Erläuterungen zu den Heuristiken im VBA-Programm

Die „clusterorientierten“ Strategien CO_$*$ verfolgen eine Breitensuche im nahen Umfeld um ausgewählte Hubknoten, wobei einerseits ein lage-orientiertes (Nordwest) und andererseits ein laubmengen-orientiertes Auswahlkriterium für die Hubs zum Tragen kommt.

CO_NW

Aufgrund der vereinbarten Knotennummerierung entspricht die „Nordwest-Ecken-Regel“ (NWE) der Abarbeitungsreihenfolge gemäß dem kleinsten vorhandenen Knotenindex (z.B. in einer vorhandenen Liste).

- **Initialisierung**:
  Es liegt die Menge V aller Knoten vor.
- **Schritt 1**:
  Es wird der Knoten aus V mit dem kleinsten Index zum Hub bestimmt und als „aktueller Knoten“ betrachtet. Dieser Knoten wird aus der Knotenmenge V gestrichen.
- **Schritt 2**:
  Alle Nachbarknoten des aktuellen Knotens werden gemäß der Indexreihenfolge als „Kandidaten“ überprüft. Falls der Harkprozess von einem Nachbarknoten zum aktuellen Knoten unter Beachtung der maximal erlaubten Laubmenge zulässig ist, wird dieser Harkschritt registriert und der Nachbarknoten in eine „Kandidatenliste“ aufgenommen, welche als Schlangenspeicher betrachtet wird („FIFO-Prinzip“).
- **Schritt 3**:
  Falls der aktuelle Knoten bzgl. Nachbarschaftssuche (Schritt 2) abgearbeitet ist, wird aus der Kandidatenliste gemäß Indexreihenfolge (NWE) ein neuer aktueller Knoten ausgesucht, welcher sowohl aus der Kandidatenliste als auch aus der Knotenmenge V gestrichen wird. Danach wird wie in Schritt 2 verfahren. Falls die Kandidatenliste bereits leer war, also kein neuer aktueller Knoten bestimmt werden konnte, gehe zu Schritt 1.

Der Prozess bricht ab, wenn die Knotenmenge V leer ist.

Auf diese Weise entstehen auf kanonische Weise „Cluster“ (Teilmengen der Knotenmenge). Jedes Cluster wird durch den zugehörigen Hub, welcher jeweils in Schritt 1 bestimmt wird, repräsentiert.

CO_NW plus HZ

Es wird zunächst das oben beschriebene CO_NW angewendet. Danach werden unter Beibehaltung der entstandenen Cluster neue Hubs gesucht. Hierbei wird derjenige Knoten mit der größten Laubmenge im jeweiligen Cluster zum (neuen) Hub bestimmt. Das Harken innerhalb eines Clusters wird auf den neuen Hub ausgerichtet.[1] Falls die Bestimmung des neuen Hubs gemäß obigem Kriterium nicht eindeutig möglich ist (d.h. es gibt mehrere Knoten mit größter Laubmenge), gilt die Indexreihenfolge als Sekundärkriterium.[2]

CO_max

Im Unterschied zur Strategie CO_NW wird im Schritt 1 stets der Knoten mit der größten Laubmenge zum Hub bestimmt. Bei Nichteindeutigkeit wird die Indexreihenfolge als Sekundärkriterium hinzugezogen.

[1] Näheres zur Hubausrichtung später!
[2] Hier wäre die Zwischenschaltung eines zusätzlichen Kriteriums sinnvoll, nämlich die minimale Entfernung zum Kompost, wonach die Indexreihenfolge als Tertiärkriterium die Eindeutigkeit der Knotenwahl sicherstellt.

- **Initialisierung**:
  Es liegt die Menge V aller Knoten vor.
- **Schritt 1**:
  Es wird der Knoten aus V mit der größten Laubmenge zum Hub bestimmt[3] und als „aktueller Knoten“ betrachtet. Dieser Knoten wird aus der Knotenmenge V gestrichen.
- **Schritt 2**:
  Alle Nachbarknoten des aktuellen Knotens werden gemäß der Indexreihenfolge als „Kandidaten“ überprüft. Falls der Harkprozess von einem Nachbarknoten zum aktuellen Knoten unter Beachtung der maximal erlaubten Laubmenge zulässig ist, wird dieser Harkschritt registriert und der Nachbarknoten in eine „Kandidatenliste“ aufgenommen.
- **Schritt 3**:
  Falls der aktuelle Knoten bzgl. Nachbarschaftssuche abgearbeitet ist, wird aus der Kandidatenliste gemäß Indexreihenfolge (NWE) ein neuer aktueller Knoten ausgesucht, welcher sowohl aus der Kandidatenliste als auch aus der Knotenmenge V gestrichen wird. Danach wird wie in Schritt 2 verfahren. Falls die Kandidatenliste bereits leer war, also kein neuer aktueller Knoten bestimmt werden konnte, gehe zu Schritt 1.

Der Prozess bricht ab, wenn die Knotenmenge V leer ist.

CO_max plus HZ
Aufgrund der Konstruktion kann die neue Hubbestimmung unter den bislang eingesetzten Auswahlkriterien keine Verbesserung bringen! Somit ist diese Zusatzstrategie obsolent.

Im Unterschied zu den clusterorientierten Strategien CO_∗, die dem Prinzip einer Breitensuche folgen, benutzen die huborientierten Strategien HO_∗ eine Tiefensuche. Zur Aufnahme weiterer Knoten werden alternativ minimale bzw. maximale Laubmengen als Kriterien herangezogen.

HO_TS_max
Zunächst die Variante „maximale Laubmenge“:

- **Initialisierung**:
  Es liegt die Menge V aller Knoten vor.
- **Schritt 1**:
  Es wird der Knoten aus V mit der größten Laubmenge zum Hub bestimmt und als „aktueller Knoten“ betrachtet. Dieser Knoten wird aus der Knotenmenge V gestrichen.
- **Schritt 2**:
  Unter allen Nachbarknoten des aktuellen Knotens wird der laubmengen-maximale Knoten ausgewählt. Dabei kommen allerdings nur Knoten infrage, deren Laubmenge kleiner oder gleich der Laubmenge des aktuellen Knotens ist.[4] Gibt es einen solchen Knoten nicht, wird der Weg Schritt für Schritt zurückgegangen (ggf. bis zum Hub).[5] Wird auf diesem „Backtracking“ kein Kandidat gefunden, wird mit Schritt 1 fortgesetzt.

[3] Zur Sicherstellung der Eindeutigkeit wird die Indexreihenfolge als Sekundärkriterium herangezogen. Auch hier könnte der Einbau des Kriteriums „kürzeste Entfernung zum Kompost“ sinnvoll sein!
[4] Grundsätzlich wird das Prinzip verfolgt, dass nur von einem Knoten zu einem Nachbarknoten mit mehr oder mindestens gleich viel Laubmenge geharkt werden darf.
[5] Hierbei wechselt die Rolle des aktuellen Knotens bei jedem (Rück-)Schritt.

- **Schritt 3**:
  Falls es einen passenden Kandidaten gibt, wird der Harkschritt vom Kandidaten zum aktuellen Knoten registriert und der Kandidat selbst zum neuen aktuellen Knoten erklärt, wobei er aus der Liste gestrichen wird. Danach wird wie in Schritt 2 verfahren.

Der Prozess bricht ab, wenn die Knotenmenge V leer ist.

HO_TS_max plus HZ
Es wird zunächst das oben beschriebene HO_TS_max angewendet. Danach wird unter Beibehaltung der entstandenen Cluster das Harken innerhalb eines Clusters auf den Hub ausgerichtet.

HO_TS_min
Entspricht weitestgehend dem Verfahren HO_TS_max, allerdings wird in Schritt 2 der laubmengenminimale Knoten ausgewählt.

HO_TS_min plus HZ
Es wird zunächst das oben beschriebene HO_TS_min angewendet. Danach wird unter Beibehaltung der entstandenen Cluster das Harken innerhalb eines Clusters auf den Hub ausgerichtet.

Anmerkungen:
Die Namensgebung der Verfahren ist zu überdenken!
Vorschlag: BS_NW (plus HZ), BS_max, TS_max (plus HZ), TS_min (plus HZ).

Algorithmische Beschreibungen der Heuristiken

Gegeben: Knotenmenge $V \neq \emptyset$, zugehörige Adjazenzmatrix, Knotenbewertungsvektor M, mit Nullen initialisierter Vektor s.[6]

Algorithmus CO_*
Schritt 1:
Fall * $\equiv$ NW: Wähle Knoten $a \in V$ mit kleinstem Index.[7]
Fall * $\equiv$ max: Wähle Knoten $a \in V$ mit $M(a) = \max\{M(i) \mid i \in V\}$.[8]
Setze $h := a; V := V \setminus \{h\}, M_s^*(h) := M(h); s(h) := h; K := \emptyset$.[9]
Schritt 2:
Für alle $i \in (N(a) \cap V) \setminus K$, führe aus:
Falls $M_s^*(h) + M(i) \leq \overline{M}$, führe aus:
Setze $K := K \cup \{i\}; V := V \setminus \{i\}; s(i) := a; M_s^*(h) := M_s^*(h) + M(i)$.
Schritt 3:
Falls $K \neq \emptyset$, führe aus:
Wähle $a \in K$ mit kleinstem Index.
Gehe zu Schritt 2.
Falls $V \neq \emptyset$, gehe zu Schritt 1.
Terminiere!

Algorithmus HO_TS_*
Schritt 1:
Falls $V = \emptyset$, terminiere.
Wähle Knoten $a \in V$ mit $M(a) = \max\{M(i) \mid i \in V\}$.[10]
Setze $h := a; V := V \setminus \{h\}, M_s^*(h) := M(h); s(h) := h$.
Schritt 2:
Setze $K(a) := N(a) \cap V$.
Falls $K(a) = \emptyset$, führe aus:
Falls $a = h$, gehe zu Schritt 1.
Setze $a := s(a)$ und gehe zu Schritt 2.
Schritt 3:
Bestimme $k \in K(a)$ mit $M(k) = *\{M(i) \mid i \in K(a)\}$. ($* \equiv \max$ oder $* \equiv \min$)[11]
Falls $M_s^*(h) + M(k) \leq \overline{M}$, führe aus:
Setze $V := V \setminus \{k\}; s(k) := a; M_s^*(h) := M_s^*(h) + M(k); a := k$.
Gehe zu Schritt 2.
Setze $K(a) := K(a) \setminus \{k\}$.
Falls $K(a) \neq \emptyset$, gehe zu Schritt 3.
Setze $a := s(a)$ und gehe zu Schritt 2.

[6] Anhand der Adjazenzmatrix lassen sich die Nachbarmengen $N(i), i \in V$, bestimmen. Für alle Knotenbewertungen gilt: $M(i) \leq \overline{M}, i \in V$. Der Vektor s dient als Nachfolgerfunktion.
[7] Da die Knotenmenge V auf kanonische Weise in geordneter Form vorliegt, ist dies identisch mit der Wahl des ersten Knotens in der Liste.
[8] Falls anhand des Maximum-Kriteriums keine eindeutige Knotenbestimmung möglich ist, wird unter den alternativen Knoten derjenige mit dem kleinsten Index gewählt.
[9] Die Kandidatenliste K ist ein Schlangenspeicher (FIFO).
[10] Auswahlkriterium analog zu CO_max.
[11] Zur Absicherung einer eindeutigen Knotenbestimmung wird jeweils das Sekundärkriterium „Kleinster Index“ eingesetzt.

Erläuterung der Hubzentrierung (HZ) am Beispiel

Gegeben sei ein „Garten“ mit 24 Feldern, die entsprechend der NW-Indizierung nummeriert sind:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24

Es habe sich das gelb unterlegte Cluster gebildet. Darin wird jenes Feld zum Hub bestimmt, dessen Laubmenge maximal ist. Falls kein eindeutiges Maximum vorliegt, wird der Kandidat mit dem kleinsten Index gewählt. Es werde das Feld 8 als Hub angenommen.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24

Eine anfängliche Harkvorschrift sei anhand der Pfeilrichtungen angegeben[12]:

→	↓	←	←	5	6
→	8	←	10	11	12
↑	→	↑	16	17	18
↑	20	↑	22	23	24

Eine Hubausrichtung findet durch eine kürzestmögliche Ausrichtung der Pfeile auf das Hub innerhalb des Clusters statt. Dabei ist zu beachten, ob diagonale Pfeile den horizontalen bzw. vertikalen Pfeilen in der Entfernungsbewertung gleichgewichtet sind oder höher gewichtet werden (etwa nach dem Satz des Pythagoras). Im ersten Fall ergibt sich die folgende Pfeilausrichtung:

↘	↓	↙	←	5	6
→	8	←	10	11	12
↗	↑	↖	16	17	18
↑	20	↖	22	23	24

Zur Gewährleistung einer einheitlichen Vorgehensweise bei alternativen Entfernungen kommt die „Kleinster-Index-Regel“ zur Anwendung. Beispielsweise könnte von Feld 21 über Feld 15 zum Hubfeld 8 geharkt werden, also $21 \to 15 \to 8$. Wegen $14 < 15$ fällt die Wahl allerdings auf $21 \to 14 \to 8$. Analog ergibt sich $19 \to 13 \to 8$ statt $19 \to 14 \to 8$ sowie $4 \to 3 \to 8$ statt $4 \to 9 \to 8$.

[12] Es könnte sogar sein, dass eine anfängliche Harkvorschrift ein anderes Hub vorsieht.

Ablauf der Heuristiken am Beispiel

Gegeben sei der folgende Garten mit $V = \{1, \ldots, 24\}$ und entsprechenden Laubmengen $M_i, i = 1, \ldots, 24$. Zudem sei die maximal erlaubte Laubmengenanhäufung $\overline{M} = 12$.

1 **5**	2 **2**	3 **3**	4 **1**	5 **4**	6 **3**
7 **2**	8 **3**	9 **1**	10 **2**	11 **2**	12 **6**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

CO_NW

Schritt 1: Hubknoten 1 $\Rightarrow V = \{2, \ldots, 24\}$, Kumulierte Laubmenge $M_s^*(1) = 5$.

Schritt 2: Nachbarmenge $N(1) = \{2, 7, 8\}$ als mögliche Kandidaten:

$2 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 7 < \overline{M}$, Kandidatenliste $K = (2)$.[13]

$7 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 9 < \overline{M}, K = (2, 7)$.

$8 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 12 = \overline{M}, K = (2, 7, 8)$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist ($M_s^*(1) = \overline{M}$), ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

$V = \{3, \ldots, 6, 9, \ldots, 24\}$.

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 **1**	5 **4**	6 **3**
7 ↑	8 ↖	9 **1**	10 **2**	11 **2**	12 **6**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 3 $\Rightarrow V = \{4, 5, 6, 9, \ldots, 24\}$, $M_s^*(3) = 3$, $K = \emptyset$.

Schritt 2: Mögliche neue Kandidaten: $(N(3) \cap V) \setminus K = \{4, 9, 10\}$:

$4 \to 3 \Rightarrow M_s^*(3) = 4 < \overline{M}, K = (4), V = \{5, 6, 9, \ldots, 24\}$.

$9 \to 3 \Rightarrow M_s^*(3) = 5 < \overline{M}, K = (4, 9), V = \{5, 6, 10, \ldots, 24\}$.

$10 \to 3 \Rightarrow M_s^*(3) = 7 < \overline{M}, K = (4, 9, 10), V = \{5, 6, 11, \ldots, 24\}$.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 4 $\Rightarrow K = (9, 10)$.

Schritt 2: $(N(4) \cap V) \setminus K = \{5, 11\}$:

$5 \to 4 \Rightarrow M_s^*(3) = 11 < \overline{M}, K = (9, 10, 5), V = \{6, 11, \ldots, 24\}$.

$11 \not\twoheadrightarrow 4$ wg. $M_s^*(3) = 13 > \overline{M}$.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 9 $\Rightarrow K = (10, 5)$.

Schritt 2: $(N(9) \cap V) \setminus K = \{14, 15, 16\}$:

$14 \not\twoheadrightarrow 9$.

$15 \to 9 \Rightarrow M_s^*(3) = 12 = \overline{M}, K = (10, 5, 15), V = \{6, 11, \ldots, 14, 16, \ldots, 24\}$.

[13] Man beachte, dass K eine nach dem FIFO-Prinzip geordnete Menge ist.

16 $\nrightarrow$ 9.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist ($M_s^*(3) = \overline{M}$), ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 ←	3 **12**	4 ←	5 ←	6 **3**
7 ↑	8 ↖	9 ↑	10 ↖	11 **2**	12 **6**
13 **3**	14 **4**	15 ↑	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 6 $\Rightarrow V = \{11, 12, 13, 14, 16, \ldots, 24\},\ M_s^*(6) = 3,\ K = \emptyset$.

Schritt 2: $(N(6) \cap V) \setminus K = \{11, 12\}$:

$11 \rightarrow 6 \Rightarrow M_s^*(6) = 5 < \overline{M}, K = (11), V = \{12, 13, 14, 16, \ldots, 24\}$.

$12 \rightarrow 6 \Rightarrow M_s^*(6) = 11 < \overline{M}, K = (11, 12), V = \{13, 14, 16, \ldots, 24\}$.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 11 $\Rightarrow V = \{12, 13, 14, 16, \ldots, 24\}, K = (12)$.

Schritt 2: $(N(11) \cap V) \setminus K = \{16, 17, 18\}$:

16 $\nrightarrow$ 11.

17 $\nrightarrow$ 11.

$18 \rightarrow 11 \Rightarrow M_s^*(6) = 12 = \overline{M}, K = (12, 18), V = \{13, 14, 16, 17, 19 \ldots, 24\}$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 ←	3 **12**	4 ←	5 ←	6 **12**
7 ↑	8 ↖	9 ↑	10 ↖	11 ↗	12 ↑
13 **3**	14 **4**	15 ↑	16 **3**	17 **2**	18 ↖
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 13 $\Rightarrow V = \{14, 16, 17, 19 \ldots, 24\},\ M_s^*(13) = 3,\ K = \emptyset$.

Schritt 2: $(N(13) \cap V) \setminus K = \{14, 19, 20\}$:

$14 \rightarrow 13 \Rightarrow M_s^*(13) = 7 < \overline{M}, K = (14), V = \{16, 17, 19 \ldots, 24\}$.

$19 \rightarrow 13 \Rightarrow M_s^*(13) = 9 < \overline{M}, K = (14, 19), V = \{16, 17, 20 \ldots, 24\}$.

$20 \rightarrow 13 \Rightarrow M_s^*(13) = 10 < \overline{M}, K = (14, 19, 20), V = \{16, 17, 21 \ldots, 24\}$.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 14 $\Rightarrow K = (19, 20)$.

Schritt 2: $(N(14) \cap V) \setminus K = \{21\}$:

21 $\nrightarrow$ 14.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 19 $\Rightarrow K = (20)$.

Schritt 2: $(N(19) \cap V) \setminus K = \emptyset$:

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 20 $\Rightarrow K = \emptyset$.

Schritt 2: $(N(20) \cap V) \setminus K = (21)$:

21 $\nrightarrow$ 20.

Schritt 3: Keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 ←	3 **12**	4 ←	5 ←	6 **12**
7 ↑	8 ↖	9 ↑	10 ↖	11 ↗	12 ↑
13 **10**	14 ←	15 ↑	16 **3**	17 **2**	18 ↖
19 ↑	20 ↖	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 16 $\Rightarrow V = \{17, 21 \dots, 24\},\ M_s^*(16) = 3,\ K = \emptyset$.

Schritt 2: $(N(16) \cap V) \setminus K = (17, 21, 22, 23)$:

$17 \to 16 \Rightarrow M_s^*(16) = 5 < \overline{M}, K = (17), V = \{21, 22, 23, 24\}$.

$21 \to 16 \Rightarrow M_s^*(16) = 8 < \overline{M}, K = (17, 21), V = \{22, 23, 24\}$.

$22 \to 16 \Rightarrow M_s^*(16) = 12 = \overline{M}, K = (17, 21, 22), V = \{23, 24\}$.

$23 \nrightarrow 16$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 ←	3 **12**	4 ←	5 ←	6 **12**
7 ↑	8 ↖	9 ↑	10 ↖	11 ↗	12 ↑
13 **10**	14 ←	15 ↑	16 **12**	17 ←	18 ↖
19 ↑	20 ↖	21 ↗	22 ↑	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 23 $\Rightarrow V = \{24\},\ M_s^*(23) = 3,\ K = \emptyset$.

Schritt 2: $(N(23) \cap V) \setminus K = (24)$:

$24 \to 23 \Rightarrow M_s^*(23) = 6 < \overline{M}, K = (24), V = \emptyset$.

Schritt 3: Da $V = \emptyset$, bricht das Verfahren ab.

1 **12**	2 ←	3 **12**	4 ←	5 ←	6 **12**
7 ↑	8 ↖	9 ↑	10 ↖	11 ↗	12 ↑
13 **10**	14 ←	15 ↑	16 **12**	17 ←	18 ↖
19 ↑	20 ↖	21 ↗	22 ↑	23 **6**	24 ←

Somit ergibt sich die folgende Nachfolgerfunktion mit einem Harkaufwand von 50 [ZE].

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	1	3	3	4	6	1	1	3	3	6	6

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	13	13	9	16	16	11	13	13	16	16	23	23

CO_NW plus HZ

An der obigen CO_NW-Lösung wird nun eine Hubzentrierung vorgenommen. Zunächst wird in jedem Cluster ein Feld h mit maximaler Laubmenge $M(h)$ bestimmt und als (ggf. neues) Hub bestimmt. Die (neuen) Hubs sind: 1, 5, 12, 14, 22, 23. Eine Ausrichtung auf diese Hubs innerhalb der Cluster ergibt die folgende Lösung:

1 **12**	2 ←	3 →	4 →	5 **12**	6 ↓
7 ↑	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 →	14 **10**	15 ↗	16 ↓	17 ↙	18 ↑
19 ↗	20 ↑	21 →	22 **12**	23 **6**	24 ←

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	1	4	5	5	12	1	1	4	5	12	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	10	22	22	12	14	14	22	22	23	23

Durch die Hubzentrierung wird die CO_NW-Lösung im Harkaufwand um 7 auf 43 [ZE] verbessert (14%).

CO_max

Schritt 1: Erster Hubknoten 12 $\Rightarrow V = \{1, \ldots, 11, 13 \ldots, 24\}$, kumulierte Laubmenge $M_s^*(12) = 6$.
Schritt 2: Nachbarmenge $N(12) = \{5, 6, 11, 17, 18\}$ als mögliche Kandidaten:

$5 \to 12 \Rightarrow M_s^*(12) = 10 < \overline{M}, K = (5), V = \{1, \ldots, 4, 6, \ldots, 11, 13 \ldots, 24\}$.

$6 \nrightarrow 12$.

$11 \to 12 \Rightarrow M_s^*(12) = 12 = \overline{M}, K = (5, 11), V = \{1, \ldots, 4, 6, \ldots, 10, 13 \ldots, 24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist ($M_s^*(12) = 12 = \overline{M}$), entfallen weitere Schritte.

1 **5**	2 **2**	3 **3**	4 **1**	5 ↘	6 **3**
7 **2**	8 **3**	9 **1**	10 **2**	11 →	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 1 $\Rightarrow V = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 10, 13 \ldots, 24\}$, $M_s^*(1) = 5$, $K = \emptyset$.
Schritt 2: Mögliche neue Kandidaten: $(N(1) \cap V) \setminus K = (2, 7, 8)$:

$2 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 7 < \overline{M}, K = (2), V = \{3, 4, 6, \ldots, 10, 13 \ldots, 24\}$.

$7 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 9 < \overline{M}, K = (2, 7), V = \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 13 \ldots, 24\}$.

$8 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 12 = \overline{M}, K = (2, 7, 8), V = \{3, 4, 6, 9, 10, 13 \ldots, 24\}$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **3**	4 **1**	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\uparrow$	8 $\nwarrow$	9 **1**	10 **2**	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 14 $\Rightarrow V = \{3,4,6,9,10,13,15\ldots,24\}$, $M_s^*(14) = 4$, $K = \emptyset$.[14]

Schritt 2: $(N(14) \cap V) \setminus K = \{9,13,15,19,20,21\}$:

$9 \rightarrow 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 5 < \overline{M}, K = (9), V = \{3,4,6,10,13,15,\ldots,24\}$.

$13 \rightarrow 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 8 < \overline{M}, K = (9,13), V = \{3,4,6,10,15,\ldots,24\}$.

$15 \rightarrow 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 9 < \overline{M}, K = (9,13,15), V = \{3,4,6,10,16,\ldots,24\}$.

$19 \rightarrow 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 11 < \overline{M}, K = (9,13,15,19), V = \{3,4,6,10,16,17,18,20,\ldots,24\}$.

$20 \rightarrow 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 12 = \overline{M}, K = (9,13,15,19,20), V = \{3,4,6,10,16,17,18,21,\ldots,24\}$.

$21 \nrightarrow 14$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **3**	4 **1**	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\uparrow$	8 $\nwarrow$	9 $\swarrow$	10 **2**	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 $\leftarrow$	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 $\nearrow$	20 $\uparrow$	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Neuer Hubknoten 22 $\Rightarrow V = \{3,4,6,10,16,17,18,21,23,24\}$, $M_s^*(22) = 4$, $K = \emptyset$. Schritt 2: $(N(22) \cap V) \setminus K = \{16,17,21,23\}$:

$16 \rightarrow 22 \Rightarrow M_s^*(22) = 7 < \overline{M}, K = (16), V = \{3,4,6,10,17,18,21,23,24\}$.

$17 \rightarrow 22 \Rightarrow M_s^*(22) = 9 < \overline{M}, K = (16,17), V = \{3,4,6,10,18,21,23,24\}$.

$21 \rightarrow 22 \Rightarrow M_s^*(22) = 12 = \overline{M}, K = (16,17,21), V = \{3,4,6,10,18,23,24\}$.

$23 \nrightarrow 22$.

Schritt 3: Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Kandidaten.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **3**	4 **1**	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\uparrow$	8 $\nwarrow$	9 $\swarrow$	10 **2**	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 $\leftarrow$	16 $\downarrow$	17 $\swarrow$	18 **1**
19 $\nearrow$	20 $\uparrow$	21 $\rightarrow$	22 **12**	23 **3**	24 **3**

[14] Wegen $M(14) = M(22) = 4$ fällt anhand des Sekundärkriteriums „Kleinster-Index“ die Wahl auf Knoten 14.

Schritt 1: Neuer Hubknoten 3 $\Rightarrow V = \{4, 6, 10, 18, 23, 24\},\ M_s^*(3) = 3,\ K = \emptyset$.
Schritt 2: $(N(3) \cap V) \setminus K = \{4, 10\}$:

$4 \to 3 \Rightarrow M_s^*(3) = 4 < \overline{M}, K = (4), V = \{6, 10, 18, 23, 24\}$.

$10 \to 3 \Rightarrow M_s^*(3) = 6 < \overline{M}, K = (4, 10), V = \{6, 18, 23, 24\}$.

Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 4 $\Rightarrow K = (10)$.
Schritt 2: $(N(14) \cap V) \setminus K = \emptyset$:
Schritt 3: Neuer aktueller Knoten 10 $\Rightarrow K = \emptyset$.
Schritt 2: $(N(14) \cap V) \setminus K = \emptyset$:
Schritt 3: Wegen $K = \emptyset$ lässt sich das Cluster nicht mehr erweitern.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **6**	4 $\leftarrow$	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\uparrow$	8 $\nwarrow$	9 $\swarrow$	10 $\nwarrow$	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 $\leftarrow$	16 $\downarrow$	17 $\swarrow$	18 **1**
19 $\nearrow$	20 $\uparrow$	21 $\rightarrow$	22 **12**	23 **3**	24 **3**

Die nächsten Schritte werden nicht mehr explizit aufgeführt. Insgesamt ergeben sich 7 Cluster.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **6**	4 $\leftarrow$	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\uparrow$	8 $\nwarrow$	9 $\swarrow$	10 $\nwarrow$	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 $\leftarrow$	16 $\downarrow$	17 $\swarrow$	18 $\swarrow$
19 $\nearrow$	20 $\uparrow$	21 $\rightarrow$	22 **12**	23 **3**	24 $\leftarrow$

Somit ergibt sich die folgende Nachfolgerfunktion mit einem Harkaufwand von 36 [ZE].[15]

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	1	3	3	12	6	1	1	14	3	12	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	14	22	22	23	14	14	22	22	23	23

Eine Hubzentrierung verändert nichts an der Lösung.

Durch das integrierte FIFO-Prinzip erfolgt bei diesen clusterorientierten Heuristiken eine Breitensuche. Die folgenden Heuristiken verfolgen auf unterschiedliche Weise eine Tiefensuche.

[15] Man beachte, dass diese kostengünstige Harkvorschrift u.a. auf die erhöhte Clusteranzahl zurückzuführen ist, was sich in der Regel negativ auf die Transportkosten auswirkt.

HO_TS_max

Schritt 1: Erster Hubknoten 12 $\Rightarrow V = \{1, \ldots, 11, 13, \ldots, 24\}$; kumulierte Laubmenge $M_s^*(12) = 6$;
aktueller Knoten $k = 12$.

Schritt 2: Aus der Nachbarmenge $N(k)$ wird der Knoten mit maximaler Laubmenge bestimmt:
$K(12) = N(12) \cap V = \{5, 6, 11, 17, 18\}$ mit $M(5) = \max\{M(i) \mid i \in K(12)\} = 4$
$\Rightarrow$ Kandidat $= 5$.

Schritt 3: $5 \to 12 \Rightarrow M_s^*(12) = 10 < \overline{M}$; aktueller Knoten $k = 5, V = \{1, \ldots, 4, 6, \ldots, 11, 13, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(5) = N(5) \cap V = \{4, 6, 10, 11\}$.
Erster Kandidat $= 6$ ist nicht zulässig $\Rightarrow K(6) = \{4, 10, 11\}$.
Nächster Kandidat $= 10$ ist zulässig.[16]

Schritt 3: $10 \to 5 \Rightarrow M_s^*(12) = 12 = \overline{M}; k = 10, V = \{1, \ldots, 4, 6, \ldots, 9, 11, 13, \ldots, 24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **5**	2 **2**	3 **3**	4 **1**	5 ↘	6 **3**
7 **2**	8 **3**	9 **1**	10 ↗	11 **2**	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 1 $\Rightarrow V = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 9, 11, 13, \ldots, 24\}$; $M_s^*(1) = 5$; aktueller Knoten $k = 1$.

Schritt 2: $K(1) = N(1) \cap V = \{2, 7, 8\}$ mit $M(8) = \max\{M(i) \mid i \in K(1)\} = 3$
$\Rightarrow$ Zulässiger Kandidat $= 8$.

Schritt 3: $8 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 8$; aktueller Knoten $k = 8, V = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(8) = N(8) \cap V = \{2, 3, 7, 9, 13, 14, 15\}$.
Erster Kandidat $= 14$ nicht zulässig $(M(14) > M(8)) \Rightarrow K(8) = \{2, 3, 7, 9, 13, 15\}$.
Nächster Kandidat $= 3$ ist zulässig.

Schritt 3: $3 \to 8 \Rightarrow M_s^*(1) = 11; k = 3, V = \{2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(3) = N(3) \cap V = \{2, 4, 9\}$.
Kandidat $= 2$ nicht zulässig $\Rightarrow K(3) = \{4, 9\}$.
Kandidat $= 4$ zulässig.

Schritt 3: $4 \to 3 \Rightarrow M_s^*(1) = 12 = \overline{M}; k = 4, V = \{2, 6, 7, 9, 11, 13, \ldots, 24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **12**	2 **2**	3 ↙	4 ←	5 ↘	6 **3**
7 **2**	8 ↖	9 **1**	10 ↗	11 **2**	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

[16] Man beachte das Sekundärkriterium „Kleinster Index“: $10 < 11$.

Schritt 1: Hubknoten 14 $\Rightarrow V = \{2, 6, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots, 24\}$; $M_s^*(14) = 4$; aktueller Knoten $k = 14$.

Schritt 2: $K(14) = N(14) \cap V = \{7, 9, 13, 15, 19, 20, 21\}$ mit $M(13) = \max\{M(i) \mid i \in K(14)\} = 3 \Rightarrow$ Zulässiger Kandidat = 13.

Schritt 3: $13 \to 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 7$; aktueller Knoten $k = 13, V = \{2, 6, 7, 9, 11, 15, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(13) = N(13) \cap V = \{7, 19, 20\}$. Kandidat = 7 ist zulässig.

Schritt 3: $7 \to 13 \Rightarrow M_s^*(14) = 9; k = 7, V = \{2, 6, 9, 11, 15, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(7) = N(7) \cap V = \{2\}$. Einziger Kandidat = 2 ist zulässig.

Schritt 3: $2 \to 7 \Rightarrow M_s^*(14) = 11; k = 2, V = \{6, 9, 11, 15, \ldots, 24\}$.

Schritt 2: $K(2) = N(2) \cap V = \{9\}$. Einziger Kandidat = 9 ist zulässig.

Schritt 3: $9 \to 2 \Rightarrow M_s^*(14) = 12; k = 9, V = \{6, 11, 15, \ldots, 24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **12**	2 $\swarrow$	3 $\swarrow$	4 $\leftarrow$	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\downarrow$	8 $\nwarrow$	9 $\nwarrow$	10 $\nearrow$	11 **2**	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 **1**	16 **3**	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 22 $\Rightarrow V = \{6, 11, 15, \ldots, 21, 23, 24\}$; $M_s^*(22) = 4$; aktueller Knoten $k = 22$.

Schritt 2: $K(22) = N(22) \cap V = \{15, 16, 17, 21, 23\}$ mit $M(16) = \max\{M(i) \mid i \in K(22)\} = 3$ $\Rightarrow$ Zulässiger Kandidat = 16.

Schritt 3: $16 \to 22 \Rightarrow M_s^*(22) = 7$; aktueller Knoten $k = 16, V = \{6, 11, 15, 17, \ldots, 21, 23, 24\}$.

Schritt 2: $K(16) = N(16) \cap V = \{11, 15, 17, 21, 23\}$. Kandidat = 21 ist zulässig.

Schritt 3: $21 \to 16 \Rightarrow M_s^*(22) = 10; k = 21, V = \{6, 11, 15, 17, \ldots, 20, 23, 24\}$.

Schritt 2: $K(21) = N(21) \cap V = \{15, 20\}$. Kandidat = 15 ist zulässig.

Schritt 3: $15 \to 21 \Rightarrow M_s^*(22) = 11; k = 15, V = \{6, 11, 17, \ldots, 20, 23, 24\}$.

Schritt 2: $K(15) = N(15) \cap V = \{20\}$. Einziger Kandidat = 20 ist zulässig.

Schritt 3: $20 \to 15 \Rightarrow M_s^*(22) = 12; k = 20, V = \{6, 11, 17, 18, 19, 23, 24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **12**	2 $\swarrow$	3 $\swarrow$	4 $\leftarrow$	5 $\searrow$	6 **3**
7 $\downarrow$	8 $\nwarrow$	9 $\nwarrow$	10 $\nearrow$	11 **2**	12 **12**
13 $\rightarrow$	14 **12**	15 $\downarrow$	16 $\downarrow$	17 **2**	18 **1**
19 **2**	20 $\nearrow$	21 $\nearrow$	22 **12**	23 **3**	24 **3**

Die weiteren Schritte sind ersichtlich: Hubknoten 6 wird von Knoten 11, dieser von Knoten 17, dieser von Knoten 18 „bedient“ $\Rightarrow M_s^*(6) = 8$. Zudem wird Hubknoten 23 von Knoten 24 bedient $\Rightarrow M_s^*(23) = 6$. Der Hubknoten 10 bleibt isoliert mit $M_s^*(10) = M(10) = 2$.

1 **12**	2 ↙	3 ↙	4 ←	5 ↘	6 **8**
7 ↓	8 ↖	9 ↖	10 ↗	11 ↗	12 **12**
13 →	14 **12**	15 ↓	16 ↓	17 ↑	18 ←
19 **2**	20 ↗	21 ↗	22 **12**	23 **6**	24 ←

Die HO_TS_max-Lösung liefert die folgende Nachfolgerfunktion mit einem Harkaufwand in Höhe von 65 [ZE].

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	7	8	3	12	6	13	1	2	5	6	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	21	22	11	17	19	15	16	22	23	23

HO_TS_max plus HZ

Durch die Hubausrichtung der HO_TS_max-Lösung ergibt sich eine Verbesserung des Harkaufwandes um 15 auf 50 [ZE] ($\equiv$ 23%).

1 **12**	2 ↙	3 ↙	4 ←	5 ↘	6 **8**
7 ↘	8 ↖	9 ↖	10 ↗	11 ↗	12 **12**
13 →	14 **12**	15 ↘	16 ↓	17 ↑	18 ↖
19 **2**	20 ↗	21 →	22 **12**	23 **6**	24 ←

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	7	8	3	12	6	14	1	14	5	6	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	22	22	11	11	19	15	22	22	23	23

Während das integrierte *Backtracking-Prinzip* dieses Verfahrens in diesem Beispiel nicht zur Geltung kommt, wird es umso deutlicher bei der „min-Version“.

HO_TS_min

Schritt 1: Erster Hubknoten 12 $\Rightarrow V = \{1,\ldots,11,13,\ldots,24\}$; kumulierte Laubmenge $M_s^*(12) = 6$; aktueller Knoten $k = 12$.

Schritt 2: $K(12) = N(12) \cap V = \{5,6,11,17,18\}$ mit $M(18) = \min\{M(i) \mid i \in K(12)\} = 1$ $\Rightarrow$ Kandidat $= 18$.

Schritt 3: $18 \to 12 \Rightarrow M_s^*(12) = 7 < \overline{M}$; aktueller Knoten $k = 18, V = \{1,\ldots,11,13,\ldots,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(18) = N(18) \cap V = \{11,17,23,24\}$. Kein Knoten $i \in K(18)$ erfüllt die Bedingung: $M(i) \leq M(18) \Rightarrow$ Backtracking $k = 12; K(12) = \{5,6,11,17\} \Rightarrow$ Kandidat $= 11$.

Schritt 3: $11 \to 12 \Rightarrow M_s^*(12) = 9 < \overline{M}; k = 11, V = \{1,\ldots,10,13,\ldots,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(11) = N(11) \cap V = \{4,5,6,10,16,17\}$. Knoten 4 erfüllt Zulässigkeitsbedingungen.

Schritt 3: $4 \to 11 \Rightarrow M_s^*(12) = 10 < \overline{M}; k = 4, V = \{1,2,3,5,\ldots,10,13,\ldots,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(4) = N(4) \cap V = \{3,5,9,10\}$. Knoten 9 erfüllt Zulässigkeitsbedingungen.

Schritt 3: $9 \to 4 \Rightarrow M_s^*(12) = 11 < \overline{M}; k = 9, V = \{1,2,3,5,\ldots,8,10,13,\ldots,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(9) = N(9) \cap V = \{2,3,8,10,14,15,16\}$. Knoten 15 erfüllt Zulässigkeitsbedingungen.

Schritt 3: $15 \to 9 \Rightarrow M_s^*(12) = 12 = \overline{M}; k = 15, V = \{1,2,3,5,\ldots,8,10,13,14,16,17,19,\ldots,24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **5**	2 **2**	3 **3**	4 $\searrow$	5 **4**	6 **3**
7 **2**	8 **3**	9 $\nearrow$	10 **2**	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 $\uparrow$	16 **3**	17 **2**	18 $\uparrow$
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 1 $\Rightarrow V = \{2,3,5,\ldots,8,10,13,14,16,17,19,\ldots,24\}$; $M_s^*(1) = 5$; $k = 5$.

Schritt 2: $K(1) = N(1) \cap V = \{2,7,8\}$ mit $M(2) = \min\{M(i) \mid i \in K(1)\} = 2 \Rightarrow$ Kandidat $= 2$.

Schritt 3: $2 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 7 < \overline{M}$; $k = 2, V = \{3,5,\ldots,8,10,13,14,16,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(2) = N(2) \cap V = \{3,7,8\}$ mit $M(7) = \min\{M(i) \mid i \in K(2)\} = 2 \Rightarrow$ Kandidat $= 7$.

Schritt 3: $7 \to 2 \Rightarrow M_s^*(1) = 9 < \overline{M}$; $k = 7, V = \{3,5,6,8,10,13,14,16,17,19,\ldots,24\}$.

Schritt 2: $K(7) = N(7) \cap V = \{8,13,14\}$. Kein Knoten $i \in K(7)$ erfüllt die Bedingung: $M(i) \leq M(7)$.
$\Rightarrow$ Backtracking $k = 2$.
$K(2) = N(2) \cap V = \{3,8\}$. Kein Knoten $i \in K(2)$ erfüllt die Bedingung: $M(i) \leq M(2)$.
$\Rightarrow$ Backtracking $k = 1; K(1) = \{8\}$. Knoten 8 erfüllt Zulässigkeitsbedingungen.

Schritt 3: $8 \to 1 \Rightarrow M_s^*(1) = 12 = \overline{M}$; $k = 8, V = \{3,5,6,10,13,14,16,17,19,\ldots,24\}$.

Da die Laubmengenschranke erreicht ist, ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **12**	2 $\leftarrow$	3 **3**	4 $\searrow$	5 **4**	6 **3**
7 $\nearrow$	8 $\nwarrow$	9 $\nearrow$	10 **2**	11 $\rightarrow$	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 $\uparrow$	16 **3**	17 **2**	18 $\uparrow$
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 5 $\Rightarrow V = \{3,6,10,13,14,16,17,19,\dots,24\}$; $M_s^*(5) = 4$; $k = 5$.
Schritt 2: $K(5) = N(5) \cap V = \{6,10\}$ mit $M(10) = \min\{M(i) \mid i \in K(5)\} = 2 \Rightarrow$ Kandidat $= 10$.
Schritt 3: $10 \to 5 \Rightarrow M_s^*(5) = 6 < \overline{M}$; $k = 10, V = \{3,6,13,14,16,17,19,\dots,24\}$.
Schritt 2: $K(10) = N(10) \cap V = \{16,17\}$ mit $M(17) = \min\{M(i) \mid i \in K(10)\} = 2 \Rightarrow$ Kandidat $= 17$.
Schritt 3: $17 \to 10 \Rightarrow M_s^*(5) = 8 < \overline{M}$; $k = 17, V = \{3,6,13,14,16,19,\dots,24\}$.
Schritt 2: $K(17) = N(17) \cap V = \{16,22,23,24\}$. Kein Knoten $i \in K(17)$ erfüllt die Bedingung: $M(i) \leq M(17) \Rightarrow$ Backtracking $k = 10; K(10) = \{16\}$.
Knoten 16 erfüllt nicht die Bedingung: $M(16) \leq M(10) \Rightarrow$ Backtracking $k = 5; K(5) = \{6\}$.
Knoten 6 erfüllt die Zulässigkeitsbedingungen.
Schritt 3: $6 \to 5 \Rightarrow M_s^*(5) = 11 < \overline{M}$; $k = 6, V = \{3,13,14,16,19,\dots,24\}$.
Es ergeben sich keine weiteren Clusterknoten.

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 ↘	5 **11**	6 ←
7 ↗	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 **3**	14 **4**	15 ↑	16 **3**	17 ↖	18 ↑
19 **2**	20 **1**	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 14 $\Rightarrow V = \{3,13,16,19,\dots,24\}$; $M_s^*(14) = 4$; $k = 14$.
Schritt 2: $K(14) = \{13,10,20,21\}$ mit $M(20) = \min\{M(i) \mid i \in K(14)\} = 1 \Rightarrow$ Kandidat $= 20$.
Schritt 3: $20 \to 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 5 < \overline{M}$; $k = 20, V = \{3,13,16,19,21,\dots,24\}$.
Schritt 2: $K(20) = \{13,19,21\}$. Kein Knoten $i \in K(20)$ erfüllt die Bedingung: $M(i) \leq M(20)$.
$\Rightarrow$ Backtracking $k = 14; K(14) = \{13,10,21\} \Rightarrow$ Kandidat $= 19$.
Schritt 3: $19 \to 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 7 < \overline{M}$; $k = 19, V = \{3,13,16,21,\dots,24\}$.
Schritt 2: $K(19) = N(19) \cap V = \{13\}$. Knoten verletzt die Bedingung: $M(13) \leq M(19)$.
$\Rightarrow$ Backtracking $k = 14; K(14) = \{13,21\} \Rightarrow$ Kandidat $= 13$.
Schritt 3: $13 \to 14 \Rightarrow M_s^*(14) = 10 < \overline{M}$; $k = 13, V = \{3,16,21,\dots,24\}$.
Schritt 2: $K(13) = \emptyset \Rightarrow$ Backtracking $k = 14; K(14) = \{21\} \Rightarrow$ Kandidat $= 21$ verletzt $\overline{M}$.
$K(14) = \emptyset$.
Es lässt sich kein weiterer Clusterknoten finden.

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 ↘	5 **11**	6 ←
7 ↗	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 →	14 **10**	15 ↑	16 **3**	17 ↖	18 ↑
19 ↗	20 ↑	21 **3**	22 **4**	23 **3**	24 **3**

Schritt 1: Hubknoten 22 $\Rightarrow V = \{3, 16, 21, 23, 24\}$; $M_s^*(22) = 4$; $k = 22$.
Schritt 2: $K(22) = \{16, 21, 23\}$ mit $M(16) = \min\{M(i) \mid i \in K(22)\} = 3 \Rightarrow$ Kandidat $= 16$.
Schritt 3: $16 \rightarrow 22 \Rightarrow M_s^*(22) = 7 < \overline{M}$; $k = 16, V = \{3, 21, 23, 24\}$.
Schritt 2: $K(16) = \{21, 23\}$ mit $M(21) = \min\{M(i) \mid i \in K(16)\} = 3 \Rightarrow$ Kandidat $= 21$.
Schritt 3: $21 \rightarrow 16 \Rightarrow M_s^*(22) = 10 < \overline{M}$; $k = 21, V = \{3, 23, 24\}$.
Schritt 2: $K(21) = \emptyset$. $\Rightarrow$ Backtracking $k = 16; K(16) = \{23\} \Rightarrow$ Knoten 23 nicht zulässig.
$\Rightarrow$ Backtracking $k = 22; K(22) = \{23\} \Rightarrow$ Knoten 23 nicht zulässig.
Es lässt sich kein weiterer Clusterknoten finden.

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 ↘	5 **11**	6 ←
7 ↗	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 →	14 **10**	15 ↑	16 ↓	17 ↖	18 ↑
19 ↗	20 ↑	21 ↗	22 **10**	23 **3**	24 **3**

Die nächsten Schritte sind trivial: Hubknoten 23 mit $24 \rightarrow 23$; $M_s^*(23) = 6$ und isoliertem Hubknoten 3 mit $M_s^*(3) = 3$.

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 ↘	5 **11**	6 ←
7 ↗	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 →	14 **10**	15 ↑	16 ↓	17 ↖	18 ↑
19 ↗	20 ↑	21 ↗	22 **10**	23 **3**	24 ←

Die HO_TS_min-Lösung liefert folgende Nachfolgerfunktion mit einem Harkaufwand in Höhe von 48 [ZE].

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	1	3	11	5	5	2	1	4	5	12	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	9	22	10	12	14	14	16	22	23	23

HO_TS_min plus HZ

Durch die Hubausrichtung der HO_TS_min-Lösung ergibt sich eine Verbesserung des Harkaufwandes um 5 auf 43 [ZE] ($\equiv$ 10,4%).

1 **12**	2 ←	3 **3**	4 ↘	5 **11**	6 ←
7 ↑	8 ↖	9 ↗	10 ↗	11 →	12 **12**
13 →	14 **10**	15 ↑	16 ↓	17 ↖	18 ↑
19 ↗	20 ↑	21 →	22 **10**	23 **3**	24 ←

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	1	1	3	11	5	5	1	1	4	5	12	12

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	9	22	10	12	14	14	22	22	23	23

Der Vollständigkeit halber sei auch die Zickzack-Lösung mit einem Harkaufwand in Höhe von 104 [ZE] angegeben:

1 →	2 →	3 →	4 **11**	5 →	6 **7**
7 ↓	8 ←	9 **11**	10 ←	11 ←	12 ←
13 →	14 **12**	15 →	16 →	17 →	18 ↓
19 **2**	20 **11**	21 ←	22 ←	23 ←	24 **10**

$a \in V$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(a)$	2	3	4	4	6	6	13	7	9	9	10	11

$a \in V$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$s(a)$	14	14	16	17	18	24	19	20	20	21	22	24

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse für dieses Beispiel zusammengefasst:

Heuristik	Harkaufwand	in %	Clusteranzahl
CO_NW	50	138,8 %	6
plus HZ	43	119,4 %	6
CO_max	36	100,0 %	7
plus HZ	36	100,0 %	7
HO_TS_max	65	180,6 %	7
plus HZ	50	138,8 %	7
HO_TS_min	48	133,3 %	7
plus HZ	43	119,4 %	7
Zickzack	104	288,9 %	7

Man beachte, dass diese Ergebnisse zwar eine isolierte Aussage über die Harkaufwände (an diesem Beispiel) erlauben, nicht aber über die Gesamtaufwände (inkl. unproduktive Wege und Transporte).