Matematyka

Tablice rozszerzone

A.D. 2022

Spis treści

1 Symbole i notacja

Litery greckie

Nazwa	Mała litera	Duża litera
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	E
Dzeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Jotta	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Ksi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ipsylon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Zbiory

Symbol	Znaczenie
$\varnothing$	Zbiór pusty
$A \cup B$	Suma zbiorów
$A \cap B$	Część wspólna zbiorów
$A \setminus B$	Różnica zbiorów
$A \times B$	Iloczyn kartezjański
$\overline{A}$, A'	Dopełnienie zbioru
$A \subset B$	Podzbiór zbioru
$A \not\subset B$	Nie jest podzbiorem zbioru
$x \in A$	Należy do zbioru
$x \notin A$	Nie należy do zbioru
$\lvert A \rvert$, $\overline{\overline{A}}$	Liczebność zbioru

Logika

Symbol	Znaczenie
$\wedge$	I (iloczyn logiczny)
$\vee$	Lub (suma logiczna)
$A \Leftrightarrow B$	Równowartość logiczna
$A \Rightarrow B$	Konsekwencja logiczna
$\neg A$	Negacja logiczna
$A \therefore B$	Dlatego
$A \because B$	Ponieważ
$\forall\, x$, $\bigwedge_x$	Dla każdego x
$\exists\, x$, $\bigvee_x$	Istnieje x
$\exists!\, x$, $\dot{\bigvee}_x$	Istnieje dokładnie jeden x

Zbiory liczbowe

Nazwa	Symbol	Nazwa	Symbol
Naturalne	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Wymierne	$\mathbb{Q}, \mathbb{W} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$
Naturalne dod.	$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Niewymierne	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{NW}$
Całkowite	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{C} = \{-1, 0, 1, \dots\}$	Rzeczywiste	$\mathbb{R}$

Operacje arytmetyczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$a + b$	Dodawanie	$a < b$	Mniejsze od
$a - b$	Odejmowanie	$a > b$	Większe od
$a \cdot b$, $a \times b$	Mnożenie	$a \leq b$	Mniejsze bądź równe od
a/b, $\frac{a}{b}$	Dzielenie	$a \geq b$	Większe bądź równe od
x^n	Potęgowanie	$a \approx b$	Aproksymacja
$\sqrt{x}$	Pierwiastek kwadratowy	$x\%$	Procent
$\sqrt[n]{x}$	Pierwiaster n-tego stopnia	$x‰$	Promil
$\log_a x$	Logarytm o podstawie a	$\lvert x \rvert$	Wartość bezwzględna
$\log x$	Logarytm dziesiętny	$\lceil x \rceil$	Sufit
$\ln x$	Logarytm naturalny	$\lfloor x \rfloor$	Podłoga
$a = b$	Znak równości	$\{x\}$	Mantysa (część ułamkowa)
$a \neq b$	Nierówność	$x \bmod a$	Dzielenie całkowite (modulo)

Stochastyka i statystyka

Symbol	Znaczenie
$n!$	Silnia
$\binom{n}{k}$	Kombinacja bez powtórzeń
Ω	Przestrzeń probabilistyczna
$P(A)$	Prawdopodobieństwo
$P(A \mid B)$	Prawdopodobieństwo warunkowe
σ^2	Wariancja
σ	Odchylenie standardowe
$\bar{x}$	Średnia arytmetyczna

Geometria

Symbol	Znaczenie
$\lvert AB \rvert$	Odcinek
$\overrightarrow{AB}$	Wektor
$\angle$, $\measuredangle$, $\sphericalangle$	Kąt
$\triangle ABC$	Trójkąt
$\square ABCD$	Czworokąt
$k \parallel l$	Proste równoległe
$k \perp l$	Proste prostopadłe
$\sim$	Figury podobne
$\equiv$	Figury przystające

2 Prawa działań

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł liczby) - operacja, która zwraca nienegatywną wartość. Zdefiniowana jest następującym równaniem:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Nienegatywność: $|a| \geq 0$,
- Określoność dodatnia: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- Multiplikatywność: $|ab| = |a||b|$,
- Podaddytywność: $|a+b| \leq |a| + |b|$, $\;|a-b| \geq |a| - |b|$,
- Idempotencja: $||a|| = |a|$,
- Parzystość: $|-a| = |a|$,
- Zasada identyczności przedmiotów nierozróżnialnych: $|a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$,
- Zachowanie dzielenia: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow b \neq 0$,

Dodatkowo:

$$|a| = \sqrt{a}^2, \qquad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b, \qquad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$$

Potęgi, pierwiastki i logarytmy

Potęgowanie (podniesienie do n-tej potęgi) - operacja dwuargumentowa, która jest zdefiniowana jako iloczyn $a, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$(podstawa) $n, n \in \mathbb{N}_+$(wykładnik) razy:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Szczególne przypadki:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad 0^n = 0$$

Pierwiastkowanie - operacja odwrotna do potęgowania, która dla a przyjmuje wartość b taką, że pomnożona n razy jest równa b:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a,$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}, \qquad b \in \mathbb{R}, \qquad n = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\}$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ prawdziwe są następujące zależności:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \sqrt{a}^2 = |a|$$

Logarytm - operacja odwrotna do potęgowania, która dla podstawy a oraz argumentu b przyjmuje wartość n taką, że a podniesione do potęgi n jest równe b:

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b$$

$$a = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}, \qquad b \in \mathbb{R}_+, \qquad n \in \mathbb{R}$$

Szczególne przypadki:

$$\log_a 0 - \text{niezdefiniowany}, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

Dla $a, b = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x \neq 1\}; x, y \in \mathbb{R}_+$ prawdziwe są następujące zależności:

- Prawo iloczynu: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Prawo ilorazu: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- Prawo potęgi: $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
- Zamiana podstawy z argumentem: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- Zmiana podstawy logarytmu: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- Logarytm potęgi podstawy: $\log_a(a^x) = x$
- a do potęgi logarytmu a z x: $a^{\log_a x} = x$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $x, y \in \mathbb{R};\ \ n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące zależności:

- Kwadrat sumy: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- Kwadrat różnicy: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- Różnica kwadratów: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- Kwadrat sumy trzech składników: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

- Sześcian sumy: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- Sześcian różnicy: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- Różnica sześcianów: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- Suma sześcianów: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

- Suma n-tych potęg: $a^n+b^n = (a+b)(a^{(n-1)}-a^{(n-2)}b+\ldots-ab^{(n-2)}+b^{(n-1)})$
- Różnica n-tych potęg: $a^n-b^n = (a-b)(a^{(n-1)}+a^{(n-2)}b+\ldots+ab^{(n-2)}+b^{(n-1)})$

Za pomocą **trójkąta Pascala** można wyznaczyć współczynniki arugmentów dla sumy i różnicy podniesionej do potęgi dowolnego $n, n \in \mathbb{N}$:

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

lub skorzystać ze wzoru:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{(n-1)}b + \binom{n}{2}a^{(n-2)}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{(n-1)} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Średnie

- Arytmetyczna: $S_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Geometryczna: $S_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$
- Kwadratowa: $S_k = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$
- Harmoniczna: $S_h = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Nierówność Cauchy'ego między średnimi - średnie wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich układają się w charakterystyczną nierówność:

$$S_k \geq S_a \geq S_g \geq S_h$$

Błędy przybliżenia

Dla r oznaczającego wartość dokładną i p oznaczającego wartość przybliżoną zdefiniowane są błędy przybliżenia:
Błąd bezwzględny przybliżenia - wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a przybliżoną, wyrażona wzorem: $|r-p|$.
Błąd względny przybliżenia - iloraz błędu bezwzględnego i wartości bezwzględnej rzeczywistej wielkości, wyrażona: $\frac{|r-p|}{|r|}$.
Błąd procentowy przybliżenia - wartość procentowa błędu względnego:
$\frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$.

Największy wspólny dzielnik

Funkcja $\mathrm{NWD}(a,b),\ a,b \in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje największą liczbę c ze zbioru jednoczesnych dzielników liczb a i b. Znalezienie liczby $\mathrm{NWD}(a,b)$ sprowadza się do zastosowania **algorytmu Euklidesa**:

1. Dla a, b znajdź większą z nich,
2. Od większej liczby odejmij tę mniejszą,
3. Powtarzaj, aż odejmowanie liczb da zero.

Przykład:

$$\mathbf{NWD}(\mathbf{798}, \mathbf{1008}) = \left\{ \begin{array}{lcl} 1008 - 798 & = & 210 \\ 798 - 210 & = & 588 \\ 588 - 210 & = & 378 \\ 378 - 210 & = & 168 \\ 210 - 168 & = & 42 \\ 168 - 42 & = & 126 \\ 126 - 42 & = & 84 \\ 84 - 42 & = & 42 \\ 42 - 42 & = & \mathbf{0} \end{array} \right\} = \mathbf{42}$$

Najmniejsza wspólna wielokrotność

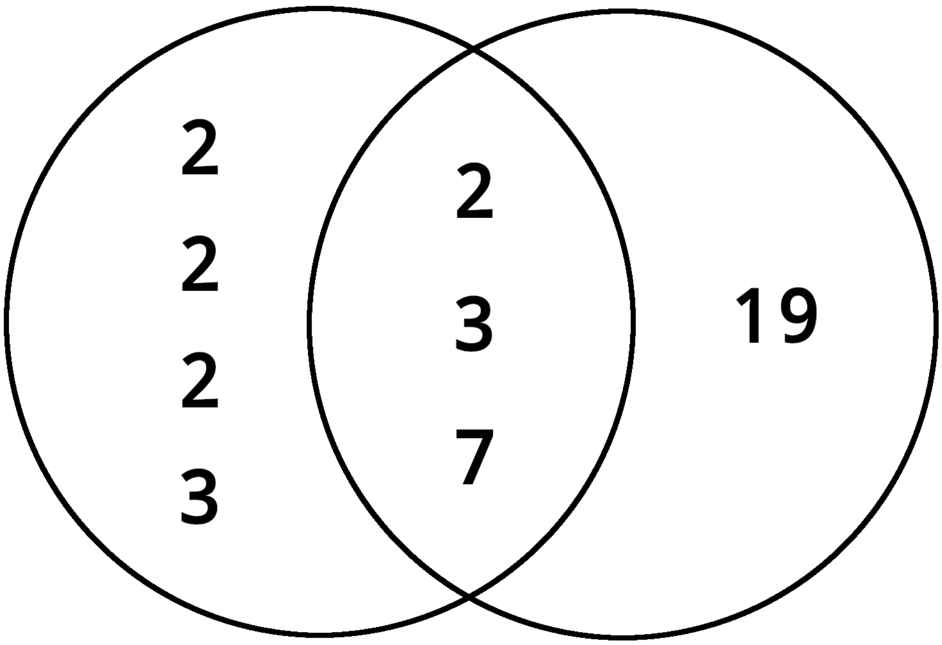
Funkcja $\mathrm{NWW}(a,b), \in \mathbb{N}_+$ dla liczb a i b znajduje najmniejszą liczbę c taką, że a i b są jednocześnie podzielne przez c. Aby znaleźć $\mathrm{NWW}(a,b)$ można posłużyć się następującym wzorem:

$$\mathrm{NWW}(a,b) = \frac{|ab|}{\text{NWD(a, b)}}$$

NWW oraz NWD można też obliczyć znając rozkład liczb na czynniki pierwsze. NWW oblicza się jako iloczyn największych potęg unikalnych czynników. NWW to iloczyn wspólnych dla obu liczb czynników.

Przykład:

$$\mathbf{1008} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad \mathbf{798} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$$



Więc:

$$\mathrm{NNW}(798, 1008) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 19152$$
$$\mathrm{NWD}(798, 1008) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

Oprocentowanie lokat i kredytów

Procent prosty - rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki doliczane do wkładu nie podlegają oprocentowaniu.
Procent składany - rodzaj oprocentowania, który nalicza procent od odsetek doliczonych do wkładu w każdym kolejnym rozpatrywanym okresie.
Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**, a czas między kapitalizacjami **okresem kapitalizacji**.

Niech K_0 będzie początkowym wkładem pieniężnym, K - końcową otrzymaną kwotą, n - liczbą równych okresów kapitalizacji, które miały miejsce w okresie m, m - liczbą okresów oszczędzania, r - stopą oprocentowania, p - podatkiem od dochodów kapitałowych. Wtedy:

Procent prosty: $$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot m}$$

Procent składany: $$K = K_0 \cdot \left[1 + \frac{r}{n}\left(1 - \frac{p}{100}\right)\right]^{n \cdot m}$$

3 Wielomiany, funkcje wielomianowe

Informacje i twierdzenia

Wielomianem stopnia n, $n \in \mathbb{N}_+$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$. Liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ to współczynniki wielomianu. Wielomian stopnia zerowego to każda liczba rzeczywista różna od zera. Wielomian zerowy to liczba równa zeru; nie ma określonego stopnia.

Wielomian W(x) jest podzielny przez wielomian P(x) rózny od wielomianu zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian Q(x), dla którego prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Wówczas Q(x) nazywany jest ilorazem wielomianu W(x) przez P(x), a P(x) jest dzielnikiem wielomianu W(x).

Pierwiastek wielomianu W(x) to liczba rzeczywista a, dla której $W(a) = 0$.

Pierwiastek k-krotny wielomianu W(x), gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ to liczba a taka, że W(x) jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczba k jest nazywana krotnością pierwiastka.

Twierdzenie o dzieleniu (rozkładzie) wielomianu
Jeśli W(x) oraz P(x) są wielomianami i P(x) nie jest wielomianem zerowym, to istnieją dwa wielomiany Q(x) oraz R(x) takie, że prawdziwa jest równość:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie R(x) jest wielomianem zerowym lub wielomianem o stopniu mniejszym od stopnia wielomianu P(x).

Twierdzenie o reszcie wielomianu
Reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian $(x-a)$ jest równa W(a).

Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych
Jeżeli wielomian W(x) ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{C} \wedge q \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q - dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Twierdzenie Bézouta
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny bez reszty przez dwumian $(x - a)$.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu
Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki
Każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego można rozłożyć na czynniki sponia co najwyżej drugiego. Rozkład w taki sposób jest jednoznaczny (z dokładnością co do kolejności czynników i stałej).

Reguła znaków Kartezjusza
Dla dowolnego wielomianu o rzeczywistych współczynnikach, uporządkowanych według malejącej potęgi zmiennej, ilość dodatnich miejsc zerowych wielomianu jest równa liczbie zmian znaków między niezerowymi współczynnikami, albo jest mniejsza o wielokrotność liczby 2.

Schemat Hornera
Sposób obliczania wartości wielomianu dla danej wartości argumentu. Wykorzystywany również do przeprowadzania dzielenia wielomianu przez dwumian w formie $(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$ na podstawie twierdzenia Bézouta.

Przykład:

$$\text{Podziel } \; W(x) = x^4 - 22x^2 - 56x + 77 \; \text{ przez dwumian } \; x - 1$$

1. Zapisz wszystkie współczynniki wielomianu od najwyższej potęgi (także z zerowymi) oraz a z dwumianu. Przepisz pierwszy współczynnik do najniższej linijki:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & \downarrow & & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}$$

2. Pomnóż przeniesiony współczynnik przez a zapisane po lewej stronie:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1\cdot 1 & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

3. Dodaj ze sobą współczynnik z górnego wiersza do właśnie policzonego iloczynu poniżej:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0+1 & & &
\end{array}
$$

4. Powtarzaj operacje mnożenia i dodawania aż do ostatniej kolumny:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & 1\cdot 1 & -21\cdot 1 & -77\cdot 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & -22+1 & -56+(-21) & 77+(-77)
\end{array}
$$

Otrzymujemy tabelkę wypełnioną w następujący sposób:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 0 & -22 & -56 & 77 \\
1 & & 1 & 1 & -21 & -77 \\
\hline
 & 1 & 1 & -21 & -77 & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Więc:

$$
\underbrace{(x^4-22x^2-56x+77)}_{W(x)} = \underbrace{(x-1)}_{P(x)}\underbrace{(1x^3+1x^2-21x-77)}_{\text{Q(x)}} + \underbrace{0}_{\text{R(x)}} \Leftrightarrow W(1)=0
$$

Funkcja liniowa

Wzór ogólny:

$$
f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}
$$

Liczba a nazywana jest współczynnikiem kierunkowym, b wyrazem wolnym. Dziedziną i zbiorem wartości funkcji liniowej są liczby rzeczywiste.

Funkcja liniowa przecina oś OY w punkcie $(0, b)$, a oś OX w $(-\frac{b}{a}, 0)$. Wykres funkcji liniowej jest nachylony do osi OX pod kątem α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Funkcja liniowa jest:

- nieograniczona,
- nieokresowa,
- monotoniczna ($a > 0$ - rosnąca, $a < 0$ - malejąca, $a = 0$ - stała),
- różnowartościowa (gdy $a \neq 0$),
- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = a$.

Funkcja kwadratowa

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q; \;\; p = -\frac{b}{2a}, \;\; q = -\frac{\Delta}{4a}, \;\; \Delta = b^2 - 4ac$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Leftrightarrow \Delta \geq 0; \;\; x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \;\; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Delta, wyróżnik wielomianu stopnia drugiego - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji kwadratowej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem $\Delta_2 = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- $\Delta = 0$ - Jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny: $x_0 = -\frac{b}{2a}$,
- $\Delta < 0$ - Brak pierwiastków rzeczywistych: ($x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ (zespolonych)).

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której ramiona skierowane są do góry gdy $a > 0$ a do dołu, gdy $a < 0$.

Wierzchołek funkcji kwadratowej znajduje się w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Alternatywnie, współrzędną **x** wierzchołka można wyliczyć średnią arytmetyczną miejsc zerowych: $p = \frac{x_1+x_2}{2}$, a współrzędną **y** wartością funkcji w punkcie p: $q = f(p)$.

Wzory Viète'a - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia drugiego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest przedział $\langle q, +\infty)$ dla $a > 0$, $(-\infty, q\rangle$ dla $a < 0$.

Funkcja kwadratowa jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:

$$\text{malejąca w } (-\infty, p\rangle,\ \text{rosnąca w } \langle p, +\infty),\quad a > 0$$

$$\text{rosnąca w } (-\infty, p\rangle,\ \text{malejąca w } \langle p, +\infty),\quad a < 0$$

- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = 2ax + b$,
- ściśle wypukła dla $a > 0$, ściśle wklęsła dla $a < 0$.

Funkcja sześcienna

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Wzór w postaci kanonicznej:

$$f(t) = t^3 + pt + q;\quad t = x + \frac{b}{3a},\quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2},\quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}$$

Wzór w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Wyróżnik wielomianu stopnia trzeciego - Liczba opisująca relację między współczynnikami funkcji sześciennej a jej miejscami zerowymi. Wyznaczona wzorem $\Delta_3 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

- $\Delta_3 > 0$ - Trzy różne pierwiastki rzeczywiste: x_1, x_2, x_3,
- $\Delta_3 = 0$ - Dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z czego jeden dwukrotny lub jeden pierwiastek trzykrotny,
- $\Delta_3 < 0$ - Jeden pierwiastek rzeczywisty, dwa pozostałe w liczbach zespolonych.

Ekstrema funkcji sześciennej (punkty krytyczne) znajdują się w punktach $(p, f(p))$, gdzie p wyznaczone jest wzorem: $p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. Jeżeli $b^2 - 3ac$ jest mniejsze bądź równe 0, wtedy ekstrem nie ma (funkcja $f(x)$ jest monotoniczna w całej dziedzinie).

Środek symetrii funkcji sześciennej (punkt przegięcia) znajduje się w punkcie o współrzędnych $\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$.

Wzory Viète'a - wzory wiążące współczynniki wielomianu (stopnia trzeciego) z jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Dziedziną i zbiorem wartości funkcji sześciennej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja sześcienna jest:

- nieokresowa,
- monotoniczna w przedziałach:
  - rosnąca w $(-\infty, p_1\rangle$ i $\langle p_2, +\infty)$, malejąca w $\langle p_1, p_2\rangle$,
    $a > 0,\ \ b^2 - 3ac > 0$

- malejąca w $(-\infty, p_1\rangle$ i $\langle p_2, +\infty)$, rosnąca w $\langle p_1, p_2\rangle$, $a < 0$, $b^2 - 3ac > 0$
- rosnąca w całej dziedzinie, $a > 0$, $b^2 - 3ac \leq 0$
- malejąca w całej dziedzinie, $a < 0$, $b^2 - 3ac \leq 0$

- ciągła,
- różniczkowalna: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,
- ściśle wypukła w przedziale:

$$\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla a} > 0, \left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla a} < 0$$

- ściśle wklęsła w przedziale:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right) \text{ dla a} > 0, \left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right) \text{ dla a} < 0$$

Funkcja wymierna

Funkcja będąca ilorazem funkcji wielomianowych. Iloraz wielomianów realizujących dane funkcje wielomianowe nazywa się wyrażeniem wymiernym. **Wzór w postaci ogólnej:**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \ \ P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \ Q(x) \not\equiv 0$$

Asymptoty funkcji wymiernej

- Pionowa:
  Wszystkie miejsca, gdzie mianownik funkcji wymiernej $Q(x) = 0$.
- Pozioma:
  Niech L będzie stopniem licznika funkcji wymiernej, M stopniem mianownika funkcji wymiernej, a a_L, a_M to kolejno współczynniki przy największej potędze licznika i mianownika. Wtedy:

$L < M$	$L = M$	$L > M$
$y = 0$	$y = \frac{a_L}{a_M}$	Brak asymptoty poziomej

- Ukośna:
  Występuje, gdy stopień licznika jest o jeden większy od mianownika. Aby policzyć wzór jej prostej należy przeprowadzić pisemne dzielenie licznika przez mianownik. Wynikiem jest iloraz dzielenia.

Przykład:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 10x + 4}$$

Stopień licznika jest o 1 większy od mianownika, więc:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & +3 \\ \hline
2x^2 - 10x + 4 & 2x^3 & -4x^2 & +6x & +9 \\
 & -2x^3 & +10x^2 & -4x & \\ \hline
 & & 6x^2 & +2x & +9 \\
 & & -6x^2 & +30x & -12 \\ \hline
 & & & 32x & -3
\end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 9 = \underline{(x+3)}(2x^2 - 10x + 4) + 32x - 3$$

Asymptota ukośna: $y = x + 3$

Specjalnym przypadkiem funkcji wymiernej jest **funkcja homograficzna**.
Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$$

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem jednego miejsca zerowego opisanego wzorem $-\frac{d}{c}$.

Zbiór wartości to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem punktu $\frac{a}{c}$, którego zawarcie sprawiłoby, że funkcja homograficzna spełniałaby równanie $ad - bc = 0$.

Asymptota pionowa opisana jest równaniem $x = -\frac{d}{c}$, a asymptota pozioma $y = \frac{a}{c}$.

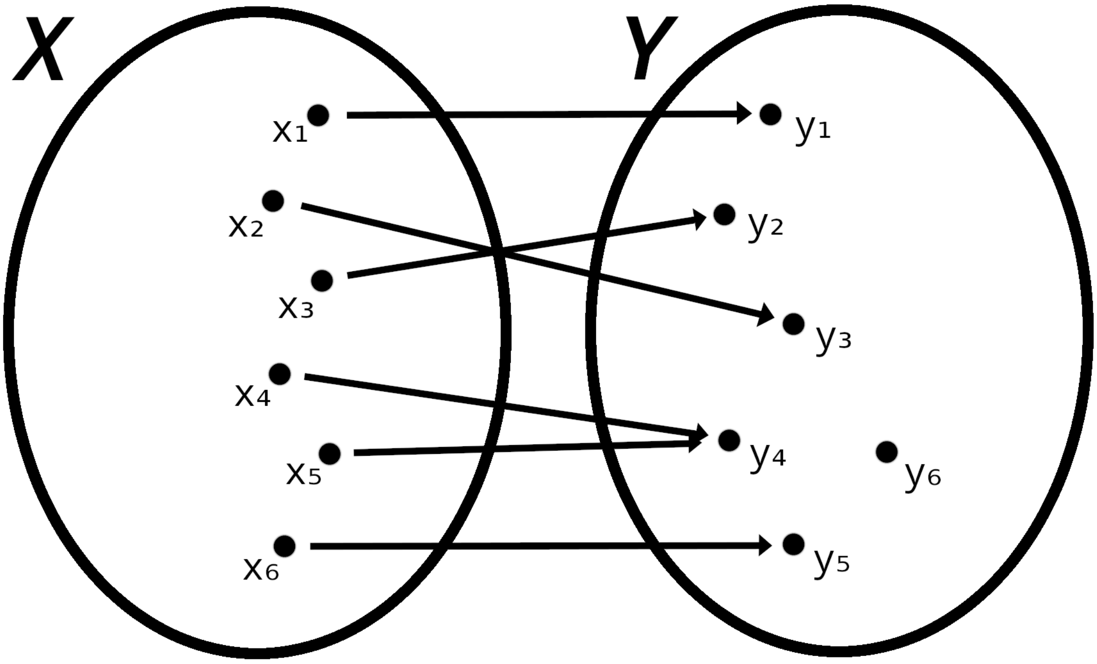
Środkiem symetrii a zarazem punktem przecięcia asymptot jest punkt o współrzędnych $S = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Funkcja homograficzna jest monotoniczna w przedziałach $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ i $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$. Jest przedziałami rosnąca, gdy $ad - bc > 0$ a przedziałami malejąca, gdy $ad - bc < 0$.

4 Właściwości i wykresy funkcji

Funkcja - relacja między elementami zbioru X i Y taka, że każdemu elementowi zbioru X przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru Y.

$$f : X \to Y$$



Funkcja f przedstawiona jako graf. Każdemu argumentowi ze zbioru X przyporządkowano dokładnie jeden element ze zbioru Y. Dwóm różnym elementom w zbiorze X może odpowiadać ten sam element Y. Nie każdy element zbioru Y musi być wartością funkcji f.

Zbiór X nazywa się dziedziną lub zbiorem argumentów, a zbiór Y - przeciwdziedziną lub zbiorem wartości.
Każdy $x \in X$ to argument funkcji f, a $y \in \{n : n \in Y \wedge n = f(x)\}$ - wartością funkcji.
Funkcja f to przekształcenie (odwzorowanie) zbioru X w zbiór Y.

Twierdzenie Darboux - Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, a na jej dziedzinie niech będzie zdefiniowany przedział domknięty $\langle a, b\rangle$. Wtedy, jeżeli $f(a) > f(c) > f(b)$ lub $f(a) < f(c) < f(b)$ to punkt $c \in \langle a, b\rangle$. Szczególnym przypadkiem jest, gdy a i b mają różne znaki. Wtedy w przedziale domkniętym między nimi gwarantowane jest istnienie c takiego, że $f(c) = 0$.

Właściwości funkcji

- Różnowartościowa (iniekcja)
  Funkcja dla każdego elementu dziedziny przyjmuje różny element z przeciwdziedziny co najwyżej raz:

$$f : X \to Y \text{ - różnowartościowa } \Leftrightarrow \bigwedge_{a,b \in X} a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

- Funkcja "na" (suriekcja)
  Funkcja, która przyjmuje wszystkie wartości z przeciwdziedziny:

$$f : X \to Y \text{ - "na" } \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y$$

- Funkcja wzajemnie jednoznaczna (bijekcja)
  Funkcja, w którek każdemu elementowi dziedziny odpowiada jeden i tylko jeden element z przeciwdziedziny, przy czym każdy y należący do zbioru Y jest obrazem zbioru X. Funkcja wzajemnie jednoznaczna jest jednocześnie różnowartościowa i "na".

- Addytywna
  Funkcja zachowuje operację dodawania: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- Multiplikatywna
  Funkcja zachowuje operację mnożenia: $f(xy) = f(x)f(y)$

- Parzysta
  Wykres funkcji jest symetryczny względem osi rzędnych (OY): $f(x) = f(-x)$

- Nieparzysta
  Wykres funkcji jest symetryczny wzgręgem środka układu współrzędnych: $f(x) = -f(x)$

- Ciągła
  Arbitralnie mała zmiana wartości funkcji jest uzasadniona arbitralnie małą zmianą argumentu funkcji. Pozbawiona jest też punktów nieciągłości pierwszego rodzaju usuwalnych, pierwszego rodzaju i drugiego rodzaju.

- Monotoniczna
  Funkcja, która zachowuje pewien określony porządek zbiorów. Niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją na uporządkowanych zbiorach X, Y, a x_1, x_2 elementami dziedziny funkcji f. Wówczas funkcja f jest:

– rosnąca (silnie rosnąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
– malejąca (silnie malejąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
– nierosnąca (słabo rosnąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
– niemalejąca (słabo malejąca), gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
– stała, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

- Różniczkowalna
  Funkcja ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, oraz wartość tej pochodnej jest skończona.

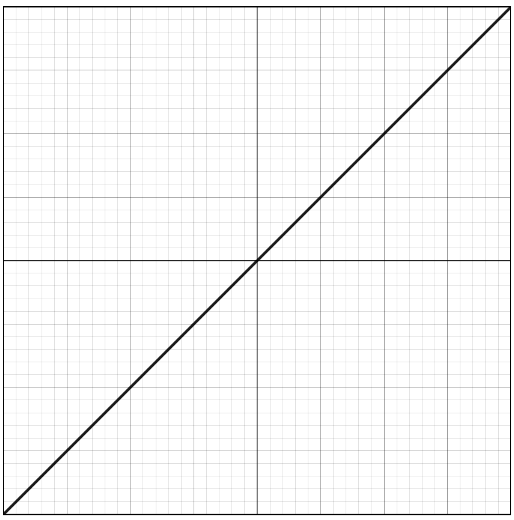
- Okresowa
  Funkcja jest okresowa, gdy pewne wartości pojawiają się cyklicznie co pewien regularny odstęp. Niech C, $C \neq 0$ będzie pewną stałą wartością (okresem funkcji). Wtedy dla funkcji okresowej prawdziwa jest równość:

$$f(x + C) = f(x)$$

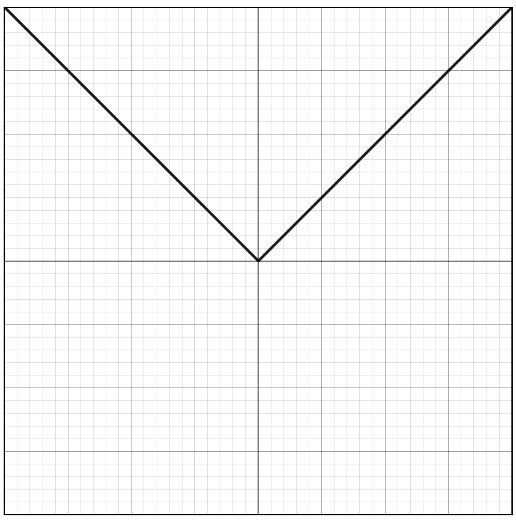
- Wypukła
  Wykres funkcji f w przedziale (a, b) leży ponad prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$

- Wklęsła
  Wykres funkcji f w przedziale (a, b) leży pod prostą wyznaczoną przez pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$

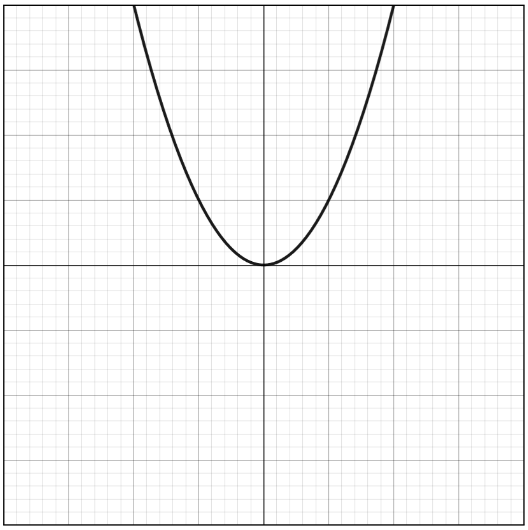
Wykresy funkcji



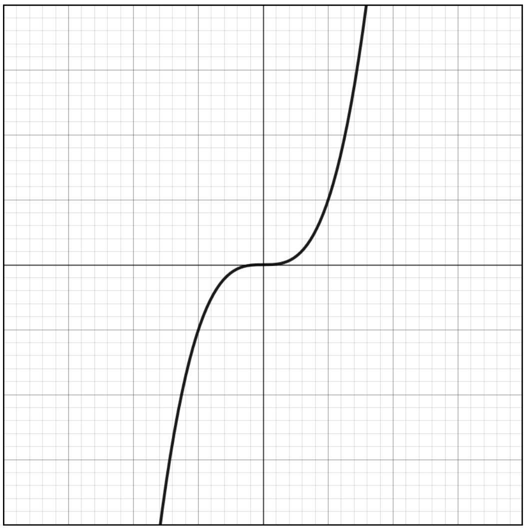
$f(x) = x$



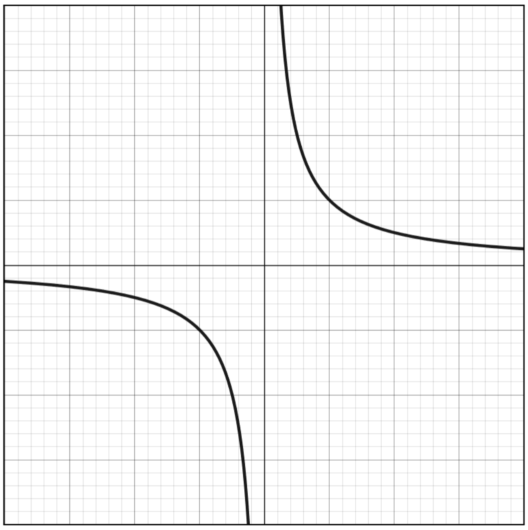
$f(x) = |x|$



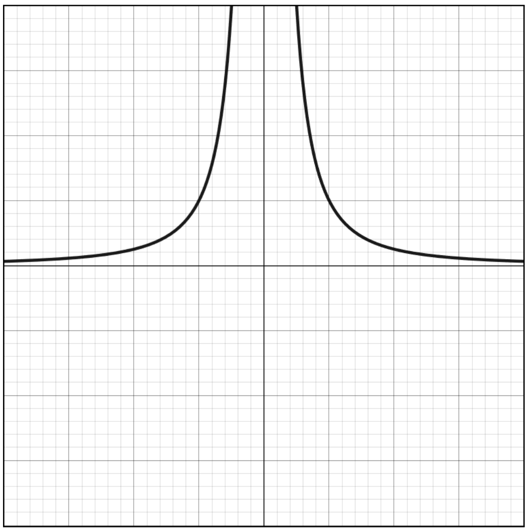
$f(x) = x^2$ - **parabola**



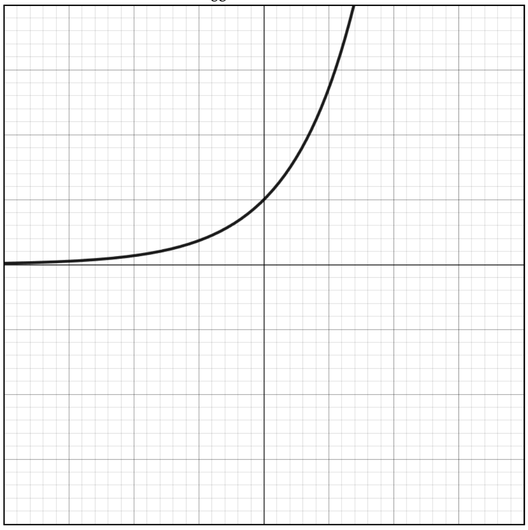
$f(x) = x^3$



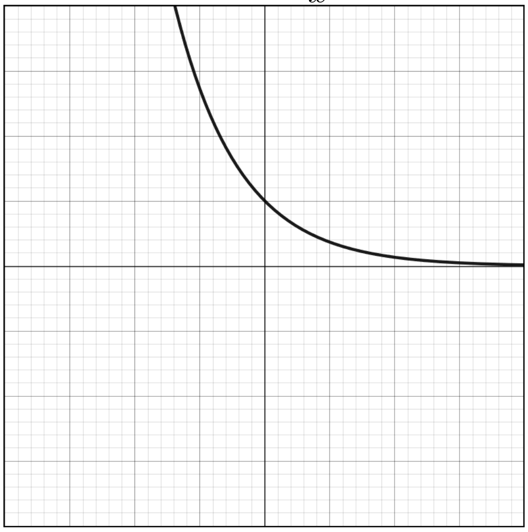
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ - **hiperbola**



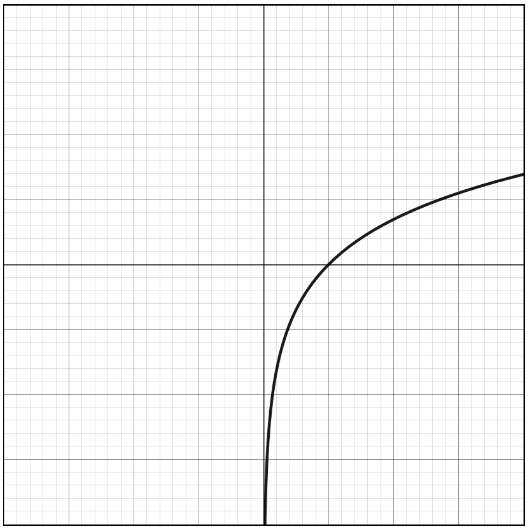
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

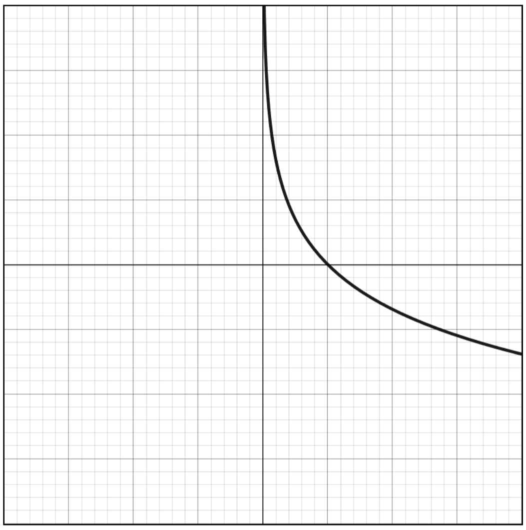


$f(x) = a^x,\ a > 1$



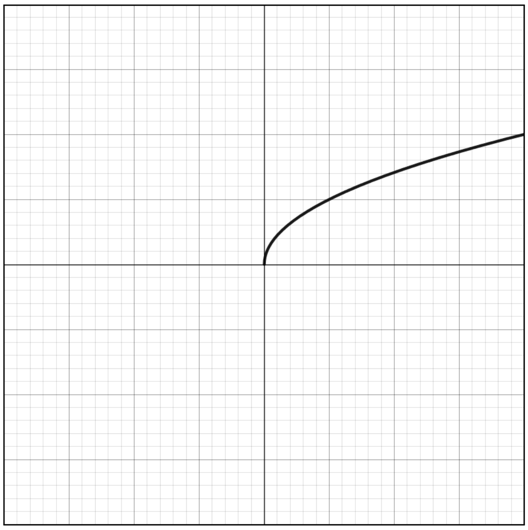
$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$

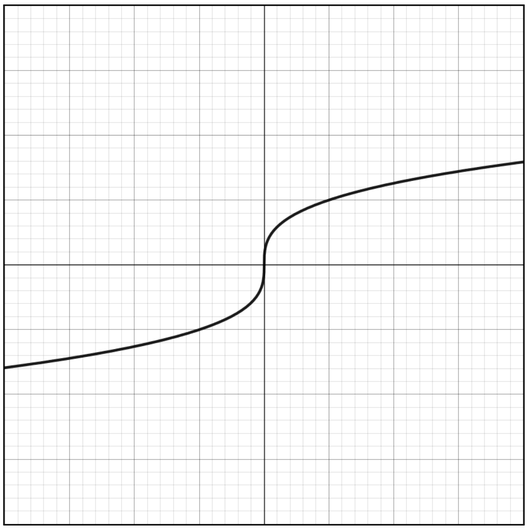




$f(x) = \log_a x,\ a > 1$

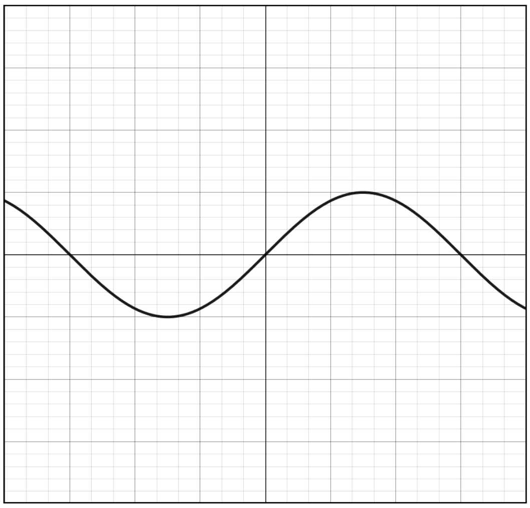
$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$

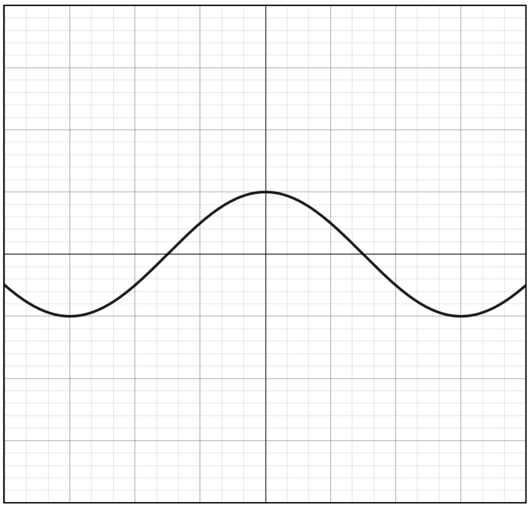




$f(x) = \sqrt{x}$

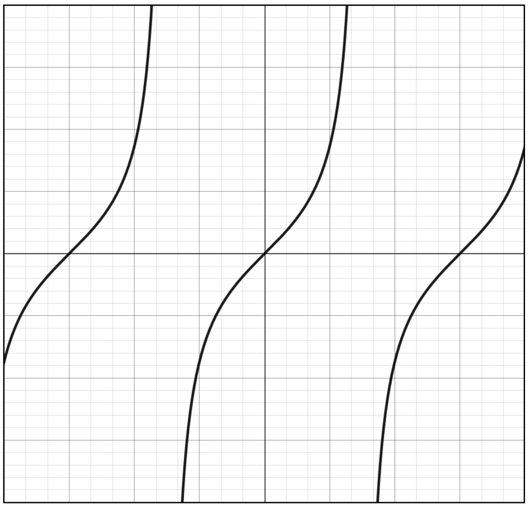
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



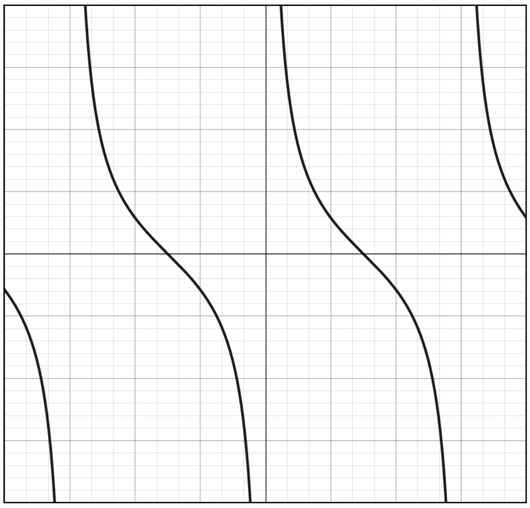


$f(x) = \sin x$

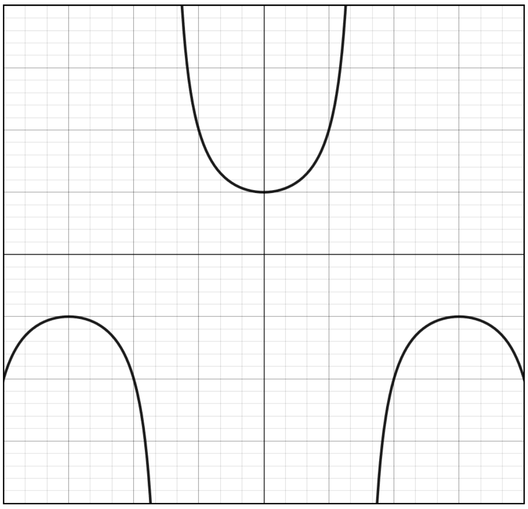
$f(x) = \cos x$



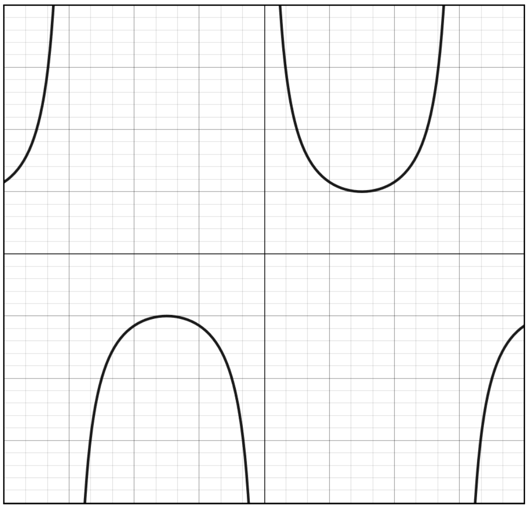
$f(x) = \operatorname{tg} x$



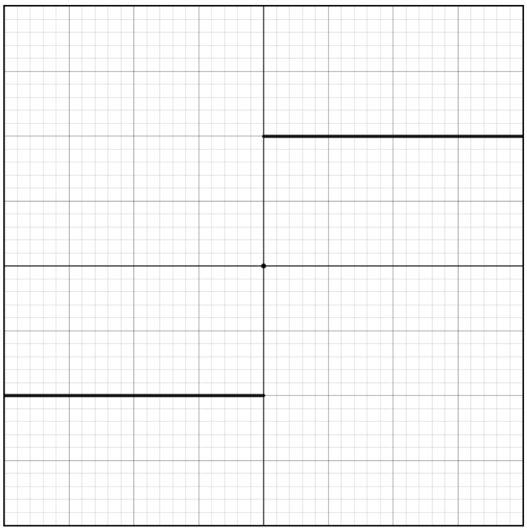
$f(x) = \operatorname{ctg} x$



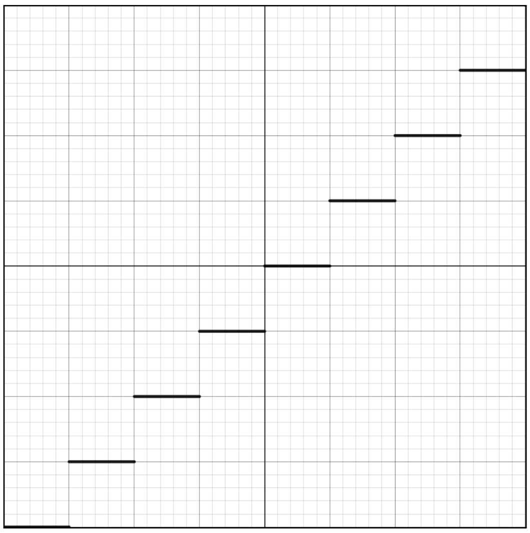
$f(x) = \sec x$



$f(x) = \operatorname{cosec} x$



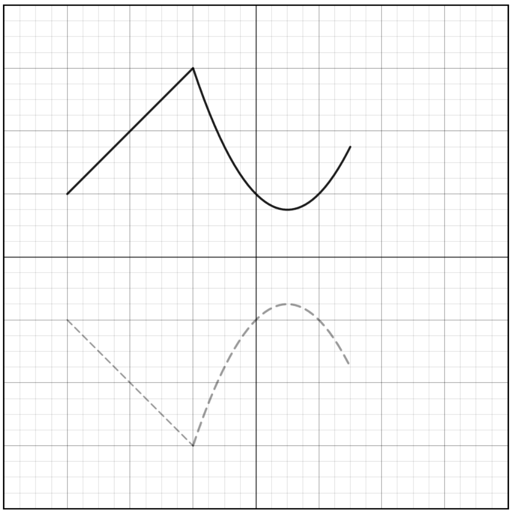
$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$



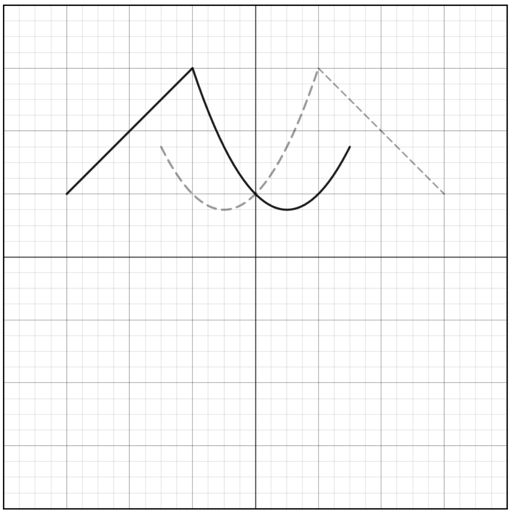
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

Przekształcenia funkcji

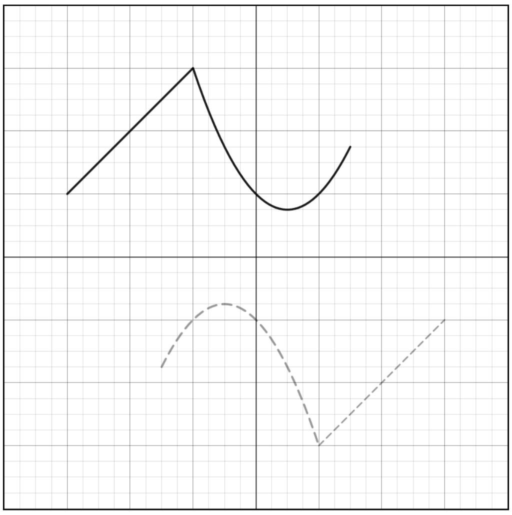
Symetria osiowa względem osi OX:
$y = -f(x)$



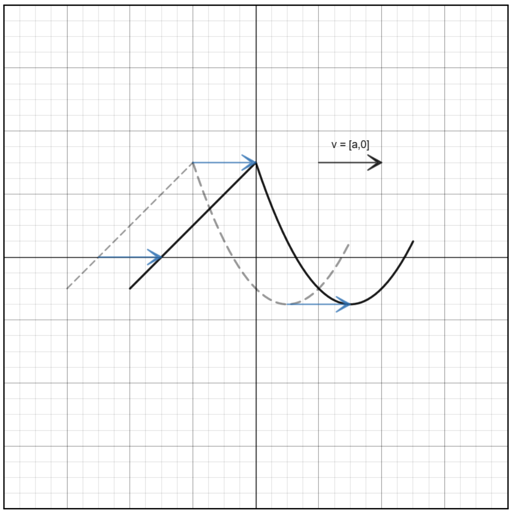
Symetria osiowa względem osi OY:
$y = f(-x)$



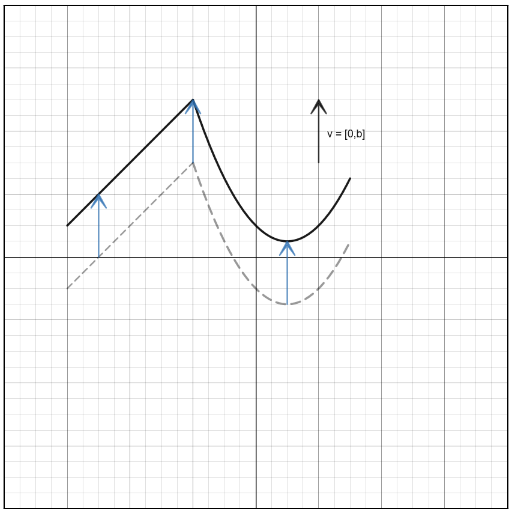
Symetria osiowa względem
środka układu współrzędnych:
$y = -f(-x)$



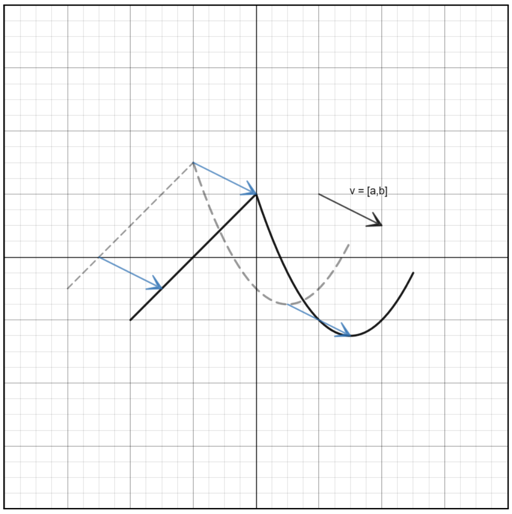
Przesunięcie równoległe poziome:
$y = f(x - a), \quad \vec{v} = [a, 0]$

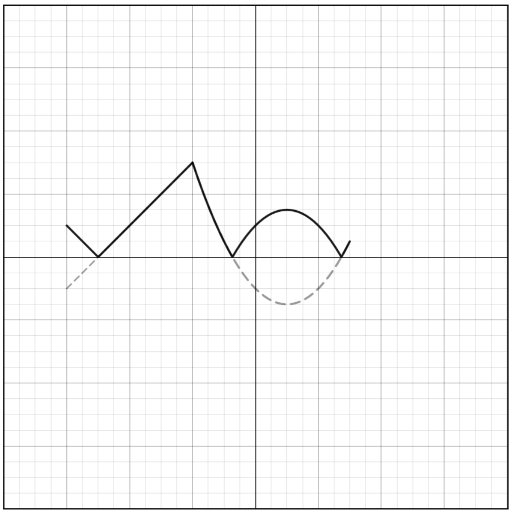


Przesunięcie równoległe pionowe:
$y = f(x) + b, \quad \vec{v} = [0, b]$

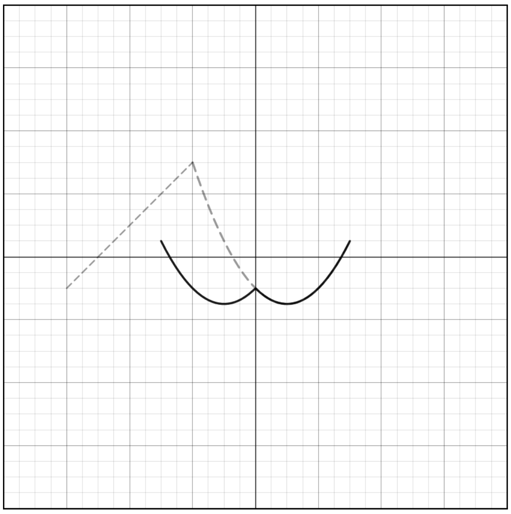


Przesunięcie równoległe ukośne:
$y = f(x - a) + b, \quad \vec{v} = [a, b]$

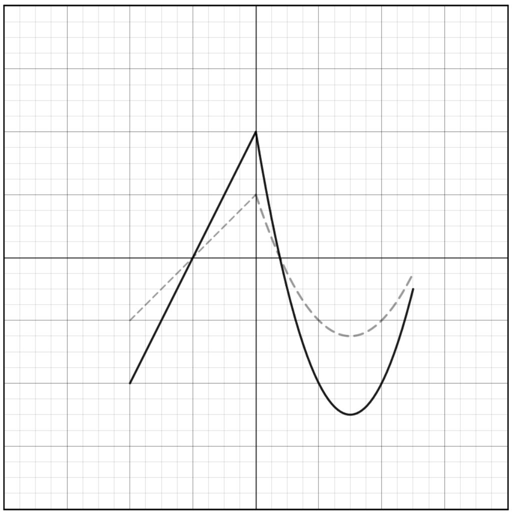




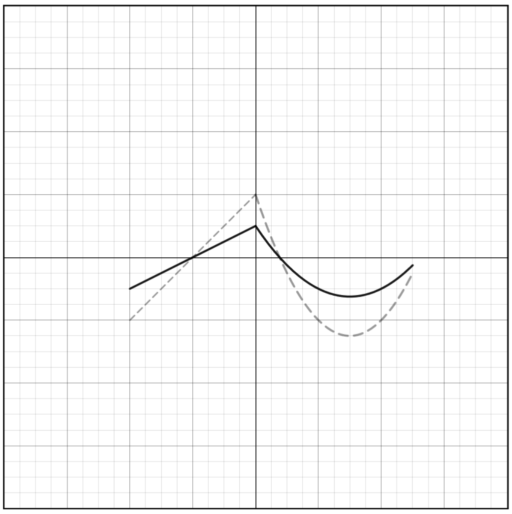
$y = |f(x)|$



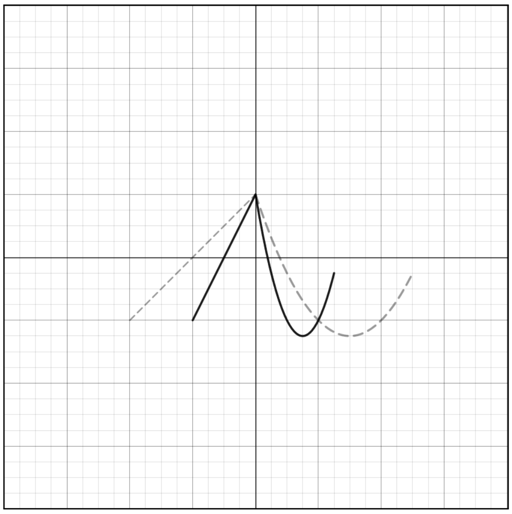
$y = f(|x|)$



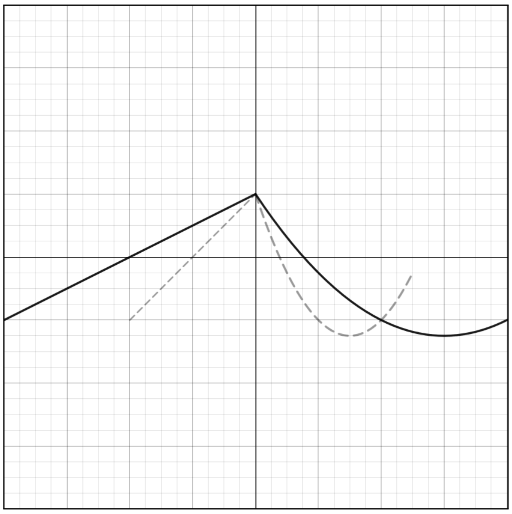
Powinowactwo prostokątne o osi OX: $y = af(x), \quad a > 1$



Powinowactwo prostokątne o osi OX: $y = af(x), \quad 0 < a < 1$



Powinowactwo prostokątne o osi OY: $y = f(ax), \quad a > 1$



Powinowactwo prostokątne o osi OY: $y = f(ax), \quad 0 < a < 1$

5 Ciągi

Informacje i twierdzenia

Ciąg - Przyporządkowanie zbiorowi liczb $A = \langle 1, n \rangle,\ A \subset \mathbb{N}_+$ zwanemu zbiorowi indeksów kolejnych elementów, zwanymi **wyrazami ciągu**.

Ciąg skończony to ciąg, w którym występuje skończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest podzbiorem właściwym liczb naturalnych dodatnich.
Ciąg nieskończony to ciąg, w którym występuje nieskończenie wiele elementów, tj. zbiór indeksów jest zbiorem liczb naturalnych dodatnich.

Monotoniczność ciągu

- Stały - wyrazy ciągu są sobie równe dla dowolnej pary indeksów:
  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ a_n = a_{n+1}$
- Rosnący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu o mniejszym indeksie:
  $\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ a_n < a_{n+1}$
- Niemalejący - każdy kolejny wyraz jest większy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ a_n \leq a_{n+1}$
- Nierosnący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu bądź równy wyrazowi o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ a_n \geq a_{n+1}$
- Malejący - każdy kolejny wyraz jest mniejszy od wyrazu o mniejszym indeksie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ a_n > a_{n+1}$

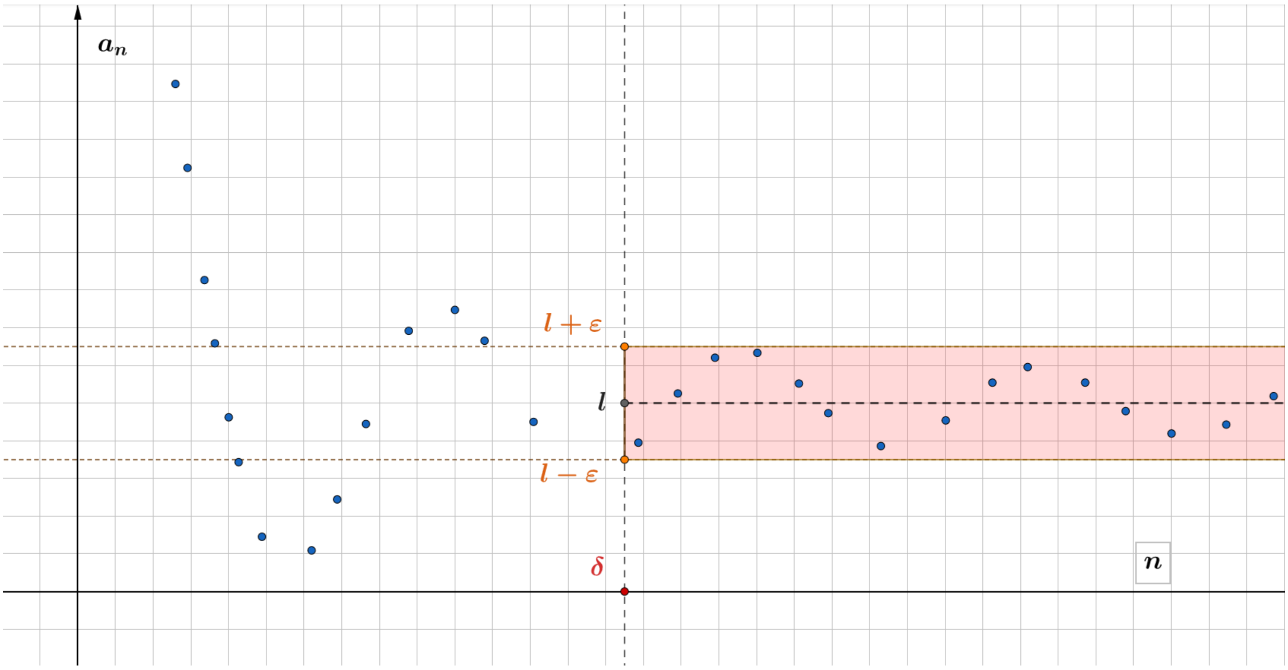
Monotoniczność ciągu można określić, badając znak różnicy kolejnych wyrazów ciągu: $a_{n+1} - a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &> 0 \quad - \quad \text{rosnący} \\ a_{n+1} - a_n &\geq 0 \quad - \quad \text{niemalejący} \\ a_{n+1} - a_n &\leq 0 \quad - \quad \text{nierosnący} \\ a_{n+1} - a_n &< 0 \quad - \quad \text{malejący} \end{aligned}$$

Granica ciągu liczbowego

Liczba l jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ zachodzi nierówność $|a_n - l| < \varepsilon$, tj. odległość od granicy l do wartości a_n jest mniejsza od ε. Definicja ta jest znana jako definicja epsilon - delta granicy ciągu.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} |a_n - l| < \varepsilon$$



Ciąg zbieżny to ciąg nieskończony, którego granicą jest liczba rzeczywista. Taki ciąg ma tylko jedną granicę.
Ciąg jest rozbieżny, gdy granicą jest dodatnia bądź ujemna nieskończoność.

Twierdzenia o działaniach na granicach ciągów zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to zachodzą następujące równości:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Ciąg arytmetyczny

Niech ciąg (a_n) będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem arytmetycznym nazywamy takie (a_n), gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez dodanie stałej r, nazywanej **różnicą ciągu arytmetycznego**.

Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Postać jawna

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na różnicę ciągu

$$r = a_n - a_{n+1}$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Warunek wystarczający ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg geometryczny

Niech ciąg (a_n) będzie przynajmniej trzywyrazowy. Wtedy ciągiem geometrycznym nazywamy takie (a_n), gdzie każdy kolejny wyraz oprócz pierwszego jest tworzony poprzez pomnożenie przez stałą q, nazywaną **ilorazem ciągu arytmetycznego**.

Postać rekurencyjna

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Postać jawna

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na iloraz ciągu

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1 \qquad a_1 \cdot n,\ q = 1$$

Warunek wystarczający ciągu geometrycznego

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Dla $|q| < 1$ ciąg geometryczny staje się zbieżny i można go rozważać jako **szereg geometryczny**. Sumę wszystkich wyrazów szeregu geometrycznego można wyliczyć ze wzoru:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

6 Elementy analizy matematycznej

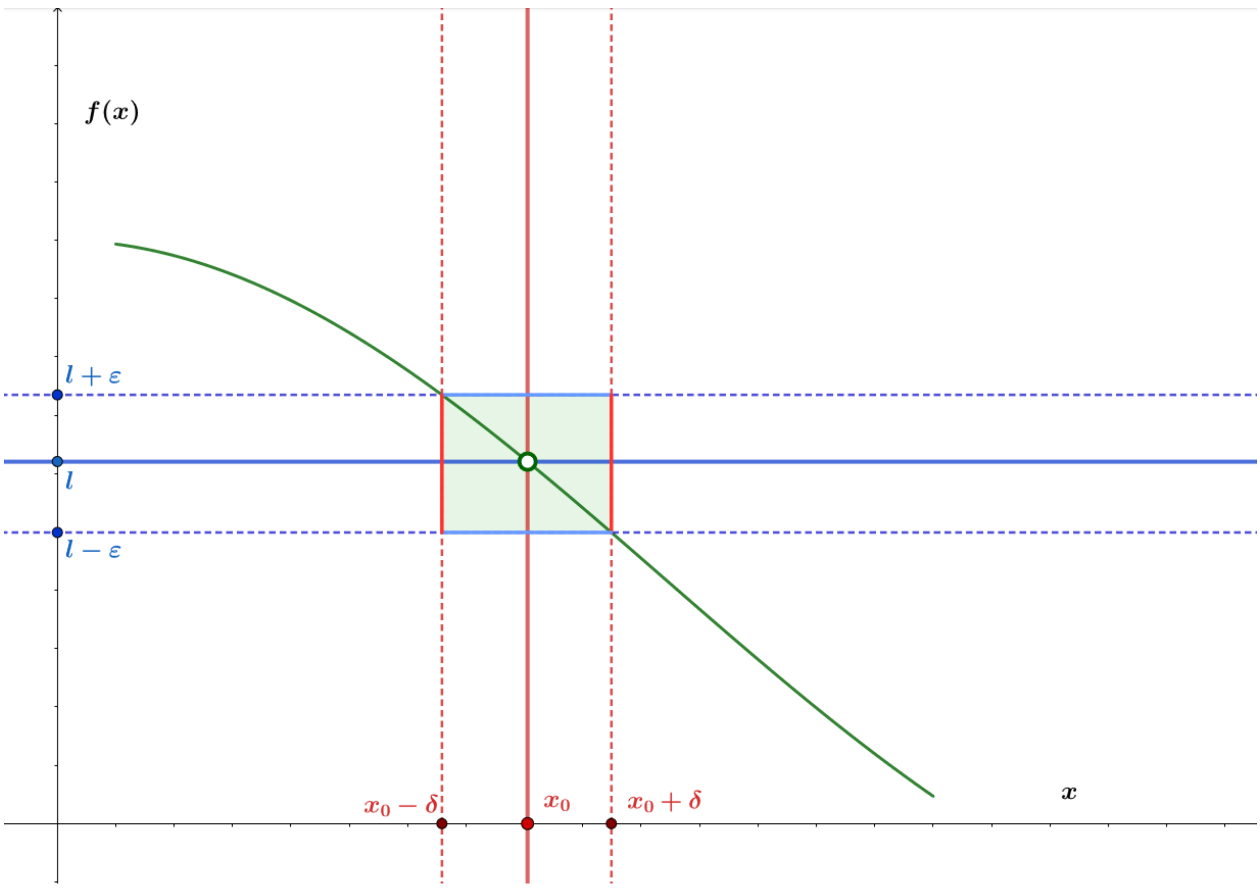
Granica funkcji

Granica - wartość, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie dla argumentów z dziedziny funkcji arbitralnie bliskich punktowi. Operację tą notuje się symbolem $\lim\limits_{x \to n}$ nazywanym *limesem*, czytanym "Limes przy x dążącym do n".

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji - Liczba l jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego elementu dziedziny funkcji $f(x)$, $f : X \to \mathbb{R}$, takiego że $x \in X \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ prawdziwa jest zależność: $|f(x) \subseteq \mathbb{R} - l| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\}$$



Definicja Heinego - Funkcja f ma granicę l w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do x_0, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X który to podzbiór ma w punkcie skupienia x_0 (podzbiór ten nazywa się sąsiedztwem $S(x_0)$), wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ jest zbieżna do l.

Granica jednostronna

Granica jednostronna to wspólna nazwa na granicę *lewostronną* i *prawostronną*.

Granica lewostronna - wartość w punkcie x_0, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny mniejsze od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x - \delta < x < x_0\}$$

Definicja Heinego
Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo $S(x_0)$, gdzie $\forall x \in S(x_0)\ x < x_0$.

Granica prawostronna - wartość w punkcie x_0, do której wartości funkcji zbliżają się nieograniczenie, ale uwzględniając tylko argumenty z dziedziny większe od rozważanego punktu. By ten fakt odzwierciedlić, definicje granicy są zmodyfikowane w następujący sposób:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} |f(x) - l| < \varepsilon, \quad A = \{x : x \in X \wedge x_0 < x < x + \delta\}$$

Definicja Heinego
Rozpatrywane jest tylko sąsiedztwo $S(x_0)$, gdzie $\forall x \in S(x_0)\ x > x_0$.

Jeżeli granica lewostronna oraz prawostronna w punkcie x_0 są sobie równe, jest to warunek wystarczający dla istnienia granicy w tym punkcie:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Jeżeli granica lewostronna i prawostronna w punkcie są różne, wtedy granica w tym punkcie nie istnieje.

Granica niewłaściwa

Granica niewłaściwa to granica, której wartość w punkcie x_0 jest równa minus $(-\infty)$ lub plus $(+\infty)$ nieskończoności. Granica w punkcie jest niewłaściwa, gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} f(x) > M, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in A} f(x) < -M, \quad A = \{x : x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Definicja Heinego
Funkcja f ma granicę $\pm\infty$ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do x_0, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X który to podzbiór ma w punkcie skupienia x_0, wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ jest zbieżna do $\pm\infty$.

Granica w nieskończoności

Granica w nieskończoności przyjmuje wartość l gdy spełnione są następujące warunki równoważnych definicji:

Definicja Cauchy'ego

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\mu \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x>\mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\mu\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x<\mu} |f(x) - l| < \varepsilon,$$

Definicja Heinego
Funkcja f ma granicę l w $\pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n), n \in \mathbb{N}$ zbieżnego do $\pm\infty$, zdefiniowanego na podzbiorze dziedziny X, odpowiednio $(a, +\infty)$ i $(-\infty, a)$, wartość funkcji od ciągu (x_n), czyli $f(x_n)$ dąży do l.

Granica niewłaściwa w nieskończoności występuje tylko wtedy, gdy granica spełnia warunki granicy niewłaściwej i granicy w nieskończoności.

Własności granic

Niech funkcje $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to Y$ mają granice właściwe. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} [c \cdot f(x)] &= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \\
\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \\
\lim_{x\to x_0} [f(x)^{g(x)}] &= \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}
\end{aligned}$$

Symbole nieoznaczone

Wyrażenia algebraiczne które nie mają sensu liczbowego, często występujące przy poszukiwaniu limitów. Jest ich siedem:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 0 \cdot \pm\infty \quad \infty - \infty \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

Takie wyniki nie są końcowymi rozwiązaniami i funkcję należy przekształcić, by otrzymać właściwy wynik.

Reguła de L'Hôpitala (czyt. delopitala) - Reguła umożliwiająca wyznaczenie granic wyrażeń, których wynikiem jest symbol nieoznaczony.
Jeżeli funkcje $f, g : X \to Y$ są ciągłe oraz:

- **Granice funkcji są nieoznaczone**: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ lub $\pm\infty$,
- **Funkcje** $f(x)$ **i** $g(x)$ **są różniczkowalne**,
- **Pochodna** $g'(x)$ **jest różna od 0**,
- **Istnieje granica ilorazu funkcji** $f(x)$ **i** $g(x)$,

Wtedy:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 9x - 5} = \frac{25 - 25}{2 \cdot 25 - 9 \cdot 5 - 5} = \frac{0}{0}$$

Stosując regułę de L'Hôpitala:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 9x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x^2 - 25)'}{(2x^2 - 9x - 5)'} = \lim_{x \to 5} \frac{2x}{4x - 9} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 5 - 9} = \frac{10}{11}$$

Reguła de L'Hôpitala działa również dla granic nieoznaczonych w nieskończoności.

Definicja ciągłości funkcji

Niech funkcja f będzie zdefiniowana w pewnym otoczeniu. Jeżeli istnieje granica właściwa w punkcie $f(x)$ oraz prawdziwa jest równość: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, to funkcja w tym punkcie jest ciągła. Funkcja jest ciągła w przedziale, jeżeli każdy punkt w przedziale spełnia powyższe warunki. By całą funkcję można było nazwać ciągłą, warunki te muszą zachodzić na całej dziedzinie funkcji
Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe.

Limity a asymptoty wykresu

- Asymptota pionowa jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w prawostronnym (lewostronnym) sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą pionową

prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty\right)$.

- Asymptota pionowa obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $x = x_0$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą pionową obustronną.

- Asymptota pozioma jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(m, +\infty)$ (odpowiednio $(-\infty, m)$), $m \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = a$ jest asymptotą poziomą prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a\right)$.

- Asymptota pozioma obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $y = a$ jest jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą poziomą obustronną.

- Asymptota ukośna jednostronna
  Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(m, +\infty)$ (odpowiednio $(-\infty, m)$), $m \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0; \quad a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$$

  Jeżeli $a = 0$, prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f.

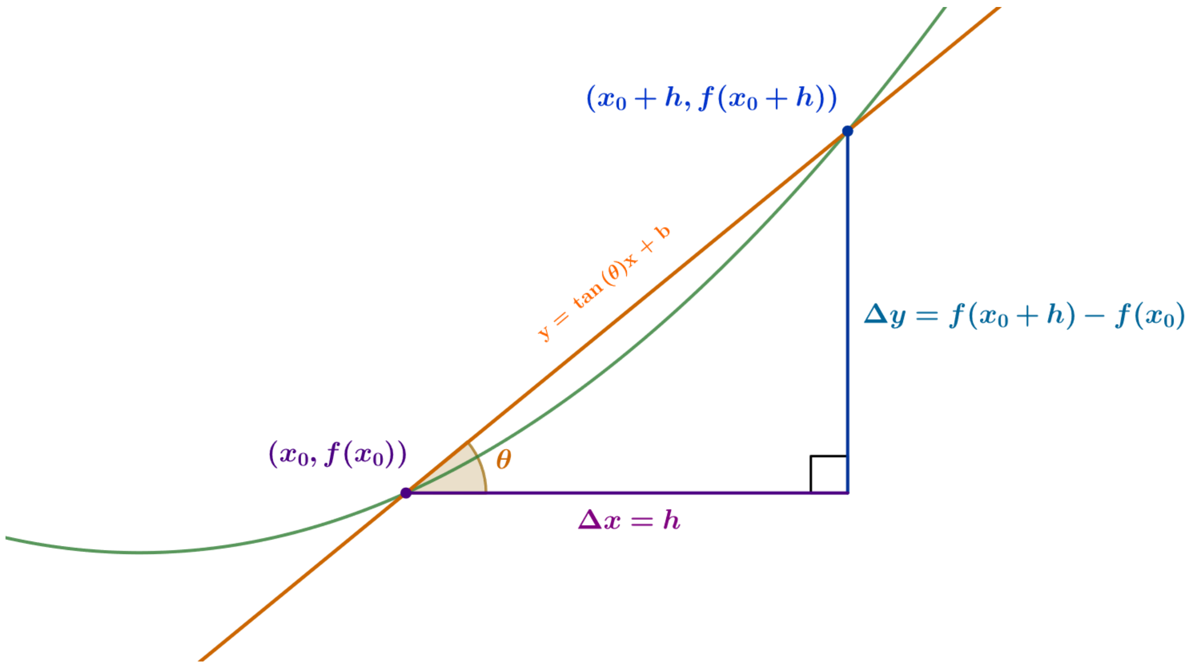
- Asymptota ukośna obustronna
  Jeżeli prosta o równaniu $y = ax + b$ jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to wtedy nazywa się ją asymptotą ukośną obustronną.

Pochodna funkcji w punkcie

Pochodna - miara czułości zmiany wartości funkcji względem zmiany wartości argumentu. Dla funkcji z jednym argumentem wartość pochodnej funkcji w punkcie wyznacza nachylenie prostej stycznej do wykresu w badanym punkcie. Proces znajdowania pochodnej nazywa się **różniczkowaniem**.

Niech $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y$, punkt x_0 należy do dziedziny X i h oznacza zmianę wartości zmiennej x. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Pochodną funkcji oznacza się: $f'(x)$ (notacja Lagrange'a) lub $\frac{d}{dx}f$ (notacja Liebnitza).

Jeżeli we wzorze na pochodną zamiast granicy obustronnej badana będzie kolejno granica prawostronna i lewostronna, to otrzymaną pochodną nazywa się odpowiednio pochodną prawostronną i pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0. Pochodne te notuje się symbolicznie odpowiednio: $f'_+(x)$, $f'_-(x)$.

Styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Wtedy prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest prosta o równaniu:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi OX:

$$f'(x) = \text{tg}(\alpha)$$

Normalna to prosta prostopadła do stycznej wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Opisuje ją równanie:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Funkcja pochodna

Niech f będzie dowolną funkcją taką, że $f : X \to Y$. Funkcją pochodną funkcji f nazywa się funkcję, która każdej liczbie x_0 należącej do dziedziny X przyporządkowuje $f'(x_0)$, jeśli pochodna w tym punkcie istnieje. Zbiór liczb z dziedziny funkcji f, dla których ta funkcja była różniczkowalna jest dziedziną funkcji pochodnej.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a	0	e^x	$(x)'e^x$
x	1	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
ax^n	$an \cdot x^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\text{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$
a^x	$(x)' \cdot a^x \ln a$	$\text{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{ctg}^2 x)$

Własności pochodnych

Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w pewnym zbiorze D, będącym podzbiorem dziedzin funkcji f i g, a α i β - dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy dla dowolnej liczby $x \in D$:

$$
\begin{aligned}
[\alpha f(x) + \beta g(x)]' &= \alpha f'(x) + \beta g'(x) \\
[\alpha f(x) - \beta g(x)]' &= \alpha f'(x) - \beta g'(x) \\
[\alpha \cdot f(x) \cdot g(x)]' &= \alpha(f'(x)g(x) + \cdot f(x)g'(x)) \\
[\alpha \cdot f(x)]' &= \alpha \cdot f'(x) \\
\left[\frac{\alpha}{f(x)}\right]' &= -\frac{\alpha \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} \\
\left[\frac{\alpha \cdot f(x)}{\beta \cdot g(x)}\right]' &= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\right) \\
[f(x)^{g(x)}]' &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right)
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa - reguła pozwalająca obliczać pochodne funkcji złożonych. Niech funkcje f i g będą funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 oraz funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x)$, to wtedy funkcja złożona ma w punkcie x_0 pochodną:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Przykład:

Wyznacz funkcję pochodną funkcji: $\sqrt{x^2 - 3}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 - 3$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Korzystając z reguły łańcuchowej:

$$(\sqrt{x^2 - 3})' = \left(\sqrt{g(x)}\right)' \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot (x^2 - 3)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot 2x \quad = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Pochodna a monotoniczność funkcji

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby rzeczywistej z tego przedziału:

- $f'(x) > 0$, to funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) \geq 0$, to funkcja jest niemalejąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) = 0$, to funkcja jest stała w przedziale (a, b);
- $f'(x) \leq 0$, to funkcja jest nierosnąca w przedziale (a, b);
- $f'(x) < 0$, to funkcja jest malejąca w przedziale (a, b).

Prawdziwe są twierdzenia odwrotne do powyższych.

Ekstrema funkcji

Ekstremum funkcji - maksymalna (maksimum) lub minimalna (minimum) wartość funkcji.
Wśród ekstrem rozróżnia się odpowiednie kategorie:

- Maksimum (minimum) lokalne
  Punkt x_0 jest ekstremum lokalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x należącego jednocześnie do dziedziny funkcji f oraz otoczenia punktu $x_0, U(x_0)$ prawdziwa jest nierówność:

  $$f(x) \leq f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0))$$

  Znaczy to, że w pewnej okolicy punktu x_0 nie występują wartości funkcji większe (mniejsze) od wartości w punkcie x_0, choć mogą być tej wartości równe.

- Maksimum (minimum) lokalne właściwe
  Punkt x_0 jest ekstremum lokalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x należącego jednocześnie do dziedziny funkcji f oraz otoczenia punktu $x_0, U(x_0)$ prawdziwa jest zależność:

  $$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \ \ (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

  Żadna wartość funkcji w otoczeniu punktu nie może być większa (mniejsza) ani równa wartości funkcji w punkcie x_0.

- Maksimum (minimum) globalne
  Punkt x_0 jest ekstremum globalnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x w całej dziedzine funkcji f prawdziwa jest nierówność:

  $$f(x) \leq f(x_0) \ \ (f(x) \geq f(x_0))$$

  W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego, warunek dotyczy całej dziedziny.

- Maksimum (minimum) globalne właściwe
  Punkt x_0 jest ekstremum globalnym właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu x w całej dziedzine funkcji f prawdziwa jest zależność:

  $$x = x_0 \vee f(x) < f(x_0) \ \ (x = x_0 \vee f(x) > f(x_0))$$

  W przeciwieństwie do ekstremum lokalnego właściwego, warunek dotyczy całej dziedziny.

Punkt stacjonarny - punkt w dziedzinie funkcji rzeczywistej, dla której pochodna tej funkcji przyjmuje wartość równą zeru.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie Fermata) - dla różniczkowalnej funkcji f, w pewnym przedziale $x_0 \in (a, b)$, pochodna $f'(x_0) = 0$.
Warunek Fermata nie gwarantuje istnienia ekstremów - funkcja może mieć pochodną równą zeru i nie mieć ekstremum w tym punkcie, a może mieć ekstremum i nie mieć w nim pochodnej.

Warunek konieczny i wystarczający ekstremum lokalnego - dla różniczkowalnej, ciągłej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mającej skończoną ilość punktów stacjonarnych w punkcie x_0 istnieje

- minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że:
  - $f'(x_0) = 0$,
  - $f'(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$,
  - $f'(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$;

- maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że:
  - $f'(x_0) = 0$,
  - $f'(x_0) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$,
  - $f'(x_0) < 0$ dla $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$.

Alternatywnie, jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ i druga pochodna jest ciągła, to jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum, przy czym jeżeli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum lokalne, a jeżeli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum lokalne.
Warunek ten nie rozstrzyga istnienia ekstremum, jeżeli druga pochodna jest równa 0.