Matematyka

Tablice rozszerzone

A.D. 2022

Spis treści

1 Symbole i notacja

Litery greckie

Nazwa	Mała litera	Duża litera
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	E
Dzeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Jotta	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Ksi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ipsylon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Zbiory

Symbol	Znaczenie
$\varnothing$	Zbiór pusty
$A \cup B$	Suma zbiorów
$A \cap B$	Część wspólna zbiorów
$A \setminus B$	Różnica zbiorów
$A \times B$	Iloczyn kartezjański
$\overline{A}$, A'	Dopełnienie zbioru
$A \subset B$	Podzbiór zbioru
$A \not\subset B$	Nie jest podzbiorem zbioru
$x \in A$	Należy do zbioru
$x \notin A$	Nie należy do zbioru
$\lvert A\rvert$, $\overline{\overline{A}}$	Liczebność zbioru

Logika

Symbol	Znaczenie
$\wedge$	I (iloczyn logiczny)
$\vee$	Lub (suma logiczna)
$A \Leftrightarrow B$	Równowartość logiczna
$A \Rightarrow B$	Konsekwencja logiczna
$\neg A$	Negacja logiczna
$A \therefore B$	Dlatego
$A \because B$	Ponieważ
$\forall\, x$, $\bigwedge_x$	Dla każdego x
$\exists\, x$, $\bigvee_x$	Istnieje x
$\exists!\, x$, $\dot{\bigvee_x}$	Istnieje dokładnie jeden x

Zbiory liczbowe

Nazwa	Symbol	Nazwa	Symbol
Naturalne	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Wymierne	$\mathbb{Q}, \mathbb{W} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \land q \neq 0\}$
Naturalne dod.	$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Niewymierne	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{NW}$
Całkowite	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{C} = \{-1, 0, 1, \dots\}$	Rzeczywiste	$\mathbb{R}$

Operacje arytmetyczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$a + b$	Dodawanie	$a < b$	Mniejsze od
$a - b$	Odejmowanie	$a > b$	Większe od
$a \cdot b$, $a \times b$	Mnożenie	$a \leq b$	Mniejsze bądź równe od
a/b, $\frac{a}{b}$	Dzielenie	$a \geq b$	Większe bądź równe od
x^n	Potęgowanie	$a \approx b$	Aproksymacja
$\sqrt{x}$	Pierwiastek kwadratowy	$x\%$	Procent
$\sqrt[n]{x}$	Pierwiaster n-tego stopnia	$x‰$	Promil
$\log_a x$	Logarytm o podstawie a	$\lvert x \rvert$	Wartość bezwzględna
$\log x$	Logarytm dziesiętny	$\lceil x \rceil$	Sufit
$\ln x$	Logarytm naturalny	$\lfloor x \rfloor$	Podłoga
$a = b$	Znak równości	$\{x\}$	Mantysa (część ułamkowa)
$a \neq b$	Nierówność	$x \bmod a$	Dzielenie całkowite (modulo)

Stochastyka i statystyka

Symbol	Znaczenie
$n!$	Silnia
$\binom{n}{k}$	Kombinacja bez powtórzeń
Ω	Przestrzeń probabilistyczna
$P(A)$	Prawdopodobieństwo
$P(A \mid B)$	Prawdopodobieństwo warunkowe
σ^2	Wariancja
σ	Odchylenie standardowe
$\bar{x}$	Średnia arytmetyczna

Geometria

Symbol	Znaczenie
$\lvert AB \rvert$	Odcinek
$\overrightarrow{AB}$	Wektor
$\angle$, $\measuredangle$, $\sphericalangle$	Kąt
$\triangle ABC$	Trójkąt
$\square ABCD$	Czworokąt
$k \parallel l$	Proste równoległe
$k \perp l$	Proste prostopadłe
$\sim$	Figury podobne
$\equiv$	Figury przystające

2 Prawa działań

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł liczby) - operacja, która zwraca nienegatywną wartość. Zdefiniowana jest następującym równaniem:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Nienegatywność: $|a| \geq 0$,
- Określoność dodatnia: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- Multiplikatywność: $|ab| = |a||b|$,
- Podaddytywność: $|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|$,
- Idempotencja: $||a|| = |a|$,
- Parzystość: $|-a| = |a|$,
- Zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych: $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- Zachowanie dzielenia: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow b \neq 0$,

Dodatkowo:

$$|a| = \sqrt{a}^2, \qquad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \qquad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

Potęgi, pierwiastki i logarytmy

Potęgowanie (podniesienie do n-tej potęgi) - operacja dwuargumentowa, która jest zdefiniowana jako iloczyn $a, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$(podstawa) $n, n \in \mathbb{N}_+$(wykładnik) razy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ razy}$$

Szczególne przypadki:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad 0^n = 0$$

Pierwiastkowanie - operacja odwrotna do potęgowania, która dla a przyjmuje wartość b taką, że pomnożona n razy jest równa b:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a,$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}, \qquad b \in \mathbb{R}, \qquad n = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ prawdziwe są następujące zależności:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \sqrt{a}^2 = |a|$$

Logarytm - operacja odwrotna do potęgowania, która dla podstawy a oraz argumentu b przyjmuje wartość n taką, że a podniesione do potęgi n jest równe b:

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}, \qquad b \in \mathbb{R}_+, \qquad n \in \mathbb{R}$$

Szczególne przypadki:

$$\log_a 0 - \text{niezdefiniowany}, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

Dla $a, b = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}; x, y \in \mathbb{R}_+$ prawdziwe są następujące zależności:

- Prawo iloczynu: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Prawo ilorazu: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- Prawo potęgi: $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
- Zamiana podstawy z argumentem: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- Zmiana podstawy logarytmu: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- Logarytm potęgi podstawy: $\log_a(a^x) = x$
- a do potęgi logarytmu a z x: $a^{\log_a x} = x$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Kwadrat sumy: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- Kwadrat różnicy: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- Różnica kwadratów: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

- Sześcian sumy: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Sześcian różnicy: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- Różnica sześcianów: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- Suma sześcianów: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Za pomocą **trójkąta Pascala** można wyznaczyć współczynniki arugmentów dla sumy i różnicy podniesionej do potęgi dowolnego $n, n \in \mathbb{N}$:

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	

Przykład: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Średnie

- Arytmetyczna: $S_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Geometryczna: $S_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$
- Kwadratowa: $S_k = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Harmoniczna: $S_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Nierówność Cauchy'ego między średnimi - średnie wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich układają się w charakterystyczną nierówność:

$$S_k \geq S_a \geq S_g \geq S_h$$

Błędy przybliżenia

Dla r oznaczającego wartość dokładną i p oznaczającego wartość przybliżoną zdefiniowane są błędy przybliżenia:
Błąd bezwzględny przybliżenia - wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a przybliżoną, wyrażona wzorem: $|r - p|$.
Błąd względny przybliżenia - iloraz błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej rzeczywistej wielkości, wyrażona: $\frac{|r-p|}{|r|}$.
Błąd procentowy przybliżenia - wartość procentowa błędu względnego:
$\frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$.

Największy wspólny dzielnik

Funkcja $\mathrm{NWD}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje największą liczbę c ze zbioru jednoczesnych dzielników liczb a i b. Znalezienie liczby $\mathrm{NWD}(a, b)$ sprowadza się do zastosowania **algorytmu Euklidesa**:

1. Dla a, b znajdź większą z nich,
2. Od większej liczby odejmij tę mniejszą,
3. Powtarzaj, aż odejmowanie liczb da zero.

Przykład:

$$\mathbf{NWD(798, 1008)} = \left\{ \begin{array}{lcl} 1008 - 798 & = & 210 \\ 798 - 210 & = & 588 \\ 588 - 210 & = & 378 \\ 378 - 210 & = & 168 \\ 210 - 168 & = & 42 \\ 168 - 42 & = & 126 \\ 126 - 42 & = & 84 \\ 84 - 42 & = & 42 \\ 42 - 42 & = & \mathbf{0} \end{array} \right\} = \mathbf{42}$$

Najmniejsza wspólna wielokrotność

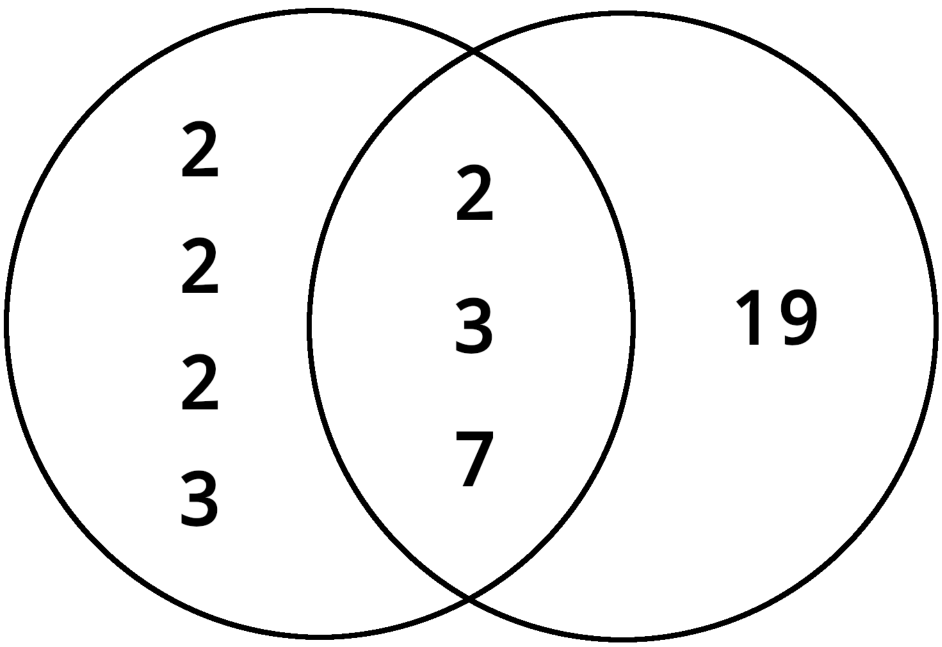
Funkcja $\text{NWW}(a, b), \in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje najmniejszą liczbę c taką, że a i b są jednocześnie podzielne przez c. Aby znaleźć $\text{NWW}(a, b)$ można posłużyć się następującym wzorem:

$$\text{NWW}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{NWD(a, b)}}$$

NWW oraz NWD można też obliczyć znając rozkład liczb na czynniki pierwsze. NWW oblicza się jako iloczyn największych potęg unikalnych czynników. NWW to iloczyn wspólnych dla obu liczb czynników.

Przykład:

$$\mathbf{1008} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad \mathbf{798} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$$



Więc:

$$\text{NNW}(798, 1008) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 19152$$
$$\text{NWD}(798, 1008) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

3 Wielomiany

Informacje i twierdzenia

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_+$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$. Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ to współczynniki wielomianu. Wielomian stopnia zerowego to każda liczba rzeczywista różna od zera. Wielomian zerowy to liczba równa zeru; nie ma określonego stopnia.

Wielomian W(x) jest podzielny przez wielomian P(x) rózny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian Q(x), dla którego prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wówczas Q(x) nazywany jest ilorazem wielomianu W(x) przez P(x), a P(x) jest dzielnikiem wielomianu W(x).

Pierwiastek wielomianu W(x) to liczba rzeczywista a, dla której $W(a) = 0$.

Pierwiastek k-krotny wielomianu W(x), gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ to liczba a taka, że W(x) jest podzielny przez $(x - a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$. Liczba k jest nazywana krotnością pierwiastka.

Twierdzenie o dzieleniu (rozkładzie) wielomianu
Jeśli W(x) oraz P(x) są wielomianami i P(x) nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany Q(x) oraz R(x) takie, że prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie R(x) jest wielomianem zerowym lub wielomianem o stopniu mniejszym od stopnia wielomianu P(x).

Twierdzenie o reszcie wielomianu
Reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian $(x - a)$ jest równa W(a).

Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych
Jeżeli wielomian W(x) ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{C} \wedge q \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q - dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Twierdzenie Bezouta
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu
Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki
Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki sponia co najwyżej drugiego. Rozkład w taki sposób jest jednoznaczny (z dokładnością co do kolejności czynników i stałej).

Funkcja liniowa

Wzór ogólny:

$$f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Liczba a nazywana jest współczynnikiem kierunkowym, b wyrazem wolnym. Dziedziną i zbiorem wartości funkcji liniowej są liczby rzeczywiste.

Funkcja liniowa przecina oś OY w punkcie $(0, b)$, a oś OX w $(-\frac{b}{a}, 0)$. Wykres funkcji liniowej jest nachylony do osi OX pod kątem α takim, że tg $\alpha = a$.

Funkcja liniowa jest:

- nieograniczona,
- nieokresowa,
- monotoniczna ($a > 0$ - rosnąca, $a < 0$ - malejąca, $a = 0$ - stała),
- różnowartościowa (gdy $a \neq 0$),
- ciągła,

- różniczkowalna.

Funkcja kwadratowa

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q; \;\; p = -\frac{b}{2a}, \;\; q = -\frac{\Delta}{4a}, \;\; \Delta = b^2 - 4ac$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0; \;\; x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \;\; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Delta, wyróżnik wielomianu stopnia drugiego - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji kwadratowej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem $\Delta_2 = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- $\Delta = 0$ - Jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny: $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- $\Delta < 0$ - Brak pierwiastków rzeczywistych: $(x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ (zespolonych)).

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której ramiona skierowane są do góry gdy $a > 0$ a do dołu, gdy $a < 0$.

Wierzchołek funkcji kwadratowej znajduje się w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Alternatywnie, współrzędną **x** wierzchołka można wyliczyć średnią arytmetyczną miejsc zerowych: $p = \frac{x_1+x_2}{2}$, a współrzędną **y** wartością funkcji w punkcie p: $q = f(p)$.

Wzory Viète'a - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia drugiego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest przedział $\langle q, +\infty)$ dla $a > 0$, $(-\infty, q\rangle$ dla $a < 0$.

Funkcja kwadratowa jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:

$$\text{malejąca w } (-\infty, p\rangle, \text{ rosnąca w } \langle p, +\infty), \quad a > 0$$

$$\text{rosnąca w } (-\infty, p\rangle, \text{ malejąca w } \langle p, +\infty), \quad a < 0$$

- ciągła,
- różniczkowalna,
- ściśle wypukła dla $a > 0$, ściśle wklęsła dla $a < 0$.