

3.  
1415926  
5358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899  
8628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117  
4502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337  
8678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458  
700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882  
0466521384 14695194151 16094330572  
70365759 59195309218 61173819326  
1179310 51185480744 62379962749  
567351 88575272489 12279381830  
1194 91298336733 62440656643  
0 86021394946 39522473719  
07021798609 43702770539  
21717629317 67523846748  
18467669405 13200056812  
71452635608 27785771342  
75778960917 36371787214  
68440901224 95343014654  
95853710507 92279689258  
92354201995 61121290219  
60864034418 15981362977  
47713099605 18707211349  
99999837297 80499510597  
31732816096 31859502445  
94553469083 02642522308  
25334468503 52619311881  
71010003137 83875288658  
332083814206 17177669147 75  
5982534904287 554687311595 303  
8823537875937 5195778185778 62863  
226806613001927 8766111959092 0532171  
3809525720106548 5863278865936153381827  
9682303019520353 01852968995773622599  
4138912497217752 834791315155748572  
42454150695950 82953311686172  
78558890750 983817546  
3746493 931925

# Matematyka

## Tablice rozszerzone

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Symbole i notacja</b>	<b>1</b>
	Litery greckie . . . . .	1
	Zbiory . . . . .	1
	Logika . . . . .	1
	Zbiory liczbowe . . . . .	2
	Operacje arytmetyczne . . . . .	2
	Stochastyka i statystyka . . . . .	2
	Geometria . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Prawa działań, informacje ogólne</b>	<b>3</b>
	Wartość bezwzględna . . . . .	3
	Potęgi, pierwiastki i logarytmy . . . . .	3
	Wzory skróconego mnożenia . . . . .	5
	Średnie . . . . .	6
	Błędy przybliżenia . . . . .	7
	Największy wspólny dzielnik . . . . .	7
	Najmniejsza wspólna wielokrotność . . . . .	8
	Oprocentowanie lokat i kredytów . . . . .	9
	Cechy podzielności . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Wielomiany, funkcje wielomianowe</b>	<b>11</b>
	Informacje i twierdzenia . . . . .	11
	Funkcja liniowa . . . . .	13
	Funkcja kwadratowa . . . . .	14
	Funkcja sześcienna . . . . .	15
	Funkcja wymierna . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Właściwości i wykresy funkcji</b>	<b>19</b>
	Właściwości funkcji . . . . .	20
	Wykresy funkcji . . . . .	21
	Przekształcenia funkcji . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Ciągi</b>	<b>28</b>
	Informacje i twierdzenia . . . . .	28
	Granica ciągu liczbowego . . . . .	29
	Twierdzenie o trzech ciągach . . . . .	30
	Ciąg arytmetyczny . . . . .	30
	Ciąg geometryczny . . . . .	30

<b>6</b>	<b>Elementy analizy matematycznej</b>	<b>32</b>
	Granica funkcji . . . . .	32
	Granica jednostronna . . . . .	33
	Granica niewłaściwa . . . . .	34
	Granica w nieskończoności . . . . .	34
	Własności granic . . . . .	35
	Symbole nieoznaczone . . . . .	35
	Definicja ciągłości funkcji . . . . .	36
	Limity a asymptoty wykresu . . . . .	36
	Pochodna funkcji w punkcie . . . . .	38
	Styczna do wykresu funkcji . . . . .	39
	Funkcja pochodna . . . . .	39
	Pochodne wybranych funkcji . . . . .	39
	Własności pochodnych . . . . .	40
	Pochodna a monotoniczność funkcji . . . . .	41
	Ekstrema funkcji . . . . .	41
	Twierdzenie Rolle'a . . . . .	43
	Twierdzenie Lagrange'a . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Funkcje trygonometryczne</b>	<b>44</b>
	Miara łukowa kąta . . . . .	44
	Definicje funkcji trygonometrycznych . . . . .	44
	Podstawowe tożsamości trygonometryczne . . . . .	45
	Wartości funkcji trygonometrycznych . . . . .	46
	Wzory redukcyjne . . . . .	46
	Tożsamości trygonometryczne . . . . .	47
	Okresowość funkcji trygonometrycznych . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Planimetria</b>	<b>51</b>
	Symetralna odcinka . . . . .	51
	Dwusieczna kąta . . . . .	52
	Środkowa trójkąta . . . . .	53
	Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego . . . . .	54
	Nierówność w trójkącie . . . . .	54
	Twierdzenie Pitagorasa . . . . .	55
	Twierdzenie Steinera-Lehmusa . . . . .	55
	Pole trójkąta - wzory . . . . .	56
	Promień okręgu wpisanego i opisanego dowolnego trójkąta . . . . .	56
	Twierdzenia o dowolnych trójkątach . . . . .	57
	Trójkąt równoboczny - wzory . . . . .	59
	Twierdzenia o trójkątach równobocznych . . . . .	60

Trójkąt prostokątny - wzory . . . . .	61
Cechy przystawiania trójkątów . . . . .	62
Cechy podobieństwa trójkątów . . . . .	64
Twierdzenie sinusów . . . . .	65
Twierdzenie cosinusów . . . . .	66
Twierdzenie tangensów . . . . .	66
Twierdzenie cotangensów . . . . .	66
Wzajemne położenie okręgów i prostych . . . . .	67
Wzajemne położenie dwóch okręgów . . . . .	69
Kąt środkowy i wpisany . . . . .	71
Kąt wpisany i dopisany . . . . .	71
Okrąg - wzory . . . . .	71
Twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą . . . . .	72
Twierdzenie Talesa . . . . .	72
Czworokąty - wzory . . . . .	73
Czworokąt wpisany w okrąg . . . . .	74
Okrąg wpisany w czworokąt . . . . .	75
Podobieństwo czworokątów . . . . .	76
Wielokąty . . . . .	76
<b>9 Geometria analityczna</b>	<b>77</b>
Podstawowe informacje . . . . .	77
Wektory . . . . .	77
Pole trójkąta . . . . .	79
Jednokładność . . . . .	80
Proste . . . . .	81
Okręgi . . . . .	84
<b>10 Geometria przestrzenna</b>	<b>85</b>
Proste i płaszczyzny w przestrzeni . . . . .	85
Granistosłup . . . . .	86
Ostrosłup . . . . .	87
Ostrosłup ścięty . . . . .	88
Bryły obrotowe . . . . .	89
<b>11 Kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka</b>	<b>92</b>
Silnia . . . . .	92
Symbol Newtona . . . . .	92
Kombinatoryka . . . . .	92
Zasada szufladkowa Dirichleta . . . . .	96
Rachunek prawdopodobieństwa . . . . .	96

Własności prawdopodobieństwa . . . . .	96
Prawdopodobieństwo klasyczne . . . . .	97
Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	97
Prawdopodobieństwo całkowite . . . . .	98
Twierdzenie Bayesa . . . . .	98
Zdarzenia rozłączne . . . . .	98
Zdarzenia niezależne . . . . .	98
Drzewa stochastyczne . . . . .	99
Mediana . . . . .	100
Dominanta . . . . .	100
Wariancja . . . . .	100
Odchylenie standardowe . . . . .	100

# 1 Symbole i notacja

## Litery greckie

Nazwa	Mała litera	Duża litera
Alfa	$\alpha$	$A$
Beta	$\beta$	$B$
Gamma	$\gamma$	$\Gamma$
Delta	$\delta$	$\Delta$
Epsilon	$\varepsilon$	$E$
Dzeta	$\zeta$	$Z$
Eta	$\eta$	$H$
Theta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$
Jotta	$\iota$	$I$
Kappa	$\kappa$	$K$
Lambda	$\lambda$	$\Lambda$
My	$\mu$	$M$
Ny	$\nu$	$N$
Ksi	$\xi$	$\Xi$
Omikron	$o$	$O$
Pi	$\pi$	$\Pi$
Rho	$\rho, \varrho$	$P$
Sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$
Tau	$\tau$	$T$
Ipsylon	$\upsilon$	$\Upsilon$
Phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$
Chi	$\chi$	$X$
Psi	$\psi$	$\Psi$
Omega	$\omega$	$\Omega$

## Zbiory

Symbol	Znaczenie
$\emptyset$	Zbiór pusty
$A \cup B$	Suma zbiorów
$A \cap B$	Część wspólna zbiorów
$A \setminus B$	Różnica zbiorów
$A \times B$	Iloczyn kartezjański
$\bar{A}, A'$	Dopełnienie zbioru
$A \subset B$	Podzbiór zbioru
$A \not\subset B$	Nie jest podzbiorem zbioru
$x \in A$	Należy do zbioru
$x \notin A$	Nie należy do zbioru
$ A , \bar{A}$	Liczebność zbioru

## Logika

Symbol	Znaczenie
$\wedge$	I (iloczyn logiczny)
$\vee$	Lub (suma logiczna)
$A \Leftrightarrow B$	Równowartość logiczna
$A \Rightarrow B$	Konsekwencja logiczna
$\neg A$	Negacja logiczna
$A \therefore B$	Dlatego
$A \because B$	Ponieważ
$\forall x, \bigwedge_x$	Dla każdego $x$
$\exists x, \bigvee_x$	Istnieje $x$
$\exists! x, \bigvee_x^1$	Istnieje dokładnie jeden $x$

## Zbiory liczbowe

Nazwa	Symbol	Nazwa	Symbol
Naturalne	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Wymierne	$\mathbb{Q}, \mathbb{W} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$
Naturalne dod.	$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Niewymierne	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{NW}$
Całkowite	$\mathbb{Z}, \mathbb{C} = \{-1, 0, 1, \dots\}$	Rzeczywiste	$\mathbb{R}$

## Operacje arytmetyczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$a + b$	Dodawanie	$a < b$	Mniejsze od
$a - b$	Odejmowanie	$a > b$	Większe od
$a \cdot b, a \times b$	Mnożenie	$a \leq b$	Mniejsze bądź równe od
$a/b, \frac{a}{b}$	Dzielenie	$a \geq b$	Większe bądź równe od
$x^n$	Potęgowanie	$a \approx b$	Aproksymacja
$\sqrt{x}$	Pierwiastek kwadratowy	$x\%$	Procent
$\sqrt[n]{x}$	Pierwiaster $n$ -tego stopnia	$x\text{‰}$	Promil
$\log_a x$	Logarytm o podstawie $a$	$ x $	Wartość bezwzględna
$\log x$	Logarytm dziesiętny	$[x]$	Sufit
$\ln x$	Logarytm naturalny	$\lfloor x \rfloor$	Podłoga
$a = b$	Znak równości	$\{x\}$	Mantysa (część ułamkowa)
$a \neq b$	Nierówność	$x \bmod a$	Dzielenie całkowite (modulo)

## Stochastyka i statystyka

Symbol	Znaczenie
$n!$	Silnia
$\binom{n}{k}$	Kombinacja bez powtórzeń
$\Omega$	Przestrzeń probabilistyczna
$P(A)$	Prawdopodobieństwo
$P(A   B)$	Prawdopodobieństwo warunkowe
$\sigma^2$	Wariancja
$\sigma$	Odchylenie standardowe
$\bar{x}$	Średnia arytmetyczna

## Geometria

Symbol	Znaczenie
$ AB $	Odcinek
$\vec{AB}$	Wektor
$\angle, \sphericalangle, \measuredangle$	Kąt
$\triangle ABC$	Trójkąt
$\square ABCD$	Czworokąt
$k \parallel l$	Proste równoległe
$k \perp l$	Proste prostopadłe
$\sim$	Figury podobne
$\equiv$	Figury przystające

## 2 Prawa działań, informacje ogólne

### Wartość bezwzględna

**Wartość bezwzględna (moduł liczby)** - operacja, która zwraca nienegatywną wartość. Zdefiniowana jest następującym równaniem:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}$  prawdziwe są następujące zależności:

- Nienegatywność:  $|a| \geq 0$ ,
- Określoność dodatnia:  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- Multiplikatywność:  $|ab| = |a||b|$ ,
- Podaddytywność:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$ ,
- Idempotencja:  $||a|| = |a|$ ,
- Parzystość:  $|-a| = |a|$ ,
- Zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych:  $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$ ,
- Zachowanie dzielenia:  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow b \neq 0$ ,

Dodatkowo:

$$|a| = \sqrt{a^2}, \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

### Potęgi, pierwiastki i logarytmy

**Potęgowanie (podniesienie do  $n$ -tej potęgi)** - operacja dwuargumentowa, która jest zdefiniowana jako iloczyn  $a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (podstawa)  $n, n \in \mathbb{N}_+$  (wykładnik) razy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Szczególne przypadki:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad 0^n = 0$$



**Pierwiastkowanie** - operacja odwrotna do potęgowania, która dla  $a$  przyjmuje wartość  $b$  taką, że pomnożona  $n$  razy jest równa  $b$ :

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a,$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad n = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\}$$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$  prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{array}{ll} a^{-n} = \frac{1}{a^n} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} & \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ (a^n)^m = a^{n \cdot m} & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \\ \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m & \sqrt{a^2} = |a| \end{array}$$

**Logarytm** - operacja odwrotna do potęgowania, która dla podstawy  $a$  oraz argumentu  $b$  przyjmuje wartość  $n$  taką, że  $a$  podniesione do potęgi  $n$  jest równe  $b$ :

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}, \quad b \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{R}$$

Szczególne przypadki:

$$\log_a 0 - \text{niezdefiniowany}, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

Dla  $a, b = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}; x, y \in \mathbb{R}_+$  prawdziwe są następujące zależności:

- Prawo iloczynu:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Prawo ilorazu:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- Prawo potęgi:  $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
- Zamiana podstawy z argumentem:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- Zmiana podstawy logarytmu:  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- Logarytm potęgi podstawy:  $\log_a(a^x) = x$
- $a$  do potęgi logarytmu  $a$  z  $x$ :  $a^{\log_a x} = x$

## Wzory skróconego mnożenia

Dla  $x, y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$  prawdziwe są następujące zależności:

- Kwadrat sumy:  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- Kwadrat różnicy:  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- Różnica kwadratów:  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- Kwadrat sumy trzech składników:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Sześcian sumy:  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Sześcian różnicy:  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- Różnica sześciątów:  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- Suma sześciątów:  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- Suma  $n$ -tych potęg:  $a^n + b^n = (a + b)(a^{(n-1)} - a^{(n-2)}b + \dots - ab^{(n-2)} + b^{(n-1)})$
- Różnica  $n$ -tych potęg:  $a^n - b^n = (a - b)(a^{(n-1)} + a^{(n-2)}b + \dots + ab^{(n-2)} + b^{(n-1)})$

Za pomocą **trójkąta Pascala** można wyznaczyć współczynniki argumentów dla sumy i różnicy podniesionej do potęgi dowolnego  $n, n \in \mathbb{N}$ :

$n = 0$					1					
$n = 1$					1		1			
$n = 2$				1		2		1		
$n = 3$			1		3		3		1	
$n = 4$			1	4		6		4	1	
$n = 5$		1	5		10		10	5	1	
$n = 6$	1		6	15		20		15	6	1

lub skorzystać ze wzoru:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{(n-1)}b + \binom{n}{2}a^{(n-2)}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{(n-1)} + \binom{n}{n}b^n$$

*Przykład:*  $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

## Średnie

- Arytmetyczna:  $S_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Geometryczna:  $S_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$
- Kwadratowa:  $S_k = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Harmoniczna:  $S_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Nierówność Cauchy'ego między średnimi** - średnie wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich układają się w charakterystyczną nierówność:

$$S_k \geq S_a \geq S_q \geq S_h$$

## Błędy przybliżenia

Dla  $r$  oznaczającego wartość dokładną i  $p$  oznaczającego wartość przybliżoną zdefiniowane są błędy przybliżenia:

**Błąd bezwzględny przybliżenia** - wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a przybliżoną, wyrażona wzorem:  $|r - p|$ .

**Błąd względny przybliżenia** - iloraz błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej rzeczywistej wielkości, wyrażona:  $\frac{|r - p|}{|r|}$ .

**Błąd procentowy przybliżenia** - wartość procentowa błędu względnego:  $\frac{|r - p|}{|r|} \cdot 100\%$ .

## Największy wspólny dzielnik

Funkcja  $\text{NWD}(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{N}_+$  dla liczb  $a$  i  $b$  znajduje największą liczbę  $c$  ze zbioru jednoczesnych dzielników liczb  $a$  i  $b$ . Znalezienie liczby  $\text{NWD}(a, b)$  sprowadza się do zastosowania **algorytmu Euklidesa**:

1. Dla  $a, b$  znajdź większą z nich,
2. Od większej liczby odejmij tę mniejszą,
3. Powtarzaj, aż odejmowanie liczb da zero.

*Przykład:*

$$\text{NWD}(798, 1008) = \left\{ \begin{array}{lcl} 1008 - 798 & = & 210 \\ 798 - 210 & = & 588 \\ 588 - 210 & = & 378 \\ 378 - 210 & = & 168 \\ 210 - 168 & = & 42 \\ 168 - 42 & = & 126 \\ 126 - 42 & = & 84 \\ 84 - 42 & = & 42 \\ 42 - 42 & = & 0 \end{array} \right\} = 42$$

## Najmniejsza wspólna wielokrotność

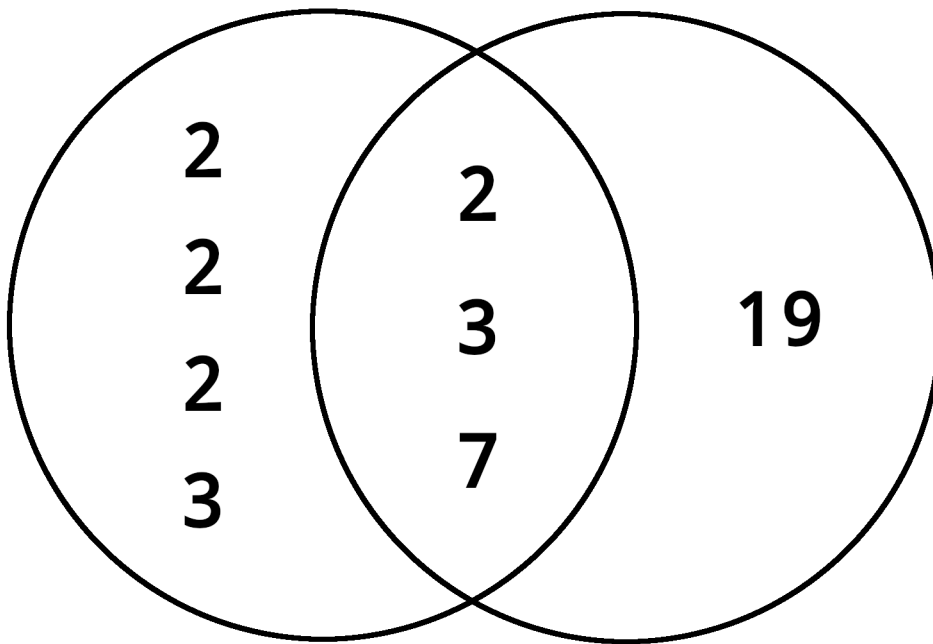
Funkcja  $\text{NWW}(a, b)$ ,  $\in \mathbb{N}_+$  dla liczb  $a$  i  $b$  znajduje najmniejszą liczbę  $c$  taką, że  $a$  i  $b$  są jednocześnie podzielne przez  $c$ . Aby znaleźć  $\text{NWW}(a, b)$  można posłużyć się następującym wzorem:

$$\text{NWW}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{NWD}(a, b)}$$

NWW oraz NWD można też obliczyć znając rozkład liczb na czynniki pierwsze. NWW oblicza się jako iloczyn największych potęg unikalnych czynników. NWW to iloczyn wspólnych dla obu liczb czynników.

*Przykład:*

$$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad 798 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$$



*Więc:*

$$\text{NWW}(798, 1008) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 19152$$

$$\text{NWD}(798, 1008) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

## Oprocentowanie lokat i kredytów

**Procent prosty** - rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do wkładu nie podlegają oprocentowaniu.

**Procent składany** - rodzaj oprocentowania, który nalicza procent od odsetek doliczonych do wkładu w każdym kolejnym rozpatrywanym okresie.

Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**, a czas między kapitalizacjami **okresem kapitalizacji**.

Niech  $K_0$  będzie początkowym wkładem pieniężnym,  $K$  - końcową otrzymaną kwotą,  $n$  - liczbą równych okresów kapitalizacji, które miały miejsce w okresie  $m$ ,  $m$  - liczbą okresów oszczędzania,  $r$  - stopą oprocentowania,  $p$  - podatkiem od dochodów kapitałowych. Wtedy:

$$\text{Procent prosty:} \quad K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot m}$$

$$\text{Procent składany:} \quad K = K_0 \cdot \left[1 + \frac{r}{n} \left(1 - \frac{p}{100}\right)\right]^{n \cdot m}$$

## Cechy podzielności

- **2** - ostatnia cyfra liczby jest parzysta.

$$7236 : 6 - \text{parzysta} \Rightarrow 2 \mid 7236$$

- **3** - suma wszystkich cyfr liczby jest podzielna przez 3.

$$828 : 8 + 2 + 8 = 18, 3 \mid 18 \Rightarrow 3 \mid 828$$

- **4** - liczba złożona z cyfr dziesiątek i jedności cyfry jest podzielna przez 4.

$$102\,472 : 4 \mid 72 \Rightarrow 4 \mid 102\,472$$

- **5** - ostatnia cyfra liczby to 0 lub 5.

$$128\,490 : 0 \in \{0, 5\} \Rightarrow 5 \mid 128\,490$$

- **6** - liczba jest podzielna przez 2 i 3.

$$39\,504 : 4 - \text{parzysta} \wedge 3 + 9 + 5 + 0 + 4 = 21, 3 \mid 21 \Rightarrow 6 \mid 39\,504$$

- **7** - różnica liczby bez cyfry jedności i podwojonej cyfry jedności jest podzielna przez 7.

$$637 : 63 - 2 \cdot 7 = 49, 7 \mid 49 \Rightarrow 7 \mid 637$$

- **8** - liczba złożona z cyfr setek, dziesiątek i jedności cyfry jest podzielna przez 8.

$$340\,696 : 8 \mid 696 \Rightarrow 8 \mid 340\,696$$

- **9** - suma wszystkich cyfr liczby jest podzielna przez 9.

$$59\,247 : 5 + 9 + 2 + 4 + 7 = 27, 9 \mid 27 \Rightarrow 9 \mid 59\,247$$

- **10** - ostatnia cyfra liczby to 0.

$$23\,140 : 0 \in \{0\} \Rightarrow 10 \mid 23\,140$$

- **11** - naprzemienne dodawanie i odejmowanie cyfr liczby daje wynik podzielny przez 11.

$$1\,062\,292 : 1 - 0 + 6 - 2 + 2 - 9 + 2 = 0, 11 \mid 0 \Rightarrow 11 \mid 1\,062\,292$$

- **12** - liczba jest podzielna przez 3 i 4.

$$78\,624 : 7 + 8 + 6 + 2 + 4 = 27, 3 \mid 27 \wedge 4 \mid 24 \Rightarrow 12 \mid 78\,624$$

### 3 Wielomiany, funkcje wielomianowe

#### Informacje i twierdzenia

**Wielomianem stopnia  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  zmiennej rzeczywistej  $x$  nazywamy wyrażenie:**

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$ . Liczby  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  to współczynniki wielomianu. Wielomian stopnia zerowego to każda liczba rzeczywista różna od zera. Wielomian zerowy to liczba równa zeru; nie ma określonego stopnia.

**Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian  $Q(x)$ , dla którego prawdziwa jest równość:**

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wówczas  $Q(x)$  nazywany jest ilorazem wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$ , a  $P(x)$  jest dzielnikiem wielomianu  $W(x)$ .

**Pierwiastek wielomianu  $W(x)$**  to liczba rzeczywista  $a$ , dla której  $W(a) = 0$ .

**Pierwiastek  $k$ -krotny wielomianu  $W(x)$** , gdzie  $k \in \mathbb{N}_+$  to liczba  $a$  taka, że  $W(x)$  jest podzielny przez  $(x - a)^k$  i nie jest podzielny przez  $(x - a)^{k+1}$ . Liczba  $k$  jest nazywana krotnością pierwiastka.

#### **Twierdzenie o dzieleniu (rozkładzie) wielomianu**

Jeśli  $W(x)$  oraz  $P(x)$  są wielomianami i  $P(x)$  nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany  $Q(x)$  oraz  $R(x)$  takie, że prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie  $R(x)$  jest wielomianem zerowym lub wielomianem o stopniu mniejszym od stopnia wielomianu  $P(x)$ .

#### **Twierdzenie o reszcie wielomianu**

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - a)$  jest równa  $W(a)$ .



### Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych

Jeżeli wielomian  $W(x)$  ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci nieskracalnego ułamka  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{C} \wedge q \neq 0$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , natomiast  $q$  - dzielnikiem współczynnika  $a_n$  przy najwyższej potędze zmiennej.

### Twierdzenie Bézouta

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W(x)$  jest podzielny bez reszty przez dwumian  $(x - a)$ .

### Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu

Każdy wielomian stopnia  $n$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków.

### Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki

Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Rozkład w taki sposób jest jednoznaczny (z dokładnością co do kolejności czynników i stałej).

### Reguła znaków Kartezjusza

Dla dowolnego wielomianu o rzeczywistych współczynnikach, uporządkowanych według malejącej potęgi zmiennej, ilość dodatnich miejsc zerowych wielomianu jest równa liczbie zmian znaków między niezerowymi współczynnikami, albo jest mniejsza o wielokrotność liczby 2.

### Schemat Hornera

Sposób obliczania wartości wielomianu dla danej wartości argumentu. Wykorzystywany również do przeprowadzania dzielenia wielomianu przez dwumian w formie  $(x - a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  na podstawie twierdzenia Bézouta.

*Przykład:*

Podziel  $W(x) = x^4 - 22x^2 - 56x + 77$  przez dwumian  $x - 1$

1. Zapisz wszystkie współczynniki wielomianu od najwyższej potęgi (także z zerowymi) oraz  $a$  z dwumianu. Przepisz pierwszy współczynnik do najniższej linii:

	1	0	-22	-56	77
1	↓				
	1				

2. Pomnóż przeniesiony współczynnik przez  $a$  zapisane po lewej stronie:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\ 1 & & 1 \cdot 1 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

3. Dodaj ze sobą współczynniki z górnego wiersza do właśnie policzonego iloczynu poniżej:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\ 1 & & 1 & & & \\ \hline & 1 & 0 + 1 & & & \end{array}$$

4. Powtarzaj operacje mnożenia i dodawania aż do ostatniej kolumny:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\ 1 & & 1 & 1 \cdot 1 & -21 \cdot 1 & -77 \cdot 1 \\ \hline & 1 & 1 & -22 + 1 & -56 + (-21) & 77 + (-77) \end{array}$$

Otrzymujemy tabelkę wypełnioną w następujący sposób:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\ 1 & & 1 & 1 & -21 & -77 \\ \hline & 1 & 1 & -21 & -77 & 0 \end{array}$$

Więc:

$$\underbrace{(x^4 - 22x^2 - 56x + 77)}_{W(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{P(x)} \underbrace{(1x^3 + 1x^2 - 21x - 77)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)} \Leftrightarrow W(1) = 0$$

## Funkcja liniowa

Wzór ogólny:

$$f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Liczba  $a$  nazywana jest współczynnikiem kierunkowym,  $b$  wyrazem wolnym. Dziedzina i zbiorem wartości funkcji liniowej są liczby rzeczywiste.

Funkcja liniowa przecina oś OY w punkcie  $(0, b)$ , a oś OX w  $(-\frac{b}{a}, 0)$ . Wykres funkcji liniowej jest nachylony do osi OX pod kątem  $\alpha$  takim, że  $\operatorname{tg} \alpha = a$ .

Funkcja liniowa jest:

- nieograniczona,
- nieokresowa,
- monotoniczna ( $a > 0$  - rosnąca,  $a < 0$  - malejąca,  $a = 0$  - stała),
- różnowartościowa (gdy  $a \neq 0$ ),
- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = a$ .

## Funkcja kwadratowa

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q; \quad p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0; \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Delta, wyróżnik wielomianu stopnia drugiego** - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji kwadratowej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- $\Delta > 0$  - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste:  $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,
- $\Delta = 0$  - Jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,
- $\Delta < 0$  - Brak pierwiastków rzeczywistych:  $(x_1, x_2 \in \mathbb{C} \text{ (zespolonych)})$ .

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której ramiona skierowane są do góry gdy  $a > 0$  a do dołu, gdy  $a < 0$ .

**Wierzchołek funkcji kwadratowej** znajduje się w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ . Alternatywnie, współrzędną  $x$  wierzchołka można wyliczyć średnią arytmetyczną miejsc zerowych:  $p = \frac{x_1+x_2}{2}$ , a współrzędną  $y$  wartością funkcji w punkcie  $p$ :  $q = f(p)$ .

**Wzory Viète'a** - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia drugiego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest przedział  $\langle q, +\infty \rangle$  dla  $a > 0$ ,  $(-\infty, q]$  dla  $a < 0$ .

Funkcja kwadratowa jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:

malejąca w  $(-\infty, p]$ , rosnąca w  $\langle p, +\infty)$ ,  $a > 0$

rosnąca w  $(-\infty, p]$ , malejąca w  $\langle p, +\infty)$ ,  $a < 0$

- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = 2ax + b$ ,
- ściśle wypukła dla  $a > 0$ , ściśle wklęsła dla  $a < 0$ .

## Funkcja sześcienna

**Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

**Wzór w postaci kanonicznej:**

$$f(t) = t^3 + pt + q; \quad t = x + \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}$$

**Wzór w postaci iloczynowej:**

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

**Wyróżnik wielomianu stopnia trzeciego** - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji sześcienniej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem  $\Delta_3 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$ .

- $\Delta_3 > 0$  - Trzy różne pierwiastki rzeczywiste:  $x_1, x_2, x_3$ ,
- $\Delta_3 = 0$  - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z czego jeden dwukrotny lub jeden pierwiastek trzykrotny,
- $\Delta_3 < 0$  - Jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa pozostałe w liczbach zespolonych.

**Ekstrema funkcji sześcienniej** (punkty krytyczne) znajdują się w punktach  $(p, f(p))$ , gdzie  $p$  wyznaczone jest wzorem:  $p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ . Jeżeli  $b^2 - 3ac$  jest mniejsze bądź równe 0, wtedy ekstrem nie ma (funkcja  $f(x)$  jest monotoniczna w całej dziedzinie).

**Środek symetrii funkcji sześcienniej** (punkt przegięcia) znajduje się w punkcie o współrzędnych  $\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$ .

**Wzory Viète'a** - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia trzeciego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Dziedziną i zbiorem wartości funkcji sześcienniej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja sześcienna jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:
  - rosnąca w  $(-\infty, p_1)$  i  $\langle p_2, +\infty)$ , malejąca w  $\langle p_1, p_2 \rangle$ ,  
 $a > 0, \quad b^2 - 3ac > 0$

- malejąca w  $(-\infty, p_1)$  i  $(p_2, +\infty)$ , rosnąca w  $(p_1, p_2)$ ,  
 $a < 0$ ,  $b^2 - 3ac > 0$
- rosnąca w całej dziedzinie,  $a > 0$ ,  $b^2 - 3ac \leq 0$
- malejąca w całej dziedzinie,  $a < 0$ ,  $b^2 - 3ac \leq 0$
- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ,
- ściśle wypukła w przedziale:  

$$\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla } a > 0, \left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla } a < 0$$
- ściśle wklęsła w przedziale:  

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla } a > 0, \left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla } a < 0$$

## Funkcja wymierna

Funkcja będąca ilorazem funkcji wielomianowych. Iloraz wielomianów realizujących dane funkcje wielomianowe nazywa się wyrażeniem wymiernym. **Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \quad Q(x) \neq 0$$

### Asymptoty funkcji wymiernej

- Pionowa:  
Wszystkie miejsca, gdzie mianownik funkcji wymiernej  $Q(x) = 0$ .
- Pozioma:  
Niech  $L$  będzie stopniem licznika funkcji wymiernej,  $M$  stopniem mianownika funkcji wymiernej, a  $a_L, a_M$  to kolejno współczynniki przy największej potęgze licznika i mianownika. Wtedy:

$L < M$	$L = M$	$L > M$
$y = 0$	$y = \frac{a_L}{a_M}$	Brak asymptoty poziomej

- Ukośna:  
Występuje, gdy stopień licznika jest o jeden większy od mianownika. Aby policzyć wzór jej prostej należy przeprowadzić pisemne dzielenie licznika przez mianownik. Wynikiem jest iloraz dzielenia.

*Przykład:*

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 10x + 4}$$

Stopień licznika jest o 1 większy od mianownika, więc:

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 \hline
 2x^2 - 10x + 4) \quad 2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 \\
 \underline{- 2x^3 + 10x^2 - 4x} \phantom{+ 9} \\
 6x^2 + 2x + 9 \\
 \underline{- 6x^2 + 30x - 12} \\
 32x - 3
 \end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(2x^2 - 10x + 4) + 32x - 3$$

Asymptota ukośna:  $y = x + 3$

Specjalnym przypadkiem funkcji wymiernej jest **funkcja homograficzna**.

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

Dziedzina funkcji homograficznej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem jednego miejsca zerowego opisanego wzorem  $-\frac{d}{c}$ .

Zbiór wartości to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem punktu  $\frac{a}{c}$ , którego zawarcie sprawiłoby, że funkcja homograficzna spełniałaby równanie  $ad - bc = 0$ .

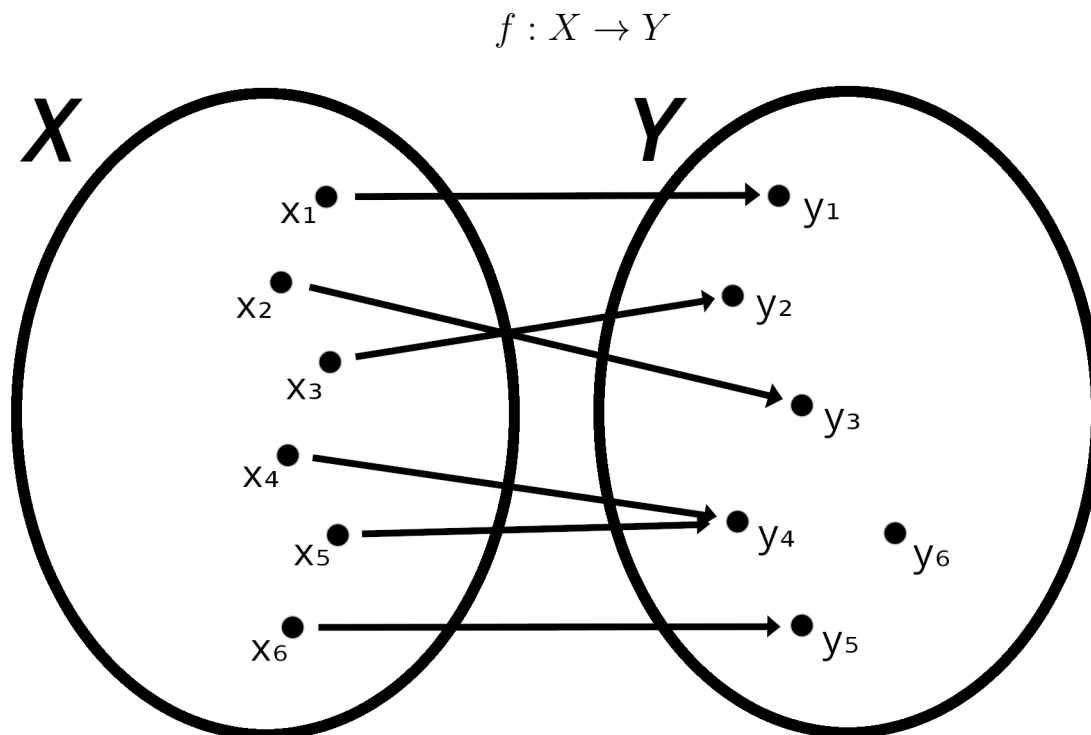
Asymptota pionowa opisana jest równaniem  $x = -\frac{d}{c}$ , a asymptota pozioma  $y = \frac{a}{c}$ .

Środkiem symetrii a zarazem punktem przecięcia asymptot jest punkt o współrzędnych  $S = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ .

Funkcja homograficzna jest monotoniczna w przedziałach  $(-\infty, -\frac{d}{c})$  i  $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ . Jest przedziałami rosnąca, gdy  $ad - bc > 0$  a przedziałami malejąca, gdy  $ad - bc < 0$ .

## 4 Właściwości i wykresy funkcji

**Funkcja** - relacja między elementami zbioru  $X$  i  $Y$  taka, że każdemu elementowi zbioru  $X$  przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru  $Y$ .



*Funkcja  $f$  przedstawiona jako graf. Każdemu argumentowi ze zbioru  $X$  przyporządkowano dokładnie jeden element ze zbioru  $Y$ . Dwóm różnym elementom w zbiorze  $X$  może odpowiadać ten sam element  $Y$ . Nie każdy element zbioru  $Y$  musi być wartością funkcji  $f$ .*

Zbiór  $X$  nazywa się dziedziną lub zbiorem argumentów, a zbiór  $Y$  - przeciwdziedziną lub zbiorem wartości.

Każdy  $x \in X$  to argument funkcji  $f$ , a  $y \in \{n : n \in Y \wedge n = f(x)\}$  - wartością funkcji.

Funkcja  $f$  to przekształcenie (odwzorowanie) zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ .

**Twierdzenie Darboux** - Niech funkcja  $f(x)$  będzie funkcją ciągłą, a na jej dziedzinie niech będzie zdefiniowany przedział domknięty  $\langle a, b \rangle$ . Wtedy, jeżeli  $f(a) > f(c) > f(b)$  lub  $f(a) < f(c) < f(b)$  to punkt  $c \in \langle a, b \rangle$ . Szczególnym przypadkiem jest, gdy  $a$  i  $b$  mają różne znaki. Wtedy w przedziale domkniętym między nimi gwarantowane jest istnienie  $c$  takiego, że  $f(c) = 0$ .



## Właściwości funkcji

- Różnowartościowa (iniekcja)

Funkcja dla każdego elementu dziedziny przyjmuje różny element z przeciwdziedziny co najwyżej raz:

$$f : X \rightarrow Y \text{ - różnowartościowa} \Leftrightarrow \bigwedge_{a,b \in X} a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

- Funkcja "na" (suriekcja)

Funkcja, która przyjmuje wszystkie wartości z przeciwdziedziny:

$$f : X \rightarrow Y \text{ - "na"} \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y$$

- Funkcja wzajemnie jednoznaczna (bijekcja)

Funkcja, w której każdemu elementowi dziedziny odpowiada jeden i tylko jeden element z przeciwdziedziny, przy czym każdy  $y$  należący do zbioru  $Y$  jest obrazem zbioru  $X$ . Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest jednocześnie różnowartościowa i "na".

- Addytywna

Funkcja zachowuje operację dodawania:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- Multiplikatywna

Funkcja zachowuje operację mnożenia:  $f(xy) = f(x)f(y)$

- Parzysta

Wykres funkcji jest symetryczny względem osi rzędnych (OY):  $f(x) = f(-x)$

- Nieparzysta

Wykres funkcji jest symetryczny względem środka układu współrzędnych:  $f(x) = -f(-x)$

- Ciągła

Arbitralnie mała zmiana wartości funkcji jest uzasadniona arbitralnie małą zmianą argumentu funkcji. Pozbawiona jest też punktów nieciągłości pierwszego rodzaju usuwalnych, pierwszego rodzaju i drugiego rodzaju.

- Monotoniczna

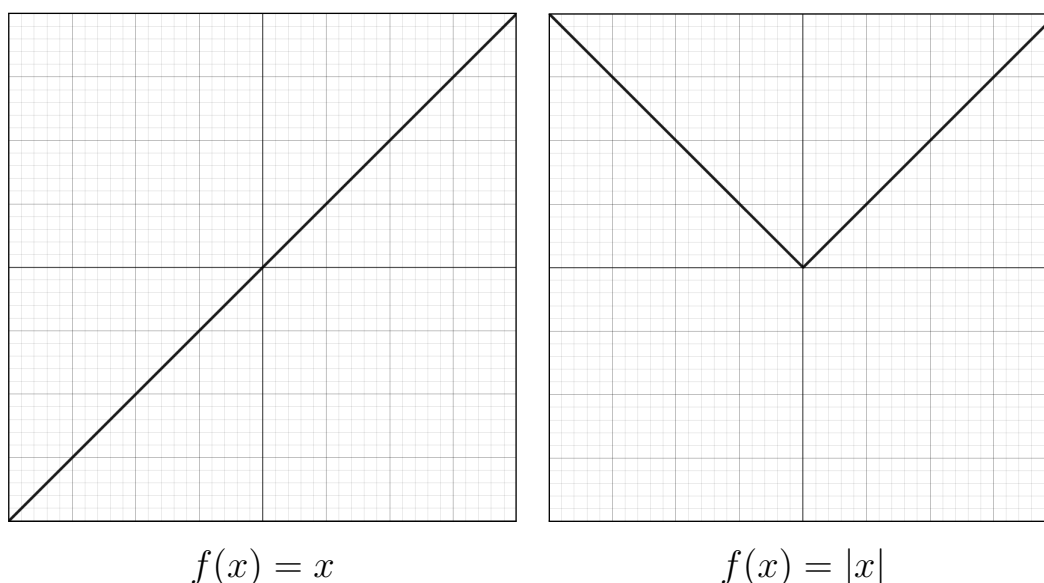
Funkcja, która zachowuje pewien określony porządek zbiorów. Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie dowolną funkcją na uporządkowanych zbiorach  $X, Y$ , a  $x_1, x_2$  elementami dziedziny funkcji  $f$ . Wówczas funkcja  $f$  jest:

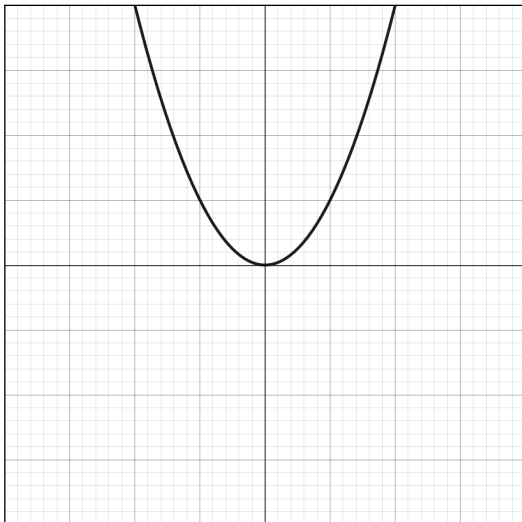
- rosnąca (silnie rosnąca), gdy  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - malejąca (silnie malejąca), gdy  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - nierosnąca (słabo rosnąca), gdy  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - niemalejąca (słabo malejąca), gdy  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - stała, gdy dla dowolnych  $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- Różniczkowalna  
Funkcja ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, oraz wartość tej pochodnej jest skończona.
  - Okresowa  
Funkcja jest okresowa, gdy pewne wartości pojawiają się cyklicznie co pewien regularny odstęp. Niech  $C$ ,  $C \neq 0$  będzie pewną stałą wartością (okresem funkcji). Wtedy dla funkcji okresowej prawdziwa jest równość:

$$f(x + C) = f(x)$$

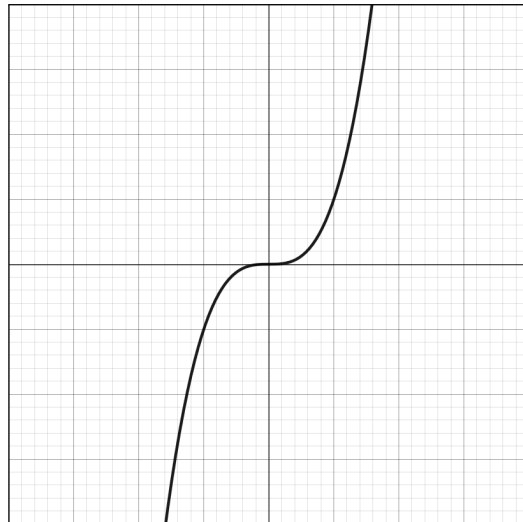
- Wypukła  
Wykres funkcji  $f$  w przedziale  $(a, b)$  leży ponad prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie  $x_0 \in (a, b)$
- Wklęsła  
Wykres funkcji  $f$  w przedziale  $(a, b)$  leży pod prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie  $x_0 \in (a, b)$

## Wykresy funkcji

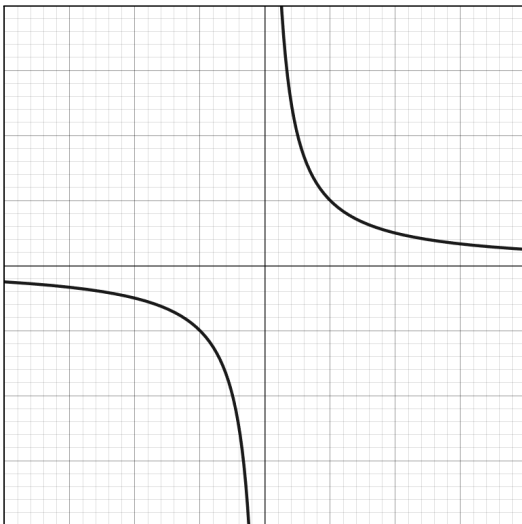




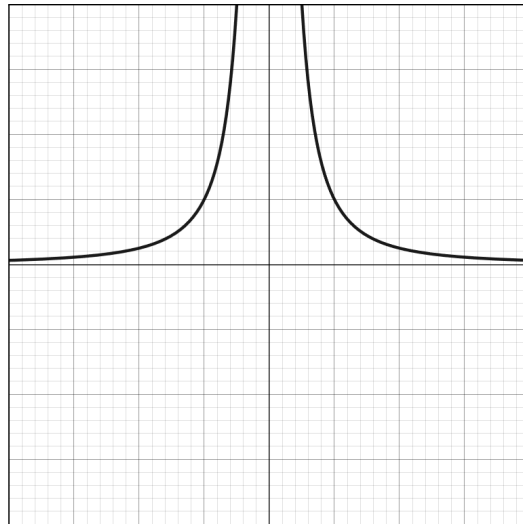
$f(x) = x^2$  - **parabola**



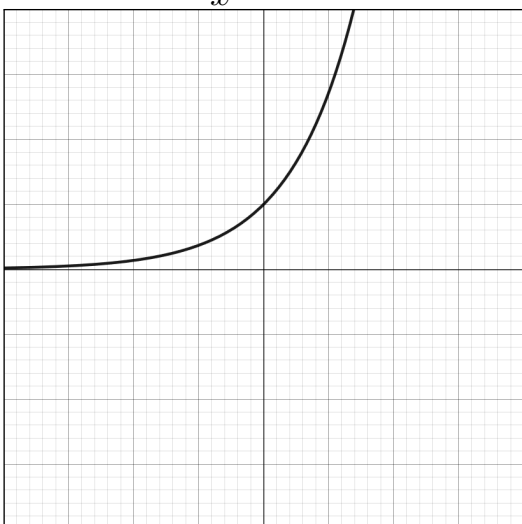
$f(x) = x^3$



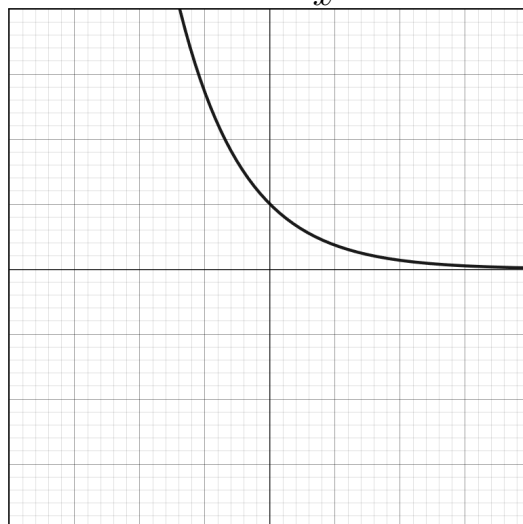
$f(x) = \frac{1}{x}$  - **hiperbola**



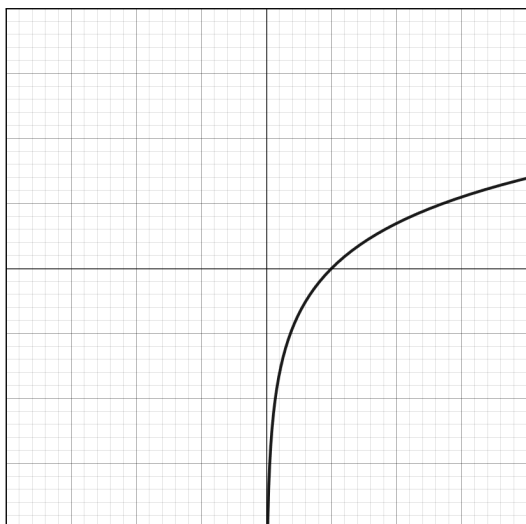
$f(x) = \frac{1}{x^2}$



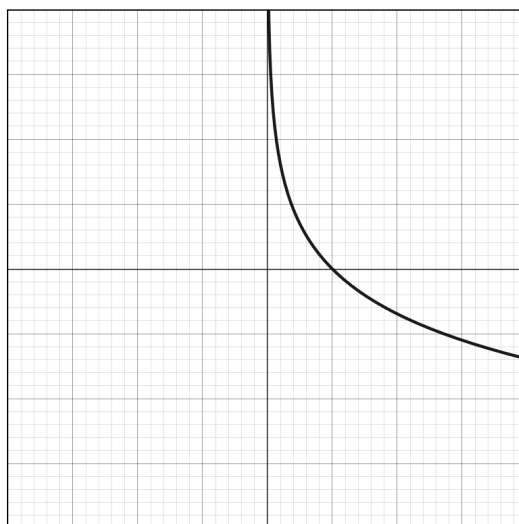
$f(x) = a^x, a > 1$



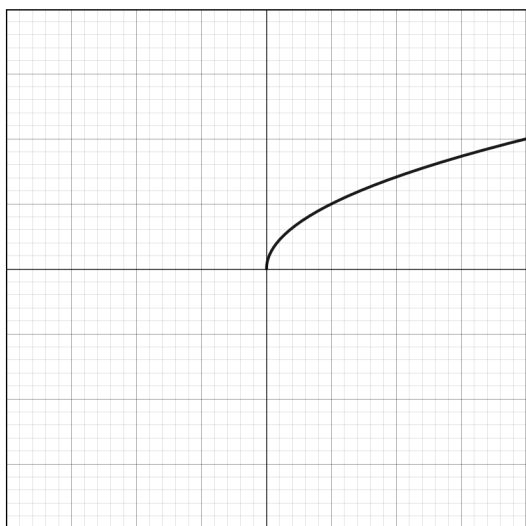
$f(x) = a^x, 0 < a < 1$



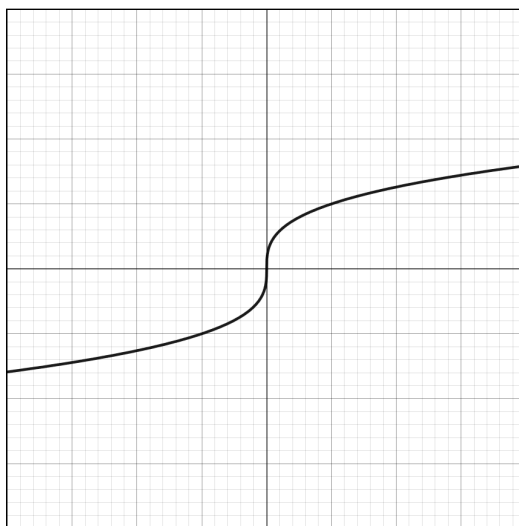
$$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$$



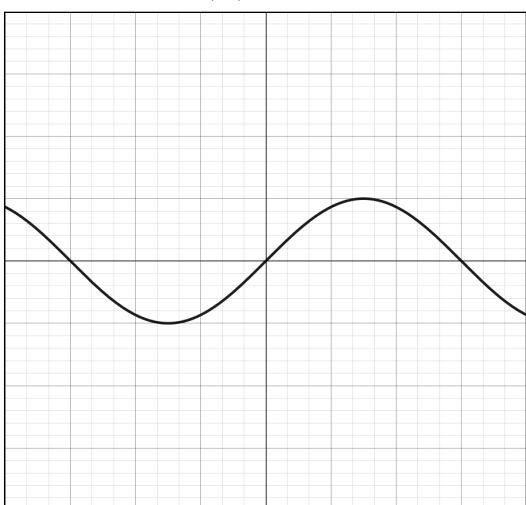
$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$



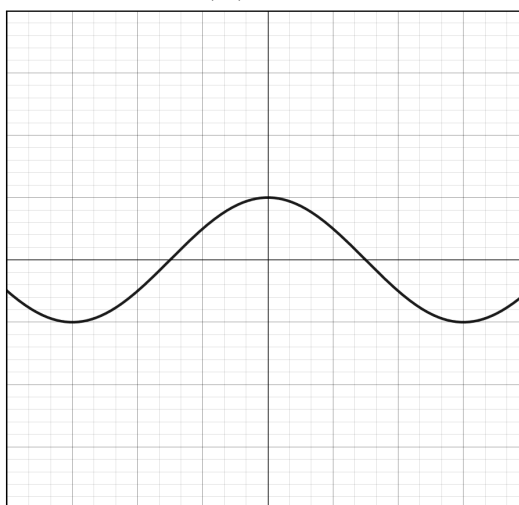
$$f(x) = \sqrt{x}$$



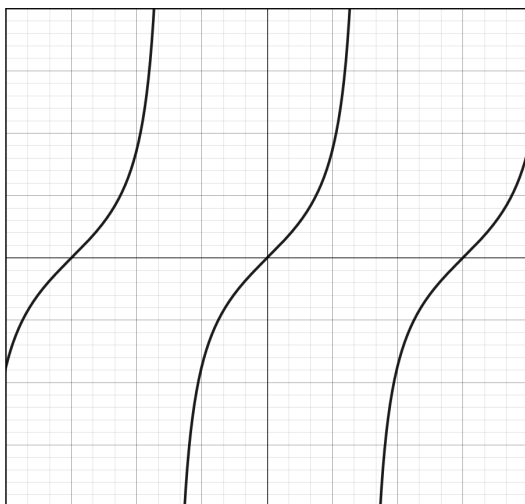
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



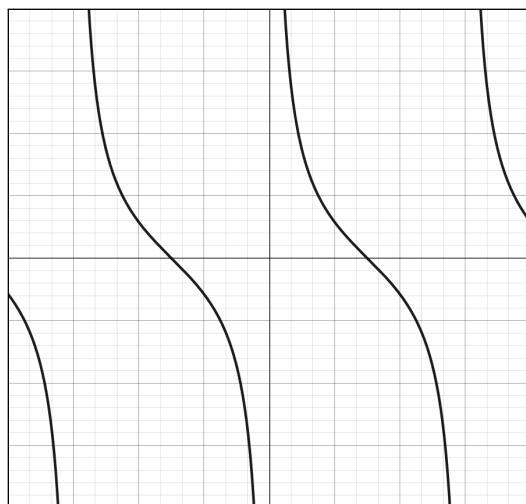
$$f(x) = \sin x - \text{sinusoida}$$



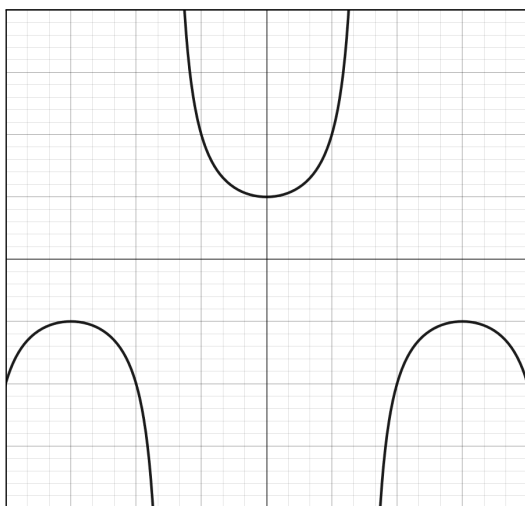
$$f(x) = \cos x - \text{cosinusoida}$$



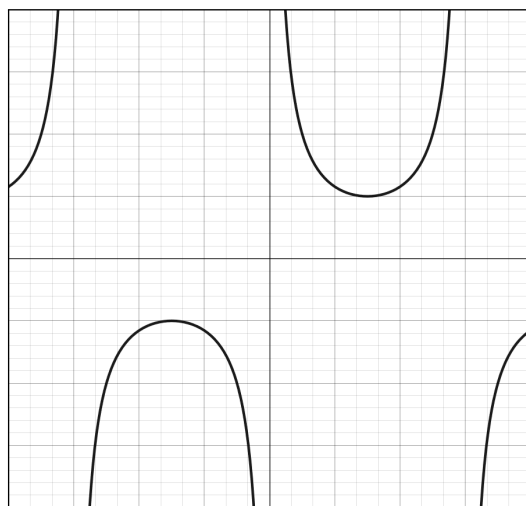
$f(x) = \operatorname{tg} x$  - **tangensoida**



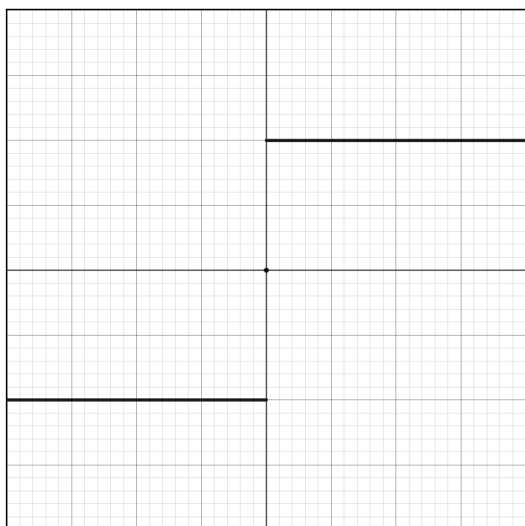
$f(x) = \operatorname{ctg} x$  - **cotangensoida**



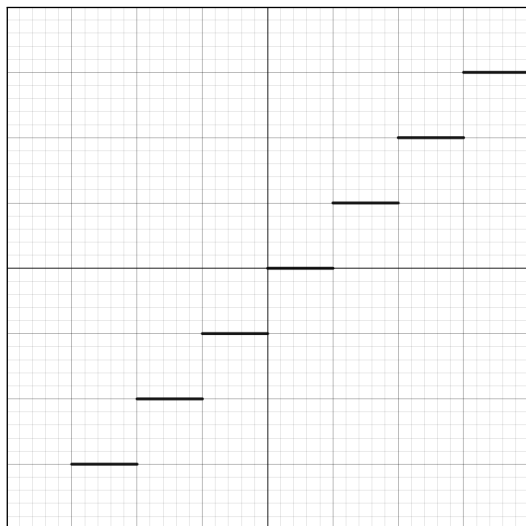
$f(x) = \sec x$



$f(x) = \operatorname{cosec} x$



$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

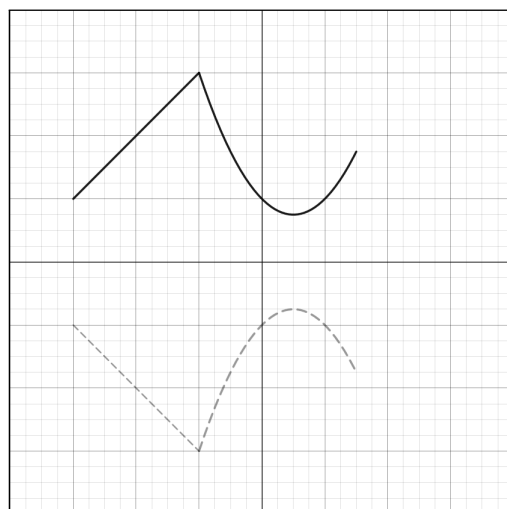


$f(x) = [x]$

## Przekształcenia funkcji

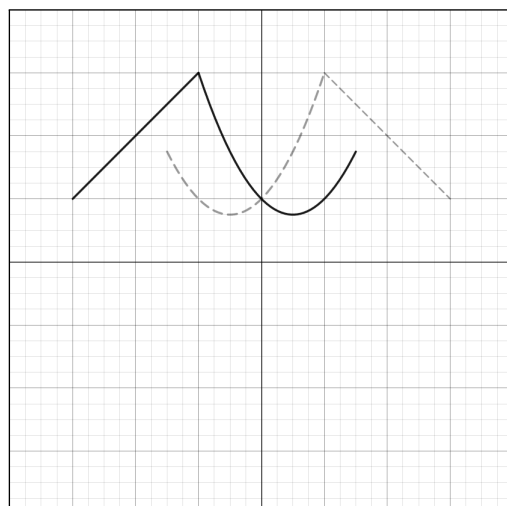
Symetria osiowa względem osi OX:

$$y = -f(x)$$



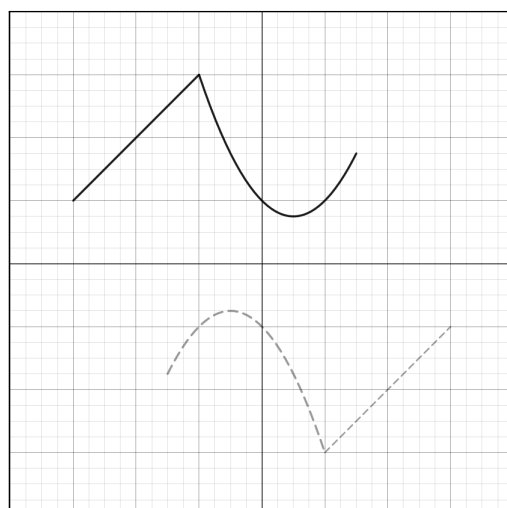
Symetria osiowa względem osi OY:

$$y = f(-x)$$

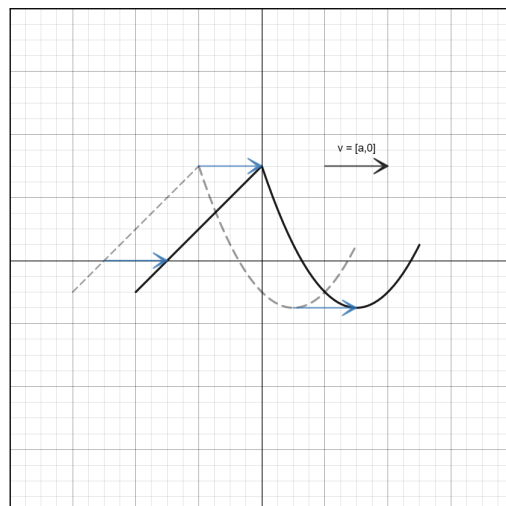


Symetria osiowa względem  
środka układu współrzędnych:

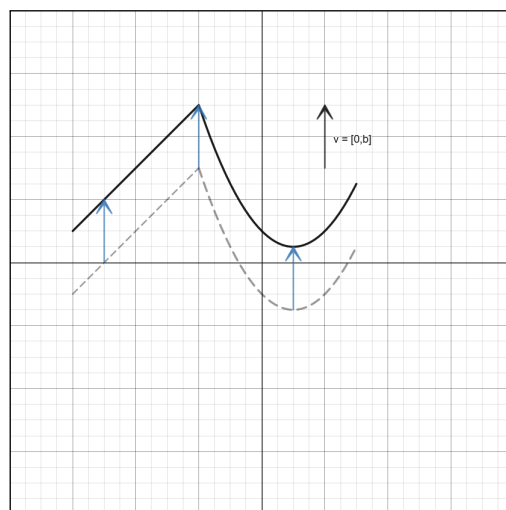
$$y = -f(-x)$$



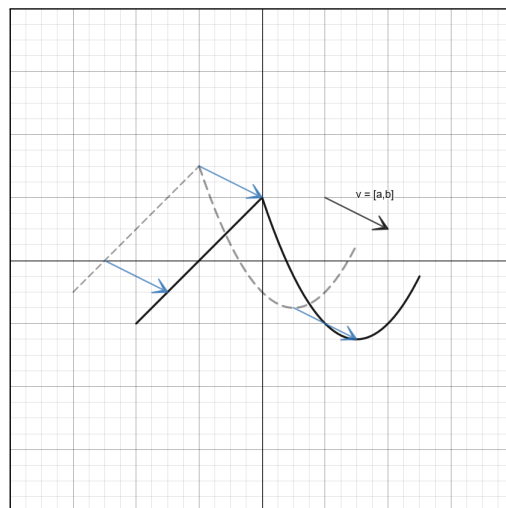
Przesunięcie równoległe poziome:  
 $y = f(x - a), \vec{v} = [a, 0]$

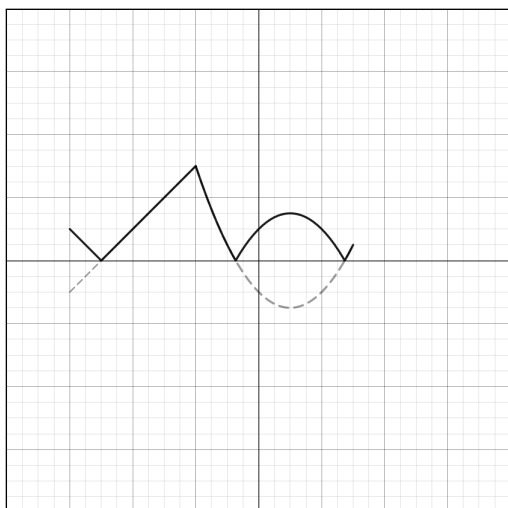


Przesunięcie równoległe pionowe:  
 $y = f(x) + b, \vec{v} = [0, b]$

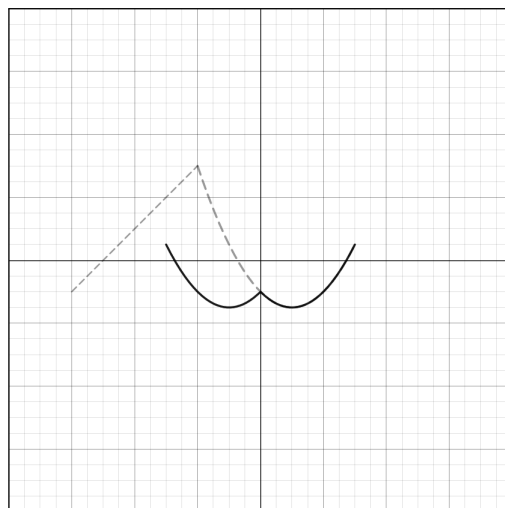


Przesunięcie równoległe ukośne:  
 $y = f(x - a) + b, \vec{v} = [a, b]$

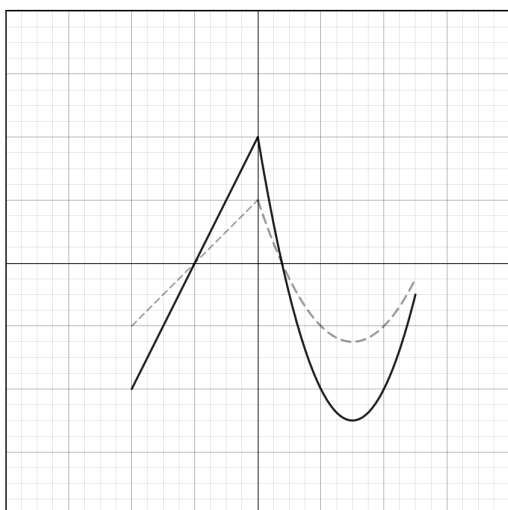




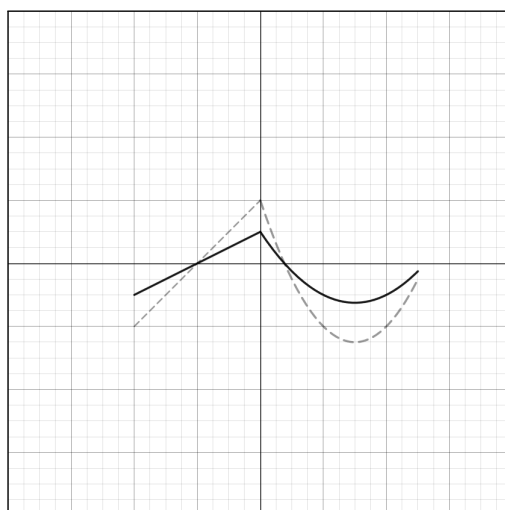
$$y = |f(x)|$$



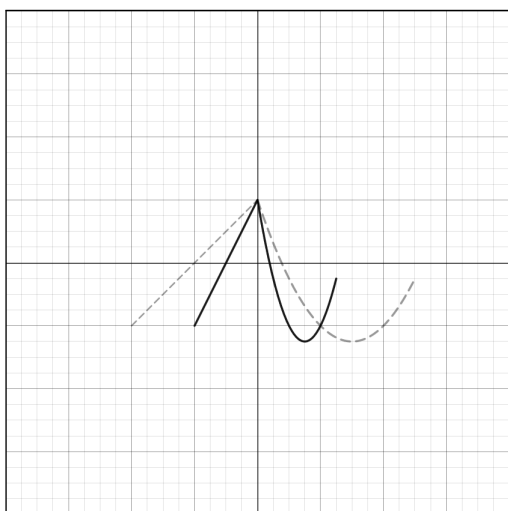
$$y = f(|x|)$$



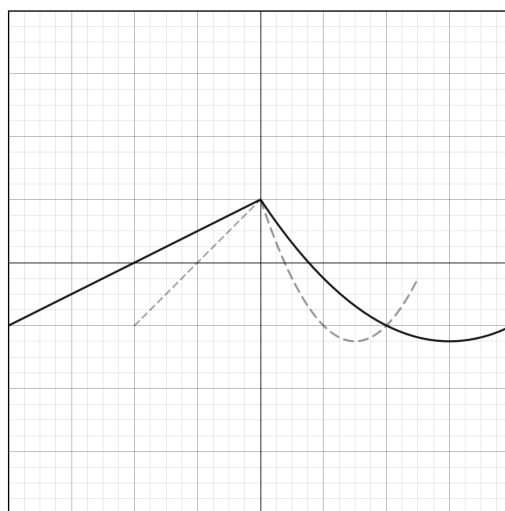
Powinowactwo prostokątne o  
osi OX:  $y = af(x)$ ,  $a > 1$



Powinowactwo prostokątne o  
osi OX:  $y = af(x)$ ,  $0 < a < 1$



Powinowactwo prostokątne o  
osi OY:  $y = f(ax)$ ,  $a > 1$



Powinowactwo prostokątne o  
osi OY:  $y = f(ax)$ ,  $0 < a < 1$



## 5 Ciągi

### Informacje i twierdzenia

**Ciąg** - Przyporządkowanie zbiorowi liczb  $A = \langle 1, n \rangle$ ,  $A \subset \mathbb{N}_+$  zwanemu zbiorowi indeksów kolejnych elementów, zwanymi **wyrazami ciągu**.

**Ciąg skończony** to ciąg, w którym występuje skończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest podzbiorem właściwym liczb naturalnych dodatnich.

**Ciąg nieskończony** to ciąg, w którym występuje nieskończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest zbiorem liczb naturalnych dodatnich.

### Monotoniczność ciągu

- Stały - wyrazy ciągu są sobie równe dla dowolnej pary indeksów:  
 $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad a_n = a_{n+1}$
- Rosnący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu o mniejszym indeksie:  
 $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad a_n < a_{n+1}$
- Niemalejący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie:  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad a_n \leq a_{n+1}$
- Nierosnący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie:  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad a_n \geq a_{n+1}$
- Malejący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu o mniejszym indeksie:  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad a_n > a_{n+1}$

Monotoniczność ciągu można określić, badając znak różnicy kolejnych wyrazów ciągu:  $a_{n+1} - a_n$ .

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad - \quad \text{rosnący}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad - \quad \text{niemalejący}$$

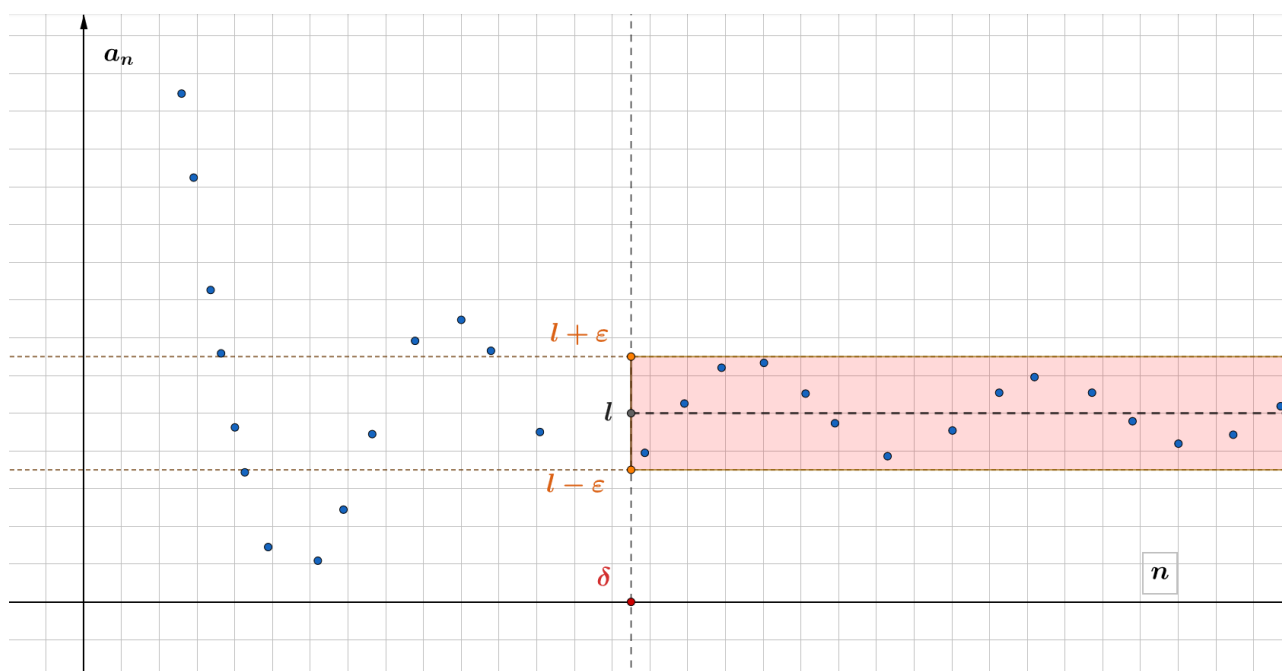
$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad - \quad \text{nierosnący}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad - \quad \text{malejący}$$

# Granica ciągu liczbowego

Liczba  $l$  jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego  $(a_n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje taka liczba  $\delta$ , że dla każdej liczby naturalnej  $n > \delta$  zachodzi nierówność  $|a_n - l| < \varepsilon$ , tj. odległość od granicy  $l$  do wartości  $a_n$  jest mniejsza od  $\varepsilon$ . Definicja ta jest znana jako definicja epsilon - delta granicy ciągu.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} |a_n - l| < \varepsilon$$



**Ciąg zbieżny** to ciąg nieskończony, którego granicą jest liczba rzeczywista. Taki ciąg ma tylko jedną granicę.

Ciąg jest rozbieżny, gdy granicą jest dodatnia bądź ujemna nieskończoność.

## Twierdzenia o działaniach na granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to zachodzą następujące równości:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

## Twierdzenie o trzech ciągach

Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych:  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ . Jeżeli dla wszystkich wyrazów ciągu o indeksach większych od pewnego  $N$  zachodzi nierówność:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz prawdziwa jest równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$$

to wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

## Ciąg arytmetyczny

Niech ciąg  $(a_n)$  będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem arytmetycznym nazywamy takie  $(a_n)$ , gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez dodanie stałej  $r$ , nazywanej **różnicą ciągu arytmetycznego**.

### Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n + r$$

### Postać jawna

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

### Wzór na różnicę ciągu

$$r = a_n - a_{n+1}$$

### Wzór na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

### Warunek wystarczający ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

## Ciąg geometryczny

Niech ciąg  $(a_n)$  będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem geometrycznym nazywamy takie  $(a_n)$ , gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez pomnożenie przez stałą  $q$ , nazywaną **ilorazem ciągu arytmetycznego**.

Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Postać jawna

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na iloraz ciągu

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1 \quad a_1 \cdot n, \quad q = 1$$

Warunek wystarczający ciągu geometrycznego

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Dla  $|q| < 1$  ciąg geometryczny staje się zbieżny i można go rozważać jako **szerzeg geometryczny**. Sumę wszystkich wyrazów szeregu geometrycznego można wyliczyć ze wzoru:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

## 6 Elementy analizy matematycznej

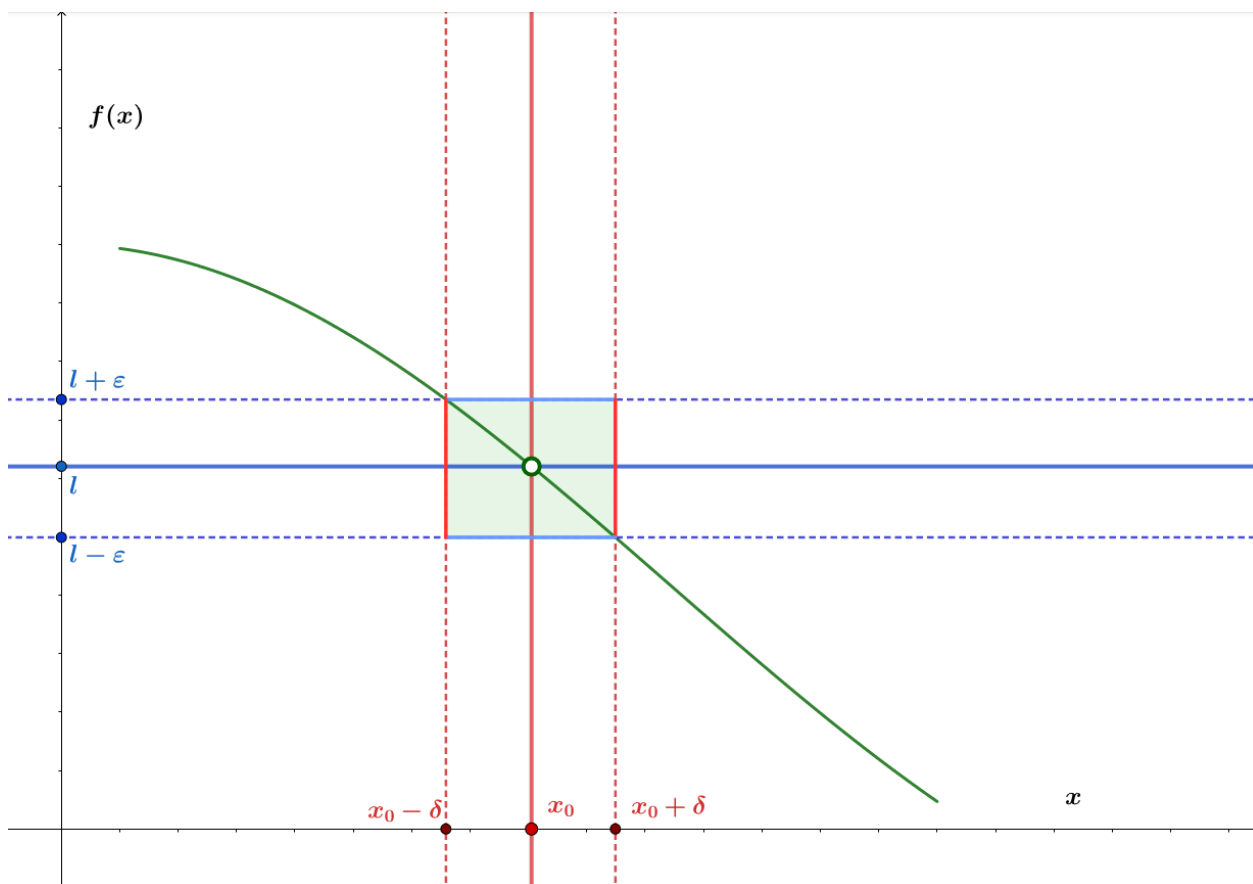
### Granica funkcji

**Granica** - wartość, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie dla argumentów z dziedziny funkcji arbitralnie bliskich punktowi. Operację tą notuje się symbolem  $\lim_{x \rightarrow n}$  nazywanym *limesem*, czytany "Limes przy  $x$  dążącym do  $n$ ".

**Definicja Cauchy'ego granicy funkcji** - Liczba  $l$  jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje taka liczba  $\delta > 0$ , że dla każdego elementu dziedziny funkcji  $f(x)$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , takiego że  $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  prawdziwa jest zależność:  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\}$$



**Definicja Heinego** - Funkcja  $f$  ma granicę  $l$  w punkcie  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n), n \in \mathbb{N}$  zbieżnego do  $x_0$ , zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny  $X$  który to podzbiór ma w punkcie skupienia  $x_0$  (podzbiór ten nazywa się sąsiedztwem  $S(x_0)$ ), wartość funkcji od ciągu  $(x_n)$ , czyli  $f(x_n)$  jest zbieżna do  $l$ .

## Granica jednostronna

Granica jednostronna to wspólna nazwa na granicę *lewostronną* i *prawostronną*.

**Granica lewostronna** - wartość w punkcie  $x_0$ , do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny mniejsze od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

### Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x - \delta < x < x_0\}$$

### Definicja Heinego

Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo  $S(x_0)$ , gdzie  $\forall x \in S(x_0) \ x < x_0$ .

**Granica prawostronna** - wartość w punkcie  $x_0$ , do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny większe od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

### Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x_0 < x < x + \delta\}$$

### Definicja Heinego

Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo  $S(x_0)$ , gdzie  $\forall x \in S(x_0) \ x > x_0$ .

Jeżeli granica lewostronna oraz prawostronna w punkcie  $x_0$  są sobie równe, jest to warunek wystarczający dla istnienia granicy w tym punkcie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Jeżeli granica lewostronna i prawostronna w punkcie są różne, wtedy granica w tym punkcie nie istnieje.

## Granica niewłaściwa

Granica niewłaściwa to granica, której wartość w punkcie  $x_0$  jest równa minus  $(-\infty)$  lub plus  $(+\infty)$  nieskończoności. Granica w punkcie jest niewłaściwa, gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

### Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} f(x) > M, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} f(x) < -M, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

### Definicja Heinego

Funkcja  $f$  ma granicę  $\pm\infty$  w punkcie  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n), n \in \mathbb{N}$  zbieżnego do  $x_0$ , zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny  $X$  który to podzbiór ma w punkcie skupienia  $x_0$ , wartość funkcji od ciągu  $(x_n)$ , czyli  $f(x_n)$  jest zbieżna do  $\pm\infty$ .

## Granica w nieskończoności

Granica w nieskończoności przyjmuje wartość  $l$  gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

### Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\mu \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x>\mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\mu \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x < \mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

## Definicja Heinego

Funkcja  $f$  ma granicę  $l$  w  $\pm\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $(x_n), n \in \mathbb{N}$  zbieżnego do  $\pm\infty$ , zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny  $X$ , odpowiednio  $(a, +\infty)$  i  $(-\infty, a)$ , wartość funkcji od ciągu  $(x_n)$ , czyli  $f(x_n)$  dąży do  $l$ .

Granica niewłaściwa w nieskończoności występuje tylko wtedy, gdy granica spełnia warunki granicy niewłaściwej i granicy w nieskończoności.

## Własności granic

Niech funkcje  $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$  mają granice właściwe. Wtedy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \end{aligned}$$

## Symbole nieoznaczone

Wyrażenia algebraiczne które nie mają sensu liczbowego, często występujące przy poszukiwaniu limitów. Jest ich siedem:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 0 \cdot \pm\infty \quad \infty - \infty \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

Takie wyniki nie są końcowymi rozwiązaniami i funkcję należy przekształcić, by otrzymać właściwy wynik.



**Reguła de L'Hôpitala** (czyt. delopitala) - Reguła umożliwiająca wyznaczenie granic wyrażeń, których wynikiem jest symbol nieoznaczony.

Jeżeli funkcje  $f, g : X \rightarrow Y$  są ciągłe oraz:

- **Granice funkcji są nieoznaczone:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  lub  $\pm \infty$ ,
- Funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  są różniczkowalne,
- Pochodna  $g'(x)$  jest różna od 0,
- Istnieje granica ilorazu funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$ ,

Wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Przykład:*

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 9x - 5} = \frac{25 - 25}{2 \cdot 25 - 9 \cdot 5 - 5} = \frac{0}{0}$$

*Stosując regułę de L'Hôpitala:*

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 9x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 25)'}{(2x^2 - 9x - 5)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{4x - 9} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 5 - 9} = \frac{10}{11}$$

Reguła de L'Hôpitala działa również dla granic nieoznaczonych w nieskończoności.

## Definicja ciągłości funkcji

Niech funkcja  $f$  będzie zdefiniowana w pewnym otoczeniu. Jeżeli istnieje granica właściwa w punkcie  $f(x)$  oraz prawdziwa jest równość:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , to funkcja w tym punkcie jest ciągła. Funkcja jest ciągła w przedziale, jeżeli każdy punkt w przedziale spełnia powyższe warunki. By całą funkcję można było nazywać ciągłą, warunki te muszą zachodzić na całej dziedzinie funkcji

Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe.

## Limity a asymptoty wykresu

- **Asymptota pionowa jednostronna**  
Niech funkcja  $f$  będzie określona w prawostronnym (lewostronnym) sąsiedztwie punktu  $x_0$ . Prosta o równaniu  $x = x_0$  jest asymptotą pionową

prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \right).$$

- Asymptota pionowa obustronna

Jeżeli prosta o równaniu  $x = x_0$  jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu funkcji  $f$ , to wtedy nazywa się ją asymptotą pionową obustronną.

- Asymptota pozioma jednostronna

Niech funkcja  $f$  będzie określona w przedziale  $(m, +\infty)$  (odpowiednio  $(-\infty, m)$ ),  $m \in \mathbb{R}$ . Prosta o równaniu  $y = a$  jest asymptotą poziomą prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \right).$$

- Asymptota pozioma obustronna

Jeżeli prosta o równaniu  $y = a$  jest jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną wykresu funkcji  $f$ , to wtedy nazywa się ją asymptotą poziomą obustronną.

- Asymptota ukośna jednostronna

Niech funkcja  $f$  będzie określona w przedziale  $(m, +\infty)$  (odpowiednio  $(-\infty, m)$ ),  $m \in \mathbb{R}$ . Prosta o równaniu  $y = ax + b$  jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0; \quad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$$

Jeżeli  $a = 0$ , prosta  $y = b$  jest asymptotą poziomą wykresu funkcji  $f$ .

- Asymptota ukośna obustronna

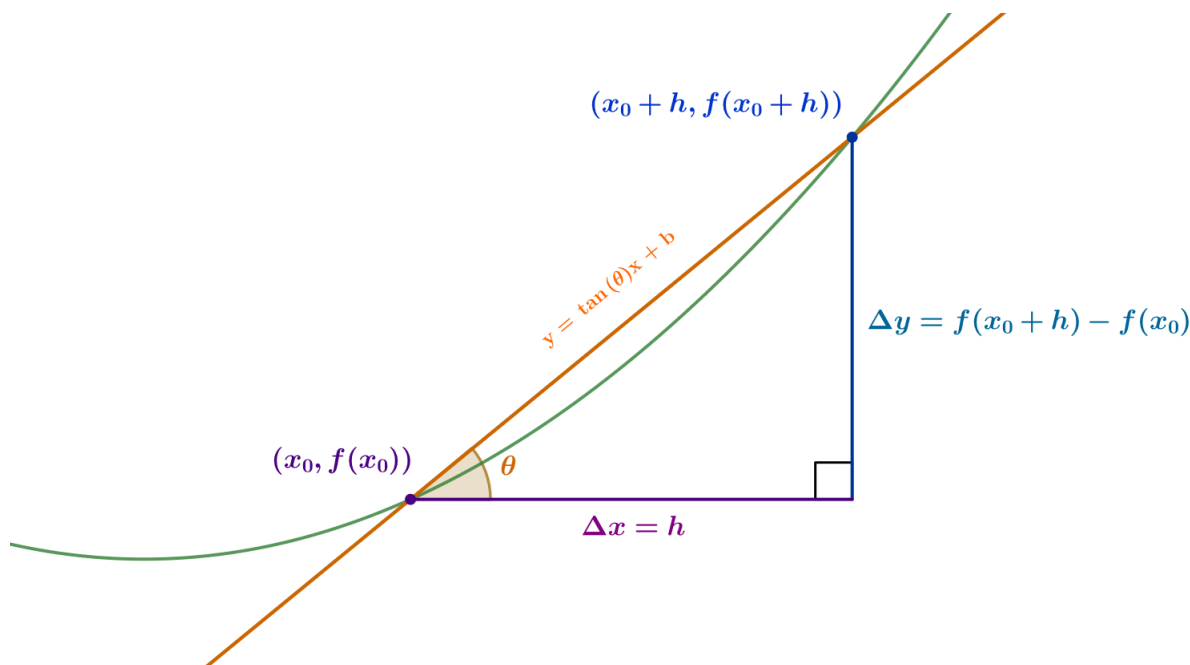
Jeżeli prosta o równaniu  $y = ax + b$  jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną wykresu funkcji  $f$ , to wtedy nazywa się ją asymptotą ukośną obustronną.

## Pochodna funkcji w punkcie

**Pochodna** - miara czułości zmiany wartości funkcji względem zmiany wartości argumentu. Dla funkcji z jednym argumentem wartość pochodnej funkcji w punkcie wyznacza nachylenie prostej stycznej do wykresu w badanym punkcie. Proces znajdowania pochodnej nazywa się **różniczkowaniem**.

Niech  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$ , punkt  $x_0$  należy do dziedziny  $X$  i  $h$  oznacza zmianę wartości zmiennej  $x$ . Pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Pochodną funkcji oznacza się:  $f'(x)$  (notacja Lagrange'a) lub  $\frac{d}{dx}f$  (notacja Liebnitza).

Jeżeli we wzorze na pochodną zamiast granicy obustronnej badana będzie kolejno granica prawostronna i lewostronna, to otrzymaną pochodną nazywa się odpowiednio pochodną prawostronną i pochodną lewostronną funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ . Pochodne te notuje się symbolicznie odpowiednio:  $f'_+(x)$ ,  $f'_-(x)$ .

## Styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja  $f$  będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu  $x_0$  i różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy prostą styczną do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  jest prosta o równaniu:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi OX:

$$f'(x) = \operatorname{tg}(\alpha)$$

Normalna to prosta prostopadła do stycznej wykresu funkcji w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ . Opisuje ją równanie:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

## Funkcja pochodna

Niech  $f$  będzie dowolną funkcją taką, że  $f : X \rightarrow Y$ . Funkcją pochodną funkcji  $f$  nazywa się funkcję, która każdej liczbie  $x_0$  należącej do dziedziny  $X$  przyporządkowuje  $f'(x_0)$ , jeśli pochodna w tym punkcie istnieje. Zbiór liczb z dziedziny funkcji  $f$ , dla których ta funkcja była różniczkowalna jest dziedziną funkcji pochodnej.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a$	$0$	$e^x$	$(x)'e^x$
$x$	$1$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$ax^n$	$an \cdot x^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$a^x$	$(x)' \cdot a^x \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$

## Własności pochodnych

Niech funkcje  $f$  i  $g$  będą różniczkowalne w pewnym zbiorze  $D$ , będącym podzbiorem dziedzin funkcji  $f$  i  $g$ , a  $\alpha$  i  $\beta$  - dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy dla dowolnej liczby  $x \in D$ :

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$[\alpha f(x) - \beta g(x)]' = \alpha f'(x) - \beta g'(x)$$

$$[\alpha \cdot f(x) \cdot g(x)]' = \alpha(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$$

$$[\alpha \cdot f(x)]' = \alpha \cdot f'(x)$$

$$\left[\frac{\alpha}{f(x)}\right]' = -\frac{\alpha \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\left[\frac{\alpha \cdot f(x)}{\beta \cdot g(x)}\right]' = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \right)$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)} \right)$$

**Reguła łańcuchowa** - reguła pozwalająca obliczać pochodne funkcji złożonych. Niech funkcje  $f$  i  $g$  będą funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$  oraz funkcja  $g$  ma pochodną w punkcie  $f(x_0)$ , to wtedy funkcja złożona ma w punkcie  $x_0$  pochodną:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

*Przykład:*

Wyznacz funkcję pochodną funkcji:  $\sqrt{x^2 - 3}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 3$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

*Korzystając z reguły łańcuchowej:*

$$(\sqrt{x^2 - 3})' = \left( \sqrt{g(x)} \right)' \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot (x^2 - 3)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

## Pochodna a monotoniczność funkcji

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w przedziale  $(a, b)$  oraz dla każdej liczby rzeczywistej z tego przedziału:

- $f'(x) > 0$ , to funkcja jest rosnąca w przedziale  $(a, b)$ ;
- $f'(x) \geq 0$ , to funkcja jest niemalejąca w przedziale  $(a, b)$ ;
- $f'(x) = 0$ , to funkcja jest stała w przedziale  $(a, b)$ ;
- $f'(x) \leq 0$ , to funkcja jest nierosnąca w przedziale  $(a, b)$ ;
- $f'(x) < 0$ , to funkcja jest malejąca w przedziale  $(a, b)$ .

Prawdziwe są twierdzenia odwrotne do powyższych.

## Ekstrema funkcji

**Ekstremum funkcji** - maksymalna (maksimum) lub minimalna (minimum) wartość funkcji.

Wśród ekstrem rozróżnia się odpowiednie kategorie:

- Maksimum (minimum) lokalne  
Punkt  $x_0$  jest ekstremum lokalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $x$  należącego jednocześnie do dziedziny funkcji  $f$  oraz otoczenia punktu  $x_0$ ,  $U(x_0)$  prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Znaczy to, że w pewnej okolicy punktu  $x_0$  nie występują wartości funkcji większe (mniejsze) od wartości w punkcie  $x_0$ , choć mogą być tej wartości równe.

- Maksimum (minimum) lokalne właściwe  
Punkt  $x_0$  jest ekstremum lokalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $x$  należącego jednocześnie do dziedziny funkcji  $f$  oraz otoczenia punktu  $x_0$ ,  $U(x_0)$  prawdziwa jest zależność:

$$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \quad (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

Żadna wartość funkcji w otoczeniu punktu nie może być większa (mniejsza) ani równa wartości funkcji w punkcie  $x_0$ .

- Maksimum (minimum) globalne

Punkt  $x_0$  jest ekstremum globalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $x$  w całej dziedzinie funkcji  $f$  prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego, warunek dotyczy całej dziedziny.

- Maksimum (minimum) globalne właściwe

Punkt  $x_0$  jest ekstremum globalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $x$  w całej dziedzinie funkcji  $f$  prawdziwa jest zależność:

$$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \quad (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego właściwego, warunek dotyczy całej dziedziny.

**Punkt stacjonarny** - punkt w dziedzinie funkcji rzeczywistej, dla której pochodna tej funkcji przyjmuje wartość równą zero.

**Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie Fermata)** - dla różniczkowalnej funkcji  $f$ , w pewnym przedziale  $x_0 \in (a, b)$ , pochodna  $f'(x_0) = 0$ .

Warunek Fermata nie gwarantuje istnienia ekstremów - funkcja może mieć pochodną równą zero i nie mieć ekstremum w tym punkcie, a może mieć ekstremum i nie mieć w nim pochodnej.

**Warunek konieczny i wystarczający ekstremum lokalnego** - dla różniczkowalnej, ciągłej funkcji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , mającej skończoną ilość punktów stacjonarnych w punkcie  $x_0$  istnieje

- minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $\delta > 0$  taka, że:

- $f'(x_0) = 0$ ,
- $f'(x_0) < 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,
- $f'(x_0) > 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ;

- maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $\delta > 0$  taka, że:

- $f'(x_0) = 0$ ,
- $f'(x_0) > 0$  dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,
- $f'(x_0) < 0$  dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ .

Alternatywnie, jeżeli funkcja  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie  $x_0 \in (a, b)$  i druga pochodna jest ciągła, to jeżeli  $f'(x_0) = 0$  i  $f''(x_0) \neq 0$ , to funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  ekstremum, przy czym jeżeli  $f''(x_0) < 0$  to jest to maksimum lokalne, a jeżeli  $f''(x_0) > 0$  to jest to minimum lokalne.

Warunek ten nie rozstrzyga istnienia ekstremum, jeżeli druga pochodna jest równa 0.

## Twierdzenie Rolle'a

Niech funkcja  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła w przedziale  $\langle a, b \rangle$  i różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$ . Wtedy pod warunkiem, że  $f(a) = f(b)$  istnieje taki punkt  $c \in (a, b)$ , że  $f'(c) = 0$

## Twierdzenie Lagrange'a

Niech funkcja  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła w przedziale  $\langle a, b \rangle$  i różniczkowalna w przedziale  $(a, b)$ . Wtedy w przedziale  $(a, b)$  istnieje taki punkt  $c$ , że:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

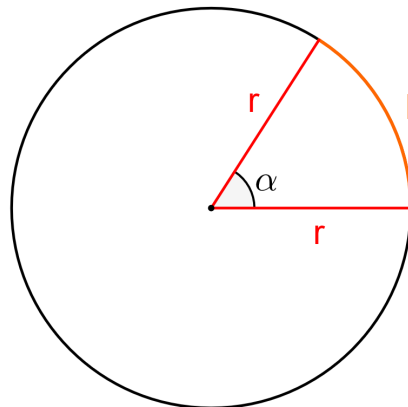


## 7 Funkcje trygonometryczne

### Miara łukowa kąta

Jednym ze sposobów podawania wartości kąta jest **radian** - niemianowana jednostka pochodna układu SI, zdefiniowana jako iloraz długości łuku nad długość promienia. Jeden radian to długość łuku równa długości promienia.

$$\text{rad} = \frac{l}{r}$$

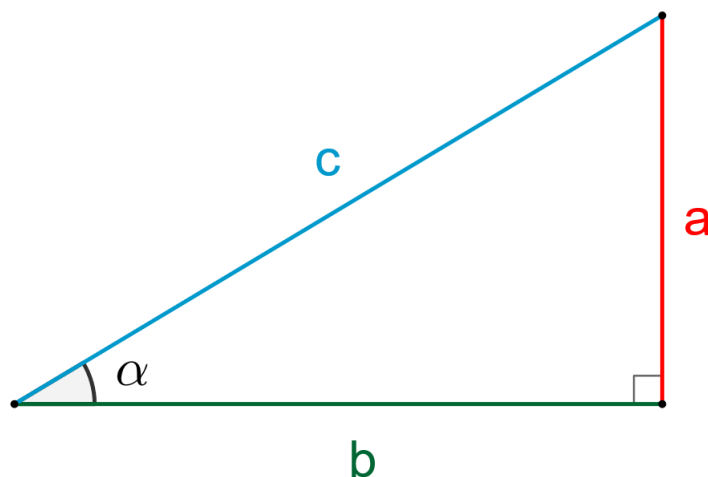


Zamiana miary:

- stopniowej na łukową:  $t^\circ = \frac{\pi \cdot t}{180}(\text{rad})$
- łukowej na stopniową:  $t(\text{rad}) = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^\circ$

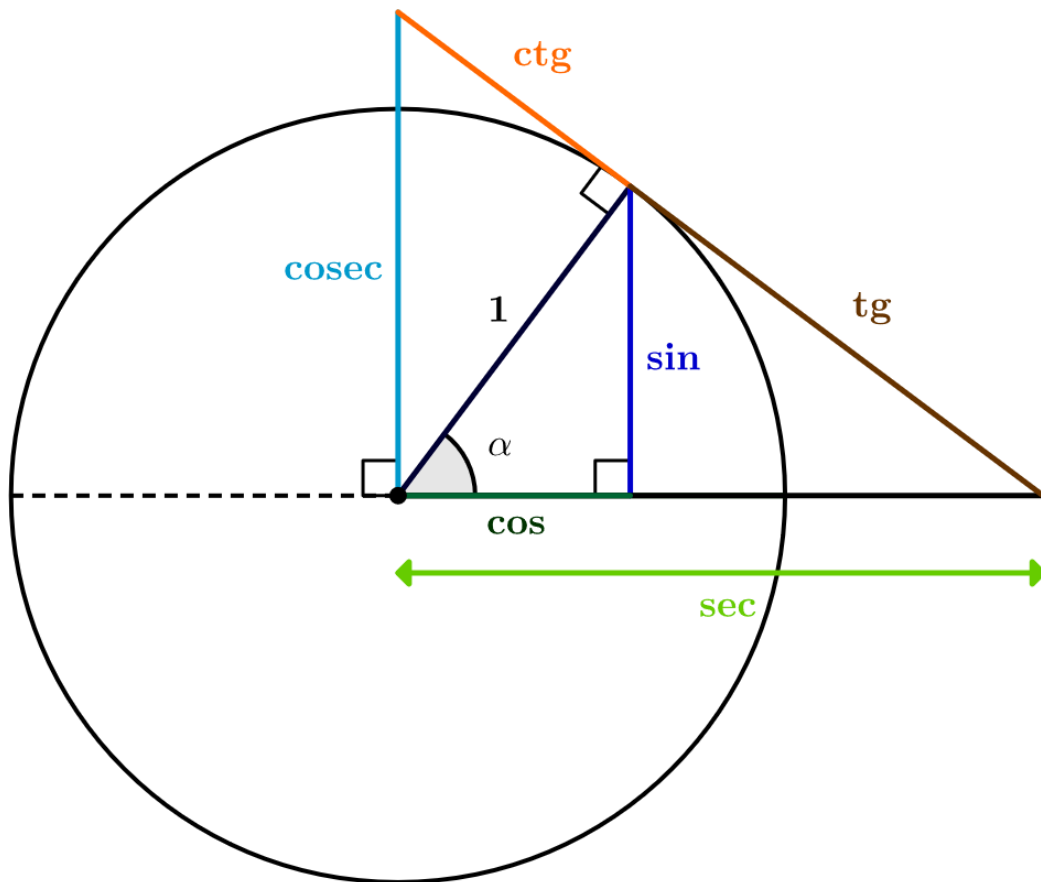
### Definicje funkcji trygonometrycznych

Definicja w trójkącie prostokątnym



$$\begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{a}{c} \\ \cos \alpha = \frac{b}{c} \end{array} \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \end{array} \right| \begin{array}{l} \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b} \\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \end{array}$$

## Definicja w okręgu jednostkowym (interpretacja geometryczna)



Na powyższej ilustracji długości odcinków odpowiadają wartościom poszczególnych funkcji trygonometrycznych względem kąta środkowego  $\alpha$ .

Dla wykresów funkcji trygonometrycznej, zobacz rozdział: 4. *Właściwości i wykresy funkcji - Wykresy funkcji*, str. 22-23.

## Podstawowe tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \qquad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

## Wartości funkcji trygonometrycznych

Radiany	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
Stopnie	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\times$
$\operatorname{ctg} x$	$\times$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \sqrt{3}$	0
$\sec x$	1	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\times$
$\operatorname{cosec} x$	$\times$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	1

## Wzory redukcyjne

	I ćwiartka	II ćwiartka	III ćwiartka	IV ćwiartka
$\varphi$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$
	$\frac{1}{2}\pi - \alpha$	$\frac{1}{2}\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$
$\sin \varphi$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\sec \varphi$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$
$\operatorname{cosec} \varphi$	$\sec \alpha$	$\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$

# Tożsamości trygonometryczne

## Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta}{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta - \sec \alpha \sec \beta}$$

$$\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta}{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta + \sec \alpha \sec \beta}$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha + \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta}{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta + \sec \alpha \sec \beta}$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha - \beta) = \frac{\sec \alpha \sec \beta \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta}{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta - \sec \alpha \sec \beta}$$

## Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$$

## Funkcje trygonometryczne podwojonego i połowy kąta

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sec(2\alpha) = \frac{\sec^2 \alpha}{2 - \sec^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cosec}(2\alpha) = \frac{\sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

## Iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$$

## Redukcja potęg funkcji trygonometrycznych

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos(4\alpha)}{8}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

## Okresowość funkcji trygonometrycznych

**Uwaga** - Funkcje  $\arcsin(x)$ ,  $\arccos(x)$ , etc. to **funkcje cyklometryczne**, tj. funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. W przeciwieństwie do zwykłej funkcji trygonometrycznej, to kąt jest obrazem funkcji, podczas gdy wartość jest przeciwobrazem. Zachodzi więc następująca zależność:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) = x &\Leftrightarrow \arcsin(x) = \alpha, \\ \cos(\alpha) = x &\Leftrightarrow \arccos(x) = \alpha, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Dla poniższych definicji zakłada się, że  $k \in \mathbb{C}$ .

**Sinus** -  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$  - okres podstawowy:  $2\pi$

$$\sin \alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin x + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \arcsin x + 2k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \alpha = k\pi, \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

**Cosinus** -  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$  - okres podstawowy:  $2\pi$

$$\cos \alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \arccos x + 2k\pi \\ \alpha = -\arccos x + 2k\pi \\ \alpha = 2k\pi, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \alpha = \pi + 2k\pi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}$$

**Tangens** -  $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \alpha : \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$  - okres podstawowy:  $\pi$

$$\operatorname{tg} \alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k\pi, & x = 0 \\ \alpha = \operatorname{arctg} x + k\pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

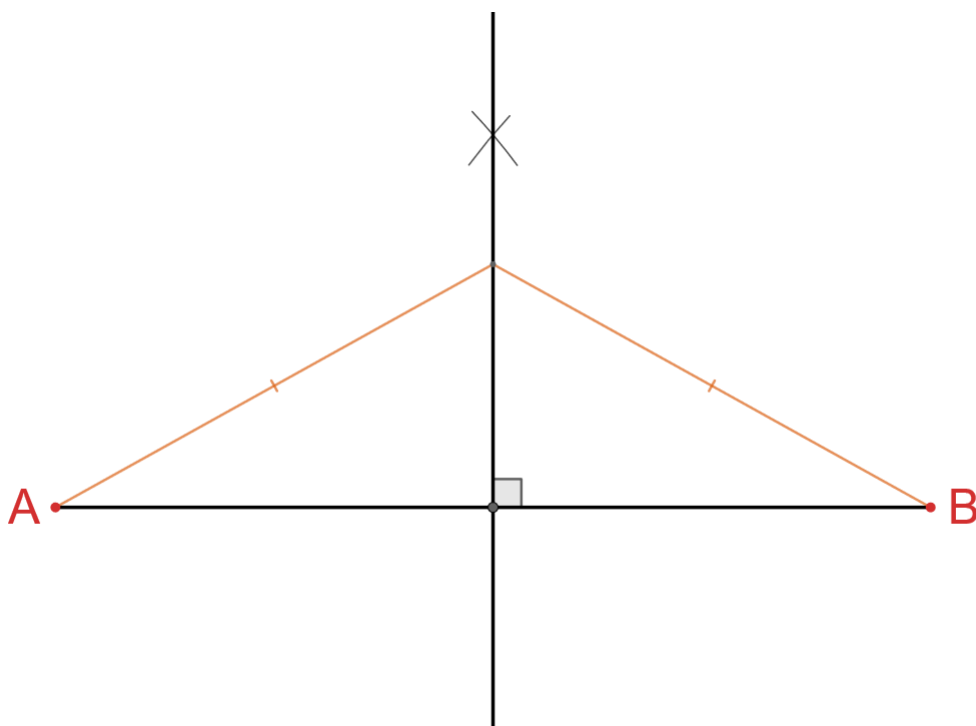
**Cotangens** -  $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{ \alpha : \alpha = k\pi \} \rightarrow \mathbb{R}$  - okres podstawowy:  $\pi$

$$\operatorname{tg} \alpha = x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, & x = 0 \\ \alpha = \operatorname{arcctg} x + k\pi, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

**Secans** -  $\sec : \mathbb{R} \setminus \left\{ \alpha : \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  - okres podstawowy:  $2\pi$

**Cosecans** -  $\operatorname{cosec} : \mathbb{R} \setminus \{ \alpha : \alpha = k\pi \} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  - okres podstawowy:  $2\pi$

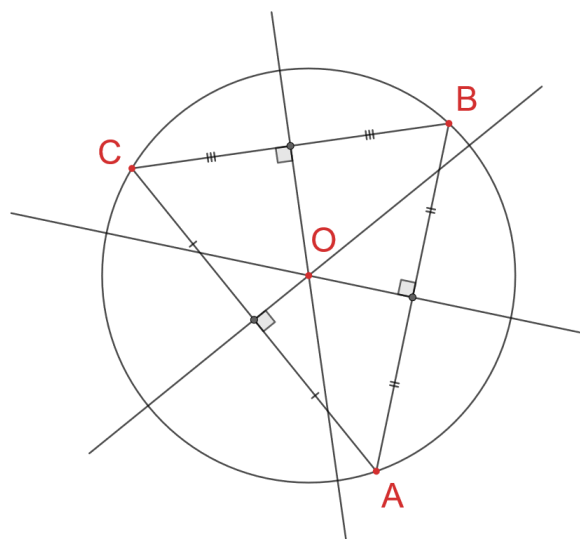
## 8 Planimetria



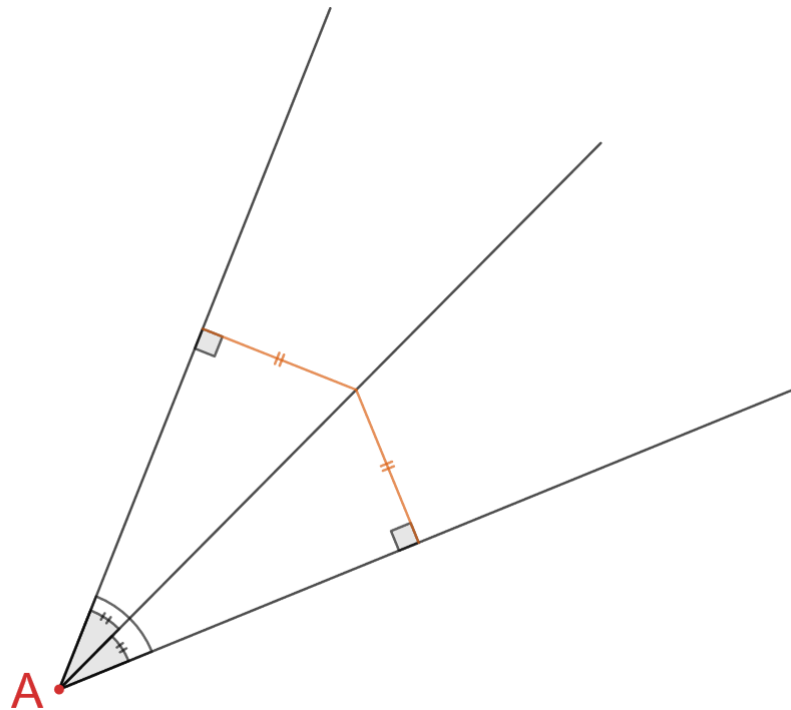
**Symetralna odcinka** - jest to prosta prostopadła do odcinka, która dzieli ten odcinek na dwie równe części. Symetralna jest też zbiorem wszystkich punktów równo odległych od punktów na końcach odcinka.

Aby skonstruować symetralną, należy zakreslić dwa półokręgi, o równych promieniach większych od połowy długości odcinka, a następnie połączyć prostą punkty przecięć tych półokręgów.

Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie (częściami wspólnymi okręgu i trójkąta są wierzchołki trójkąta).

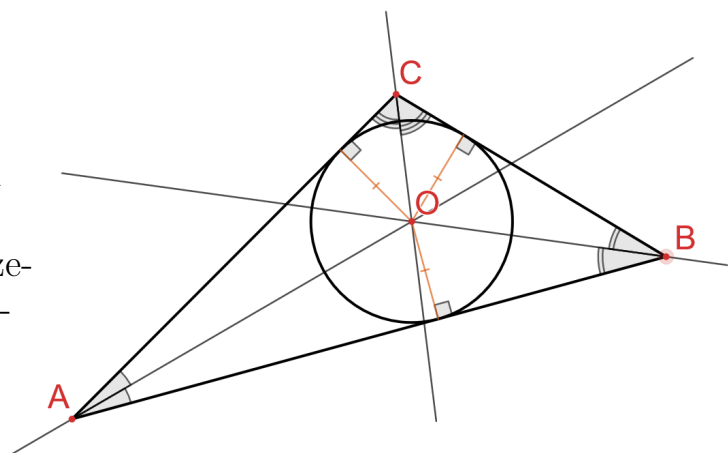




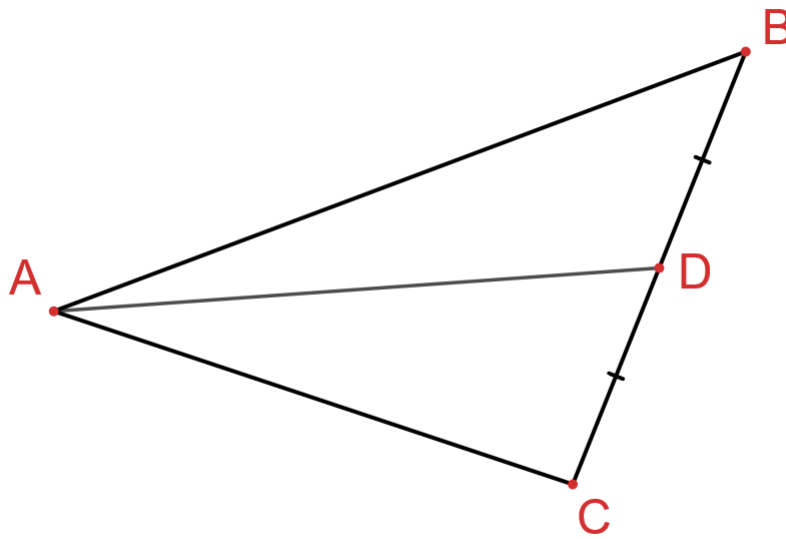


**Dwusieczna kąta** - półprosta o początku w wierzchołku kąta, która dzieli kąt zawarty między ramionami kąta na dwa równe kąty, każdy o mierze równej połowie oryginalnego kąta. Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równo odległych od ramion kąta wypukłego.

By skonstruować dwusieczną, należy zakreszyć półokrąg o środku w punkcie A. Następnie z miejsc przecięcia się ramion kąta i półokręgu zakreszyć kolejne półokręgi o promieniu większym niż połowa odległości do drugiego punktu przecięcia. Dwusieczna to prosta przechodząca przez punkt przecięcia dwóch półokręgów i punkt A.



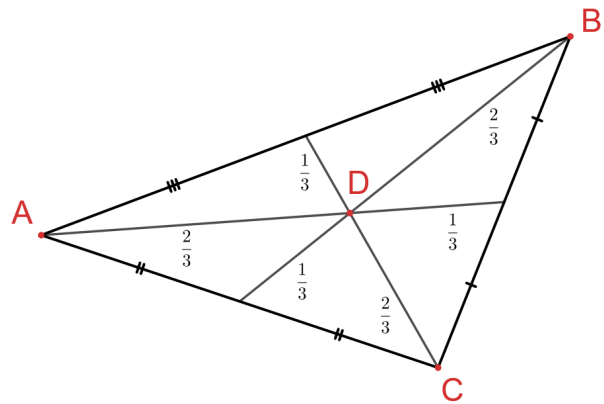
Dwusieczne trzech kątów dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt (częściami wspólnymi okręgu i trójkąta są trzy punkty, każdy należy do innego boku).



**Środkowa trójkąta** - odcinek łączący wierzchołek trójkąta z środkiem przeciwległego boku.

W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie (barycentrum, środek ciężkości trójkąta), który to dzieli każdą z środkowych na fragmenty o długości w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka trójkąta.

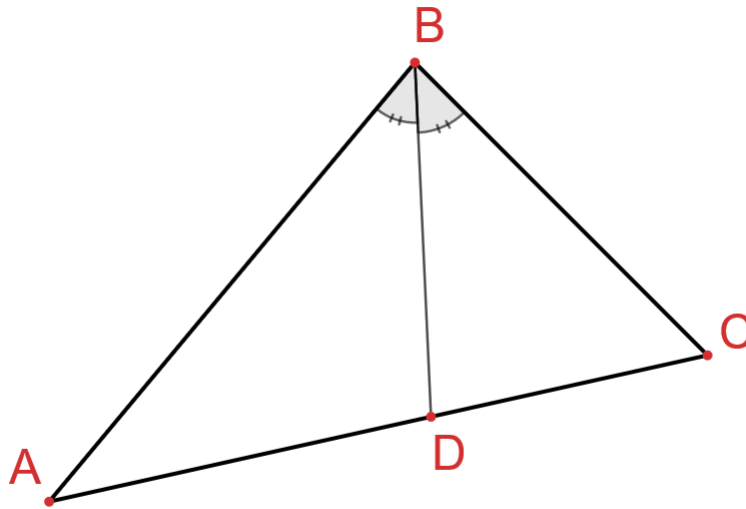
Każdy z sześciu trójkątów ograniczonych środkowymi trójkąta ma to samo pole.



**Twierdzenie o środkowej (twierdzenie Apolloniusza)** - suma kwadratów dwóch dowolnych boków jest równa podwojonej sumie kwadratów połowy trzeciego boku i środkowej opartej na trzecim boku.

Jeżeli boki trójkąta to  $a, b, c$ , a  $d$  to środkowa oparta na boku  $c$ , to wtedy:

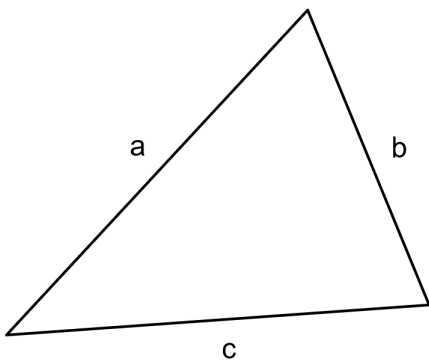
$$a^2 + b^2 = 2 \left( \left( \frac{1}{2}c \right)^2 + d^2 \right)$$



**Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego** - w dowolnym trójkącie  $ABC$ , w którym odcinek  $|BD|$  jest dwusieczną kąta wewnętrznego, prawdziwa jest równość:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

**Nierówność w trójkącie** - W dowolnym trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości trzeciego boku.



$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

## Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to wtedy suma kwadratów długości przyprostokątnych  $a$  i  $b$  jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej  $c$ :

$$\text{Trójkąt prostokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika również, że jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to wtedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest większa od kwadratu najdłuższego boku:

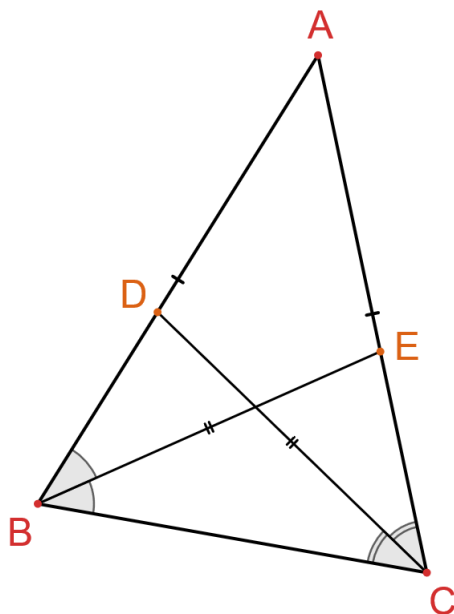
$$\text{Trójkąt ostrokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2$$

Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to wtedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest mniejsza od kwadratu najdłuższego boku:

$$\text{Trójkąt rozwartokątny} \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

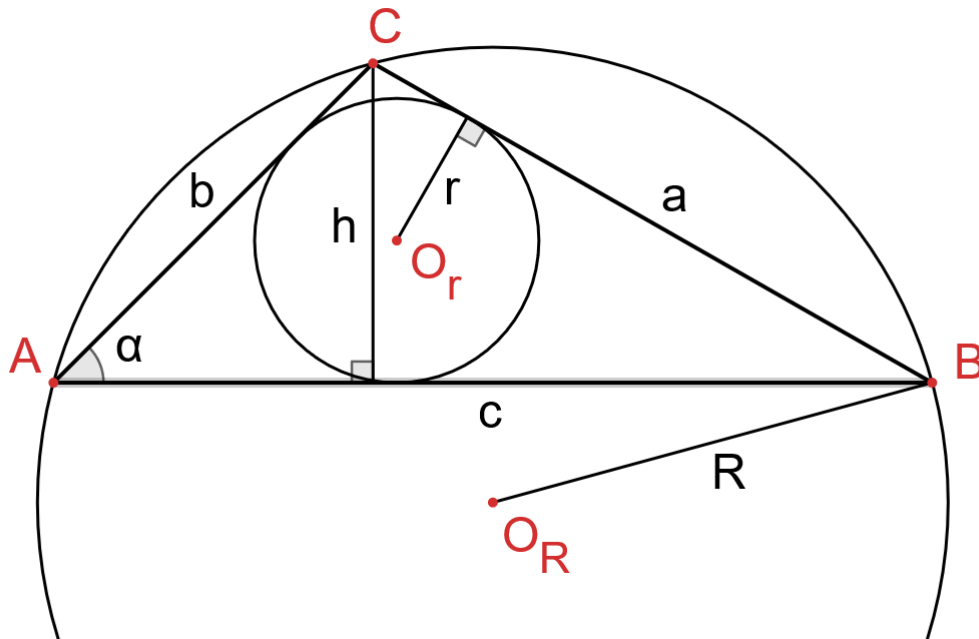
Twierdzenia odwrotne do powyższych również są prawdziwe.

## Twierdzenie Steinera-Lehmusa



Jeżeli w trójkącie istnieją dwa równe odcinki które są dwusiecznymi dwóch różnych jego kątów wewnętrznych, to wtedy rzeczony trójkąt jest równoramienny.

## Pole trójkąta - wzory



$$P = \frac{1}{2}ch$$

$$P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{b^2}{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma)}$$

$$P = p \cdot r, \quad p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha (b^2 + c^2 - a^2)$$

Promień okręgu wpisanego i opisanego dowolnego trójkąta

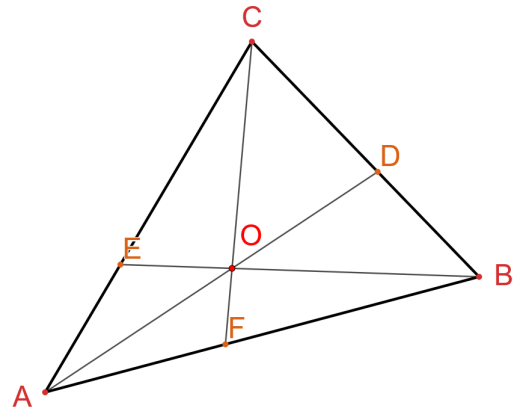
$$R = \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}$$

## Twierdzenia o dowolnych trójkątach

**Twierdzenie Cevy** - niech dany będzie trójkąt  $ABC$  i punkty  $D, E, F$  takie, że  $D \in |BC|$ ,  $E \in |AC|$  i  $F \in |AB|$ . Jeżeli proste  $|AD|$ ,  $|BE|$  i  $|CF|$  przecinają się w jednym punkcie  $O$ , to wtedy prawdziwa jest równość:

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

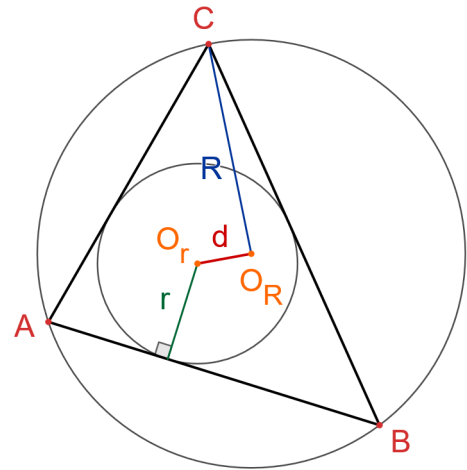


**Twierdzenie Eulera** - twierdzenie opisujące relację między długościami promieni okręgów: wpisanego w i opisanego na trójkącie a odległością między środkami tych okręgów.

Długość odcinka  $d$ , będącego odległością środków okręgów: wpisanego i opisanego jest równa:

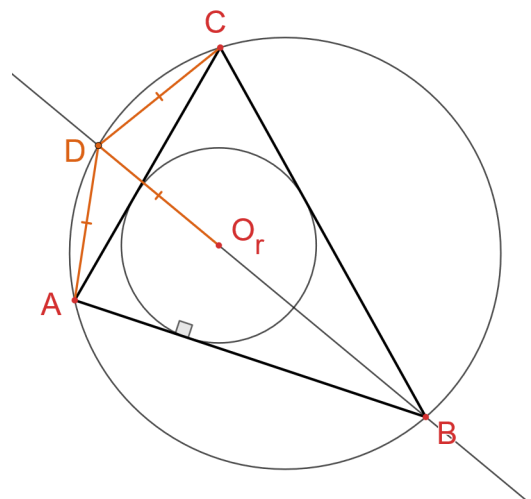
$$d^2 = R(R - 2r)$$

Z twierdzenia tego wynika również **nierówność Eulera**:  $R \geq 2r$



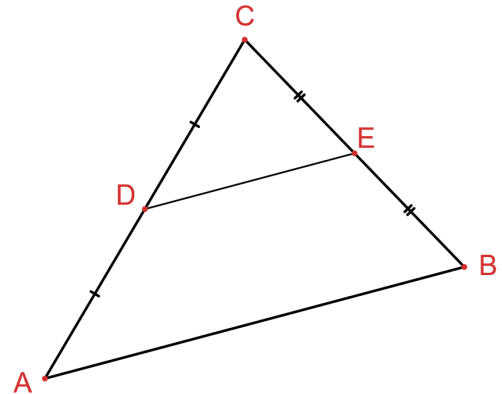
**Twierdzenie o trójlisciu** - niech dany będzie dowolny trójkąt  $ABC$ . Prosta  $BO_r$ , przechodząca przez wierzchołek trójkąta i środek okręgu wpisanego w ten trójkąt przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie  $D$ . W takiej konfiguracji prawdziwa jest równość:

$$|AD| = |O_r D| = |CD|$$



**Twierdzenie o linii środkowej** - linia środkowa (odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta) jest równoległa do odpowiadającego jej boku oraz długość linii środkowej jest równa połowie długości odpowiadającego boku.

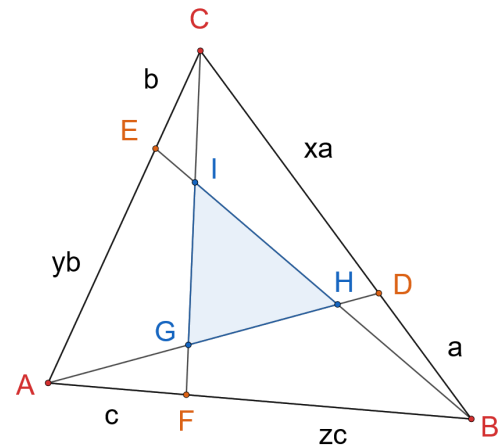
$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$$



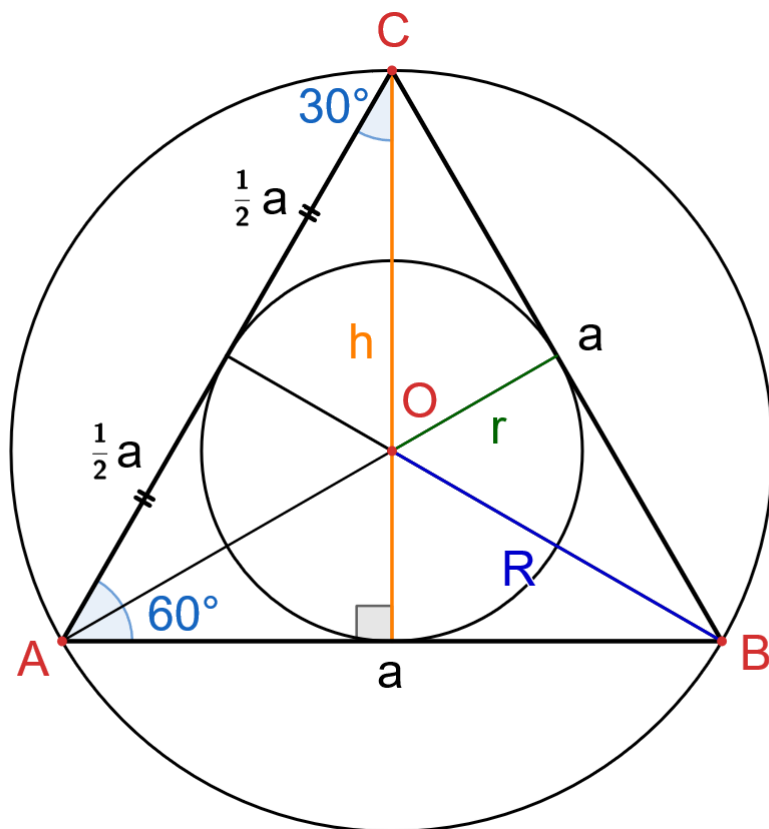
**Twierdzenie Routha** - opisuje stosunek między polami trójkąta i trójkąta zawartego między czewianami (dowolnymi odcinkami łączącymi wierzchołek trójkąta i przeciwległy bok).

Niech dany będzie dowolny trójkąt  $ABC$  i  $D \in |BC|$ ,  $E \in |AC|$  i  $F \in |AB|$ . Wiedząc, że  $x = \frac{|CD|}{|BD|}$ ,  $y = \frac{|AE|}{|CE|}$  i  $z = \frac{|BF|}{|AF|}$  pole trójkąta  $GHI$  jest równe polu trójkąta  $ABC$  razy:

$$\frac{(xyz - 1)^2}{(xy + y + 1)(yz + z + 1)(zx + x + 1)}$$



## Trójkąt równoboczny - wzory



$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

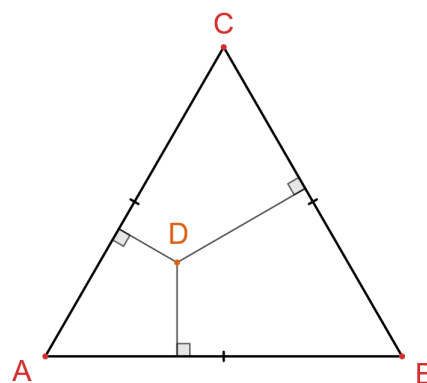
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

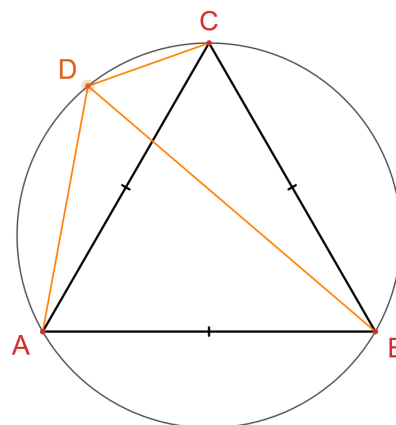


## Twierdzenia o trójkątach równobocznych

**Twierdzenie Vivianiego** - Dla każdego punktu wewnątrz trójkąta równobocznego suma odległości tego punktu od boków trójkąta jest równa jego wysokości.

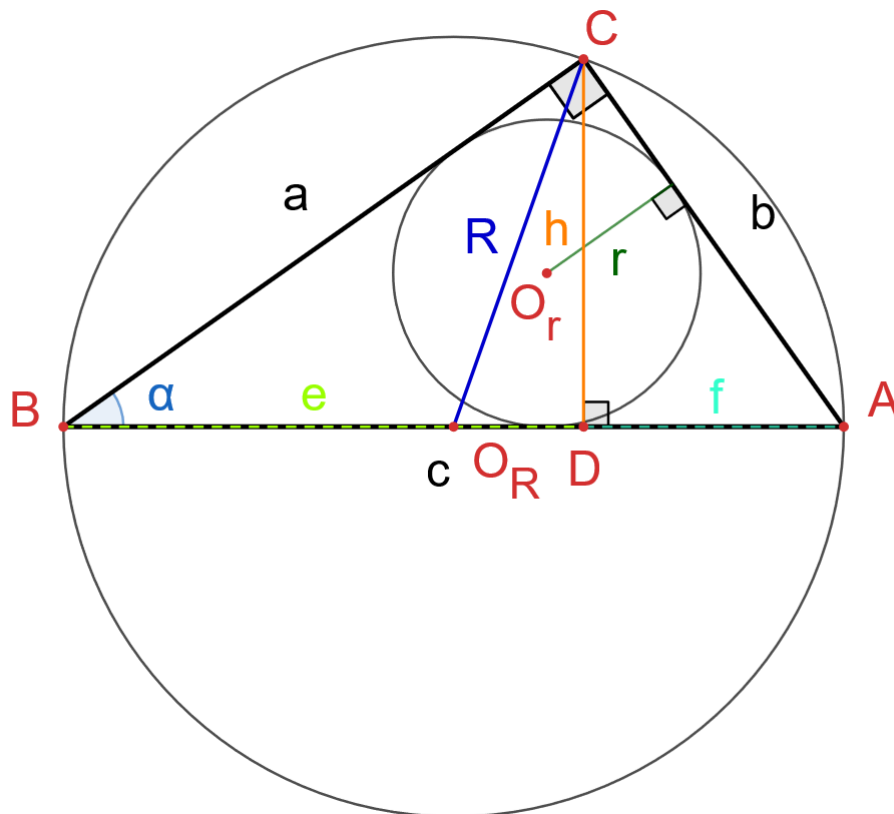


**Twierdzenie Van Schootena** - Dla punktu  $D$  umieszczonego na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym długość najdłuższego odcinka łączącego ten punkt z wierzchołkiem jest równa sumie długości dwóch pozostałych odcinków łączących punkt  $D$  z pozostałymi wierzchołkami.



Jest to specjalny przypadek **twierdzenia Möbiusa - Pompejusza** które postuluje, że odcinki łączące dowolny punkt  $D$  na płaszczyźnie z wierzchołkami trójkąta równobocznego spełniają nierówność trójkąta (da się z nich zbudować trójkąt).

## Trójkąt prostokątny - wzory



$$P = \frac{1}{2}ab \qquad h = \sqrt{ef}$$

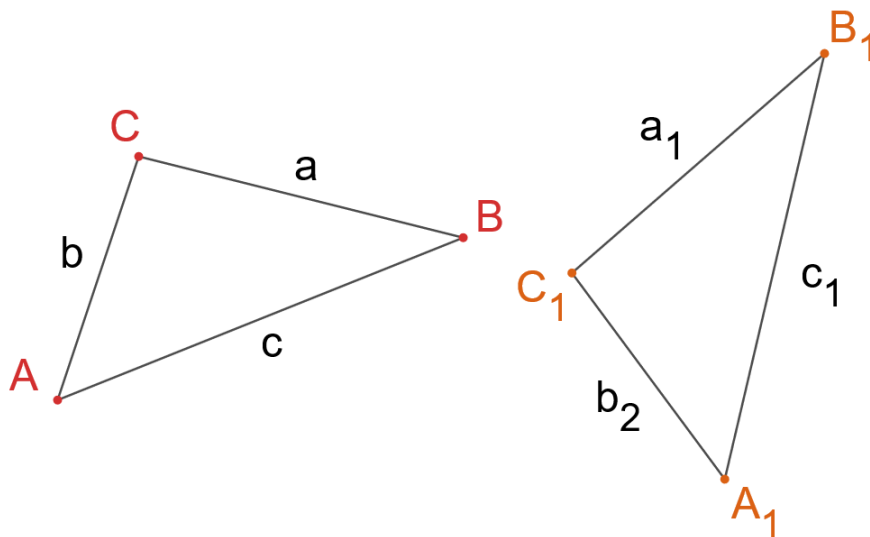
$$a = \sqrt{ce} \qquad b = \sqrt{cf}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

**Twierdzenie Talesa o kącie wpisanym** - jeżeli jeden z boków trójkąta jest średnicą okręgu na nim opisanego, to wtedy jest to trójkąt prostokątny, a średnica jest przeciwprostokątną.

## Cechy przystawania trójkątów

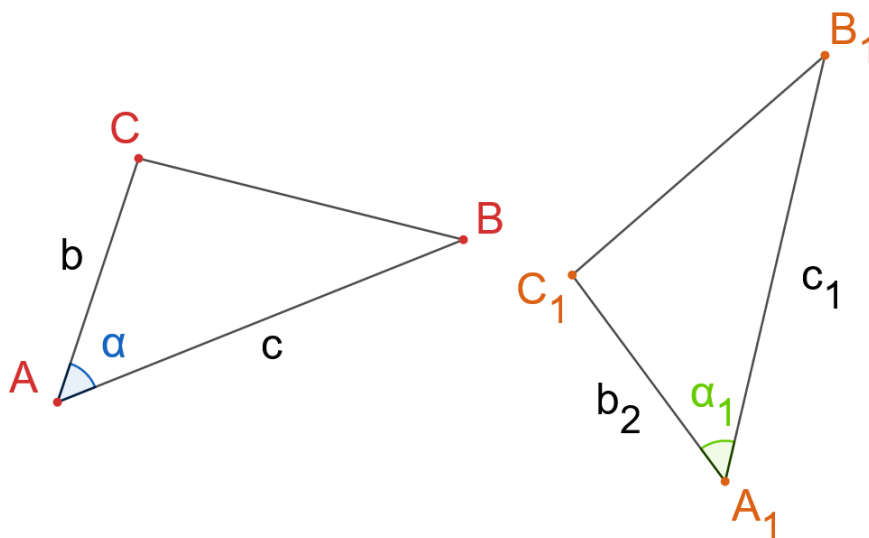
### I cecha przystawania trójkątów (bbb)



$$a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to wtedy te trójkąty są przystające.

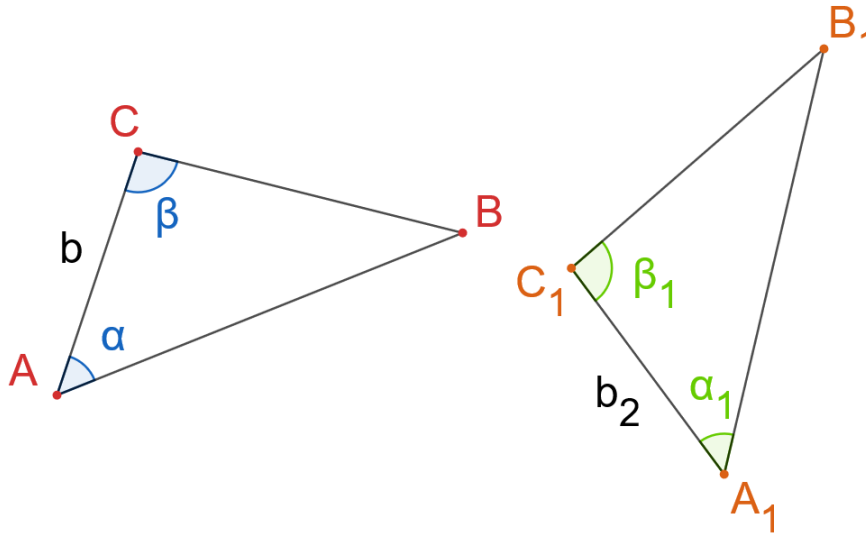
### II cecha przystawania trójkątów (bkb)



$$b = b_1 \wedge \alpha = \alpha_1 \wedge c = c_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

### III cecha przystawania trójkątów (kbk)

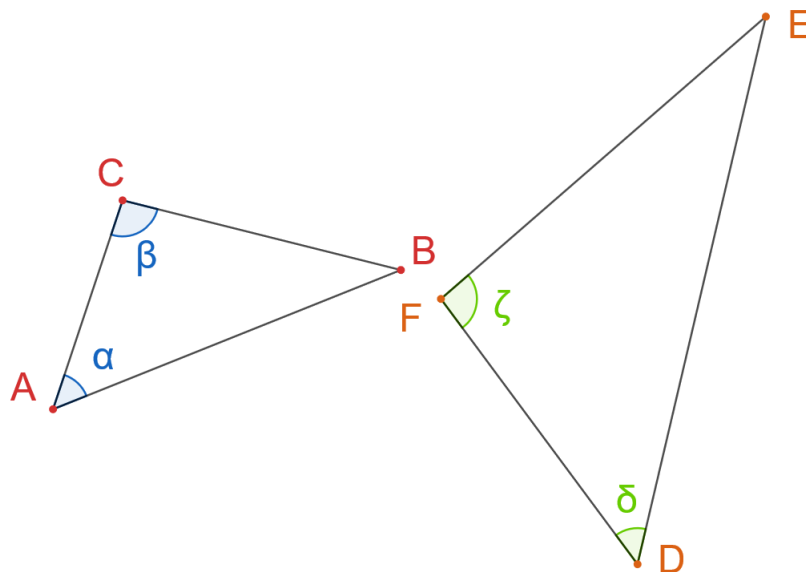


$$\alpha = \alpha_1 \wedge b = b_1 \wedge \beta = \beta_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to wtedy te trójkąty są przystające.

## Cechy podobieństwa trójkątów

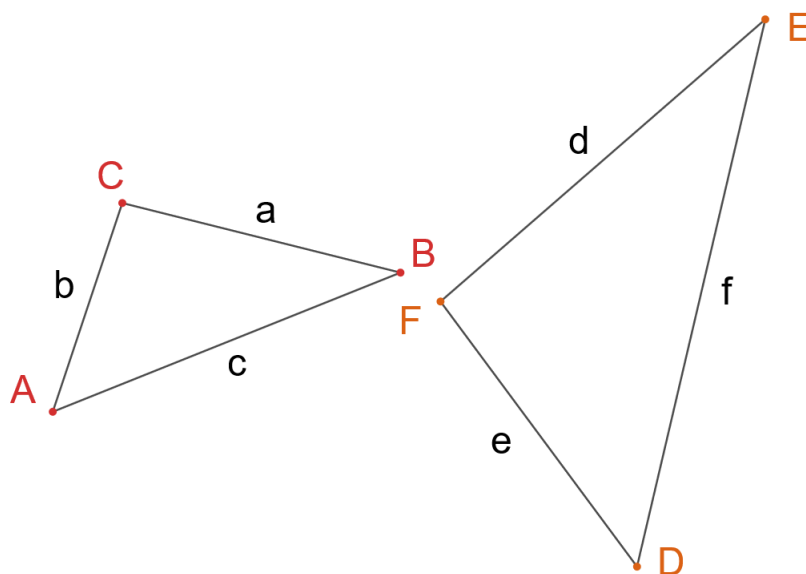
### Cecha podobieństwa trójkątów (kkk)



$$\alpha = \delta \wedge \beta = \gamma \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

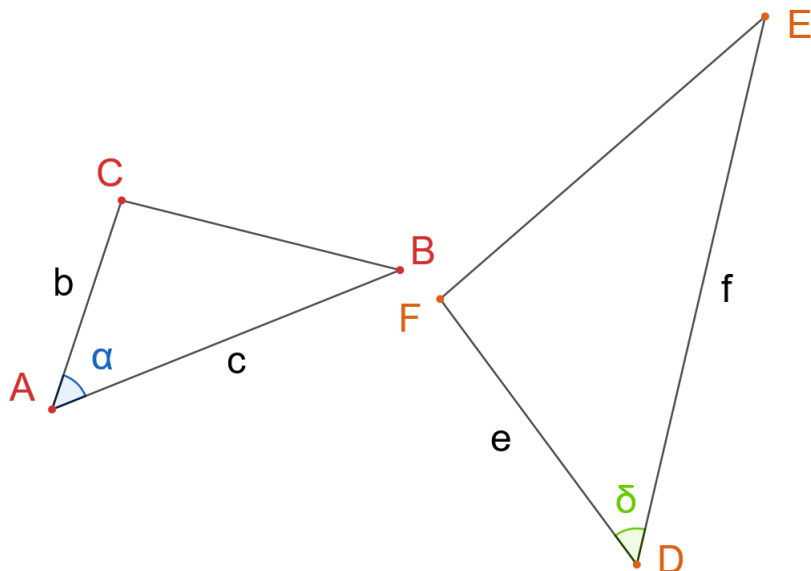
### Cecha podobieństwa trójkątów (bbb)



$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k, \text{ gdzie } k - \text{skala podobieństwa} \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

### Cecha podobieństwa trójkątów (bkb)



$$\frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k, \text{ gdzie } k - \text{skala podobieństwa} \wedge \alpha = \delta \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeżeli trójkąty  $T_1, T_2$  są podobne w skali  $k$ , to stosunek pól tych trójkątów jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

### Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

## Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

## Twierdzenie tangensów

W dowolnym trójkącie, jeżeli  $a, b$  to miary dwóch boków trójkąta, a kąty  $\alpha, \beta$  są kątami odpowiednio leżącymi naprzeciwko do tych boków, to wtedy prawdziwa jest zależność:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

## Twierdzenie cotangensów

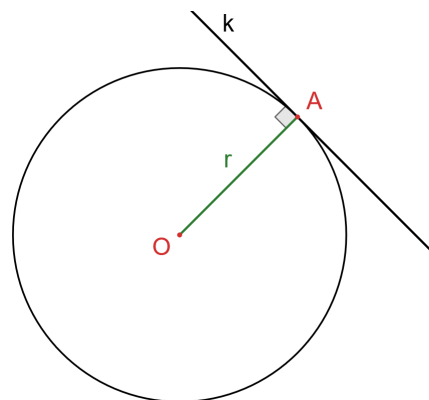
W dowolnym trójkącie iloraz różnicy połowy obwodu trójkąta ( $p = \frac{a+b+c}{2}$ ) i dowolnego boku nad cotangens połowy kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest równy promieniowi okręgu wpisanego.

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{p-b}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} = \frac{p-c}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = r$$

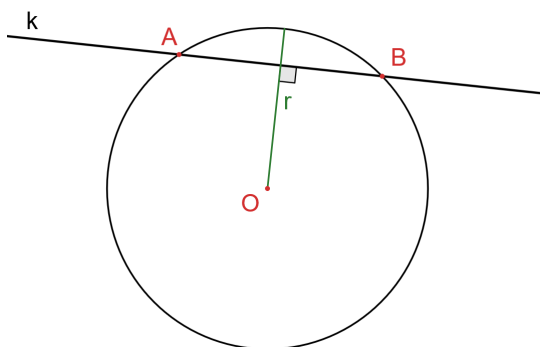
## Wzajemne położenie okręgów i prostych

**Styczna do okręgu** - Prosta poprowadzona względem okręgu w taki sposób, że ma z nim tylko jeden punkt wspólny oraz promień okręgu poprowadzony od środka okręgu do punktu styczności tworzy z prostą kąt prosty.

$$k - \text{styczna} \Leftrightarrow |OA| = r \wedge k \perp OA$$



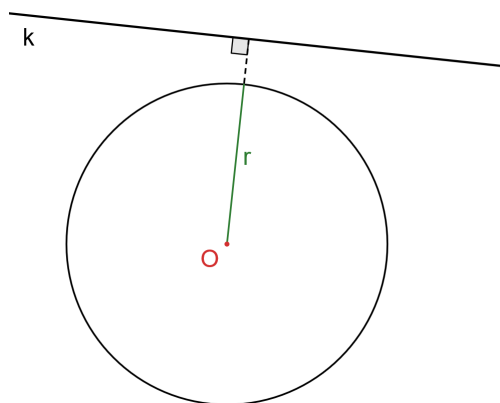
**Sieczna** - Prosta jest sieczna gdy jej odległość od środka okręgu jest mniejsza od promienia. Ma z okręgiem dwa punkty wspólne. Odcinek  $AB$  nazywa się **cięciwą**. Odcinek łączący punkt wspólny promienia poprowadzonego prostopadłe do siecznej i okręgu oraz środek cięciwy nazywa się **strzałką łuku**.



$$d(O, k) < r$$

Prosta jest **rozłączna z okręgiem** wtedy i tylko wtedy, gdy jej odległość od środka okręgu jest większa od promienia. Prosta taka nie ma żadnych punktów wspólnych z okręgiem.

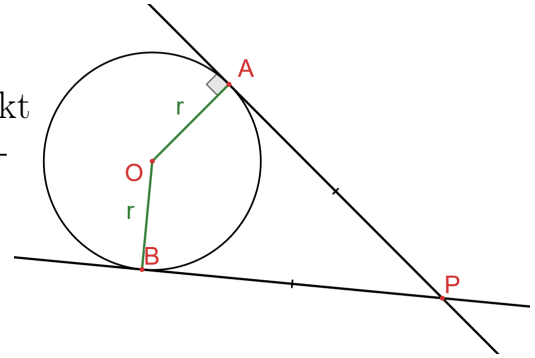
$$d(O, k) > r$$





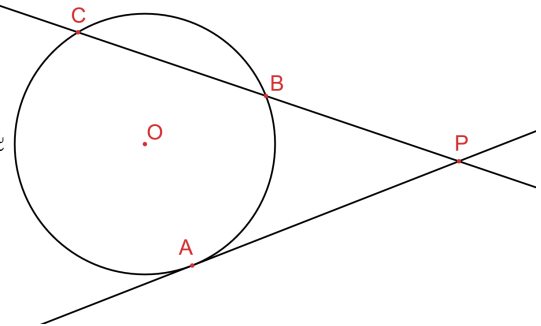
**Twierdzenie o odcinkach stycznych** - odcinki dwóch stycznych, posiadające wspólny punkt poza okręgiem (odległość punktu od środka większa od promienia) mają równą długość.

$$|AP| = |BP|$$



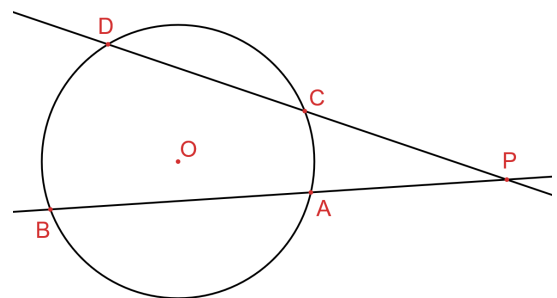
**Twierdzenie o stycznej i siecznej** - dla stycznej i siecznej o wspólnym punkcie poza okręgiem, między odcinkiem wyznaczonym przez styczną i odcinkami wyznaczonymi przez sieczną zachodzi relacja:

$$|AP|^2 = |BP| \cdot |CP|$$



**Twierdzenie o siecznych** - dla dwóch siecznych o wspólnym punkcie poza okręgiem, między wyznaczonymi przez sieczne odcinkami zachodzi relacja:

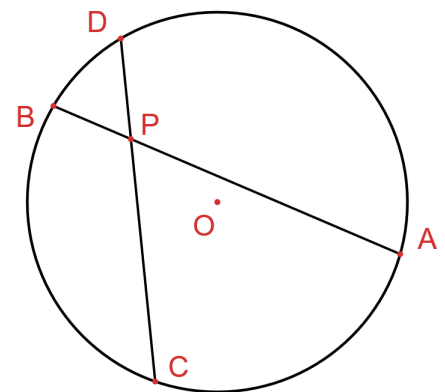
$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$$



**Twierdzenie o cięciwach** - dla odcinków wyznaczonych przez dwie cięciwy okręgu przecinające się w punkcie wewnątrz okręgu zachodzi relacja:

$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$$

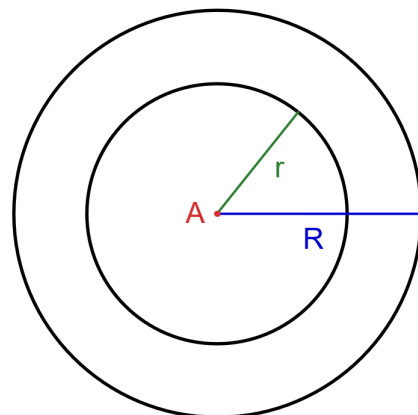
Jest to rozszerzenie twierdzenia o siecznych.



## Wzajemne położenie dwóch okręgów

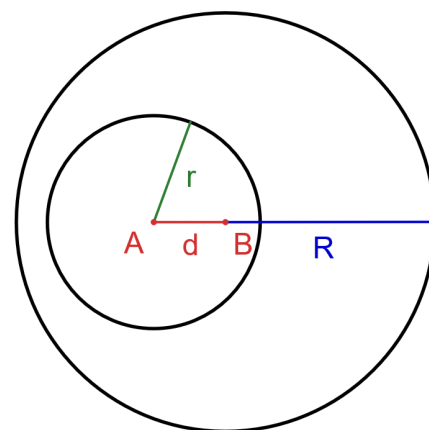
### Okręgi współśrodkowe

$$A = B, |AB| = 0, r \neq R$$



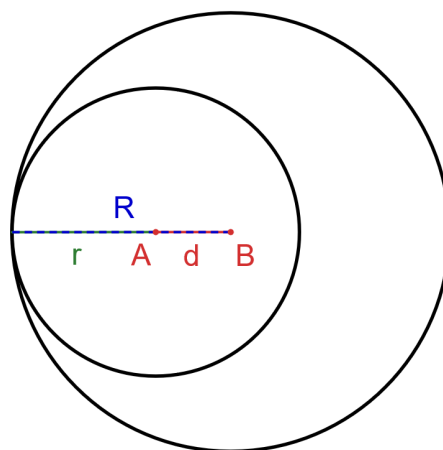
### Okręgi rozłączne wewnętrznie

$$d < |r - R|$$



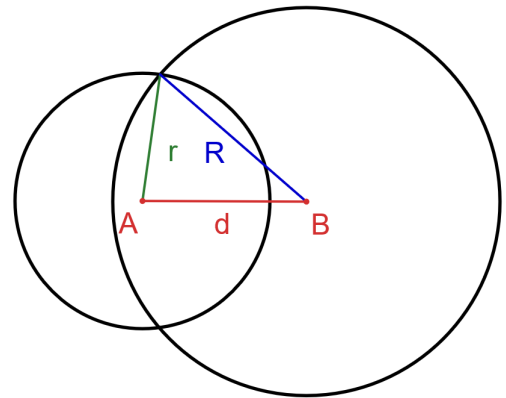
### Okręgi styczne wewnętrznie

$$d = |r - R| \neq 0$$



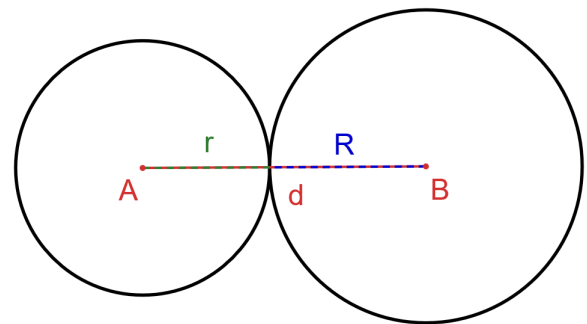
Okręgi przecinające się

$$|r - R| < d < r + R$$



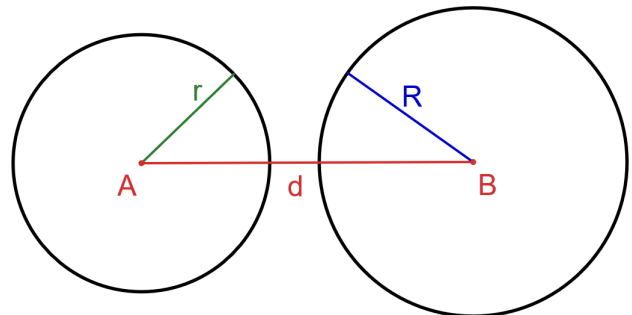
Okręgi styczne zewnętrznie

$$d = r + R$$



Okręgi rozłączne zewnętrznie

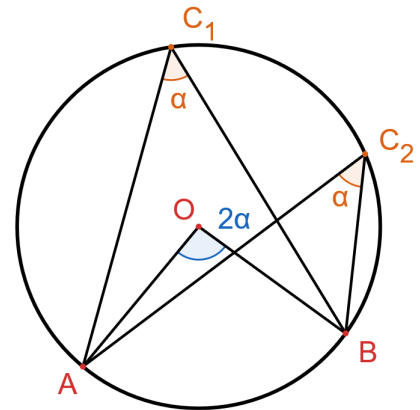
$$d > r + R$$



## Kąt środkowy i wpisany

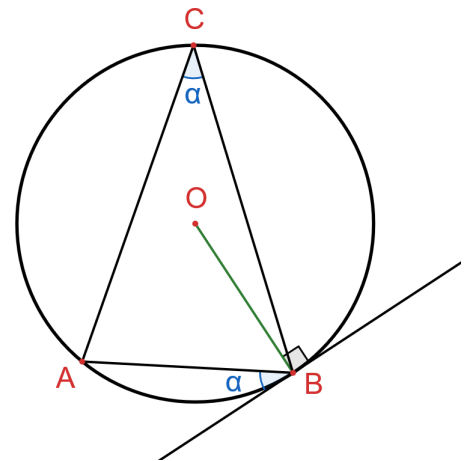
Jeżeli kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku, to wtedy miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.

Dodatkowo każdy kąt wpisany oparty na tym samym łuku ma taki sam kąt.



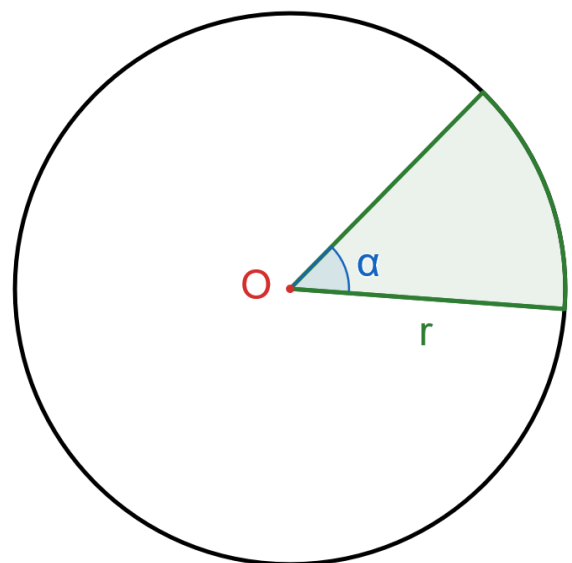
## Kąt wpisany i dopisany

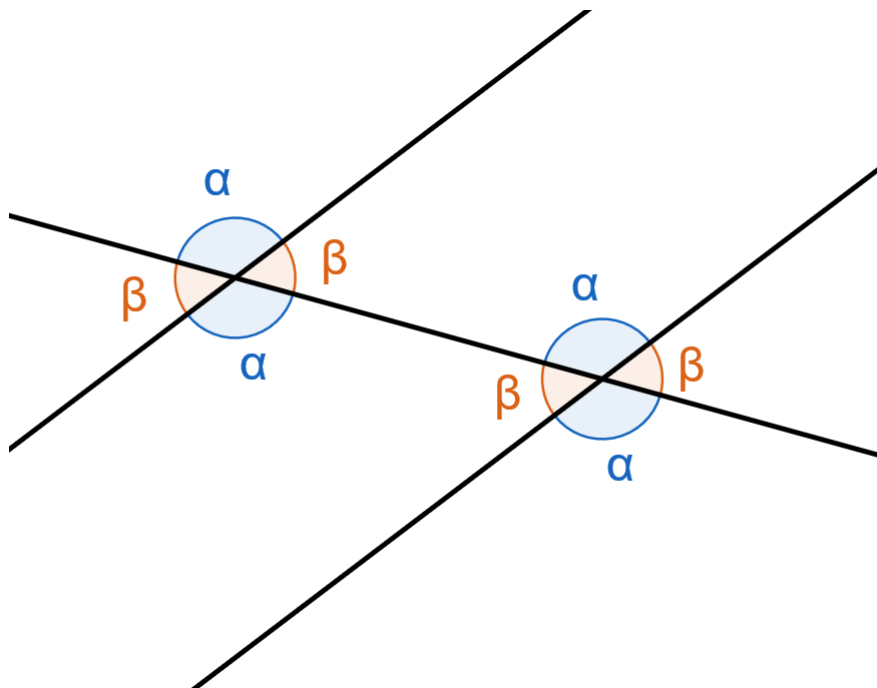
Jeżeli kąt wpisany i dopisany są oparte na tym samym łuku, to miary tych kątów są sobie równe.



## Okrąg - wzory

Pole	$\pi r^2$
Obwód	$2\pi r$
Wycinek koła	$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$
Długość łuku	$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$
Cięciwa	$2r \sin \frac{\alpha}{2}$





**Twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą** - Jeżeli dwie proste są równoległe, to:

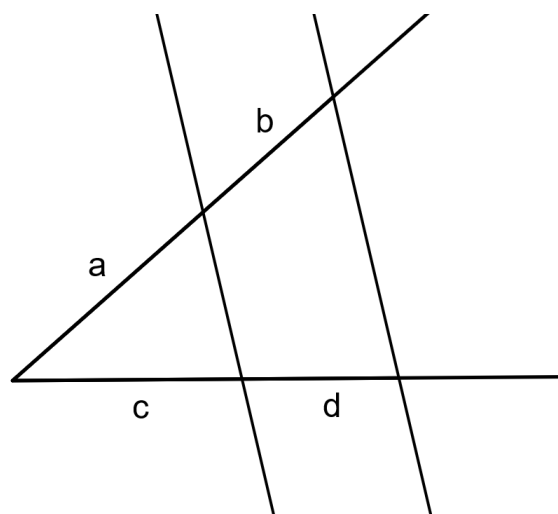
- Kąty odpowiadające są równe.
- Kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe.
- Kąty naprzemianległe zewnętrzne są równe.

Twierdzenia odwrotne również są prawdziwe, tj. jeżeli którykolwiek powyższy warunek jest spełniony, to dwie proste są równoległe.

## Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) są przecięte dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu kąta (lub jego przedłużeniu) będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu kąta.

$$k \parallel l \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$



Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

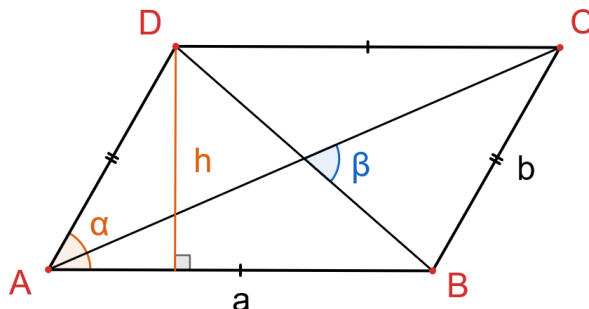
## Czworokąty - wzory

### Równoległobok

$$P = ah$$

$$P = ab \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \beta$$

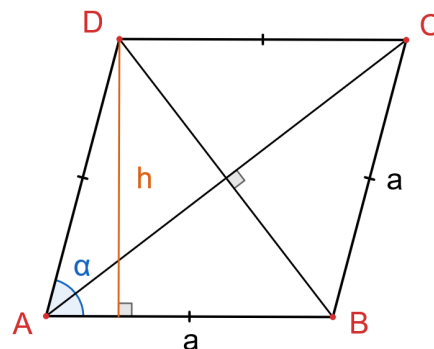


### Romb

$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

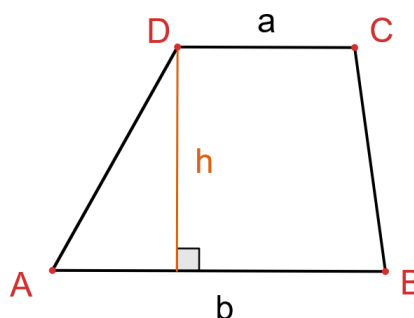
$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD|$$



### Trapez

$$P = \frac{1}{2}(a + b)h$$

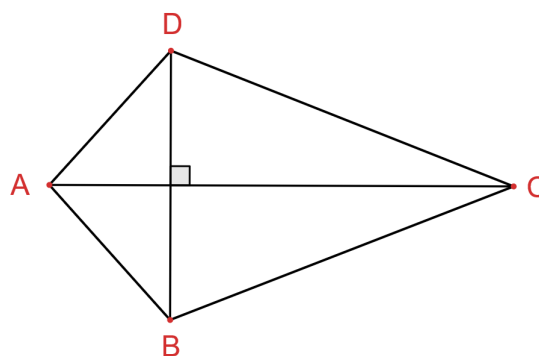
$$\text{Linia środkowa} - \frac{a + b}{2}$$



### Deltoid

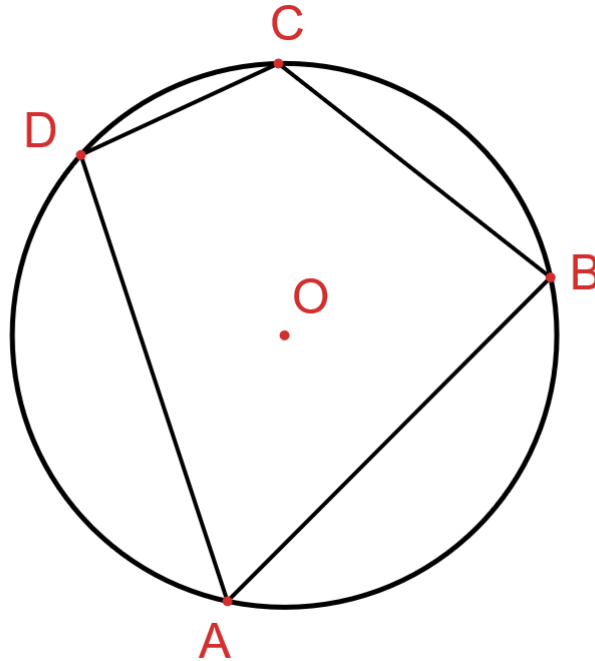
$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD|$$

$$P = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\angle B)$$



Pole każdego czworokąta wypukłego da się obliczyć, mnożąc ze sobą długości przekątnych i sinus kąta między nimi.

Pole każdego czworokąta w który można wpisać okrąg można obliczyć ze wzoru  $p \cdot r$ , gdzie  $p$  to połowa obwodu czworokąta, a  $r$  jest promieniem okręgu wpisanego.



**Czworokąt wpisany w okrąg (okrąg opisany na czworokącie)** - czworokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek czworokąta leży na okręgu.

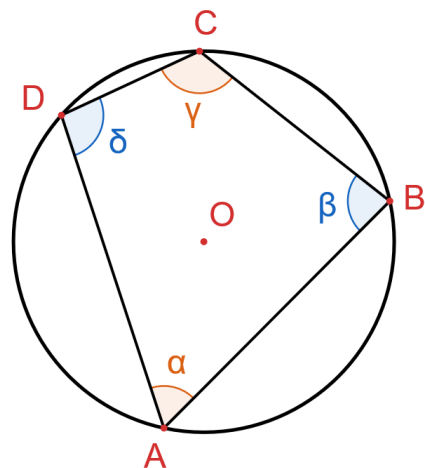
**Warunki:**

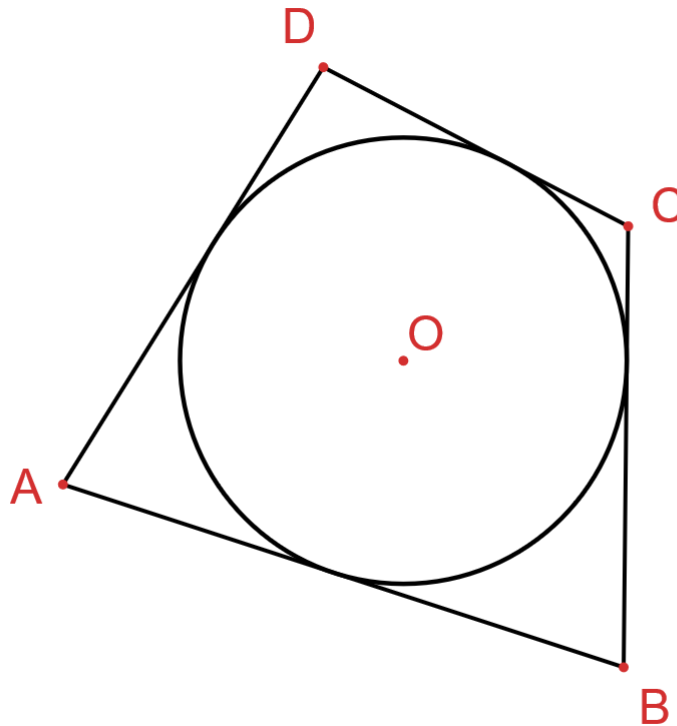
- sumy miar przeciwległych kątów są równe i wynoszą  $180^\circ$ .

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

- symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.
- kąty przy przekątnych, które to kąty leżą naprzeciwko jednego boku czworokąta, są równe.

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$$





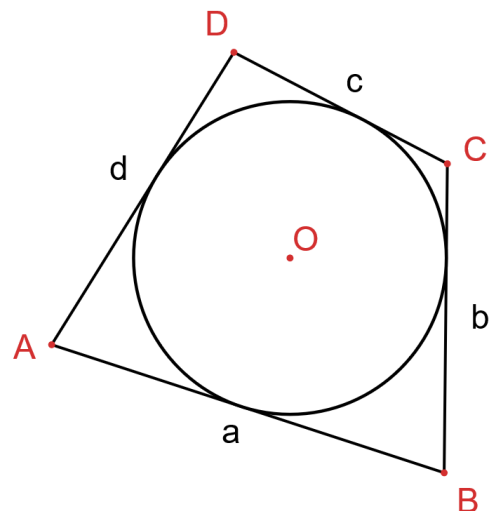
**Okrag wpisany w czworokąt (czworokąt opisany na okregu)** - okrag jest wpisany w czworokąt wtedy i tylko wtedy, gdy każdy bok czworokąta jest styczny do okregu.

**Warunki:**

- sumy długości przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$

- dwusieczne wszystkich kątów czworokąta przecinają się w jednym punkcie.





## Podobieństwo czworokątów

Dwa czworokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków w jednym czworokącie są proporcjonalne do długości boków w drugim czworokącie i wszystkie kąty w jednym czworokącie są równe odpowiednim kątom w drugim czworokącie.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = k - \text{skala podobieństwa}$$

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \beta = \beta_1 \wedge \gamma = \gamma_1 \wedge \delta = \delta_1$$

Jeżeli czworokąty  $C_1, C_2$  są do siebie podobne w skali  $k$ , to stosunek tych pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

## Wielokąty

Sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wyraża się wzorem  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , gdzie  $n, n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$  to ilość boków wielokąta.

Liczba przekątnych w wielokącie wyraża się wzorem  $\frac{n(n-3)}{2}$ , gdzie  $n, n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$  to ilość boków wielokąta.

Specjalnym przypadkiem wielokąta jest **wielokąt foremny**. Wszystkie kąty takiego wielokąta mają równą miarę i wszystkie boki są równej długości.

Pole dowolnego wielokąta foremnego da się obliczyć ze wzoru:

$$\frac{1}{2} \cdot pr$$

gdzie  $p$  to obwód wielokąta, a  $r$  to promień okręgu wpisanego (apotemy).

Funkcjonuje też wzór:

$$na^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

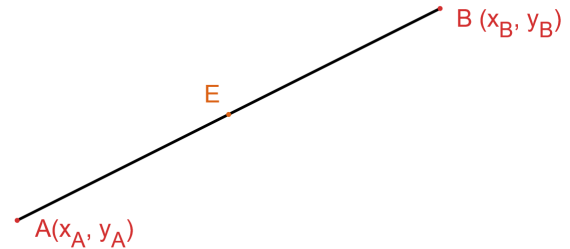
gdzie  $a$  to długość boku wielokąta, a  $n$  to ilość boków.

## 9 Geometria analityczna

### Podstawowe informacje

Długość odcinka wyznaczonego punktami o współrzędnych  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



Współrzędne środka odcinka to średnia arytmetyczna kolejno odciętych i rzędnych punktów wyznaczających odcinek:

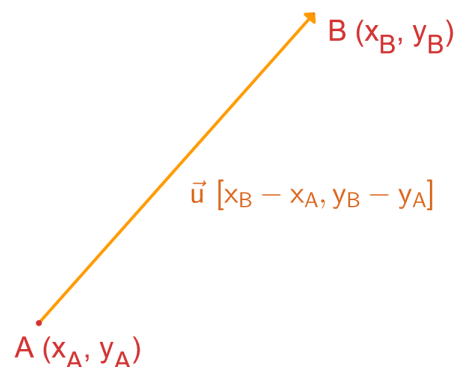
$$E \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Współrzędne barycentrum (środką ciężkości) trójkąta to średnia arytmetyczna kolejno odciętych i rzędnych jego wierzchołków:

$$S \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

### Wektory

**Wektor** - obiekt matematyczny posiadający: moduł (długość, wartość, normę), kierunek określający orientację w przestrzeni wektora, oraz zwrot rozróżniający między dwoma wektorami o tym samym module i kierunku.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Dwa wektory:  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy  $u_1 = v_1$  i  $u_2 = v_2$ .

Dwa wektory:  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy  $u_1 = -v_1$  i  $u_2 = -v_2$ .

Niech  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  (wektory w dwóch wymiarach) i  $k \in \mathbb{R}$ .

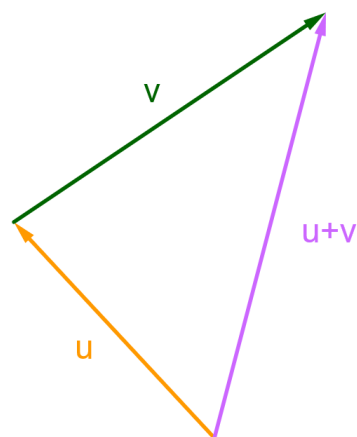
## Moduł (długość) wektora

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \|k \cdot \vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

## Operacje na wektorach

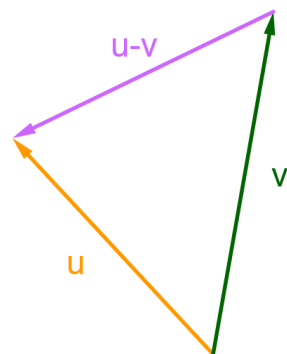
### Suma wektorów

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$



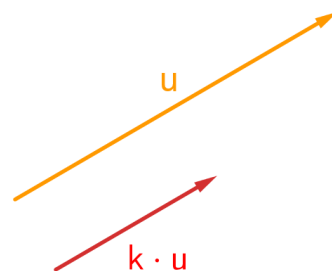
### Różnica wektorów

$$\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2]$$



### Mnożenie wektora przez skalar

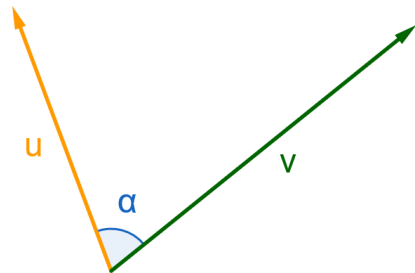
$$k \cdot \vec{u} = [k \cdot u_1, k \cdot u_2]$$



## Iloczyn skalarny

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$



Cosinus i sinus kąta między wektorami można obliczyć ze wzoru:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \sin \alpha = \frac{|\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Dwa wektory są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny tych wektorów jest równy zeru.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Dwa wektory są równoległe i o tym samym zwrocie wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny jest równy iloczynowi modułów tych wektorów.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

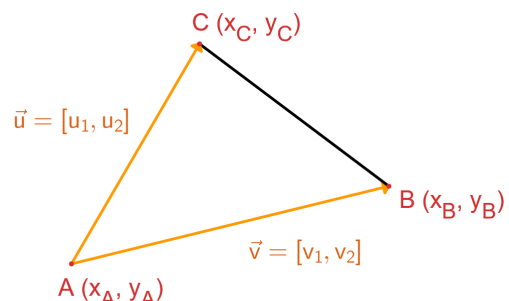
Dwa wektory są równoległe i o różnym zwrocie wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny jest równy przeciwieństwu iloczynu modułów tych wektorów.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|)$$

## Pole trójkąta

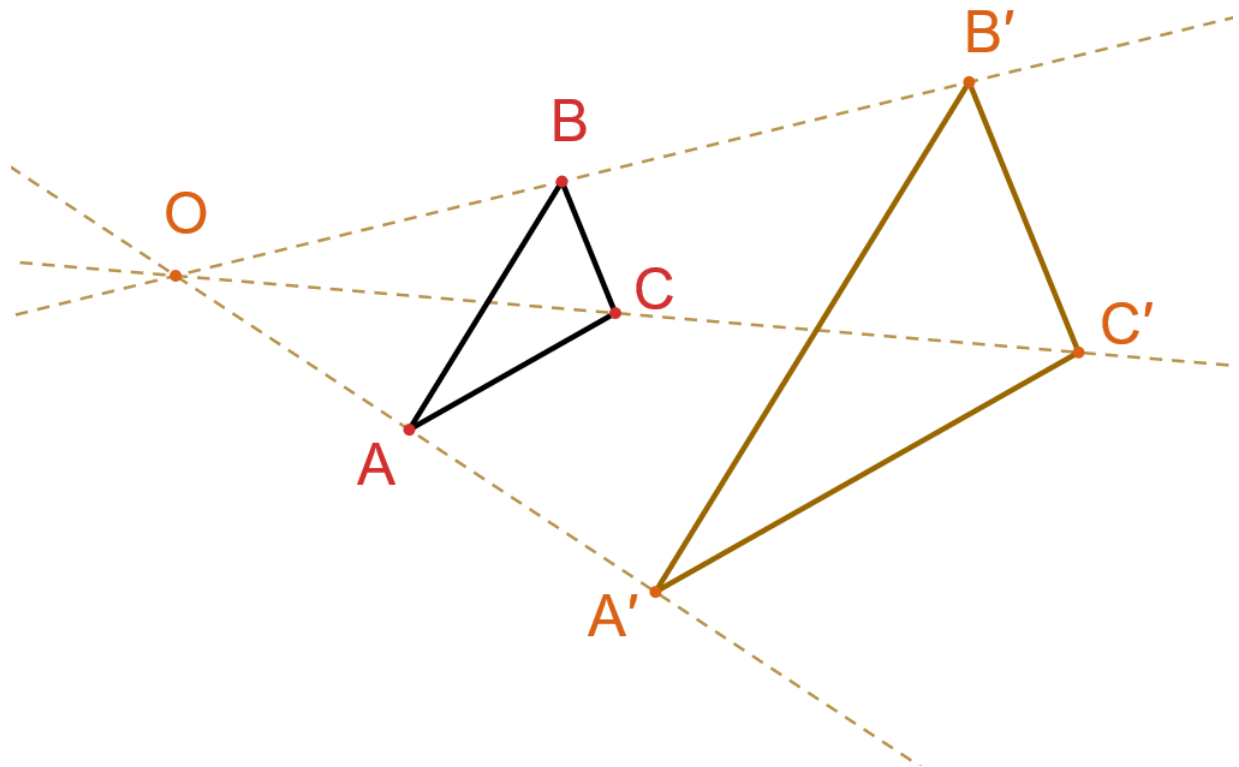
Jeśli dwa wektory mają wspólny początek w jednym z wierzchołków trójkąta, to pole tego trójkąta wyznacza się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |u_1 v_2 - v_1 u_2|$$



Znając współrzędne trzech wierzchołków trójkąta jego pole można obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$



$$J_O^k(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$

**Jednokładność (homotetia)** o środku  $r$  i niezerowej skali  $k$  (nazywanej też *stosunkiem jednokładności*) to odwzorowanie geometryczne nieizometryczne określone następująco:

$$J_r^k(p) = q \Leftrightarrow \vec{rq} = k \cdot \vec{rp}$$

Dla  $k = 1$  jednokładność jest przekształceniem tożsamościowym, dla  $k = -1$  jednokładność to symetria środkowa względem punktu  $r$ .

Każda figura  $F_1$  przekształcona przez jednokładność  $J_r^k(F_1) = F_2$  jest podobna w skali  $|k|$ .

## Proste

**Prosta** - jedno z podstawowych pojęć geometrycznych. W kontekście geometrii analitycznej prosta jest zdefiniowana jako szczególny zbiór punktów  $L$  o współrzędnych spełniających pewne równanie. Zbiór punktów  $L$  można zapisać symbolicznie jako:  $L = \{(x, y) : ax + by = c\}$ ,  $a \vee b \neq 0$ .

## Postać kierunkowa

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi rzędnych OY, to można ją przedstawić w postaci:

$$y = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

W tej postaci  $a$  nazywa się **współczynnikiem kierunkowym**. Jego wartość jest równa tangensowi kąta między prostą a osią odciętych OX. Współczynnik  $b$  określany jest mianem **wyrazu wolnego**. Prosta przecina oś OY w punkcie  $(0, b)$ , a oś OX w  $(-\frac{b}{a}, 0)$ .

Niech podane będą dwa punkty  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , przez które przechodzi prosta  $k$ . **Równanie kierunkowe** prostej  $k$  można wyznaczyć ze wzoru:

$$k := (y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$$

Można też znaleźć współczynnik kierunkowy  $a$ , a następnie znaleźć wyraz wolny  $b$  rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

**Współczynnik kierunkowy prostej** przechodzącej przez punkty:  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  opisuje wzór:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**Równanie prostej** o współczynniku kierunkowym  $a$ , przechodzącej przez punkt  $A(x_A, y_A)$  podane jest wzorem:

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

Niech dane będą dwie proste w postaci kierunkowej:  $k := y = a_1x + b_1$  i  $l := y = a_2x + b_2$ . Proste te:

- są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$ .
- są prostopadłe, gdy  $a_1 \cdot a_2 = -1$ .
- przecinają się pod kątem  $\alpha$ , gdy  $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right|$ .

## Postać ogólna

Dowolną prostą można przedstawić w postaci:

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad A \vee B \neq 0$$

Jeśli  $A = 0$ , to prosta jest równoległa do osi rzędnych OY, a jeżeli  $B = 0$ , to jest równoległa do osi odciętych OX.

Niech podane będą dwa punkty  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ , przez które przechodzi prosta  $k$ . **Równanie ogólne** prostej  $k$  można wyznaczyć, znajdując wyznacznik takiej macierzy, że:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Równoważne jest rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} A = y_B - y_A \\ B = x_A - x_B \\ C = x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_B \end{cases}$$

**Odległość punktu**  $P(x_0, y_0)$  od prostej  $k := Ax + By + C = 0$  jest wyrażona wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Odległość dwóch prostych równoległych** od siebie wyznaczonych równaniami:

$k := Ax + By + C_1 = 0$  i  $l := Ax + By + C_2 = 0$  jest równa:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Niech dane będą dwie proste w postaci ogólnej:  $k := A_1x + B_1y + C_1 = 0$  i  $l := A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Proste te:

- są równoległe, gdy  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ .
- są prostopadłe, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .
- przecinają się pod kątem  $\alpha$  w punkcie  $P$ , gdy:

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|, \text{ lub} \\
 & - \sin \alpha = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \text{ lub} \\
 & - \cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \text{ i} \\
 & - P \left( \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \right).
 \end{aligned}$$

Trzy punkty:  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$  są **współliniowe** (znajdują się na tej samej prostej) wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest następujące równanie:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

Alternatywnie można rozważyć wyznacznik następującej macierzy:

$$\det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$



## Okręgi

**Okrąg** - kształt zdefiniowany jako zbiór wszystkich punktów  $O$  na płaszczyźnie takich, że ich odległość od pewnego punktu  $S(a, b)$  jest równa  $r$ . Symbolicznie zbiór  $O$  to:  $O = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}, r \neq 0$ .

### Postać ogólna

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

### Postać zredukowana

$$x^2 + y^2 + Ax + By - C = 0; \quad A^2 + B^2 - 4C > 0$$

- Odcięta środka okręgu:  $x_S = -\frac{A}{2}$ ,
- Rzędna środka okręgu:  $y_S = -\frac{B}{2}$ ,
- Promień okręgu:  $r = \sqrt{x_S^2 + y_S^2 - C} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

**Prosta styczna do okręgu** w punkcie  $P(x_P, y_P)$ , gdzie środkiem okręgu jest punkt  $S(a, b)$ , jest wyrażona wzorem:

$$(x_P - a)x + (y_P - b)y = (x_P - a)x_P + (y_P - b)y_P$$

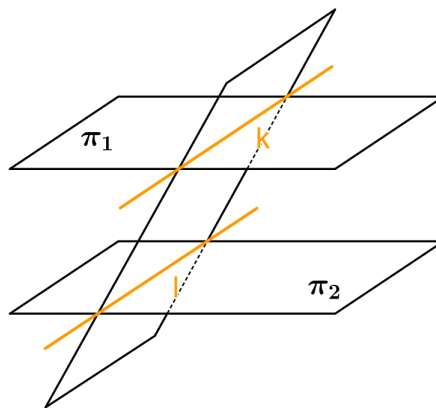
Współczynnik kierunkowy  $m$  tej prostej to:

$$m = -\frac{x_P - a}{y_P - b}$$

## 10 Geometria przestrzenna

### Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny  $\pi_1, \pi_2$  są przecięte trzecią płaszczyzną, to proste będące miejscami przecięcia się płaszczyzn (krawędzie przecięcia) będą równoległe.



**Prosta i płaszczyzna są prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta należąca do płaszczyzny jest prostopadła do prostej przecinającej tę płaszczyznę.

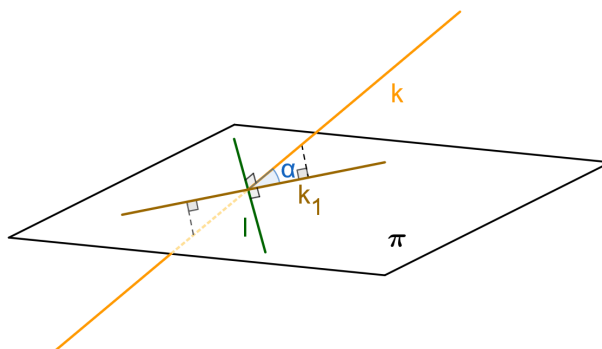
$$k \perp \pi_1 \Leftrightarrow \bigwedge_{l \in \pi_1} k \cap l \neq \emptyset \Rightarrow k \perp l$$

Wynika z tego, że jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch prostych leżących na płaszczyźnie, które przecinają prostą w punkcie przebicia, to jest to warunek wystarczający prostopadłości prostej do płaszczyzny.

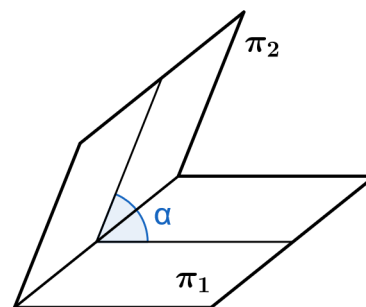
**Dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy w płaszczyźnie  $\pi_1$  jest zawarta prosta prostopadła do prostej leżącej na płaszczyźnie  $\pi_2$ .

**Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych** - jeżeli prosta  $k$  przebija płaszczyznę  $\pi$  i nie jest do niej prostopadła, prosta  $k_1$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na płaszczyznę  $\pi$  oraz prosta  $l$  należy do płaszczyzny i przecina prostą  $k$ , to prosta  $l$  jest prostopadła do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej  $k_1$ .

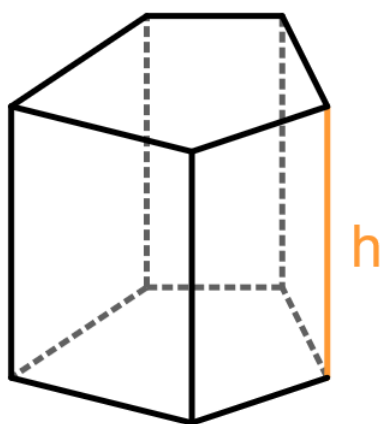
Kąt  $\alpha$  między prostą  $k$  a płaszczyzną  $\pi$  to kąt ostry wyznaczony przez prostą  $k$  i jej rzut prostokątny, prostą  $k_1$ .



**Kąt dwuścienny, kąt torsyjny** - kąt ostry płaski zawarty między dwoma półpłaszczyznami  $\pi_1, \pi_2$  o wspólnej krawędzi przecięcia, nazywanej *krawędzią kąta dwuściennego*.



## Granistosłup



**Pole powierzchni** -  $2P_p + P_b$

**Objętość** -  $P_p \cdot h$

Graniastosłup o podstawie  $n$ -kątnej ma:

$2n$  wierzchołków,

$3n$  krawędzi,

$n + 2$  ścian.

Wielościan zbudowany z dwóch przystających ścian zawartych w równoległych płaszczyznach (zwanych **podstawami graniastosłupa**) i pozostałych ścian (nazywanych **ścianami bocznymi**) będących równoległobokami. Jeżeli ściany boczne graniastosłupa to prostokąty, to bryłę taką nazywa się **graniastosłupem prostym**. W przeciwnym wypadku bryła taka nosi miano **graniastosłupa pochyłego**.

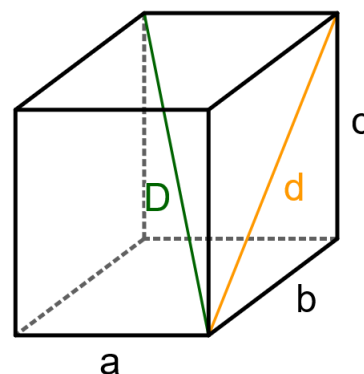
Jeżeli podstawą graniastosłupa jest wielokąt foremny, to jest to **graniastosłup prawidłowy**.

Specjalnym przypadkiem graniastosłupa jest **prostopadłościan** - bryła zbudowana w całości z prostokątów. Objętość prostopadłościanu wyrażona jest wzorem:

$$V = abc$$

Pole powierzchni prostopadłościanu oblicza się:

$$P_p = 2(ab + ac + bc)$$



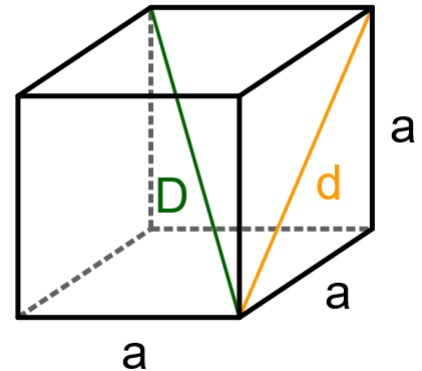
Specjalnym przypadkiem prostopadłościanu jest **sześcian** - bryła zbudowana z kwadratów.

Pole powierzchni -  $6a^2$

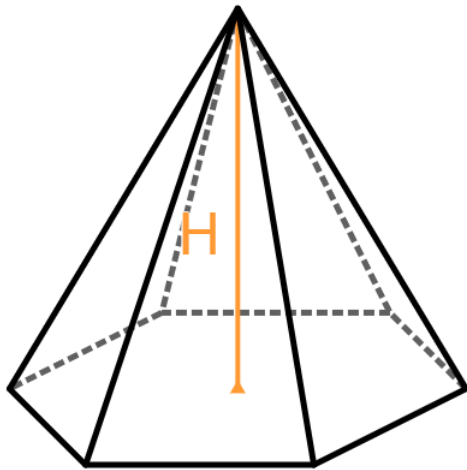
Objętość -  $a^3$

Przekątna ściany bocznej -  $a\sqrt{2}$

Przekątna bryły -  $a\sqrt{3}$



## Ostrosłup



Pole powierzchni -  $P_p + P_b$

Objętość -  $\frac{1}{3}P_p \cdot H$

Ostrosłup o podstawie  $n$ -kątnej ma:

$n + 1$  wierzchołków,

$2n$  krawędzi,

$n + 1$  ścian.

Wielościąg zbudowany ze ścian będącej wielokątem, zwanej **podstawą ostrosłupa** i pozostałych ścian, które są trójkątami i mają wspólny wierzchołek (nazywany **wierzchołkiem ostrosłupa**), który nie należy do płaszczyzny podstawy.

**Ostrosłupem prostym** jest ostrosłup, który spełnia poniższe warunki:

- Na podstawie ostrosłupa da się opisać okrąg.
- Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Równoważne są następujące warunki:

- Ostrosłup jest ostrosłupem prawidłowym.
- Wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość.

- Wszystkie krawędzie boczne tworzą jednakowy kąt z płaszczyzną podstawy.

**Ostrosłupem prawidłowym** jest ostrosłup, który za podstawę ma wielokąt foremny.

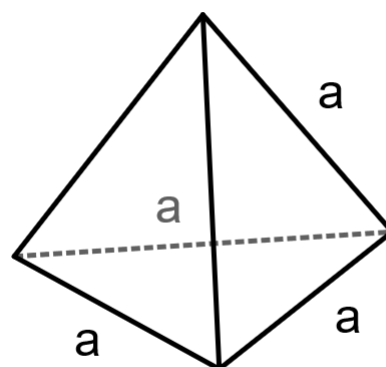
W podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg i spodek wysokości tego trójkąta jest środkiem tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy miara kąta nachylenia wszystkich ścian bocznych ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest taka sama.

Specjalnym przypadkiem ostrosłupa jest **czworościan** - bryła której wszystkie ściany to trójkąty foremne.

Pole powierzchni -  $a^2\sqrt{3}$

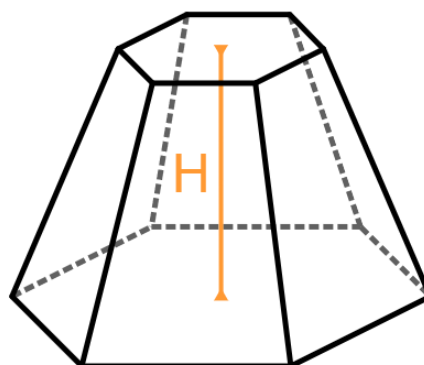
Objętość -  $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Wysokość -  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$



## Ostrosłup ścięty

Bryła powstała przez przecięcie ostrosłupa płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego podstawy i odrzucenie wszystkich punktów leżących po stronie wierzchołka ostrosłupa. Powstała w ten sposób nowa ściana jest podobna do podstawy ostrosłupa i jednokładna względem wierzchołka ostrosłupa. Ściany boczne ostrosłupa ściętego są trapezami.

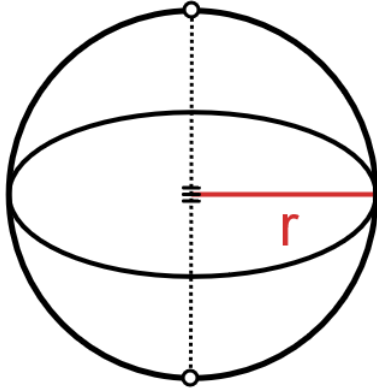


Niech  $P_{p_1}, P_{p_2}$  będą polami podstaw ostrosłupa ściętego. Objętość ostrosłupa ściętego wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \left( P_{p_1} + P_{p_2} + \sqrt{P_{p_1} \cdot P_{p_2}} \right) \cdot H$$

## Bryły obrotowe

### Kula

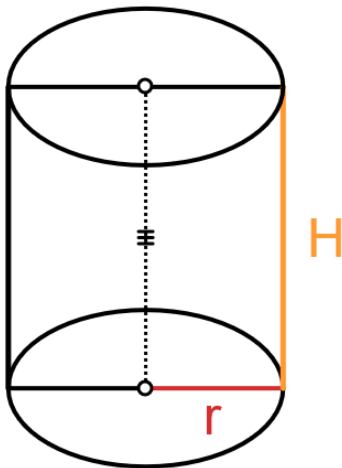


$$\text{Pole powierzchni} - 4\pi r^2$$

$$\text{Objętość} - \frac{4}{3}\pi r^3$$

Kula to zbiór punktów, których odległość od środka kuli jest mniejsza bądź równa promieniowi  $r$ . Powstaje poprzez obrót koła wokół prostej zawierającej średnicę tego koła.

### Walec

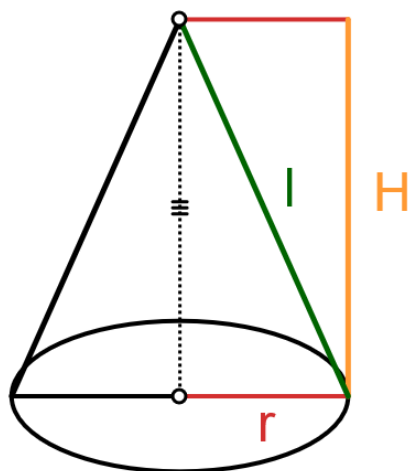


$$\text{Pole powierzchni} - 2\pi r(r + H)$$

$$\text{Objętość} - \pi r^2 H$$

Walec kołowy prosty to bryła geometryczna powstała poprzez obrót prostokąta wokół osi zawierającej się w symetralnej jednego z boków tego prostokąta.

## Stożek



Pole boczne -  $\pi r l$

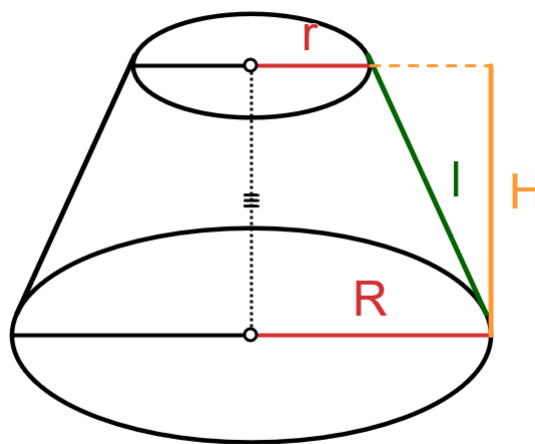
Pole powierzchni -  $\pi r(r + l)$

Objętość -  $\frac{1}{3}\pi r^2 H$

Stożek to bryła geometryczna powstała przez obrót trójkąta prostokątnego wokół osi zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

## Stożek ścięty

Bryła powstała przez przecięcie stożka płaszczyzną równoległą do płaszczyzny jego podstawy i odrzucenie wszystkich punktów leżących po stronie wierzchołka stożka. Powstała w ten sposób nowa ściana jest - podobnie jak podstawa - kołem i jednokładna względem wierzchołka ostrosłupa.



Objętość stożka ściętego da się obliczyć ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr + r^2)$$

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest równe:

$$\pi l(R + r); \quad l = \sqrt{H^2 + (R - r)^2}$$

**Przekrój osiowy** bryły obrotowej to taka płaszczyzna, która zawiera prostą będącą osią obrotu tej bryły.

Jeżeli dwie bryły przestrzenne  $F_1, F_2$  są do siebie podobne w skali  $k$ , to stosunek ich objętości jest równy sześciánowi skali podobieństwa.

$$\frac{V(F_2)}{V(F_1)} = k^3$$



# 11 Kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka

## Silnia

Funkcja  $\cdot ! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , która przypisuje każdej liczbie naturalnej  $n$  iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż  $n$ :

$$x! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

*Przykład:*

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

## Symbol Newtona

Funkcja dwóch argumentów całkowitych nieujemnych, zawarta we wzorze:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Tożsamości:**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

## Kombinatoryka

**Reguła dodawania** - Niech  $E_1, E_2$  będą pewnymi zdarzeniami losowymi, a  $c_1, c_2$  - ilością sposobów, na jakie mogą się wydarzyć. Jeżeli zdarzenia  $E_1, E_2$  są rozłączne parami (nie ma wspólnych wyników obu zdarzeń) i nie wynikają jeden z drugiego, to pierwsze **lub** drugie zdarzenie może wystąpić na  $c_1 + c_2$  sposobów.

**Reguła mnożenia** - Niech  $E_1, E_2$  będą pewnymi zdarzeniami losowymi, a  $c_1, c_2$  - ilością sposobów, na jakie mogą się wydarzyć. Jeżeli zdarzenie  $E_2$  występuje w wyniku wystąpienia zdarzenia  $E_1$ , to pierwsze **i** drugie zdarzenie może wystąpić na  $c_1 \cdot c_2$  sposobów.

## Wariacja z powtórzeniami

Niech  $A$  będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym  $n$  elementów. Wariacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania  $k$  - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru  $A$ . Raz użyty element zbioru  $A$  może zostać wykorzystany ponownie. Kolejność elementów w ciągu ma znaczenie.

Ilość  $k$  - wyrazowych wariacji z powtórzeniami  $n$  elementowego zbioru to:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

*Przykład: Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5?*

Na każdym miejscu setek, dziesiątek i jedności może pojawić się dowolna z tych cyfr, a wybranie cyfry na miejscu setek nie wyklucza jej pojawienia się na miejscu dziesiątek czy jedności w tym samym ciągu. Dlatego należy obliczyć trzywyrazową wariację z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego:

$$\overline{V}_5^3 = 5^3 = 125$$

## Wariacja bez powtórzeń

Niech  $A$  będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym  $n$  elementów. Wariacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania  $1 \leq k < n$  - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru  $A$ . Raz użyty element zbioru  $A$  **nie może** zostać wykorzystany ponownie. Kolejność elementów w ciągu ma znaczenie.

Ilość  $k$  - wyrazowych wariacji bez powtórzeń  $n$  elementowego zbioru to:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*Przykład: Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 takich, że dowolna cyfra pojawia się w liczbie co najwyżej raz?*

Biorąc pod uwagę założenia zadania, aby obliczyć ilość takich liczb trzycyfrowych, należy obliczyć trzywyrazową wariację z bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego:

$$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

## Permutacja bez powtórzeń

Niech  $A$  będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym  $n$  elementów. Permutacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania  $n$  - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru  $A$ . Definicja ta czyni permutacją bez powtórzeń specjalnym przypadkiem wariacji bez powtórzeń.

Ilość wszystkich permutacji zbioru  $n$  - elementowego jest równa:

$$P_n = n!$$

*Przykład: Ile unikatowych pięcioliterowych słów (niekoniecznie poprawnych) można utworzyć z liter w słowie: śnieg?*

Wybierając jedną literę ze słowa na pierwsze miejsce pozostają cztery litery do wyboru, na drugie miejsce - pozostają trzy, itd. Jest to więc permutacja na zbiorze pięcioelementowym:

$$P_5 = 5! = 120$$

## Permutacja z powtórzeniami

Niech  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$  będzie pewnym skończonym wielozbiorem zawierającym  $k$  unikatowych elementów. Elementy  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  powtarzają się odpowiednio  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  razy. Permutacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$  - wyrazowego ciągu takiego, że każdy wyraz należy do zbioru  $A$ .

Liczbę unikatowych permutacji tego zbioru oblicza się ze wzoru:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

*Przykład: Ile unikatowych siedmioliterowych słów (niekoniecznie poprawnych) można utworzyć z liter w słowie: szyszka?*

W słowie *szyszka* litery: s i z powtarzają się dwa razy. Zamiana miejscami pierwszej i czwartej litery w słowie nie zmieni go, więc nie należy liczyć tej permutacji. Wszystkich unikatowych słów jest więc:

$$\overline{P}_7 = \frac{7!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

## Kombinacja bez powtórzeń

Niech  $A$  będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym  $n$  elementów. Kombinacją bez powtórzeń nazywamy operację wybrania  $0 \leq k \leq n$  - elementowego podzbioru  $A'$  takiego, że  $A' \subseteq A$ . Elementy w zbiorze  $A'$  nie mogą się powtarzać. Operację tę czyta się jako "kombinację z  $n$  po  $k$ ".

Ilość kombinacji bez powtórzeń można obliczyć ze wzoru:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

*Przykład: W urnie znajduje się pięć kul, każda o innym kolorze. Ile jest różnych par kul, jakich można wylosować z tej urny?*

Każda para kul wylosowana z urny to pewien wyjątkowy podzbiór kul z tej urny. By obliczyć ilość tych par, wystarczy obliczyć kombinację z 5 po 2:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{12} = 10$$

## Kombinacja z powtórzeniami

Niech  $A$  będzie pewnym skończonym zbiorem zawierającym  $n$  elementów. Kombinacją z powtórzeniami nazywamy operację wybrania  $k$  - elementowego podzbioru  $A'$  takiego, że elementy zbioru  $A'$  należą do zbioru  $A$ . Elementy w zbiorze  $A'$  mogą się powtarzać, co czyni go wielozbiorem.

Ilość kombinacji z powtórzeniami na wielozbiorze  $A$  jest równa:

$$\overline{C}_n^k = \left( \binom{n}{k} \right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

*Przykład: W urnie znajduje się pięć kul, każda o innym kolorze. Po wylosowaniu jednej kuli przed następnym losowaniem wrzuca się ją z powrotem do urny. Ile jest par kul, jakich można wylosować z tej urny?*

Wymóg wrzucenia kuli z powrotem do urny sprawia, że możliwe staje się wylosowanie dwa razy tej samej kuli, co tworzy pewną nową parę. By uwzględnić wszystkie możliwe pary w takiej sytuacji, należy obliczyć kombinację z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego:

$$\overline{C}_5^2 = \left( \binom{5}{2} \right) = \frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!} = \frac{720}{48} = 15$$

## Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeżeli  $m$  przedmiotów włoży się do  $n$  różnych szufladek, gdzie  $m > n > 0$ , to wtedy w co najmniej jednej szufladce znajdują się dwa przedmioty.

## Rachunek prawdopodobieństwa

**Przestrzeń probabilistyczna** - struktura matematyczna umożliwiająca opisanie procesu losowego poprzez zdefiniowanie przestrzeni zdarzeń elementarnych, na której podzbiorach definiowane są funkcje prawdopodobieństwa, spełniające odpowiednie aksjomaty.

Przestrzeń probabilistyczna składa się z trzech elementów:

- $\Omega$  - **przestrzeń zdarzeń elementarnych** - niepusty zbiór zawierający wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego. Elementy tego zbioru, czyli pojedyncze wyniki, nazywa się zdarzeniami elementarnymi.
- $\mathcal{F}$  - **przestrzeń zdarzeń losowych** - rodzina mierzalnych podzbiorów przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$ . Elementy przestrzeni zdarzeń losowych nazywa się zdarzeniem losowym. Przestrzeń  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbioru  $\Omega$ .
- $P$  - **miara probabilistyczna** - funkcja określona na przestrzeni zdarzeń losowych, która każdemu zdarzeniu losowemu przyporządkowuje pewną wartość liczbową. Wartość ta to prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia losowego z przestrzeni  $\mathcal{F}$ .

Funkcja  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  jest miarą probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki zwane **aksjomatami Kołmogorowa**:

- Nieujemność -  $P(A) \geq 0$ ;  $A \in \mathcal{F}$ ,
- Unormowanie do jedności -  $P(\Omega) = 1$ ;  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- Zasada przeliczalnej addytywności -  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ;  
 $A, B \in \mathcal{F} \wedge A \cap B = \emptyset$ .

## Własności prawdopodobieństwa

Niech  $A, A', A_1, A_2, \dots, A_n, B, \emptyset \in \mathcal{F}$ .

- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerowe:  $P(\emptyset) = 0$ .
- Ograniczenie górne:  $P(A) \leq 1$ .

- Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego:  $P(A') = 1 - P(A)$ .
- Monotoniczność:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .
- Zasada włączeń i wyłączeń:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- Skończona addytywność (dla zbiorów rozłącznych parami):  
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ .

## Prawdopodobieństwo klasyczne

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, oraz zdarzenie  $A$  jest podzbiorem tej przestrzeni, to prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe ilorazowi mocy (liczebności) zbioru zawierającego zdarzenia sprzyjające zdarzeniu  $A$  i mocy (liczebności) przestrzeni zdarzeń elementarnych  $\Omega$ .

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

## Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech  $A, B \in \mathcal{F}$  i  $P(B) > 0$ . Prawdopodobieństwo warunkowe to prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia  $A$  pod warunkiem zajścia zdarzenia  $B$ . Prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć również ograniczając przestrzeń zdarzeń elementarnych do tylko tych, które sprzyjają zdarzeniu  $B$ , a następnie na tym zbiorze (symbolicznie oznaczanym  $\Omega_B$ ) zbadać prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia  $A$  korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie klasycznym.

Niech  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  i kolejno:  $P(A_1) > 0$ ,  $P(A_1 \cap A_2) > 0$ ,  $\dots$ ,  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Wtedy:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

## Prawdopodobieństwo całkowite

Niech zbiór  $A$  będzie pewnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni  $\Omega$ , a zbiór  $B$  niech będzie rozbiem zbioru  $\Omega$ , tj. zbiór  $B$  jest rodziną zbiorów parami rozłącznych  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  takich, że  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n > 0$  i  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ . Wtedy prawdopodobieństwo  $A$  jest równe:

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) \cdot \dots \cdot P(A | B_n) \cdot P(B_n)$$

## Twierdzenie Bayesa

Twierdzenie wiążące ze sobą prawdopodobieństwa warunkowe dwóch zdarzeń warunkujących się nawzajem. Niech zbiór  $A$  będzie pewnym zdarzeniem zawartym w przestrzeni  $\Omega$ , zbiór  $B = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  niech będzie rozbiem zbioru  $\Omega$ , a  $1 \leq i \leq n$  indeksem wybierającym pewne zdarzenie ze zbioru  $B$ . Wtedy prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć z pomocą wzoru Bayesa:

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}, \text{ gdzie}$$

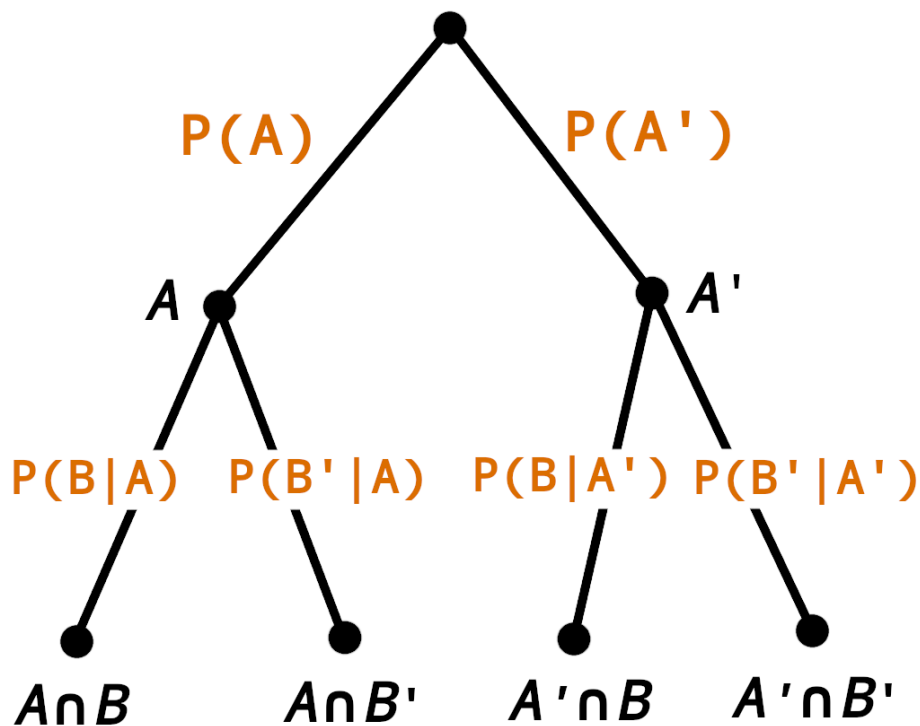
$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) \cdot \dots \cdot P(A | B_n) \cdot P(B_n)$$

## Zdarzenia rozłączne

Dwa zdarzenia  $A, B \in \mathcal{F}$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \cap B = \emptyset$

## Zdarzenia niezależne

Dwa zdarzenia  $A, B \in \mathcal{F}$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .



## Drzewa stochastyczne

Metoda przedstawiania złożonych wieloetapowych doświadczeń losowych. Drzewo stochastyczne składa się z odcinków (krawędzi) i punktów, w których spotykają się odcinki (węzły). Każda krawędź wychodząca z jednego węzła jest innym wynikiem doświadczenia losowego. Każdy ciąg krawędzi od pierwszego do ostatniego węzła to gałąź drzewa. By obliczyć prawdopodobieństwo pewnego wyniku, obok każdej krawędzi zapisuje się prawdopodobieństwo wystąpienia tego wyniku. Suma prawdopodobieństw wychodzących z jednego węzła musi być nie większa niż 1.

By obliczyć prawdopodobieństwo wyniku na końcu gałęzi, należy zastosować regułę iloczynów dla każdej wartości przy krawędzi należącej do danej gałęzi. Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi, sumuje się prawdopodobieństwa przypisane do tych gałęzi.



## Mediana

Niech  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  będzie pewnym uporządkowanym zbiorem wartości. Mediana tego zbioru to pewna liczba, wygenerowana za pomocą następującego schematu:

- Jeżeli  $n$  jest nieparzyste:  $\text{Me}(A) = a_{\frac{n+1}{2}}$ ,
- Jeżeli  $n$  jest parzyste:  $\text{Me}(A) = \frac{1}{2} (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$

To znaczy, że jeżeli  $n$  jest nieparzyste, to medianą jest wartość idealnie pośrodku uporządkowanego szeregu, a jeżeli  $n$  jest parzyste, to wtedy medianą jest średnia arytmetyczna dwóch wyników najbliższych środka.

## Dominanta

Niech  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  będzie pewną rodziną zdarzeń. Dominanta takiego zbioru to element o największym prawdopodobieństwie wystąpienia. Jeżeli kilka elementów jednocześnie występuje najczęściej (mają to samo prawdopodobieństwo wystąpienia, większe od prawdopodobieństwa wystąpienia któregośkolwiek z pozostałych elementów ze zbioru  $A$ ), to każdy z nich jest dominantą (modą). Jeżeli każdy element w zbiorze  $A$  ma takie samo prawdopodobieństwo wystąpienia, to nie da się wyznaczyć dominanty.

Definicję dominanty da się również zastosować w kontekście pewnego zbioru wartości. Wtedy dominantą takiego zbioru jest element występujący najczęściej w zbiorze.

## Wariancja

Niech  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  będzie pewnym zbiorem wyników pewnej cechy  $a$ . Wariancją nazywa się miarę rozproszenia wyników wokół średniej arytmetycznej wartości cechy  $\bar{x}$ . By obliczyć wariancję zbioru  $X$  należy posłużyć się wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

## Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym nazywa się średnią odległość elementów  $x_1, x_2, \dots, x_n$  od średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  cechy  $a$ . Jej wartość jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji.