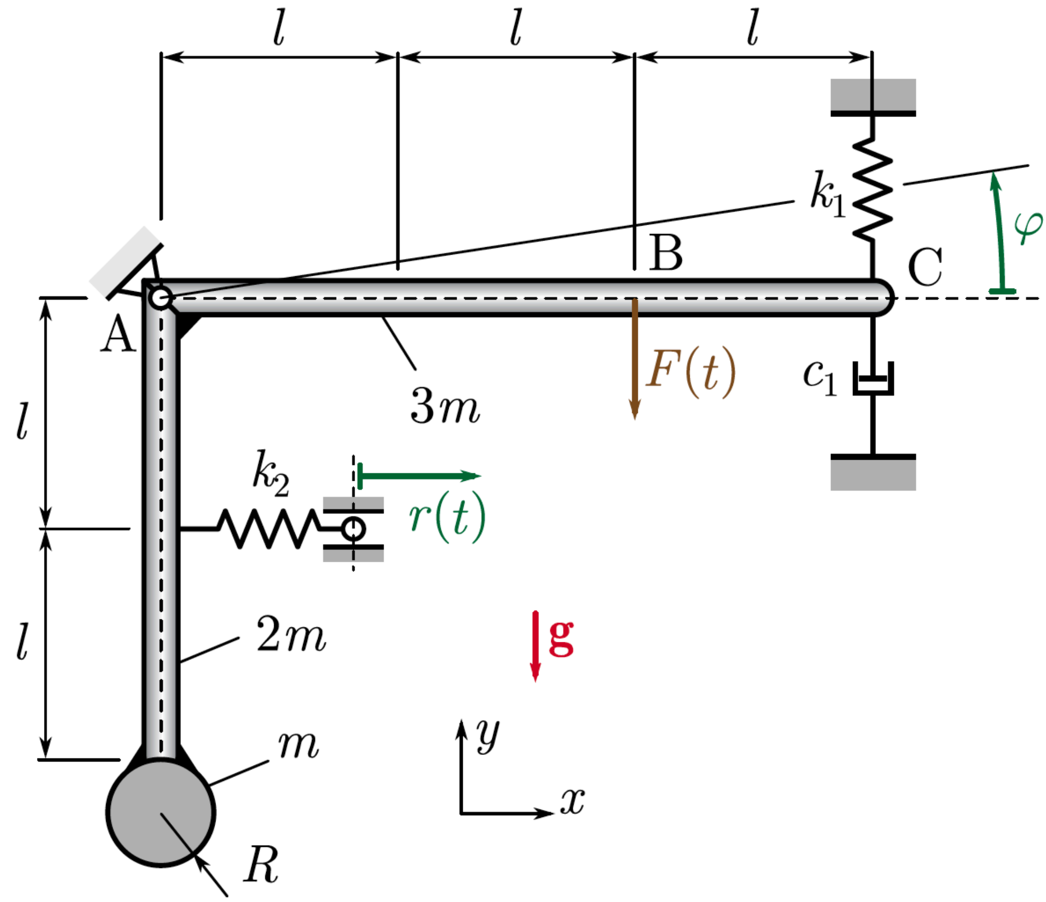
8. Gyakorlat - 1 DoF gerjesztett, csillapított lengőkar

2021.03.29

Feladat:

In [13]:
```
from IPython.display import Image
Image(filename='gyak8_1.png',width=500)
```

Out[13]:



A mellékelt ábrán különböző méretű és tömegű rudakból és egy korongból összehegesztett szerkezet látható, mely csak az A csukló körüli szögelfordulásra képes. A környezet és a vízszintes rúd közötti összeköttetést egy k_1 rugómerevségű rugó, és egy c_1 csillapítási tényezőjű csillapítás biztosítja, továbbá a B pontban egy harmonikus erőgerjesztés hat. A függőleges rúdon a k_2 rugómerevségű rugón kersztül egy harmonikus útgerjesztést alkalmazunk. A szerkezet vízszinteshez képesti elfordulását a φ általánosított koordináta írja le. A gravitációs mezőben elhelyezkedő rendszer egyensúlyi helyzete a $\varphi = 0$ helyen található, ahol csak a k_1 rugómerevségű rugó statikus deformációja nem zérus.

Adatok:

m = 0.12 kg	l = 0.2 m	R = 0.1 m
$r(t)$ = $r_0 \sin(\omega t)$	r_0 = 0.01 m	ω = 20 rad/s
$F(t)$ = $F_0 \sin(\omega t)$	F_0 = 2 N	c_1 = 2 Ns/m
k_1 = 300 N/m	k_2 = 10 N/m	g = 9.81 m/s^2

Részfeladatok:

1. Vezesse le a mozgásegyenletet az egyensúlyi helyzet körül végzett kis kitérések esetén a másodfajú Lagrange-egyenlettel! Számítsa ki a csillapítatlan, valamint a csillapított rendszer sajátkörfrekvenciáját, a relatív csillapítási tényezőt, és a statikus kitérést!
2. Határozza meg a rendszer stacionárius megoldását (mozgástörvényét).

Megoldás:

1. Feladat

Mivel a rendszer 1 szabadságfokú, és általánosított koordinátája φ, ezért a másodfajú Lagrange-egyenlet alakja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q^\star.$$

Itt T a kinetikus energia, $\mathcal{D}$ a Rayleigh-féle disszipatív potenciál, U a potenciálfüggvény, valamint $Q^\star$ az általános erő.

In [2]:

```python
# A következőkben a feladat az lesz, hogy ezen kifejezéseket
# szimbolikusan meghatározzuk, majd a megfelelő deriválásokat
# elvégezve előáll a mozgásegyenlet.

import sympy as sp
from IPython.display import Math # hogy tudjunk LaTeX szöveget kiírni
sp.init_printing()

t, m, l, R, c, k1, k2, ω, r0, F0, g = sp.symbols('t, m, l, R, c, k_1, k_2,
φ = sp.Function('φ')(t)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben:
adatok = [(m, 0.12), (l, 0.2), (R, 0.1), (r0, 0.01), (ω, 20),
          (k1, 300), (k2, 10), (c, 2), (F0, 2), (g, 9.81)]
```

In [3]:

```python
## A kinetikus energia

# Ha nem akarunk csúnya tizedes törteket a szimbolikus
# kifejezésünkbe, használjuk az `sp.Rational`-t.
θ_A = (sp.Rational(1,3) * 3*m * (3*l)**2
       + sp.Rational(1,3) * 2*m * (2*l)**2
       + sp.Rational(1,2) * m * R**2
       + m * (2*l + R)**2)

T = sp.Rational(1,2)*θ_A*φ.diff(t)**2

display(Math('T = {}'.format(sp.latex(T))))
```

$$T = \left(\frac{R^{2} m}{4} + \frac{35 l^{2} m}{6} + \frac{m \left(R + 2 l\right)^{2}}{2}\right) \left(\frac{d}{d t} \varphi{\left(t \right)}\right)^{2}$$

In [4]:

```python
## A disszipatív potenciál

# Mivel a linearizált mozgásegyenletet szeretnénk meghatározni, ezért a cs
# deformációs sebességét közelíthetjük annak lineáris megfelelőjével:

D = sp.Rational(1,2) * c * (3*l * φ.diff(t))**2

display(Math('\mathcal{{D}} = {}'.format(sp.latex(D))))
```

$$\mathcal{D} = \frac{9 c l^{2} \left(\frac{d}{d t} \varphi{\left(t \right)}\right)^{2}}{2}$$

In [5]:

```python
## A potenciális energia

# A potenciális energia a rugókban felhalmozódó potenciális energia
# és a gravitációs erő potenciális energiájából tevődik össze.

Δst_sym = sp.Symbol('Δ_st')
r = r0*sp.sin(ω*t)
U_r1 = sp.Rational(1,2) * k1 * (Δst_sym + 3*l*φ)**2  # a `k1` rugómervevsé
U_r2 = sp.Rational(1,2) * k2 * (r - l*φ)**2      # a `k2` rugómervevségű ru

U_frud = -2*m * g * l*sp.cos(φ)  # függőleges rúd, ezt nem szabad még line
U_vrud = 3*m * g * sp.Rational(3,2)*l*sp.sin(φ)
U_kor = -m * g * (2*l + R)*sp.cos(φ)  # korong
```

In [6]:
```
# `Δst` még ismeretlen. Ez a `k1` rugó statikus deformációja, mely meghatá
# helyzetben felvett szabadtest ábra segítségével, a `A` pontra felírt nyo

egyens_egyenl = k1*Δst_sym * 3*l - 3*m * g * sp.Rational(3,2)*l  # egy old
Δst = sp.solve(egyens_egyenl,Δst_sym)[0]

# Mivel ez a kitérés ellentétes irányú (meg van nyúlva a rugó) az általáno
# `Δst` mínusz egyszeresét kell venni.
Δst = -Δst
display(Math('\Delta_{{st}}  = {}'.format(sp.latex(Δst))))
```

$$\Delta_{st} = -\frac{3gm}{2k_1}$$

In [7]:
```
U = U_r1.subs(Δst_sym,Δst) + U_r2 + U_frud + U_vrud + U_kor
U = U.simplify()
display(Math('U  = {}'.format(sp.latex(U))))
```

$$U = -Rgm\cos(\varphi(t)) + \frac{9glm\sin(\varphi(t))}{2} - 4glm\cos(\varphi(t)) + \frac{k_2(l\varphi(t) - r_0\sin(t\omega)}{2}$$

In [8]:
```
## Az általános erő

F = F0*sp.sin(ω*t)

# Az általános erő a teljesítményből számítható

F_vect = sp.Matrix([[0],[-F]])

# A `B` pont helyvektora
rB_vect = sp.Matrix([[2*l*sp.cos(φ)],[2*l*sp.sin(φ)]])
vB_vect = rB_vect.diff(t)

# Az F erő teljesítménye
P = F_vect.dot(vB_vect) # skaláris szorzás, aka. dot product
display(Math('P  = {}'.format(sp.latex(P))))

# Ebből `Q*` az általánosított sebesség együtthatója
Q = P.coeff(φ.diff(t))
Q = Q.subs(sp.cos(φ),1) # linearizáljunk

display(Math('Q^\star = {}'.format(sp.latex(Q))))
```

$$P = -2F_0 l\sin(t\omega)\cos(\varphi(t))\frac{d}{dt}\varphi(t)$$

$$Q^\star = -2F_0 l\sin(t\omega)$$

In [9]:
```python
## A mozgásegyenlet, egy oldalra rendezve

eom = (T.diff(φ.diff(t))).diff(t) - T.diff(φ) + D.diff(φ.diff(t)) + U.diff(
eom = eom.subs([(sp.sin(φ),φ),(sp.cos(φ),1)]) # linearizálás
eom = eom.expand().collect(φ)  # kis rendezés
eom = (eom/eom.coeff(φ.diff(t,2))).expand() # leosztás a főegyütthatóval és

# Egyelőre nem találtam módját, hogy a sympy szépen kezelje a mozgásegyenle
# amire jutottam (egy oldalra rendezve)
eom.simplify().collect(φ)
```

Out[9]:

$$\frac{12F_0 l \sin(t\omega) + 54cl^2 \frac{d}{dt}\varphi(t) - 6k_2 l r_0 \sin(t\omega) + \left(9R^2m + 24Rlm + 94l^2m\right)\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t}{m\left(9R^2 + 24Rl + 94l^2\right)}$$

In [10]:
```python
# A csillapítási tényező, a körfrekvenciák, és a statikus kitérés számolása

ζ_sym, ωn_sym, f0_sym, ωd_sym = sp.symbols('ζ, ω_n, f_0, ω_d')

φd_coeff = sp.Eq(eom.coeff(φ.diff(t)),2*ζ_sym*ωn_sym)
φ_coeff = sp.Eq(eom.coeff(φ),ωn_sym**2)
sin_coeff = sp.Eq(-eom.coeff(sp.sin(ω*t)),f0_sym*ωn_sym**2) # kell a `-` je
ωd_egyenl = sp.Eq(ωn_sym*sp.sqrt(1-ζ_sym**2),ωd_sym)


# Futásidő szempontjából ez nem optimális, mert így egy nemlineáris 4 isme
# egyenletrendszert kell megoldania a gépnek. Érdemesebb egyesével megolda
# kezdve pl. `ωn` kifejezésével. Így viszont kompaktabb.
megold = sp.solve([φd_coeff,φ_coeff,sin_coeff,ωd_egyenl]
                  ,ωn_sym,ζ_sym,f0_sym,ωd_sym)[1] # megoldjuk az egyenletre
                                                  # és a megoldásokból ves
                                                  # indexet, amik a pozití

# minden megoldásba behelyetesítünk, és kiértékeljük
num_megold = [elem.subs(adatok).evalf(4) for elem in megold]  # list compre
display(num_megold)
```

$$[35.55,\ 0.1169,\ -0.007126,\ 35.31]$$

In [11]:
```python
# Az eredmények kiíratása:
display(Math('\omega_n = {}\ \\text{{rad/s}}'.format(num_megold[0])))
display(Math('\zeta = {}\ [1]'.format(num_megold[1])))
display(Math('\omega_d = {}\ \\text{{rad/s}}'.format(num_megold[3])))
display(Math('f_0 = {}\ \\text{{rad}}'.format(num_megold[2])))
```

$$\omega_n = 35.55 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.1169\ [1]$$

$$\omega_d = 35.31 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = -0.007126 \text{ rad}$$

2. Feladat

A stacionárius megoldást az alábbi formában keressük:

$$\varphi_p(t) = \Phi \sin(\omega t - \vartheta).$$

In [12]:
```
λ = (ω/num_megold[0]).subs(adatok) # frekvencia hányados
N = 1 / sp.sqrt( (1 - λ**2)**2 + 4 * num_megold[1]**2 * λ**2 )

# ezekből

Φ = N*num_megold[2]
ϑ = sp.atan((2*num_megold[1]*λ/(1-λ**2)))

display(Math('\Phi = {}\ \\text{{rad}}'.format(Φ)))
display(Math('ϑ = {}\ \\text{{rad}}'.format(ϑ)))
```

$\Phi = -0.01024\ \text{rad}$

$\vartheta = 0.1901\ \text{rad}$

Készítette:


```
    Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
    Takács Dénes (BME MM) ábrái és Berezvai Szabolcs (BME MM)
kidolgozása alapján.

    Hibák, javaslatok:
    amsz.bme@gmail.com
    csuzdi02@gmail.com

    2021.03.29
```