

3.  
1415926  
5358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899  
8628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117  
4502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337  
8678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458  
700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882  
0466521384 14695194151 16094330572  
70365759 59195309218 61173819326  
1179310 51185480744 62379962749  
567351 88575272489 12279381830  
1194 91298336733 62440656643  
0 86021394946 39522473719  
07021798609 43702770539  
21717629317 67523846748  
18467669405 13200056812  
71452635608 27785771342  
75778960917 36371787214  
68440901224 95343014654  
95853710507 92279689258  
92354201995 61121290219  
60864034418 15981362977  
47713099605 18707211349  
99999837297 80499510597  
31732816096 31859502445  
94553469083 02642522308  
25334468503 52619311881  
71010003137 83875288658  
332083814206 17177669147 75  
5982534904287 554687311595 303  
8823537875937 5195778185778 62863  
226806613001927 8766111959092 0532171  
3809525720106548 5863278865936153381827  
9682303019520353 01852968995773622599  
4138912497217752 834791315155748572  
42454150695950 82953311686172  
78558890750 983817546  
3746493 931925

# Matematyka

## Tablice rozszerzone

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Symbole i notacja</b>	<b>1</b>
	Litery greckie . . . . .	1
	Zbiory . . . . .	1
	Logika . . . . .	1
	Zbiory liczbowe . . . . .	2
	Operacje arytmetyczne . . . . .	2
	Stochastyka i statystyka . . . . .	2
	Geometria . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Prawa działań</b>	<b>3</b>
	Wartość bezwzględna . . . . .	3
	Potęgi, pierwiastki i logarytmy . . . . .	3
	Wzory skróconego mnożenia . . . . .	5
	Średnie . . . . .	6
	Błędy przybliżenia . . . . .	7
	Największy wspólny dzielnik . . . . .	7
	Najmniejsza wspólna wielokrotność . . . . .	8
	Oprocentowanie lokat i kredytów . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Wielomiany, funkcje wielomianowe</b>	<b>10</b>
	Informacje i twierdzenia . . . . .	10
	Funkcja liniowa . . . . .	11
	Funkcja kwadratowa . . . . .	12
	Funkcja sześcienna . . . . .	13
	Funkcja wymierna . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Właściwości i wykresy funkcji</b>	<b>17</b>

# 1 Symbole i notacja

## Litery greckie

Nazwa	Mała litera	Duża litera
Alfa	$\alpha$	$A$
Beta	$\beta$	$B$
Gamma	$\gamma$	$\Gamma$
Delta	$\delta$	$\Delta$
Epsilon	$\varepsilon$	$E$
Dzeta	$\zeta$	$Z$
Eta	$\eta$	$H$
Theta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$
Jotta	$\iota$	$I$
Kappa	$\kappa$	$K$
Lambda	$\lambda$	$\Lambda$
My	$\mu$	$M$
Ny	$\nu$	$N$
Ksi	$\xi$	$\Xi$
Omikron	$o$	$O$
Pi	$\pi$	$\Pi$
Rho	$\rho, \varrho$	$P$
Sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$
Tau	$\tau$	$T$
Ipsylon	$\upsilon$	$\Upsilon$
Phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$
Chi	$\chi$	$X$
Psi	$\psi$	$\Psi$
Omega	$\omega$	$\Omega$

## Zbiory

Symbol	Znaczenie
$\emptyset$	Zbiór pusty
$A \cup B$	Suma zbiorów
$A \cap B$	Część wspólna zbiorów
$A \setminus B$	Różnica zbiorów
$A \times B$	Iloczyn kartezjański
$\bar{A}, A'$	Dopełnienie zbioru
$A \subset B$	Podzbiór zbioru
$A \not\subset B$	Nie jest podzbiorem zbioru
$x \in A$	Należy do zbioru
$x \notin A$	Nie należy do zbioru
$ A , \bar{\bar{A}}$	Liczebność zbioru

## Logika

Symbol	Znaczenie
$\wedge$	I (iloczyn logiczny)
$\vee$	Lub (suma logiczna)
$A \Leftrightarrow B$	Równowartość logiczna
$A \Rightarrow B$	Konsekwencja logiczna
$\neg A$	Negacja logiczna
$A \therefore B$	Dlatego
$A \because B$	Ponieważ
$\forall x, \bigwedge_x$	Dla każdego $x$
$\exists x, \bigvee_x$	Istnieje $x$
$\exists! x, \bigvee_x^1$	Istnieje dokładnie jeden $x$

## Zbiory liczbowe

Nazwa	Symbol	Nazwa	Symbol
Naturalne	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Wymierne	$\mathbb{Q}, \mathbb{W} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$
Naturalne dod.	$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Niewymierne	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{NW}$
Całkowite	$\mathbb{Z}, \mathbb{C} = \{-1, 0, 1, \dots\}$	Rzeczywiste	$\mathbb{R}$

## Operacje arytmetyczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$a + b$	Dodawanie	$a < b$	Mniejsze od
$a - b$	Odejmowanie	$a > b$	Większe od
$a \cdot b, a \times b$	Mnożenie	$a \leq b$	Mniejsze bądź równe od
$a/b, \frac{a}{b}$	Dzielenie	$a \geq b$	Większe bądź równe od
$x^n$	Potęgowanie	$a \approx b$	Aproksymacja
$\sqrt{x}$	Pierwiastek kwadratowy	$x\%$	Procent
$\sqrt[n]{x}$	Pierwiaster $n$ -tego stopnia	$x\text{‰}$	Promil
$\log_a x$	Logarytm o podstawie $a$	$ x $	Wartość bezwzględna
$\log x$	Logarytm dziesiętny	$[x]$	Sufit
$\ln x$	Logarytm naturalny	$\lfloor x \rfloor$	Podłoga
$a = b$	Znak równości	$\{x\}$	Mantysa (część ułamkowa)
$a \neq b$	Nierówność	$x \bmod a$	Dzielenie całkowite (modulo)

## Stochastyka i statystyka

Symbol	Znaczenie
$n!$	Silnia
$\binom{n}{k}$	Kombinacja bez powtórzeń
$\Omega$	Przestrzeń probabilistyczna
$P(A)$	Prawdopodobieństwo
$P(A   B)$	Prawdopodobieństwo warunkowe
$\sigma^2$	Wariancja
$\sigma$	Odchylenie standardowe
$\bar{x}$	Średnia arytmetyczna

## Geometria

Symbol	Znaczenie
$ AB $	Odcinek
$\overrightarrow{AB}$	Wektor
$\angle, \sphericalangle, \measuredangle$	Kąt
$\triangle ABC$	Trójkąt
$\square ABCD$	Czworokąt
$k \parallel l$	Proste równoległe
$k \perp l$	Proste prostopadłe
$\sim$	Figury podobne
$\equiv$	Figury przystające

## 2 Prawa działań

### Wartość bezwzględna

**Wartość bezwzględna (moduł liczby)** - operacja, która zwraca nienegatywną wartość. Zdefiniowana jest następującym równaniem:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}$  prawdziwe są następujące zależności:

- Nienegatywność:  $|a| \geq 0$ ,
- Określoność dodatnia:  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- Multiplikatywność:  $|ab| = |a||b|$ ,
- Podaddytywność:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$ ,
- Idempotencja:  $||a|| = |a|$ ,
- Parzystość:  $|-a| = |a|$ ,
- Zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych:  $|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$ ,
- Zachowanie dzielenia:  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow b \neq 0$ ,

Dodatkowo:

$$|a| = \sqrt{a^2}, \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

### Potęgi, pierwiastki i logarytmy

**Potęgowanie (podniesienie do  $n$ -tej potęgi)** - operacja dwuargumentowa, która jest zdefiniowana jako iloczyn  $a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (podstawa)  $n, n \in \mathbb{N}_+$  (wykładnik) razy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Szczególne przypadki:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad 0^n = 0$$

**Pierwiastkowanie** - operacja odwrotna do potęgowania, która dla  $a$  przyjmuje wartość  $b$  taką, że pomnożona  $n$  razy jest równa  $b$ :

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a,$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad n = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\}$$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$  prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{array}{ll} a^{-n} = \frac{1}{a^n} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} & \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ (a^n)^m = a^{n \cdot m} & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \\ \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m & \sqrt{a^2} = |a| \end{array}$$

**Logarytm** - operacja odwrotna do potęgowania, która dla podstawy  $a$  oraz argumentu  $b$  przyjmuje wartość  $n$  taką, że  $a$  podniesione do potęgi  $n$  jest równe  $b$ :

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}, \quad b \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{R}$$

Szczególne przypadki:

$$\log_a 0 - \text{niezdefiniowany}, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

Dla  $a, b = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}; x, y \in \mathbb{R}_+$  prawdziwe są następujące zależności:

- Prawo iloczynu:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Prawo ilorazu:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- Prawo potęgi:  $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
- Zamiana podstawy z argumentem:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- Zmiana podstawy logarytmu:  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- Logarytm potęgi podstawy:  $\log_a(a^x) = x$
- $a$  do potęgi logarytmu  $a$  z  $x$ :  $a^{\log_a x} = x$

## Wzory skróconego mnożenia

Dla  $x, y \in \mathbb{R}$  prawdziwe są następujące zależności:

- Kwadrat sumy:  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- Kwadrat różnicy:  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- Różnica kwadratów:  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- Sześcian sumy:  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Sześcian różnicy:  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- Różnica sześciątów:  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- Suma sześciątów:  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Za pomocą **trójkąta Pascala** można wyznaczyć współczynniki argumentów dla sumy i różnicy podniesionej do potęgi dowolnego  $n, n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{cccccccc}
n = 0 & & & & & & & 1 \\
n = 1 & & & & 1 & & 1 & \\
n = 2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
n = 3 & & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\
n = 4 & & 1 & 4 & & 6 & 4 & 1 \\
n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
n = 6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

*Przykład:*  $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

## Średnie

- Arytmetyczna:  $S_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Geometryczna:  $S_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$
- Kwadratowa:  $S_k = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Harmoniczna:  $S_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ ;  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Nierówność Cauchy'ego między średnimi** - średnie wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich układają się w charakterystyczną nierówność:

$$S_k \geq S_a \geq S_q \geq S_h$$



## Błędy przybliżenia

Dla  $r$  oznaczającego wartość dokładną i  $p$  oznaczającego wartość przybliżoną zdefiniowane są błędy przybliżenia:

**Błąd bezwzględny przybliżenia** - wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a przybliżoną, wyrażona wzorem:  $|r - p|$ .

**Błąd względny przybliżenia** - iloraz błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej rzeczywistej wielkości, wyrażona:  $\frac{|r - p|}{|r|}$ .

**Błąd procentowy przybliżenia** - wartość procentowa błędu względnego:  $\frac{|r - p|}{|r|} \cdot 100\%$ .

## Największy wspólny dzielnik

Funkcja  $\text{NWD}(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{N}_+$  dla liczb  $a$  i  $b$  znajduje największą liczbę  $c$  ze zbioru jednoczesnych dzielników liczb  $a$  i  $b$ . Znalezienie liczby  $\text{NWD}(a, b)$  sprowadza się do zastosowania **algorytmu Euklidesa**:

1. Dla  $a, b$  znajdź większą z nich,
2. Od większej liczby odejmij tę mniejszą,
3. Powtarzaj, aż odejmowanie liczb da zero.

*Przykład:*

$$\text{NWD}(798, 1008) = \left\{ \begin{array}{lcl} 1008 - 798 & = & 210 \\ 798 - 210 & = & 588 \\ 588 - 210 & = & 378 \\ 378 - 210 & = & 168 \\ 210 - 168 & = & 42 \\ 168 - 42 & = & 126 \\ 126 - 42 & = & 84 \\ 84 - 42 & = & 42 \\ 42 - 42 & = & 0 \end{array} \right\} = 42$$

## Najmniejsza wspólna wielokrotność

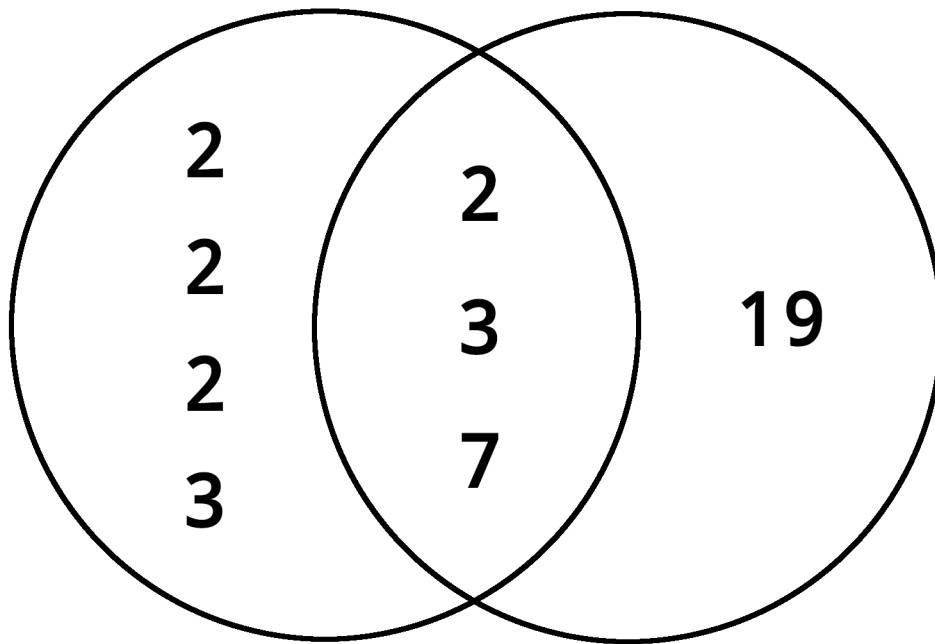
Funkcja  $\text{NWW}(a, b)$ ,  $\in \mathbb{N}_+$  dla liczb  $a$  i  $b$  znajduje najmniejszą liczbę  $c$  taką, że  $a$  i  $b$  są jednocześnie podzielne przez  $c$ . Aby znaleźć  $\text{NWW}(a, b)$  można posłużyć się następującym wzorem:

$$\text{NWW}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{NWD}(a, b)}$$

NWW oraz NWD można też obliczyć znając rozkład liczb na czynniki pierwsze. NWW oblicza się jako iloczyn największych potęg unikalnych czynników. NWD to iloczyn wspólnych dla obu liczb czynników.

*Przykład:*

$$1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad 798 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$$



*Więc:*

$$\text{NWW}(798, 1008) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 19152$$

$$\text{NWD}(798, 1008) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

## Oprocentowanie lokat i kredytów

**Procent prosty** - rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do wkładu nie podlegają oprocentowaniu.

**Procent składany** - rodzaj oprocentowania, który nalicza procent od odsetek doliczonych do wkładu w każdym kolejnym rozpatrywanym okresie.

Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**, a czas między kapitalizacjami **okresem kapitalizacji**.

Niech  $K_0$  będzie początkowym wkładem pieniężnym,  $K$  - końcową otrzymaną kwotą,  $n$  - liczbą równych okresów kapitalizacji, które miały miejsce w okresie  $m$ ,  $m$  - liczbą okresów oszczędzania,  $r$  - stopą oprocentowania,  $p$  - podatkiem od dochodów kapitałowych. Wtedy:

$$\text{Procent prosty:} \quad K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot m}$$

$$\text{Procent składany:} \quad K = K_0 \cdot \left[1 + \frac{r}{n} \left(1 - \frac{p}{100}\right)\right]^{n \cdot m}$$

### 3 Wielomiany, funkcje wielomianowe

#### Informacje i twierdzenia

**Wielomianem stopnia  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  zmiennej rzeczywistej  $x$  nazywamy wyrażenie:**

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$ . Liczby  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  to współczynniki wielomianu. Wielomian stopnia zerowego to każda liczba rzeczywista różna od zera. Wielomian zerowy to liczba równa zeru; nie ma określonego stopnia.

**Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$**  różny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian  $Q(x)$ , dla którego prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wówczas  $Q(x)$  nazywany jest ilorazem wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$ , a  $P(x)$  jest dzielnikiem wielomianu  $W(x)$ .

**Pierwiastek wielomianu  $W(x)$**  to liczba rzeczywista  $a$ , dla której  $W(a) = 0$ .

**Pierwiastek  $k$ -krotny wielomianu  $W(x)$** , gdzie  $k \in \mathbb{N}_+$  to liczba  $a$  taka, że  $W(x)$  jest podzielny przez  $(x - a)^k$  i nie jest podzielny przez  $(x - a)^{k+1}$ . Liczba  $k$  jest nazywana krotnością pierwiastka.

#### **Twierdzenie o dzieleniu (rozkładzie) wielomianu**

Jeśli  $W(x)$  oraz  $P(x)$  są wielomianami i  $P(x)$  nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany  $Q(x)$  oraz  $R(x)$  takie, że prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie  $R(x)$  jest wielomianem zerowym lub wielomianem o stopniu mniejszym od stopnia wielomianu  $P(x)$ .

#### **Twierdzenie o reszcie wielomianu**

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - a)$  jest równa  $W(a)$ .

### **Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych**

Jeżeli wielomian  $W(x)$  ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci nieskracalnego ułamka  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{C} \wedge q \neq 0$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , natomiast  $q$  - dzielnikiem współczynnika  $a_n$  przy najwyższej potędze zmiennej.

### **Twierdzenie Bezouta**

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $(x - a)$ .

### **Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu**

Każdy wielomian stopnia  $n$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków.

### **Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki**

Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Rozkład w taki sposób jest jednoznaczny (z dokładnością co do kolejności czynników i stałej).

### **Reguła znaków Kartezjusza**

Dla dowolnego wielomianu o rzeczywistych współczynnikach, uporządkowanych według malejącej potęgi zmiennej, ilość dodatnich miejsc zerowych wielomianu jest równa liczbie zmian znaków między niezerowymi współczynnikami, albo jest mniejsza o wielokrotność liczby 2.

## **Funkcja liniowa**

### **Wzór ogólny:**

$$f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Liczba  $a$  nazywana jest współczynnikiem kierunkowym,  $b$  wyrazem wolnym. Dziedzina i zbiorem wartości funkcji liniowej są liczby rzeczywiste.

Funkcja liniowa przecina oś OY w punkcie  $(0, b)$ , a oś OX w  $(-\frac{b}{a}, 0)$ . Wykres funkcji liniowej jest nachylony do osi OX pod kątem  $\alpha$  takim, że  $\operatorname{tg} \alpha = a$ .

Funkcja liniowa jest:

- nieograniczona,

- nieokresowa,
- monotoniczna ( $a > 0$  - rosnąca,  $a < 0$  - malejąca,  $a = 0$  - stała),
- różnowartościowa (gdy  $a \neq 0$ ),
- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = a$ .

## Funkcja kwadratowa

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q; \quad p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0; \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Delta, wyróżnik wielomianu stopnia drugiego** - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji kwadratowej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem  $\Delta_2 = b^2 - 4ac$ .

- $\Delta > 0$  - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste:  $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,
- $\Delta = 0$  - Jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,
- $\Delta < 0$  - Brak pierwiastków rzeczywistych:  $(x_1, x_2 \in \mathbb{C} \text{ (zespolonych)})$ .

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której ramiona skierowane są do góry gdy  $a > 0$  a do dołu, gdy  $a < 0$ .

**Wierzchołek funkcji kwadratowej** znajduje się w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ . Alternatywnie, współrzędną **x** wierzchołka można wyliczyć średnią arytmetyczną miejsc zerowych:  $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , a współrzędną **y** wartością funkcji w punkcie  $p$ :  $q = f(p)$ .

**Wzory Viète’a** - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia drugiego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest przedział  $\langle q, +\infty \rangle$  dla  $a > 0$ ,  $(-\infty, q]$  dla  $a < 0$ .

Funkcja kwadratowa jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:

malejąca w  $(-\infty, p]$ , rosnąca w  $\langle p, +\infty)$ ,  $a > 0$

rosnąca w  $(-\infty, p]$ , malejąca w  $\langle p, +\infty)$ ,  $a < 0$

- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = 2ax + b$ ,
- ściśle wypukła dla  $a > 0$ , ściśle wklęsła dla  $a < 0$ .

## Funkcja sześcienna

**Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

**Wzór w postaci kanonicznej:**

$$f(t) = t^3 + pt + q; \quad t = x + \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}$$

**Wzór w postaci iloczynowej:**

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

**Wyróżnik wielomianu stopnia trzeciego** - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji sześcienną a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem  $\Delta_3 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$ .

- $\Delta_3 > 0$  - Trzy różne pierwiastki rzeczywiste:  $x_1, x_2, x_3$ ,
- $\Delta_3 = 0$  - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z czego jeden dwukrotny lub jeden pierwiastek trzykrotny,
- $\Delta_3 < 0$  - Jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa pozostałe w liczbach zespolonych.

**Ekstrema funkcji sześcienniej** (punkty krytyczne) znajdują się w punktach  $(p, f(p))$ , gdzie  $p$  wyznaczone jest wzorem:  $p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ . Jeżeli  $b^2 - 3ac$  jest mniejsze bądź równe 0, wtedy ekstrem nie ma (funkcja  $f(x)$  jest monotoniczna w całej dziedzinie).

**Środek symetrii funkcji sześcienniej** (punkt przegięcia) znajduje się w punkcie o współrzędnych  $\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$ .

**Wzory Viète'a** - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia trzeciego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Dziedziną i zbiorem wartości funkcji sześcienniej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja sześcienna jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:
  - rosnąca w  $(-\infty, p_1)$  i  $\langle p_2, +\infty)$ , malejąca w  $\langle p_1, p_2 \rangle$ ,  
 $a > 0, \quad b^2 - 3ac > 0$
  - malejąca w  $(-\infty, p_1)$  i  $\langle p_2, +\infty)$ , rosnąca w  $\langle p_1, p_2 \rangle$ ,  
 $a < 0, \quad b^2 - 3ac > 0$
  - rosnąca w całej dziedzinie,  $a > 0, \quad b^2 - 3ac \leq 0$
  - malejąca w całej dziedzinie,  $a < 0, \quad b^2 - 3ac \leq 0$



- ciągła,
- różniczkowalna:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ,
- ściśle wypukła w przedziale:

$$\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla } a > 0, \left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla } a < 0$$

- ściśle wklęsła w przedziale:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla } a > 0, \left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla } a < 0$$

## Funkcja wymierna

Funkcja będąca ilorazem funkcji wielomianowych. Iloraz wielomianów realizujących dane funkcje wielomianowe nazywa się wyrażeniem wymiernym. **Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \quad Q(x) \neq 0$$

## Asymptoty funkcji wymiernej

- Pionowa:  
Wszystkie miejsca, gdzie mianownik funkcji wymiernej  $Q(x) = 0$ .
- Pozioma:  
Niech  $L$  będzie stopniem licznika funkcji wymiernej,  $M$  stopniem mianownika funkcji wymiernej, a  $a_L, a_M$  to kolejno współczynniki przy największej potędze licznika i mianownika. Wtedy:

$L < M$	$L = M$	$L > M$
$y = 0$	$y = \frac{a_L}{a_M}$	Brak asymptoty poziomej

- Ukośna:  
Występuje, gdy stopień licznika jest o jeden większy od mianownika. Aby policzyć wzór jej prostej należy przeprowadzić pisemne dzielenie licznika przez mianownik. Wynikiem jest iloraz dzielenia.

*Przykład:*

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 10x + 4}$$

Stopień licznika jest o 1 większy od mianownika, więc:

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 \hline
 2x^2 - 10x + 4) \quad 2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 \\
 \underline{- 2x^3 + 10x^2 - 4x} \phantom{+ 9} \\
 6x^2 + 2x + 9 \\
 \underline{- 6x^2 + 30x - 12} \\
 32x - 3
 \end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(2x^2 - 10x + 4) + 32x - 3$$

Asymptota ukośna:  $y = x + 3$

Specjalnym przypadkiem funkcji wymiernej jest **funkcja homograficzna**.

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

Dziedzina funkcji homograficznej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem jednego miejsca zerowego opisanego wzorem  $-\frac{d}{c}$ .

Zbiór wartości to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem punktu  $\frac{a}{c}$ , którego zawarcie sprawiłoby, że funkcja homograficzna spełniałaby równanie  $ad - bc = 0$ .

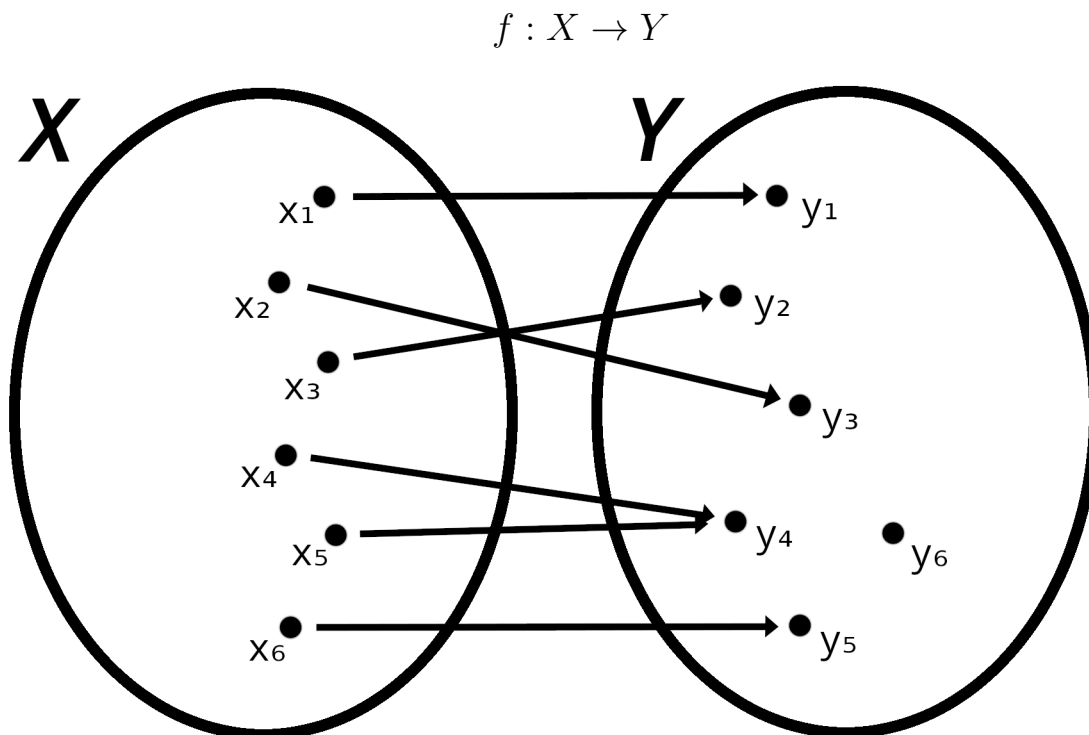
Asymptota pionowa opisana jest równaniem  $x = -\frac{d}{c}$ , a asymptota pozioma  $y = \frac{a}{c}$ .

Środkiem symetrii a zarazem punktem przecięcia asymptot jest punkt o współrzędnych  $S = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ .

Funkcja homograficzna jest monotoniczna w przedziałach  $(-\infty, -\frac{d}{c})$  i  $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ . Jest przedziałami rosnąca, gdy  $ad - bc > 0$  a przedziałami malejąca, gdy  $ad - bc < 0$ .

## 4 Właściwości i wykresy funkcji

**Funkcja** - relacja między elementami zbioru  $X$  i  $Y$  taka, że każdemu elementowi zbioru  $X$  przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru  $Y$ .



*Funkcja  $f$  przedstawiona jako graf. Każdemu argumentowi ze zbioru  $X$  przyporządkowano dokładnie jeden element ze zbioru  $Y$ . Dwóm różnym elementom w zbiorze  $X$  może odpowiadać ten sam element  $Y$ . Nie każdy element zbioru  $Y$  musi być wartością funkcji  $f$ .*

Zbiór  $X$  nazywa się dziedziną lub zbiorem argumentów, a zbiór  $Y$  - przeciwdziedziną lub zbiorem wartości.

Każdy  $x \in X$  to argument funkcji  $f$ , a  $y \in \{n : n \in Y \wedge n = f(x)\}$  - wartością funkcji.

Funkcja  $f$  to przekształcenie (odwzorowanie) zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ .

### Właściwości funkcji

- Różnowartościowa (iniekcja)

Funkcja dla każdego elementu dziedziny przyjmuje różny element z przeciw-

dziedziny co najwyżej raz:

$$f : X \rightarrow Y \text{ - różnowartościowa} \Leftrightarrow \bigwedge_{a,b \in X} a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

- Funkcja "na" (suriekcja)

Funkcja, która przyjmuje wszystkie wartości z przeciwdziedziny:

$$f : X \rightarrow Y \text{ - "na"} \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y$$

- Funkcja wzajemnie jednoznaczna (bijekcja)

Funkcja, w której każdemu elementowi dziedziny odpowiada jeden i tylko jeden element z przeciwdziedziny, przy czym każdy  $y$  należący do zbioru  $Y$  jest obrazem zbioru  $X$ . Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest jednocześnie różnowartościowa i "na".