

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Unidad Académica de los Ciclos

Profesional y de Posgrado

Colegio de Ciencias y

Humanidades



1987

II FORO DE
*Estadística
Aplicada*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Unidad Académica de los Ciclos

Profesional y de Posgrado

Colegio de Ciencias y

Humanidades



1987

II FORO DE
*Estadística
Aplicada*

	<u>I N D I C E</u>	Pág.
PRESENTACION		1
PROGRAMA		5
PONENCIAS		
· LA UBICACION DE LA ESTADISTICA EN LA METODOLOGIA CIENTIFICA.	8	
· ANALISIS DE CONGLOMERADOS: UNA APLICACION AL PROBLEMA DEL EMPLEO MEDICO.	33	
· OPTIMIZACION DE LA FUERZA DE TRABAJO EN EL SERVICIO TELEFONICO MANUAL.	46	
· LA COLINEALIDAD EN LA REGRESION.	61	
· ECUACION DE AJUSTE DEL HAZ DE RADIACION GAMMA EN LA SALA DE ALTA INTENSIDAD DEL CENTRO DE METROLOGIA DE LAS RADIACIONES IONIZANTES.	75	
· REGRESION EN FUNCION DE LA EDAD DE VARIABLES OBTENIDAS A PARTIR DEL ANALISIS DE FRECUENCIAS DEL ENCEFALOGRAMA EN NIÑOS DE DISTINTAS CARACTERISTICAS SOCIO CULTURALES.	91	
· ANALISIS MINIMO CUADRATICO DE LOS DISEÑOS REVERSIBLES.	109	
· APLICACIONES DEL ANALISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS EN TECNOLOGIA DE ALIMENTOS.	121	
· LOS PROCESOS ESTOCASTICOS RAMIFICADOS COMO MODELOS PARA DETECTAR BROTES DE EPIDEMIAS DE UNA ENFERMEDAD CONTAGIOSA: ASPECTOS ESTADISTICOS.	143	
· ANALISIS DISCRIMINANTE PARA SERIES DE TIEMPO: UNA APLICACION EN NEUROLOGIA Y OTRA EN SISMOLOGIA.	160	

PRESENTACION

En el mes de septiembre de 1986 se llevó a cabo el Primer Foro de Estadística Aplicada. En la última sesión de aquel evento, los participantes y organizadores nos propusimos trabajar para realizar un Segundo Foro que viniera a consolidar lo obtenido pero que también permitiera abrir nuevas posibilidades de participación a un número mayor de centros de investigación.

Un año más tarde, el Segundo Foro de Estadística Aplicada se celebraba durante los días 28, 29 y 30 de octubre en el auditorio del Jardín Botánico de la Ciudad Universitaria de la UNAM. En la organización habían participado la Coordinación de la Especialización en Estadística Aplicada dependiente de la UACPyP/CCH, el Departamento de Estadística del IIMAS y el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Se contó también con el apoyo de la Sociedad Matemática Mexicana.

El programa del Segundo Foro de Estadística Aplicada incluyó tres conferencias magnas y veintisiete ponencias. Los expositores provenían de centros de investigación tanto de instituciones de enseñanza superior como del sector público y sus trabajos abarcaron áreas muy diversas. En este Foro se contó, a diferencia del anterior, con la asistencia de investigadores y estudiantes provenientes de universidades de provincia.

Con los trabajos seleccionados en este volumen se pretende que los lectores aprecien el tipo de investigaciones que actualmente se realizan en nuestro medio. Desearíamos también que eventualmente estos trabajos sirvan como referencia a todos aquellos investigadores, profesores y estudiantes que de una manera o de otra, tengan en la Estadística un elemento importante de su labor profesional.

Dr. Rubén Hernández Cid
Coordinador del Proyecto
Especialización en Estadística Aplicada

PROGRAMA DEL SEGUNDO FORO DE ESTADÍSTICA APLICADA

MIERCOLES 28

9:15 - 9:40	Registro de participantes	
9:45	Inauguración	
10:00 - 10:55	<u>Conferencia magistral</u> Ignacio MENDIZ Depto. de Estadística I.I.M.A.S.	"La ubicación de la Estadística en la metodología científica".
11:15 - 11:35	Thalia HARMONY Jefa del Programa de Neurociencia ENEP Iztacala	"Regresión en función de la edad en variables obtenidas a partir del análisis de frecuencias del electroencefalograma en niños con distintas características socioculturales".
11:40 - 12:00	Javier ALAGON Depto. de Matemáticas INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO	"Análisis discriminante para serie de tiempo: una aplicación en Neurología y otra en Sismología".
12:05 - 12:25	Mario CORTINA Leopoldo VALDÉS Instituto de Investigaciones Antropológicas	"Aplicación de métodos multivariados del análisis de datos en la Lingüística Histórica".

12:40 - 13:00

Rafel RUEDA
"Participación de la abundancia de halteras usando el modelo Binomial".
Dep. de Matemáticas
I.I.M.A.S. U.N.A.M.
U.A.M.-I.

Renata VILLAIBA
Dep. de Matemáticas

Fac. de Ciencias, U.N.A.M.

13:05 - 13:35

Javier ALAGON
"Patrones de empleo médico, una aplicación del análisis de conglomerados".
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Julio FERNK
Alfredo HERNANDEZ
Gustavo NIGENDA
Catalina RAMIREZ
Cecilia REBLEDO
Alonso VAZQUEZ
Centro de Investigaciones en Salud Pública

16:25 - 16:55

Javier BOURGES
Secretaría de Programación y Presupuesto
Patricia ROMERO
Depro. de Estadística I.I.M.A.S.

17:00 17:20

Hernando MUTIS
Egresado de la Especialización en Estadística Aplicada
"Comentarios críticos a la utilización del análisis de factores en estudios socio-económicos".

17:40 - 18:00

Sergio GARCIAORTEGA
Colegio de México
"Evaluación de datos demográficos: un ejemplo de aplicación de la estadística descriptiva".

18:05 - 18:25

Rocío LLARENA
Dirección General de Planeación
U.N.A.M.
"La agenda estadística de la UNAM".

JUVENTUS 29

9:00 - 9:20

Miguel CERVERA.
Director de Informática y Estadística
Secretaría de Salud.

"Un modelo estadístico para medir el nivel de los servicios prestados por la Secretaría de Salud".

9:25 - 9:45

Josef ALVAREZ
José MORALES
Instituto Nacional de Investigaciones
Nucleares

"Ecuación de ajuste del haz de radiación gamma de la sala de alta intensidad del centro de metrología de las radiaciones ionizantes

10:00 - 10:55

Conferencia magistral.
Jaime CUEVAS
ENEP Iztacala

Ernesto BARRIOS
Centro de Investigaciones en Matemáticas

"Métodos gráficos para regresión

"La colinealidad en la regresión múltiple".

11:40 - 12:00

Jesús LOPEZ
Dep. de Matemáticas
Facultad de Ciencias U.N.A.M.

"Elección del parámetro "ridge" por el principio de sentido-optimidad".

12:05 - 12:25

Ariel TEJERA
Instituto Nacional de Investigaciones
Nucleares.

"Ajuste novedoso de una curva de correlación".

12:40 - 13:00

Enrique de ALBA
Jefe del Dep. de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

"Pronóstico con restricciones. Un enfoque bayesiano".

13:05 - 13:25

Manuel MENDOZA
Dep. de Matemáticas
Facultad de Ciencias U.N.A.M.

"Análisis bayesiano del ensayo de coiciente de pendientes".

16:25 - 16:55

Maribel ESCUYEL

Carolina MENDOZA

Carlos TRIZO

Universidad Iberoamericana

**"Aplicaciones del análisis de correspondencias en
tecnología de alimentos".**

17:00 - 17:20

Gullermo BHZ

Depro. de Estadística

I.I.M.A.S.

**"Algunos métodos para análisis de proporciones
continuas".**

17:40 - 18:00

Jorge OLGUIN

Depro. de Estadística

I.I.M.A.S.

**"Una aplicación de los modelos loglineales a los ser-
vicios de planificación familiar del Sector Salud".**

18:05 - 18:25

Carlos BECERRIL

Centro de Cálculo

Colegio de Posgraduados. Chapultepec.

**"Análisis sintético cuadrático de los diseños
reversibles".**

VIEJEROS 30

9:00 - 9:20	Jorge DOMÍNGUEZ Centro de Investigaciones en Matemáticas Jorge JIMÉNEZ Modelos Matemáticos de los Sistemas Sociales I.I.M.A.S.	"Comparación del desempeño de las unidades de investigación en México creando técnicas de grafificación para análisis de datos".
9:25 - 9:45	Elsa RESANO Secretaría de Salud	"Encuesta de morbilidad atendida".
10:50 - 10:55	<u>Conferencia magistral</u> Federico O'REILLY Jefe del Depto. de Estadística I.I.M.A.S.	"Bondad de ajuste en muestras censuradas".
11:15 - 11:35	Victor FÉREZ-ARREDJ Centro de Investigaciones en Matemáticas	"Los procesos estocásticos ratificados como modelos para detectar brotes de epidemias de una enfermedad contagiosa. Aspectos estadísticos."
11:40 - 12:00	Teresa LOPEZ Centro de Investigaciones en Matemáticas.	"Optimización de la fuerza de trabajo en el servicio telefónico manual".
12:05 - 12:25	Gustavo VALENCIA Dep. de Matemáticas Facultad de Ciencias	"Comparación de curvas de geración".
12:40 - 13:00	Conxuelo DÍAZ Graciela BURG Luis LANDÍOS Roberto GÓMEZ Centro de Cálculo Colegio de Postgrados Chapín	"SHEMAP. Sistema para el muestreo y estimación de totales en poblaciones de animales y plantas".
13:05 - 13:30	Martina de GARIY Secretaría de Salud	"Diseño muestral para la evaluación de los servicios materno infantil".
13:35 -		Reunión Plenaria y Clausura

LA UBICACION DE LA ESTADISTICA EN LA METODOLOGIA CIENTIFICA

Dr. Ignacio Méndez Ramírez

IIMAS-UNAM

Octubre 1987

I. INTRODUCCION

En este ensayo se intenta localizar la estadística en lo que se conoce como metodología científica. Para esto, se plantean varios niveles de la metodología científica: el nivel filosófico, el metodológico general y el metodológico específico. Aunque los niveles no quedan claramente diferenciados, si es posible su distinción. Como conceptos fundamentales en la estadística se discuten los de causalidad, determinismo y necesidad contra los de azar, casualidad, indeterminismo y contingencia.

Se considera como postulado fundamental, que el uso adecuado de la estadística en sus aplicaciones prácticas requiere el conocimiento de los niveles y conceptos señalados. La estadística aplicada se constituye en un método general de investigación, pero al igual que el método científico no es infalible y sus relaciones con otros métodos

generales son fundamentales para su cabal aprovechamiento.

II. NIVELES DE METODOLOGIA

Es importante resaltar que en realidad no existe una metodología científica, como un camino o una serie de reglas que nos lleven, de manera inequívoca, a obtener conocimiento sobre la naturaleza. Sin embargo, si se tienen un conjunto de postulados, conceptos y reglas que norman y guían la investigación científica. Reconociendo siempre la falibilidad de la investigación, en el sentido de que usando ese conjunto se puede producir conocimiento erróneo. Falibilidad también, porque por caminos heterodoxos, no normados o guiados por ese conjunto de postulados, conceptos y reglas se puede obtener conocimiento "verdadero" o útil sobre la realidad. Sin embargo, el ajustarse a ese conjunto produce en la mayoría de los casos buenos resultados de investigación. Así lo que llamaremos metodología científica en sus tres niveles, se considera un auxilio de tipo heurístico para la investigación científica.

La ciencia general moderna tiende más al conocimiento sintético, al integrar cada vez más, conceptos de diferentes ciencias particulares; lo que se expresa en la formación de ciencias complejas, la penetración recíproca de los métodos de investigación, formación y aparición de conceptos generalizadores utilizados en la mayoría o todas las ciencias. Estos conceptos, llamados conceptos científicos generales ocupan una posición intermedia entre las categorías filosóficas y los conceptos de las disciplinas especiales.

Los principios filosóficos del conocimiento no conducen a descubrimientos científicos particulares, pero son necesarios para el funcionamiento y desarrollo de la ciencia en su conjunto y sus diversas ramas.

En cualquier ciencia particular, al aparecer dificultades durante la obtención de nuevos conocimientos, o la creación de nuevas teorías, el científico recurre necesariamente a un nivel más general del conocimiento científico e incluso al filosófico para reformular las orientaciones metodológicas y de la concepción del mundo de cualquier investigación científica.

Esta situación la podemos representar en la siguiente gráfica:

NIVELES:

CONCEPTOS:

Filosófico

Leyes, causalidad, conocimiento, forma, contenido, relación, necesidad, inducción, deducción, etc.

Metodológico General

Información, algoritmo, probabilidad, sistema control cibernética, matemáticas, estadística, etc.

Metodológico Específico

Célula, fisiología, evolución, psicología, fuerza, masa, campo, individuo, ecosistema, etc.

Por supuesto que estos niveles además de que no están claramente delimitados,

hay gran interdependencia entre ellos. Algunos conceptos pueden pasar de un nivel a otro dependiendo del contexto en el que se usen.

Como podemos ver la estadística está ubicada en el nivel metodológico general, por lo que debemos conocer sus conceptos básicos y las conexiones con los otros niveles.

III. NIVEL FILOSOFICO

En este nivel es fundamental considerar una posición realista en el sentido de que el conocimiento se adecúa o conforme a la realidad. Bunge (1985) define al **realismo científico** como aquel realismo crítico por no confiar totalmente en los sentidos e imaginar o conjeturar lo imperceptible; y científico por considerar que la ciencia proporciona el mejor conocimiento de la realidad, aún cuando sea imperfecto. Señala 50 principios descriptivos del realismo científico, de ellos citaremos sólo los siguientes:

G1. El mundo existe en sí (por sí mismo), o sea 'haya o no sujetos cognoscentes.

G2. Podemos llegar a conocer el mundo, aunque sólo sea en parte, imperfectamente, y de a poco.

G27. Todo constructo (concepto) puede aclararse (corolario: lo que no pueda diluirse no es un objeto conceptual, sino un ruido).

G28. No hay límite a la matematizabilidad de los constructos.

G29. El conocimiento puede serlo de particulares o de pautas (patrones).

G30. El conocimiento de pautas puede condensarse en hipótesis y teorías.

G32. En todos los campos de la investigación podemos formar hipótesis causales y probabilísticas, así como combinaciones de éstas.

G39. Sólamente las teorías capaces de hacer predicciones son empíricamente comprobables.

Más adelante Bunge señala “Quien pretende ignorar a la filosofía sólo logra reinventarla”. Por esta razón comentamos un poco este nivel.

La concepción realista coincide con la llamada materialista. Es también importante considerar el aspecto dialéctico del conocimiento en el sentido de que el investigador maneja en forma alterna conceptos contrarios. Así, podemos señalar que el conocimiento es objetivo y subjetivo, se tienen hechos y teorías, hay análisis y síntesis, inducción y deducción, hay generalizaciones y particularidades, hay aspectos concretos y abstractos, el desarrollo es social y es individual. Finalmente por ser de gran importancia para la estadística, hay aspectos necesarios o causales y los hay

contingentes o aleatorios.

Los filósofos de la antigua Grecia avanzaron mucho en los aspectos generales de la metodología científica, aunque desgraciadamente durante toda la edad media sus posiciones se tomaron en forma dogmática. Así, el pensamiento, brillante para su época, de Aristóteles dominó durante esa edad oscura de la humanidad. En ella se consideró que se podía generar conocimiento de la realidad sólo pensando; después F. Bacon resumió la necesidad de observar y experimentar con la realidad, aunque su planteamiento era totalmente inductivo, al pensar que se obtenía conocimiento sólo con la observación, sin necesidad de hipótesis y teorías. No es sino hasta el siglo XIX, que se plantea por C. Bernard y Pasteur la necesidad de plantear hipótesis para buscar información que las apoye o entre en contradicción con ellas. A principios de este siglo y finales del pasado, se reconoció primero en la física y luego en psicología y otras ciencias, que en el proceso de observación se altera el objeto observado. En todo trabajo de investigación se tienen ideas preconcebidas de la realidad y son las que guían el proceso, aunque sean autocorregibles.

El positivismo pretendía estudiar la naturaleza sin ideas preconcebidas, así como que era posible probar o verificar las hipótesis y teorías. Esto ha sido rechazado por los falsacionistas como K. Popper, quien considera que la lógica del descubrimiento es inventar libremente hipótesis y someterlas a una despiadada crítica a la luz de los hechos de la realidad.

Sin embargo ahora se reconoce que lo que un observador vé, depende en

parte de su experiencia, su conocimiento y sus expectativas. La observación no es una base segura para construir leyes y teorías. Por esto es que se rechaza también al falsacionismo, ya que si un enunciado de una teoría choca con algún enunciado observacional, puede ser que lo que esté equivocado sea el enunciado y no la teoría.

Ante esta situación algunos filósofos como I. Lakatos proponen los “programas de investigación” con un núcleo central de teoría, protegido de la falsación mediante un cinturón protector de hipótesis auxiliares, condiciones iniciales, etc. Estos programas de investigación, no ofrecen una racionalidad instantánea. Hay que tratar con benevolencia a los programas en desarrollo para que se hagan empíricamente progresivos. El falsacionista metodológico comprende que en las “técnicas experimentales” del científico hay implicadas teorías falibles con las que interpreta los hechos. A pesar de ello, aplica tales teorías; en el contexto dado las considera no como teorías bajo contrastación, sino como conocimiento fundamental carente de problemas que aceptamos tentativamente como no problemático mientras estamos contrastando la teoría.

T.S. Kuhn considera el aspecto social de la ciencia, así la actividad diversa y desorganizada (preciencia) que precede a la formación de la ciencia, se estructura y dirige finalmente cuando la comunidad científica se adhiere a un sólo **paradigma**. Un paradigma está compuesto por los supuestos teóricos generales, las leyes y las técnicas para su aplicación, que adoptan los miembros de una comunidad científica. El cambio de paradigma es una revolución científica.

Feyerabend sostiene que todas las metodologías tienen sus limitaciones y que

la única “regla” que queda en pie es “todo vale”. Además que la ciencia no es superior a cualquier otra forma de estudiar el mundo.

Chalmers (1984) se declara realista **no representativo**. No representativo al no considerar a una teoría de la verdad como correspondencia; es decir, juzgamos nuestras teorías con el grado de éxito con el que abordan algún aspecto del mundo; pero no podemos juzgarlas con el grado en que describen el mundo tal como es realmente, simplemente porque no tenemos acceso al mundo independientemente de nuestras teorías, en una forma que nos permita valorar la exactitud de tales descripciones.

Así, el crecimiento de la ciencia es inductivo e irracional según Hume. Inductivo y racional según Carnap. No inductivo y racional según Popper. Y no inductivo e irracional según Kuhn, Lakatos y Feyarabend.

IV. DETERMINISMO Y ALEATORIEDAD

El concepto de causalidad está muy arraigado en el pensamiento humano, ya que la realidad sería incomprensible si los sucesos no tuviesen efectos, y si por lo menos algunos de ellos no tuviesen causas. Sin embargo este concepto fue apoyado muy fuertemente en los siglos XVIII y XIX, para ser casi abandonado en la primera parte del XX y ahora de nuevo se le ha dado impulso aunque modificándolo. De la fe casi ciega en la causalidad que surge con Newton, expresada por Laplace al pretender que todo está determinado perfectamente por la situación anterior; se pasó al descrédito de la causalidad, al considerar válida la crítica de Hume, que la causa y el efecto sólo eran

secuencias temporales no necesarias y que fue retomada por el positivismo, así como la teoría cuántica que niega la causalidad.

La ciencia moderna ha retomado el concepto de causalidad, pero considerándola vinculada a la probabilidad y al azar. Así, Bronowski (1978), considera que los tres conceptos básicos en el desarrollo del conocimiento han sido el de orden, de causalidad y ahora de azar. Así considera, que ahora en la ciencia no se usa ningún principio, salvo el de predecir con la mayor exactitud posible. Es decir, idealiza desde el mismo comienzo el futuro, no como absolutamente determinado sino como determinado dentro de un área definida de incertidumbre. Se reemplaza el concepto de efecto inevitable por el de tendencia probable. Su método se basa en separar lo más posible la tendencia constante de las fluctuaciones particulares.

Esto último concuerda con lo expresado por Bunge (op. cit.) "El mundo no es estrictamente causal aunque es determinado" no todos los sucesos conectados entre sí, lo están causalmente, y no todas las regularidades son leyes causales. La causación es uno de los modos de determinación. Por consiguiente, el determinismo no tiene porque concebirse como determinismo causal. La ciencia es determinista en un sentido lato: sólo requiere legalidad (de cualquier tipo) y la ausencia de magia.

Es importante además aclarar los varios tipos de relaciones causales que se reconocen ahora en la ciencia moderna: las causas necesarias, suficientes, contribuyentes, y las necesarias y suficientes.

Causa necesaria.- Una condición X es una causa necesaria para el efecto Y ,

si Y siempre es precedido por X , pero puede haber ocurrencia de la X sin que ocurra Y . Esto lo esquematizamos:



por ejemplo: X puede ser introducción de amibas en el organismo y Y la enfermedad amibiasis.

Causa suficiente.- Una condición X es una causa suficiente para el efecto Y , si X siempre conduce a Y , pero puede ocurrir Y sin que haya ocurrido X .



por ejemplo: X falta de hierro en la dieta y Y la anemia; ó X falta de nitrógeno en un suelo y Y clorosis (amarillamiento) de las plantas.

Causa contribuyente.- Una condición X es contribuyente para Y si se asocian frecuentemente X y Y . Pero puede ocurrir X sin que ocurra Y y Y sin que ocurra X .



por ejemplo: X fumar cigarros, Y cáncer pulmonar, o X servicio de extencionismo agrícola y Y incrementos en la producción agrícola de una área.

Causa suficiente y necesaria (determinística).- Una condición X es necesaria y suficiente para Y , si Y siempre es precedido por X y X siempre conduce a Y .



por ejemplo: X cariotipo con trisomía 21 y Y síndrome de Down; ó X presión y Y temperatura de un gas a volumen constante.

En toda ciencia se busca distinguir lo que es la tendencia constante (la esencia o lo necesario) de las fluctuaciones individuales (lo contingente, lo casual o lo aleatorio).

Como lo ha señalado Pilipenko (1986), "la necesidad se define como un modo de transformación de la posibilidad en realidad, en que en un objeto dado y en unas condiciones concretas sólo existe una posibilidad que se convierte en realidad. Y la contingencia es un modo de transformación de la posibilidad en realidad en que en un objeto dado y en unas circunstancias concretas existen varias posibilidades distintas que pueden convertirse en realidad, pero que sólo una de ellas se convierte de verdad en realidad". Sin embargo, la necesidad y la contingencia no son opuestos absolutos, sino relativos; lo que resulta necesario en unas condiciones, en un sistema de conexiones, en un aspecto concreto, puede ser contingente en otras condiciones, en otro sistema de vínculos o viceversa. Así no existe un fenómeno que sea puramente necesario o puramente casual. Cada fenómeno, acontecimiento, proceso, contiene elementos necesarios y contingentes en diferentes correlaciones. La lluvia, por ejemplo, cae necesariamente como consecuencia de determinados procesos atmosféricos, pero su aparición en el tiempo y el espacio es contingente. Si de modo imprevisto mi automóvil choca contra otro, esto puede verse como contingente, sin embargo cada serie de acontecimientos que me llevan al lugar del choque en ese tiempo, son necesarios, al igual que los del otro auto.

Todo cruce de series de eventos causales independientes es fortuito desde el punto de vista de una serie, pero si se tienen en cuenta todas ellas, el cruce se presenta como necesario.

Cada objeto o proceso de la realidad es fortuito en su individualidad concreta, irrepetible, pero no se trata de una contingencia “pura”, sino de una contingencia como manifestación de necesidad oculta. Esta se halla presente en forma transformada como una “necesidad relativa”, como “un determinismo” y se somete a las leyes estadísticas, probabilísticas. Pilipenko menciona que hay tres métodos principales para revelar las leyes sobre las que se asientan los fenómenos y procesos necesarios y fortuitos de la realidad objetiva. Es decir para develar lo esencia de lo contingente. El primero es la **abstracción**, que consiste en que al estudiar los fenómenos y procesos se desestiman las contingencias y se aparta sólamente la necesidad pura. Basándose en la necesidad separada de esa manera, se formulan las leyes de orden rigurosamente dinámico, como son las leyes de la mecánica clásica (las de Galileo y Newton).

El segundo método es el **estadístico-probabilístico** basado en la ley de los grandes números. Conforme a esta ley lo general, lo típico, lo necesario se pone de manifiesto en los procesos en su masa, se expresa en valores medios, sintetizadores, y se descubre merced a la extinción mutua de las diferencias individuales casuales. A partir de las revelaciones de la necesidad aplicando este método se formulan las leyes de orden estadístico. Se considera ahora que en la mayoría de las ciencias: física, química, biología, economía, sociología, biofísica, lingüística, etc. no se puede progresar sin el empleo de las concepciones probabilístico-estadísticas de la teoría de los procesos accidentales.

El tercer método es el **sintético** que hace uso tanto de la abstracción como de la estadística, y así, los fenómenos son descritos simultáneamente por leyes dinámicas

y estadísticas.

Un párrafo del libro de Barnes (1986) sobre Kuhn, nos ilustra este aspecto de la esencia (necesidad) y la contingencia “La generalización - Los patos vuelan - sobrevive a incontables contraejemplos: los patos recién nacidos, los patos heridos, los patos cansados, los patos indolentes, etc. Diríamos a manera de justificación, que el término se refiere a una esencia, a un pato ideal que se manifiesta en grados diversos en los casos reales, independientemente de lo que en realidad sean estos casos, la generalización - los patos vuelan -sigue siendo verdad de la naturaleza esencial de los patos”. Más adelante señala “Toda apariencia se puede representar como esencia más contingencias superpuestas más errores de percepción”. Esto último prácticamente es ya un modelo estadístico.

Hanson (1977) comenta, que en relación a la causalidad, otra consideración importante, es la de que así como es imposible distinguir un hecho puro de la teoría, así también los conceptos de causa *X* y de efecto *Y*, sólo son intelectibles si se apoyan en alguna teoría que garantice las inferencias de *X* a *Y*. Estas garantías distinguen las verdaderas secuencias causales de las meras coincidencias. La diferencia entre generalizar la ocurrencia repetida de pares de sucesos simétricos, contiguos y comprender la estructura “causal” de un fenómeno natural es similar a la diferencia que existe entre tener una impresión visual de una mancha lunaroide y observar la luna, o como la que existe entre contemplar una concavidad en la superficie lunar y apreciar que la luna tiene cráteres.

En la física cuántica, sobre todo por el principio de indeterminación de Heisenberg, se ha abandonado el principio de determinismo absoluto. Se señala aquí una contingencia o aleatoriedad esencial, es decir no debida a conjunción de cadenas causales independientes, sino al fenómeno individual estudiado. También ha señalado la enorme interacción entre el observador y sus instrumentos, y el objeto observado (esto también sucede en la medición de características psicológicas o sociales). Así, se considera ahora que los electrones, protones, mesones y fotones en ciertas condiciones de observación se comportan como partículas y en otras como ondas. El problema aquí es más bien que nuestros conceptos usuales son inadecuados para describir esos objetos o procesos. Aquí surgen las leyes estadísticas como la única manera de estudiar esas entidades. Sus elementos de estudio no son partículas, sino distribuciones estadísticas.

Así lo indeterminado surge por la incapacidad de estudiar conjuntamente un gran número de cadenas causales como en biología, sociología, etc.; o por la indeterminación esencial en el nivel subatómico. Lo importante es que ambos casos se estudian por métodos probabilísticos-estadísticos.

Hamburger (1986) señala "La estadística no es un mero conjunto de técnicas matemáticas; es mucho más un método de razonamiento que permite interpretar el género de datos muy particulares que se encuentran, especialmente, en las ciencias de la vida, cuyo carácter esencial es la variabilidad".

Los fenómenos aleatorios se describen con distribuciones de probabilidades por ejemplo para la longitud de las alas de una población de insectos, los pesos de las

mazorcas de maíz de una variedad, los cocientes intelectuales de los niños, o bien las distribuciones de probabilidades para posición de electrones, o estados de energía. En todos los casos señalamos que existe la causalidad al considerar que los parámetros de esas distribuciones cambian como efectos de determinadas causas como el clima o la alimentación de los seres vivos o la temperatura o presión del conjunto de moléculas. Vemos así que la adopción de métodos estadísticos no elimina el concepto clásico de causalidad apoyado en teorías, sino que coexiste con él.

V. NIVEL METODOLOGICO GENERAL

Como ha sido discutido, los métodos estadísticos sirven, entre otras cosas, para eliminar los aspectos aleatorios (contingentes) de los aspectos necesarios o esenciales de los fenómenos. Sin embargo por ser de extraordinaria importancia, intentaremos aclarar este proceso en el caso particular de la contrastación de una hipótesis científica.

Consideremos que H es la hipótesis, que hay CI condiciones iniciales y SA supuestos adicionales. Así, por deducción se tiene: si es cierto (H, CI, SA) entonces P . Donde P es una predicción. La contrastación consiste en establecer las CI en la realidad y observar si ocurre P o no. Si no ocurre P se rechaza la hipótesis H considerando CI y SA ciertos. Ahora, si P ocurre entonces sólo decimos que H es más verosímil, que ha sido apoyada, veamos esto con más detalle.

El rechazo se esquematiza como sigue:

Premisa 1 $H, CI, SA \Rightarrow P$

Premisa 2 (contrastación)	no <i>P</i>
Conclusión	no <i>H</i> con <i>CI, SA</i> ciertos

El apoyo ocurre así:

$$H, CI, SA \implies P$$

Contrastación: <i>P</i>
Conclusión <i>H</i> es verosímil con <i>CI, SA</i> ciertos

Sin embargo ahora consideremos otras hipótesis o explicaciones para la ocurrencia o no de la predicción *P*. Omitiremos *CI* y *SA*, aunque siempre están presentes.

$$H \implies P$$

$$C \implies P$$

$$Q \implies P$$

$$D \implies \text{no } P$$

$$E \implies \text{no } P$$

Contrastación: ocurre <i>P</i>
Conclusión <i>H, C</i> y <i>Q</i> más verosímiles, se rechazan <i>D</i> y <i>E</i>

En el caso anterior es necesario reconocer que otras explicaciones alternativas a *P* también han sido apoyadas al igual que la hipótesis.

Por otro lado supongamos que en varias *CI*, con varios *SA*, se hacen otras tantas predicciones basadas en *H*.

$$H \implies P_1, P_2, \dots, P_n$$

Contrastaciones: ocurren P_1, P_2, \dots, P_n
Conclusión H es más verosímil

Mientras más diferentes sean las CI y los SA con los que se han obtenido las predicciones P_1 a P_n , será más verosímil la hipótesis, porque es más improbable que en todos los casos fallen las CI y los SA , pero pueden en cada caso subsistir explicaciones alternativas.

Finalmente, si tomamos en consideración argumentos adicionales que puedan hacer improbables las explicaciones alternativas, en cada predicción, P_i se puede hacer aún mucho más verosímil la hipótesis. Así,

$$H \implies P_i$$

$$C_i \implies P_i$$

$$Q_i \implies P_i$$

$$D_i \implies \text{no } P_i$$

$$E_i \implies \text{no } P_i$$

Contrastación: ocurre P_i , y además C_i y Q_i son improbables
Conclusión H mucho más verosímil

La estadística es la que ayuda a determinar si se considera que las explicaciones alternativas C_i y Q_i son improbables o no. Un caso muy frecuente de explicación alternativa es que la predicción P , se da por puro azar, es decir sin que H sea cierto, sólo en virtud de la aleatoriedad del fenómeno estudiado. Para esta situación se utilizan las llamadas pruebas de hipótesis estadísticas, que traducen H a características de las funciones de distribución y concluyen sobre la impropabilidad o no de P en términos denominados de significación estadística. Además durante el diseño de experimentos se busca eliminar otras explicaciones alternativas como los llamados factores de confusión. Estos también pueden ser tomados en cuenta en los análisis estadísticos.

Se ha postulado por algunos filósofos y metodólogos como Rojas Soriano y Eli De Gortari, que hay un método que guía prácticamente todas las investigaciones en diversas ciencias particulares. Además de este "método científico general" están los métodos probabilístico-estadísticos, los sistémicos, los ciberneticos y otros..

El "Método Científico General" se considera como un proceso no lineal, es decir es necesario regresar a etapas previas, compuesto de las siguientes etapas:

Problema.- La deficiencia de conocimientos para describir, explicar, modificar o predecir una porción de la realidad, o bien para observar o medir algún proceso.

Marco Teórico-Empírico.- Conjunto de conocimientos teóricos en los que se enmarca el problema, además de la información empírica relativa al mismo.

Hipótesis.- Proposición para eliminar la deficiencia de conocimiento, en forma de una declaración con consecuencias deductivas verificables. Por su importancia

distinguimos: **Hipótesis Descriptivas** que especifican forma y propiedades de los procesos u objetos; e **Hipótesis Explicativas** que establecen la forma de asociación o de causalidad (necesaria, suficiente, contribuyente o determinística) entre dos o más propiedades de los objetos o procesos.

Diseño de la Investigación.- Se especifica como se van a contrastar las hipótesis. Se incluye entre otras cosas, la selección y definición de elementos de estudio, las variables y formas de medición, instrumentos, procedimientos, etc. Se determinan las predicciones (P_i) las condiciones iniciales, *CI* y los supuestos adicionales *SA*. Para hipótesis explicativas se especifica el control de factores de confusión. Se especifica aquí cuales van a ser los análisis estadísticos, o no, a los que se someterá la información por obtenerse.

Es importante que exista coherencia o concordancia entre el problema con sus objetivos el marco teórico y la hipótesis por un lado y de estos con el diseño de la investigación según los recursos disponibles.

Ejecución.- Se lleva a la práctica lo planeado. Las modificaciones que se hagan deben respetar en lo posible el problema, teoría e hipótesis.

Análisis y Síntesis de la Información.- Se descompone y agrupa la información para obtener los aspectos sobresalientes de ella y confrontarlos con las deducciones de la hipótesis.

Discusión.- Se evalúa la confrontación de deducciones con la información obtenida a la luz de la teoría, las condiciones iniciales y los supuestos adicionales;

para determinar así, en qué medida se llenó la deficiencia del conocimiento alcanzado en la solución del problema.

Se evalúan también los métodos y procedimientos empleados, incluyendo el propio diseño de investigación, para ponderar su grado de adecuación al problema, hipótesis y teoría.

Conclusiones y Recomendaciones.- Se resume a lo que se llegó en la discusión. Se recomienda nueva investigación al plantear nuevos problemas o métodos.

Reporte.- Se reporta para cumplir el fin social de la ciencia y promover la difusión del conocimiento. Se puede hacer en reuniones, congresos, comunicación directa, artículos o libros publicados, etc.

VI. NIVEL METODOLOGICO ESPECIFICO

Se especifica con detalle el diseño de la investigación señalando cuál es la arquitectura de la investigación el llamado protocolo (Méndez (1984)). Se especifican instrumentos, métodos de medición, condiciones de estudio, etc.

Por ser de extraordinaria importancia, se mencionan los conceptos de validez externa e interna.

VALIDEZ EXTERNA E INTERNA EN LAS INVESTIGACIONES

En la mayoría de los trabajos de investigación, el interés principal radica en poder extraer los resultados de la muestra estudiada a la población objetivo. Cuando

esto es posible se dice que la muestra es representativa o también que hay validez externa.

La validez externa o representatividad de la muestra dependerá de factores tales como:

- A. Definición de la población objetivo en relación con su ubicación temporal y espacial, definiciones operacionales de los factores en estudio y de las características inherentes a las unidades de estudio.
- B. Procesos de medición. Por ejemplo tipo de cuestionarios, instrumentos de medición.
- C. Forma de seleccionar la muestra. Durante la selección de la muestra puede haber sesgos que alteren la representatividad de la misma, lo que hará que el estudio pierda validez externa. Entre éstos existen tres de particular importancia:
 - 1. Sesgos de selección por parte del investigador. Se presentan cuando el investigador capta únicamente un subsector de la población, por ejemplo, al elegir individuos con un padecimiento en estado avanzado o de niveles socioeconómicos predominantemente altos, cuando lo que se pretende es extraer las conclusiones a todos los estadios del padecimiento y niveles socioeconómicos.
 - 2. Sesgos de autoselección. Se presentan cuando los individuos muestreados poseen alguna característica que los hace tener mayor probabilidad de ser muestreados. p.e. un estudio con derechohabientes

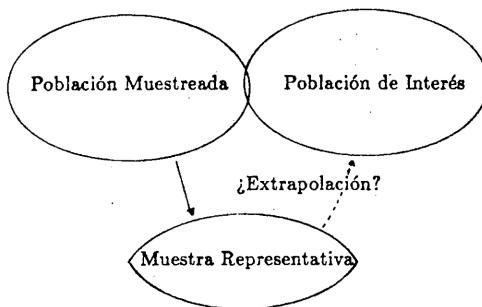
del IMSS no es aplicable a toda la población del país. Los drogadictos que llegan a los servicios de rehabilitación no son representativos de todos los drogadictos.

3. Sesgos de autoselección inherente. Se presentan cuando un factor de riesgo a la salud está asociado con una característica inherente al individuo. p.e. el uso de píldoras anticonceptivas está asociado con niveles económicos altos, y hacer ejercicio físico vigoroso está asociado con un sistema cardiovascular eficiente. En estos casos no se pueden extraer los resultados a toda la población de mujeres si éstas usaran píldoras anticonceptivas, o bien a toda la población si realizara ejercicio físico vigoroso.

Una manera de procurar la representatividad es usar **muestreo probabilístico**.

Existen situaciones en las que se lleva a cabo una investigación con un grupo de unidades disponibles, no obtenidas por muestreo probabilístico y con poco o nulo control de selección por parte del investigador. P.e. un estudio con los casos de niños con Síndrome de Down que nacen en una colonia. O los niños con dislexia de una escuela rural. En estos casos la población objetivo es aquella población con características semejantes a las unidades disponibles.

Frecuentemente se efectúan extrapolaciones a poblaciones para las cuales no hay representatividad o validez externa.



En estos casos debemos primero determinar las diferencias que nos parecen más importantes entre la población muestreada y la de interés, a continuación nos preguntamos: ¿Las diferencias anteriores invalidan la conclusión a la que llegamos en la muestra? Este proceso se hace en base a nuestros conocimientos teóricos. Si la respuesta es NO, podemos hacer la extrapolación y en caso contrario (respuesta SI) no haremos la extrapolación; y se requiere un nuevo estudio con una muestra representativa de la población de interés. Así muchos estudios de laboratorio o invernadero se aplican a condiciones comerciales o naturales. Las vacunas se prueban en ciertos individuos y se aplican a nivel mundial.

Validez Interna: Si en un estudio que postula a X como causa de un efecto Y , se presenta un factor Z que este presente de modo diferencial y que pueda alterar la evolución del fenómeno al modificar el efecto del factor de estudio X , a ese factor se le llama **Factor de Confusión**.

El Control de Factores de Confusión se puede hacer de cuatro maneras:

1. **Homogeneización.** Lograr que Z no varíe en todos los elementos de estudio. Se pierde generalidad.

2. Formación de Bloques o Igualación de Atributos. Aunque el factor de confusión Z varíe dentro de los grupos a estudiarse, lograr que esa variación sea la misma para todos los grupos que se comparan.

3. Aleatorización. Asignar al azar las variantes del factor en estudio (X_1, X_2, X_3) a las unidades de investigación. Esto tiende a homogeneizar la presentación de los valores de Z en los grupos a compararse, cuando las muestras son grandes. Esto es privativo de los experimentos.

4. Análisis Estadístico. Se puede eliminar el efecto del factor de confusión, al evaluar el efecto del factor en estudio en adición al del factor de confusión. Por ejemplo el análisis de covarianza, prueba de Mantel-Haenzel, modelos logarítmicos-lineales o de regresión múltiple.

Cuando una investigación comparativa realiza el control de los principales factores de confusión se dice que tiene **valididad interna**.

BIBLIOGRAFIA

CHALMERS, A.F. *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* Siglo XXI. Madrid. 3a. Edición. 1984.

BARNES, B. *T.S. Kuhn y las ciencias sociales.* Breviarios Fondo de Cultura Económica. México 1986.

BRONOWSKI, J. *El sentido común de la ciencia.* Ediciones Península. Barcelona 1978.

- BUNGE, M. *Racionalidad y realismo*. Alianza Universidad. Madrid 1985.
- DE GORTARI, E. *Metodología general y métodos especiales*. Editorial Océano. Barcelona, España 1983.
- FEYARABEND, P. *Adios a la razón*. Editorial Tecnos. Madrid 1984.
- HAMBURGER, J. *Los límites del conocimiento*. Fondo de Cultura Económica. México 1986.
- HANSON, N.R. *Patrones de descubrimiento. Observación y explicación*. Alianza Universidad. Madrid 1977.
- KUHN, T.S. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica. Sexta reimpresión. México 1985.
- LAKATOS, I. *La metodología de los programas de investigación científica*. Alianza Universidad. Madrid 1983.
- MENDEZ, I., D. NAMIHIRA, L. MORENO Y C. SOSA *El protocolo de investigación: lineamientos para su elaboración y análisis*. Trillas. México 1984.
- PILIPENKO, N. *Dialéctica de los contingentes y de lo necesario*. Editorial Progreso. Moscú 1986.
- ROJAS, S.R. *El proceso de la investigación científica* Trillas. 3a. Edición. México 1983.

**ANALISIS DE CONGLOMERADOS: UNA APLICACION AL
PROBLEMA DEL EMPLEO MEDICO**

Dr. Javier Alagón

Lic. Alfredo Hernández

Biol. Gustavo Nigenda

Dr. Julio Frenk

Lic. Cecilia Robledo

L. Alonso Vázquez

Catalina Ramírez

Alejandro Muñoz del Río

Introducción.

Uno de los fenómenos que en el campo de la salud ha venido a preocupar seriamente en los últimos años, a nivel internacional, es la gran cantidad de médicos egresados de las universidades que cada vez tienen menor oportunidad de ejercer plenamente la profesión para la que han sido preparados. Esta situación se traduce en fenómenos como el desempleo y el subempleo en zonas urbanas que, a la vez, coexisten con la falta de atención a millones de personas en regiones rurales (Frenk, et al: 1986). En México, como en muchos países del llamado tercer mundo, no existe información confiable sobre estos fenómenos, por lo que es cada día más urgente generar datos que permitan conocer objetivamente la situación para explicar su origen y emprender acciones que solucionen los problemas observados.

Partiendo de esta necesidad de contar con datos confiables, en el Instituto Nacional de Salud Pública (INSP) se realiza la investigación "Patrones de Empleo Médico en las Áreas Urbanas de México" que se propone como objetivo general el conocer las determinantes y las características del proceso de inserción de los médicos en el mercado de empleo urbano así como estudiar la existencia de patrones dominantes de incorporación laboral.

Entre sus objetivos específicos se plantea el identificar los diferentes patrones de empleo médico en las áreas urbanas de la República Mexicana y estimar su frecuencia. En este trabajo se da a conocer la metodología para la obtención de los patrones de

empleo médico partiendo de la combinación de diversas características laborales del trabajo principal y del segundo y/o tercer trabajo, tales como: nivel de ocupación, posición en el trabajo, institución de trabajo, unidad de trabajo, número de pacientes a la semana, horas de trabajo a la semana, ingresos mensuales y prestaciones. También se muestra los resultados de la aplicación de la metodología.

Universo de Estudio.

La muestra de médicos fue obtenida a partir de la muestra de 41,000 hogares con la que trabaja la Encuesta Nacional de Empleo Urbano (ENEU), misma que se levanta trimestralmente en 16 ciudades de la República para emitir las tasas oficiales de empleo y desempleo a nivel urbano. Anualmente se realizan cuatro levantamientos. Se seleccionó la muestra de esta encuesta de hogares a fin de poder captar todas las posibilidades de empleo existentes.

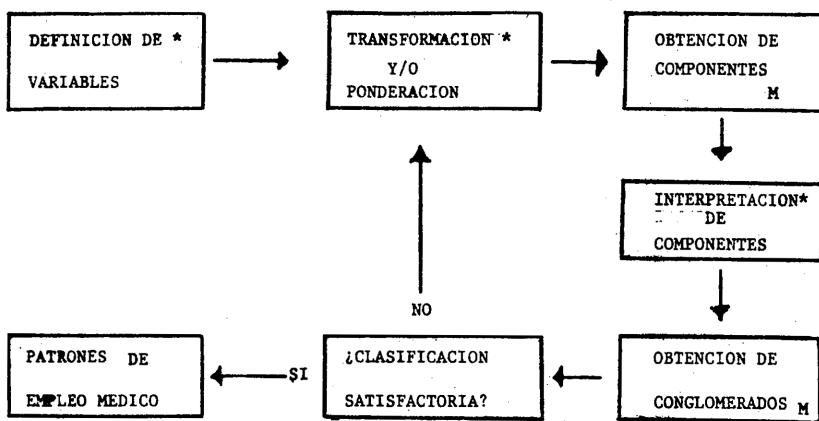
En el tercer levantamiento de 1985 fueron seleccionadas todas aquellas personas que declararon haber terminado el cuarto año de la carrera de medicina, con ello se incluyó a los estudiantes de internado rotatorio de pregrado, a los pasantes en servicio social y a todos los médicos titulados. El total de personas seleccionadas fue de 620 que representan a todos los médicos que habitan en esas 16 ciudades.

Levantamiento de la Encuesta.

La información se levantó en cada ciudad a través de una entrevista directa con el médico a quien se aplicó un

FIGURA 1

ESTRATEGIA DE OBTENCION DE LOS PATRONES



* SIGNIFICA PARTICIPACION GRUPAL

M=TRABAJO EN COMPUTADORA

cuestionario estandarizado, elaborado y probado por el equipo de investigación.

Los resultados del levantamiento muestran una tasa de respuesta global de 97%, que varió de 94% en la ciudad de México a 100% en 8 ciudades de la muestra. Se registraron 401 casos del total de médicos que declararon por lo menos un trabajo y fueron éstos los que se consideraron para elaborar los patrones de empleo.

La explotación de la información se inició con la conformación y depuración de un banco de datos computarizado, a partir del cual se procede actualmente a la descripción y análisis de las características de la muestra.

Metodología Estadística.

Para la obtención de los patrones de empleo médico, se hizo uso del "análisis de conglomerados".

La figura 1 ilustra la estrategia de obtención de los patrones de empleo médico. El análisis de conglomerados es un conjunto de técnicas del análisis multivariado cuyo objetivo principal es la formación de grupos de manera tal que los objetos o individuos de un mismo grupo sean "similares". Con ello se logra resumir los datos al referirnos a propiedades de los grupos y no a propiedades de los individuos.

Análogamente al "análisis de factores", las técnicas de análisis de conglomerados fueron desarrolladas en un campo aplicado (taxonomía biológica); rara vez son acompañadas por pruebas de significancia, modelos probabilísticos, etc.

Para la obtención de los patrones, se realizó primero un análisis de componentes principales para reducir la dimensionalidad del

problema así como para simplificar la estructura de correlación de las variables y regularizar las variables (algunas de las variables usadas son ordinales o dicotómicas; el uso de los componentes principales con estas variables junto con las continuas produce variables continuas que pueden ser utilizadas posteriormente como insumo para el análisis de conglomerados).

La aplicación de los componentes principales a las 31 variables bajo interés, produce ocho componentes que explican aproximadamente el 70% de la variabilidad total original. Sin embargo, la interpretación de estos componentes no es clara y la clasificación obtenida posteriormente a partir de ellos, no es satisfactoria; en efecto, los grupos así formados presentan inconsistencias conceptuales muy fuertes (como por ejemplo, incluir en un mismo grupo médicos monoempleados asalariados del sector público y médicos monoempleados independientes). Estas inconsistencias son debidas a que todas las variables son igualmente importantes si los componentes principales son obtenidos con la matriz de correlación. Ahora bien, si la obtención de componentes principales se realiza con la matriz de covarianzas, la importancia de las variables estará determinada por sus varianza de tal suerte que si una de las variables medidas no es de gran importancia conceptual pero tiene una gran varianza, tendrá mucha influencia en el esquema de clasificación posterior.

La única manera de resolver el problema anterior y poder obtener una clasificación consistente, es mediante la asignación de diferentes pesos a las variables del análisis. Estos pesos o

ponderaciones deberán reflejar la importancia relativa de las variables entre sí de acuerdo a un marco teórico sólido. Para obtener dichas ponderaciones, se utilizó una metodología "Delphi" mediante la cual se sigue un ciclo iterativo de preguntas a los investigadores del proyecto hasta encontrar concordancia sobre las ponderaciones asignadas. Los "puntajes" obtenidos al transformar las variables con componentes principales fueron usados para el algoritmo de formación de los grupos; es importante mencionar que para la formación de los grupos utilizamos el "algoritmo de las K-medias" (Hartigan:1975) del paquete (Statistical Analysis System) SAS, instalado en una IBM 4381. Este es un algoritmo muy eficiente de tipo no jerárquico, que sigue un procedimiento de optimización local y requiere de la especificación del número de grupos (K) a formar.

El esquema de ponderación final se presenta en la figura 2.

Con este esquema, se obtuvo que el 90% de la variabilidad total es explicada por ocho componentes principales fácilmente interpretables. Estos componentes, dan información sobre multiempleo (1, 2 ó 3 trabajos), y sobre nivel de ocupación, rendimiento y condiciones laborales de los diferentes trabajos.

Cabe hacer notar que se probaron múltiples esquemas de ponderaciones. El problema de escoger un conjunto satisfactorio (u óptimo) de pesos, es parecido al problema de escoger distribuciones "a priori" adecuadas en Estadística Bayesiana; de hecho, el problema aquí confrontado, sugiere el desarrollo de una metodología de "componentes principales bayesianos". De esta manera, se contraria con un marco teórico estadístico sólido para tratar este tipo de problemas (en donde la subjetividad

FIGURA 2

ESQUEMA FINAL DE PONDERACION

	TRABAJO PRINCIPAL	SEGUNDO TRABAJO	TERCER TRABAJO
MULTIEMPLEO	10	10	10
POSICION	10	10	10
OCCUPACION	10	10	10
INSTITUCION	8	8	8
UNIDAD	8	8	8
TIPO DE CONTRATO	8	8	8
PRESTACIONES	8	8	8
NO. DE HORAS	6	6	6
NO. DE PACIENTES	6	6	6
INGRESOS	6	6	6

inherente en la elección del esquema de ponderaciones puede producir algún malestar en los investigadores).

Varios autores han señalado en más de una ocasión la vulnerabilidad de los métodos del análisis de conglomerados. En particular Cormack (1971), menciona que: 1) las clasificaciones obtenidas con métodos estadísticos pueden no convencer a los expertos interesados en la clasificación (que pueden creer que el conocimiento detallado de sus datos es más importante) y 2) dado que las técnicas de conglomerados no están basadas en modelos probabilísticos firmes, los resultados son inestables y usualmente pobres al ser evaluados estadísticamente.

Resultados de la aplicación del análisis de conglomerados.

En la Figura 3 aparecen los conglomerados de médicos obtenidos. Se distinguen 9 grupos, los cuales se encuentran ubicados en el mapa siguiendo el orden de dos ejes. El vertical, indica el número de empleos (1,2,3); el horizontal, el mecanismo de pago (a la izquierda está el asalariamiento y a la derecha la independencia) combinándose con la distribución médico-no médico (los no médicos se ubican a la extrema derecha).

Los 9 grupos son los siguientes:

1) Monoempleados Asalariados: 140 casos.

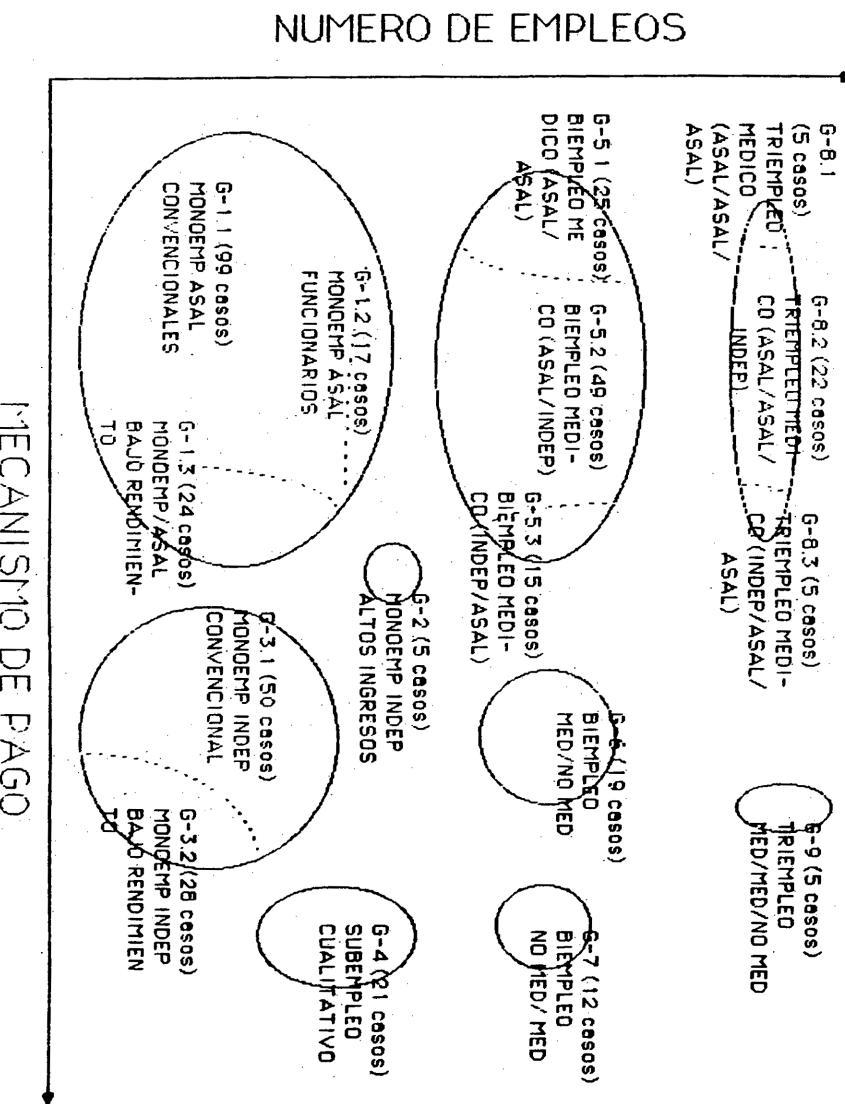
Se incluyen aquellos médicos que tienen un solo empleo y que en él son asalariados principalmente de instituciones estatales o paraestatales.

Dentro de este grupo existen tres subdivisiones:

1.1) Convencionales: 99 casos.

FIGURA 3

MAPA DE PATRONES DE EMPLEO MEDICO



Caracterizados por tener un rendimiento (número de pacientes atendidos por hora) promedio o por encima del promedio del total de casos y con 40 horas de trabajo semanales.

1.2) Funcionarios: 17 casos.

Se ubican médicos con 40 horas de trabajo semanales, pero cuyas funciones están dirigidas a la coordinación, administración y dirección de las tareas de otros médicos.

1.3) Bajo Rendimiento: 24 casos.

Médicos caracterizados porque la cantidad de pacientes que atienden por hora de trabajo es muy baja. Algunos de estos médicos no trabajan tiempo completo.

2) Monoempleados Independientes Altos Ingresos: 5 casos.

Este pequeño grupo está caracterizado porque sus integrantes ejercen la profesión médica por su cuenta donde además obtienen ingresos muy superiores al resto de los médicos.

3) Monoempleados Independientes: 78 casos.

Este grupo está constituido por médicos que practican la profesión de manera independiente y cuyos ingresos son similares al promedio del total de médicos.

Este grupo se subdivide en dos:

3.1) Monoempleados Independientes Convencionales: 50 casos.

Su rendimiento es cercano al promedio de todos los

casos.

3.2) Monoempleados Independientes Bajo Rendimiento: 28 casos.

Su rendimiento es muy bajo. Normalmente declararon trabajar muy pocas horas y sus ingresos se encuentran por debajo del promedio de total de casos.

4) Subempleados Cualitativos: 21 casos.

Personas con un solo empleo (asalariado o independiente) ajeno a la práctica médica.

5) Biempleados Médicos: 89 casos.

Grupo caracterizado por tener dos empleos en los cuales desempeñan sus capacidades médicas.

El grupo se subdivide en 3:

5.1) Médicos asalariados en sus dos trabajos. 25 casos.

5.2) Médicos que declararon como su trabajo principal el asalariado y como secundario el independiente. 49 casos.

5.3) Médicos que declararon como su trabajo principal, el independiente y como secundario el asalariado.

Los ingresos en su trabajo principal son más altos que en los de su segundo trabajo. Se considera una extensión del grupo 2. 15 casos.

6) Biempleado Médico-No Médico: 19 casos.

Grupo donde se combina un trabajo médico y uno no-médico. El trabajo médico aparece como trabajo principal y normalmente es de tiempo completo.

7) Biempleo No Mèdico-Mèdico: 12 casos.

En este grupo tambièn se combina un trabajo mèdico y un no-mèdico. A diferencia del grupo anterior el empleo no-mèdico aparece como el principal, y el empleo mèdico se caracteriza por tener pocas horas, bajo rendimiento y bajos ingresos. Se considera una extensiòn del grupo 4.

8) Triempleo Mèdico: 32 casos.

Grupo de mèdicos con 3 empleos mèdicos.

Se subdivide en 3:

8.1) Con tres empleos asalariados. 5 casos. El segundo o tercer empleo es en una instituciòn de educaciòn superior.

8.2) Con dos empleos asalariados y uno independiente, pero el principal siempre asalariado. 22 casos.

8.3) Con empleo principal independiente y segundo y tercero asalariados. 5 casos.

9) Triempleo Mèdico-Mèdico-No Mèdico: 5 casos.

Se caracterizan por tener un empleo No-Mèdico que bien puede ser el segundo o el tercero pero nunca el principal.

Conclusiones.

La mayoria de las aplicaciones en estadistica no son llevadas a cabo en forma directa y sistemática a partir del marco teòrico planteado y de la informaciòn con que se cuenta. Generalmente es necesario adecuar (o incluso desarrollar) la metodologìa a los

datos disponibles, o bien, los datos a la metodología. En la aplicación del análisis de conglomerados aquí ilustrada, fue necesario refinar la información existente, mediante la asignación de un esquema de ponderación a las diferentes variables; de no haber hecho esto, ni el mejor algoritmo del análisis de conglomerados hubiera sido capaz de producir patrones de empleo médico consistentes con el marco teórico. De esta manera se obtuvieron un total de 9 patrones de empleo médico (algunos de ellos con subdivisiones) que muestran las formas predominantes en las que se ubican los médicos en el mercado laboral de las áreas urbanas de México. Los grupos así formados pueden ser analizados consistentemente bajo la perspectiva teórica elegida y serán usados en estudios posteriores para probar diferentes hipótesis sobre las determinantes del empleo médico en México.

Bibliografía.

1. Frenk,J., Robledo,C., Nigenda,G., Arredondo,A., Vázquez,L., Ramírez,C. Subempleo y Desempleo entre los Médicos de las Áreas Urbanas de México. Síntesis Ejecutiva 8/87. Instituto Nacional de Salud Pública. 1987.
2. Hartigan, J.A. Clustering Algorithms John Wiley & Sons. New York. 1975.
3. Cormack, R.M. A Review of Classification. J. Roy. Statist. Soc. A. (134) 321-367. 1971.

OPTIMIZACION DE LA FUERZA DE TRABAJO
EN EL SERVICIO TELEFONICO MANUAL

Dra. Teresa López Álvarez
Centro de Investigación en Matemáticas
Apartado Postal 402
Guanajuato 36000, Gto.

1. Introducción

Las llamadas de larga distancia internacional asistidas por operadoras son una fuente importante de ingresos de la compañía Teléfonos de México. La causa que motivó este estudio es el hecho de que se observaron algunos problemas en este servicio y se decidió en 1985 formar una comisión para atacarlos; su trabajo se dividió en tres grandes áreas que fueron técnica, mercadotecnia y administración. Sus propuestas serían analizadas y de ser posible se experimentarían en el Centro Internacional de Hermosillo, el cual tiene las siguientes características: es de tamaño pequeño, no está saturado y es solo para tráfico internacional.

El presente trabajo se enmarca dentro del área administrativa y consiste en determinar la fuerza de trabajo óptima en el servicio de llamadas de larga distancia internacional asistidas manualmente.

El primer paso para iniciar el estudio fue conseguir la información pasada acerca del desempeño diario de las operadoras, para lograr esto, hubo que vencer la resistencia de administradores que pensaban que no tenía sentido estudiar lo que ya había pasado y que lo que importaba era el presente. Es claro que estas personas no tenían la visión suficiente como para darse cuenta del valor que tiene la información potencial en una empresa; Hunter (1986) es muy claro a este respecto. Quizá la falta de entrenamiento en estadística sea la causa de tal falta de visión.

Para realizar este estudio se analizaron datos correspondientes a los años 1983 a 1985 para el Centro Internacional de Hermosillo, basándose en esta información y usando la metodología descrita en el trabajo, se llegó a la conclusión de que la oferta del servicio estaba muy por debajo de la demanda y que había que incrementar el número de operadoras.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: la sección 2 describe los datos con los que se contó, así como el modelo para la demanda del servicio en función de la hora del día y el número de operadoras; la sección 3 presenta la función de utilidad media o esperada que toma en cuenta los resultados de la sección precedente; la sección 4 muestra los resultados de la política óptima, tomando en cuenta un escenario conservativo acerca del crecimiento de la demanda y finalmente la sección 5 da un resumen y conclusiones.

2. Análisis de la Oferta y la Demanda

Antes de describir los datos es conveniente mencionar la manera en que se obtiene la información que se analizó. Al atender una llamada la operadora llena manualmente una teleboleta donde describe la llamada (tiempo, tipo, origen, destino, etc.). Posteriormente todas las teleboletas del día se concentran, se revisan y se acumulan los datos acerca del número de llamadas, número de conferencias, etc. sobre las llamadas "hojas de desempeño". Nótese que por su obtención la información no registra llamadas que se intentaron hacer pero no fueron atendidas por ninguna operadora; es decir, no se contó con el

dato acerca de la demanda real del servicio.

De las hojas de desempeño diario se obtuvieron los siguientes datos:

a) Número de llamadas telefónicas (NLD)

Una llamada telefónica es registrada cuando la operadora contesta y trata de establecer comunicación, sin importar si en efecto se realiza una conversación.

b) Número de conferencias (NC)

Una llamada se convierte en conferencia cuando en efecto se realiza una conversación. Las conferencias son las que generan ingresos por lo que es lo que en realidad nos interesa analizar, pero sin embargo, lo más simple es tratar de estudiar las llamadas.

c) Número autorizado de operadoras (OA)

Para cada hora de cada día hay un número específico de operadoras, quienes deben atender el conmutador. Este número es asignado por personal con experiencia de una manera empírica y ha permanecido constante durante los tres años que consideramos en este estudio.

d) Número de operadores reales (ORD)

La realidad dista de lo establecido, por lo que es importante contar el número de operadoras que en efecto están en el conmutador. Para obtener el número de operadoras reales, cada quince minutos se hace un recorrido por las mesas y se cuenta el numero de operadoras que en ese momento están en el conmutador, durante la hora se promedian estas 4 mediciones y así se genera el numero que se registra en las hojas de desempeño diario.

e) Carga (C_h)

La carga se define como NL/OR.

Para cada variable se tienen 25,266 observaciones. Ya que los datos que se analizan son para cada hora y cada día de la semana, de hecho se trabaja con series de aproximadamente 156 observaciones. Debido a que el tráfico es muy escaso en el horario nocturno, sólo se realizó el estudio de las 7 a las 20 horas y por limitaciones de tiempo sólo se consideró de lunes a viernes. Sábados y domingos quedan pendientes. Como ya se mencionó antes, esta información proviene del Centro Internacional de Hermosillo.

La información fue capturada por un servicio y antes de realizar el estudio se procedió a hacer una depuración de ésta. Incluyó identificar datos perdidos, días festivos, observaciones aberrantes debido a causas desconocidas (huelgas, paros, fallas de equipo, etc.), información mal capturada, etc.

El número de llamadas para cada hora de cada día de la semana es el resultado de un fenómeno aleatorio por lo cual se le puede asociar cierta función de densidad probabilística.

La densidad del número de llamadas se propone como un miembro de una familia Poisson ya que se ha encontrado que esta densidad describe adecuadamente el número de eventos en un intervalo de tiempo dado.

Para algunas horas se evaluó el estadístico de Kolmogorov-Smirnov, con el fin de probar la hipótesis que la distribución es efectivamente de Poisson. En la tabla 2.1 se presenta para las 7 A. M. del lunes.

Tabla 2. 1

PRUEBA DE KOLMOGOROV SMIRNOV
PARA EL NUMERO DE LLAMADAS A LAS 7 A. M.

No. de Casos 152	Media 61.72			
Diferencias Extremas				
z-siluta	Positiva	Negativa	K-S-Z	P-bilateral
0.10323	0.10188	-0.10323	1.273	0.078

Por limitaciones de tiempo para realizar el estudio, así como de tiempo de máquina, se decidió agrupar la información de lunes a viernes. Se realizaron pruebas estadísticas sobre la igualdad de medias de distribuciones Poisson y se presentan en la tabla 2.2. Un estudio más fino requeriría analizar cada día separadamente, ya que se observa en la tabla 2.2 que sólo no se rechaza la hipótesis para las 7 A. M.

El analizar la información de cada hora en realidad no es muy adecuado ya que de hecho se tiene distinto número de operadoras atendiendo el conmutador para esa hora.

Con el fin de aclarar esta situación se procedió a agrupar la información por número de operadoras. Esto se ilustra a las 7 horas de un día hábil en que se tienen cinco operadoras autorizadas; sin embargo, en la práctica no existe exactamente este número. Ver tabla 2.3.

Tabla 2.2
IGUALDAD DE MEDIAS DE DISTRIBUCIONES POISSON

Hora	N_i	Día				Calc χ^2
		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	
7- 8	X	82	93	82	71	8.0
	N_i	61.8	60.3	61.7	63.0	
8- 9	N_i	57	94	83	87	18.3*
	X	139.7	133.4	133.5	131.54	
19-20	N_i	54	61	48	40	44.3*
	X	316.2	295.7	299.3	298.0	

$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ donde λ_i es la media de distribución de Poisson

Tabla 2.3.
DESAGREGACION POR NUMERO DE OPERADORAS
A LAS 7 HORAS DE UN DIA HABIL

Intervalos	Número de Operadoras Autorizadas = 5	Número Promedio de Operadoras Reales	
		Número de Días	Número Promedio de Operadoras Reales
4.5 ≤ OPER*	81	4.76	
4 < OPER < 4.5	389	4.17	
3.5 ≤ OPER < 4	178	3.61	
OPER < 3.5	101	2.98	

OPER = Número de Operadoras reales

En la tabla 2.3 se observa también que a pesar de que las operadoras autorizadas son 5, sólo el 11% de los 749 días fueron más de 4.5, por lo que el factor de ausentismo es un parámetro de importancia.

Ahora, para cada hora y diferente número de operadoras reales promedio se considera que se tiene una distribución de Poisson. Formando estos intervalos para cada hora, se obtuvieron las llamadas y conferencias promedio. La información se presenta en la tabla 2.4.

Tabla 2.4
TRAFICO DE DIAS HABILES POR HORA CONSIDERANDO
DISTINTO NUMERO DE OPERADORAS

Hora	OR	OA	Carga	Promedio NL	Promedio NC
7-8	3.0	5.0	18.4	54.1	39.9
	3.5	5.0	15.8	57.2	41.8
	4.2	5.0	14.8	62.0	45.5
	4.8	5.0	14.5	68.6	52.1
8-9	6.4	10.3	18.6	119.2	84.6
	7.5	10.3	17.1	127.9	91.1
	8.4	10.3	16.0	133.7	96.6
	9.4	10.3	15.4	144.4	101.1
9-10	11.0	15.5	18.4	202.3	140.4
	12.4	15.5	17.2	213.6	148.5
	13.4	15.5	16.7	222.4	155.2
	14.7	15.5	16.1	235.9	166.6
10-11	12.8	17.0	16.9	217.2	147.3
	14.5	17.0	16.2	234.1	161.1
	15.4	17.0	15.9	243.7	168.1
	16.7	17.0	15.3	254.1	174.8
11-12	12.3	16.2	16.2	207.8	139.2
	14.4	16.2	15.3	220.9	150.6
	15.5	16.2	14.8	229.9	154.5
	17.2	16.2	14.7	252.5	170.0
12-13	9.8	14.8	16.2	158.9	104.3
	11.5	14.8	15.7	162.3	108.9
	12.4	14.8	14.0	173.9	114.0
	13.3	14.8	13.2	176.1	116.2
	14.7	14.8	12.5	183.9	121.4
13-14	8.5	12.5	15.0	126.8	81.8
	9.9	12.5	13.4	133.0	86.1
	10.8	12.5	12.9	139.0	91.4
	12.1	12.5	11.8	143.1	91.5

Tabla 2.4 (continuacion)
TRAFFICO DE DIAS HABILES POR HORA CONSIDERANDO
DISTINTO NUMERO DE OPERADORAS

Hora	OR	OA	Carga	Promedio NL	Promedio NC
14-15	7.6	11.3	15.5	117.5	77.5
	8.7	11.3	14.1	122.3	79.0
	9.6	11.3	13.4	128.5	83.9
	11.2	11.3	11.6	129.7	84.3
	12.4	11.3	11.9	146.7	91.7
15-16	7.9	12.0	18.1	136.0	90.6
	9.4	12.0	15.9	147.8	99.6
	10.4	12.0	14.9	154.2	102.8
	11.3	12.0	14.1	159.9	107.1
	13.6	12.0	12.8	173.9	122.0
16-17	7.9	15.3	19.8	156.3	103.6
	9.8	15.3	18.7	183.6	117.9
	10.9	15.3	17.7	193.2	127.9
	11.8	15.3	16.9	200.3	133.5
	12.8	15.3	16.9	216.6	143.7
17-18	7.9	15.3	15.5	227.9	150.1
	11.5	17.0	17.7	203.7	130.4
	13.4	17.0	16.1	216.8	139.7
	14.4	17.0	15.7	226.4	145.5
	15.4	17.0	15.1	232.1	150.6
18-19	16.3	17.0	15.0	244.8	158.7
	17.9	17.0	14.3	255.8	167.2
	15.1	22.0	17.9	270.4	173.9
	16.4	22.0	17.2	281.8	180.6
	17.4	22.0	16.6	288.4	184.7
19-20	18.5	22.0	15.8	290.9	186.7
	19.8	22.0	15.1	298.4	192.6
	15.3	21.5	17.5	267.2	170.7
	17.5	21.5	15.4	286.0	183.5
	18.3	21.5	15.9	291.4	186.5
20-21	19.4	21.5	15.3	296.3	190.6
	20.4	21.5	15.2	308.8	199.7
	21.6	21.5	14.9	321.0	202.4
	11.8	17.5	16.0	211.2	133.0
	13.5	17.5	17.8	240.0	154.6
	14.4	17.5	17.2	248.2	150.3
	15.6	17.5	16.3	254.0	164.2
	15.8	17.5	15.2	254.6	153.4
	18.0	17.5	14.6	263.0	159.0

En la tabla 2.4 se observa que las llamadas promedio van aumentando a medida que aumenta el número de operadoras promedio reales. Esto sucede para cada hora y este es un punto clave del estudio, ya que nos indica que la historia no presenta evidencia de que se tenga saturada alguna hora, ya que la saturación se presentaría si al aumentar el número de operadoras la media de la distribución no se incrementara.

Para verificar que en efecto las medias de las distribuciones Poisson asociadas a cada intervalo son diferentes se procedió a efectuar pruebas estadísticas. Los resultados para algunas horas se presentan en la tabla 2.5.

Otro punto importante de notar de la tabla 2.4 es que, así como las llamadas promedio van aumentando, también las conferencias van aumentando y son éstas últimas lo que realmente nos interesa que se incremente ya que es esto lo que genera ingresos. Desafortunadamente el análisis no se hizo sobre conferencias, ya que las razones por las cuales una llamada no se hace conferencia es a su vez un fenómeno aleatorio que no se modeló.

En la gráfica 2.1 se presenta el número de operadoras promedio versus el número de llamadas promedio y el número de conferencias promedio de 17 a 18 horas. Se observa claramente que la tendencia es siempre ascendente y que son gráficas casi paralelas. Esto indica que existe una proporcionalidad aproximada.

Tabla 2.5
PRUEBAS DE IGUALDAD DE MEDIAS DE POISSON CON RESPECTO
A EL PROMEDIO DE OR

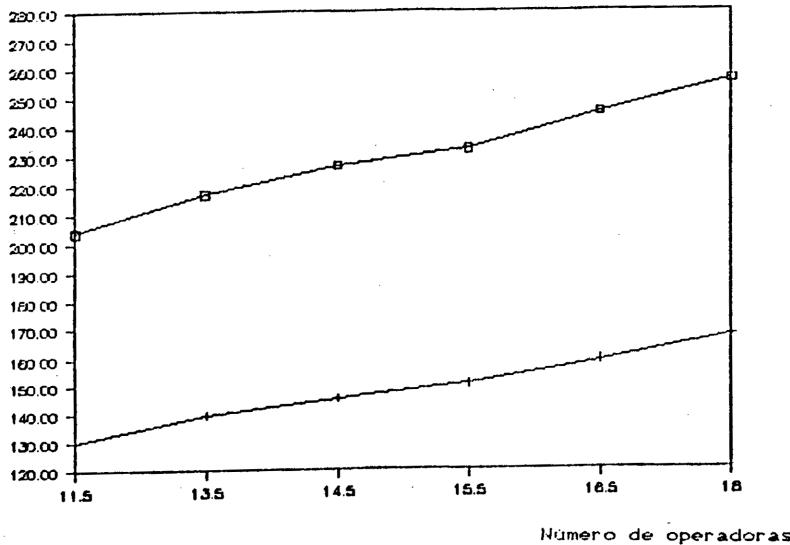
7 - 8 de un Día Habil

Prom.	Operadoras Reales				χ^2 global	t		
	1	2	3	4		1-2	2-3	3-4
4.8	4.2	3.6	3.0					
N	81	389	178	101	207.75*	11.6*	6.5*	3.34*
X	68.6	62.0	57.2	54.1				

10 - 11 de un Día Habil

Prom.	Operadoras Reales				χ^2 global	t		
	1	2	3	4		1-2	2-3	3-4
16.7	15.4	14.5	12.8					
N	199	238	172	145	372*	8.18*	6.2*	9.97*
X	254.1	243.7	234.1	217.2				

Gráfica 2.1.
NUMERO DE OPERADORAS VS. PROMEDIO DE NL o Y
PROMEDIO DE NC + DE 17 A 18 HORAS



3. Función de Utilidad Media Esperada

Para definir la función de utilidad se toma como base temporal el intervalo de una hora y sobre esta base se definen las siguientes variables:

N_A = No. de llamadas atendidas

N = No. de llamadas demandadas

C_h = Carga = No. de llamadas atendidas por operadora

Q = Ganancia por llamada

C = Costo de tener una operadora

M = No. de operadoras

Se tiene que

$$N_A = \min \{ N, C_h M \}$$

esto es: si la demanda es menor que la oferta en esa hora, entonces el número de llamadas atendidas es igual al número de llamadas demandadas; si, por el contrario la demanda excede la oferta, entonces sólo se atienden $C_h * M$ llamadas demandadas.

En base a esto, se define la utilidad como:

$$U = N_A Q - MC = Q \min \{ N, C_h M \} - MC \quad (3.1)$$

La fórmula (3.1) no se puede maximizar ya que N es aleatorio por lo que es necesario trabajar con promedios, de aquí que se emplea la utilidad media la cual está definida de la siguiente forma:

$$\bar{U}(U) = Q \bar{N}_A - MC \quad (3.2)$$

donde $\bar{U}(U)$ es la utilidad media y \bar{N}_A se puede pensar como un

promedio de realizaciones del fenómeno aleatorio N_A .

Para obtener $\mathbb{E}(N_A)$ es necesario conocer la distribución de N_A y ésta se considera una Poisson truncada que está definida de la siguiente manera:

$$P(N_A=x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, \dots, [C_h M] - 1 \\ \frac{[C_h M] - 1}{1 - \sum_{i=0}^{[C_h M]-1} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}} & x = [C_h M] \end{cases} \quad (3.3)$$

y entonces

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{n=0}^{[C_h M]-1} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + [C_h M] \times \left(1 - \sum_{i=0}^{[C_h M]-1} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \right) \quad (3.4)$$

El parámetro λ se estimó con el número promedio de llamadas que se encuentran en la tabla 2.4.

Entonces la función de utilidad esperada estimada está dada por

$$\hat{U} = Q \left\{ \sum_{n=0}^{[C_h M]-1} n \frac{e^{-\hat{\lambda}} \hat{\lambda}^n}{n!} + [C_h M] \left[1 - \sum_{n=0}^{[C_h M]-1} \frac{e^{-\hat{\lambda}} \hat{\lambda}^n}{n!} \right] \right\} - MC \quad (3.5)$$

4. Determinación de la Política Optima

El criterio de optimalidad para determinar el número de operadoras por hora está basado en la maximización de la función de utilidad esperada estimada definida por la ecuación 3.5.

Dados Q , C y C_h , los cuales son parámetros fijos o fijados de antemano, observamos que 3.5 sólo depende de M y $\hat{\lambda}$. También de la tabla 2.4 sabemos que existe una relación entre $\hat{\lambda}$ y M , por lo que para cada pareja $(\hat{\lambda}, M)$ que demos se obtiene un valor para la utilidad esperada \hat{U} . Para encontrar los valores máximos de

se procedió a evaluar la ecuación 3.5 para distintas M y sus correspondientes $\hat{\lambda}$, y para M mayores que las de la tabla 2.4 se dejó constante el valor de $\hat{\lambda}$. Para ilustrar esto, se presenta la tabla 4.1:

Tabla 4.1
DIA HABIL A LAS 7 A.M.

Costo por operadora por hora = 1.8
 Ingreso por llamada por hora = 7.29
 Carga (No. de llamadas atendidas por operadora) = 15
 No. de operadoras autorizadas = 5

No. Operadoras	llamadas por hora	Promedio		
		Ingresos	Costos	Utilidades
3.5	57.2	371.18	6.48	364.71
4.0	61.9	420.76	7.40	413.36
5.0	68.5	491.47	9.25	482.22
5.5	68.5	497.66	10.18	487.49
6.0	68.5	499.03	11.10	487.93
6.5	68.5	499.16	12.03	487.13

En la tabla 4.2 se muestran los incrementos de utilidades en porcientos, entre el número de operadoras reales promedio para 1983-1985 y el número óptimo de operadoras. El incremento diario en utilidad resultó ser de un 16%.

Tabla 4.2
COMPARACION DE UTILIDADES CONSIDERANDO
OPERADORAS PROMEDIO REALES VS. OPERADORAS OPTIMAS

Hora	Oper. Promedio	Oper. Optimas	% Utilidad
7- 8	4	6	18
8- 9	8	11	21
9-10	13	17	21
10-11	15	18	13
11-12	15	18	15
12-13	12.5	15	8
13-14	10	12.5	8
14-15	10	12.5	14
15-16	10	14.0	19
16-17	11.5	17.0	32
17-18	14.5	19.0	19
18-19	17.5	21.0	13
19-20	18.0	25.0	19
20-21	15.0	19.5	16
Total			16

5. Resumen y Conclusiones

Se presentó una metodología para determinar el número óptimo de operadoras por hora en un centro de servicio telefónico manual. El enfoque se basa en información generada por las propias operadoras. Si en un momento dado se puede contar con la información acerca de la demanda real de llamadas por hora, entonces la función de pérdida esperada dada en la sección 3 puede usarse de la misma manera.

Este enfoque se puede utilizar en cualquier otra central, ya sea de servicio nacional o internacional.

Referencias

Hunter, William G. (1986). "Managing our Way to Economic Success: Two Untapped Resources". Report No. 4, Center for Quality and Productivity Improvement, University of Wisconsin - Madison.

LA COLINEALIDAD EN LA REGRESIÓN

Ernesto Barrios Zamudio
Centro de Investigación en Matemáticas
Apartado Postal 402, 36000
Guanajuato, Gto.

O. RESUMEN

La colinealidad es uno de los problemas que con mayor frecuencia se presenta en la regresión lineal aplicada. El problema ha atraido el interés tanto de estadísticos como de analistas numéricos. En el presente trabajo se describen algunos de los efectos de la colinealidad con el fin de llamar la atención sobre el problema. Se muestran las fuentes más comunes para que en la medida de lo posible se eviten. Se presentan distintas formas de diagnosticar la presencia de la colinealidad y finalmente, se proponen remedios y opciones para el caso en que no sea posible eliminarla.

1. INTRODUCCION

Considérese el modelo de regresión lineal,

$$Y = X\beta + u \quad (1)$$

donde, Y_{nx1} es la variable respuesta, X_{npx} la matriz de los regresores, β_{px1} es el vector de parámetros y u_{nx1} el error aleatorio, con los siguientes supuestos:

- a) $E(u)=\theta$ (vector de ceros)
- b) $Cov(u)=\sigma^2 I$ ($\sigma^2 < \infty$)
- c) X no estocástica, de rango completo ($\rho(X)=p$).

El estimador $\hat{\beta}$ de Mínimos Cuadrados (MC) del vector de parámetros β , está dado por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y. \quad (2)$$

La existencia y unicidad de $\hat{\beta}$ está garantizada por el supuesto 2c), X de rango p , luego $(X'X)^{-1}$ existe y es única. Por lo que en teoría, el análisis de la regresión puede llevarse a cabo sin problema.

En la práctica, sin embargo, al querer estimar β mediante un computador, o bien, los resultados son extraños, o simplemente la máquina no puede resolver las ecuaciones normales de MC,

$$X'X\beta = X'Y \quad (4)$$

Luego, aunque en teoría no se tiene problemas en el cálculo de $(X'X)^{-1}$, en el momento de querer resolver el sistema (4) mediante un computador (aritmética finita), esto resulta no tan fácil por las propiedades numéricas de la matriz de datos X . A manera de presentación diremos que la Colinealidad es precisamente el problema que surge del mal comportamiento numérico de la matriz X . Se dice que existe Colinealidad Perfecta si el rango de X es estrictamente menor que p .

El mal comportamiento de la matriz X , es el resultado de la débil independencia lineal de sus vectores columna (regresores), esto es, si $X=(X_1, \dots, X_n)$, X_i vector $n \times 1$, $i=1, \dots, p$, existen constantes t_1, \dots, t_p , no todas cercanas a cero, tales que, $\sum t_i X_i \approx 0$. Esto, como veremos más adelante se refleja en el número de condición de X , por lo que los analistas numéricos se refieren a la colinealidad como el mal condicionamiento de la matriz X . Así mismo, los econométristas identificaron el problema desde hace tiempo y se refieren a él como el problema de multicolinealidad, pero por lo comentado arriba, necesariamente se requieren de dos o más regresores involucrados, por lo que simplemente le llamaremos colinealidad.

Es claro que el problema de la colinealidad es de la estadística aplicada, pero aún más; Farrar y Glauber (1967), mencionan que "es una faceta y un síntoma de un diseño experimental pobre", Baz (1978), dice "es un problema de falta de información", o bien, Chatterjee y Price (1977), comentan que la colinealidad no es un problema de modelado sino de deficiencia en los datos. Así, la colinealidad es problema numérico (efecto) con orígenes estadísticos (causas).

En su libro, Montgomery y Peck (1982), citan como algunos de los objetivos de la regresión, los siguientes:

- Identificar los efectos marginales de los regresores X_i .
 - la estimación y predicción de la variable respuesta Y ,
 - la selección apropiada de las variables en el modelo,
- los cuáles no serán fáciles de alcanzar en presencia de colinealidad, pues al compartir los regresores información, el efecto particular de las variables se ve confundido. Además el mal comportamiento de X hace que la estimación de la variable respuesta sea sensible, lo que constituye una fuente de imprecisión. Por último, los métodos de selección de variables se verán oscurecidos bajo colinealidad.

El trabajo presente se ha estructurado de la siguiente forma: En la sección 2, se presentan algunos de los efectos de la colinealidad y por qué es ésta un problema. En la sección 3, se muestran las causas más comunes de la colinealidad. Despues, en la sección 4 se verán distintas formas de poder diagnosticar la presencia del problema. En la sección 5 se comenta que la solución óptima al problema es adicionando información de "mejor calidad", y se muestran algunas opciones para el caso en que no sea posible el remedio. Finalmente, se incluye a manera de conclusiones una estrategia a seguir en el análisis de la regresión.

2. EFECTOS DE LA COLINEALIDAD

Considérese el modelo de regresión (1), si se transforman las variables, centrándolas y estandarizándolas mediante

$$y_i = \frac{Y_i - \bar{Y}}{\left[\sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2 \right]^{1/2}}, \quad x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\left[\sum_{k=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_j)^2 \right]^{1/2}}, \quad (5)$$

se tiene la doble ventaja de eliminar posibles problemas de

colinealidad no esenciales y de poder interpretar las matrices $X'X$ y $X'Y$ como matrices de correlaciones entre los regresores y de los regresores con la variable respuesta, respectivamente. Aunque por otro lado, Beasley, Kuh y Welsch (1980), no consideran conveniente centrar las variables pues pueden ocultarse algunas relaciones de colinealidad entre los regresores. Para efectos de la presentación sin embargo, trabajemos con las variables transformadas por (5), entonces, considérese el modelo

$$Y = X\beta + u, \quad (6)$$

con las variables Y, X_1, \dots, X_p , centradas y estandarizadas. Los supuestos para el modelo (6) son los mismos que para el modelo (1). El estimador de MC para β está dado por (3),

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = CX'Y$$

donde $C = (X'X)^{-1}$. Para $\hat{\beta}$ se tiene que $E(\hat{\beta}) = \beta$, y $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 C$. En particular $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ y $V(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 C_{jj}$, $j=1, \dots, p$.

Se sabe por el teorema de Gauss-Markov que dentro de los estimadores lineales e insesgados de β , es el de MC $\hat{\beta}$ el mejor, es decir, de varianza mínima, pero esto no garantiza que ésta sea pequeña. De hecho, bajo colinealidad será posible explicar al menos uno de los regresores en términos de los otros, digamos X_j , por lo que el correspondiente coeficiente de determinación múltiple al hacer la regresión de X_j en función de los otros regresores, R_j , será cercano a 1, y como

$$C_{jj} = \frac{1}{1 - R_j^2},$$

entonces $V(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 C_{jj}$ tenderá a crecer demasiado, lo que se refleja en una gran incertidumbre sobre la estimación de β_j (demostaciones y referencias pueden encontrarse en Barrios (1987)). Los C_{jj} son llamados factores de inflación de la varianza (FIV) de los parámetros y Marquardt (1970) los interpreta como "los factores por los cuales las varianzas de los estimadores son incrementados, debido solamente a la correlación entre los predictores".

Ahora bien, si se considera también el supuesto esférico sobre los errores, es decir, si además se supone que los errores se distribuyen normalmente, el intervalo de confianza para β_j se ve incrementado en $C_{jj}^{-1/2}$, al separarse los regresores de la ortogonalidad, luego, por lo arriba comentado bajo colinealidad los intervalos de confianza de los parámetros se ven "inflados". Así mismo, hay un incremento de $100(\det(X'X))^{-1/2}-10\%$ en las regiones de confianza para el vector de parámetros debido a la no ortogonalidad de los regresores. En presencia de colinealidad la matriz $X'X$ es cercanamente singular y por lo tanto $\det(X'X)^{-1}$ tenderá a ser muy grande.

Por otro lado, la colinealidad en los datos provocará la sobreestimación de los parámetros. Sea $L = \|\hat{\beta} - \beta\|$, la distancia entre el estimador $\hat{\beta}$ y el vector de parámetros real β (no conocido);

$$E(L^2) = E(\|\hat{\beta} - \beta\|^2) = \sum V(\hat{\beta}_j)$$

que como se mencionó arriba, bajo colinealidad al menos uno de los sumandos tenderá a ser muy grande, luego,

$$E(L^2) = E(\|\hat{\beta}\|^2) + \|\beta\|^2,$$

por lo que,

$$E(\|\hat{\beta}\|^2) = \|\beta\|^2 + \sum V(\hat{\beta}_j) = \|\beta_j\|^2 + \sum \lambda_j^{-1}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, son los valores característicos de $X'X$. Así, en presencia de colinealidad del estimador $\hat{\beta}$ en general será mucho más grande que β .

3. FUENTES DE LA COLINEALIDAD

Si frente a un problema se pueden identificar sus causas, en general, se estará en posición de dar la mejor solución. Esto no siempre será posible con la colinealidad, o bien, aún identificándolas resulte imposible eliminar el problema; en tal caso, en la sección 5 se propondrán algunas opciones.

En su libro, Montgomery y Peck (1982), consideran como fuentes

principales de la colinealidad:

1. El método empleado en la colección de datos. Cuando las observaciones son tomadas solamente de un subconjunto del espacio muestra, donde el comportamiento de las variables explicativas está relacionado. Por ejemplo, si al analizar el consumo de gas doméstico como función del ingreso familiar, el número de personas por familia y el consumo de energía eléctrica y la muestra se restringe a un solo rumbo de la localidad, seguramente el consumo de electricidad podrá ser explicado a su vez por el ingreso y el tamaño de la familia. Así también, muchas veces la colinealidad se presenta cuando se trabaja con variables con rango de variación pequeño.

2. Las restricciones sobre la población o el modelo. Las restricciones en la población son quizá la causa de colinealidad más frecuente en Econometría, cuando se trabaja con variables temporales, pues en general tienden a crecer o disminuir de manera conjunta. En ocasiones también, variables incluidas en los modelos son resultado de la agregación de otras, por lo que resultan compartiendo información con el resto de los regresores. Tal es el caso del PIB (Producto Interno Bruto) cuando es incluido en modelos económéticos.

Por otro lado, si el modelo incluye por ejemplo, variables indicadoras exhaustivas, desde su postulación se estará introduciendo relaciones de colinealidad por la dependencia de las variables.

3. Elección del modelo. Es conocido el mal comportamiento de los polinomios de grados altos cuando son usados para ajuste o interpolación. Esta causa también puede ser el resultado de las dos anteriores, por ejemplo, x y x^2 se comportan parecido alrededor de 1.

4. Sobre especificación del modelo. Esta causa de colinealidad es

frecuente en modelos de estudio de la salud y en los modelos econométricos, donde se incluyen demasiadas variables explicativas que necesariamente resultan relacionadas entre ellas.

Finalmente, el conocer las fuentes de la colinealidad nos permite evitarla cuando es posible y, eventualmente proponer alguna solución.

4. DIAGNOSTICO DE LA COLINEALIDAD

A través del tiempo se han definido distintos criterios para detectar la presencia de la colinealidad. Algunos de ellos se basan en el estudio de los efectos del problema, otros, en el análisis directo de la matriz de datos X . Ciertos métodos de diagnóstico son simples y no requieren de gran esfuerzo, aunque quizás por esto no son del todo seguros. Otros, diríamos que son casi infalibles, pero requieren de trabajo extra al de un análisis de regresión estándar.

1. Entre las formas de diagnóstico más simple, está el observar los elementos de la matriz $X'X$, en su forma de correlación, $\text{corr}(X_i, X_j) = \hat{\rho}_{ij} = (X'X)_{ij}$. Aquellos elementos cercanos a ± 1 , indican una correlación alta entre las variables correspondientes. Sin embargo, es posible que aún bajo colinealidad perfecta ésto no se presente porque la dependencia lineal se está dando entre más de dos regresores.

2. De la expresión para los intervalos de confianza de β_j , se puede ver que bajo colinealidad, éstos serán grandes, lo que lleva a que los estadísticos t -parciales sean poco significativos, mientras que la F -global, si lo sea, lo que se interpretaría como que el modelo en general tiene sentido, mientras que sus predictores no justifican su presencia. Así pues, t -parciales pequeñas, F -global grande, es síntoma de colinealidad, pero no

necesariamente bajo colinealidad ésto se presenta.

3. Como se comentó en la sección 2, la colinealidad produce estimadores numéricamente muy sensibles. así, una manera de verificar su presencia es la sensibilidad de los estimadores al eliminar observaciones y/o regresores. Valores de las estimaciones poco esperadas o de signo contrario pueden ser síntoma de colinealidad, aunque también, puede ser reflejo del poco conocimiento que tenemos de Y como función de los regresores.

4. Montgomery y Peck (1982) consideran que valores de FIV mayores que 10 son síntoma de colinealidad. Este procedimiento tiene la ventaja de poderse llevar a cabo con una salida estándar de regresión lineal en computador. Sin embargo, el procedimiento no da luz sobre las variables que intervienen en las relaciones de colinealidad.

5. Considérese la Descomposición en Valor Singular (DVS) de la matriz X; $X=UDV'$, donde $U_{n \times n}, V_{p \times p}$ son matrices ortogonales y $D=\begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Delta=\text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_p)$, $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_p$ son los valores singulares de X, mayores que cero (por 2c)) y $\Theta_{(n-p) \times p}$ matriz de elementos nulos. Bajo colinealidad la matriz X es mal condicionada numéricamente, es decir, su número de condición $K(X)=\delta_1/\delta_p$ es grande, reflejo de uno o más valores singulares pequeños. De hecho, $K(X)^{-1}$ puede interpretarse como "la distancia relativa de X a la colinealidad perfecta". Un número de condición mayor que 1000 es indicador de un problema grave de colinealidad.

6. Belsley, Kuh y Welsch (1980), definen los índices de condición $\eta_j = \delta_{\max}/\delta_j$, $j=1, \dots, p$, y consideran que índices mayores que 30 son síntoma de colinealidad.

7. Utilizando los valores singulares de X los FIV pueden expresarse como

$$FIV = \sum_{i=1}^p (v_{ij}/\delta_i)^2, \quad j=1, \dots, p, \quad \text{donde } X=UDV', \quad V=[v_{ij}],$$

Belsley, Kuh y Welsch (1980), descomponen porcentualmente los FIV y definen las proporciones de descomposición de la varianza:

$$\pi_{ij} := \frac{v_{ij}^2 / \delta_j^2}{FIV_j}, \quad i,j=1,\dots,p.$$

La matriz $\Pi = [\pi_{ij}]$, tiene columnas que suman 1 y cada fila está asociada a un solo valor singular. Valores de π_{ij} por encima de 0.50 significa que más de un 50% de la varianza del estimador $\hat{\beta}_j$ se concentra en una componente, situación que sería indicadora de mal comportamiento. Además el análisis de la matriz Π permite determinar las relaciones de dependencia y las variables involucradas.

S. CORRECION Y ALTERNATIVA.

El objetivo de la sección es presentar distintas opciones a seguir una vez identificada la presencia de la colinealidad. En ocasiones, será posible disminuir la gravedad del problema (inclusive eliminarlo); en otras, habrá que "vivir con el problema", y en tal situación se sugiere utilizar estimadores distintos a los de MC.

La mayoría de los autores coinciden en que el mejor remedio a la colinealidad es añadir información de "mejor calidad" de modo que precisamente se rompa la estructura colineal. Así por ejemplo, Silvey (1969), define cómo debe ser la información extra de modo que sea óptima. Pero esto no siempre es posible, o bien, como se vió en la sección 3, es el modelo mismo quien introduce la colinealidad. Por otro lado, en algunos casos es posible redefinir variables que incorporen toda la información de los regresores que intervienen en las relaciones de colinealidad y eviten usar todas éllas, aunque también aquí, ésto no será posible si el objetivo de la regresión es precisamente ver el efecto de éstas sobre la respuesta.

Como se comentó en la sección 2, $\hat{\beta}$ es el mejor estimador de β dentro de los lineales e insesgados, pero bajo colinealidad su varianza se ve inflada, por lo que se propone usar entonces estimadores distintos a los de MC. Se presentan a continuación algunos de ellos:

1. *Estimadores Bayesianos.* Incorporan información previa al modelo a manera de distribución a priori del parámetro β . Así por ejemplo, si se considera que $\beta \sim NC(\beta_0, \Sigma_0)$, el estimador bayesiano resulta dado por,

$$\hat{\beta}_B = \left[\sigma^{-2} X' X + \Sigma_0^{-1} \right]^{-1} \left[\sigma^{-2} X' Y + \Sigma_0^{-1} \beta_0 \right].$$

2. *Estimadores Mixtos.* Al igual que los bayesianos, incorporan información extra al modelo, pero ésta a manera de restricciones sobre el estimador. Esto es, se considera que en base a la información previa, es posible construir r restricciones sobre el parámetro ($r < p$)

$$\alpha = R\beta + v,$$

con α_{rx1} y v_{rx1} , vectores aleatorios, tales que $E(v) = 0$ y $Cov(v) = V$, R matriz de rango completo, conocida. El modelo es ampliado mediante las restricciones:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

y por MC, se tiene el estimador mixto:

$$\hat{\beta}_M = \left[\sigma^{-2} X' X + R' V^{-1} R \right]^{-1} \left[\sigma^{-2} X' Y + R' V^{-1} \alpha \right]$$

3. *Estimadores Cordillera.* Estos estimadores debidos a Hoerl y Kennard (1970), pueden presentarse como resultado de distintos procedimientos, uno de ellos, como la solución de las ecuaciones normales modificadas:

$$(X'X + \gamma I)\beta = X'Y, \quad \gamma \geq 0.$$

El estimador cordillera, está dado entonces por:

$$\hat{\beta}_C = (X'X + \gamma I)^{-1} X' Y$$

que es estimador lineal de β , pero sesgado para $\gamma > 0$. Su justificación radica en que para valores apropiados de γ , la

variación total de $\hat{\beta}_c$,

$$Vt(\hat{\beta}_c) = E((\hat{\beta}_c - \beta)^2) = \sum V(\hat{\beta}_{cj}) + \sum E^2(\hat{\beta}_{cj} - \beta_j),$$

es menor que la de MC, cuya $Vt(\hat{\beta}) = \sum V(\hat{\beta}_j)$, pues $\hat{\beta}$ es estimador insesgado de β .

4. Regresión en Componentes Principales. El procedimiento de componentes principales en la regresión ha mostrado ser efectivo cuando se tiene el problema de colinealidad. Básicamente consiste en transformar el modelo (1) a su forma canónica:

$$Y = Z\alpha + u$$

donde $Z = XV$, $\alpha = V'\beta$, con V_{pxp} matriz ortogonal. Luego el estimador MC de α está dado por:

$$\hat{\alpha} = A^{-1}Z'Y,$$

con $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$, con λ_i los valores característicos de $X'X$. La variación total de $\hat{\alpha}$, está dado por

$$Vt(\hat{\alpha}) = \sum V(\hat{\alpha}_j) = \sum \lambda_j^{-1}$$

Luego, si se eliminan las últimas componentes Z_p, Z_{p-1}, \dots que son las que más contribuyen a la variación de $\hat{\alpha}$, el resultado es un estimador sesgado de α , pero con menor variación que $\hat{\alpha}$. Al igual que con los estimadores cordillera, hay que conciliar la variación del estimador con el tamaño del sesgo que se está dispuesto a permitir.

Finalmente, vale mencionar que aunque la mayoría de los autores está de acuerdo en que la mejor solución al problema de la colinealidad es añadir información de mejor calidad, esto no siempre es posible, y en tal caso, como alternativa se presenta el uso de estimadores del tipo bayesiano o estimadores sesgados.

6. CONCLUSIONES

Se ha visto que la colinealidad es un problema lo suficientemente serio para no tomarse en cuenta, por lo que para concluir este trabajo, presentamos una estrategia a seguir frente a un análisis

de regresión.

Dada la variable respuesta y los regresores, se ha de estudiar el modelo y los datos para observar si desde el principio no se están incluyendo posibles relaciones colineales. En tal caso y cuando sea posible habrá que evitarlo.

Después de realizar los cálculos de estimación de β , habrá que diagnosticar si el problema de colinealidad está presente y en su caso, identificar la magnitud de éste. Para este fin, se sugiere el uso de los FIV, que pueden ser calculados a partir de una salida común de computador. El cálculo de la matriz Π de proporciones se recomienda sólo en el caso de tener la certeza de que haya colinealidad y no sea claro qué variables están involucradas, pues DVS puede resultar costoso (en cómputo).

Para remediar el problema de la colinealidad, adicione información que rompa la estructura de los datos. Si esto no es posible pero se cuenta con información adicional use estimadores del tipo bayesiano. Si el objetivo de la regresión es el pronóstico de la respuesta, la regresión en componentes principales ha mostrado ser eficiente. Finalmente, si el objetivo es el control o la explicación, se sugiere el uso de estimadores cordillera.

7. REFERENCIAS

- BARRIOS E. (1987), "El problema de la colinealidad en la regresión lineal", Comunicaciones del CIMAT, abr 1987.
- BAZ G. (1976), "Estimación sesgada en el modelo lineal". Tesis para obtener el Título de Actuario. Fac. de Ciencias. UNAM.
- BELSLEY D., E. KUH, R. WELSCH (1980), Regression diagnostics: Identifying influential data and sources of collinearity. Wiley.
- CHATERJEE S., B. PRICE (1977), Regression analysis by examples. Wiley.
- FARRAR D.E., R.R. GLAUBER (1967), "Multicollinearity in regression analysis: The problem revisited". Review of economics and statistics, vol 49, 92-107.
- HOERL A.E., R.W. KENNARD (1970), "Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems". Technometrics, vol 12, 55-67.
- MARQUARDT D.W. (1970), "Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation and non linear estimation". Technometrics, vol 12, 591-612.
- MONTGOMERY D.C., E. PECK (1982). Introduction to linear regression analysis. Wiley.
- SILVEY S.D. (1969), "Multicollinearity and imprecise estimation". JRSS B, vol 31, 539-552.

ECUACION DE AJUSTE DEL HAZ DE RADIACION GAMMA DE LA SALA DE ALTA
INTENSIDAD DEL CENTRO DE METROLOGIA DE LAS RADIACIONES IONIZAN-
TES.

M. en I.: José Ricardo Morales Payán
Fís.: José Trinidad Alvarez Romero
Instituto Nacional de Investigaciones
Nucleares.

INTRODUCCION

Debido a las necesidades del país de contar con un Centro - de Metrología de las Radiaciones Ionizantes (C.M.R.I.) para la - calibración a nivel de protección y radioterapia, el Instituto - Nacional de Investigaciones Nucleares (I.N.I.N.) se avocó a la - tarea de poner a funcionar un laboratorio secundario de calibra- ción dosimétrica, de conformidad con una red internacional de - los mismos (S.S.D.L.) [1], patrocinada por el Organismo Interna- cional de Energía Atómica.

El C.M.R.I. consta (entre otras) de una Sala de Radiación Gamma de Alta Intensidad con fines de calibración de equipo, fun- damentalmente de radioterapia y opcionalmente para equipos a ni- vel de protección, lo cual hace necesario conocer con alta exac- tud y precisión las medidas de rapidez de exposición de dicha sala, para lo cual es recomendable disponer de un modelo matemá- tico de predicción que tome en consideración las variables más relevantes del proceso y permita estimar los parámetros asocia- dos.

En dicha sala se ha instalado un Theratón modelo b, fabri- cado por la Atomic Energy Canadian Limited (A.E.C.L.) en cuyo - cabezal está contenida una fuente de Cobalto-60 con una activi- dad estimada de 11.925 TBq. (322.3 Ci) al 31 de oct./86. Además la sala cuenta con un sistema posicionador automático del ins- trumento a calibrar monitoreado por un circuito cerrado de tele- visión y un sistema también automático de control de humedad y temperatura.

1. PLANTEAMIENTO

De acuerdo con la literatura consultada [2, 3], el método de calibración a seguir es el llamado de "sustitución". Ello requiere el conocimiento del campo de radiación, que se obtiene midiendo la rapidez de exposición a diferentes distancias de la fuente, - considerando correcciones por decaimiento, presión, temperatura, humedad relativa, retrodispersión, tamaño de campo, etc. La expresión analítica propuesta para relacionar las variables antes mencionadas está dada por [4, 5]:

$$\dot{X} = \{C\dot{X}_0 e^{-(\mu/\rho)\rho d} e^{-\lambda t}\}/d^2 \quad (1)$$

donde:

μ = coeficiente de atenuación lineal (m^{-1})

ρ = densidad del aire ($Kg./m^3$)

(μ/ρ) = coeficiente de atenuación másico ($m^2/Kg.$)

$\rho = F(P, T, \% h)$ P = presión (pascales)

T = temperatura ($^{\circ}K$)

$\% h$ = % de humedad relativa.

d = distancia de la fuente al detector (m)

t_0 = tiempo de referencia al 31/oct./86, 11:47 Hrs.

t = tiempo transcurrido a partir de t_0 (hrs.)

λ = constante de decamiento ($hrs.^{-1}$)

C = constante de proporcionalidad

\dot{X}_0 = rapidez de exposición a 1 m. de distancia para el tiempo de referencia t_0 .

C toma en cuenta retrodispersión, dispersión, tamaño de campo, etc. Englobando a X_0 y C en una sola constante, la expresión (1) queda:

$$\dot{X} = \{K e^{-(\mu/\rho)d} e^{-\lambda t}\}/d^2 \quad (2)$$

Suponiendo que la expresión (2) las variables independientes distancia y tiempo son observadas sin error, o con un error que se considera despreciable con respecto a la incertidumbre de la variable dependiente \dot{X} , queda ésta como el valor de una variable aleatoria cuya distribución depende de la distancia y el tiempo. Involucrando el error de las mediciones experimentales de \dot{X} con respecto a su valor esperado (2) toma la forma:

$$\dot{X} = \{EK e^{-(\mu/\rho)d} e^{-\lambda t}\}/d^2 \quad (3)$$

Para simplificar el problema se procede tomando logaritmo natural a ambos miembros de (3), quedando:

$$\ln \dot{X} = \ln K - 2 \ln d - (\mu/\rho)d - \lambda t + \ln E \quad (4)$$

que en forma general se puede expresar como:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \epsilon \quad (5)$$

conocido como un modelo de regresión lineal múltiple de \dot{Y} en \vec{X} , - donde $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, [6]. Donde:

$$Y = \ln \dot{X} \text{ (variable dependiente)} \quad (6)$$

$$X_1 = \ln d \quad (7)$$

$$X_2 = d \quad (8)$$

$$X_3 = t \quad (9)$$

$$\alpha_0 = \ln K \quad (10)$$

$$\alpha_1 = -2.0 \quad (11)$$

$$\alpha_2 = -(\mu/\rho)\rho \quad (12)$$

$$\alpha_3 = -\lambda \quad (13)$$

$$\epsilon = \ln E \quad (14)$$

Así, \dot{X} toma la forma de la expresión (6), de tal manera que - las observaciones experimentales quedan como los logaritmos naturales de las mismas y la media de las Y por $\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$, para cualquier triada dada (X_1, X_2, X_3) . En general, una Y - experimental diferirá de esta media y esta diferencia queda indicada en (5) por la variable aleatoria ϵ .

Para n observaciones (X_1, X_2, X_3, Y) se desea determinar el modelo que proporcione el mejor ajuste.

Si se predice Y por medio de la ecuación:

$$Y' = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \quad (15)$$

donde a_0 , a_1 , a_2 y a_3 son los estimadores de α_0 , α_1 , α_2 y α_3 respectivamente; entonces e_i el error al predecir el valor de Y correspondiente a una triada dada (X_1 , X_2 , X_3), es:

$$Y_i - Y'_i = e_i \quad (16)$$

Debe observarse cuidadosamente que (15) proporciona una estimación del modelo de regresión lineal múltiple cuya ecuación real, pero desconocida está dada por:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \quad (17)$$

el error real al predecir Y_i es ϵ_i y este error es estimado por (16). Se escogerán a_0 , a_1 , a_2 y a_3 , de tal modo que la expresión siguiente sea un mínimo:

$$\sum_{i=1}^n \{Y_i - (a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + a_3 X_{3i})\}^2 \quad (18)$$

La condición necesaria de un mínimo relativo es anular las derivadas parciales de (18) con respecto a a_0 , a_1 , a_2 y a_3 obteniendo así, las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
 \Sigma Y &= n a_0 + a_1 \Sigma X_1 + a_2 \Sigma X_2 + a_3 \Sigma X_3, \\
 \Sigma X_1 Y &= a_0 \Sigma X_1 + a_1 \Sigma X_1^2 + a_2 \Sigma X_1 X_2 + a_3 \Sigma X_1 X_3, \\
 \Sigma X_2 Y &= a_0 \Sigma X_2 + a_1 \Sigma X_1 X_2 + a_2 \Sigma X_2^2 + a_3 \Sigma X_2 X_3, \\
 \Sigma X_3 Y &= a_0 \Sigma X_3 + a_1 \Sigma X_1 X_3 + a_2 \Sigma X_2 X_3 + a_3 \Sigma X_3^2
 \end{aligned} \tag{19}$$

donde ΣX_1 se escribe por $\sum_{i=1}^n X_{1i}$, $\Sigma X_1 X_2$ por $\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}$,
 $\Sigma X_1 Y$ por $\sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i$ y así sucesivamente [7].

Para n observaciones, (5) toma la forma:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \epsilon_i \tag{20}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

y se hacen las siguientes suposiciones básicas:

- a. ϵ_i es una variable aleatoria con media cero y variancia desconocida (σ^2); es decir:

$$E(\epsilon_i) = 0 \text{ y } \text{Var}(\epsilon_i) = \sigma^2 \tag{21}$$

- b. ϵ_i y ϵ_j están no correlacionadas, $i \neq j$, de modo que:

$$\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \tag{22}$$

Así

$$E(Y_i) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i}; \text{ Var}(Y_i) = \sigma^2 \tag{23}$$

y y_i y y_j , $i \neq j$, están no correlacionadas.

C. Por (a.) $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (24)

Bajo esta suposición adicional; ϵ_i , ϵ_j no solo están no correlacionadas, sino que son necesariamente independientes [6].

2. DISEÑO EXPERIMENTAL

Para obtener el modelo correcto de la forma (15) se toman en cuenta decisiones de estrategia experimental, a saber:

a. Dividir el intervalo experimental completo (0.800 - 7.500) en tres tramos, de modo que se obtengan 4 modelos:

Modelo	1	2	3	4
Tramo	1	2	3	Todo
Distancia	0.800-2.500	2.500-4.100	4.100-7.500	0.800-7.500

b. Aceptar la expresión (1) para derivar el modelo.

c. Incorporar mediciones repetidas de las observaciones experimentales, de modo que σ^2 pueda ser estimada simultáneamente con (15).

d. Evitar que se disparen los costos respecto al número de mediciones repetidas.

e. Obtener para cada tramo mediciones repetidas a intervalos iguales (por ejemplo cada 5 centímetros).

Estas consideraciones de estrategia experimental contemplan un análisis de variancia donde la suma de cuadrados residual se desglosa en suma de cuadrados por falta de ajuste y suma de cuadrados por error puro [6].

3. ANALISIS DE INCERTIDUMBRES

Un aspecto importante en la calibración es determinar las fuentes posibles de errores e incertidumbres para establecer los límites de incertidumbre asociados al proceso de medida.

En [9,10] se sugiere clasificar las incertidumbres en la siguiente forma:

Tipo A: Aquellas evaluadas por métodos estadísticos.

Tipo B: Aquellas evaluadas por otros métodos diferentes.

Para lo cual deben listarse todas las incertidumbres involucradas, a saber:

Las incertidumbres de tipo A (U_A) son caracterizadas por la variancia (S_i^2) y los grados de libertad v_i , calculados con las fórmulas apropiadas.

$$U_{A_i}^2 \equiv S_i^2 \quad (25)$$

Las incertidumbres de tipo B (U_B) son estimadas según la habilidad y criterio del experimentador, considerándose aproximaciones a las variancias correspondientes.

$$U_{B_j}^2 \equiv S_j^2 \quad (26)$$

Aplicando la teoría de propagación de errores [11] (análisis de variancia) se procede a calcular la incertidumbre combinada, para posteriormente calcular la incertidumbre global.

4. RESULTADOS

4.1.- Se usa un primer programa con dos propósitos:

Primero: Obtener dispersiogramas (con ajustes de regresión lineal simple) de las observaciones directas (R/H) y también de los logaritmos naturales de éstas, contra la distancia (m); por un lado para comprobar visualmente el comportamiento exponencial de (3) y por el otro para observar cómo mejora por tramos el porcentaje de la variación explicada por la regresión, (TABLA 1).

Segundo: Comprobar la geometría de diseño con respecto a la colocación de la fuente, suponiendo que para valores próximos a la unidad de los factores exponenciales de (2), ésta toma la siguiente forma: (TABLA 2).

$$(1/X)^{\frac{1}{d}} = (1/K)^{\frac{1}{d}} \cdot d \quad (2')$$

TRAMO	E N T R A D A			S A L I D A	
	MUESTRA	X	Y	R ² (%)	F(Fischer)
1	34	d	X	82.09	146.69
2	32	d	X	96.63	861.15
3	18	d	X	94.77	290.14
Todo	84	d	X	47.87	75.31
1	34	d	Ln X	97.86	1462.20
2	32	d	Ln X	99.68	9388.72
3	18	d	Ln X	99.44	2860.25
Todo	84	d	Ln X	91.33	863.96

TABLA 1. Primer propósito del punto 4.1.

TRAMO	ENTRADA			SALIDA			$d(m)$
	MUESTRA	X	Y	$R^2 (\%)$	B	M	
1	34	d	$(1/\dot{X})^{1/2}$	99.997	-0.101×10^{-4}	0.04821	0.0002
2	32	d	$(1/\dot{X})^{1/2}$	99.989	-9.922×10^{-3}	0.04870	0.0189
3	18	d	$(1/\dot{X})^{1/2}$	99.995	-2.205×10^{-2}	0.04870	0.0421
Todo	84	d	$(1/\dot{X})^{1/2}$	99.998	-0.219×10^{-3}	0.04842	0.0045

$B = \text{ordenada el origen}$ $M = \text{pendiente}$ $d(m) = \text{cero de la fuente mts.}$

TABLA 2. Segundo propósito del punto 4.1.

4.2. Se utiliza un segundo programa con 2 aplicaciones:

Primera: Generar los datos de entrada para el programa que estimá los parámetros del modelo (15).

DATOS DE ENTRADA		DATOS DE SALIDA PARA GENERAR EL MODELO				
\dot{X}	d	$X_1, \ln d$	X_2, d	X_3, t	$Y, \ln \dot{X}$	

Segunda: Para predicción de la rapidez de exposición $Y(N \text{ EST.})$ a condiciones normales de P y T, de la rapidez de exposición $Y(P, T)$ a la P y T experimentales y la distancia $d(\text{EST.})$:

ENTRADA	Y(OBS)	d	FECHA	HORA	P	T
SALIDA	t	$Y(P, T)$	$Y(N \text{ EST.})$	d (EST)		

y para mantenimiento del modelo (15):

ENTRADA	Y(OBS)	d	FECHA	HORA	P	T
SALIDA	Y(OBS)	Y(N EST.)	% ERROR RELATIVO			

M O D E L O	1	2	3	4
% ERROR REL. PROM.	0.16	0.11	0.08	0.26

4.3. Se utiliza un tercer programa para hacer el análisis de variancia y cuyos resultados incluyen (entre otros) los coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3) de (15). El tamaño de la muestra es n , s es el error estándard de estimación.

tramo modelo	1	2	3	todo
n	91	38	25	154
a_0	6.0940758	6.0559396	6.0500869	6.0938291
a_1	- 1.9925777	- 1.7534071	- 1.9667113	- 1.9874728
a_2	- 0.0053614	- 0.0798512	- 0.0085131	- 0.0093283
a_3	- 0.0000145	- 0.0000148	- 0.0000109	- 0.0000128
S	0.00200	0.00140	0.00090	0.00338

4.4. Se utiliza un cuarto programa para probar al nivel de significación $\alpha = 1\%$ la hipótesis nula H_0 :

$$\begin{aligned} H_0: \varepsilon_i &\sim N(0, \sigma^2) \\ H_1: \varepsilon_i &\text{ no está } \sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad \} \quad (27)$$

tramo	1	2	3	todo
Chi ² (tabla)	18.500	18.500	18.500	16.800
Chi ² (calc.)	7.969	6.575	7.313	4.373

observando que no se puede rechazar en ningún tramo (para los datos observados) la hipótesis nula.

4.5. RESULTADOS DEL ANALISIS DE INCERTIDUMBRES.

La incertidumbre global está dada considerando los diferentes componentes de la cadena de calibración del haz de radiación gamma de cobalto-60.

PASO DE LA CADENA DE CALIBRACION	INCERTIDUMBRE (%)			MAGNITUD O FACTOR
	TOTAL O GLOBAL	A	B	
Calibración del instrumento secundario en el laboratorio primario	2.0			calibración
Calibración del instrumento terciario en el laboratorio secundario	2.1 (K=3)		2.0	calibración
			0.1	distancia
			0.1	presión
			0.5	temperatura
			0.1	resolución del instrum.
		0.00 (v= 3)		dispersión de las lecturas
Calibración del haz de radiación gamma - CMRI-ININ Co-60 con el instrumento terciario.	(K=3)		2.08	calibración
			0.20	distancia
			0.10	presión
			0.40	temperatura
			0.02	tiempo
			0.10	resolución del instrumento
			0.01 (v=1)	dispersión de lecturas
Algoritmo de modelación del haz.	2.4 (K=3)	<1.0 (v>16)		modelación

- (1) Se asume que los coeficientes de propagación de error valen 1 y que las magnitudes son independientes (combinación cuadrática).

5. CONCLUSIONES

Tanto por los valores de R^2 y F (TABLA 1) como por los porcentajes de error relativo (4.2) resultan más recomendables los modelos 1, 2 y 3; (2.a).

Un desplazamiento de la fuente de 0.2 mm. respecto del origen (TABLA 2, tramo 1) se concluye (para los datos observados), que la posición geométrica de la fuente es correcta.

Los modelos recomendados proporcionan predicciones aceptables de rapidez de exposición y distancia; sin embargo, dichos modelos están sujetos a un programa de mantenimiento.

Así mismo, los modelos obtenidos para los tres tramos y el intervalo completo han pasado las pruebas con respecto a la bondad de ajuste de los residuales ($\alpha = 0.01$).

REFERENCIAS

- [1] Secondary Standard Dosimetry Laboratories:
Development & Trends
IAEA, Vienna (1985)
STI-PUB-706 (1985).
- [2] Technical Report Series N° 133
Handbook of Calibration of Radiation
Protection Monitoring Instruments
IAEA, Vienna (1971).
- [3] Technical Report Series N°185, pp. 17-20
Calibration of Dose Meters used in Radiotherapy
IAEA, Vienna (1979).

- [4] H. Cember
Introduction to Health Physics
Pergamon Press, USA (1982)
- [5] Evans, R.D.
The Atomic Nucleous (Eleventh Print.) Chaps. 23 y 24
Mc Graw Hill Book Company (1967).
- [6] N. R. Draper H. Smith
Applied Regression Analysis (2nd edition)
John Wiley & Sons (1981)
- [7] Bernard Ostle
Statistics in Research
The Iowa State University Press (1963)
- [8] John B. Kennedy & Adam M. Neville
Estadística para Ciencias e Ingeniería (2nd Edit.)
Harla, S.A. de C.V. (1982)
- [9] R. Kaarls
"Rapport du Groupe du Trabail sur L'expression des incertituy des"
(1ere reunion-1980) Au CIPM
Proces-Verbaux du Comité International des Poids e Mesures
Tome 49, 1981, pp. A1-A2.
- [10] J.P. Simoen
"Evaluation of Uncertainties in Calibration Procedures"
International Training Course of Dosimetry
23 october - 16 November, 1984, IAEA
Río de Janeiro, Brazil

[11] J.W. Müller
" Some Second Thought of Error Statements"
Nucl. Instr. & Meth. 163, 241-251 (1979)

REGRESION EN FUNCION DE LA EDAD DE VARIABLES OBTENIDAS
A PARTIR DEL ANALISIS DE FRECUENCIAS DEL
ELECTROENCEFALOGRAMA EN NIÑOS CON
DISTINTAS CARACTERISTICAS
SOCIOCULTURALES

Thalía Harmony, Erzsebet Marosi, Ana E. Díaz de León,

Jacqueline Becker

Universidad Nacional Autónoma de México

Alfredo Alvarez, Roberto Pascual, Pedro Valdés Sosa.

Centro Nacional de Investigaciones Científicas

Alexis Ramos

Universidad Central de Venezuela

Una de las características más importantes del electroencefalograma es la frecuencia de las ondas que lo componen. Tradicionalmente se reconocen cuatro bandas o rangos de frecuencia: delta (actividad entre 0.5 y 3.5 Hz), theta (de 3.6 a 7.5 Hz), alfa (de 7.6 a 12.5 Hz) y beta (de 12.6 a 30 Hz). Es conocido que la proporción de actividad de las diferentes bandas varía de acuerdo con la edad, sobre todo en la infancia. Mientras que la cantidad de actividad lenta (delta y theta) disminuye, la cantidad de alfa y beta incrementa. A través del análisis de frecuencias por medio de la transformada de Fourier es posible conocer la proporción exacta de actividad en cada una de las bandas de frecuencia. Esto ha permitido la obtención de ecuaciones lineales de regresión en función de la edad de la actividad en cada banda. Estas ecuaciones se calcularon por primera vez para un grupo de niños suecos seleccionados estrictamente de acuerdo a criterios neurológicos y psiquiátricos (Matousek y Petersén, 1973). Posteriormente se calcularon en un grupo de niños norteamericanos, observándose que coincidían con las descritas en los niños

suecos (John y cols., 1980). Esto motivó la creación de "normas electroencefalográficas" contra las cuales se compararon niños con diferentes tipos de trastornos neurológicos y psiquiátricos, observándose que un alto porcentaje de estos niños se desviaban de la norma (Ahn y cols., 1980; John y cols., 1983). Recientemente, Alvarez y cols. (1985) al comparar las pendientes de las ecuaciones de regresión en función de la edad de varios parámetros derivados del análisis de frecuencias en un grupo de niños cubanos y las pendientes descritas por Johyn y cols., no encontraron diferencias significativas. Estos resultados permitieron concluir que la maduración del EEG analizada a través del análisis de frecuencias por bandas era similar en todos los niños, independiente mente de factores étnicos, culturales y sociales.

El interés del trabajo que describimos a continuación fue el analizar las curvas de maduración del EEG en niños con distintas características económicas, psicosociales y culturales, con el objetivo de conocer si las "normas" previamente descritas eran aplicables a toda la población. En los estudios citados anteriormente se había seleccionado a los sujetos con criterios estrictos de "normalidad". Sin embargo en el estudio de niños de áreas marginadas urbanas observamos que era muy difícil encontrar sujetos que cumplieran con este criterio y por lo tanto se decidió cambiarlo. Se crearon grupos cuyos sujetos en el momento del estudio no tenían problemas conductuales ni neurológicos y que asistían regularmente a la escuela a un grado acorde con su edad y con buen aprovechamiento académico e inteligencia normal. También se estudiaron grupos de niños de clase media

que cumplían con los criterios estrictos de "normalidad": desarrollo psicomotor normal, no antecedentes de factores de riesgo asociados a la producción de daño cerebral, exámenes neurológico y psiquiátrico-absolutamente normales (incluyendo ausencia de síntomas menores) y exámenes psicológicos y pedagógicos - normales.

Material y Métodos.

Se estudiaron 6 grupos de niños de 3 países, - compuestos de la siguiente manera:

- 1) Cuba: 96 niños de 7 a 11 años de la ciudad de La Habana, 40 del sexo masculino y 56 del femenino, se seleccionados con criterio estricto.
- 2) México 1: 28 niños de clase media de la ciudad de México, 13 del sexo masculino y 15 del femenino, de 7 a 12 años, seleccionados con criterios estrictos.
- 3) México 2: 28 niños, 15 del sexo masculino y 13 del femenino, de un área marginada de la ciudad de México, de edades entre 7 y 12 años. Veinte de ellos tenían antecedentes personales de riesgo y/o desarrollo psicomotor retardado. Todos pertenecían a un grupo con claras desventajas socioeconómicas y culturales. No presentaban síntomas ni signos neurológicos ni grandes alteraciones conductuales, aunque se observaron con frecuencia algunos rasgos de conducta agresiva y de trastornos de los hábitos. Todos tenían un coeficiente intelectual (CI) normal y asistían regularmente a la escuela, con buen rendimiento académico de acuerdo a la escuela y a una evaluación pedagógica independiente.
- 4) México 3: 30 niños de un área marginada de la ciudad de Toluca, 19 del sexo masculino y 11 del femenino, entre 7 y 12 años. Todos pertenecían a la cla-

se media baja y baja. Dieciocho tenían antecedentes de riesgo. Todos tenían un examen neurológico normal y ausencia de trastornos psiquiátricos severos, - observándose la presencia de trastornos del sueño y de los hábitos en algunos niños. Todos tenían CI normal y asistían regularmente a la escuela con buen rendimiento académico.

5) Venezuela 1: 55 niños, de 4 a 12 años de la ciudad de Caracas, 28 del sexo masculino y 27 del femenino, pertenecientes a clases bajas y marginadas. - Diecisiete tenían antecedentes de riesgo. El examen pediátrico fue normal. En 53% se observaron signos neurológicos blandos. Cuarenta y cuatro niños tenían CI normal. Los restantes 11 ligeramente bajo (entre 75 y 90). Todos asistían regularmente a la escuela.

6) Venezuela 2: 26 niños de clase media, hijos de los profesores de la Universidad Central de Venezuela del sexo masculino del femenino, entre 7 y 12, 14 y 12 años. Todos cumplían con los requisitos estrictos de "normalidad".

En todos los sujetos se registró el EEG en reposo con los ojos cerrados en las siguientes derivaciones: F7T3, F8T4, C3Cz, P301, P402, T3T5 y T4T6. El análisis cuantitativo se realizó por medio de la transformada rápida de Fourier, calculándose la potencia en las siguientes bandas: delta, theta, alfa y beta. La potencia relativa para cada banda se calculó como el porcentaje de la actividad electroencefalográfica total. Para el análisis estadístico se utilizó la siguiente transformación: $X = \log(x/(1-x))$, ya que se ha demostrado que a través de ella se obtienen distribuciones Gaussianas.

En cada grupo de sujetos se calcularon las ecuaciones de regresión en función de la edad para cada banda en cada derivación. Debido a que los diferentes sistemas de amplificación usados para el registro del EEG podían producir diferencias en los interceptos, éstos no se consideraron. Las pendientes de cada recta se compararon con las publicadas por John y cols (1980) para los niños norteamericanos por medio de la t de Student:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$$

donde β_0 = al coeficiente de regresión teórico, $\hat{\beta}$ = coeficiente de regresión estimado y $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ = varianza estimada de la pendiente.

Resultados.

En las Tablas 1 a 4 se muestran los resultados obtenidos. Cada Tabla corresponde con la comparación en cada banda electroencefalográfica. En cada tabla, los valores de r corresponden con el coeficiente de correlación entre la potencia relativa y la edad para cada grupo de sujetos, en cada derivación. Los valores significativos de r están marcados con asteriscos (*). Se muestran también los valores de las pendientes obtenidas para cada grupo, así como la pendiente obtenida por John. Las diferencias significativas entre las pendientes de cada grupo y las descritas por John, se han marcado también con un asterisco (*).

En relación con la correlación entre la y edad y la potencia relativa es posible observar lo siguiente: fue significativa para casi todas las derivaciones en las bandas theta y alfa en los grupos 1, 2, 5 y 6. En la banda delta solamente los grupos 2, 5 y 6 tuvieron correlaciones significativas con la edad. Ambos grupos de Venezuela tuvieron correlaciones significativas entre la edad y la potencia relativa en la banda beta. En el grupo 3 solamente se observaron correlaciones significativas con la edad en la banda beta, y en el grupo 4 no existieron correlaciones significativas en ninguna banda.

En cuanto a las pendientes de las ecuaciones de regresión de los grupos 1, 2 y 6 en general no presentaron diferencias significativas con las descripciones para los niños norteamericanos. Las escasas diferencias observadas en estos grupos caen muy por debajo del nivel del azar para comparaciones múltiples usando el criterio de Bonferroni (Morrison, 1976).

Llama la atención la gran congruencia observada a pesar de grandes diferencias metodológicas; John y cols. usaron filtros digitales para el cálculo de la potencia en lugar de la transformada rápida de Fourier - usada en este trabajo, y demás las características de los filtros de los sistemas de amplificación fueron diferentes en todos los países, incluyendo Estados Unidos.

Sin embargo, en los grupos 3, 4 y 5 las pendientes de las ecuaciones de regresión en función de la edad de la potencia relativa fueron muy diferentes a las descritas por John. En los grupos de los niños de áreas marginadas de las ciudades de México y Toluca - (grupos 3 y 4) ya habíamos descrito que no se observaron correlaciones significativas con la edad, siendo además las pendientes muy diferentes a las descritas por John y cols, como puede observarse en las tablas 1 a 3 y figuras 1 a 3.

Por otra parte, en los niños de la clase marginal de la ciudad de Caracas, las pendientes en la banda theta, aunque correlacionadas significativamente - con la edad, fueron más pequeñas que las descritas en los niños norteamericanos (Vease tabla 2).

Discusión.

Antes que nada, es necesario comentar que las diferencias metodológicas no pueden explicar los resultados obtenidos. Los mismos sistemas de amplificación y de cómputo fueron usados en México para el estudio de los grupos 2, 3 y 4, y en Venezuela en el estudio de los grupos 5 y 6. Por lo tanto, debe buscarse otra explicación.

Como era de esperarse, se observaron correlaciones significativas entre los valores de potencia relativa de las diferentes bandas y la edad. Esto se cumplió para los grupos 1, 2, 5 y 6. En los grupos 3 y 4 no se observaron estas correlaciones, lo que en un principio pudiera achacarse al tamaño de la muestra. Esta no parece ser la razón por cuan-
to al incrementarse la muestra a 80 sujetos, en de-
rivaciones monopolares tampoco se observaron corre-
laciones significativas entre los valores de poten-
cia relativa y la edad en las bandas delta y alfa
(Díaz de León y cols, en preparación).

Los grupos de niños que presentaron pendientes muy similares a las descritas por John y cols, fue-
ron aquellos en los cuales se seleccionaron a los sujetos por criterios más o menos estrictos y los cuales compartían condiciones sanitarias, nutricio-
nales y ambientales adecuadas. Las obvias diferen-
cias étnicas y culturales existentes entre estos -
grupos y los sujetos norteamericanos a apartir de los cuales se calcularon las normas, no introducen-
diferencias en la maduración del EEG. Este hallaz-
go está de acuerdo con lo descrito por Ahn y cols-
(1980) que mostraron que las normas norteamericanas eran aplicables a los niños de Barbados, y en la si-
militud entre los niños de Suecia y de E.U. en cuan-
to a la maduración del EEG, ya mencionada anterior-
mente.

Sin embargo, los tres grupos de niños de las -
áreas marginadas de la ciudad de México (grupo 3), -
Toluca (grupo 4) y de Caracas (grupo 5) tuvieron un
comportamiento completamente distinto. Estos gru -

pos tenían varios rasgos comunes: un bajo nivel socioeconómico y cultural, condiciones insalubres, desnutrición, antecedentes de riesgo biológico y condiciones ambientales inadecuadas. Desconocemos si estas desviaciones del patrón típico de maduración del EEG tengan algún significado funcional en el presente o en el futuro, o si solamente quedaron como una huella de una lesión cerebral producida por un evento nocivo (por ejemplo un factor de riesgo) de la cual el cerebro se ha recuperado totalmente. Los niños de estos grupos eran aparentemente completamente normales en el momento del estudio, sin embargo las escuelas y las familias de áreas marginadas con bajo nivel cultural generalmente no demandan grandes capacidades cognoscitivas en estos niños, por lo cual no es posible afirmar categóricamente que las diferencias en la maduración del EEG no impliquen diferencias en las capacidades intelectuales cognoscitivas de estos niños. En el momento actual nuestro grupo está desarrollando pruebas que puedan hacer evaluaciones objetivas en este sentido y está repitiendo el registro del electroencefalograma con el objetivo de hacer comparaciones intrasujeto que nos permitan dar mayor claridad al problema.

R E F E R E N C I A S

Ahn, H., John, E.R., Prichep, L., Baird, H., Trepentin, M. y Kaye, H. Developmental equations reflect brain dysfunctions. Science, 1980, 210, 1259, 1262.

Alvarez, A., Valdés, P. y Pascual, R. Clinical evaluation of Psi Alpha model for the EEG. Comparison with broad band spectral features. Technical Report No. NH-001, 1985, National Research Center of Cuba.

Gasser, T., Bächer, P. and Möcks, J. Transformations towards the normal distribution of broad band spectral parameters of the EEG. Electroenceph. clin. Neurophysiol., 1982, 53, 119-124.

Harmony, T. Neurometric assessment of brain dysfunction in neurological patients. Functional Neurosciences, Vol. III, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Ass., 1984.

John, E.R. Ahn, H., Prichep, L., Trepentin, M., Brown, D. y Kaye, H. Developmental equations for the electroencephalogram. Science, 1980, 210, 1255-1258.

John, E.R., Karmel, B.Z., Corning, W.C., Easton, P., Brown, D., Ahn, H., John, M., Harmony, T., Prichep, L., Toro, A., Gerson, I., Bartlett, F., Thatcher, R., Kaye, H., Valdés, P. y Schwartz, E. Neurometrics, Science, 1977, 196, 1393-1410.

John, E.R., Prichep, L., Ahn, H., Easton, P., Fridman, J. y Kaye, H. Neurometrics evaluation of cognitive dysfunctions y neurological disorders in children. Progress in Neurobiology, 1983, 21, 239-290.

Matousek, M. y Petersén I. Objetive measurement of maturation defects and other EEG abnormalities by means of frequency analysis. Proceedings of the V World Congress of Psychiatry, México, 1971.

Matousek, M. y Petersén, I. Frequency analysis of the EEG in normal children and adolescents. In P. Kellaway y I. Petersén (Eds), Automation of clinical electroencephalography, New York, Raven Press, 1973.

Morrison, D.F. Multivariate statistical methods. New York, McGraw-Hill, 1976.

Richards, J.E., Parmelee, A.H.Jr. and Beckwith, L. Spectral analysis of infant EEG and behavioral outcome at age five. Electroenceph. clin. Neurophysiol., 1986, 64, 1-11.

Yamane, T. Statistics; an introductory analysis. Havana, Edición Revolucionaria, 1967.

PODER RELATIVO DELTA

TABLA 1

GRUPOS	F7T3		F8T4		T3T5		T4T6	
	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE
1.- CUBA	-0.223**	-0.0259	-0.112	-0.0136	-0.152	-0.0156	-0.147	-0.0183
2.- MEXICO A	-0.395**	-0.0441	-0.296	-0.0312	-0.203	-0.0265	-0.263	-0.0417
3.- MEXICO B	-0.150	-0.0130	0.097	0.0110	0.145	0.0520*	-0.092	-0.0170
4.- MEXICO C	0.114	0.0180	0.224	0.0510**	0.195	0.0400*	-0.097	-0.0160
5.- VENEZUELA 1	-0.582**	-0.0569**	-0.598	-0.0629**	-0.545**	-0.0570	-0.572	-0.3574
6.- VENEZUELA 2	-0.088	-0.0059	0.030	0.0020	-0.507	-0.0304	-0.442*	-0.0312
7.- JOHN		-0.0179		-0.0186		-0.0383		-0.0346
GRUPOS	C3C2		C4C2		P3O1		P4O2	
	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE	χ^2	PENDIENTE
1.- CUBA	-0.191	-0.0246	-0.217*	-0.0233	-0.112	-0.0160	-0.148*	-0.0214
2.- MEXICO A	-0.432*	-0.0566	-0.285	-0.0366	-0.398*	-0.0501	-0.426*	-0.0638
3.- MEXICO B	-0.110	-0.0270	0.118	0.0290	0.082	0.0100	-0.091	-0.0160
4.- MEXICO C	0.192	0.3450*	0.300	0.0640	-0.110**	-0.0390	-0.316**	-0.0740
5.- VENEZUELA 1	0.431**	-0.0418	---	---	-0.417**	-0.0502	-0.539**	-0.0581
6.- VENEZUELA 2	-0.282	-0.0165	---	---	-0.634	-0.0450	-0.574	-0.0432
7.- JOHN		-0.0270		-0.0262		-0.0442		-0.0472

* $p \leq 0.05$

** $p \leq 0.01$

PODER RELATIVO THETA

TABLA 2

GRUPOS	F7T5		F8T4		T3T5		T4T6	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	-0.298**	-0.0259	-0.356**	-0.0310	-0.344**	-0.0372*	-0.430**	-0.0504
2.- MEXICO A	-0.473*	-0.0453	-0.527	-0.0564	-0.450*	-0.0441*	-0.688**	-0.0947*
3.- MEXICO B	-0.158	-0.0170	-0.115	-0.0190	0.224	0.0970*	0.219	0.0620*
4.- MEXICO C	-0.167*	0.0240*	-0.285	-0.0490*	-0.210**	-0.0570*	-0.336**	-0.0760*
5.- VENEZUELA 1	-0.285	-0.0099*	-0.128	-0.0043*	-0.626**	-0.0392*	-0.565**	-0.0328*
6.- VENEZUELA 2	-0.295	-0.0188	-0.456*	-0.0305	-0.578**	-0.0498	-0.589**	-0.0445
7.- JOHN		-0.0225		-0.0236		-0.0606		-0.0621
GRUPOS	C3CZ		C4CZ		P3O1		P4O2	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	-0.299**	-0.0371	-0.534**	-0.0440	-0.354**	-0.0435	-0.317**	-0.0402*
2.- MEXICO A	0.463*	-0.0595	-0.593**	-0.0894	-0.640**	-0.0872*	-0.600**	-0.0769**
3.- MEXICO B	0.164	0.0180	0.157	0.0100	0.219	0.0680*	0.241	0.0740**
4.- MEXICO C	0.150	0.0290	0.110	-0.0130	-0.163	-0.0260	-0.253**	-0.0650**
5.- VENEZUEL. 1	-0.419**	-0.0192	----	----	-0.444**	-0.0324**	-0.577**	-0.0365**
6.- VENEZUELA 2	-0.474*	-0.0293	----	----	-0.552**	-0.0470	-0.578**	-0.0490
7.- JOHN		-0.0285		-0.0206		-0.0649		-0.0647

* p<0.05
** p<0.01

PODER RELATIVO ALFA

TABLA 3

GRUPOS	F7T3		F8T4		T3T5		T4T6	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	0.295**	0.0477	0.299**	0.0501	0.226*	0.0395	0.274*	0.0526
2.- MEXICO A	0.410*	0.0725	0.466*	0.0748	0.264	0.0456	0.420*	0.0638
3.- MEXICO B	-0.157	-0.0320	-0.167	-0.0670	-0.289	-0.1760*	-0.164	-0.0910
4.- MEXICO C	-0.134	-0.0300	-0.157	-0.0469	-0.146	-0.0010	0.155	0.0510
5.- VENEZUELA 1	0.657**	0.0442	0.628**	0.0452	0.579**	0.0669	0.674**	0.0640
6.- VENEZUELA 2	0.268	0.0162*	0.379*	0.0184	0.586**	0.0605	0.537**	0.0504
7.- JOHN		0.0414		0.0360		0.0632		0.0596
GRUPOS	C3C2		C4C2		P3O1		P4O2	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	0.262*	0.0554	0.283**	0.0606	0.194*	0.0390	0.162	0.0332
2.- MEXICO A	0.477*	0.0862	0.561**	0.1038*	0.494*	0.0792	0.462	0.0789*
3.- MEXICO B	-0.143	-0.0320	0.122	-0.0550*	-0.103	-0.0340	-0.190	-0.0300
4.- MEXICO C	-0.308*	-0.0970	-0.217	-0.0570	0.102	0.0260	0.276	0.0070
5.- VENEZUELA 1	-0.429**	-0.0350	-----	-----	0.456**	0.0485	0.600**	0.0554
6.- VENEZUELA 2	-0.502	-0.0241	-----	-----	0.579**	0.0561	0.544**	0.0534
7.- JOHN		0.0250		0.0283		0.0494		0.0512

* p<0.05

** p<0.01.

PODER RELATIVO BETA

TABLA 4

GRUPO	F7T3		F8T4		T3T5		T4T6	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	0.095	0.0134	0.017	0.0025	0.136*	0.0219	0.076	0.0122
2.- MEXICO A	0.305**	0.0469	0.258**	0.0315**	0.405*	0.3768*	0.295*	0.0532*
3.- MEXICO B	0.535**	0.1960	0.716**	0.1990**	0.497*	0.2200*	0.481*	0.1770
4.- MEXICO C	0.205	0.0050	0.212	0.0650	0.184	0.0510	0.219	0.0500
5.- VENEZUELA 1	0.398**	0.0267	0.302	0.0219	0.199	0.0115	0.120	0.0075
6.- VENEZUELA 2	0.240	0.0168	0.210	0.0167	0.286	0.0187	0.415	0.0243
7.- JOHN		0.0081		0.0105		0.0073		0.0102

GRUPO	C3C2		C4C2		P3O1		P4O2	
	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE	r	PENDIENTE
1.- CUBA	0.108	0.0143	0.130	0.0166	0.198*	0.0284	0.268*	0.0406
2.- MEXICO A	0.434*	0.0419	0.591**	0.0767	0.557*	0.0751*	0.516*	0.0671*
3.- MEXICO B	0.202	0.1640	0.261	0.0930	0.576**	0.1780*	0.484*	0.1910
4.- MEXICO C	0.253**	0.0400*	0.138	0.0270	0.200	0.0550	0.238*	0.0500
5.- VENEZUELA 1	0.401**	0.0230	-----	-----	0.478**	0.0283	0.459**	0.0307
6.- VENEZUELA 2	0.591**	0.0350	-----	-----	0.436*	0.0248	0.452*	0.0287
7.- JOHN		0.0362		0.0347		0.0285		0.0290

* p<0.05

** p<0.01

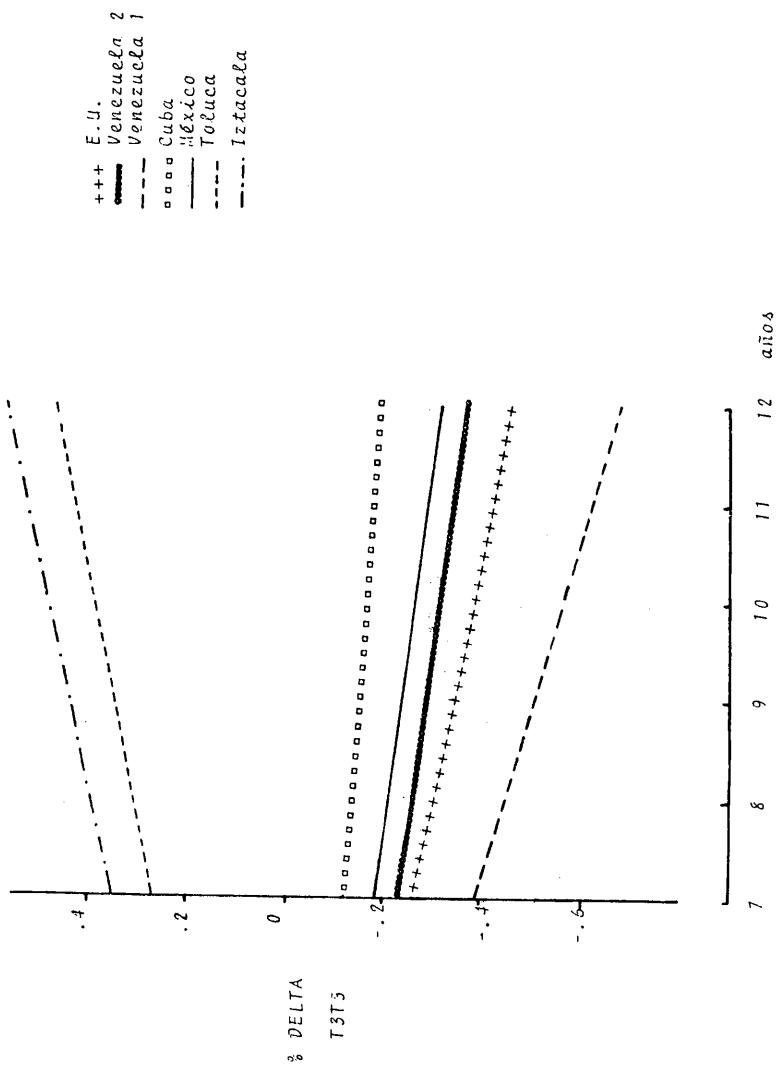


Figura: Delta 1

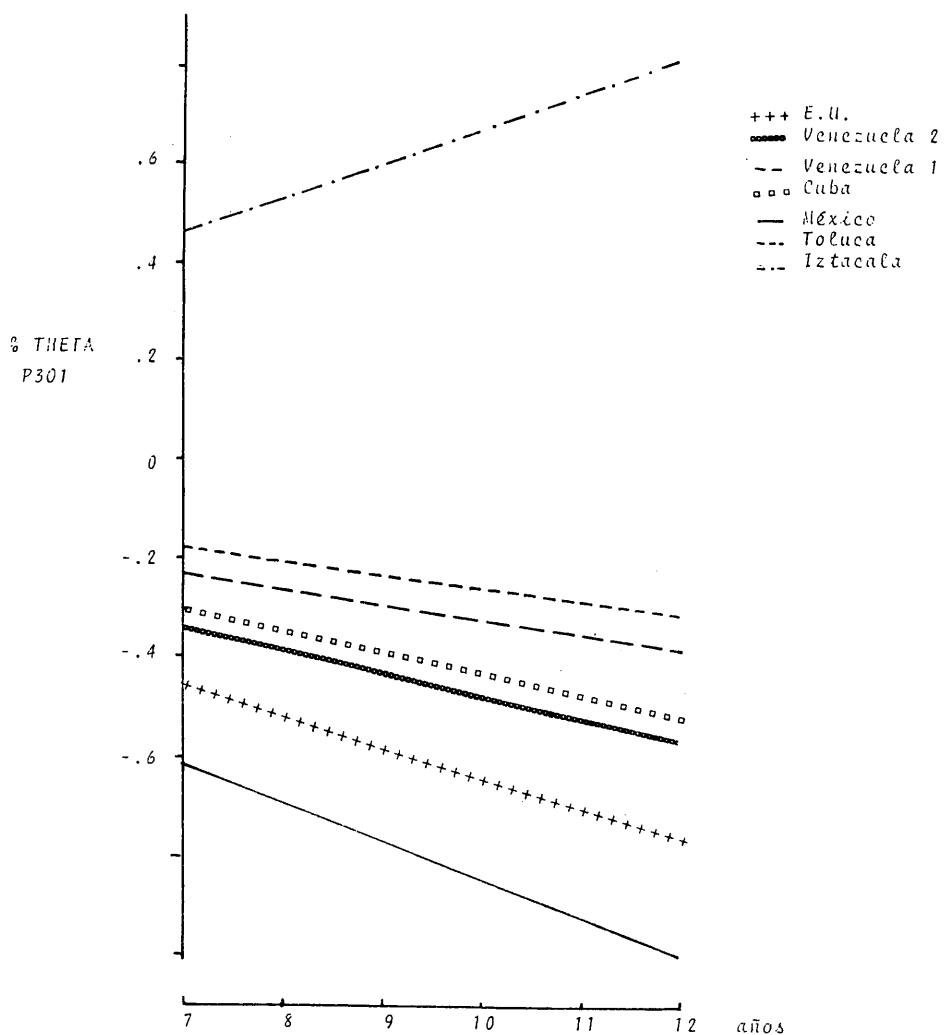


Figura: Theta 2.

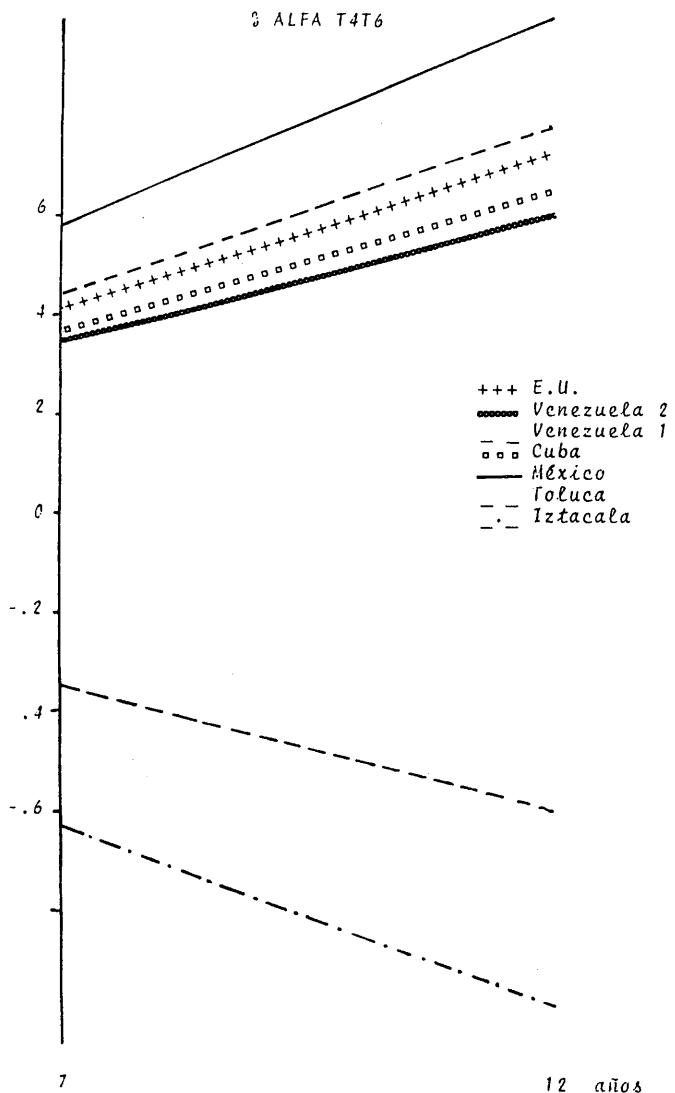


Figura: Alfa 5.

ANALISIS MINIMOCUADRATICO
DE LOS
DISEÑOS REVERSIBLES

Carlos Miguel Becerril Pérez
Angel Martínez Garza
Centro de Estadística y Cálculo
Colegio de Postgraduados

INTRODUCCION

Los diseños reversibles pertenecen a la clase de diseños experimentales conocida como Diseños con Mediciones Repetidas. Estos últimos diseños se caracterizan por utilizar de manera repetida la misma unidad de muestreo, la cual es expuesta a una secuencia de diferentes o iguales tratamientos; una descripción completa de estos diseños la presentan Hedayat y Afsarinejad (1975, 1978).

A consecuencia de la utilización de los Diseños con Mediciones Repetidas se generan una serie de conceptos, los cuales han sido descritos por Kershner (1980) y Becerril y Martínez (1986). Las aplicaciones y ventajas de estos diseños pueden encontrarse en la última referencia señalada.

En un diseño reversible un tratamiento puede ser aplicado una sola vez a una unidad de muestreo, o puede aplicarse de manera repetida en períodos no consecutivos. Se consideran tres períodos de aplicación y más de dos tratamientos, lo que conduce a que el número de secuencias distintas de aplicación de tratamientos dependa del número de éstos.

La idea de aplicar un mismo tratamiento de manera repetida a una misma unidad de muestreo fué desarrollada por Brandt (1938), el cual consideró el esquema básico de utilizar sólo dos tratamientos (A, B), aplicados de manera alterna, en tres períodos de tiempo, con lo cual se generan dos secuencias básicas, ABA y BAB. A estos diseños los identificó como "switch-back designs" (diseños

reversibles o de sobrecambio). El análisis de estos diseños fué realizado por el "método de diferencias" el cual tiene su origen en el análisis de muestras de dos poblaciones, cuando las muestras no son independientes (prueba estadística de 't' pareada).

Lucas (1956) consideró la utilización de más de dos tratamientos para el diseño de Brandt (1938), combinando el principio de utilizar un mismo tratamiento más de una vez en una sola unidad de muestreo y la utilización del diseño balanceado de bloques incompletos. De la misma manera, utiliza tres períodos de aplicación y su análisis lo basa en el método de diferencias.

Es interés del presente trabajo, proponer una metodología de análisis para los diseños reversibles, basada en el modelo lineal general y el análisis por cuadrados mínimos, la cual utilice directamente los datos observados durante el experimento.

DESCRIPCION

Los diseños reversibles han sido utilizados desde hace más de 30 años por investigadores en el área de la Medicina y la Zootecnia (Ciminera y Wolfe, 1953; Taylor y Armstrong 1953; entre otros) con animales de laboratorio y ganado lechero. Las unidades de muestreo pueden estar formadas por vacas lactantes después del pico de producción, al iniciar el período de declinación de la producción. Al utilizar los diseños reversibles la variación entre vacas debida a una diferente tasa de disminución de la producción es removida del error experimental.

De acuerdo con Lucas (1956), la comparación de t tratamientos requiere $t(t-1)$ secuencias (diseños completos) si t es par; en caso contrario, si t es impar y mayor o igual a 5, solo se requieren $t(t-1)/2$ secuencias (diseños reducidos). Con ésto se consigue que el efecto de tratamientos se encuentre balanceado en el diseño experimental. A partir de un diseño reducido puede obtenerse un diseño complementario, los cuales al considerarse en conjunto forman un diseño completo.

En el cuadro 1 se presentan diferentes proyectos para diferente número de tratamientos.

Como puede observarse, aunque los tratamientos se aplican seguidamente, no se considera la existencia de efectos residuales de tratamientos de un período a períodos posteriores.

La aleatorización en los diseños reversibles se realiza asignando los tratamientos al azar a los números de cada proyecto y posteriormente se asignan los individuos al azar a las distintas secuencias.

El efecto de períodos se consideran cruzado con respecto al efecto de cuadro, mientras que el efecto de secuencia (unidad de muestreo o individuo) puede considerarse cruzado, si se dispone de todas las unidades de muestreo para iniciar un experimento balanceado, con lo cual el efecto de cuadro se elimina, o bien considerarse anidado, lo que permite iniciar un trabajo experimental aún cuando no se disponga en un inicio de todas las unidades de muestreo para conformar un diseño balanceado.

En este trabajo se considera el efecto de individuo anidado en el efecto de cuadro.

Cuadro 1. Diseños Reversibles más Usuales

3 Tratamientos (diseño completo)

Bloque 1			Bloque 2		
A	B	C	A	B	C
B	C	A	C	A	B
A	B	C	A	B	C

4 Tratamientos (diseño completo)

Bloque 1				Bloque 2				Bloque 3			
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C
A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D

5 Tratamientos (diseño reducido)

Bloque 1					Bloque 2				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
B	C	D	E	A	C	D	E	A	B
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E

6 Tratamientos (diseño completo)

Bloque 1						Bloque 2						Bloque 3					
A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
B	C	D	E	F	A	C	D	E	F	A	B	D	E	F	A	B	C
A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F

Bloque 4						Bloque 5					
A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
E	F	A	B	C	D	F	A	B	C	D	E
A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F

7 Tratamientos (diseño reducido)

Bloque 1							Bloque 2							Bloque 3						
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
B	C	D	E	F	G	A	C	D	E	F	G	A	B	D	E	F	G	A	B	C
A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G

9 Tratamientos (diseño reducido)

Bloque 1									Bloque 2									Bloque 3								
A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	C	D	E	F	G	H	I	A	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Bloque 3									Bloque 4								
A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I
D	E	F	G	H	I	A	B	C	E	F	G	H	I	A	B	C	D
A	B	C	D	E	F	G	H	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Nota: Verticalmente se tienen las secuencias en tanto que horizontalmente se tienen los períodos.

A su vez, es importante observar que en los diseños reversibles los efectos de individuo y tratamiento no son ortogonales, ya que en una sola secuencia puede aparecer una sola vez, dos veces o ninguna un mismo tratamiento. Esto ha dificultado su análisis, ya que las sumas de cuadrados debidas a tratamientos no pueden obtenerse de manera convencional. Una manera de solucionar este problema fué el utilizar el método de diferencias para realizar el análisis; este método conduce a la eliminación en el análisis de la varianza, de los efectos de períodos y secuencia, a la formación de una combinación lineal del efecto de tratamientos (contraste) y a la obtención del cuadrado medio del error con la variación remanente. Aunque este método de análisis, coincide con el de cuadrados mínimos, cuando se evalúan dos tratamientos en dos períodos de aplicación, los grados de libertad del error cambian de manera considerable, cuando se consideran más de dos períodos.

Una especificación correcta del modelo lineal de los diseños reversibles, así como el análisis por cuadrados mínimos se presentan en las siguientes secciones.

MODELO LINEAL

Un modelo lineal para una sola observación, correctamente especificado, de los diseños reversibles es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + \pi_k(i) + N_{ijk}\tau_l + e_{ijk}$$

donde

y_{ijk} es la respuesta observada en la unidad de muestreo k -ésima, del período j -ésimo y cuadro i -ésimo.

μ es la media común a todas las observaciones.

α_i es el efecto del i -ésimo cuadro; $i=1,2,\dots,c$.

γ_j es el efecto del j -ésimo período; $j=1,2,3=p$.

$\pi_{k(i)}$ es el efecto de la k -ésima unidad de muestreo en el cuadro i -ésimo; $k=1,2,\dots,s$.

τ_l es el efecto del l -ésimo tratamiento; $l=1,2,\dots,t$.

e_{ijk} es el error aleatorio, los e_{ijk} se suponen independientes e idénticamente distribuidos $N(0, \sigma^2)$.

N_{ijkl} es una función indicadora, definida como:

$$N_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_l \text{ se encuentra en la celda } ijk \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Se asumen las siguientes restricciones:

$$\sum_i^c \alpha_i = \sum_j^p \gamma_j = \sum_k^s \pi_{k(i)} = \sum_l^t \tau_l = 0$$

Al asumir estas restricciones, se pueden obtener soluciones únicas para cada uno de los efectos en el modelo. Al utilizar el método de cuadrados mínimos, tenemos que minimizar la siguiente expresión:

$$\sum_{ijk}^{cps} e_{ijk}^2 = \sum_{ijk}^{cps} (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \gamma_j - \pi_{k(i)} - N_{ijkl}\tau_l)^2 = Q$$

para cada una de las constantes en el modelo.

Al utilizar las restricciones al modelo, encontramos de manera

directa, que:

$$\hat{\mu} = \frac{G}{cps}, \quad \hat{\alpha}_i = \frac{B_i}{ps} - \frac{G}{cps}, \quad \hat{\gamma}_j = \frac{H_j}{cs} - \frac{G}{cps}, \quad \hat{\pi}_{k(i)} = \frac{s_{k(i)}}{p} - \frac{B_i}{ps},$$

donde

G es el gran total en el experimento.

B_i es la suma total por cuadro.

H_j es la suma total por período.

$s_{k(i)}$ es la suma total por secuencia, dentro de cada cuadro.

Debido a que los efectos de individuo y tratamiento no son ortogonales, se tienen que encontrar las ecuaciones normales reducidas para tratamientos eliminando individuos.

Así:

$$\frac{\partial Q}{\partial \pi_{k(i)}} = -2 \sum_j^p (y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\gamma}_j - \hat{\pi}_{k(i)}) N_{ijk} \hat{\tau}_1 = 0$$

$$\frac{p}{\sum \mu + \sum \alpha_i + \sum \gamma_j + \sum \pi_{k(i)} + \sum N_{ijk} \hat{\tau}_1}{j} = \frac{p}{\sum y_{ijk}}$$

y

$$\hat{\pi}_{k(i)} = \frac{\sum y_{ijk} - \frac{\sum N_{ijk} \hat{\tau}_1}{p}}{p} - \hat{\alpha}_i - \hat{\mu}. \quad (1)$$

Ahora:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_1} = -2 \sum_{ijk}^{cps} N_{ijk} (y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\gamma}_j - \hat{\pi}_{k(i)}) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\mu} + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\alpha}_i + \frac{\text{cp}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{p} + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\tau}_k(i) + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\tau}_1 \\ = \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{y}_{ijk} \quad (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2) nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\mu} + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\alpha}_i + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \left[\frac{\frac{p}{\sum_{ijk} N_{ijk}} - \frac{\sum_{ijk} N_{ijk}}{p} \hat{\tau}_1}{p} - \hat{\alpha}_i - \hat{\mu} \right] \\ + \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\tau}_1 = \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{y}_{ijk} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{\tau}_1 - \frac{\frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \sum_{ij} \frac{p}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{y}_{ijk}}{p} = \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{y}_{ijk} - \frac{\frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \sum_{ij} y_{ijk}}{p} \\ \text{cp} \hat{\tau}_1 - \frac{r(5t-3p)}{p} \hat{\tau}_1 = \frac{\text{cps}}{\sum_{ijk} N_{ijk}} \hat{y}_{ijk} - \frac{\frac{2\sum_{ijk} y_{ijk}}{p}}{\sum_{k=1}^p} - \frac{\frac{p}{\sum_{ijk} y_{ijk}}}{p} \quad (3) \end{aligned}$$

En (3) r es el número de veces que se repite el diseño reversible básico balanceado ya sea completo o reducido. (3) también constituye las Ecuaciones Normales Reducidas para tratamientos eliminando individuos.

Así las cosas:

$$\left[\frac{p^2 c - r(5t-3p)}{p} \right] \hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_1 - \frac{2s_{k2} - s_{k1}}{p} \quad \text{donde}$$

T_1 - es el total de observaciones para el tratamiento 1-ésimo

s_{k2} - es el total de individuos donde el tratamiento 1-ésimo aparece dos veces

s_{k1} - es el total de individuos donde el tratamiento 1-ésimo aparece una vez

$$\therefore \hat{\tau}_1 = \frac{p}{p^2 c - 5tr + 3pr} \left(T_1 - \frac{2s_{k2} - s_{k1}}{p} \right)$$

como $p = 3$ para todo t .

$$\hat{\tau}_1 = \frac{3}{9c - 5tr + 9r} \left(T_1 - \frac{2s_{k2} - s_{k1}}{3} \right)$$

Ahora es fácil obtener la suma de cuadrados debida a tratamientos

$$\begin{aligned} sc(\text{Tratamientos}) &= \sum_{1=1}^t \hat{\tau}_1 \left(T_1 - \frac{2s_{k2} - s_{k1}}{3} \right) \\ &= \sum_{1=1}^t \frac{\hat{\tau}_1}{3} (3T_1 - 2s_{k2} - s_{k1}) \\ &= \frac{1}{3(9c - 5tr + 9r)} \sum_{1=1}^t (3T_1 - 2s_{k2} - s_{k1})^2 \end{aligned}$$

La forma de éste esta suma de cuadrados es original del presente trabajo.

ANALISIS

El análisis de la varianza para los diseños reversibles de

acuerdo al modelo lineal especificado, se presenta en el siguiente cuadro.

Cuadro 2. ANDEVA para los Diseños Reversibles de tres períodos, considerando el efecto de cuadro

	FV	GL	SC
Cuadro	c-1	$\sum_i \frac{B_i^2}{ps} - \frac{G^2}{cps}$	
Período	p-1	$\sum_j \frac{H_j^2}{cs} - \frac{G^2}{cps}$	
Individuo dentro de cuadro	c(s-1)	$\sum_{lk} \frac{s_k^2(l)}{p} - \sum_i \frac{B_i^2}{ps}$	
Tratamiento corregido	t-1	$\frac{\sum_l (3T_l - 2s_{k2} - s_{k1})^2}{3(9c - 5tr + 9r)}$	
Error	$n+2-(cs+t+p)$	DIFERENCIA	
TOTAL	n-1	$\sum_{ijk} \frac{y_{ijk}^2}{cps} - \frac{G^2}{cps}$	

Bajo la hipótesis nula $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_t$ se obtiene el cuadrado medio para los efectos de tratamientos y error y se procede a realizar la prueba estadística de F.

BIBLIOGRAFIA

- Becerril, P.C.M. y Martínez, G.A. 1986. Diseños cruzados en cuadro latino con efectos residuales. *Agrociencia*. 65: 203-210.
- Brandt, A.E. 1938. Tests of significance in reversal switchback trials. *Iowa Agr. Exp. Sta. Res. Bull.* 234. Ames, Iowa.
- Ciminera, J.L. and Wolfe, E.K. 1953. An example of the use of extended cross-over designs in the comparison of NPH insulin mixtures. *Biometrics* 9:431-446.
- Hedayat, A. and Afsarinejad, K. 1975. Repeated measurements designs, I. in *A survey of statistical designs and linear models* (Ed. J.N. Srivastava). North-Holland and Publishing Co., Amsterdam, 229-242.
- Hedayat, A. and Afsarinejad, K. 1978. Repeated measurements designs, II. *Ann. Stat.* 6(3): 619-628.
- Kershner, R.P. 1980. On the theory of crossover designs with residual effects. Ph.D. Thesis. Cornell University. Ithaca, New York.
- Lucas, H.L. 1956. Switch-back trials for more than two treatments. *Jour. Dairy Sci.* 39: 146-154.
- Taylor, W.B. and Armstrong, P.J. 1953. The efficiency of some experimental designs used in dairy husbandry experiments. *Jour. Agric. Sci.* 43: 407-412.

" APLICACIONES DEL ANALISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS EN TECNOLOGIA DE ALIMENTOS "

Castaño Tostado Eduardo⁽¹⁾
Valle Vega Pedro^(2,3)
Hernández Carolina⁽²⁾
Esquivel E. Maribel⁽³⁾
Trejo Rico A. Cecilia⁽³⁾

- 1) Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas. UNAM. México D.F.
- 2) Departamento de Alimentos. Facultad de Química. UNAM. México.
- 3) Departamento de Ciencias de la Nutrición y de Los Alimentos Universidad Iberoamericana. 1v. cerro de las torres 395. México D.F.

En el presente trabajo se muestran tres aplicaciones en el área de tecnología de alimentos, específicamente en el área de evaluación sensorial de la jiotilla procesada, conservada en almíbar y mermelada, de la elaboración de dulces a partir del gusano amarillo de la harina y las interacciones entre las propiedades sensoriales y químicas de la miel de abeja.

Todos estos evaluados bajo la técnica estadística denominada análisis factorial de correspondencias. Este análisis es el resultado de desarrollos geométricos y algebraicos y se sitúa en el análisis multivariado de datos, cuyo objetivo principal es la representación gráfica de las relaciones más relevantes que se hayan en forma subyacente en una tabla de contingencia con dos ó más criterios de clasificación (1,2).

Para llevar a cabo los cálculos de todos estos análisis, se usó el paquete estadístico de Tabet (3) e implantado en el sistema Burroughs 7800 de la Universidad Nacional Autónoma de México.

A continuación se presenta la descripción general de la evaluación sensorial de la fruta llamada jiotilla.

La jiotilla, Echinocactus chiotilla, fruta exótica de México, proviene de una cactácea arborecente de 3 a 4 metros de altura cuyo fruto es globoso, escamoso de color rojo grisaceo, con pulpa purpurina comestible de sabor agridulce, se encuentra distribuida en los estados de Puebla, Guerrero, Oaxaca y Michoacán (4, 5).

En la conservación de frutas destaca desde la antigüedad la utilización del azúcar para obtener productos cristalizados (6).

Esta tecnología se basa en la ciencia y arte del manejo de la sacarosa entre los tejidos de la fruta y siempre incrementan

do gradualmente su concentración lo que trae como consecuencia el intercambio de líquidos celulares por sólidos en el fruto.

El confitado debe tener una concentración de 75° Brix cuyos terminados son el glaseado y el cristalizado, ambos para conferir la apariencia cristalina a la fruta confitada.

Las mermeladas son productos obtenidos por la cocción de frutas o zumos con sacarosa y agua hasta adquirir una consistencia característica cuya solidificación depende de la presencia de pectina y ácidos en la fruta (7).

La jiotilla se conservó en mermelada, almíbar, confitada secada al sol, estufa y sombra, glaseada bajo el proceso lento y rápido, cristalizada bajo el proceso lento y rápido, confitada envasada en cloruro de polietileno, celofán y cloruro de polivinilo (PVDC).

En general fueron trece tratamientos los cuales fueron analizados y evaluados por un panel de 15 jueces no entrenados siguiendo la escala de Kramer (8) de gusto extremadamente hasta disgusto extremadamente evaluando las características de sabor, color, olor, aspecto y textura de la fruta fresca y procesada.

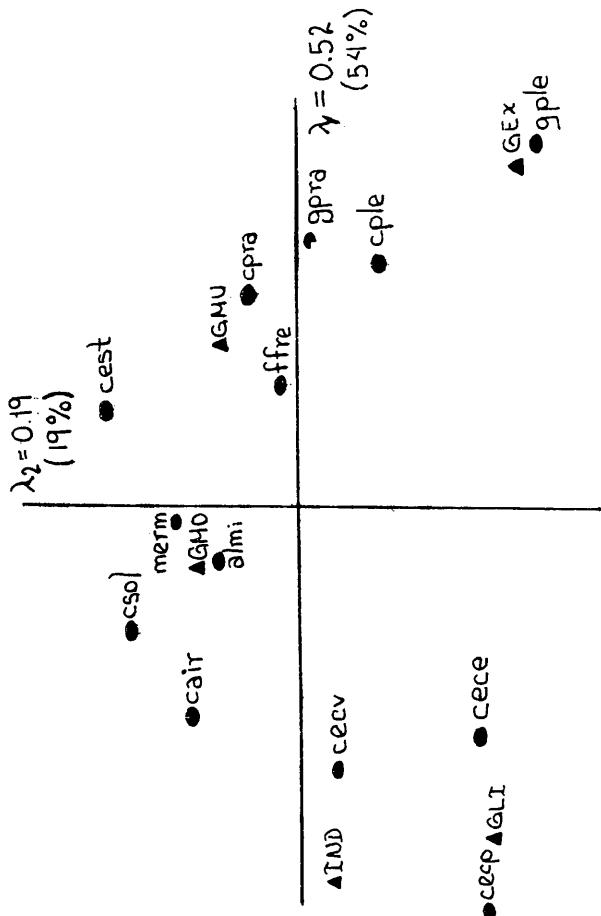
Por falta de espacio únicamente se desarrollara el resultado de los trece tratamientos en función del olor.

OLOR.-

Se evidencia la nula contabilización desde disgusto extremadamente hasta disgusto moderadamente, por lo que no se consideran en el análisis. Las representaciones producidas por el análisis de correspondencias se muestran en sus dos primeros ejes en la figura 1.

Se observa entre estos dos primeros ejes un 73% de la variancia de los datos; respecto a la calidad de cada perfil en la

FIG. 1. JICOTILLA " COLOR "



CUADRO 1

ANALISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS DE LOS PRODUCTOS ELABORADOS DE JIOTILLA.

	SABOR	OLOR	TEXTURA	COLOR	ASPECTO
FRUTA FRESCA	GMO	GEX-GMU	GEX/GMU	GEX	GEX- GMU
Confitada seca da en estufa	GEX-GMU	GEX- GMU	GEX-GMU	GEX	GEX-GMU
Confitada seca da en sombra	GMO-GLI	GMO- IND	IND-DMO	GLI-DLI	IND.
Confitada seca da en sol	GMO-GLI	GMO- IND	DMU-DEX	IND	DISG.
Mermelada	GMO	GMO	GEX-GMU	GMO-GLI	GEX-GMU
Almibar	GMO	GMO	GEX-GMU	GEX	GEX-GMU
Cristalizada proceso lento	GEX-GMO	GEX-GMU	GMU-GMO	GMU-GLI	GMO-GLI
Cristalizada proceso rápido	GMU-GLI	GEX-GMU	IND-DMO	GLI-DLI	DMU-DEX
Glaseado proceso lento	GEX-GMU	GEX	GEX-GMU	GEX-GMU	GEX-GMU
Glaseado proceso rápido	GMU-GLI	GEX-GMU	IND-DMO	GMO-GLI	DLI-DMO
Confitada enva sada en cloruro de polietileno	DMO-DMU	GLI-IND	DMU-DEX	GMO-GLI	DMU-DEX
Confitada enva sa en celofán	GMO-GLI	GLI-IND	GMO-GLI	GEX-GMU	GMO-GLI
Confitada enva sada en PVDC	GMO-GLI	GLI-IND	DMU-DEX	GMO-GLI	DMU-DEX

GEX = Gusta extremadamente

GMU = Gusta mucho

GMO = Gusta moderadamente

GLI = Gusta ligeramente

IND = Ni gusta ni disgusta

DEX = Disgusta extremadamente

DMU = Disgusta mucho

DMO = Disgusta moderadamente

DLI = Disgusta ligeramente

DISG = Disgusta (sin grado defi
nido).

representación con los dos primera ejes. En cuanto a la orientación de los trece tratamientos respecto a la escala de preferencias se tiene que la fruta glaseada por el proceso lento se dirige hacia el gusto extremo siguiendo en orden la fruta confitada por el proceso lento, la fruta glaseada por el proceso rápido, fruta fresca, fruta confitada por el proceso rápido y la fruta confitada secada en estufa.

Hacia el gusto moderado se agrupan la mermelada, almibar, fruta confitada secada al sol y fruta confitada secada en sombra. Por último, la fruta confitada envasada en cloruro de polietileno, celofán y cloruro de polivideno son representaciones poco aceptadas.

En el cuadro 1 se muestran los resultados del análisis factorial de correspondencia, en general se puede decir que la fruta glaseada bajo el proceso lento y la fruta confitada secada en estufa fueron los productos con mayor preferencia por parte de los panelistas seguidos por la fruta cristalizada bajo el proceso lento, fruta fresca, fruta en almibar y mermelada de jiotilla, los cuales tuvieron un grado de preferencia de "gusta extremadamente, gusta mucho y gusta moderadamente" en los cinco parámetros evaluados (sabor, color, olor, aspecto y textura).

Los productos cristalizados y glaseados bajo el proceso rápido son aceptados en forma similar, sin embargo, tanto el cristalizado como el glaseado bajo el proceso lento resultaron mejor que los cristalizados y glaseados en proceso rápido, esto se evidencia claramente en aspecto.

Los productos envasados en cloruro de polietileno y cloruro de polivideno afectan en general en la textura y aspecto y más no en las otras evaluaciones. Esto no sucede con la fruta

confitada envasada en celofán la cual tiende hacia un gusto moderado y ligero.

La fruta confitada secada en sombra, se ubicó hacia la indiferencia (ni gusta ni disgusta), no siendo así para la fruta confitada secada al sol, la cual fue la presentación mas inestable pudiendo decir que en general se ubicó hacia el disgusto mostrando sin embargo cierta tendencia al gusto en sabor, olor, pero en ningún caso gusta en las escalas superiores.

Por otra parte la aplicación del gusano amarillo de la harina para la elaboración de dulces se puede decir que existe una gran variedad de insectos los cuales por lo general no se tiene la costumbre de consumirlos como alimentos salvo en algunos lugares en los que por tradición son ingeridos, entre los estados de Yucatán, Oaxaca, Guanajuato, Guerrero, Chiapas, Puebla, Hidalgo y otros (9).

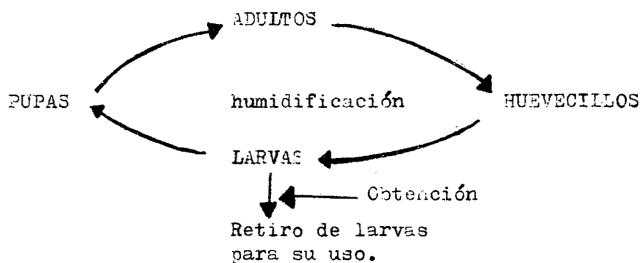
Ya desde la antigüedad se conocen diversos insectos como alimento, los que abarcan los chapulines, los ticcocos, las cucarachas chinches acuáticas, los escamoles, las hormigas mieleras hasta el gusano de maguey. Estos insectos eran preparados de diferentes formas ya sea fritos ó en tamales o asados; y también como dulces a partir de las hormigas mieleras, las cuales se siguen consumiendo hasta la fecha (9). Por lo que los nuevos desarrollos en tecnología de alimentos nos han llevado a la realización de diferentes productos; recordando por otra parte, que los insectos como dulce no son desconocidos, ya que existen las hormigas mieleras que son consumidas como golosinas, con respecto a todo lo anterior podía ser atractivo para un grupo específico de personas que practiquen la entomofa-

gía presentarles un nuevo producto en base a insectos como: Palanqueta, Garapiñado, Aglomerado de larvas con chocolate, Larvas recubiertas con chocolate y Trufas.

Para la elaboración de estos dulces se eligió a uno de los más grandes insectos que infestan a los grupos de los cereales; ya que constituye una plaga que se alimenta principalmente de harinas o de alimentos molidos; pero también infesta granos que se encuentran en malas condiciones, así como también pan, carne, los cuerpos de insectos muertos, plumas y materiales similares. Además este insecto en su estado larvario presenta características sensoriales uniformes y tienen un cierto resabio a salvado, son de fácil cultivo y de aprovechamiento de desechos son de distribución cosmopolita de color amarillento a café té rosos, de cuerpo brillante y llegan a medir hasta 2.5 cm de largo. Es un indicador de malas condiciones sanitarias. Su ciclo de vida se divide en diferentes estadios que son el adulto, la pupa, la larva y el huevecillo (10).

En la figura 2 se muestra el diagrama de ciclo de T. molitor para la obtención de larvas.

Figura 2. Diagrama de ciclo del Tenebrio molitor para la obtención de larvas.



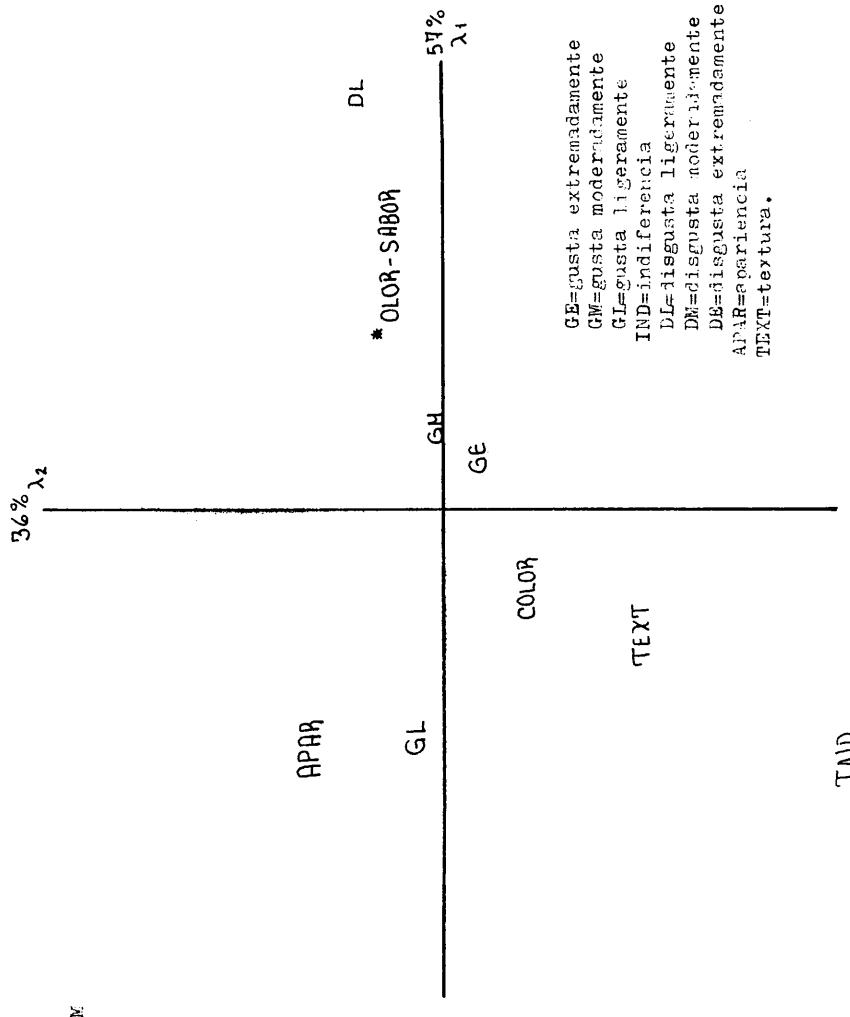
Para poder evaluar las características de cada uno de los productos elaborados, se llevó a cabo un análisis sensorial con un panel de 12 jueces a los cuales se les repartió una boleta de calificación desde gusta extremadamente, gusta moderadamente, gusta ligeramente, ni gusta ni disgusta, disgusta ligeramente, disgusta moderadamente y disgusta extremadamente en cuanto a sabor, color, olor aspecto y textura, dandoseles además las 5 muestras elaboradas. Debido a las características de los productos desarrollados y para evitar sesgos en cuanto a creencias ideológicas, se les explicaba al jurado en general que se trataba de larvas de insecto. Posteriormente se procedió al análisis de correspondencias, el cual se hizo de 2 maneras:

- 1) En el que se compararon los distintos tratamientos (de dulces elaborados con respecto a cada evaluación sensorial; textura, sabor, color, olor y aspecto).
- 2) En el que se compararon las evaluaciones sensoriales con respecto a cada dulce elaborado.

Se utilizó el análisis de correspondencias según Greenacre (2). en el que se muestran gráficas de frecuencias de datos en forma de rangos, datos heterogéneos (observaciones de variables continuas y discretas). Este análisis es una técnica de renglones y columnas en una tabla de continencia como puntos en correspondencia de baja dimensión en espacios vectoriales.

En la figura 3, se muestran los resultados del análisis de correspondencias del producto ; aglomerado de larvas con chocolate, en el que se puede observar que las más gustadas son en olor, sabor, y color; siguiendo en ese orden la textura. En lo que respecta al aspecto, este presentó un mayor peso relativo

Fig. 3.- Resultados del análisis de correspondencias del producto: Aglomerado de larvas con chocolate.



hacia el gusto ligero y hacia el disgusto moderado. En esta gráfica se obtuvo el 93% de confiabilidad.

En la figura 4 se muestran los resultados del análisis de correspondencias del olor del Tenebrio molitor en la que se puede observar que el tratamiento de larvas recubiertas con chocolate mostró mayor tendencia hacia el gusto moderado y el aglomerado de larvas con chocolate una mayor tendencia hacia el gusto extremo; mientras que el garapiñado hacia la indiferencia, la trufa hacia el disgusto ligero y el gusto ligero y la palanqueta hacia el gusto moderado. En esta gráfica se obtuvo el 93% de confiabilidad.

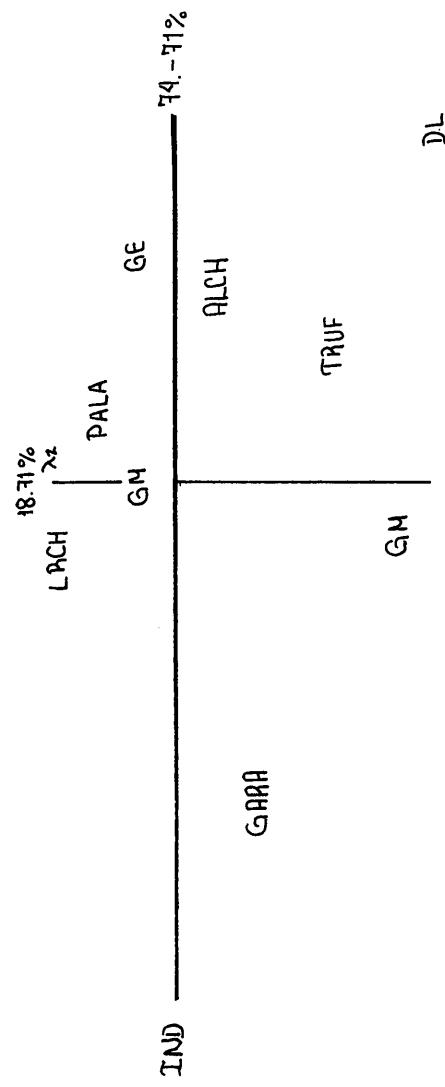
En los cuadros 2 y 3 se encuentras resumidos los resultados obtenidos de las 10 gráficas del análisis por correspondencias.

Así mediante los cuadros se observa que el aglomerado de larvas con chocolate y las larvas recubiertas con chocolate tienen una orientación primordial hacia el gusto moderado y disgusto moderado, la trufa una mayor tendencia hacia el disgusto extremo y el disgusto ligero, el garapiñado muestra una tendencia al indiferente y la palanqueta hacia el gusto extremo.

Por último del análisis efectuado a las interacciones entre las propiedades sensoriales y químicas de la miel de abeja se dice que en México al competir por el primer lugar como país exportador de miel de abeja, requiere que este producto sea clasificado en base al color principalmente (11,12).

Aunque el color no es un factor que determine la calidad nutritiva de la miel, es importante en el mercado, especialmente cuando se ven involucradas grandes cantidades para exportación. Pues se prefieren mieles claras y por ende su cotización aumenta.

Fig. 4.- RESULTADOS DEL ANALISIS DE CORRESPONDENCIAS DEL OLOR DEL TENEBRIO MOLITOR.



CUADRO 1.- FRECUENCIA DEL ANALISIS SENSORIAL DE LOS ATRIBUTOS. COMPARACION ENTRE LOS TRATAMIENTOS.

PRODUCTOS	A T R I B U T O S				
	SABOR	OLOR	TEXTURA	COLOR	APARIENCIA
Aglomerado de larvas c/ chocolate	GM	GE	GM-IND	GM-GE	DM-GM
Larvas recubiertas c/ chocolate	GM	GM	GM-IND	GM-GE	DM-GM
Palanqueta	GE-GL	GM	GE	GE(DL)	GE
Garapiñado	DL-IND	IND	DE-DL	IND(DM)	IND
Trufas	GM	GL-DL	GM-GL	GM(DE)	-

CUADRO 2.- FRECUENCIA DEL ANALISIS SENSORIAL DE LOS ATRIBUTOS. COMPARACION DE EVALUACIONES

PRODUCTOS	A T R I B U T O S				
	SABOR	OLOR	TEXTURA	COLOR	APARIENCIA
Palanqueta	GE-GL	GM	GE	GE	DISGUSTA
Aglomerado de larvas c/ chocolate	(DL) GE-GM	(DL) GE-GM	IND	(IND) GE-GM	GL
Larvas c/ chocolate	GUSTA	GE	GE-GM	GE	IND-DM
Garapiñado	GM-IND	GM-IND	GL	GUSTA	DISGUSTA
Trufa	GE-GL	GE-GL	GE-GL	GE-GL	DISGUSTA

GE= gusta extremadamente

DL= disgusta ligeramente

GM= gusta moderadamente

DM= disgusta moderadamente

GL= gusta ligeramente

DE= disgusta extremadamente

IND= indiferencia

ta (13,14,15).

Siendo importante establecer la relación que el consumidor ejerce entre el color y las restantes propiedades sensoriales (sabor, olor, y textura) de la miel así como su calidad química.

METODOLOGIA

Selección de muestras:

Se seleccionaron 7 muestras de miel de abeja; de acuerdo a su floración de origen y por su color. Las muestras variaban desde blanco agua hasta el oscuro. Dicha clasificación se realizó utilizando el colorímetro Pfund (16), el cual estima el color en milímetros por comparación con prismas de cristal. Para la obtención de la miel color ámbar, se efectuó una mezcla que representará dicho color.

Evaluación química:

Se evaluó cada muestra por triplicado para cada análisis, determinándose posteriormente un promedio y comparándose los resultados con los límites propuestos por el CODEX Alimentarius (17).

Se determinó, el contenido de Humedad, Cenizas, Acidez, Sacarosa Aparente de acuerdo a los métodos propuestos por el Codex Alimentarius (17). Azúcar reductor por el método del Ac. Dinitrosalicílico (18) y el contenido de Hidroximetilfurfural por el método del Bisulfito (19).

Evaluación Sensorial:

a) Análisis sensorial de Color.- Se aplicó el análisis de Ordenación del Color. Presentando a los jueces (100), las muestras a evaluar. Ordenando, desde el color que más prefieran para la miel (primer lugar), hasta el que más les disguste (último lugar). (20).

b) Análisis Sensorial General.- Se aplicó a los jueces (100), el análisis de preferencia hedónica; con una escala de 5 puntos (gusta mucho, gusta ligeramente, ni gusta ni disgusta, disgusta ligeramente y disgusta mucho). midiendo textura, sabor, olor.

Para eliminar la sensación de color, se aplicó el análisis, en un cuarto oscuro iluminado por un foco rojo.

La interpretación estadística, se realizó por medio del análisis de correspondencias, como una interpretación de datos, para buscar la relación que el consumidor ejercía entre el color y las restantes propiedades sensoriales (sabor, aroma, textura). Así como la interpretación estadística de cada propiedad.

Para la determinación del agrupamiento de las mieles, se empleo, el Análisis por componentes principales en la evaluación química.

Dado, que son métodos descriptivos, es decir, que dieron la posición relativa de cada miel con respecto a las demás; no una posición absoluta. No hay un nivel de confianza.

RESULTADOS:

En el cuadro 4 se denota que las muestras seleccionadas basadas en color y floración de origen más comercializada.

Se resalta también la presencia de dos muestras del mismo color, puesto que el graduador de color Pfund las considera dentro del mismo rango (ambar extra claro) con una diferencia de 3.1 mm.

Tanto en el análisis químico como en la evaluación sensorial (preferencia hédonica) se descarta la miel ambar por ser

CUADRO 4. MUESTRAS DE MIEL SELECCIONADAS Y SU EVALUACION QUIMICA
 (FRACMEDIOS DEL ANALISIS POR TRIPPLICADO)

FLORACION DE ORIGEN	ESCALA PFOUND (mm)	PARAMETROS Y LIMITES COLOR (+)	HUMEDAD No+21%	CENI-		SACA	AZU	HMF
				JAS.	DEZ	ROSA	CAR	No+4% mg/Kg
Mezquite	0.69	Blanco agua	18.4	0.09	15.3	4.7	76.0	5.5
Mezquite	24.60	Blanco	16.5	0.24	22.0	10.0	68.6	39.8
Altiplano	46.00	Ambar extra claro	16.5	0.24	35.0	8.0	70.0	29.3
Eucalipto	49.10	Ambar extra claro	17.6	0.31	31.3	5.0	69.9	16.8
Naranjo	75.60	Ambar claro	17.2	0.62	30.7	9.9	64.9	17.3
Floración de costa	122.10	Obscuro	16.4	0.12	31.0	3.1	68.7	39.9

(+) Los límites son de acuerdo a los criterios de composición de la Norma regional Europea para la miel.

CUADRO 5. ANALISIS SENSORIAL GENERAL DE LAS MUESTRAS DE MIEL (HEDONICA)

MUESTRA DE MIEL POR CO LOR	P A R A M E T R O S		
	OLOR	SABOR	TEXTURA
Blanco Agua	IND		DLI-IND
Blanco			
AMBAR Extra claro (Alti plano)	GMU-GLI	GMU-GLI	GMU-GLI
Ambar Extra claro (Euc alíptico).			
Ambar claro	GMU-GLI	GMU-GLI	GMU- GLI
Obscura	IND.		DLI- IND.

GMU= gusta mucho
 GLI= gusta ligeramente
 DMU= disgusta mucho
 DLI= disgusta ligeramente
 IND = Ni gusta. ni disgusta.

una mezcla.

Observando la figura 4 se aprecia un efecto de herradura, lo que indica, que el ordenamiento producido en el primer eje de variabilidad ($l = 63.3\%$) es confiable. Observandose en el siguiente orden:

Primer:ambar extraclaro (Eucalipto)
Segundo:ambar claro
Tercero:ambar extra claro (Altiplano)
Cuarto :ambar
Quinto :blanco
Sexto :oscuro
Septimo:Blanco agua.

Para efecto del ordenamiento del color se incluyo la Ambar.

De acuerdo al cuadro 5 las muestras ambar extraclaro (altiplano) y ambar claro (Naranjo) demuestran una tendencia hacia el gusta mucho y gusta ligeramente.

Las muestras blanco (Mezquite) y ambar extraclaro (eucalipto); no presentan una orientación definida y precisa.

Las muestras blanco agua (Mezquite) y oscura (floración de costa); su orientación respecto a las demás es la indiferencia y disgusta ligeramente.

De acuerdo con el cuadro 6, podemos observar que la matriz de correlación entre las variables químicas; destacaron que "H.M.F." y "Humedad" poseen una relación lineal inversa (humedad H.M.F.); Siguiendo por su importancia las correlaciones estimadas de "Humedad y Acidez"; "Humedad y Sacarosa"; cenizas y Azúcares reductores. Todas inversas en su relación.

Y por último, la de "Sacarosa" y "H.M.F." teniendo una relación directa.

Fig. 4 ORDEN DE PREFERENCIA DE LAS MUESTRAS DE MIEL EN " COLOR "

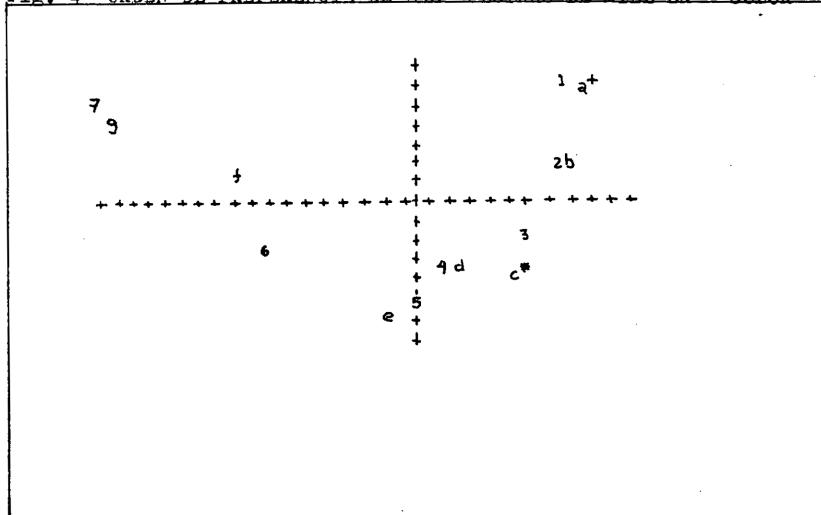
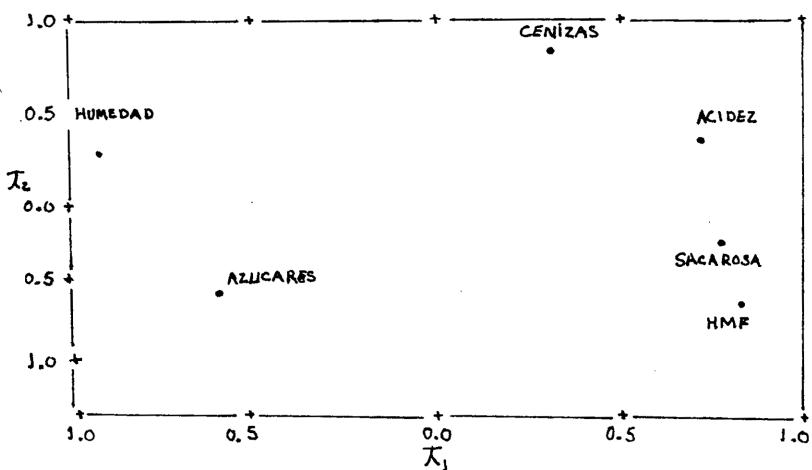


Fig. 5.- AGRUPAMIENTO EN LA EVALUACION QUIMICA.



CUADRO 6.- MATRIZ DE CORRELACION DE LA VARIABLES QUIMICAS

	HUM	CEN	ACI	SAC	AZU
HUM	1.000				
CEN	-0.011	1.000			
ACI	0.579	0.396	1.000		
SAC	-0.669	0.027	0.390	1.000	
AZU	0.442	-0.553	-0.383	-0.052	1.000
HMF	-0.934	-0.182	0.338	0.631	-0.377
	HMF				
HMF	1.000				

HUM = Humedad.	SAC = Sacarosa aparente
CEN = Cenizas	AZU = Azúcares reductores
ACI = Acidem	HMF = Hidroximetilfurfural.

En la figura 5 se muestran la gráfica de tres agrupamientos teniendo un 77% de explicación de la variación de los datos en los dos primeros ejes ($l_1 = 50.88\%$; $l_2 = 26.43\% = 76.3$

Dichos agrupamientos son los siguientes:

Humedad-Azucar reductor.

Acidez-Sacarosa-H.M.F.

Cenizas (quedando aisladas).

Por sus propiedades químicas se tienen tres grupos de mieles: Blanco agua, Ambar claro, Ambar extra claro (Eucalipto); y por último se agrupan todas las demás mieles. Detectándose que los extremos blanco agua y obscura no son preferidos en la evaluación sensorial a pesar de que químicamente cumplen con la norma regional Europea para miel de abeja (Codex Alimentarius).

Respecto al sabor, aroma y textura, las mieles ambar extra claro (altiplano) y Ambar claro (naranjo), coinciden con la ordenación de los colores intermedios (ambar claro, ambar extra claro (altiplano) y ambar (mezcla; aguacate-altiplano). A pesar de que dichas pruebas fueron evaluadas por separado.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Lebart,L., Morineau,A., y Warwick,K.M (1984):"Multivariate Descriptive Statistical Analysis" Wiley N.Y.
- (2) Grencre,M.J. (1984):"Theory and applications of correspondence analysis". Academic Press N.Y.
- (3) Tabet,N., (1973):" Programme d' analyse des correspondances" Parte de tesis Doctoral 3er. ciclo, Universidad de París. VI.
- (4) Bravo, H.H.,(1978):" Las cactáceas y suculentas mexicanas" 2a. edición. Ed. UNAM. México.
- (5) Nieto, Pola C., (1979):" Lajiotilla" Comunicado especial No. 41. INIRB.
- (6) Grossos,A., (1964):" Candied and glazed Fruit". 3a. ed. Buenos Aires, Argentina; Ref. Maíz.
- (7) Rauch,G.H., (1965):" Jam manufacture". London Hill.
- (8) Kramer,A. y Twigg,B., (1972):" Quality control in the food industry". The AVI Pub. Co., Westport, Conn.
- (9) Ramos,E.J. (1982);"Los insectos como fuente de proteína" ed. Limusa. México. pp. 24-43.
- (10) Cotton,R.T. (1940):"Mealworms. División of cereal and forage Insect. Investigations, Bureau of entomology and Plant quarantine., (195):1-5.
- (11) Instituto Mexicano de Comercio Exterior:"La industria de la miel en México, Situación y prospectos. (informe de Mercadeo). Dirección para asuntos de Norteamérica y Oriente. México 1978 :11-15.17.18.26.31.
- (11) Altamirano G.A, Ibañez G.L:"Estudio Analítico, para calificar la calidad de la miel de abeja procedente de la selva lacandona." Tesis. UNAM. Facultad de química, México 1984.

- (13) Eckert E.J. Show R.P. *Beekeeping*, (1960): "The Macmillan company". N.Y. 258-262.
- (14) Centro de Estadística y Cálculo: "Estudio para calificar la calidad de las mieles mexicanas de abejas (Su relación con la norma regional europea). Chapingo Mex. Colegio de Posgrado Escuela Nacional de Agricultura, 1974:11,12.
- (15) Labougle Rentería J;M., Zozaya Rubio J.A. (1986): "La apicultura en México" Ciencia y desarrollo (CONACYT). 69:17-36.
- (16) Pell Richard D. (1978): "The color grading of honey". Amer. Bee Journal 118 (12):782-783 y 789.
- (17) Norma regional Europea recomendada para la miel de abejas. Comisión mixta FAO-OMS del Codex Alimentarius. CAC/RS 12-1969.
- (18) Summer J.B. (1921): "Dinitrosalicylic Acid (A reagent for the estimation of sugar in normal and diabetic urine)". J. Biol. chem. 47 (5).
- (19) Association of official of foods chemist (AOAC): "Methods of analysis". Ed. AOAC. 1984.:593.
- (20) Larmond E.: "Laboratory Methods for sensory evaluation of food" Research Branc. Canada Departament of Agriculture. 1977:19,38,40.48-52, 56-59.

LOS PROCESOS ESTOCASTICOS RAMIFICADOS COMO MODELOS
PARA DETECTAR BROTES DE EPIDEMIAS DE UNA
ENFERMEDAD CONTAGIOSA: ASPECTOS ESTADISTICOS

Víctor M. Pérez-Abreu C.
Centro de Investigación en Matemáticas
A. P. 402 - 36000 - Guanajuato, Gto.

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar de una manera elemental algunos aspectos estadísticos de los procesos estocásticos ramificados y su aplicación como modelos para describir brotes de epidemias de una enfermedad contagiosa. Asimismo se quiere ilustrar cómo un estadístico podría ser útil en la solución de algunos problemas asociados al control de enfermedades contagiosas.

La detección temprana del brote de una epidemia es importante ya que puede ayudar a las autoridades del Sector Salud a prevenir que la enfermedad se extienda, tomando medidas pertinentes como puede ser el determinar la fracción de la comunidad susceptible a la enfermedad que debe ser vacunada, en caso de que la vacuna exista. Los modelos estadísticos que aquí se presentan también ayudan a detectar el brote de una epidemia después que alguna de estas medidas ha sido tomada, pero aún existen en la población algunos casos infectados no identificados o existe el riesgo de que lleguen a la comunidad portadores de la enfermedad.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 1 damos una introducción elemental a los procesos estocásticos ramificados simples, también conocidos como procesos de Galton-Watson. Se hace énfasis en su aplicación dentro de un lenguaje y contexto epidemiológico. En la Sección 2 describimos algunos métodos estadísticos de estos modelos y

sus principales propiedades y desventajas. En la Sección 3 presentamos una simulación del modelo con el objeto de ilustrar el uso de los métodos estadísticos, así como discutimos la imposibilidad de aplicarlos a unos datos reales de casos de Hepatitis Virica registrados en el estado de Guanajuato.

En la realización de este trabajo me he beneficiado de los comentarios de los alumnos de mi curso de Procesos Estocásticos de Maestría: Paul Blanket y Antonio González, así como de los de la M. en C. Rebeca Ponce de León. El trabajo de computo fue hecho por Emilio Marmolejo, alumno de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Guanajuato. La mecanografía estuvo a cargo de Laura Rincon Gallardo. A todos ellos mi agradecimiento.

1. PROCESOS DE GALTON-WATSON

Un bosquejo histórico amplio de la teoría de los procesos estocásticos ramificados aparece en el Capítulo 1 del libro de P. Jagers (1975), al cual el lector interesado es remitido. Sólo mencionaremos aquí que el origen de los procesos estocásticos ramificados está asociado a los nombres, entre otros de Thomas Malthus, Sir Francis Galton y el clérigo y matemático H. W. Watson. En los trabajos de los dos primeros autores se estudia la extinción del apellido de una familia. Así por ejemplo, T. Malthus observó que de 487 familias burguesas en la ciudad de Berna, 379 se extinguieron en un período de dos siglos (1583-1783), cosa que T. Malthus reconoció como un problema en el que no está presente la "pura

coincidencia". Por otro lado, en sus "Ensayos sobre los Principios de Poblaciones", Malthus expresa la idea fundamental de que una población, cuando no se controla, tiende a crecer exponencialmente. Las características probabilísticas de una población que determinan la posible extinción o explosión de ella son uno de los problemas de la teoría de los procesos estocásticos ramificados resuelto por H. W. Watson.

Los procesos estocásticos ramificados como modelos para describir la magnitud del inicio de una epidemia menor han sido usados, entre otros, por Neyman y Scott (1964) y Becker (1975), trabajos en los cuales se pueden encontrar más referencias sobre el tema. Estos procesos son adecuados como modelos de epidemias siempre y cuando la población de susceptibles sea grande, lo cual es cierto durante los principios del brote, cuando no se ha tomado ninguna medida pertinente.

La descripción de los procesos estocásticos ramificados simples, también conocidos como procesos de Galton-Watson, es la siguiente: supongamos que a un determinado tiempo inicial se tiene un ($X_0 = 1$) enfermo de una enfermedad contagiosa, el cual contagia a un número aleatorio X_1 en un determinado tiempo al cual llamaremos generación. A su vez, durante la segunda generación del brote, estos X_1 enfermos contagian, cada uno de manera independiente y con la misma probabilidad, a un número aleatorio de enfermos, cuyo total denotaremos por X_2 . Así X_2 es el número de enfermos contagiados durante la segunda generación

de la enfermedad por los enfermos X_1 , y por lo tanto X_2 depende de X_1 .

El proceso continúa de esta manera y denotamos por X_0, \dots, X_n las primeras n generaciones del modelo. La probabilidad de que un enfermo contagie k individuos será denotada por P_k y estas probabilidades se conocen como probabilidades de contagio o distribución de contagio. En el modelo se supone que la distribución de contagio no varía de generación en generación, por lo que se dice que el modelo es homogéneo.

Las distribuciones de contagio paramétricas más usadas en la práctica son las siguientes: la de Poisson con media $\lambda > 0$

$$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

la geométrica con parámetro P

$$P_k = P(1-P)^{k-1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < P < 1 \quad (1.2)$$

y la binomial con parámetros ℓ y P

$$P_k = \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} P^k (1-P)^{\ell-k} \quad k = 0, 1, \dots, \ell, \quad 0 < P < 1 \quad (1.3)$$

La media de contagio m del modelo se define como

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k \quad (1.4)$$

y la varianza σ^2 de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2 P_k \quad (1.5)$$

Las medias de contagio para las distribuciones de contagio arriba mencionadas se presentan en la Tabla 1.1.

Distribución de contagio	Poisson λ	Geométrica P	Binomial $t.P$
Media de contagio	$m = \lambda$	$m = \frac{1-P}{P}$	$m = tP$

Tabla 1.1.
Media para algunas distribuciones de contagio

Una herramienta matemática importante en el estudio de los procesos ramificados es la función generadora de probabilidades f que se define de la siguiente manera

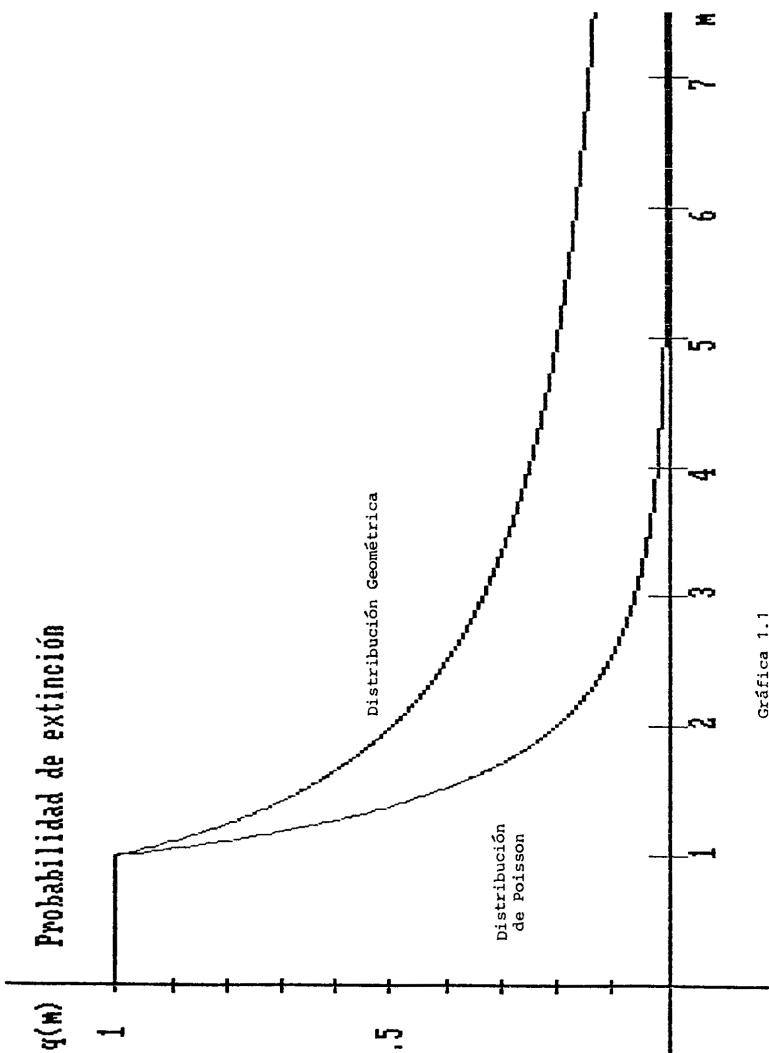
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k \quad |t| < 1. \quad (1.6)$$

Finalmente, denotaremos por q a la probabilidad de extinción de la epidemia, o sea q es la probabilidad de que X_n sea cero para alguna generación n . La importancia de la función generadora de probabilidades queda de manifiesto en el siguiente teorema probado por H. W. Watson y J. Steffensen.

Teorema 1. Supongamos que P_0 no es cero.

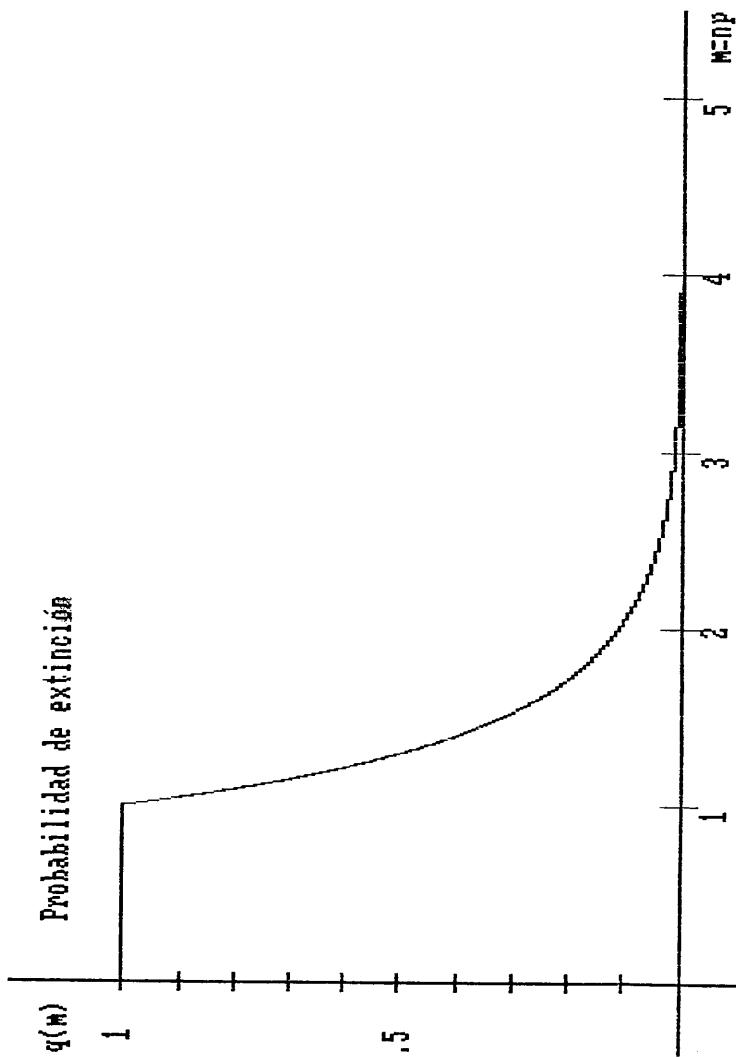
- a) Si $m \leq 1$ entonces $q = 1$.
- b). Si $m > 1$ entonces q es la única raíz mayor o igual a cero y menor a uno de la ecuación $s = f(s)$.

El teorema anterior nos expresa que si la media de contagio es menor o igual a uno, entonces la probabilidad de extinción de la epidemia es uno; de otra forma, si la media de contagio es mayor que uno la probabilidad de extinción es la raíz diferente de uno en el intervalo $[0,1]$ de la ecuación $s = f(s)$. En las gráficas 1.1 y 1.2 se muestra el



Gráfica 1.1

Probabilidad de extinción para las distribuciones
de contagio Geométrica y Poisson.



Gráfica 1.2

Probabilidad de extinción para la distribución
de contagio binomial $n=5$

comportamiento de la probabilidad de extinción con respecto a la media de contagio para las distribuciones de Poisson, geométrica y binomial con parámetros λ y P , respectivamente. En todas ellas se observa que el decrecimiento de la probabilidad de extinción es bastante rápido cuando m se aleja de uno. Las tablas 1.2 y 1.3 muestran algunos valores de q para distintos valores de m para las distribuciones Poisson y geométrica respectivamente.

λ	1	1.05	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
q	1	0.91	0.82	0.69	0.49	0.38	0.27	0.20

Tabla 1.2
Probabilidad de extinción para algunos valores
de la media λ de una distribución de Poisson

m	1	1.05	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
q	1	0.95	0.91	0.83	0.71	0.63	0.55	0.50

Tabla 1.3
Probabilidad de extinción para algunos valores de la media
 $m = (1-P)/P$ **de una distribución geométrica**

Del teorema 1 y de las gráficas y tablas mencionadas anteriormente observamos que cualquier control de una enfermedad contagiosa debe tender a mantener la media de contagio de una comunidad menor o igual a uno o muy poco superior a uno. Si m se conoce y se sabe que es mayor a uno, debemos determinar la proporción θ de individuos susceptibles a

la enfermedad que deben ser vacunados para evitar una epidemia. Si seleccionamos estos individuos al azar dentro de la comunidad es razonable esperar que $m^* = (1-\theta)m$ será la nueva media de contagio de la comunidad si estos individuos son vacunados. Puesto que queremos una extinción de la epidemia debemos tomar θ de tal forma que $m^* \leq 1$, o sea que θ debe ser al menos $1-1/m$. Así por ejemplo, si $m = 1.5$ la proporción de individuos vacunados debe ser al menos del 30%. Este resultado no depende de la distribución de contagio sino únicamente de la media. Sin embargo, una vez que es probable la ocurrencia de una epidemia, la probabilidad con que ocurra sí está determinada por la distribución de contagio. Al respecto comentaremos más en la sección 2.

2. METODOS ESTADISTICOS

En la sección anterior hemos visto la importancia de conocer el valor de la media de contagio m . En esta sección presentamos algunos métodos estadísticos para estimarla. Primeramente haremos la inferencia bajo el supuesto que observamos N muestras independientes de un proceso de Galton-Watson de tamaño n ; es decir suponemos que es posible observar $x_0^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ para $i = 1, \dots, N$. Si la distribución de contagio es Poisson, geométrica o binomial, el estimador de máxima verosimilitud \hat{m} de m es

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{(i)}} \quad (2.1)$$

el cual representa el "número total de contagiados entre el número total de contagiadores".

Si N es grande y n se mantiene fija

$$Z = \frac{1}{\sigma} \left\{ N \frac{(\hat{m})^{n-1}}{\hat{m}-1} \right\}^{1/2} (\hat{m}-m) \quad (2.2)$$

tiene una distribución aproximadamente normal con media cero y varianza uno. La expresión para $\hat{\sigma}^2$, el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 , depende de la distribución de contagio de la siguiente manera: para la distribución de Poisson $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}$, para la geométrica $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}(1+\hat{m})$ y para la distribución binomial con parámetros ℓ y P $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}(1-\hat{m}/\ell)$. Por lo tanto un intervalo aproximado de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media será

$$\left[\hat{m} - z_{\alpha/2} \hat{\sigma} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\hat{m}-1}{(\hat{m})^{n-1}} \right\}^{1/2}, \hat{m} + z_{\alpha/2} \hat{\sigma} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\hat{m}-1}{(\hat{m})^{n-1}} \right\}^{1/2} \right] \quad (2.3)$$

en donde $z_{\alpha/2}$ es el $1-\alpha/2$ percentil de una distribución normal estándar.

En el caso en que sólo es posible observar una realización del proceso de Galton-Watson; es decir x_0, x_1, \dots, x_n , el estimador de máxima verosimilitud \hat{m} de m cuando las distribuciones de contagio son Poisson, geométrica o binomial es

$$\hat{m} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{x_0 + \dots + x_{n-1}} \quad (2.4)$$

Si n es grande y ninguno de los x_i es cero

$$z = \frac{1}{\hat{\sigma}} \left\{ x_0 + \dots + x_{n-1} \right\}^{1/2} (\hat{m} - m) \quad (2.5)$$

tiene una distribución aproximadamente normal con media cero y varianza uno, en donde $\hat{\sigma}^2$ depende de la distribución de contagio de la misma manera que en la primera parte de esta sección. Así, un intervalo aproximado de $(1-\alpha)\%$ de confianza para la media será, si n es grande y ninguno de los x_i es cero,

$$\left[\hat{m} - \frac{z_{\alpha/2} \hat{\sigma}}{(x_0 + \dots + x_n)^{1/2}}, \hat{m} + \frac{z_{\alpha/2} \hat{\sigma}}{(x_0 + \dots + x_n)^{1/2}} \right] \quad (2.6)$$

Es importante observar que aunque la expresión para \hat{m} , en ambos casos presentados, no depende de la distribución de contagio, la expresión para los intervalos de confianza si depende de ella.

Lo anterior refleja la importancia de tener métodos de estimación para las probabilidades de contagio P_k . En el presente éstas se pueden estimar únicamente si es posible observar cuántos contagios produce cada enfermo, lo cual no siempre es factible. En la práctica tiene que suponerse alguna distribución de contagio.

Otros métodos de estimación de m , así como inferencia estadística para la varianza $\hat{\sigma}^2$ y la probabilidad de extinción q se encuentran en el Capítulo 3 de la excelente monografía de Nanthi (1983) o en el Capítulo 2 del libro de Basawa y Prakasa-Rao (1980), trabajos en los cuales se pueden encontrar más referencias al respecto.

3. EJEMPLOS

En la tabla 3.1 se presentan casos de Hepatitis Vírica por mes registrados en la Secretaría de Salud del estado de Guanajuato en los años 1977 a 1987. Con el objeto de ver las limitaciones y alcances de los modelos y métodos de las secciones anteriores, explicaremos por qué éstos no son aplicables a los datos. Esto tiene el doble objetivo de sugerir otra forma de recopilación de los datos así como las condiciones adecuadas para la aplicación correcta del modelo. Empezaremos por mencionar que la recopilación mensual no es la más adecuada, ya que ésta debiera hacerse más de acuerdo al período de incubación-contagio de la enfermedad, con el objeto de tener definidas las generaciones del proceso lo mejor posible. En segundo lugar observamos que los datos sólo incluyen los casos reportados en la Secretaría de Salud y no todos los casos en el estado de Guanajuato. Esto viola una suposición del modelo de la Sección 1, en la que se supone que todos los casos de una generación fueron contagiados por los de la generación anterior. Esto no sucede necesariamente, pues no hay seguridad de que los 10 casos reportados en junio de 1977 hayan sido contagiados sólo por los seis casos reportados en mayo del mismo año. Otra violación del modelo podría ser la homogeneidad del contagio pues no es necesariamente cierto que la distribución de contagio es la misma en una zona rural que en una urbana.

SECRETARIA DE SALUD Y SEGURIDAD SOCIAL DEL ESTADO
 SUBDIRECCION DE PLANEACION
 DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA Y EVALUACION
CASOS DE HEPATITIS VIRICA POR MES
 REGISTRADOS EN LA SECRETARIA DE SALUD
 1977 - 1987

AÑOS	NUMERO DE CASOS												TOTAL
	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	
1977	3	1	4	5	6	10	6	7	8	11	2	4	67
1978	2	8	5	3	0	7	1	6	5	6	5	3	51
1979	2	0	2	2	11	4	8	8	16	18	8	5	84
1980	1	1	0	3	3	0	4	2	6	5	4	1	37
1981	5	2	3	5	1	5	6	4	8	2	5	4	50
1982	3	11	5	0	5	7	5	19	24	16	13	9	117
1983	7	2	5	3	5	3	4	10	14	22	19	17	111
1984	8	15	12	11	9	13	15	17	14	25	19	4	162
1985	3	3	8	5	5	5	8	6	5	10	8	2	68
1986	1	12	4	5	6	10	4	19	21	22	18	8	131
1987	8	3	2	1	6	1	2	14	12	12	25		

FUENTE: BOLETIN EPIDEMIOLOGICO SSSSG
 *HASTA SEMANA 35 (AGOSTO 2- SEPT 5-)

Tabla 3.1

Lo anterior sugiere que la recopilación de los datos se haga con un período mejor definido y por comunidades más pequeñas y homogéneas (escuelas, por ejemplo). De esta manera, con los datos de las comunidades similares se estima la media mediante la ecuación (2.1) y suponiendo una distribución de contagio adecuada se construye un intervalo de confianza como en (2.3). De esta forma se podría tener un control de la enfermedad pues cada vez que se reportaran en la comunidad casos de ella, mediante (2.4) se estima la media y se observa si cae o no dentro de un intervalo de confianza peligroso, lo que serviría para detectar el surgimiento de una epidemia.

Con el objeto de ilustrar lo anterior, realizamos una simulación en la computadora de $N=15$ procesos de Galton-Watson de $n=5$ generaciones con distribución de contagio geométrica con media 1.3. Los resultados se muestran en la tabla 3.2. Utilizando el estimador (2.1) obtenemos

$$\hat{m} = \frac{267}{200} = 1.335 \quad (3.1)$$

lo cual corresponde a una probabilidad de extinción alrededor de 0.75. El estimador de máxima verosimilitud de σ^2 es

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{m}(1+\hat{m}) = 3.117 \quad (3.2)$$

Por lo tanto de (2.3) obtenemos el intervalo de 90% de confianza ($Z_{\alpha/2} = 1.645$)

$$(1.094, 1.576) \quad (3.3)$$

Observamos que este intervalo no contiene al uno. Asimismo, y de la gráfica 1.1, observamos que un intervalo aproximado de

90% de confianza para la probabilidad de extinción es (0.635, 0.914).

Ejemplificamos ahora el control de la enfermedad simulando un proceso de Galton-Watson de 5 generaciones con distribución de contagio geométrica con media 0.7. Los resultados fueron los siguientes

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	1	2	1	2	1

De (2.4) obtenemos que $\hat{m} = 1$ que no se encuentra en el intervalo (3.3). Por lo tanto no hay peligro de una epidemia.

Observamos finalmente que si se supone una distribución de contagio de Poisson el valor de $\hat{m} = 1.335$ correspondería a una probabilidad de extinción aproximadamente menor a 0.5, comparada con 0.75 para la distribución geométrica. La importancia de precisar la distribución de contagio queda expresada en la gráfica 1.1 en donde para la misma media, la probabilidad de extinción de la distribución geométrica siempre está por arriba de la correspondiente para la distribución de Poisson. Esperamos investigar en un futuro métodos estadísticos que nos permitan conocer mejor las distribuciones de contagio en un futuro.

N	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	1	5	6	5	8
2	1	1	2	2	2	2
3	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1	3	2	5
5	1	2	0	0	0	0
6	1	2	4	2	3	2
7	1	0	0	0	0	10
8	1	3	4	6	8	10
9	1	2	3	5	14	16
10	1	5	4	3	7	17
11	1	8	11	20	15	12
12	1	3	1	2	2	2
13	1	1	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	0
15	1	1	2	4	7	8

Tabla 3.2
Simulación de 15 procesos de Galton-Watson
distribución de contagio geométrica con media 1.3

BIBLIOGRAFIA

1. Basawa I. y B. L. S. Prakasa-Rao (1980). Statistical Inference for Stochastic Processes. Academic Press, New York.
2. Becker N. (1975). The use of mathematical models in determining vaccination policies. Bulletin of the International Statistical Institute, 46,I, 478-490.
3. Jagers P. (1975). Branching Processes with Biological Applications. John Wiley & Sons, New York.
4. Nanthi K. (1983). Statistical Estimation for Stochastic Processes. Queen's papers in Pure and Applied Mathematics No. 62. Queen's University. Ontario.
5. Neyman J. y E. L. Scott (1964). In Stochastic Models in Medicine and Medicine and Biology. J. Gurland editor, 45-55, University of Wisconsin Press, Madison.

ANALISIS DISCRIMINANTE PARA SERIES DE TIEMPO:
UNA APLICACION EN NEUROLOGIA Y OTRA EN SISMOLOGIA
Javier Alagón Cano, ITAM

1. INTRODUCCION

La extensión de las técnicas clásicas de análisis discriminante a datos experimentales en forma de series de tiempo es un problema con bastante interés práctico. A menudo, series de tiempo provenientes de diferentes grupos presentan patrones típicos de comportamiento, los cuales pueden constituir la base de discriminación entre los grupos.

El problema de discriminar entre dos grupos de series de tiempo puede presentarse en diversas áreas científicas: por ejemplo, en la discriminación de registros sísmicos de explosiones nucleares y de temblores; o en la clasificación de un individuo como normal o afectado por alguna enfermedad neurológica, de acuerdo a ondas cerebrales extraídas de sus electroencefalogramas. Problemas similares ocurren no tan solo en Sismología o en Neurología, sino también en Audiología, Psicología, Ingeniería y otras áreas. Un resumen de aplicaciones reportadas puede encontrarse en Shumway, 1982.

Este trabajo estuvo motivado por un conjunto de potenciales cerebrales provocados (PCP's) tomados tanto de personas normales como de personas afectadas por esclerosis múltiple (EM). Estos PCP's habían sido registrados como parte de un gran proyecto llevado a cabo en el Departamento de Neurología Clínica de la Universidad de Oxford, en el que se estudiaba el efecto de diversos fármacos en pacientes afectados por EM (c.f. Ragi, 1985).

Los PCP's son ondas eléctricas muy pequeñas extraídas de los electroencefalogramas, registradas desde el pericráneo (cuero cabelludo) después de presentar un estímulo acústico (click) al paciente. El "click" se da 1024 veces a través de unos audífonos, una vez cada décima de segundo. Posteriormente se promedian los valores de los electroencefalogramas para las 1024 realizaciones y obtener así los PCP's. La hipótesis en la que se basa este estudio es que la EM puede afectar el mecanismo generatriz de los PCP's y consecuentemente, su forma.

La idea de que la forma de los PCP's puede estar relacionada con diversas enfermedades ha tenido amplia difusión entre clínicos durante los últimos veinte años (Gevins, 1980). En particular, varios audiólogos han podido detectar dificultades para oír en niños, usando la información contenida en PCP's. Con EM, sin embargo, no se ha tenido éxito. Hasta ahora, los PCP's han sido usados de manera más bien vaga por los neurólogos para diagnosticar o monitorear cambios en los niveles de esta enfermedad. Ciertas características visuales han sido extraídas para poder juzgar anormalidad en un PCP (Gevins 1980, Ragin, 1985) pero su comportamiento no siempre es consistente. De esta manera, algunos neurólogos han aprendido a reconocer visualmente patrones normales de PCP's. La identificación visual de potenciales es más fácil que la descripción verbal o matemática de los mismos, puesto que el cerebro y la vista son particularmente buenos para ello. Como ilustración, considérese la figura 1 que muestra cinco PCP's típicos de personas afectadas por EM y cinco PCP's de personas no afectadas por esta enfermedad (el conjunto total de 50 PCP's se pueden encontrar en Alayón, 1986).

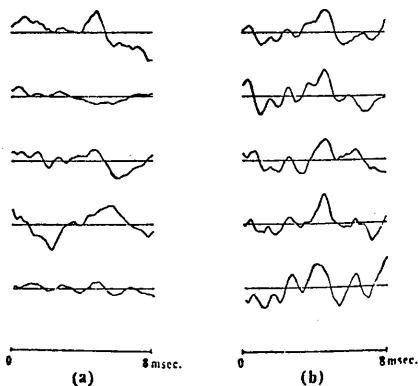


Fig. 1. PCP's de (a) el grupo afectado y (b) el grupo control.
204 observaciones por serie; frecuencia Nyquist = 12800 Hz

No es fácil describir las diferencias o las similitudes entre los dos grupos de potenciales. Quizás se pudiera afirmar que la posición de las ondas es menos irregular para el grupo control que para el grupo afectado; o bien, que existe más variación aleatoria en el grupo afectado. La situación es más compleja si se considera el conjunto total de potenciales.

El principal objetivo del análisis discriminante es examinar qué tanto se puede distinguir entre miembros de dos o más grupos. Un buen resultado discriminatorio, en el sentido de bajas probabilidades de clasificaciones incorrectas, sería indicador de que tal separación entre los grupos de PCP's es posible y tendríamos así, una caracterización estadística de las diferencias.

Dada la estructura especial de las series de tiempo (observaciones ordenadas con una fuerte estructura de correlación) el problema de análisis discriminante para éstas, presenta retos muy especiales, no tan sólo en sus aspectos meramente empíricos, sino en sus aspectos estadísticos y matemáticos. Dado que no existe una metodología uniforme para el estudio de las series de tiempo, la solución al problema discriminatorio depende de la metodología de análisis usada. No resulta sorprendente encontrar que las dos soluciones principales que han sido propuestas, la de Shumway (1974) y la de Gersch (1977) son muy diferentes. Mientras que la primera está basada en el dominio de las frecuencias, la segunda lo está en el dominio del tiempo. En este artículo nos concentraremos en la primera de estas dos, aunque se harán referencias breves a los resultados de la segunda. Para una exposición exhaustiva del tema, puede verse Alagón, 1986.

La metodología expuesta en este artículo es también ilustrada con un juego de datos sísmicos correspondientes a registros de 40 temblores y de 26 explosiones nucleares. Este grupo de datos fueron analizados originalmente por Shumway y Blandford, 1974. La figura 2 muestra cinco elementos típicos de cada una de las dos poblaciones. El juego completo de datos, puede encontrarse en Alagón, 1986. En la figura 2, pueden notarse diferencias pronunciadas entre ambos grupos. Por ejemplo, es muy claro que

los registros de explosiones son amortiguados más rápidamente que los registros de temblores.

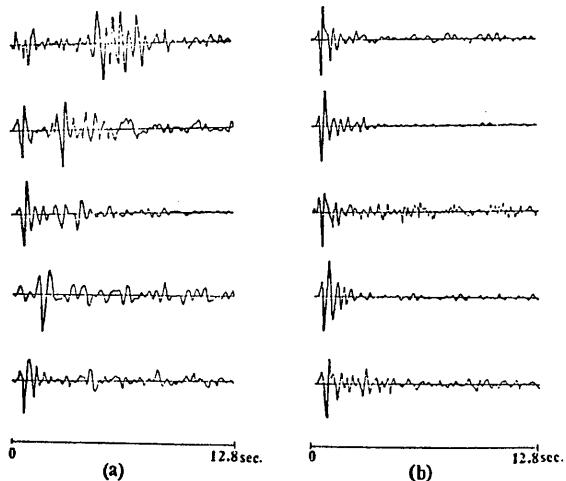


Fig. 2. Registros digitalizados de (a) cinco temblores y (b) cinco explosiones nucleares. 200 observaciones por serie; frecuencia Nyquist de 7.8125 Hz

2. METODOLOGIA

La metodología presentada en este artículo está basada en el dominio de las frecuencias. Se considera, por tanto, que la información discriminatoria se concentra en los espectros de las series de tiempo consideradas (o equivalentemente en sus autocovarianzas) y no en sus medias o en alguna otra característica que pudiera ser extraída de las series.

El problema es entonces discriminar entre dos procesos estacionarios, normales, con media cero, H_1 y H_2 , en base a

una realización $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(T))'$. Tenemos de esta manera que

$$H_j : \mathbf{X} \sim N_T(\mathbf{0}, \mathbf{R}_j); \quad j = 1, 2$$

en donde la $T \times T$ matriz de covarianzas $\mathbf{R}_j = \{R_j^{t,u}\}_{t,u=0,1,\dots,T-1}$ es Toeplitz finita, de tal forma que $R_j^{t,u}$ es una función de $|t-u|$.

De acuerdo a Anderson y Bahadur (1962) y a Dargahi-Noubary y Laycock (1981), el mejor procedimiento, desde un punto de vista teórico, para clasificar a \mathbf{X} está basado en la razón de verosimilitud: rechace H_2 si la función discriminante cuadrática

$$d_Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'(\mathbf{R}_2^{-1} - \mathbf{R}_1^{-1})\mathbf{X} \quad (1.1)$$

es mayor que un valor umbral K , donde K es elegido de tal forma que las probabilidades clasificaciones incorrectas $P(1/2)$ y $P(2/1)$, se mantengan por debajo de ciertos valores especificados de antemano.

Dado que la expresión (1.1) involucra cálculos matriciales complejos -multiplicaciones e inversas de matrices $T \times T$ - para todo fin práctico, esta expresión resulta ser inútil. Es por ello que algunas aproximaciones, con estructuras operacionales más simples, han sido desarrolladas (c.f. e.g. Liggett, 1971; Dargahi-Noubary, 1981 y Shumway, 1982). Estas aproximaciones requieren de la estimación de los espectros de las series consideradas.

Antes de considerar tales aproximaciones, es importante distinguir si los dos grupos de series de tiempo pueden considerarse estadísticamente diferentes, dada la información contenida en sus espectros. Para ello, una prueba de hipótesis de la igualdad de los espectros de las dos poblaciones, puede ser fácilmente construida mediante el uso de los periodogramas de las series de tiempo en ambos grupos (c.f. e.g. Shumway, 1982). A continuación, se describe brevemente esta prueba.

2.1. Prueba sobre la igualdad de los espectros de los dos grupos.

Se supone que se cuenta con dos muestras de aprendizaje de N_1

y N_2 series de tiempo estacionarias, normales, con media cero, de los dos grupos respectivamente

$$\{X_{jl} = (X_{jl}(1), \dots, X_{jl}(T))', l = 1, \dots, N_j; j = 1, 2\}.$$

El espectro de la j -ésima población $f_j(\cdot)$ puede ser estimado con el promedio de los periodogramas de las series de tiempo de la j -ésima muestra ($j=1,2$). Si se denota este estimador por $f_{jT}(\cdot)$, se tiene que

$$f_{jT}(\omega) = N_j^{-1} \sum_{l=1}^{N_j} f_{jlT}(\omega) \quad (2.1)$$

donde $f_{jlT}(\omega)$ es el valor del periodograma en la frecuencia ω de la l -ésima serie en el j -ésimo grupo, definido por

$$f_{jlT}(\omega) = \sum_{s=-(T-1)}^{(T-1)} \hat{R}_{jl}(s) e^{-i\omega s}$$

en donde $\hat{R}_{jl}(s)$ es el valor de la autocovarianza muestral de la serie X_{jl} en el rezago s , i. e.,

$$\hat{R}_{jl}(s) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|s|} (X_{jl}(t) - \bar{X}_{jl})(X_{jl}(t+|s|) - \bar{X}_{jl})$$

y $\bar{X}_{jl} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{jl}(t)$ es la media muestral de X_{jl} . Nótese que (2.1) puede escribirse de manera más conveniente como

$$f_{jT}(\omega) = \sum_{s=-(T-1)}^{(T-1)} \bar{R}_j(s) e^{-i\omega s} \quad (2.2)$$

donde $\bar{R}_j(s)$ es el promedio de las autocovarianzas muestrales en el rezago s para las series de tiempo del j -ésimo grupo.

La estadística de prueba está basada en el cociente

$$F(\omega) = f_{1T}(\omega)/f_{2T}(\omega) \quad (2.3)$$

Dado que los valores del periodograma en cualquier frecuencia se distribuyen como chi-cuadrada, el cociente anterior tiene una distribución F con $2N_1, 2N_2$ grados de libertad para $\omega \neq 0, \pi$ y N_1, N_2 grados de libertad para $\omega = 0, \pi$.

Resulta conveniente graficar $F(\omega)$ contra ω para ver qué frecuencias son las que discriminan. Generalmente $F(\omega)$ se evalúa solamente en las frecuencias de Fourier $\omega_k = 2\pi k/T$, $k = 0, 1, \dots, T-1$, aunque en algunos casos puede ser útil evaluarla en un conjunto más fino de frecuencias.

La prueba anterior está basada en el valor promedio de los periodogramas no ventaneados de las series de tiempo en ambas de las muestras de aprendizaje. Sin embargo, el uso de ventanas para suavizar los periodogramas para tener así estimadores consistentes del espectro, es preferido generalmente. El uso de ventanas cambia la distribución de los estimadores espectrales, y por lo tanto, la prueba que se basa en (2.3) ya no es válida. Sin embargo, esta prueba puede ser fácilmente extendida cuando las ventanas son usadas. Una descripción completa de esta extensión puede encontrarse en Alagón, 1986. En este trabajo, solamente presentaremos la nueva estadística de prueba.

Si denotamos la ventana por $\lambda_T(\cdot)$, el estimador espectral ventaneado para la j -ésima población se puede escribir como

$$f_{jT}^{(w)}(\omega) = \sum_{s=-(T-1)}^{(T-1)} \lambda_T(s) \bar{R}_j(s) e^{-iws} \quad (2.4)$$

La nueva estadística de prueba está dada por

$$F(w)(\omega) = \frac{\{f_{1T}^{(w)}(\omega)/a_1 f_1(\omega)\}/\nu_1}{\{f_{2T}^{(w)}(\omega)/a_2 f_2(\omega)\}/\nu_2} = \frac{f_{1T}^{(w)}(\omega)}{f_{2T}^{(w)}(\omega)} \quad (2.5)$$

que tiene una distribución F bajo la hipótesis nula de no diferencias entre los espectros de las dos poblaciones. Los grados de libertad de la estadística anterior ya no son $2N_1, 2N_2$: éstos se modifican a ν_1, ν_2 , en donde

$$\nu_j = 2N_j T / \left[\sum_{s=-(T-1)}^{(T-1)} \lambda_T^2(s) \right], \quad \omega \neq 0, \pi \quad (2.6)$$

El término $\sum \lambda_T^2(s)$ ha sido evaluado con diferentes ventanas (ver Priestley, 1981, tabla 6.2) y por ejemplo, para una ventana de Bartlett, con un punto de corte M , (i.e., para $\lambda_T(s) = [1 - |s|/M]$) se tiene que $\nu_j = 3N_j T/M$, $\omega \neq 0, \pi$

Para aquéllos casos en los que pudiera ser importante evaluar los estimadores espectrales en un conjunto de frecuencias más fino que el conjunto de frecuencias canónicas de Fourier, la prueba anterior sigue siendo válida.

2.2. Estimadores ventaneados de la función discriminante cuadrática

Para clasificar una serie estacionaria, normal, con media cero, $\mathbf{X} = (X(1), \dots, X(T))'$ en alguna de las dos poblaciones π_1 o π_2 , la función discriminante cuadrática $d_Q(\mathbf{X})$ puede ser aproximada por

$$\hat{d}_Q(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{T-1} I_T(\omega_k) [f_2^{-1}(\omega_k) - f_1^{-1}(\omega_k)] \quad (2.7)$$

(c.f. e.g. Shumway, 1982), donde $I_T(\omega_k)$ es el valor del periodograma en la frecuencia ω_k , definido en (2.2).

Para el caso en el que se hayan usado ventanas, la función discriminante cuadrática también se modifica a

$$\hat{d}_Q^{(w)}(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{T-1} f_T^{(w)}(\omega_k) [f_2^{-1}(\omega_k) - f_1^{-1}(\omega_k)] \quad (2.8)$$

en donde $f_T^{(w)}(\omega_k)$ es el valor del periodograma ventaneado de la serie \mathbf{X} en ω_k , $k = 0, 1, \dots, T-1$. Nótese que $\hat{d}_Q^{(w)}(\mathbf{X})$ es preferida a $\hat{d}_Q(\mathbf{X})$ dado que (i) converge a $d_Q(\mathbf{X})$ a la misma velocidad que $\hat{d}_Q^{(w)}(\mathbf{X})$ y (ii) para cualquier selección razonable de ventanas, $\hat{d}_Q^{(w)}(\mathbf{X})$ tiene una varianza menor que $\hat{d}_Q(\mathbf{X})$, y al tener ambas funciones la misma media, las probabilidades de clasificaciones incorrectas son menores para $\hat{d}_Q^{(w)}(\mathbf{X})$, mejorando así el procedimiento discriminatorio (ver, p. ej. Anderson y Bahadur, 1962).

Si se usa un conjunto de frecuencias más fino que el de Fourier para evaluar los estimadores espectrales, se pueden modificar fácilmente las funciones discriminante anteriores.

Existen diversos métodos para evaluar las probabilidades de clasificaciones incorrectas. En este artículo se usará el procedimiento usual del "Reconocimiento de Patrones" por medio del cual se utiliza una muestra independiente de las muestras de aprendizaje para evaluar dichas probabilidades.

2.3. Clasificación de series de tiempo en el dominio del tiempo.

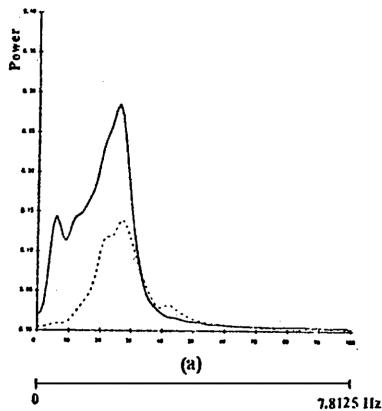
Una metodología de clasificación de series de tiempo muy distinta a la recién expuesta, ha sido desarrollado en el dominio del tiempo principalmente por Gersch (ver Gersch, 1977, 1981). En esta metodología, se ajustan modelos autoregresivos a las series de tiempo en ambas muestras de aprendizaje, así como a las series por clasificar. Una medida de distancia (la llamada distancia de Kullback-Leibler o entropía cruzada) es usada para comparar diferentes ajustes de modelos autoregresivos. La clasificación es entonces hecha de acuerdo al criterio del "vecino más cercano"; es decir, una nueva serie se clasifica en el grupo al cual pertenece la serie de la muestra de aprendizaje más cercana a esta serie.

Esta metodología no es tratada con detalle en el presente trabajo. Sin embargo, es importante mencionar su existencia.

3. Ilustración: un ejemplo de Sismología

La metodología recién expuesta puede ser ilustrada y evaluada empíricamente, aplicándola a un conjunto adecuado de datos. Para ello se usó un conjunto de registros sísmicos de 40 temblores y de 26 explosiones nucleares, dados en Shumway y Blandford (1974). (Los valores numéricos de las series de tiempo no están dados en ese artículo, siendo necesario digitalizar los registros por medio de un Digitalizador HP, muestreando 200 puntos por serie). La figura 1 muestra cinco elementos típicos de cada una de las dos poblaciones. Una sub-muestra de 23 temblores y de 15 explosiones nucleares seleccionada aleatoriamente fue usada como muestra de aprendizaje del total de 40 temblores y de 26 explosiones (la misma muestra usada por Shumway y Blandford).

Para determinar si existen diferencias en los espectros de las dos poblaciones, se utilizó la prueba descrita en la sección 2.1 a la muestra de aprendizaje. La figura 3 muestra los promedios de los espectros de las series de tiempo en las muestras de aprendizaje, dados por la ecuación (2.4) para el caso ventaneado (usando una ventana de Bartlett con punto de corte $M = 50$).



----- Explosiones Nucleares
— Temblores

Fig. 3. Promedio de los espectros estimados de las muestras de aprendizaje calculados en las frecuencias de Fourier $2\pi i/200$, $i=0, 1, \dots, 100$ con una ventana de Bartlett.

El espectro promedio de los temblores parece estar mucho más concentrado en frecuencias bajas que el de las explosiones. Además, el primero es más alto y más ancho, lo que es un reflejo del carácter energético mayor de los registros de temblores.

La figura 4 muestra la estadística F dada por la fórmula 2.6. Es importante resaltar el cambio de los grados de libertad debido al efecto de suavizamiento de las ventanas espectrales: para el caso ventaneado, se tienen 276 y 180 gl, mientras que para el caso sin ventanas, se tienen 46 y 23 gl. Para este ejemplo, la estadística de prueba excede el valor crítico (para una prueba de dos colas con $\alpha = 0.05$) de una manera consistente sobre las bandas de frecuencias 0-2.4 Hz (unidades de 0 a 30) y 3-4 Hz (unidades de 39 a 51). Desde luego que bandas más amplias de frecuencias serían obtenidas si usáramos valores de α mayores a 0.05.

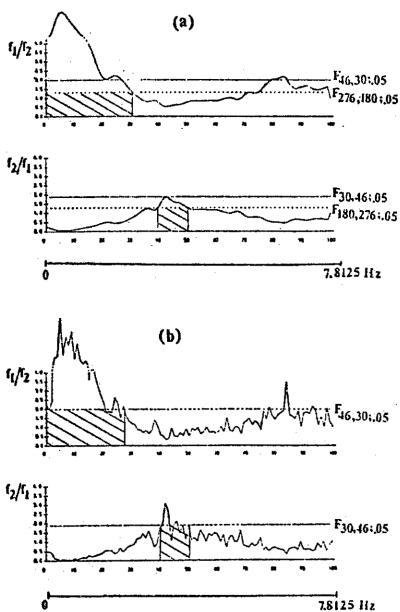


Fig 4. Estadística F para probar la igualdad de dos espectros calculada en las frecuencias de Fourier $2\pi i/200$, $i = 0, 1, \dots, 100$.

Posteriormente, la función discriminante cuadrática (2.8) con las bandas 0-2.4 Hz y 3-4 Hz y con $f_1(\cdot)$ y $f_2(\cdot)$ estimados a partir de los registros en las muestras de aprendizaje. Se obtuvo una clasificación incorrecta de cuatro registros de los 28 en la muestra independiente (EQ34, EQ38, EQ39, y EX19) lo que implica un error de clasificaciones incorrectas de 0.14; ninguno de los registros de la muestra de aprendizaje fue clasificado incorrectamente, lo que implica un error de clasificaciones incorrectas del 0.06.

El uso de la metodología de Gersch en el dominio del tiempo produce 5 clasificaciones incorrectas (EQ22, EQ34, EQ38, EX16 y EX19), lo que implica un error empírico de clasificaciones incorrectas de 0.075. Este es comparable al obtenido con la otra metodología.

4. Una aplicación a Neurología

En esta sección se describe el análisis discriminante del conjunto de datos neurológicos descritos en la introducción de este artículo. Se usaron dos sub-muestras de 15 PCPs y de 14 PCPs del grupo afectado nor EM y del grupo control, respectivamente.

La figura 5 muestra el promedio de los espectros de las series de tiempo en las dos muestras de aprendizaje, dados por (2.4), usando una ventana de Bartlett con $M = 180$. Un conjunto muy fino de frecuencias fue usado para evaluar los espectros estimados (unidades de 25.1 Hz en vez de los 125.5 Hz implicados por las frecuencias de Fourier). Dado que la frecuencia Nyquist es 12000 Hz, los espectros de ambas poblaciones están concentrados sobre rangos de frecuencias muy bajos. Para el grupo afectado, existe una concentración espectral muy fuerte alrededor de 125 Hz.

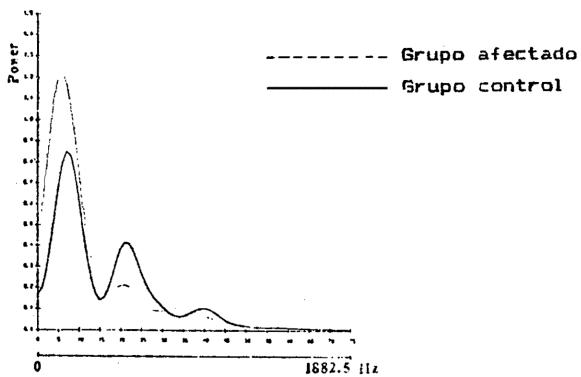


Fig. 5. Promedio de los espectros estimados de las series de tiempo en ambos grupos, calculado en la red de frecuencias $2\pi i/1020$, $i=0, 1, \dots, 75$.

La estadística F para la igualdad de los dos espectros dada en (2.6) tiene 51 y 49 gl (en vez de los 30 y 28 gl que se hubieran tenido sin ventanas). El cociente excede los valores críticos (a un nivel de 0.05) sobre los rangos de frecuencias 0 a 150 Hz y 475 a 700 Hz. Sin embargo, las diferencias entre los dos espectros no son tan claras como lo fueron para el ejemplo de los temblores y de las explosiones. Se pueden obtener diferencias poco más sutiles si cambiamos un poco el nivel de significancia.

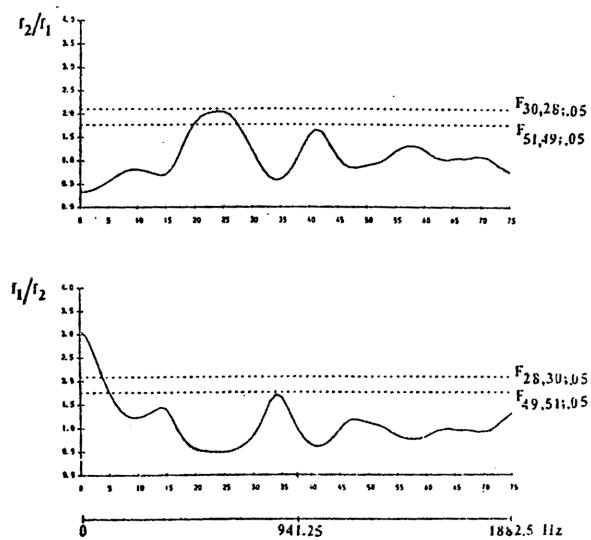


Fig 6. Estadística F para probar la igualdad de los espectros de los grupos afectado y control calculado en la red de frecuencias $2\pi i/1020$, $i=0, 1, \dots, 75$.

La aplicación de la función discriminante cuadrática (2.8) al conjunto total de PCPs, usando los estimadores espectrales obtenidos de las muestras de aprendizaje, produce una clasificación incorrecta de 11 potenciales del total de 54, lo que implica un error de clasificación de 0.20). Este esquema de clasificación puede ser ligeramente mejorado usando funciones discriminante mixtas lineales y cuadráticas (ver Alagón, 1986). Sin embargo, la separabilidad entre las dos poblaciones no fue suficiente como para justificar el uso de los PCPs como un medio definitivo de clasificación. La variabilidad de los PCPs es grande y su forma puede depender de otras variables como la edad, el sexo y el nivel de la enfermedad, o bien de variables de confusión tales como el ruido del aparato registrador y la posición de los electrodos en la cabeza del paciente. La información dada por estas variables puede ser esencial para la obtención de un buen esquema de clasificación.

Bibliografía

- ALAGON J. (1986) *Discriminant analysis for time series.* D. Phil Thesis, University of Oxford.
- ANDERSON T. W. y BAHADUR R. R. (1962) Classification into two multivariate normal distributions with different covariance matrices. *Ann. Math. Stat.*, 33, 420-431.
- DARGAHI-NOUBARY G. R. y LAYCOCK P. J. (1981) Spectral ratio discriminants and information theory. *Jour. Time Series Anal.*, Vol. 2, No. 2., 71-86.
- GERSON W. (1981) Nearest neighbour rule classification of stationary and non-stationary time series. *Appl. Time Series Anal.*, ed por D. Findley, Academic Press.
- GEVING A. S. (1990) Pattern recognition of human brain electrical potentials. *I.E.E.E. Trans. Pattern Anal. Mach. Int.*, No. 5.
- LIGGETT W. S. (1971) On the asymptotic optimality of spectral analysis for testing hypotheses about time series. *Ann. Math. Statist.* 42, 1348-1358.
- PRIESTLEY M. B. (1981) *Spectral analysis and time series.* Academic Press.
- RAGI E. (1985) Analysis of the brainstem auditory evoked potentials in neurological disease. D. Phil. Thesis, University of Oxford.
- SHUMWAY R. H. (1982) Discriminant analysis for time series. *Handbook of Statistics*, Vol. 2, P. R. Krishnaiah y L. N. Kanal eds., North Holland Publishing company, 1-46.
- SHUMWAY R. H. y BLANDFORD (1974) An examination of some new and classical short period discriminants. *Tech. Rept. No. TR 74-10,* Seismic Data Analysis Center, Alexandria, USA.

*Publicado por el Departamento de Difusión
y Servicios Académicos de la UACPyP del CCH.*