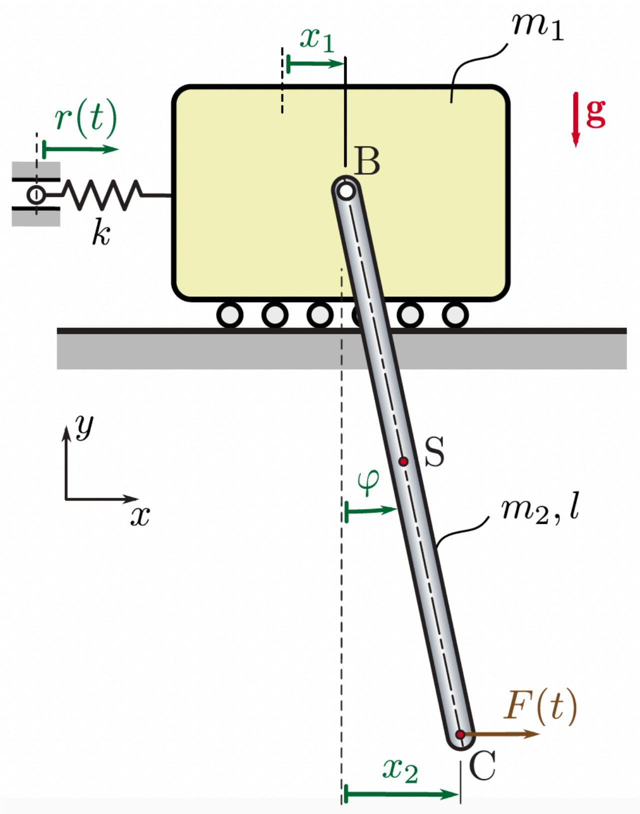
12. Gyakorlat - 2 DoF gerjesztett rendszer

2021.04.25.

Feladat:



A mellékelt ábrán egy 2 szabadságfokú mechanikai lengőrendszer látható, mely egy ingából és egy kocsiból áll. A kocsi egy kizárólag a vízszintes irányban elmozdulni képes merev testként van modellezve, melynek tömegét m_1 jelöli. Az inga, mely a B csukló körül képes csak elfordulni egy rúdként van modellezve: tömege m_2, hossza l. A rendszerre kétféle gerjesztő hatás hat: egy harmonikus erőgerjesztés $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$ az inga C pontjában, valamint egy harmonikus útgerjesztés $r(t) = r_0 \cos(\omega t)$ egy, a kocsihoz kapcsolódó k rugómerevségű rugón keresztül. A rendszer mozgását az x_1 és x_2 általános koordináta választása mellett vizsgáljuk. Itt x_1 a kocsi súlypontjának vízszintes irányú elmozdulása, míg x_2 az inga C pontjának kitérése (az ábra szerint). A rendszer a függőleges síkban helyezkedik el, rá a $\mathbf{g}$ irányú gravitációs erő hat. Egyensúlyi helyzete az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ pozícióban található.

Adatok:

m_1 = 2 kg	l = 0.5 m	ω = 20 rad/s
m_2 = 1 kg	F_0 = 5 N	ε = π/3
k = 100 N/m	r_0 = 0.01 m	

Részfeladatok:

1. Határozza meg a modell mátrix együtthatós mozgásegyenletét az egyensúlyi helyzet körüli kis kitéréseket feltételezve!
2. Adja meg a rendszer állandósult állapotbeli megoldását!
3. Számítsa ki a rúd maximális elfordulását az állandósult állapotbeli megoldás során!

Megoldás:

1. Feladat

Mivel időfüggő kényszereink vannak (út- és erőgerjesztés), ezért közvetlenül nem tudjuk használni a mátrix együtthatós egyenlet meghatározása során használt összefüggéseinket. Itt a másodfajú Lagrange-egyenlethez kell fordulnunk.

In [1]:
```
# Először adjuk meg a kinetikus energiát
import sympy as sp
sp.init_printing()
from IPython.display import Math

t = sp.Symbol('t')
x1 = sp.Function('x_1')(t)
x2 = sp.Function('x_2')(t)
φ = sp.Function('φ')(t) # ő nem lesz ált. koord. (de lehetne)

q = sp.Matrix([[x1],[x2]]) # az ált. koord. vektora

m1, m2, l, k, F0, r0, ω, ε, g = sp.symbols('m_1, m_2, l, k, F_0, r_0, ω, ε,

r = r0*sp.cos(ω*t)
F = F0*sp.sin(ω*t+ε)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben:
adatok = [(m1, 2), (m2, 1), (l, 0.5), (F0, 5), (ω, 20),
          (ε, sp.pi/3), (k, 100), (r0, 0.01), (g, 9.81)]
```

A **kinetikus energia** alakja a következő:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_{\mathrm{B}}^2}_{T_{\mathrm{kocsi}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m_2 v_{\mathrm{S}}^2 + \frac{1}{2}\theta_{\mathrm{S}}\omega_2^2}_{T_{\mathrm{inga}}},$$

ám nekünk ezt az általánosított koordinátákkal kell felírni!

In [2]:
```
# Az egyszerűen megállapítható, hogy `v_B = x1.diff(t)`.
# Szükséges még `v_S és ω_2`:

ω2 = sp.symbols('ω_2')

# kis kitérések esetén:
x2_phi_eq = sp.Eq(x2,l*φ)
x2_phi_eq
```

Out[2]: $\mathrm{x}_2(t) = l\varphi(t)$

In [3]:
```
# Kifejezve φ-t, és deriválva mindkét oldalt:
φ_expr = sp.solve(x2_phi_eq,φ)[0]
ω2_expr = φ_expr.diff(t)
display(sp.Eq(φ,φ_expr))
display(sp.Eq(ω2,ω2_expr))  # most azzal ne foglalkozzunk, hogy `ω_2`-nél
```

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{x}_2(t)}{l}$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{d}{dt}\mathrm{x}_2(t)}{l}$$

Sebességredukciós képet segítségével már számítható $\mathbf{v}_{\mathrm{S}}$ (ismerjük a rúd sebességállapotát):

$$\mathbf{v}_{\mathrm{S}} = \mathbf{v}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{\mathrm{BS}}.$$

In [4]:
```
vB_vect = sp.Matrix([[sp.diff(x1,t)],[0],[0]])
ω2_vect = sp.Matrix([[0],[0],[ω2_expr]])
rBS_vect = sp.Matrix([[l/2*sp.sin(φ_expr)],[-l/2*sp.cos(φ_expr)],[0]])
vS_vect = vB_vect + ω2_vect.cross(rBS_vect)
```

In [5]:
```
# kifejezve az általános koordinátákkal
display(Math('\mathbf{{v}}_\mathrm{{S}} = {}'.format(sp.latex(vS_vect))))
```

$$\mathbf{v}_\mathrm{S} = \left[\begin{matrix}\frac{\cos{\left(\frac{x_{2}{\left(t \right)}}{l} \right)} \frac{d}{d t} x_{2}{\left(t \right)}}{2} + \frac{d}{d t} x_{1}{\left(t \right)}\\\frac{\sin{\left(\frac{x_{2}{\left(t \right)}}{l} \right)} \frac{d}{d t} x_{2}{\left(t \right)}}{2}\\0\end{matrix}\right]$$

In [6]:
```
# a kinetikus energiához még számoljuk ki a rúd tehetetlenségi nyomatékát:
ΘS = sp.Rational(1,12)*m2*l**2

# Tipp: figyeljünk arra, hogy a theták ne tévesszenek meg minket:
# `θ` -> `\theta + tab` (aka. kis theta)
# `Θ` -> `\Theta + tab` (aka. nagy theta)
# Ember legyen a talpán, aki debugolásnál meglátja a különbséget.
```

In [7]:
```
T = (sp.Rational(1,2)*m1*vB_vect.dot(vB_vect)
     + sp.Rational(1,2)*m2*vS_vect.dot(vS_vect)
     + sp.Rational(1,2)*ΘS*ω2_vect.dot(ω2_vect))
```

In [8]:
```
""" Mint feljebb említettem, a mátrix együtthatós egyenletnél használatos
együttható mátrixok kiszámítási formuláit körültekintően kell használni,
ugyanis időfüggő gerjesztések hatnak a rendszerre. A tömegmátrix számításán
azonban most ez megengedett, ugyanis a kinetikus energiában nincs explicit
időfüggő tag (pl. nincs kiegy. forgórész általi gerjesztés)."""

# Elsőnek parciálisan deriváljuk a kinetikus energiát a 2 ált. sebesség sze
# majd helyettesítsünk 0-t a helyükre.
# Szintax: egymásba ágyazott 2 db `list comprehension`. Olyan, mint 2 egyma
# ágyazott `for` ciklus.
M_array = [[T.expand().diff(q1.diff()).diff(q2.diff()).simplify().subs([(q1
M = sp.Matrix(M_array)
display(Math('\mathbf{{M}} = {}'.format(sp.latex(M))))
```

$$\mathbf{M} = \left[\begin{matrix}m_{1} + m_{2} & \frac{m_{2}}{2}\\\frac{m_{2}}{2} & \frac{m_{2}}{3}\end{matrix}\right]$$

In [9]:
```
## Potenciális energia

# Itt a Lagrange-egyenlet formuláit kell használnunk, mert van explicit idő
U = -m2*g*l/2*sp.cos(φ_expr) + sp.Rational(1,2)*k*(x1-r)**2

U_d_q = sp.Matrix([U.diff(alt_koord).expand() for alt_koord in q]) # parc.
display(Math('\\begin{{bmatrix}}\\frac{{\\partial{{U}}}}{{\\partial{{x_1}}}
             .format(sp.latex(U_d_q))))

# A hosszadalmas LaTeX kóddal ne foglalkozzunk most
```

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kr_0 \cos(t\omega) + k\,\mathrm{x}_1(t) \\ \frac{gm_2 \sin\left(\frac{\mathrm{x}_2(t)}{l}\right)}{2} \end{bmatrix}$$

In [10]:
```
""" Ami itt fontos nekünk, az a gerjesztést tartalmazó tag. Ez ugyanis
kiesne akkor, ha a márix együtthatós egyenlet formuláit használnánk.
"""
gerj = U_d_q[0].as_two_terms()
# két részre szedjük az összeget
display(gerj) # így egy listában kapjuk vissza az összeg két tagját
```

$$\left(k\,\mathrm{x}_1(t),\ -kr_0\cos(t\omega)\right)$$

In [11]:
```
# A gerjesztést tartalmazó második tag mínusz egyszerese
# megy az általános Q erők vektorába
Qr = sp.Matrix([[-gerj[1]],[0]])
display(Math('\mathbf{{Q}}^r(t) = {}'.format(sp.latex(Qr))))

# Most, hogy 'elmentettük' a gerjesztő tagot, nyugodtan számolhatunk a kény
# mátrix együthatós formulával (ahol kiesik ez a tag):

K_array = [[U.expand().diff(q1).diff(q2).simplify().subs([(q1,0),(q2,0)]) f
K = sp.Matrix(K_array)

display(Math('\mathbf{{K}} = {}'.format(sp.latex(K))))
```

$$\mathbf{Q}^r(t) = \begin{bmatrix} kr_0\cos(t\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{gm_2}{2l} \end{bmatrix}$$

In [12]:
```
## Az általános erő vektora

""" Q egy részét már kiszámoltuk (Q_r). A másik tagot az erőgerjesztésből s
írjuk fel ehhez a gerjesztő erő teljesítményét:"""

vC_y = sp.Symbol('vC_y') # igazából úgy is kiesik, de kell oda valami

vC_vect = sp.Matrix([[q[0].diff(t) + q[1].diff(t)],[vC_y]]) # `x1.diff(t)`
P_F = sp.Matrix([[F],[0]]).dot(vC_vect)
display(Math('P_\mathrm{{F}} = {}'.format(sp.latex(P_F))))
```

$$P_{\mathrm{F}} = F_0\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{x}_2(t)\right)\sin(t\omega+\varepsilon)$$

In [13]:
```
# Ki kell fejezni a teljesítményt az általános sebességekkel is, és ez alap
# lehet meghatározni az általános erők vektorát. Most egyszerű dolgunk van.
QF = sp.Matrix([P_F.expand().coeff(alt_coord.diff(t)) for alt_coord in q])
QF

Q = QF + sp.Matrix(Qr)
display(Math('\mathbf{{Q}}(t) = {}'.format(sp.latex(Q))))
```

$$\mathbf{Q}(t) = \left[\begin{matrix}F_{0} \sin{\left(t \omega + \varepsilon \right)} + k r_{0} \cos{\left(t \omega \right)}\\F_{0} \sin{\left(t \omega + \varepsilon \right)}\end{matrix}\right]$$

Mivel az állandósult megoldásra vagyunk kíváncsiak, ezért az általános erő vektorát hozzuk az alábbi alakra:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}_\mathrm{S}\sin(\omega t) + \mathbf{F}_\mathrm{C}\cos(\omega t).$$

In [14]:
```
# az `applyfunc` függvénnyel tudunk egy mátrixnak minden elemére
# alkalmazni egy adott függvényt (pl. `sp.simplify`).
Q_expand = Q.applyfunc(sp.expand_trig).expand()
display(Q_expand)

Fs = sp.Matrix([elem.coeff(sp.sin(ω*t)) for elem in Q_expand])
Fc = sp.Matrix([elem.coeff(sp.cos(ω*t)) for elem in Q_expand])
display(Math('\mathbf{{F}}_\mathrm{{S}} = {}'.format(sp.latex(Fs))))
display(Math('\mathbf{{F}}_\mathrm{{C}} = {}'.format(sp.latex(Fc))))
```

$$\left[\begin{matrix}F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)} \cos{\left(t \omega \right)} + F_{0} \sin{\left(t \omega \right)} \cos{\left(\varepsilon \right)} + k r_{0} \cos{\left(t \omega \right)}\\F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)} \cos{\left(t \omega \right)} + F_{0} \sin{\left(t \omega \right)} \cos{\left(\varepsilon \right)}\end{matrix}\right]$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{S} = \left[\begin{matrix}F_{0} \cos{\left(\varepsilon \right)}\\F_{0} \cos{\left(\varepsilon \right)}\end{matrix}\right]$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{C} = \left[\begin{matrix}F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)} + k r_{0}\\F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)}\end{matrix}\right]$$

In [15]:
```
# Végül a mátrix együtthatós mozgásegyenlet
eom = sp.Eq(M*q.diff(t,2) + K*q, Fs*sp.cos(ω*t) + Fc*sp.sin(ω*t))
eom
```

Out[15]:

$$\left[\begin{matrix}k x_{1}{\left(t \right)} + \frac{m_{2} \frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{2}{\left(t \right)}}{2} + \left(m_{1} + m_{2}\right) \frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{1}{\left(t \right)}\\\frac{g m_{2} x_{2}{\left(t \right)}}{2 l} + \frac{m_{2} \frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{1}{\left(t \right)}}{2} + \frac{m_{2} \frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{2}{\left(t \right)}}{3}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}F_{0} \cos{\left(\varepsilon \right)} \cos{\left(t \omega \right)} + \left(F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)} - \right.\\F_{0} \sin{\left(\varepsilon \right)} \sin{\left(t \omega \right)} + F_{0} \cos (\end{matrix}\right.$$

In [16]:
```
# Az olvashatóságot rontja, hogy a `sympy` automatikusan elvégzi az
# összeadásokat és a szorzásokat. Ezt ki tudjuk küszöbölni, ha
# `sp.MatAdd(tag_1, tag_2, ... )` és `sp.MatMul(tenyezo_1, tenyezo_2, ...)
# függvényeket használunk.

sp.Eq(sp.MatAdd(sp.MatMul(M,q.diff(t,2)),sp.MatMul(K,q)),
      sp.MatAdd(sp.MatMul(Fc,sp.cos(ω*t)),sp.MatMul(Fs,sp.sin(ω*t))))
```

Out[16]:

$$\left[\begin{matrix}k & 0\\0 & \frac{g m_{2}}{2 l}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}x_{1}{\left(t \right)}\\x_{2}{\left(t \right)}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}m_{1} + m_{2} & \frac{m_{2}}{2}\\\frac{m_{2}}{2} & \frac{m_{2}}{3}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}\frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{1}{\left(t \right)}\\\frac{d^{2}}{d t^{2}} x_{2}{\left(t \right)}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}F_{0} \cos{\left(\varepsilon \right)}\\F_{0} \cos{\left(\varepsilon \right)}\end{matrix}\right] \sin{\left(t \omega \right)} + \left[\right.$$

2. Feladat

A partikuláris (állandósult) megoldást keressük

$$\mathbf{q}_\mathrm{p} = \mathbf{L}\cos(\omega t) + \mathbf{N}\sin(\omega t)$$

alakban.

In [17]:
```
L1, L2, N1, N2 = sp.symbols('L_1, L_2, N_1, N_2')
L = sp.Matrix([[L1],[L2]])
N = sp.Matrix([[N1],[N2]])

qp = L*sp.cos(ω*t) + N*sp.sin(ω*t)
```

In [18]:
```
# Ennek deriváltjait helyettesítsük be a mozgásegyenletbe
eom.lhs.subs([(x1,qp[0]),(x2,qp[1])])
```

Out[18]:

$$\left[\begin{matrix}k\left(L_1\cos\left(t\omega\right) + N_1\sin\left(t\omega\right)\right) + \frac{m_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(L_2\cos\left(t\omega\right)+N_2\sin\left(t\omega\right)\right)}{2} + \left(m_1+m_2\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(L_1\cos\left(t\right.\right.\\ \frac{gm_2\left(L_2\cos\left(t\omega\right)+N_2\sin\left(t\omega\right)\right)}{2l} + \frac{m_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(L_1\cos\left(t\omega\right)+N_1\sin\left(t\omega\right)\right)}{2} + \frac{m_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(L_2\cos\left(t\omega\right)+N_2\sin\right.}{3}\end{matrix}\right.$$

In [19]:
```
# Végeztessük el az idő szerinti deriváltakat (mint látható, még szimbolik
eom_stat = sp.Matrix([elem.doit().expand() for elem in eom.lhs.subs([(x1,qp
eom_stat
# érdekes módon nem működik a `.applyfunc(sp.doit)` függvény, ezért
# egy `list comprehension`-ben kellet elemenként alkalmazni
```

Out[19]:

$$\left[\begin{matrix}L_1k\cos\left(t\omega\right) - L_1m_1\omega^2\cos\left(t\omega\right) - L_1m_2\omega^2\cos\left(t\omega\right) - \frac{L_2m_2\omega^2\cos\left(t\omega\right)}{2} + N_1k\sin\left(t\omega\right)\\ -\frac{L_1m_2\omega^2\cos\left(t\omega\right)}{2} + \frac{L_2gm_2\cos\left(t\omega\right)}{2l} - \frac{L_2m_2\omega^2\cos\left(t\omega\right)}{3} - \frac{N_1m_2\omega^2\sin\left(t\omega\right.}{2}\end{matrix}\right.$$

In [20]:
```
# Válogassuk ki `cos(ωt)` és `sin(ωt)` együtthatóit
coscoeff = sp.Matrix([elem.coeff(sp.cos(ω*t)) for elem in eom_stat])
sincoeff = sp.Matrix([elem.coeff(sp.sin(ω*t)) for elem in eom_stat])

# Tegyük őket be egy vektorba, majd azt tegyük egyenlővé az általános erő
# kifejezésében lévő `cos(ωt)` és `sin(ωt)` együtthatóival. Helyettesítsük
# be a numerikus adatokat.

tmp = sp.Eq(sp.Matrix([coscoeff,sincoeff]).subs(adatok),sp.Matrix([[Fc],[Fs
tmp
```

Out[20]:

$$\left[\begin{matrix}-1100L_1 - 200L_2\\ -200L_1 - 123.523333333333L_2\\ -1100N_1 - 200N_2\\ -200N_1 - 123.523333333333N_2\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}1.0 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{matrix}\right]$$

In [21]:
```
# Oldjuk meg az egyenletrendszert
megold = sp.solve(tmp,L1,L2,N1,N2)
megold # méterben
```

Out[21]: $\{L_1 : 0.00216562089772979,\ L_2 : -0.0385615500321248,\ N_1 : 0.0019941625786\mathrm{1}$

In [22]:
```
# Tehát a partikuláris megoldásunk:
eom_stat_num = sp.Eq(q,qp.subs(megold).subs(adatok).evalf(4))
eom_stat_num
```

Out[22]:
$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1(t) \\ \mathrm{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001994\sin(20t) + 0.002166\cos(20t) \\ -0.02347\sin(20t) - 0.03856\cos(20t) \end{bmatrix}$$

3. Feladat

In [23]:
```
# Az állandósult állapotbeli megoldás `x_2`-re nézve:
x2_stat = eom_stat_num.rhs[1]
x2_stat
# ennek keressük a maximumát

# Ezt analitikusan sokkal egyszerűbb megoldani, mint deriválással
x2_max = sp.sqrt(megold[L2]**2+megold[N2]**2).evalf(4)
display(Math('x_{{2,\mathrm{{max}}}} = {}\\ \mathrm{{m}}'.format(sp.latex(x

φ_max = φ_expr.subs(adatok).subs(x2,x2_max).evalf(4)
display(Math('\\varphi_{{\mathrm{{max}}}} = {}\\ \mathrm{{rad}}'.format(sp.
```

$$x_{2,\mathrm{max}} = 0.04514\ \mathrm{m}$$

$$\varphi_{\mathrm{max}} = 0.09028\ \mathrm{rad}$$

Készítette:


```
Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Molnár Csenge Andrea (BME MM) kidolgozása alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com

2021.04.25
```