziny funkcji arbitralnie bliskich punktowi. Operację tą notuje się symbolem $\lim\limits_{x \to n}$ nazywanym *limesem*, czytanym "Limes przy x dążącym do n".

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji - Liczba l jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego elementu dziedziny funkcji $f(x)$, $f : X \to \mathbb{R}$, takiego że $x \in X \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ prawdziwa jest zależność: $|f(x) - l| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\}$$



Definicja Heinego - Funkcja f ma granicę l w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do x_0, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X który to podzbiór ma w punkcie skupienia x_0 (podzbiór ten nazywa się sąsiedztwem $S(x_0)$), wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ jest zbieżna do l.

Granica jednostronna

Granica jednostronna to wspólna nazwa na granicę *lewostronną* i *prawostronną*.

Granica lewostronna - wartość w punkcie x_0, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny mniejsze od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x - \delta < x < x_0\}$$

Definicja Heinego
Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo $S(x_0)$, gdzie $\forall x \in S(x_0)\ x < x_0$.

Granica prawostronna - wartość w punkcie x_0, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny większe od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x_0 < x < x + \delta\}$$

Definicja Heinego
Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo $S(x_0)$, gdzie $\forall x \in S(x_0)\ x > x_0$.

Jeżeli granica lewostronna oraz prawostronna w punkcie x_0 są sobie równe, jest to warunek wystarczający dla istnienia granicy w tym punkcie:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

Jeżeli granica lewostronna i prawostronna w punkcie są różne, wtedy granica w tym punkcie nie istnieje.

Granica niewłaściwa

Granica niewłaściwa to granica, której wartość w punkcie x_0 jest równa minus $(-\infty)$ lub plus $(+\infty)$ nieskończoności. Granica w punkcie jest niewłaściwa, gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} f(x) > M, \quad A = \{x : x \in X \land 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} f(x) < -M, \quad A = \{x : x \in X \land 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Definicja Heinego

Funkcja f ma granicę $\pm\infty$ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do x_0, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X który to podzbiór ma w punkcie skupienia x_0, wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ jest zbieżna do $\pm\infty$.

Granica w nieskończoności

Granica w nieskończoności przyjmuje wartość l gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\mu\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x>\mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\mu\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x<\mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

Definicja Heinego
Funkcja f ma granicę l w $\pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do $\pm\infty$, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X, odpowiednio $(a, +\infty)$ i $(-\infty, a)$, wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ dąży do l.

Granica niewłaściwa w nieskończoności występuje tylko wtedy, gdy granica spełnia warunki granicy niewłaściwej i granicy w nieskończoności.

Własności granic

Niech funkcje $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to Y$ mają granice właściwe. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [c \cdot f(x)] &= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \\
\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \\
\lim_{x\to x_0} [f(x)^{g(x)}] &= \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}
\end{aligned}$$

Symbole nieoznaczone

Wyrażenia algebraiczne które nie mają sensu liczbowego, często występujące przy poszukiwaniu limitów. Jest ich siedem:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0 \cdot \pm\infty \qquad \infty - \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

Takie wyniki nie są końcowymi rozwiązaniami i funkcję należy przekształcić, by otrzymać właściwy wynik.

Reguła de L'Hôpitala (czyt. delopitala) - Reguła umożliwiająca wyznaczenie granic wyrażeń, których wynikiem jest symbol nieoznaczony.
Jeżeli funkcje $f, g : X \to Y$ są ciągłe oraz:

- **Granice funkcji są nieoznaczone**: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\pm\infty$,
- **Funkcje** $f(x)$ **i** $g(x)$ **są różniczkowalne**,
- **Pochodna** $g'(x)$ **jest różna od 0**,
- **Istnieje granica ilorazu funkcji** $f(x)$ **i** $g(x)$,

Wtedy:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{2x^2-9x-5} = \frac{25-25}{2\cdot 25 - 9\cdot 5 - 5} = \frac{0}{0}$$

Stosując regułę de L'Hôpitala:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{2x^2-9x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)'}{(2x^2-9x-5)'} = \lim_{x\to 5} \frac{2x}{4x-9} = \frac{2\cdot 5}{4\cdot 5-9} = \frac{10}{11}$$

Reguła de L'Hôpitala działa również dla granic nieoznaczonych w nieskończoności.

Definicja ciągłości funkcji

Niech funkcja f będzie zdefiniowana w pewnym otoczeniu $U(x_0)$. Jeżeli istnieje granica właściwa w punkcie $f(x)$ oraz prawdziwa jest równość: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, to funkcja w tym punkcie jest ciągła. Funkcja jest ciągła w przedziale, jeżeli każdy punkt w przedziale spełnia powyższe warunki. By całą funkcję można było nazwać ciągłą, warunki te muszą zachodzić na całej dziedzinie funkcji.
Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe.

Limity a asymptoty wykresu

- Asymptota pionowa jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w prawostronnym (lewostronnym) sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą pionową

prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty\right)$.

- Asymptota pionowa obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $x = x_0$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą pionową obustronną.

- Asymptota pozioma jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(m, +\infty)$ (odpowiednio $(-\infty, m)$), $m \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = a$ jest asymptotą poziomą prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = a\right)$.

- Asymptota pozioma obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $y = a$ jest jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą poziomą obustronną.

- Asymptota ukośna jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(m, +\infty)$ (odpowiednio $(-\infty, m)$), $m \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0; \quad a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$$

  Jeżeli $a = 0$, prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f.

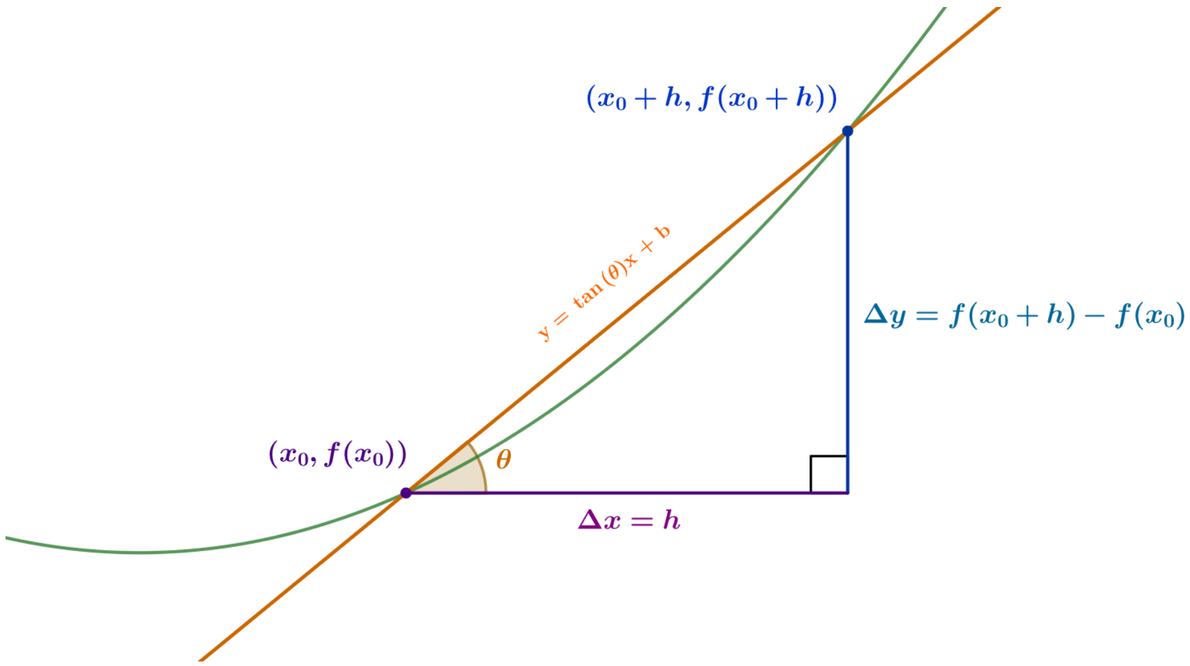
- Asymptota ukośna obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $y = ax + b$ jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą ukośną obustronną.

Pochodna funkcji w punkcie

Pochodna - miara czułości zmiany wartości funkcji względem zmiany wartości argumentu. Dla funkcji z jednym argumentem wartość pochodnej funkcji w punkcie wyznacza nachylenie prostej stycznej do wykresu w badanym punkcie. Proces znajdowania pochodnej nazywa się **różniczkowaniem**.

Niech $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y$, punkt x_0 należy do dziedziny X i h oznacza zmianę wartości zmiennej x. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Pochodną funkcji oznacza się: $f'(x)$ (notacja Lagrange'a) lub $\frac{d}{dx}f$ (notacja Liebnitza).

Jeżeli we wzorze na pochodną zamiast granicy obustronnej badana będzie kolejno granica prawostronna i lewostronna, to otrzymaną pochodną nazywa się odpowiednio pochodną prawostronną i pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0. Pochodne te notuje się symbolicznie odpowiednio: $f'_+(x)$, $f'_-(x)$.

Styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest prosta o równaniu:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi OX:

$$f'(x) = \mathrm{tg}(\alpha)$$

Normalna to prosta prostopadła do stycznej wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Opisuje ją równanie:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Funkcja pochodna

Niech f będzie dowolną funkcją taką, że $f : X \to Y$. Funkcją pochodną funkcji f nazywa się funkcję, która każdej liczbie x_0 należącej do dziedziny X przyporządkowuje $f'(x_0)$, jeśli pochodna w tym punkcie istnieje. Zbiór liczb z dziedziny funkcji f, dla których ta funkcja była różniczkowalna jest dziedziną funkcji pochodnej.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a	0	e^x	e^x
x	1	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$

Własności pochodnych

Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w pewnym zbiorze D, będącym podzbiorem dziedzin funkcji f i g, a α i β - dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy dla dowolnej liczby $x \in D$:

$$\begin{aligned}
[\alpha f(x) + \beta g(x)]' &= \alpha f'(x) + \beta g'(x) \\
[\alpha f(x) - \beta g(x)]' &= \alpha f'(x) - \beta g'(x) \\
[\alpha \cdot f(x) \cdot g(x)]' &= \alpha(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \\
[\alpha \cdot f(x)]' &= \alpha \cdot f'(x) \\
\left[\frac{\alpha}{f(x)}\right]' &= -\frac{\alpha \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} \\
\left[\frac{\alpha \cdot f(x)}{\beta \cdot g(x)}\right]' &= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\right) \\
[f(x)^{g(x)}]' &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right)
\end{aligned}$$

Reguła łańcuchowa - reguła pozwalająca obliczać pochodne funkcji złożonych. Niech funkcje f i g będą funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 oraz funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to wtedy funkcja złożona ma w punkcie x_0 pochodną:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Przykład:

Wyznacz funkcję pochodną funkcji: $\sqrt{x^2 - 3}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 3$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Korzystając z reguły łańcuchowej:

$$(\sqrt{x^2 - 3})' = \left(\sqrt{g(x)}\right)' \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot (x^2 - 3)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot 2x \quad = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Pochodna a monotoniczność funkcji

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby rzeczywistej z tego przedziału:

- $f'(x) > 0$, to funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) \geq 0$, to funkcja jest niemalejąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) = 0$, to funkcja jest stała w przedziale (a, b);
- $f'(x) \leq 0$, to funkcja jest nierosnąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) < 0$, to funkcja jest malejąca w przedziale (a, b).

Prawdziwe są twierdzenia odwrotne do powyższych.

Ekstrema funkcji

Ekstremum funkcji - maksymalna (maksimum) lub minimalna (minimum) wartość funkcji.
Wśród ekstrem rozróżnia się odpowiednie kategorie:

- Maksimum (minimum) lokalne
  Punkt x_0 jest ekstremum lokalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x należącego jednocześnie do dziedziny funkcji f oraz otoczenia punktu $x_0, U(x_0)$ prawdziwa jest nierówność:

  $$f(x) \leq f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0))$$

  Znaczy to, że w pewnej okolicy punktu x_0 nie występują wartości funkcji większe (mniejsze) od wartości w punkcie x_0, choć mogą być tej wartości równe.

- Maksimum (minimum) lokalne właściwe
  Punkt x_0 jest ekstremum lokalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x należącego jednocześnie do dziedziny funkcji f oraz otoczenia punktu $x_0, U(x_0)$ prawdziwa jest zależność:

  $$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \ \ (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

  Żadna wartość funkcji w otoczeniu punktu nie może być większa (mniejsza) ani równa wartości funkcji w punkcie x_0.

- Maksimum (minimum) globalne
  Punkt x_0 jest ekstremum globalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x w całej dziedzine funkcji f prawdziwa jest nierówność:

  $$f(x) \leq f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0))$$

  W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego, warunek dotyczy całej dziedziny.

- Maksimum (minimum) globalne właściwe
  Punkt x_0 jest ekstremum globalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x w całej dziedzine funkcji f prawdziwa jest zależność:

  $$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \ \ (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

  W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego właściwego, warunek dotyczy całej dziedziny.

Punkt stacjonarny - punkt w dziedzinie funkcji rzeczywistej, dla której pochodna tej funkcji przyjmuje wartość równą zeru.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie Fermata) - dla różniczkowalnej funkcji f, w pewnym przedziale $x_0 \in (a, b)$, pochodna $f'(x_0) = 0$.
Warunek Fermata nie gwarantuje istnienia ekstremów - funkcja może mieć pochodną równą zeru i nie mieć ekstremum w tym punkcie, a może mieć ekstremum i nie mieć w nim pochodnej.

Warunek konieczny i wystarczający ekstremum lokalnego - dla różniczkowalnej, ciągłej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mającej skończoną ilość punktów stacjonarnych w punkcie x_0 istnieje

- minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że:
  - $f'(x_0) = 0$,
  - $f'(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$,
  - $f'(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$;

- maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że:
  - $f'(x_0) = 0$,
  - $f'(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$,
  - $f'(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$.

Alternatywnie, jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ i druga pochodna jest ciągła, to jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum, przy czym jeżeli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum lokalne, a jeżeli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum lokalne.
Warunek ten nie rozstrzyga istnienia ekstremum, jeżeli druga pochodna jest równa 0.

Twierdzenie Rolle'a

Niech funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i różniczkowalna w przedziale (a, b). Wtedy pod warunkiem, że $f(a) = f(b)$ istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$

Twierdzenie Lagrange'a

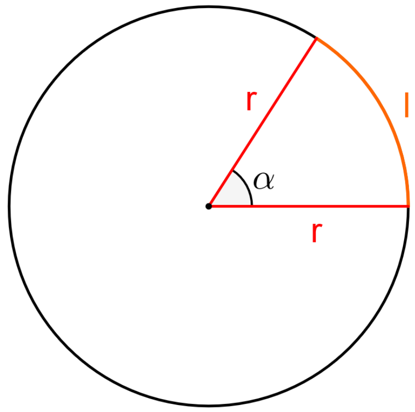
Niech funkcja $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i różniczkowalna w przedziale (a, b). Wtedy w przedziale (a, b) istnieje taki punkt c, że:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

7 Funkcje trygonometryczne

Miara łukowa kąta

Jednym ze sposobów podawania wartości kąta jest **radian** - niemianowana jednostka pochodna układu SI, zdefiniowana jako iloraz długości łuku nad długość promienia. Jeden radian to długość łuku równa długości promienia.



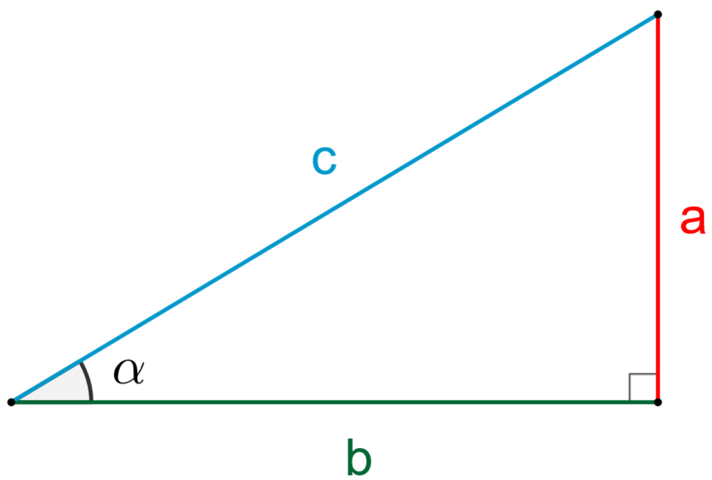
$$\text{rad} = \frac{l}{r}$$

Zamiana miary:

- stopniowej na łukową: $t^\circ = \frac{\pi \cdot t}{180}(\text{rad})$
- łukowej na stopniową: $t(\text{rad}) = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^\circ$

Definicje funkcji trygonometrycznych

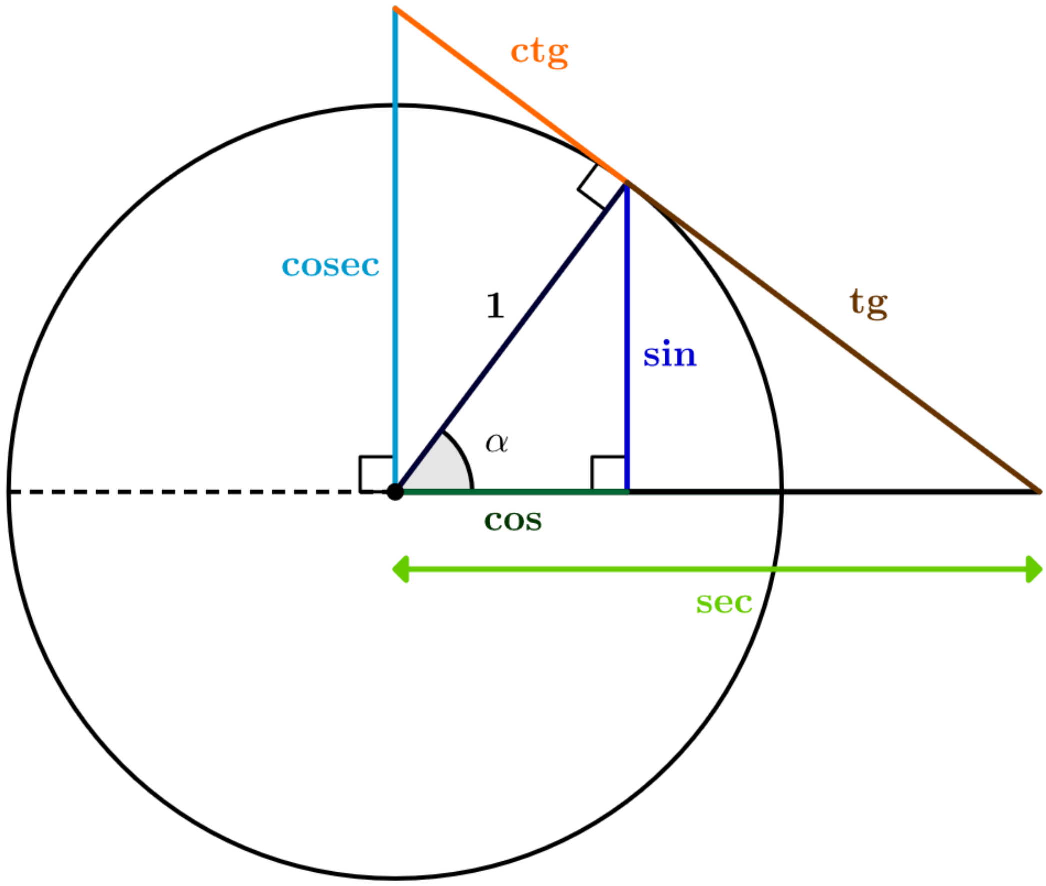
Definicja w trójkącie prostokątnym



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

Definicja w okręgu jednostkowym (interpretacja geometryczna)



Na powyższej ilustracji długości odcinków odpowiadają wartościom poszczególnych funkcji trygonometrycznych względem kąta środkowego α.

Dla wykresów funkcji trygonometrycznej, zobacz rozdział: *4. Właściwości i wykresy funkcji - Wykresy funkcji, str. 22-23.*

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad \operatorname{ctg}^2\ + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Wartości funkcji trygonometrycznych

Radiany / **Stopnie**	0 / $0°$	$\frac{\pi}{12}$ / $15°$	$\frac{\pi}{6}$ / $30°$	$\frac{\pi}{4}$ / $45°$	$\frac{\pi}{3}$ / $60°$	$\frac{5\pi}{12}$ / $75°$	$\frac{\pi}{2}$ / $90°$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\text{tg}\, x$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\times$
$\text{ctg}\, x$	$\times$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0
$\sec x$	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\times$
$\text{cosec}\, x$	$\times$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	1

Wzory redukcyjne

	I ćwiartka	**II ćwiartka**		**III ćwiartka**		**IV ćwiartka**	
φ	$90° - \alpha$ / $\frac{1}{2}\pi - \alpha$	$90° + \alpha$ / $\frac{1}{2}\pi + \alpha$	$180° - \alpha$ / $\pi - \alpha$	$180° + \alpha$ / $\pi + \alpha$	$270° - \alpha$ / $\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$270° + \alpha$ / $\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$360° - \alpha$ / $2\pi - \alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\text{tg}\,\varphi$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$
$\text{ctg}\,\varphi$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$-\text{tg}\,\alpha$	$-\text{ctg}\,\alpha$
$\sec\varphi$	$\text{cosec}\,\alpha$	$-\text{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\text{cosec}\,\alpha$	$\text{cosec}\,\alpha$	$\sec\alpha$
$\text{cosec}\,\varphi$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\text{cosec}\,\alpha$	$-\text{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\text{cosec}\,\alpha$

Tożsamości trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta - \sec\alpha\sec\beta}$$

$$\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta + \sec\alpha\sec\beta}$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta + \sec\alpha\sec\beta}$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta - \sec\alpha\sec\beta}$$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$$

Funkcje trygonometryczne podwojonego i połowy kąta

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sec(2\alpha) = \frac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha} \qquad \operatorname{cosec}(2\alpha) = \frac{\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$$

Redukcja potęg funkcji trygonometrycznych

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1-\cos(4\alpha)}{8} \qquad \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) \qquad \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

Uwaga - Funkcje $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, etc. to **funkcje cyklometryczne**, tj. funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. W przeciwieństwie do zwykłej funkcji trygonometrycznej, to kąt jest obrazem funkcji, podczas gdy wartość jest przeciwobrazem. Zachodzi więc następująca zależność:

$$\begin{gathered}\sin(\alpha) = x \Leftrightarrow \arcsin(x) = \alpha, \\ \cos(\alpha) = x \Leftrightarrow \arccos(x) = \alpha, \\ \vdots\end{gathered}$$

Dla poniższych definicji zakłada się, że $k \in \mathbb{C}$.

Sinus - $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ - okres podstawowy: 2π

$$\sin\alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{aligned} &\alpha = \arcsin x + 2k\pi \\ &\alpha = \pi - \arcsin x + 2k\pi \end{aligned}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 1 \\ \alpha = k\pi, & x = 0 \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = -1 \end{cases}$$

Cosinus - $\cos : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ - okres podstawowy: 2π

$$\cos\alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{aligned} &\alpha = \arccos x + 2k\pi \\ &\alpha = -\arccos x + 2k\pi \end{aligned}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ \alpha = 2k\pi, & x = 1 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \alpha = \pi + 2k\pi, & x = -1 \end{cases}$$

Tangens - $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{\alpha : \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ - okres podstawowy: π

$$\operatorname{tg}\alpha = x \;\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k\pi, & x = 0 \\ \alpha = \operatorname{arctg} x + k\pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

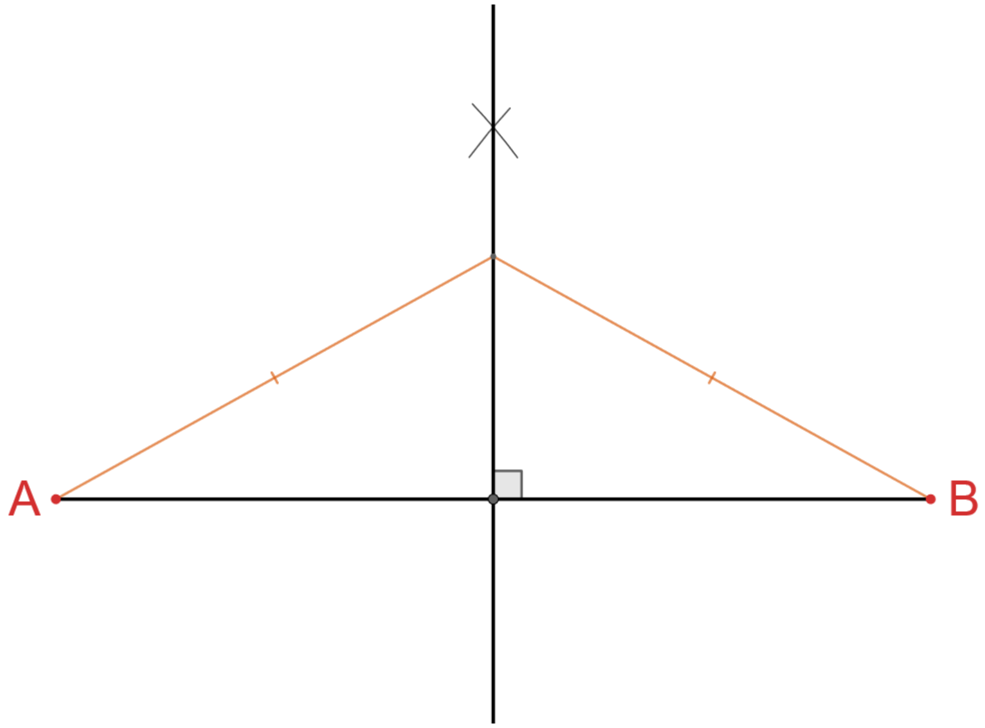
Cotangens - $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{\alpha : \alpha = k\pi\} \to \mathbb{R}$ - okres podstawowy: π

$$\operatorname{tg}\alpha = x \;\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \alpha = \operatorname{arcctg} x + k\pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Secans - $\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{\alpha : \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ - okres podstawowy: 2π

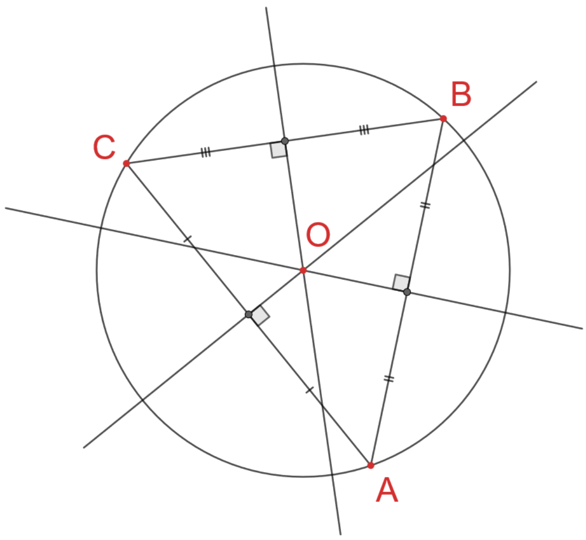
Cosecans - $\operatorname{cosec} : \mathbb{R} \setminus \{\alpha : \alpha = k\pi\} \to (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ - okres podstawowy: 2π

8 Planimetria

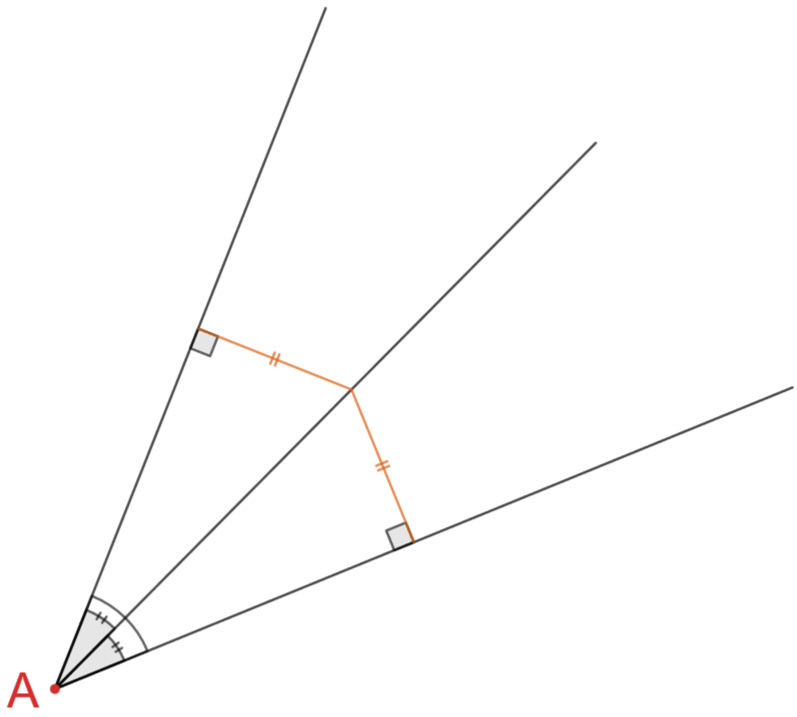


Symetralna odcinka - jest to prosta prostopadła do odcinka, która dzieli ten odcinek na dwie równe części. Symetralna jest też zbiorem wszystkich punktów równo odległych od punktów na końcach odcinka.

Aby skonstruować symetralną, należy zakreślić dwa półokręgi, o równych promieniach większych od połowy długości odcinka, a następnie połączyć prostą punkty przecięć tych półokręgów.

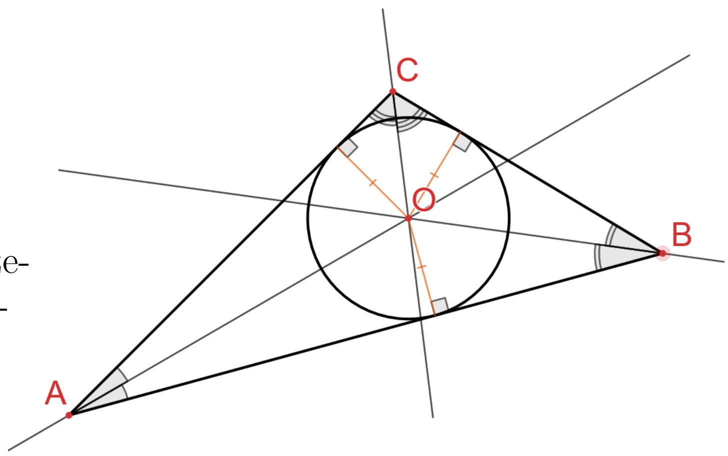


Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie (częściami wspólnymi okręgu i trójkąta są wierzchołki trójkąta).

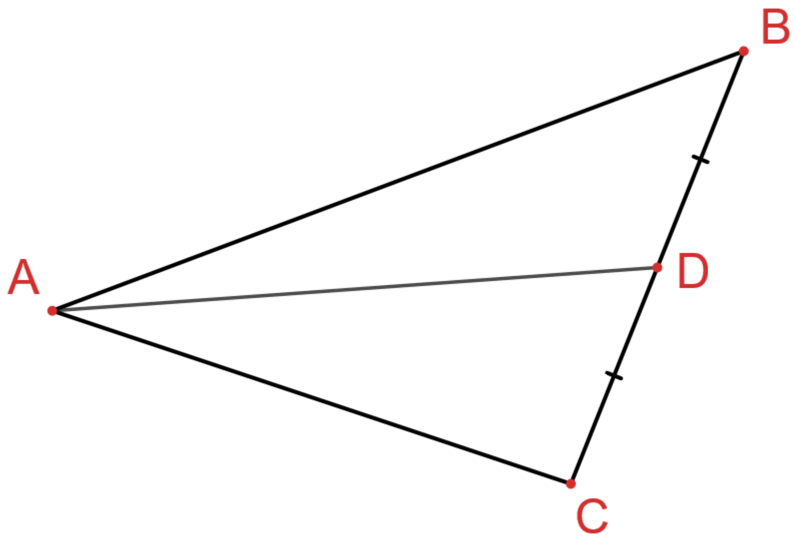


Dwusieczna kąta - półprosta o początku w wierzchołku kąta, która dzieli kąt zawarty między ramionami kąta na dwa równe kąty, każdy o mierze równej połowie oryginalnego kąta. Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta wypukłego.

By skonstuować dwusieczną, należy zakreślić półokrąg o środku w punkcie A. Następnie z miejsc przecięcia się ramion kąta i półokręgu zakreślić kolejne półokręgi o promieniu większym niż połowa odległości do drugiego punktu przecięcia. Dwusieczna to prosta przechodząca przez punkt przecięcia dwóch półokręgów i punkt A.



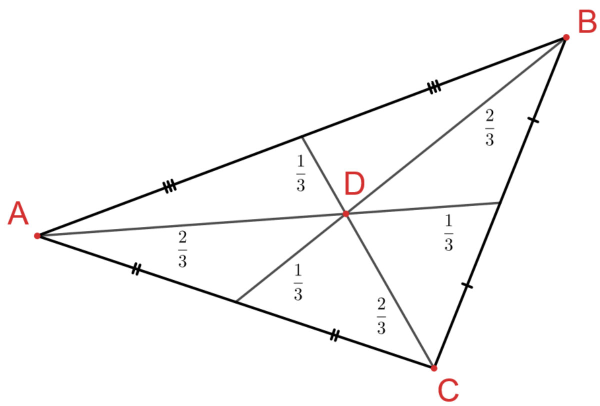
Dwusieczne trzech kątów dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt (częściami wspólnymi okręgu i trójkąta są trzy punkty, każdy należy do innego boku).



Środkowa trójkąta - odcinek łączący wierzchołek trójkąta z środkiem przeciwległego boku.

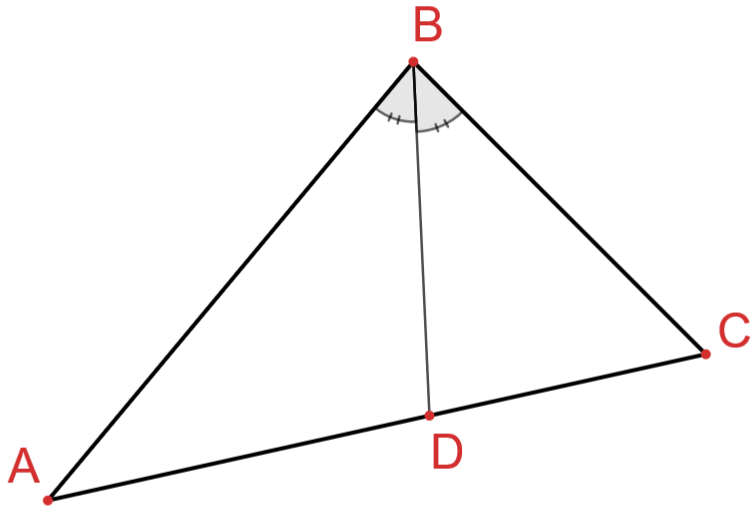
W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie (barycentrum, środek ciężkości trójkąta), który to dzieli każdą z środkowych na fragmenty o długości w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka trójkąta.

Każdy z sześciu trójkątów ograniczonych środkowymi trójkąta ma to samo pole.



Twierdzenie o środkowej (twierdzenie Apolloniusza) - suma kwadratów dwóch dowolnych boków jest równa podwojonej sumie kwadratów połowy trzeciego boku i środkowej opartej na trzecim boku.
Jeżeli boki trójkątu to a, b, c, a d to środkowa oparta na boku c, to wtedy:

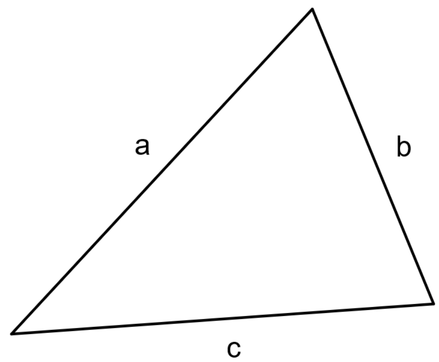
$$a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + d^2\right)$$



Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego - w dowolnym trójkącie ABC, w którym odcinek $|BD|$ jest dwusieczną kąta wewnętrznego, prawdziwa jest równość:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

Nierówność w trójkącie - W dowolnym trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.



$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to wtedy suma kwadratów długości przyprostokątnych a i b jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej c:

$$\text{Trójkąt prostokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika również, że jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to wtedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest większa od kwadratu najdłuższego boku:

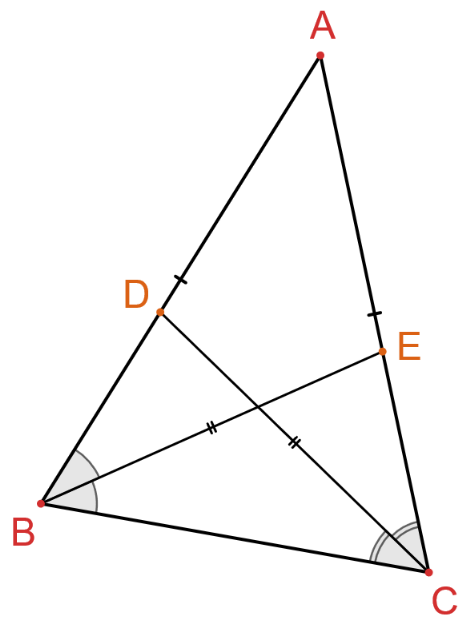
$$\text{Trójkąt ostrokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2$$

Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to wtedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest mniejsza od kwadratu najdłuższego boku:

$$\text{Trójkąt rozwartokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

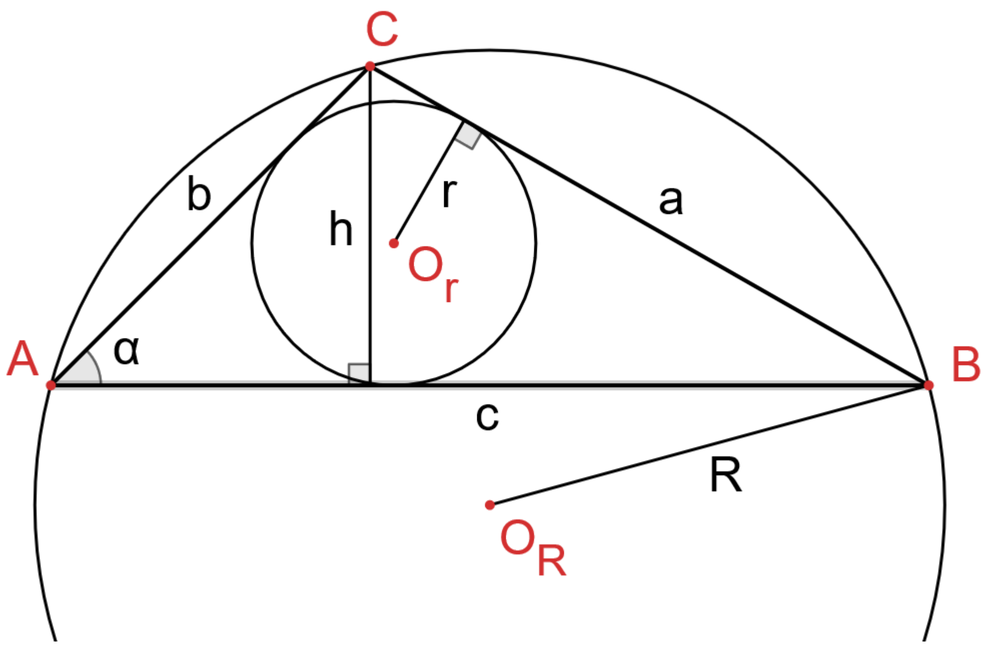
Twierdzenia odwrotne do powyższych również są prawdziwe.

Twierdzenie Steinera-Lehmusa



Jeżeli w trójkącie istnieją dwa równe odcinki które są dwusiecznymi dwóch różnych jego kątów wewnętrznych, to wtedy rzeczony trójkąt jest równoramienny.

Pole trójkąta - wzory



$$P = \frac{1}{2}ch \qquad P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$$

$$P = \frac{b^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)} \qquad P = p \cdot r, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha(b^2 + c^2 - a^2)$$

Promień okręgu wpisanego i opisanego dowolnego trójkąta

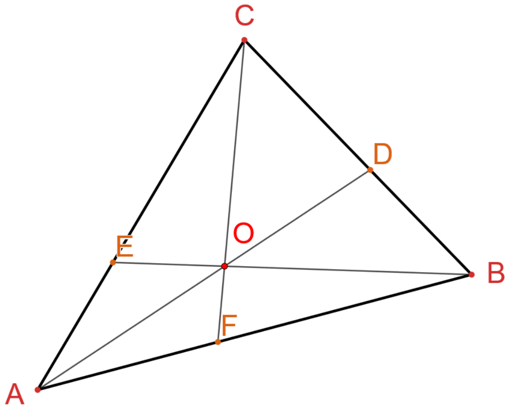
$$R = \sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}$$

Twierdzenia o dowolnych trójkątach

Twierdzenie Cevy - niech dany będzie trójkąt ABC i punkty D, E, F takie, że $D \in |BC|$, $E \in |AC|$ i $F \in |AB|$. Jeżeli proste $|AD|, |BE|$ i $|CF|$ przecinają się w jednym punkcie O, to wtedy prawdziwa jest równość:

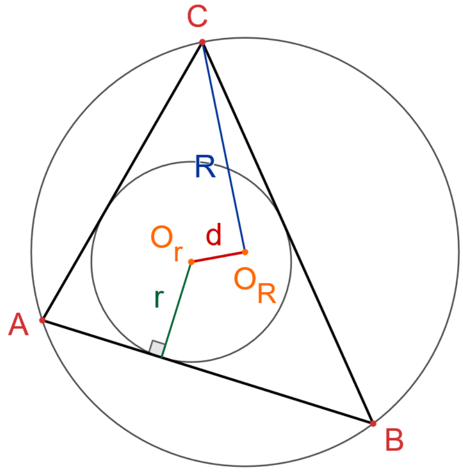
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$



Twierdzenie Eulera - twierdzenie opisujące relację między długościami promieni okręgów: wpisanego w i opisanego na trójkącie a odległością między środkami tych okręgów. Długość odcinka d, będącego odległością środków okręgów: wpisanego i opisanego jest równa:

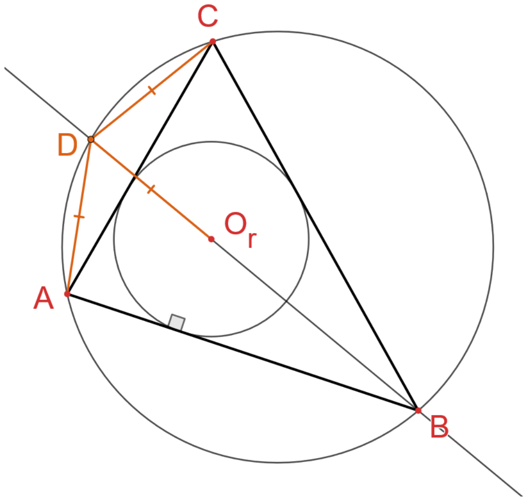
$$d^2 = R(R - 2r)$$

Z twierdzenia tego wynika również **nierówność Eulera**: $R \geq 2r$



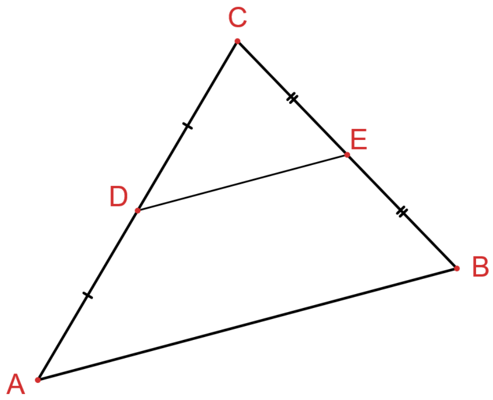
Twierdzenie o trójliściu - niech dany będzie dowolny trójkąt ABC. Prosta BO_r, przechodząca przez wierzchołek trójkąta i środek okręgu wpisanego w ten trójkąt przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie D. W takiej konfiguracji prawdziwa jest równość:

$$|AD| = |O_rD| = |CD|$$



Twierdzenie o linii środkowej - linia środkowa (odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta) jest równoległa do odpowiadającego jej boku oraz długość linii środkowej jest równa połowie długości odpowiadającego boku.

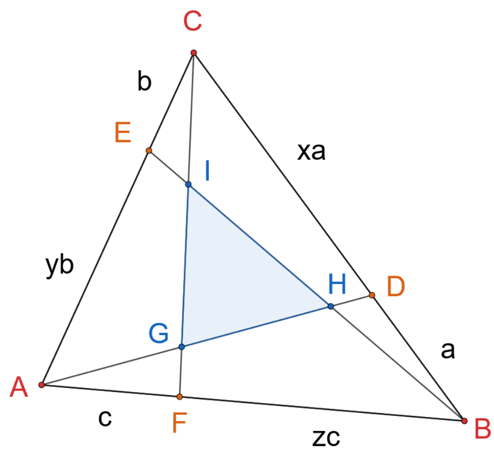
$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$$



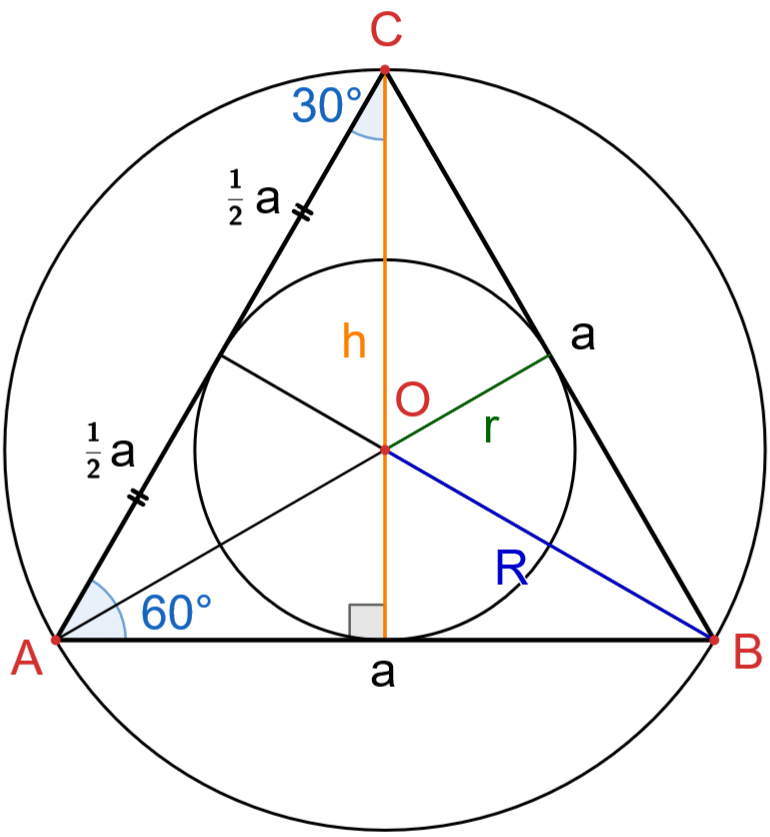
Twierdzenie Routha - opisuje stosunek między polami trójkąta i trójkąta zawartego między czewianami (dowolnymi odcinkami łączącymi wierzchołek trójkąta i przeciwległy bok).

Niech dany będzie dowolny trójkąt ABC i $D \in |BC|$, $E \in |AC|$ i $F \in |AB|$. Wiedząc, że $x = \frac{|CD|}{|BD|}$, $y = \frac{|AE|}{|CE|}$ i $z = \frac{|BF|}{|AF|}$ pole trójkąta GHI jest równe polu trójkąta ABC razy:

$$\frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(zx+x+1)}$$



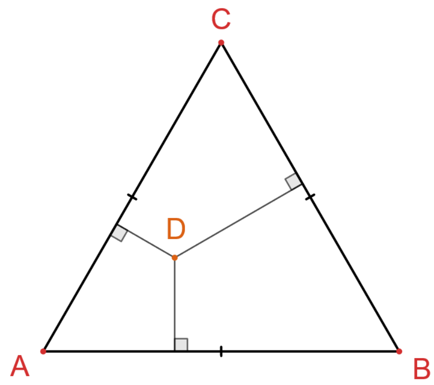
Trójkąt równoboczny - wzory



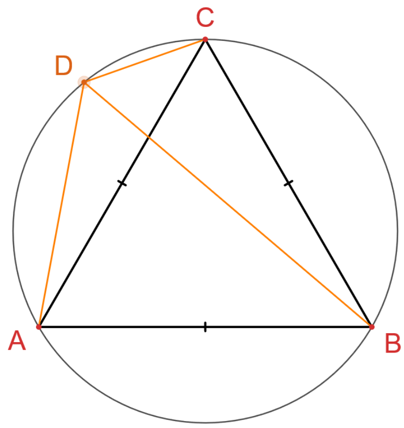
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Twierdzenia o trójkątach równobocznych



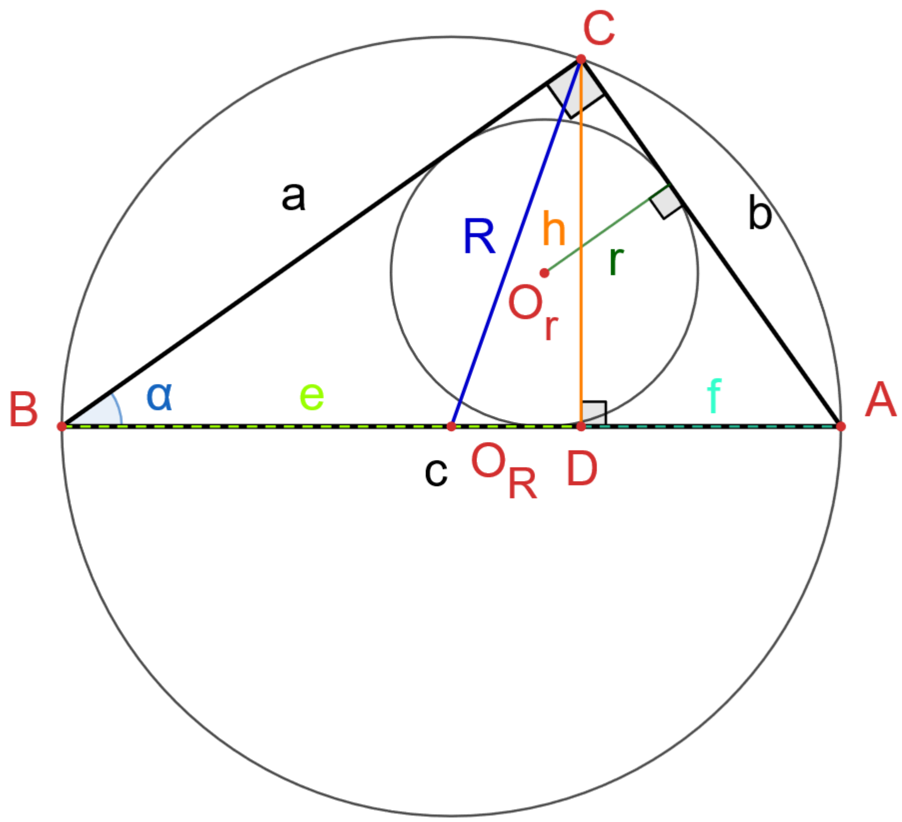
Twierdzenie Vivianiego - Dla każdego punktu wewnątrz trójkąta równobocznego suma odległości tego punktu od boków trójkąta jest równa jego wysokości.



Twierdzenie Van Schootena - Dla punktu D umieszczonego na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym długość najdłuższego odcinka łączącego ten punkt z wierzchołkiem jest równa sumie długości dwóch pozostałych odcinków łączących punkt D z pozostałymi wierzchołkami.

Jest to specjalny przypadek **twierdzenia Möbiusa - Pompejusza** które postuluje, że odcinki łączące dowolny punkt D na płaszczyźnie z wierzchołkami trójkąta równobocznego spełniają nierówność trójkąta (da się z nich zbudować trójkąt).

Trójkąt prostokątny - wzory



$$P = \frac{1}{2}ab \qquad h = \sqrt{ef} = \frac{ab}{c}$$

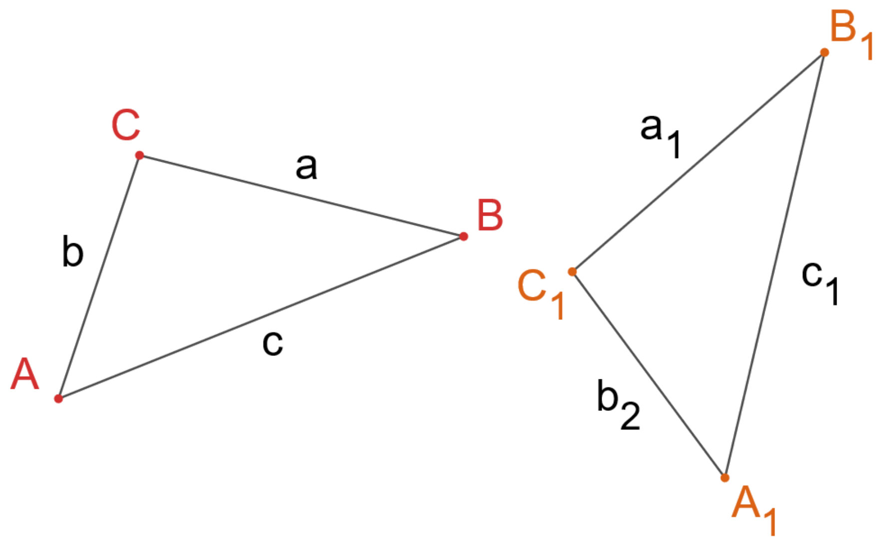
$$a = \sqrt{ce} \qquad b = \sqrt{cf}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

Twierdzenie Talesa o kącie wpisanym - jeżeli jeden z boków trójkąta jest średnicą okręgu na nim opisanego, to wtedy jest to trójkąt prostokątny, a średnica jest przeciwprostokątną.

Cechy przystawania trójkątów

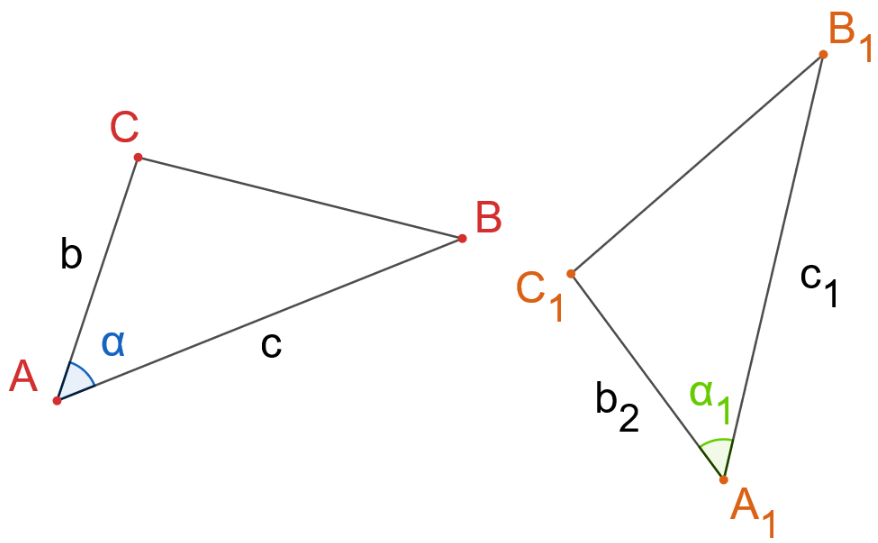
I cecha przystawania trójkątów (bbb)



$$a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to wtedy te trójkąty są przystające.

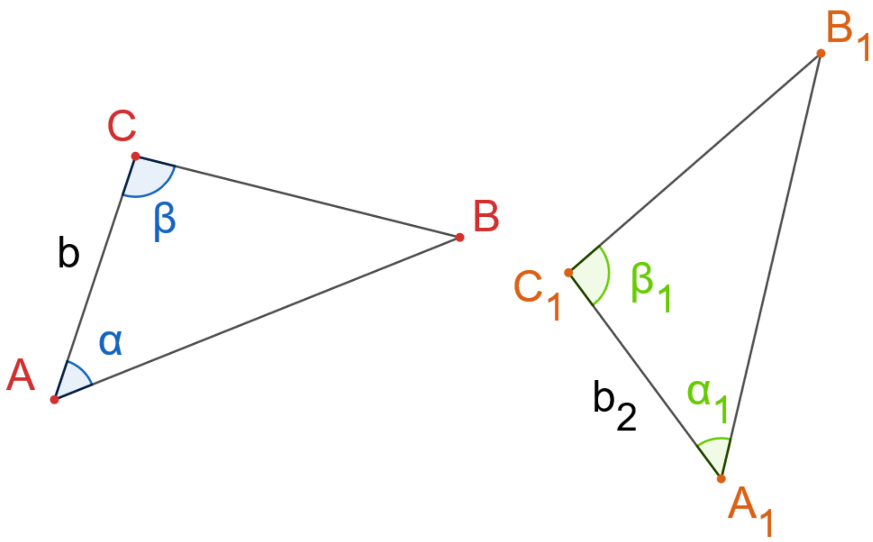
II cecha przystawania trójkątów (bkb)



$$b = b_1 \wedge \alpha = \alpha_1 \wedge c = c_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

III cecha przystawania trójkątów (kbk)

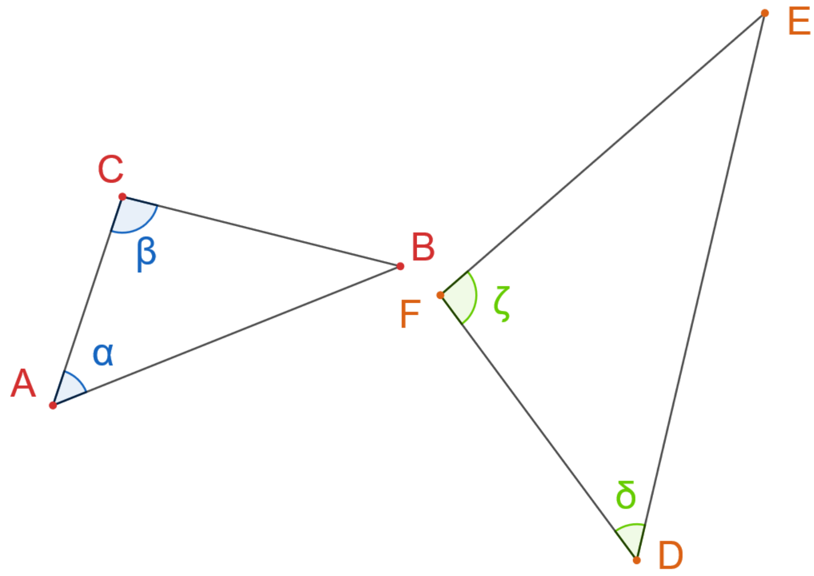


$$\alpha = \alpha_1 \wedge b = b_1 \wedge \beta = \beta_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to wtedy te trójkąty są przystające.

Cechy podobieństwa trójkątów

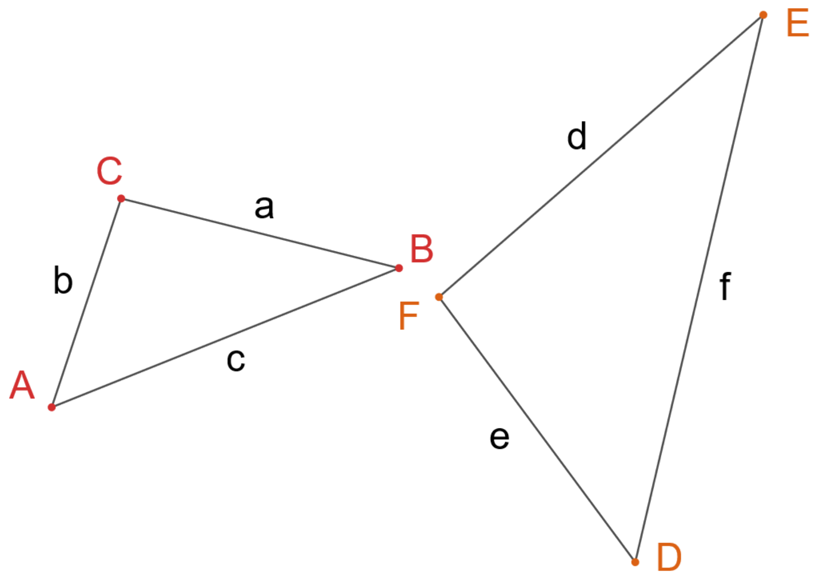
Cecha podobieństwa trójkątów (kkk)



$$\alpha = \delta \wedge \beta = \gamma \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

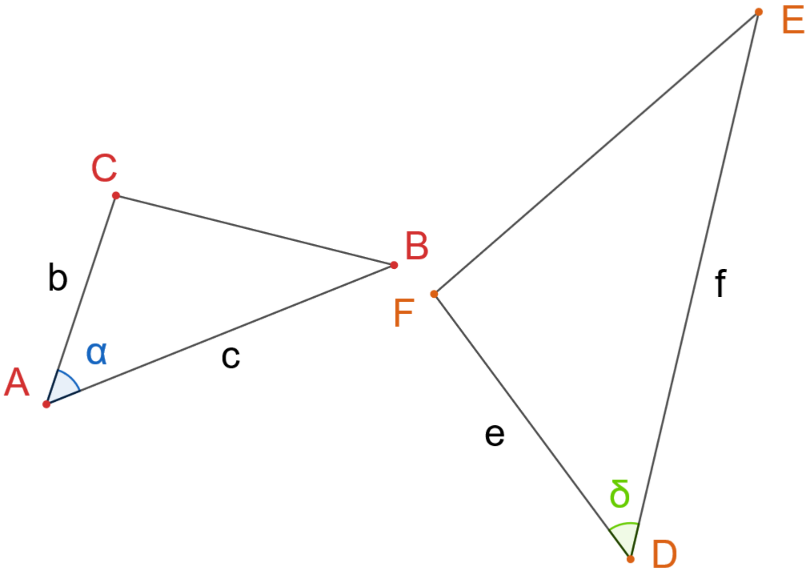
Cecha podobieństwa trójkątów (bbb)



$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k, \text{ gdzie } k \text{ - skala podobieństwa} \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Cecha podobieństwa trójkątów (bkb)



$$\frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k, \text{ gdzie } k \text{ - skala podobieństwa} \wedge \alpha = \delta \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeżeli trójkąty T_1, T_2 są podobne w skali k, to stosunek pól tych trójkątów jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Twierdzenie tangensów

W dowolnym trójkącie, jeżeli a, b to miary dwóch boków trójkąta, a kąty α, β są kątami odpowiednio leżącymi naprzeciwko do tych boków, to wtedy prawdziwa jest zależność:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

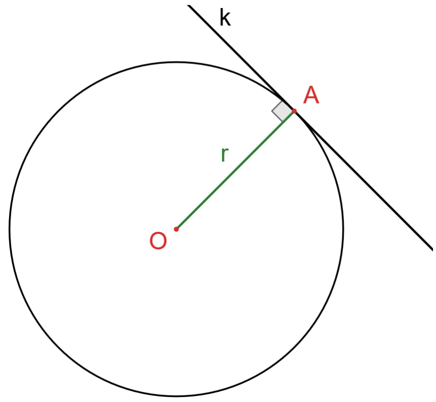
Twierdzenie cotangensów

W dowolnym trójkącie iloraz różnicy połowy obwodu trójkąta ($p = \frac{a+b+c}{2}$) i dowolnego boku nad cotangens połowy kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest równy promieniowi okręgu wpisanego.

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{p-b}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = \frac{p-c}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = r$$

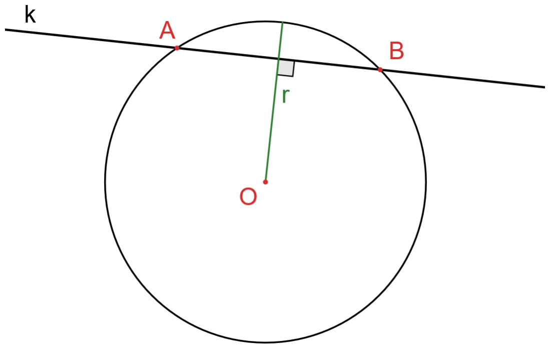
Wzajemne położenie okręgów i prostych

Styczna do okręgu - Prosta poprowadzona względem okręgu w taki sposób, że ma z nim tylko jeden punkt wspólny oraz promień okręgu poprowadzony od środka okręgu do punktu styczności tworzy z prostą kąt prosty.



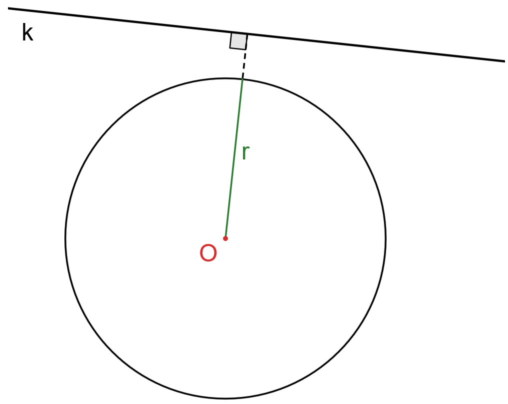
$$k \text{ - styczna } \Leftrightarrow |OA| = r \wedge k \perp OA$$

Sieczna - Prosta jest sieczna gdy jej odległość od środka okręgu jest mniejsza od promienia. Ma z okręgiem dwa punkty wspólne. Odcinek AB nazywa się **cięciwą**. Odcinek łączący punkt wspólny promienia poprowadzonego prostopadle do siecznej i okręgu oraz środek cięciwy nazywa się **strzałką łuku**.



$$d(O, k) < r$$

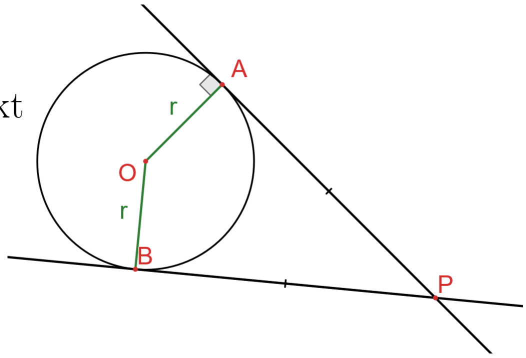
Prosta jest **rozłączna z okręgiem** wtedy i tylko wtedy, gdy jej odległość od środka okręgu jest większa od promienia. Prosta taka nie ma żadnych punktów wspólnych z okręgiem.



$$d(O, k) > r$$

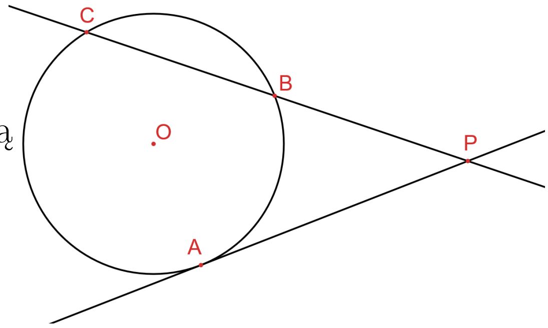
Twierdzenie o odcinkach stycznych - odcinki dwóch stycznych, posiadające wspólny punkt poza okręgiem (odległość punktu od środka większa od promienia) mają równą długość.

$$|AP| = |BP|$$



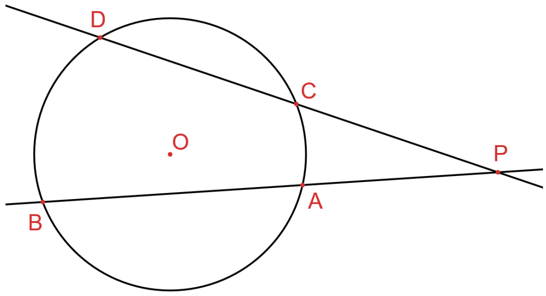
Twierdzenie o stycznej i siecznej - dla stycznej i siecznej o wspólnym punkcie poza okręgiem, między odcinkiem wyznaczonym przez styczną i odcinkami wyznaczonymi przez sieczną zachodzi relacja:

$$|AP|^2 = |BP| \cdot |CP|$$



Twierdzenie o siecznych - dla dwóch siecznych o wspólnym punkcie poza okręgiem, między wyznaczonymi przez sieczne odcinkami zachodzi relacja:

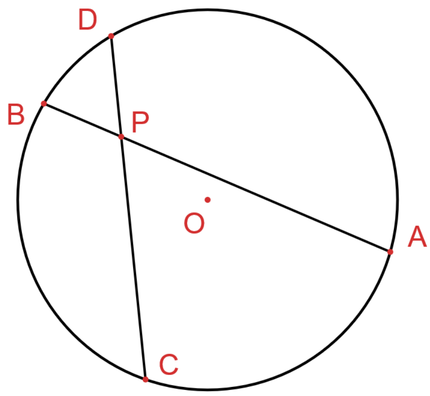
$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$$



Twierdzenie o cięciwach - dla odcinków wyznaczonych przez dwie cięciwy okręgu przecinające się w punkcie wewnątrz okręgu zachodzi relacja:

$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$$

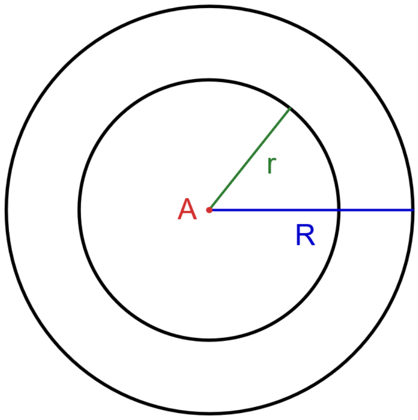
Jest to rozszerzenie twierdzenia o siecznych.



Wzajemne położenie dwóch okręgów

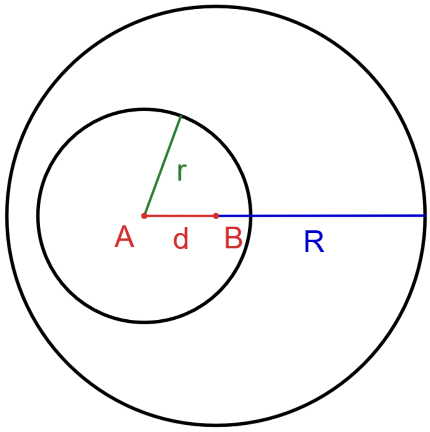
Okręgi współśrodkowe

$$A = B,\ |AB| = 0,\ r \neq R$$



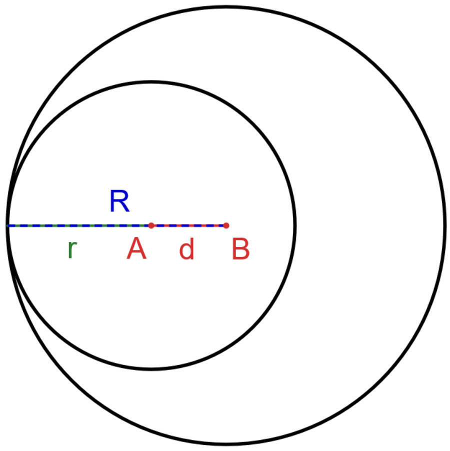
Okręgi rozłączne wewnętrznie

$$d < |r - R|$$



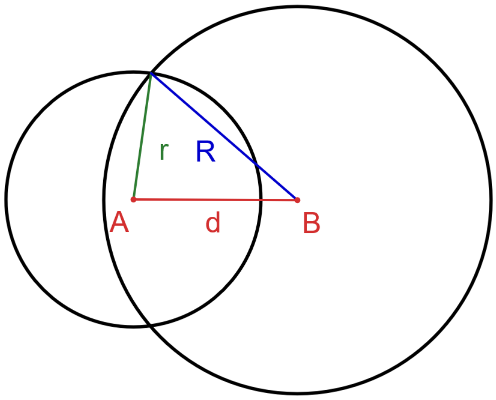
Okręgi styczne wewnętrznie

$$d = |r - R| \neq 0$$



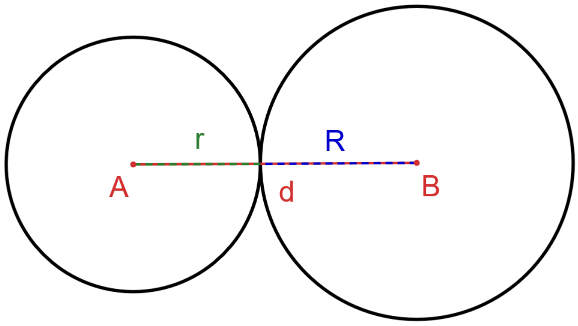
Okręgi przecinające się

$$|r - R| < d < r + R$$



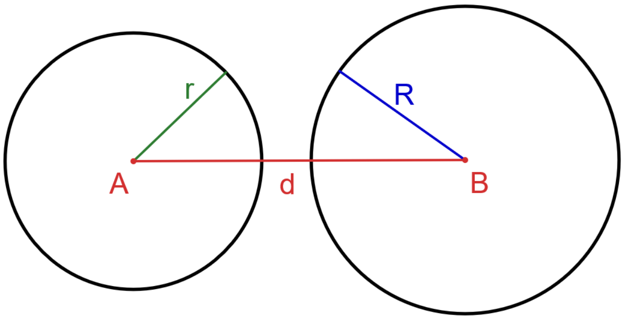
Okręgi styczne zewnętrznie

$$d = r + R$$



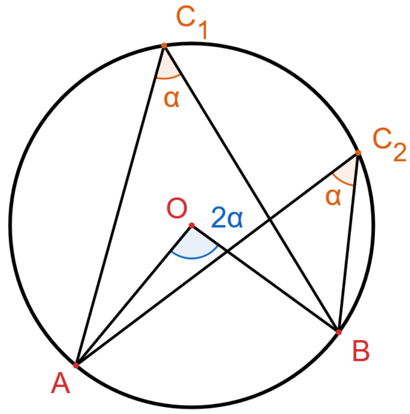
Okręgi rozłączne zewnętrznie

$$d > r + R$$



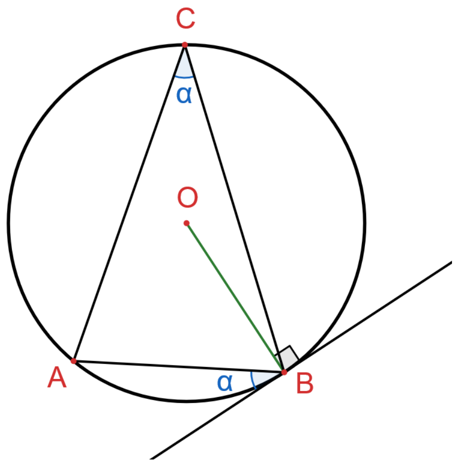
Kąt środkowy i wpisany

Jeżeli kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku, to wtedy miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.
Dodatkowo każdy kąt wpisany oparty na tym samym łuku ma taki sam kąt.



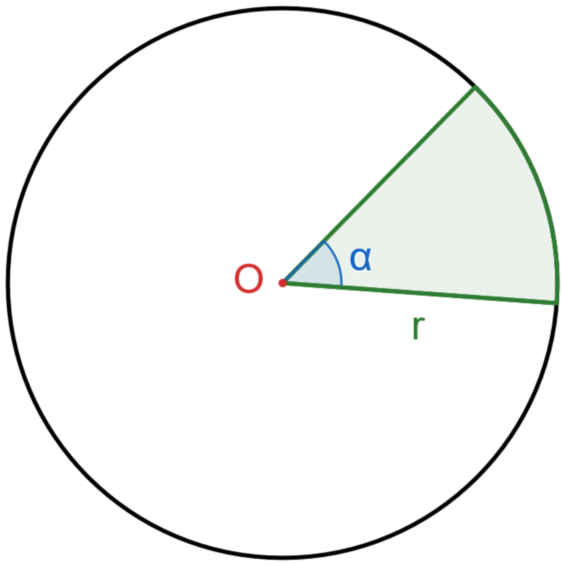
Kąt wpisany i dopisany

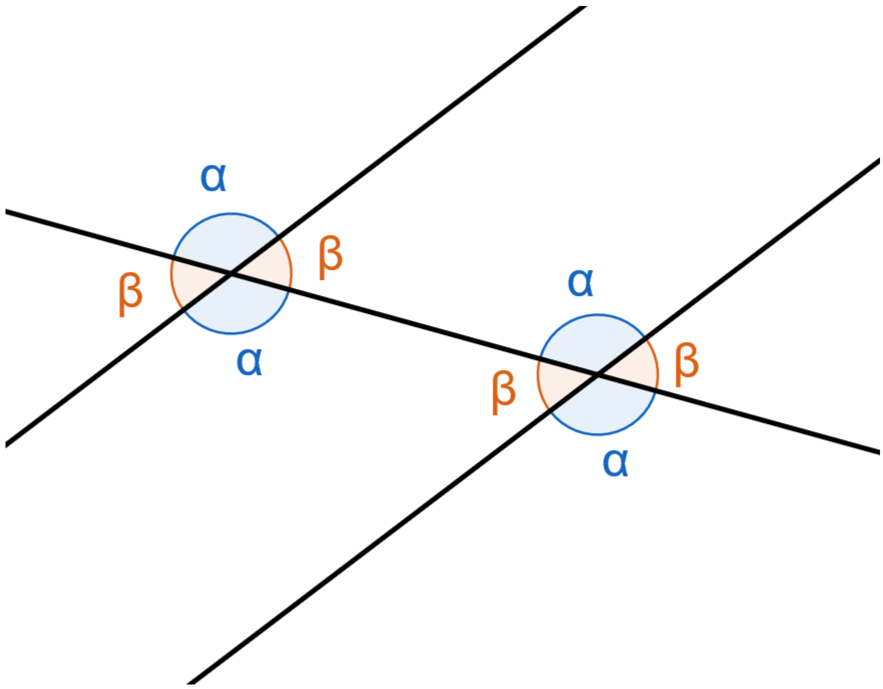
Jeżeli kąt wpisany i dopisany są oparte na tym samym łuku, to miary tych kątów są sobie równe.



Okrąg - wzory

Pole	πr^2
Obwód	$2\pi r$
Wycinek koła	$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$
Długość łuku	$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
Cięciwa	$2r \sin \frac{\alpha}{2}$





Twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą - Jeżeli dwie proste są równoległe, to:

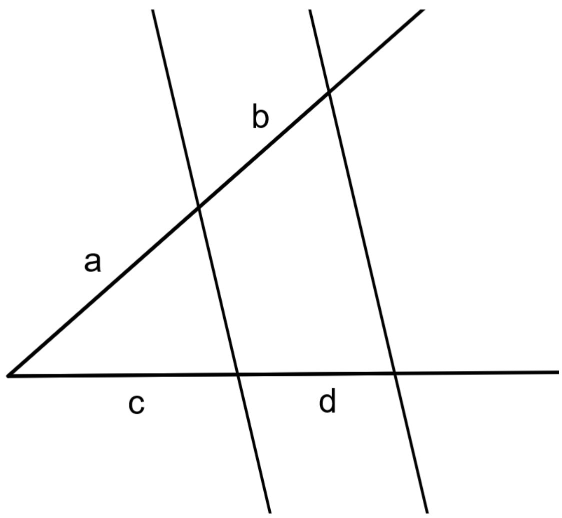
- Kąty odpowiadające są równe.
- Kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe.
- Kąty naprzemianległe zewnętrzne są równe.

Twierdzenia odwrotne również są prawdziwe, tj. jeżeli którykolwiek powyższy warunek jest spełniony, to dwie proste są równoległe.

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu kąta (lub jego przedłużeniu) będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu kąta.

$$k \parallel l \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$



Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

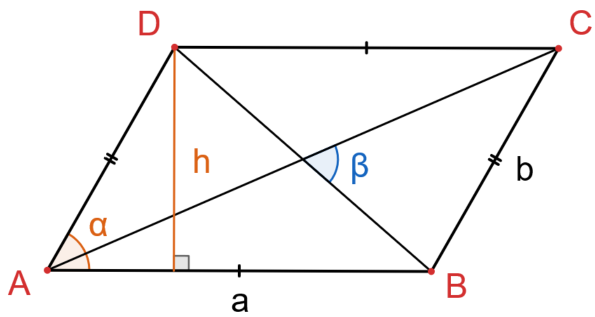
Czworokąty - wzory

Równoległobok

$$P = ah$$

$$P = ab \cdot \sin\alpha$$

$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\beta$$

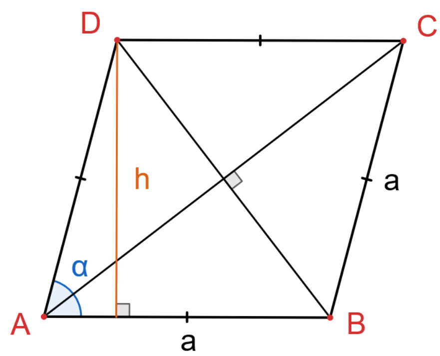


Romb

$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin\alpha$$

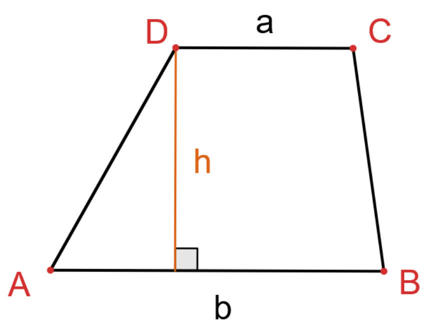
$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$$



Trapez

$$P = \frac{1}{2}(a+b)h$$

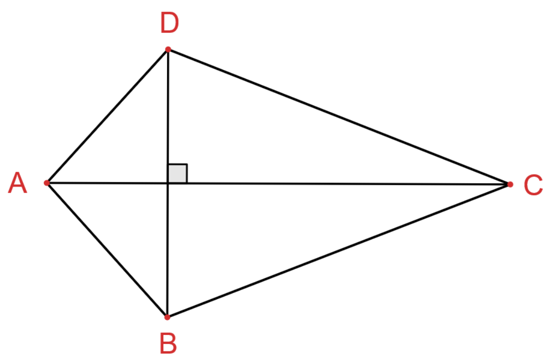
Linia środkowa - $\dfrac{a+b}{2}$



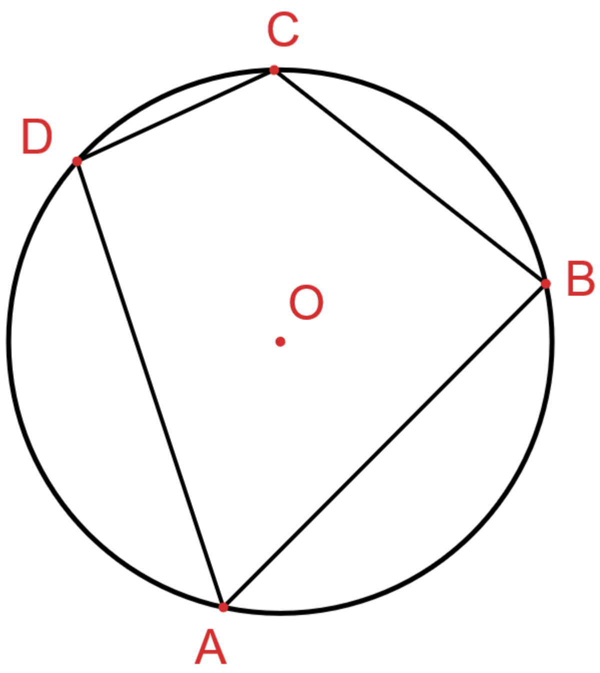
Deltoid

$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$$

$$P = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\sphericalangle B)$$



Pole każdego czworokąta wypukłego da się obliczyć, mnożąc ze sobą długości przekątnych i sinus kąta między nimi.
Pole każdego czworokątu w który można wpisać okrąg można obliczyć ze wzoru $p \cdot r$, gdzie p to połowa obwodu czworokąta, a r jest promieniem okręgu wpisanego.

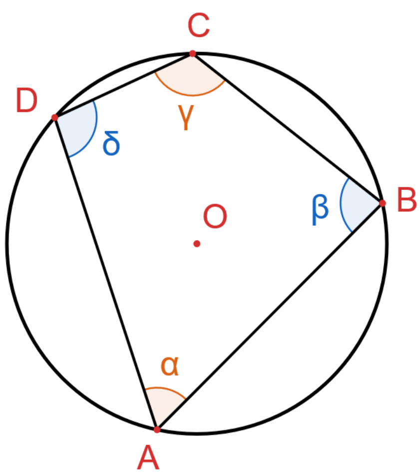


Czworokąt wpisany w okrąg (okrąg opisany na czworokącie) - czworokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek czworokąta leży na okręgu.

Warunki:

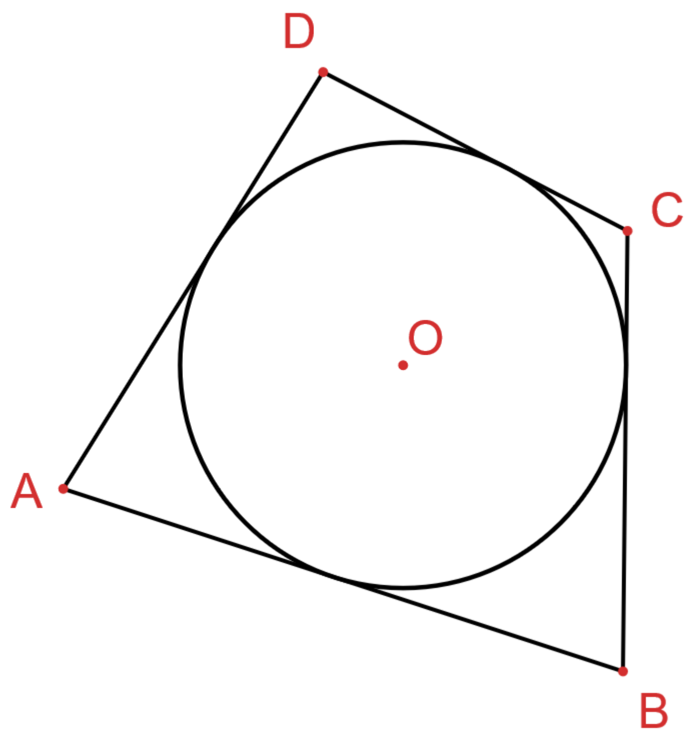
- sumy miar przeciwległych kątów są równe i wynoszą 180°.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$



- symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.
- kąty przy przekątnych, które to kąty leżą naprzeciwko jednego boku czworokąta, są równe.

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$$



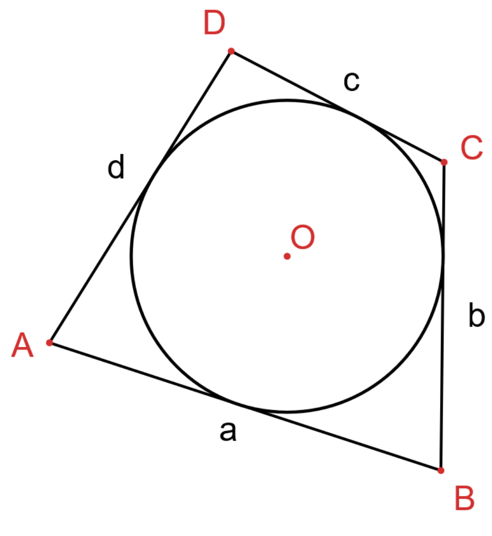
Okrąg wpisany w czworokąt (czworokąt opisany na okręgu) - okrąg jest wpisany w czworokąt wtedy i tylko wtedy, gdy każdy bok czworokąta jest styczny do okręgu.

Warunki:

- sumy długości przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$

- dwusieczne wszystkich kątów czworokąta przecinają się w jednym punkcie.



Podobieństwo czworokątów

Dwa czworokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków w jednym czworokącie są proporcjonalne do długości boków w drugim czworokącie i wszystkie kąty w jednym czworokącie są równe odpowiednim kątom w drugim czworokącie.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = k \text{ - skala podobieństwa}$$

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \beta = \beta_1 \wedge \gamma = \gamma_1 \wedge \delta = \delta_1$$

Jeżeli czworokąty C_1, C_2 są do siebie podobne w skali k, to stosunek tych pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Wielokąty

Sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wyraża się wzorem $(n-2) \cdot 180°$, gdzie n, $n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$ to ilość boków wielokąta.

Liczba przekątnych w wielokącie wyraża się wzorem $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie n, $n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$ to ilość boków wielokąta.

Specjalnym przypadkiem wielokąta jest **wielokąt foremny**. Wszystkie kąty takiego wielokąta mają równą miarę i wszystkie boki są równej długości.
Pole dowolnego wielokąta foremnego da się obliczyć ze wzoru:

$$\frac{1}{2} \cdot pr$$

gdzie p to obwód wielokąta, a r to promień okręgu wpisanego (apotemy).

Funkcjonuje też wzór:

$$na^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

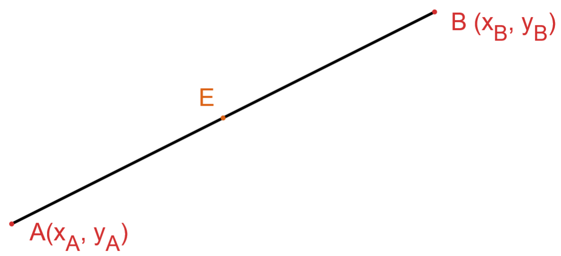
gdzie a to długość boku wielokąta, a n to ilość boków.

9 Geometria analityczna

Podstawowe informacje

Długość odcinka wyznaczonego punktami o współrzędnych $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



Współrzędne środka odcinka to średnia arytmetyczna kolejno odciętych i rzędnych punktów wyznaczających odcinek:

$$E\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

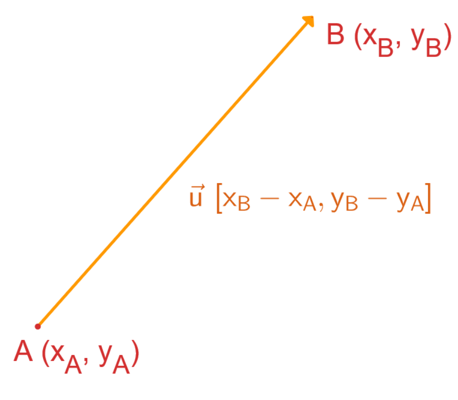
Współrzędne barycentrum (środka ciężkości) trójkąta to średnia arytmetyczna kolejno odciętych i rzędnych jego wierzchołków:

$$S\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Wektory

Wektor - obiekt matematyczny posiadający: moduł (długość, wartość, normę), kierunek określający orientację w przestrzeni wektora, oraz zwrot rozróżniający między dwoma wektorami o tym samym module i kierunku.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = [x_B - x_A,\ y_B - y_A]$$



Dwa wektory: $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 = v_1$ i $u_2 = v_2$.

Dwa wektory: $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 = -v_1$ i $u_2 = -v_2$.

Niech $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (wektory w dwóch wymiarach) i $k \in \mathbb{R}$.

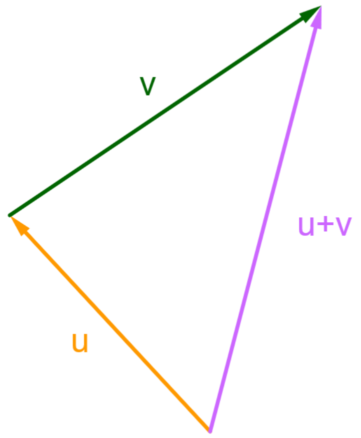
Moduł (długość) wektora

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \qquad \|k \cdot \vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$$

Operacje na wektorach

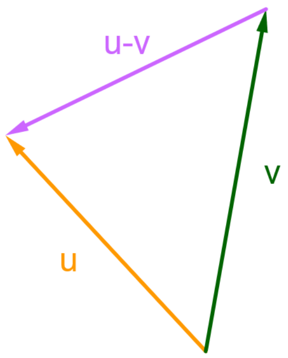
Suma wektorów

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, \; u_2 + v_2]$$



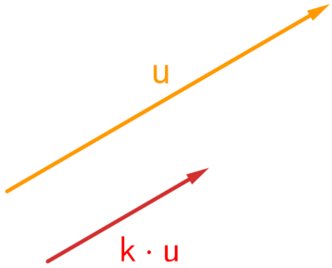
Różnica wektorów

$$\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, \; u_2 - v_2]$$



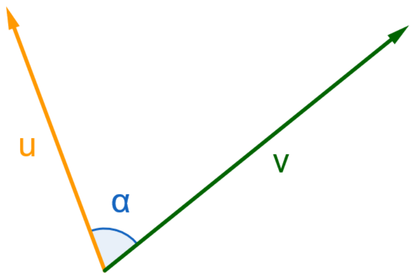
Mnożenie wektora przez skalar

$$k \cdot \vec{u} = [k \cdot u_1, \; k \cdot u_2]$$



Iloczyn skalarny

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$



Cosinus i sinus kąta między wektorami można obliczyć ze wzoru:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \qquad \sin \alpha = \frac{\left|\det \left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right)\right|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Dwa wektory są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny tych wektorów jest równy zeru.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Dwa wektory są równoległe i o tym samym zwrocie wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny jest równy iloczynowi modułów tych wektorów.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

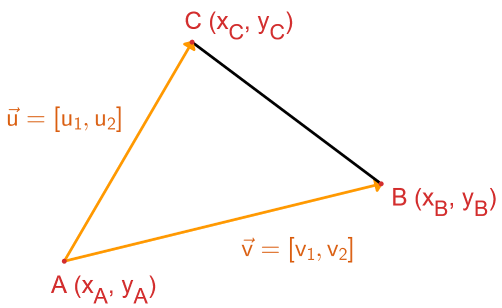
Dwa wektory są równoległe i o różnym zwrocie wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny jest równy przeciwieństwu iloczynu modułów tych wektorów.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|)$$

Pole trójkąta

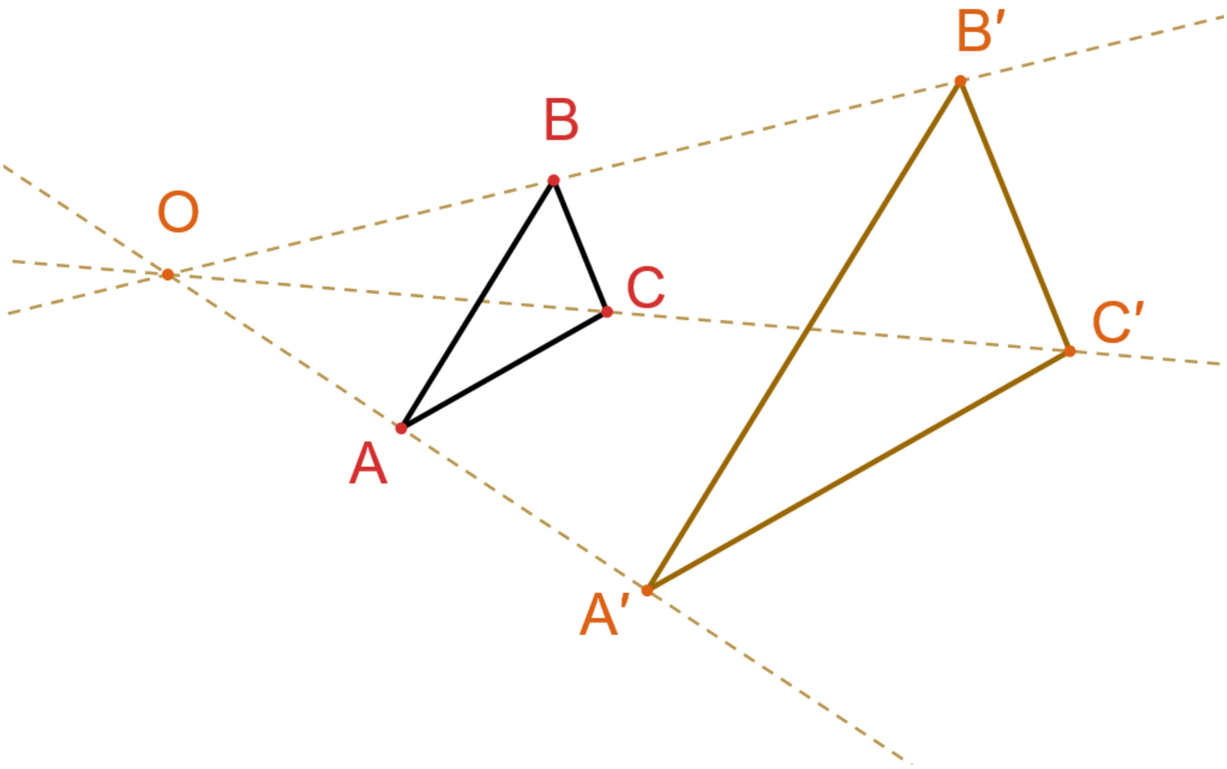
Jeśli dwa wektory mają wspólny początek w jednym z wierzchołków trójkąta, to pole tego trójkąta wyznacza się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |u_1 v_2 - v_1 u_2|$$



Znając współrzędne trzech wierzchołków trójkąta jego pole można obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$



$$\boldsymbol{J}_O^k\left(\triangle ABC\right) = \triangle A'B'C'$$

Jednokładność (homotetia) o środku r i niezerowej skali k (nazywanej też *stosunkiem jednokładności*) to odwzorowanie geometryczne nieizometryczne określone następująco:

$$\boldsymbol{J}_r^k\left(p\right) = q \Leftrightarrow \overrightarrow{rq} = k \cdot \overrightarrow{rp}$$

Dla $k = 1$ jednokładność jest przekształceniem tożsamościowym, dla $k = -1$ jednokładność to symetria środkowa względem punktu r.

Każda figura F_1 przekształcona przez jednokładność $\boldsymbol{J}_r^k\left(F_1\right) = F_2$ jest podobna w skali $|k|$.

Niech dany będzie punkt $A(x_A, y_A)$. Jednokładność o środku $O(a, b)$ i skali k przekształca punkt A w punkt A' o współrzędnych $x = kx_A + (1-k)a$, $y = ky_A + (1-k)b$.

Proste

Prosta - jedno z podstawowych pojęć geometrycznych. W kontekście geometrii analitycznej prosta jest zdefiniowana jako szczególny zbiór punktów L o współrzędnych spełniających pewne równanie. Zbiór punktów L można zapisać symbolicznie jako: $L = \{(x, y) : ax + by = c\}$, $a \vee b \neq 0$.

Postać kierunkowa

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi rzędnych OY, to można ją przedstawić w postaci:

$$y = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

W tej postaci a nazywa się **współczynnikiem kierunkowym**. Jego wartość jest równa tangensowi kąta między prostą a osią odciętych OX. Współczynnik b określany jest mianem **wyrazu wolnego**. Prosta przecina oś OY w punkcie $(0, b)$, a oś OX w $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Niech podane będą dwa punkty $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, przez które przechodzi prosta k. **Równanie kierunkowe** prostej k można wyznaczyć ze wzoru:

$$k := (y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$$

Można też znaleźć współczynnik kierunkowy a, a następnie znaleźć wyraz wolny b rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ opisuje wzór:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a, przechodzącej przez punkt $A(x_A, y_A)$ podane jest wzorem:

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

Niech dane będą dane dwie proste w postaci kierunkowej: $k := y = a_1x + b_1$ i $l := y = a_2x + b_2$. Proste te:

- są równoległe, gdy $a_1 = a_2$.
- są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.
- przecinają się pod kątem α, gdy $\operatorname{tg} \alpha = \left| \dfrac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$.

Postać ogólna

Dowolną prostą można przedstawić w postaci:

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad A \vee B \neq 0$$

Jeśli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi rzędnych OY, a jeżeli $B = 0$, to jest równoległa do osi odciętych OX.

Niech podane będą dwa punkty $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, przez które przechodzi prosta k. **Równanie ogólne** prostej k można wyznaczyć, znajdując wyznacznik takiej macierzy, że:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Równoważne jest rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} A = y_B - y_A \\ B = x_A - x_B \\ C = x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_B \end{cases}$$

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k := Ax + By + C = 0$ jest wyrażona wzorem:

$$\mathrm{d}(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Odległość dwóch prostych równoległych od siebie wyznacznoych równaniami:
$k := Ax + By + C_1 = 0$ i $l := Ax + By + C_2 = 0$ jest równa:

$$\mathrm{d}(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Niech dane będą dane dwie proste w postaci ogólnej: $k := A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l := A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Proste te:

- są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.
- są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
- przecinają się pod kątem α w punkcie P, gdy:
  - $\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$, lub
  - $\sin\alpha = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$, lub
  - $\cos\alpha = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ i
  - $P\left(\dfrac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \dfrac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\right)$.

Trzy punkty: $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ **są współliniowe** (znajdują się na tej samej prostej) wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest następujące równanie:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

Alternatywnie można rozważyć wyznacznik następującej macierzy:

$$\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Okręgi

Okrąg - kształt zdefiniowany jako zbiór wszystkich punktów O na płaszczyźnie takich, że ich odległość od pewnego punktu $S(a, b)$ jest równa r. Symbolicznie zbiór O to: $O = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}, r \neq 0$.

Postać ogólna

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Postać zredukowana

$$x^2 + y^2 + Ax + By - C = 0; \quad A^2 + B^2 - 4C > 0$$

- Odcięta środka okręgu: $x_S = -\frac{A}{2}$,
- Rzędna środka okręgu: $y_S = -\frac{B}{2}$,
- Promień okręgu: $r = \sqrt{x_S^2 + y_S^2 - C} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Prosta styczna do okręgu w punkcie $P(x_P, y_P)$, gdzie środkiem okręgu jest punkt $S(a, b)$, jest wyrażona wzorem:

$$(x_P - a)x + (y_P - b)y = (x_P - a)x_P + (y_P - b)y_P$$

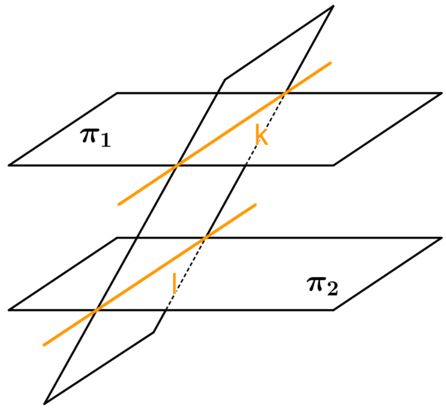
Współczynnik kierunkowy m tej prostej to:

$$m = -\frac{x_P - a}{y_P - b}$$

10 Geometria przestrzenna

Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny π_1, π_2 są przecięte trzecią płaszczyzną, to proste będące miejscami przecięcia się płaszczyzn (krawędzie przecięcia) będą równoległe.



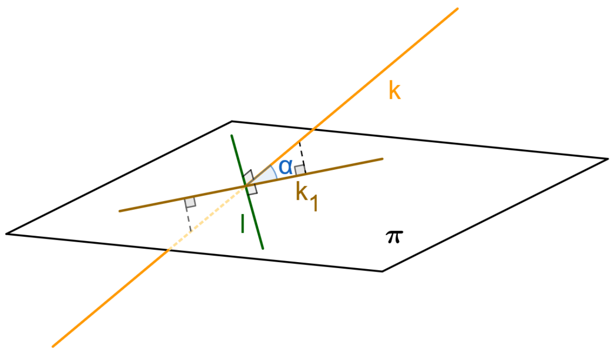
Prosta i płaszczyzna są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta należąca do płaszczyzny jest prostopadła do prostej przecinającej tą płaszczyznę.

$$k \perp \pi_1 \Leftrightarrow \bigwedge_{l \in \pi_1} k \cap l \neq \varnothing \Rightarrow k \perp l$$

Wynika z tego, że jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch prostych leżących na płaszczyźnie, które przecinają prostą w punkcie przebicia, to jest to warunek wystarczający prostopadłości prostej do płaszczyzny.

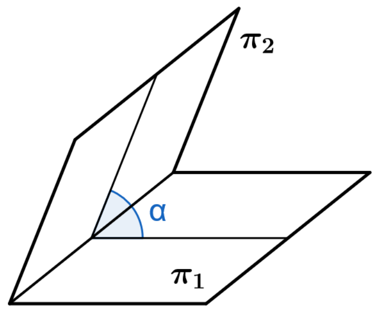
Dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy w płaszczyźnie π_1 jest zawarta prosta prostopadła do prostej leżącej na płaszczyźnie π_2.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych - jeżeli prosta k przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła, prosta k_1 jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π oraz prosta l należy do płaszczyzny i przecina prostą k, to prosta l jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej k_1.

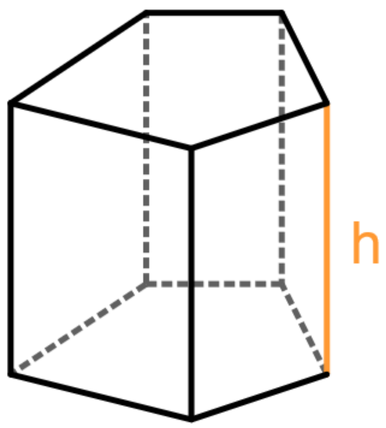


Kąt α między prostą k a płaszczyzną π to kąt ostry wyznaczony przez prostą k i jej rzut prostokątny, prostą k_1.

Kąt dwuścienny, kąt torsyjny - kąt ostry płaski zawarty między dwoma półpłaszczyznami π_1, π_2 o wspólnej krawędzi przecięcia, nazywanej *krawędzią kąta dwuściennego*.



Granistosłup



Pole powierzchni - $2P_p + P_b$

Objętość - $P_p \cdot h$

Graniastosłup o podstawie n-kątnej ma:

$2n$ wierzchołków,

$3n$ krawędzi,

$n + 2$ ścian.

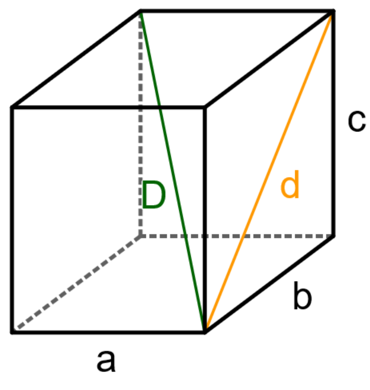
Wielościan zbudowany z dwóch przystających ścian zawartych w rówloległych płaszczyznach (zwanych **podstawami graniastosłupa**) i pozostałych ścian (nazywanych **ścianami bocznymi**) będących równoległobokami. Jeżeli ściany boczne graniastosłupa to prostokąty, to bryłę taką nazywa się **graniastosłupem prostym**. W przeciwnym wypadku bryła taka nosi miano **graniastosłupa pochyłego**.
Jeżeli podstawą graniastosłupa jest wielokąt foremny, to jest to **graniastosłup prawidłowy**.

Specjalnym przypadkiem graniastosłupa jest **prostopadłościan** - bryła zbudowana w całości z prostokątów. Objętość prostopadłościanu wyrażona jest wzorem:

$$V = abc$$

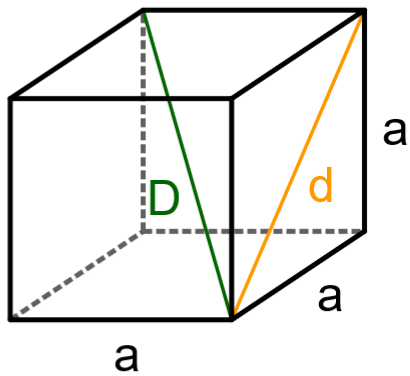
Pole powierzchni prostopadłościanu oblicza się:

$$P_p = 2(ab + ac + bc)$$

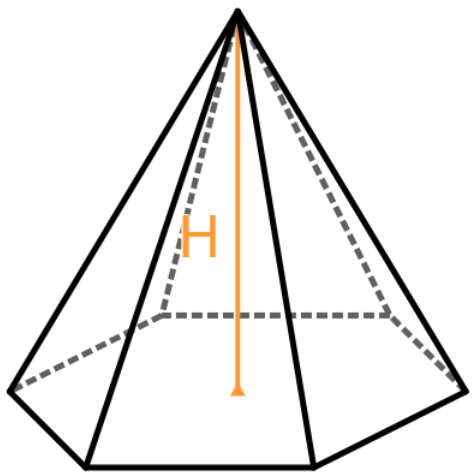


Specjalnym przypadkiem prostopadłościanu jest **sześcian** - bryła zbudowana z kwadratów.

Pole powierzchni - $6a^2$
Objętość - a^3
Przekątna ściany bocznej - $a\sqrt{2}$
Przekątna bryły - $a\sqrt{3}$



Ostrosłup



Pole powierzchni - $P_p + P_b$

Objętość - $\frac{1}{3}P_p \cdot H$

Ostrosłup o podstawie n-kątnej ma:
$n + 1$ wierzchołków,
$2n$ krawędzi,
$n + 1$ ścian.

Wielościan zbudowany ze ściany będącej wielokątem, zwanej **podstawą ostrosłupa** i pozostałych ścian, które są trójkątami i mają wspólny wierzchołek (nazywany **wierzchołkiem ostrosłupa**), który nie należy do płaszczyzny podstawy.

Ostrosłupem prostym jest ostrosłup, który spełnia poniższe warunki:

- Na podstawie ostrosłupa da się opisać okrąg.
- Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Równoważne są następujące warunki:

- Ostrosłup jest ostrosłupem prawidłowym.
- Wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość.

- Wszystkie krawędzie boczne tworzą jednakowy kąt z płaszczyzną podstawy.

Ostrosłupem prawidłowym jest ostrosłup, który za podstawę ma wielokąt foremny.

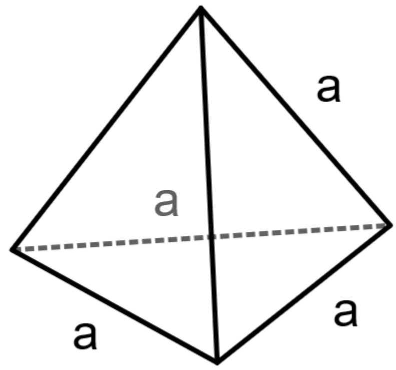
W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg i spodek wysokości tego trójkąta jest środkiem tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy miara kąta nachylenia wszystkich ścian bocznych ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest taki sama.

Specjalnym przypadkiem ostrosłupa jest **czworościan** - bryła której wszystkie ściany to trójkąty foremne.

Pole powierzchni - $a^2\sqrt{3}$

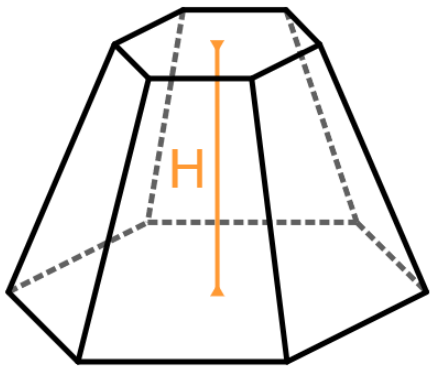
Objętość - $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Wysokość - $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$



Ostrosłup ścięty

Bryła powstała przez przecięcie ostrosłupa płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego podstawy i odrzucenie wszystkich punktów leżących po stronie wierzchołka ostrosłupa. Powstała w ten sposób nowa ściana jest podobna do podstawy ostrosłupa i jednokładna względem wierzchołka ostrosłupa. Ściany boczne ostrosłupa ściętego są trapezami.

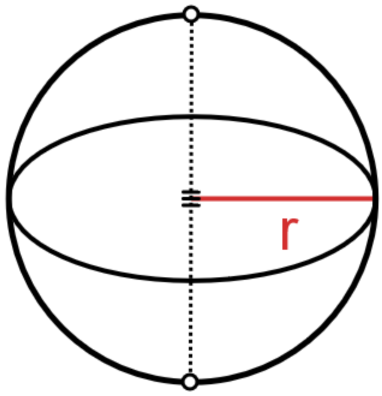


Niech P_{p_1}, P_{p_2} będą polami podstaw ostrosłupa ściętego. Objętość ostrosłupa ściętego wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}\left(P_{p_1} + P_{p_2} + \sqrt{P_{p_1} \cdot P_{p_2}}\right) \cdot H$$

Bryły obrotowe

Kula

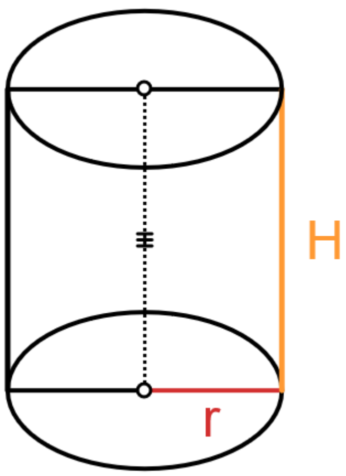


Pole powierzchni - $4\pi r^2$

Objętość - $\frac{4}{3}\pi r^3$

Kula to zbiór punktów, których odległość od środka kuli jest mniejsza bądź równa promieniowi r. Powstaje poprzez obrót koła wokół prostej zawierającej średnicę tego koła.

Walec

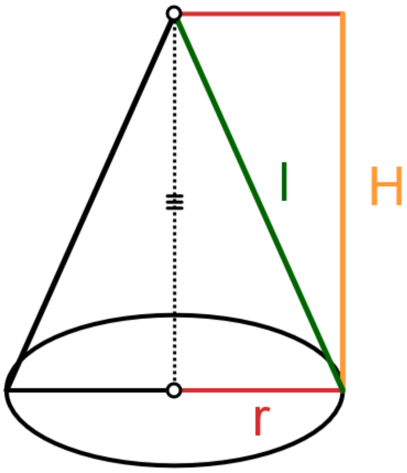


Pole powierzchni - $2\pi r(r + H)$

Objętość - $\pi r^2 H$

Walec kołowy prosty to bryła geometryczna powstała poprzez obrót prostokąta wokół osi zawierającej się w symetralnej jednego z boków tego prostokąta.

Stożek



Pole boczne - $\pi r l$

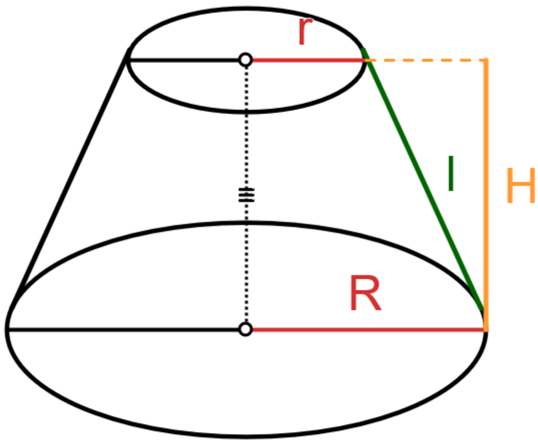
Pole powierzchni - $\pi r(r+l)$

Objętość - $\frac{1}{3}\pi r^2 H$

Stożek to bryła geometryczna powstała przez obrót trójkąta prostokątnego wokół osi zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

Stożek ścięty

Bryła powstała przez przecięcie stożka płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego podstawy i odrzucenie wszystkich punktów leżących po stronie wierzchołka stożka. Powstała w ten sposób nowa ściana jest - podobnie jak podstawa - kołem i jednokładna względem wierzchołka ostrosłupa.



Objętość stożka ściętego da się obliczyć ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest równe:

$$\pi l(R+r); \quad l = \sqrt{H^2 + (R-r)^2}$$

Przekrój osiowy bryły obrotowej to taka płaszczyzna, która zawiera prostą będącą osią obrotu tej bryły.

Jeżeli dwie bryły przestrzenne F_1, F_2 są do siebie podobne w skali k, to stosunek ich objętości jest równy sześcianowi skali podobieństwa.

$$\frac{V(F_2)}{V(F_1)} = k^3$$

11 Kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka

Silnia

Funkcja $\cdot! : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, która przypisuje każdej liczbie naturalnej n iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż n:

$$x! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

Przykład:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Dla dowolnej liczby n zachodzi również związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Symbol Newtona

Funkcja dwóch argumentów całkowitych nieujemnych, zawarta we wzorze:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Tożsamości:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Kombinatoryka

Reguła dodawania - Niech E_1, E_2 będą pewnymi zdarzeniami losowymi, a c_1, c_2 - ilością sposobów, na jakie mogą się wydarzyć. Jeżeli zdarzenia E_1, E_2 są rozłączne parami (nie ma wspólnych wyników obu zdarzeń) i nie wynikają jeden z drugiego, to pierwsze **lub** drugie zdarzenie może wystąpić na $c_1 + c_2$ sposobów.

Reguła mnożenia - Niech E_1, E_2 będą pewnymi zdarzeniami losowymi, a c_1, c_2 - ilością sposobów, na jakie mogą się wydarzyć. Jeżeli zdarzenie E_2 występuje w wyniku wystąpienia zdarzenia E_1, to pierwsze **i** drugie zdarzenie może wystąpić na $c_1 \cdot c_2$ sposobów.

Wariacja z powtórzeniami

Niech A będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym n elementów. Wariacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania k - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru A. Raz użyty element zbioru A może zostać wykorzystany ponownie. Kolejność elementów w ciągu ma znaczenie.

Ilość k - wyrazowych wariacji z powtórzeniami n elementowego zbioru to:

$$\overline{\boldsymbol{V}}_n^k = n^k$$

Przykład: Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5?
Na każdym miejscu setek, dziesiątek i jedności może pojawić się dowolna z tych cyfr, a wybranie cyfry na miejscu setek nie wyklucza jej pojawienia się na miejscu dziesiątek czy jedności w tym samym ciągu. Dlatego należy obliczyć trzywyrazową wariację z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego:

$$\overline{\boldsymbol{V}}_5^3 = 5^3 = 125$$

Wariacja bez powtórzeń

Niech A będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym n elementów. Wariacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania $1 \leq k < n$ - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru A. Raz użyty element zbioru A **nie może** zostać wykorzystany ponownie. Kolejność elementów w ciągu ma znaczenie.

Ilość k - wyrazowych wariacji bez powtórzeń n elementowego zbioru to:

$$\boldsymbol{V}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład: Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 takich, że dowolna cyfra pojawia się w liczbie co najwyżej raz?
Biorąc pod uwagę założenia zadania, aby obliczyć ilość takich liczb trzycyfrowych, należy obliczyć trzywyrazową wariację z bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego:

$$\boldsymbol{V}_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Permutacja bez powtórzeń

Niech A będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym n elementów. Permutacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania n - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru A. Defincja ta czyni permutację bez powtórzeń specjalnym przypadkiem wariacji bez powtórzeń.

Ilość wszystkich permutacji zbioru n - elementowego jest równa:

$$\boldsymbol{P}_n = n!$$

Przykład: Ile unikatowych pięcioliterowych słów (niekoniecznie poprawnych) można utworzyć z liter w słowie: śnieg?
Wybierając jedną literę ze słowa na pierwsze miejsce pozostają cztery litery do wyboru, na drugie miejsce - pozostają trzy, itd. Jest to więc permutacja na zbiorze pięcioelementowym:

$$\boldsymbol{P}_5 = 5! = 120$$

Permutacja z powtórzeniami

Niech $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ będzie pewnym skończonym wielozbiorem zawierającym k unikatowych elementów. Elementy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ razy. Permutacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru A.

Liczbę unikatowych permutacji tego zbioru oblicza się ze wzoru:

$$\overline{\boldsymbol{P}}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Przykład: Ile unikatowych siedmioliterowych słów (niekoniecznie poprawnych) można utworzyć z liter w słowie: szyszka?
W słowie *szyszka* litery: s i z powtarzają się dwa razy. Zamiana miejscami pierwszej i czwartej litery w słowie nie zmieni go, więc nie należy liczyć tej permutacji. Wszystkich unikatowych słów jest więc:

$$\overline{\boldsymbol{P}}_7 = \frac{7!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

Kombinacja bez powtórzeń

Niech A będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym n elementów. Kombinacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania $0 \leq k \leq n$ - elementowego podzbioru A' takiego, że $A' \subseteq A$. Elementy w zbiorze A' nie mogą się powtarzać. Operację tę czyta się jako "kombinację z n po k".

Ilość kombinacji bez powtórzeń można obliczyć ze wzoru:

$$\boldsymbol{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Przykład: W urnie znajduje się pięć kul, każda o innym kolorze. Ile jest różnych par kul, jakich można wylosować z tej urny?
Każda para kul wylosowana z urny to pewien wyjątkowy podzbiór kul z tej urny. By obliczyć ilość tych par, wystarczy obliczyć kombinację z 5 po 2:

$$\boldsymbol{C}_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{12} = 10$$

Kombinacja z powtórzeniami

Niech A będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym n elementów. Kombinacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania k - elementowego podzbioru A' takiego, że elementy zbioru A' należą do zbioru A. Elementy w zbiorze A' mogą się powtarzać, co czyni go wielozbiorem.

Ilość kombinacji z powtórzeniami na zbiorze A jest równa:

$$\overline{\boldsymbol{C}}_n^k = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Przykład: W urnie znajduje się pięć kul, każda o innym kolorze. Po wylosowaniu jednej kuli przed następnym losowaniem wrzuca się ją z powrotem do urny. Ile jest par kul, jakich można wylosować z tej urny?
Wymóg wrzucenia kuli z powrotem do urny sprawia, że możliwe staje się wylosowanie dwa razy tej samej kuli, co tworzy pewną nową parę. By uwzględnić wszystkie możliwe pary w takiej sytuacji, należy obliczyć kombinację z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego:

$$\overline{\boldsymbol{C}}_5^2 = \left(\!\binom{5}{2}\!\right) = \frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!} = \frac{720}{48} = 15$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeżeli m przedmiotów włoży się do n różnych szufladek, gdzie $m > n > 0$, to wtedy w co najmniej jednej szufladce znajdują się dwa przedmioty.

Rachunek prawdopodobieństwa

Przestrzeń probabilistyczna - struktura matematyczna umożliwiająca opisanie procesu losowego poprzez zdefiniowanie przestrzeni zdarzeń elementarnych, na której podzbiorach definiowane są funkcje prawdopodobieństwa, spełniające odpowiednie aksjomaty.
Przestrzeń probabilistyczna składa się z trzech elementów:

- Ω - **przestrzeń zdarzeń elementarnych** - niepusty zbiór zawierający wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego. Elementy tego zbioru, czyli pojedyncze wyniki, nazywa się zdarzeniami elementarnymi.
- $\mathcal{F}$ - **przestrzeń zdarzeń losowych** - rodzina mierzalnych podzbiorów przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Elementy przestrzeni zdarzeń losowych nazywa się zdarzeniem losowym. Przestrzeń $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbioru Ω.
- P - **miara probabilistyczna** - funkcja określona na przestrzeni zdarzeń losowych, która każdemu zdarzeniu losowemu przyporządkowuje pewną wartość liczbową. Wartość ta to prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia losowego z przestrzeni $\mathcal{F}$.

Funkcja $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest miarą probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki zwane **aksjomatami Kołgomorowa**:

- Nieujemność - $P(A) \geq 0; \quad A \in \mathcal{F}$,
- Unormowanie do jedności - $P(\Omega) = 1; \quad \Omega \in \mathcal{F}$,
- Zasada przeliczalnej addytywności - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
  $A, B \in \mathcal{F} \wedge A \cap B = \varnothing$.

Własności prawdopodobieństwa

Niech $A, A', A_1, A_2, \ldots, A_n, B, \varnothing \in \mathcal{F}$.

- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerowe: $P(\varnothing) = 0$.
- Ograniczenie górne: $P(A) \leq 1$.

- Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: $P(A') = 1 - P(A)$.
- Monotoniczność: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- Zasada włączeń i wyłączeń: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Skończona addytywność (dla zbiorów rozłącznych parami): $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Prawdopodobieństwo klasyczne

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, oraz zdarzenie A jest podzbiorem tej przestrzeni, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe ilorazowi mocy (liczebności) zbioru zawierającego zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A i mocy (liczebności) przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω.

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \in \mathcal{F}$ i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe to prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B. Prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć również ograniczając przestrzeń zdarzeń elementarnych do tylko tych, które sprzyjają zdarzeniu B, a następnie na tym zbiorze (symbolicznie oznaczanym Ω_B) zbadać prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie klasycznym.

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ i kolejno: $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0$, $\ldots$, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Wtedy:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech zbiór A będzie pewnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, a zbiór B niech będzie rozbiciem zbioru Ω, tj. zbiór B jest rodziną zbiorów parami rozłącznych $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ takich, że $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n > 0$ i $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$. Wtedy prawdopodobieństwo A jest równe:

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) \cdot \ldots \cdot P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$$

Twierdzenie Bayesa

Twierdzenie wiążące ze sobą prawdopodobieństwa warunkowe dwóch zdarzeń warunkujących się nawzajem. Niech zbiór A będzie pewnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni Ω, zbiór $B = \{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n\}$ niech będzie rozbiciem zbioru Ω, a $1 \leq i \leq n$ indeksem wybierającym pewne zdarzenie ze zbioru B. Wtedy prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć z pomocą wzoru Bayesa:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} \text{ , gdzie}$$

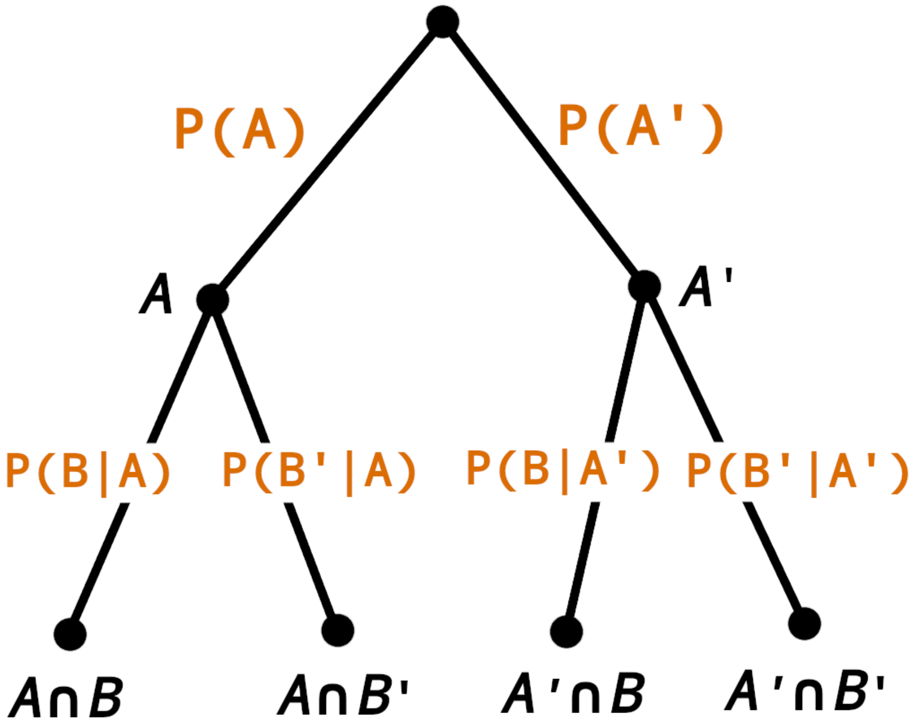
$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) \cdot \ldots \cdot P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$$

Zdarzenia rozłączne

Dwa zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \varnothing$

Zdarzenia niezależne

Dwa zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



Drzewa stochastyczne

Metoda przedstawiania złożonych wieloetapowych doświadczeń losowych. Drzewo stochastyczne składa się z odcinków (krawędzi) i punktów, w których spotykają się odcinki (węzły). Każda krawędź wychodząca z jednego węzła jest innym wynikiem doświadczenia losowego. Każdy ciąg krawędzi od pierwszego do ostatniego węzła to gałąź drzewa. By obliczyć prawdopodobieństwo pewnego wyniku, obok każdej krawędzi zapisuje się prawdopodobieństwo wystąpienia tego wyniku. Suma prawdopodobieństw wychodzących z jednego węzła musi być nie większa niż 1.

By obliczyć prawdopodobieństwo wyniku na końcu gałęzi, należy zastosować regułę iloczynów dla każdej wartości przy krawędzi należącej do danej gałęzi.
Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi, sumuje się prawdopodobieństwa przypisane do tych gałęzi.

Mediana

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ będzie pewnym uporządkowanym zbiorem wartości. Mediana tego zbioru to pewna liczba, wygenerowana za pomocą następującego schematu:

- Jeżeli n jest nieparzyste: $\mathrm{Me}(A) = a_{\frac{n+1}{2}}$,
- Jeżeli n jest parzyste: $\mathrm{Me}(A) = \dfrac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$

To znaczy, że jeżeli n jest nieparzyste, to medianą jest wartość idealnie pośrodku uporządkowanego szeregu, a jeżeli n jest parzyste, to wtedy medianą jest średna arytmetyczna dwóch wyników najbliżej środka.

Dominanta

Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ będzie pewną rodziną zdarzeń. Dominanta takiego zbioru to element o największym prawdopodobieństwie wystąpienia. Jeżeli kilka elementów jednocześnie występuje najczęściej (mają to samo prawdopodobieństwo wystąpienia, większe od prawdopodobieństwa wystąpienia któregokolwiek z pozostałych elementów ze zbioru A), to każdy z nich jest dominantą (modą). Jeżeli każdy element w zbiorze A ma takie samo prawdopodobieństwo wystąpienia, to nie da się wyznaczyć dominanty.

Definicję dominanty da się również zastosować w kontekście pewnego zbioru wartości. Wtedy dominantą takiego zbioru jest element występujący najczęściej w zbiorze.

Wariancja

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ będzie pewnym zbiorem wyników pewnej cechy a. Wariancją nazywa się miarę rozproszenia wyników wokół średniej arytmetycznej wartości cechy $\overline{x}$. By obliczyć wariancję zbioru X należy posłużyć się wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym nazywa się średnią odległość elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ od średniej arytmetycznej $\overline{x}$ cechy a. Jej wartość jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji.

↓	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	×	1.0000	×	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	1.0014	19.1073	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50°
40°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45°
	cos	sin	ctg	tg	cosec	sec	↑