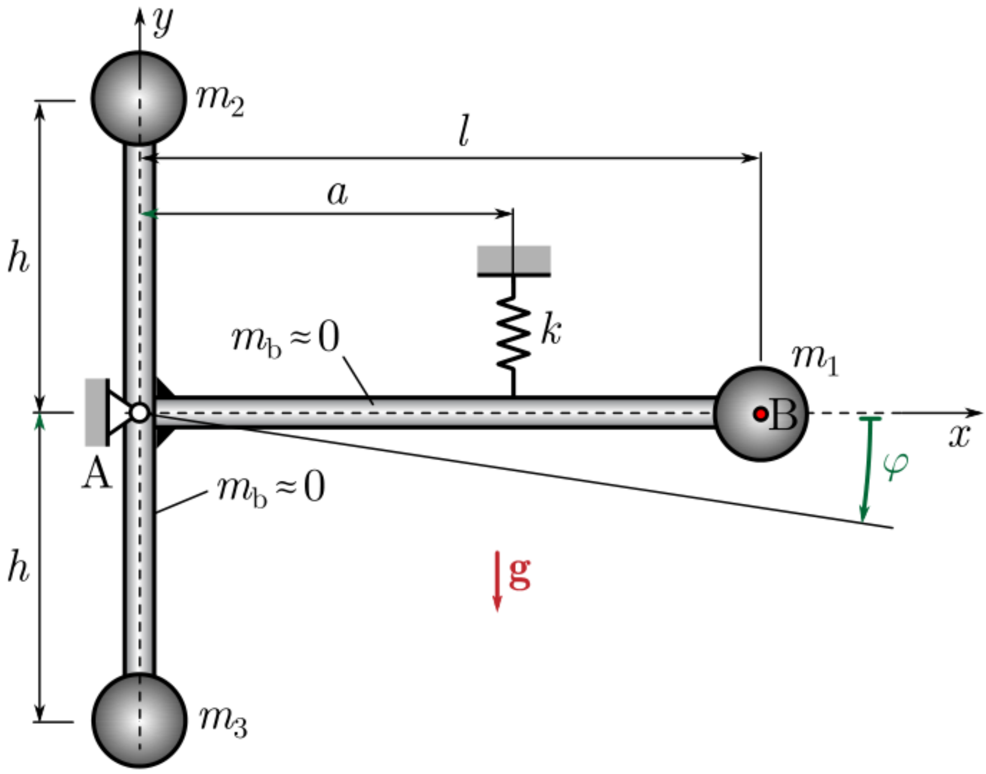
3. Gyakorlat - 1 DoF lengő kar

2021.02.22

In [1]:

```
from IPython.display import Image
Image(filename='1.png',width=500)
```

Out[1]:



Feladat:

A mellékelt ábrán egy lengőkar látható, ami két elhanyagolható tömegű rúdból és a hozzá csatlakozó három tömegpontból (m_1, m_2, m_3) áll. A lengőkar csak az A pont körül tud elfordulni. A mozgást leíró általános koordináta a φ szög, melyet a vízszintes egyenestől mérünk. A lengőkar a Föld gravitációs terében van. A $\varphi = 0$ helyzetben az egyensúlyt a k merevségű rugó biztosítja.

Adatok:

m_1 = 2 kg	l = 1 m
m_2 = 4 kg	h = 0,5 m
m_3 = 3 kg	a = 0,6 m
k = 10^4 N/m	g = 9,81 m/s^2

Részfeladatok:

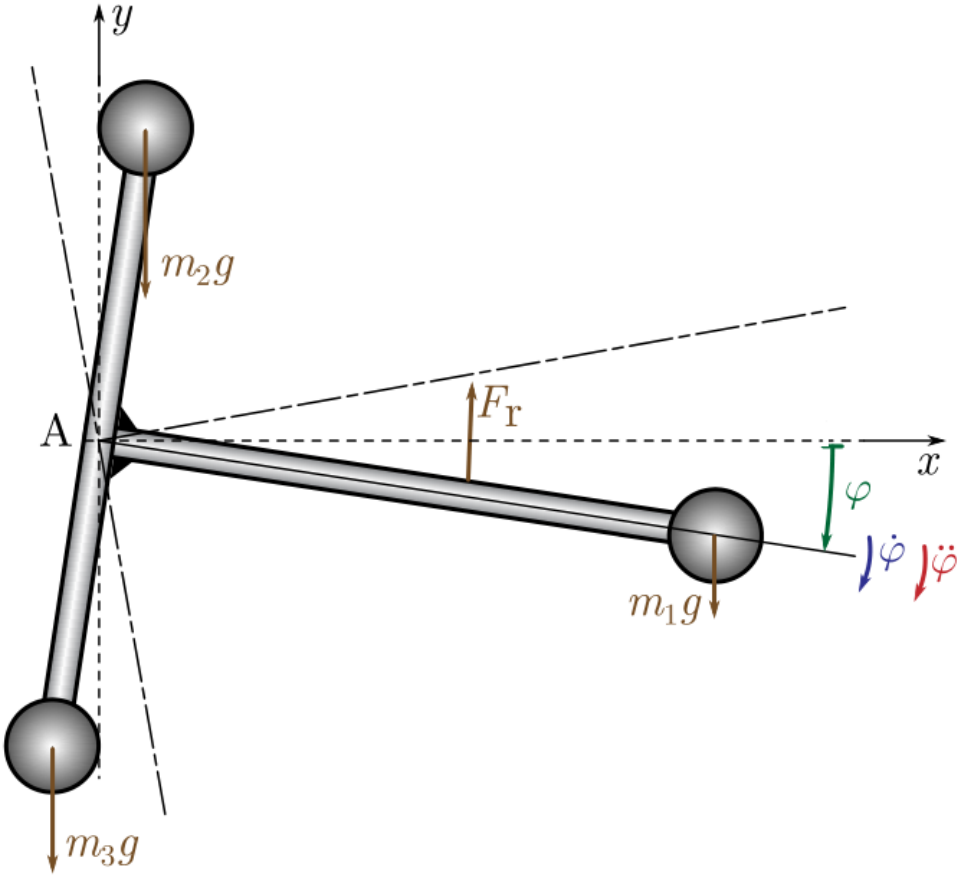
1. Írja fel a mozgásegyenletet az egyensúlyi pont körül végzett kis amplitúdójú rezgést feltételezve.
2. Számítsa ki a sajátkörfrekvenciát, a sajátfrekvenciát és a periódusidőt!
3. Határozza meg a mozgástörvényt, ha a kezdeti feltételek a függőleges pozícióra $y_\mathrm{B}(t=0) = -0,01$ m, és a sebességre $v_{\mathrm{B},y}(t=0) = -1$ m/s a B pontban!
4. Számítsa ki a rugóerő maximális értékét a megadott kezdeti feltételek esetén!

Megoldás

Szabadtest ábra

In [2]:
```
Image(filename='2.png',width=500)
```

Out[2]:



1. Feladat

A szabadtest ábra alapján a mozgásegyenlet könnyen meghatározható a dinamika alaptörvényének segítségével

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Az}} = M_{\mathrm{Az}}. \tag{1}$$

Behelyettesítés után kapjuk:

$$-\Theta_{\mathrm{A}}\ddot{\varphi} = -m_1 gl\cos\varphi - m_2 gh\sin\varphi - m_3 gh\sin\varphi + M_{\mathrm{r}}(\varphi), \tag{2}$$

ahol $M_{\mathrm{r}}(\varphi)$ a rugerőhöz tartozó nyomatékot jelöli. A kis amplitúdók miatt a fenti egyenlet linearizálható az egyensúlyi pont körül $\cos\varphi \approx 1$ és a $\sin\varphi \approx \varphi$ közelítéseket alkalmazva. FONTOS: A nyomatékot leíró kifejezés nem lineáris, viszont kis rezgésamplitúdók esetén az alábbi kifejezéssel jól közelíthető

$$F_{\mathrm{r}}(\varphi) \approx F_{\mathrm{r,st}} + ka\varphi, \tag{3}$$

ahol $F_{\mathrm{r,st}}$ az egynsúlyi helyzetben fellépő statikus rugóerő, a kifejezésben szereplő második tag pedig a rezgések által keltett úgynevezett dinamikus erő $F_{\mathrm{r,dyn}} \approx ka\varphi$. A rugóerőhoz tartozó nyomaték linearizált alakja tehát a következő alakban adható meg:

$$M_{\mathrm{r}}(\varphi) \approx M_{\mathrm{r,st}} + ka^2\varphi, \tag{4}$$

ahol $M_{\mathrm{r,st}} = F_{\mathrm{r,st}}a$ a statikus rugóerő nyomatéka. Könnyen beltható, hogy a statikus rugóerőből származó nyomaték és a gravitációs erő nyomatéka pont kiejtik egymást, így ez a két tag elhagyható a mozgásegyenletből:

$$M_{\mathrm{r,st}} = m_1 gl. \tag{5}$$

In [3]:
```
import sympy as sp
sp.init_printing()
from IPython.display import display
```

In [4]:
```
## A mozgásegyenlet linearizált alakja:

# szimbólumok definiálása
g,l,h, m1, m2, m3, k, a, t = sp.symbols("g,l,h, m1, m2, m3, k, a, t", real=

# Célszerű először a tehetetlenségi nyomatékot is kifejezni megadott adatok

θ_Az = m2*h**2+m3*h**2+m1*l**2

# Az általános koordináta definiálása az idő függvényeként
t = sp.symbols("t",real=True, positive=True)
φ_t = sp.Function('φ')(t)

# A z tengelyre számított perdület derivált az A pontban
dΠ_Az = -θ_Az*φ_t.diff(t,2)

# A z tengelyre számított nyomaték az A pontban
M_Az = -m2*g*h*φ_t+m3*g*h*φ_t+k*a**2*φ_t

# A dinamika alapegyenlete
# (nullára rendezve)

din = dΠ_Az-M_Az
din
```

Out[4]:

$$-a^2k\varphi(t) + ghm_2\varphi(t) - ghm_3\varphi(t) + \left(-h^2m_2 - h^2m_3 - l^2m_1\right)\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)$$

In [5]:
```
# Ahhoz, hogy a mozgásegyenletet a megszokott alakra
# rendezzük, ki kell fejezni a φ(t) együtthatóit.
# Az együtthatókat a coeff() függvény segítségével
# tudjuk kinyerni az adott kifejezésből.

co1=din.coeff(φ_t)
co2=din.coeff(φ_t.diff(t,2))
display(co1,co2)
```

$$-a^2k + ghm_2 - ghm_3$$

$$-h^2m_2 - h^2m_3 - l^2m_1$$

In [6]:
```
# Leosztva az egyenletet a második derivált együtthatójával,
# a megszokott alakora jutunk.

# Itt a sympy apart() függvényét használjuk,
# hogy a kifejezésben különszedjük a φ(t) és annak deriváltjait tartalmazó
# (Ez nem kötelező lépés, csak áttekinthetőbb így.)

mozg_egy=sp.apart(din/co2,φ_t) # sp.apart() -> melyik kifejezésből, melyik
mozg_egy
```

Out[6]:

$$\frac{\left(a^2k - ghm_2 + ghm_3\right)\varphi(t)}{h^2m_2 + h^2m_3 + l^2m_1} + \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)$$

2. Feladat

A mozgásegyenletben $\varphi(t)$ együtthatója egyenlő a sajátkörfrekvencia négyzetével (ω_n^2).

In [7]:
```
# A sajátkörfrekvencia négyzetét érdemes kimenteni egy változóba.
om2=mozg_egy.coeff(φ_t)
om2
```

Out[7]:
$$\frac{a^2k - ghm_2 + ghm_3}{h^2m_2 + h^2m_3 + l^2m_1}$$

In [8]:
```
# gyökvonással adódik a sajátfrekvencia
ω_n=sp.sqrt(om2)
ω_n
```

Out[8]:
$$\sqrt{\frac{a^2k - ghm_2 + ghm_3}{h^2m_2 + h^2m_3 + l^2m_1}}$$

In [9]:
```
# Az adatoknak érdemes létrehozni egy behelyettesítési listát,
# amit a numerikus értékek meghatározásánál használhatunk.
adatok=[(m1,2),(m2,4),(m3,3),(k,10**4),(l,1),(h,0.5),(a,0.6),(g,9.81)]

# sajátkörfrekvencia numerikusan [rad/s]
ω_n_num=ω_n.subs(adatok)
ω_n_num.evalf(5)
```

Out[9]: 30.963

In [10]:
```
# sajátfrekvencia numerikusan [Hz]
f_n_num=ω_n_num/(2*sp.pi).evalf()
f_n_num.evalf(5)
```

Out[10]: 4.9279

In [11]:
```
# lengésidő numerikusan [s]
T_n_num=((2*sp.pi)/ω_n_num).evalf()
T_n_num.evalf(4)
```

Out[11]: 0.2029

3. Feladat

In [12]:
```
# Kezdeti értékek definiálása.

yB_0=-0.01
vBy_0=-1

# A kezdeti értékeket az általános koordinátával,
# illetve annak deriváltjával kell megadni a differenciálegyenlet megoldás
kezdeti_ert = {φ_t.subs(t,0): -yB_0/l.subs(adatok), φ_t.diff(t).subs(t,0):
kezdeti_ert
```

Out[12]: $\left\{ \varphi(0) : 0.01, \ \left. \frac{d}{dt}\varphi(t) \right|_{t=0} : 1 \right\}$

In [13]:
```
# Sympy-ban a kezdetiértékkel megadott differenciálegyenlet
# könnyen megoldható a dsolve() függvény segítségével.
φ_t_megold = sp.dsolve(mozg_egy.expand().subs(adatok),φ_t,ics=kezdeti_ert)
φ_t_megold
```

Out[13]: $\varphi(t) = 0.0322968709613617 \sin(30.9627518156898t) + 0.01 \cos(30.962751815689$

4: Feladat

A rugóerő a statikus és dinamikus rugóerő komponenesek segítségével felírható:

$$F_r(t) = F_{r,st} + ka\varphi(t). \tag{6}$$

In [14]:
```
# A statikus rugóerő a gravitációs erővel egyensúlyt tartó erő:
Fr_st=m1*g*l/a

# stat+din rugóerő
Fr_t=Fr_st+k*a*φ_t

# A maximális rugóerő ott lesz ahol a φ(t) függvénynek is maximam van
φ_max=sp.symbols("φ_max")
Fr_max=Fr_st+k*a*φ_max
Fr_max
```

Out[14]: $ak\varphi_{max} + \frac{glm_1}{a}$

A $\varphi(t)$ függvény maximuma könnyen meghatározható, ha a mozgásegyenlet megoldásást a következő alakra hozzuk:

$$\varphi(t) = \Phi\cos(\omega_n t + \delta). \tag{7}$$

Ekkor a Φ adja meg a rezgés amplitudóját, ami a maximális φ értékkel egyenlő. Kihasználva a trigonometrikus azonosságot:

$$\Phi\cos(\omega_n t + \delta) = \Phi\cos(\omega_n t)\cos(\delta) - \Phi\sin(\omega_n t)\sin(\delta), \tag{8}$$

majd összehasonlítva az együtthatókat a 3. feladatban a megoldásban szereplő együtthatókkal adódik

$$\cos(\omega_n t): \qquad C_1 = \Phi\cos\delta, \tag{9}$$

$$\sin(\omega_n t): \qquad C_2 = \Phi\sin\delta. \tag{10}$$

Innét az amplitúdó, illetve a δ:

$$\Phi = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tag{11}$$

$$\delta = -\arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right). \tag{12}$$

In [15]:
```
# A fentiek kiszámításához vesszük a mozgásegyenlet megoldását:
φ_t_megold
```

Out[15]: $\varphi(t) = 0.0322968709613617\sin(30.9627518156898t) + 0.01\cos(30.962751815689$

In [16]:
```
# majd a jobb oldalára alkalmazzuk a `.as_coefficients_dict()` metódust.
dict_coeff = φ_t_megold.rhs.as_coefficients_dict()
dict_coeff

# Látható, hogy így az együtthatók és a kifejezések egy `dictionary`-ben
# kerültek tárolásra.
```

Out[16]: $\{\sin(30.9627518156898t) : 0.0322968709613617, \ \cos(30.9627518156898t) : 0.01\}$

In [17]:
```
# Szedjük ki a sin() és cos() együtthatóit ebből a `dictionary`-ből. Pontos
# `dictionary` értékeket tartalmazó listájából.
display(dict_coeff.values())

C1=list(dict_coeff.values())[0]
C2=list(dict_coeff.values())[1]
```

```
dict_values([0.0322968709613617, 0.0100000000000000])
```

In [18]:
```
Φ=sp.sqrt(C1**2+C2**2)
δ=sp.atan(C1/C2)
```

In [19]:
```
# A fáziseltolás: [rad]
δ.evalf(5)
```

Out[19]: 1.2705

In [20]:
```
# Az amplitúdó: [m]
Φ.evalf(5)
```

Out[20]: 0.03381

In [21]:
```
# Ebben az esetben a maximális rugóerő: [N]
Fr_max.subs(adatok).subs(φ_max,Φ).evalf(5)
```

Out[21]: 235.56

Készítette:


```
Juhos-Kiss Álmos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Takács Dénes (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com
almosjuhoskiss@gmail.com

2021.02.22
```