TMP

FFT: L'Algoritmo base di Cooley-Tukey

1. Preliminari e Radici dell'Unità

1

Definiamo ω_N come la N-esima radice primitiva dell'unità:

$$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

Le potenze ω_N^j per $j = 0, 1, \dots, N-1$ sono tutte radici distinte2.

Esempio ($N = 4$):

Visualizziamo le radici nel piano complesso (cerchio unitario)3333:

- $j = 0 \to \omega_4^0 = 1$ 4
- $j = 1 \to \omega_4^1 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$ 5
- $j = 2 \to \omega_4^2 = -1$ 6
- $j = 3 \to \omega_4^3 = e^{-\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ 7

Vale inoltre l'importante proprietà di periodicità:

$$\omega_N^{j+N} = \omega_N^j$$

8

2. La Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

9

Data una sequenza di N valori $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ dove $x_j \in \mathbb{C}$, la DFT è data dalla sequenza $Y_0, \dots, Y_{N-1}$ definita come:

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{nk}$$

10

L'obiettivo della FFT:

La FFT permette il calcolo della DFT (e della sua inversa) con un numero di operazioni dell'ordine di $O(N \log_2 N)$, basandosi su una decomposizione ricorsiva dei termini11.

> ***Nota storica:*** *Questo algoritmo è stato "riscoperto" da Cooley e Tukey nel 1965, ma era stato scoperto in realtà da Carl Friedrich Gauss oltre 150 anni prima12.*

---

3. L'Algoritmo (Decomposizione)

Per semplicità, illustriamo l'algoritmo nel caso in cui N sia una potenza di 2. La generalizzazione è possibile ma introduce complessità aggiuntiva13.

Possiamo decomporre la DFT originale separando gli indici pari ($2m$) da quelli dispari ($2m + 1$) per $m=0, \dots, N/2 - 1$14.

La sommatoria diventa:

$$Y_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \omega_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \omega_N^{(2m+1)k}$$

Osserviamo che $\omega_N^{2mk} = e^{-\frac{2\pi i}{N}2mk} = e^{-\frac{2\pi i}{N/2}mk} = \omega_{N/2}^{mk}$.

Possiamo quindi riscrivere l'equazione fattorizzando ω_N^k dal secondo termine15:

$$Y_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \omega_{N/2}^{mk} + \omega_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \omega_{N/2}^{mk}$$

Definizione di E_k e O_k:

Possiamo ora notare che le due sommatorie qui sopra sono esattamente le DFT di sequenze ridotte di dimensione $N/2$16:

- E_k: DFT degli elementi a indice pari (x_{2m}).
- O_k: DFT degli elementi a indice dispari (x_{2m+1}).

Quindi, per $k = 0, \dots, N/2 - 1$17:

$$Y_k = E_k + \omega_N^k O_k$$

---

4. Simmetria e Passo Ricorsivo

Dobbiamo calcolare Y_k per tutto il range $k = 0, \dots, N - 1$. Tuttavia, E_k e O_k sono periodici con periodo $N/2$. Dobbiamo trovare il valore per la seconda metà degli indici, ovvero per $k + N/2$18181818.

Analizziamo il termine "twiddle factor" (il coefficiente rotatorio):

$$\omega_N^{k+N/2} = \omega_N^k \cdot \omega_N^{N/2}$$

Poiché $\omega_N^{N/2} = e^{-\frac{2\pi i}{N}\frac{N}{2}} = e^{-\pi i} = -1$ 19.

Otteniamo le famose "formule a farfalla" (Butterfly formulas) finali20:

1. Per la prima metà ($k = 0, \dots, N/2 - 1$):

$$Y_k = E_k + \omega_N^k O_k$$

2. Per la seconda metà ($k + N/2$):

$$Y_{k+N/2} = E_k - \omega_N^k O_k$$

5. Conclusione

Applicando ricorsivamente questo metodo, riduciamo ogni volta la dimensione del problema a metà, fino a raggiungere insiemi vuoti o di dimensione 1, dove l'algoritmo si ferma21.

- **Complessità:** Si dimostra che il numero di operazioni necessarie è di ordine $O(N \log_2 N)$22.
- **Inversa:** La FFT per la DFT inversa segue esattamente gli stessi passaggi (con il segno dell'esponente opposto)23.