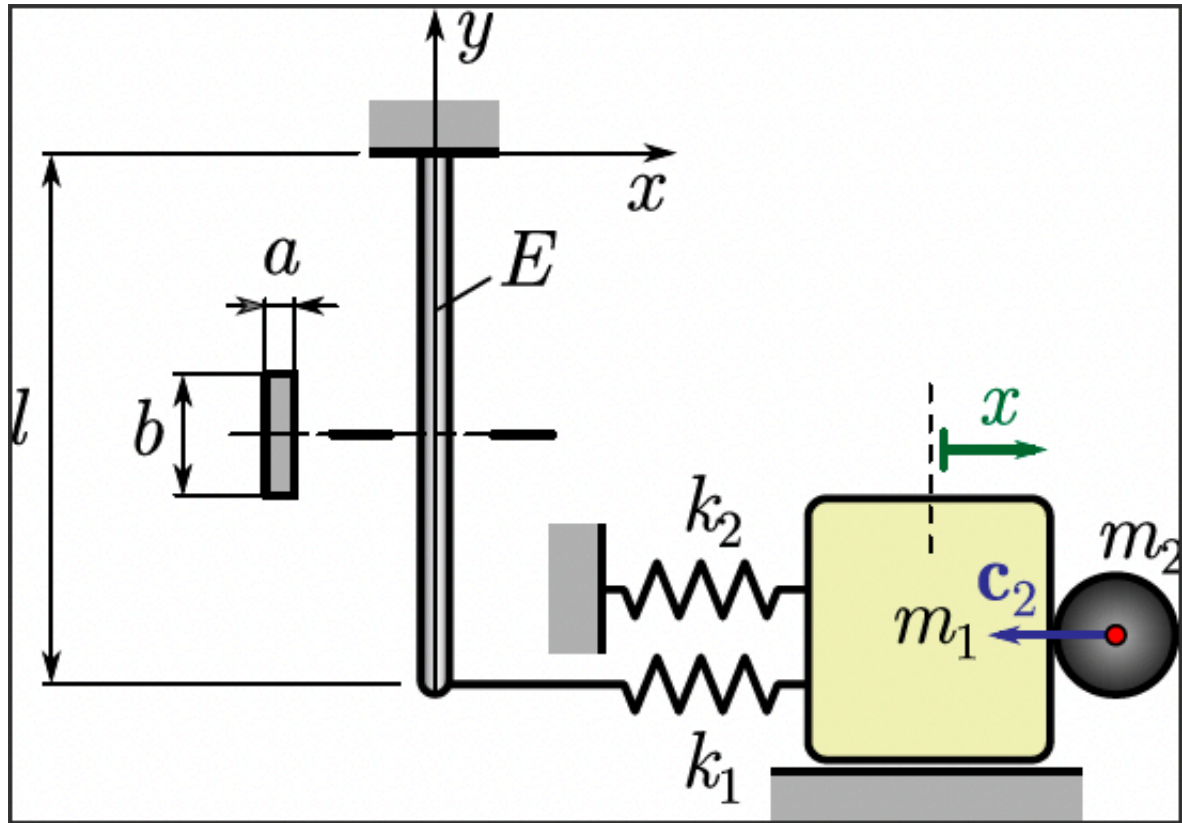


2. Gyakorlat - 1 DoF csillapítatlan rendszer

2021.02.16

Feladat:



A mellékelt ábrán egy 1 szabadságfokú lengőrendszer látható, mely áll egy m_1 tömegből, valamint k_1 és k_2 rugómerevségű rugókból. Az egyik rugó egy vertikális befogott tartóhoz csatlakozik, melynek hossza l , a keresztmetszetét az a és b paraméterrel lehet jellemezni, továbbá anyagának rugalmassági modulusza E . A gerenda tömege elhanyagolható. Az m_1 tömeg helyzete az x általánosított koordinátával írható le. A rendszert egy ütközés hozza mozgásba (rezgésbe), mely az m_1 tömeg és m_2 redukált tömeg között jön létre.

Adatok:

$$a = 0,006 \text{ m} \quad b = 0,025 \text{ m}$$

$$l = 0,5 \text{ m} \quad E = 200 \text{ GPa}$$

$$m_1 = 5 \text{ kg} \quad m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$k_1 = 100 \text{ N/m} \quad k_2 = 50 \text{ N/m}$$

$$c_1 = 0 \text{ m/s} \quad c_2 = 0,6 \text{ m/s}$$

$$e = 0,5$$

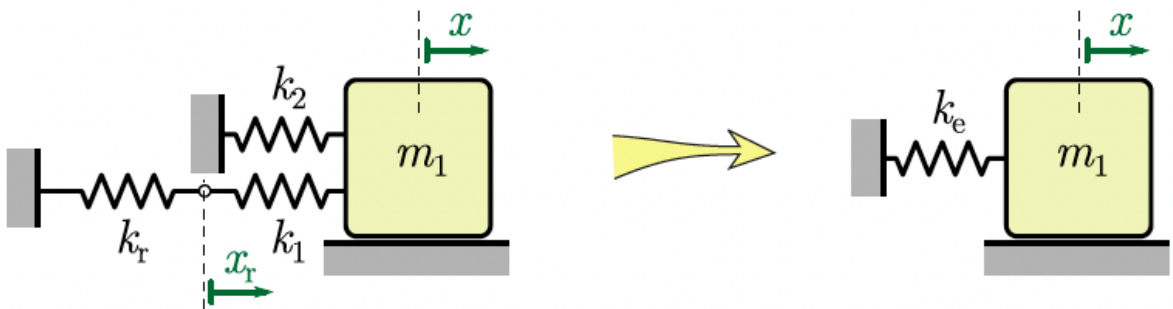
Részfeladatok:

1. Határozza meg a rendszer sajátkörfrekvenciáját!
2. Számítsa ki az m_1 test ütközés hatására létrejövő rezgésének maximális elmozdulását, sebességét, és gyorsulását. Ábrázolja diagramon az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás időfüggvényét.

Megoldás:

1. Feladat

Redukáljuk a rendszert az alábbi alakúra:



A befogott tartó végpontjának adott erőhatásra történő f elmozdulása az alábbi módon számítható:

$$f = \frac{Fl^3}{3I_z E},$$

melyben I_z a tartó keresztmetszetének z tengelyre vett másodrendű nyomatéka. A gerenda merevsége, mely a helyettesítő rugó merevségét adja meg:

$$k_r = \frac{F}{f}.$$

```
In [1]: import sympy as sp
import numpy as np
from IPython.display import Math # Hogy tudjunk LaTeX szöveget kiírni

sp.init_printing() # a szebb kiíratásért

a,b,l,E,m1,m2,k1,k2,c1,c2,e = sp.symbols('a, b, l, E, m1, m2, k1, k2, c1, c2, e')
F = sp.symbols('F')
x,xr = sp.symbols('x, x_r')

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = ((a, 0.006), (b, 0.025), (l, 0.5), (E, 2*10**11),
           (m1, 5), (m2, 1), (k1, 100), (k2, 50), (c1, 0),
           (c2, 0.6), (e, 0.5))

Iz = a**3*b/12 # sziltan
f = F*l**3/3/Iz/E
kr = F/f
kr
```

Out[1]:
$$\frac{Ea^3b}{4l^3}$$

```
In [2]: display(Math('k_r = {}'.format(sp.latex(kr))))

# Ez a sor elsőre lehet kicsit sok. Gyakorlatilag az történik, hogy a
# `display` függvény az argumentumába egy `Math` objektumot kap, amit
# LaTeX stílusban fog kiírni. Amennyiben a beadott stringhez sze-
# retnénk hozzáfűzni egy változót is, úgy annak helyét `{}`-kel kell
# jelezni. Ezt követően a `.format()` metódussal "cseréljük ki" ezt a
# tényleges változóban tárolt kifejezésre, esetleg értékre. Mivel
# most egy kifejezést szeretnénk kiírni, nem egy egyszerű értéket,
# így nem csupán a `kr` kerül a `format()` argumentumába, hanem a kifejezés
# LaTeX kódja. Így a `display` függvény ezt is megfelelő módon formázza:
```

$$k_r = \frac{Ea^3b}{4l^3}$$

```
In [3]: # Nézzünk mi történik, ha a pusztán a `kr` kifejezést íratjuk ki

display(Math('k_r = {}'.format(kr)))
# Eredmény: csúnya, nem LaTeX :(
```

$$k_r = E * a * *3 * b / (4 * l * *3)$$

```
In [4]: # Megoldás: nézzük `kr` LaTeX kódját:
sp.latex(kr)
# Ha ezt a kódot íratjuk ki, a display függvény beformázza.
```

Out[4]:
$$\frac{E a^3 b}{4 l^3}$$

```
In [5]: # Numerikusan az eredmény N/m-ben
kr_num = kr.subs(adatok);

display(Math('k_r = {:.1f}'.format(kr_num)))
# `:.1f` -> floatot íratunk ki, egy tizedes pontossággal
```

$$k_r = 2160.0$$

Az egyenértékű merevség a potenciális energiák egyenlőségéből meghatározható:

$$U = \frac{1}{2}k_r x_r^2 + \frac{1}{2}k_1(x - x_r)^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 \leftrightarrow U = \frac{1}{2}k_e x^2,$$

ahol x_r a befogott tartó szabad végének elmozdulása. A soros elrendezés miatt a k_r és k_1 rugóállandójú rugókban ébredő erő megegyezik:

$$F_r = F_1 \rightarrow k_r x_r = k_1(x - x_r),$$

ahonnan

$$x_r = \frac{k_1}{k_1 + k_r} x.$$

```
In [6]: Fr = kr*xr
        Fl = k1*(x-xr)

        # Megoldjuk az `Fl-Fr = 0` egyenletet `xr`-re. Ebben a formában
        # már `kr`-nek a kifejtett alakja van behelyettesítve
        xr = sp.solve(Fl-Fr,xr)[0]

        display(Math('x_r = {}'.format(sp.latex(xr))))
```

$$x_r = \frac{4k_1 l^3 x}{Ea^3 b + 4k_1 l^3}$$

```
In [7]: U = 0.5*kr * xr**2 + 0.5*k1 * (x-xr)**2 + 0.5*k2 * x**2

        # A potenciális energia kifejezésében az egyenértékű merevség
        # az x^2 együtthatójának duplája.

        U = U.expand()
        # Ez egy nagyon fontos parancs, csak így tudjuk az együtthatókat keresni.
        # Így a kifejezésben minden zárójeles tag kifejtésre kerül

        ke = 2*U.coeff(x,2) # (x,2) -> x^2 együtthatóját keressük

        display(Math('k_e = {}'.format(sp.latex(ke))))
```

$$k_e = \frac{4.0Ea^3bk_1^2l^3}{E^2a^6b^2 + 8Ea^3bk_1l^3 + 16k_1^2l^6} + \frac{16.0k_1^3l^6}{E^2a^6b^2 + 8Ea^3bk_1l^3 + 16k_1^2l^6} - \frac{8.0k_1^2l^3}{Ea^3b + 4k_1l}$$

```
In [8]: # Numerikusan az eredmény, N/m-ben:
        ke_num = ke.subs(adatok).evalf(6)

        display(Math('k_e = {}'.format(ke_num)))
```

$$k_e = 145.575$$

A rugórendszert így már helyettesíthetjük a kiszámolt eredő rugómerevséggel. Ebben az esetben a vizsgált rendszer mozgásegyenlete a következő alakot ölti:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k_e}{m_1}}_{\omega_n^2} x = 0.$$

```
In [9]: ω_n = sp.sqrt(ke/m1)
ω_n_num = ω_n.subs(adatok).evalf(5);

# Numerikusan az eredmény rad/s-ban
display(Math('\omega_n = {}'.format(ω_n_num)))
```

$$\omega_n = 5.3958$$

2. Feladat

A felvázolt differenciálegyenletet kezdeti érték híján nem tudjuk még megoldani. Azt az ütközésből számíthatjuk, mely mindkét test számára centrikus.

A testek sebességeinek normális komponense az ütközés előtt:

```
In [10]: c1_n = 0 # SI
c2_n = -0.6 # SI

# A közös súlypont sebessége

cS_n = (m1*c1_n+m2*c2_n)/(m1+m2)
cS_n = cS_n.subs(adatok)
display(Math('c_{{Sn}} = {:.1f}'.format(cS_n)))

# m/s-ban
```

$$c_{Sn} = -0.1$$

Az ütközés utáni sebességek az alábbi módon számíthatóak:

```
In [11]: v1_n = (cS_n + e*(cS_n - c1_n)).subs(adatok)
v2_n = (cS_n + e*(cS_n - c2_n)).subs(adatok)

display(Math('v_{{1n}} = {:.2f}'.format(v1_n)))
display(Math('v_{{2n}} = {:.2f}'.format(v2_n)))

# m/s-ban
```

$$v_{1n} = -0.15$$

$$v_{2n} = 0.15$$

```
In [12]: t = sp.symbols('t')
x_t = sp.Function('x')(t) # meg kell különbözteteni az eddig használt `x`-től
                        # mert ez egy függvény.

mozg_egy = x_t.diff(t,2) + ω_n_num**2*x_t
display(Math('{ } = 0'.format(sp.latex(mozg_egy))))

# A mozgásegyenlet
```

$$29.115x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

```
In [13]: megold_sym = sp.dsolve(mozg_egy,x_t)
megold_sym
```

Out[13]: $x(t) = C_1 \sin(5.3958364754254t) + C_2 \cos(5.3958364754254t)$

```
In [14]: # A kezdeti értékek felvétele:

kezdeti_ert = {x_t.subs(t,0): 0, x_t.diff(t).subs(t,0): v1_n}
kezdeti_ert
```

Out[14]: $\left\{ x(0) : 0, \left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=0} : -0.15 \right\}$

Részletekért lásd: [AMSZ Python gyorstalpláló](#).

```
In [15]: x_t_megold = sp.dsolve(mozg_egy,x_t,ics=kezdeti_ert)
x_t_megold
```

Out[15]: $x(t) = -0.0277992116112404 \sin(5.3958364754254t)$

```
In [16]: # Nézzük a sebességet és a gyorsulást (deriváltak)
v_t = x_t_megold.rhs.diff(t) # az egyenlet jobb oldalát (rhs) deriváljuk
a_t = x_t_megold.rhs.diff(t,2)

display(Math('\dot{x}(t) = {}'.format(sp.latex(v_t))))
display(Math('\ddot{x}(t) = {}'.format(sp.latex(a_t))))
```

$$\dot{x}(t) = -0.15 \cos(5.3958364754254t)$$

$$\ddot{x}(t) = 0.809375471313811 \sin(5.3958364754254t)$$

```
In [17]: # Keressük az elmozdulás maximumát!

szelsoertek_helyek = sp.solve(v_t,t)

szelsoertek_ertekek = [x_t_megold.rhs.subs(t,szelsoertek_helyek[i])
                        for i
                        in range(len(szelsoertek_helyek))] # list comprehension
                                                         # AMSZ Python gy

display(szelsoertek_helyek)
display(szelsoertek_ertekek)
```

[0.291112663244869, 0.873337989734608]

[-0.0277992116112404, 0.0277992116112404]

```
In [18]: x_max = max(szelsoertek_ertekek)
display(Math('x_{\max} = {:.5f}'.format(x_max)))

# méterben
```

$x_{\max} = 0.02780$

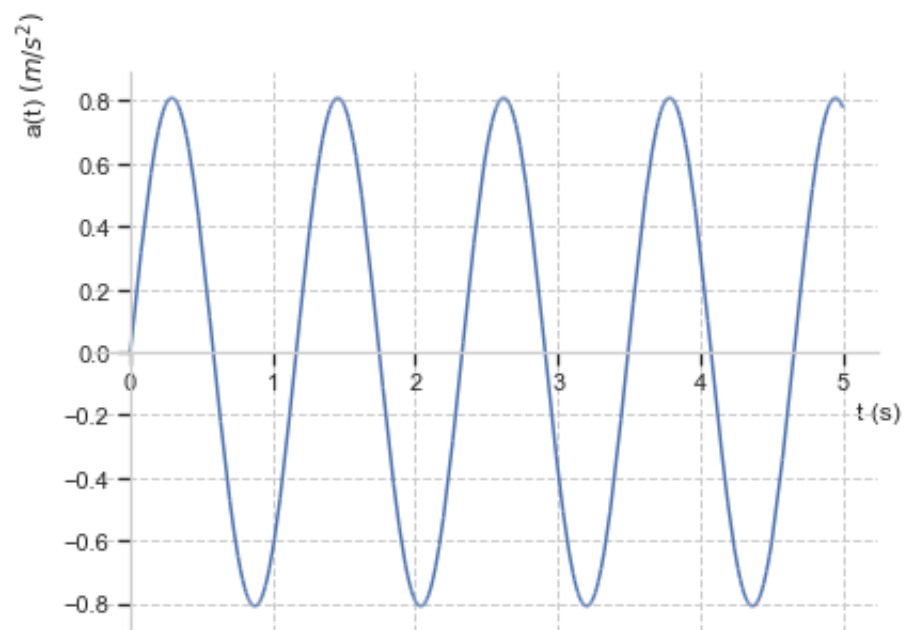
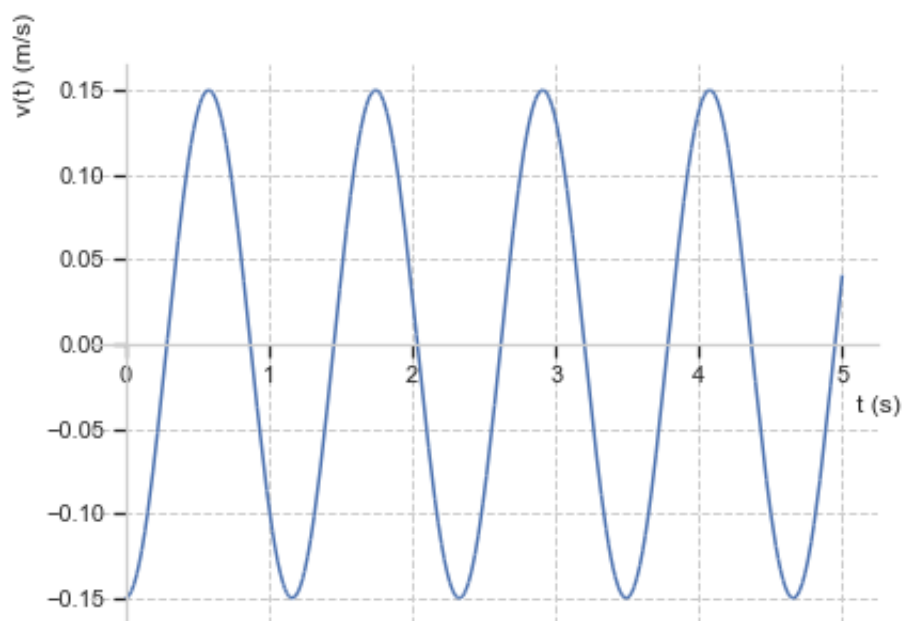
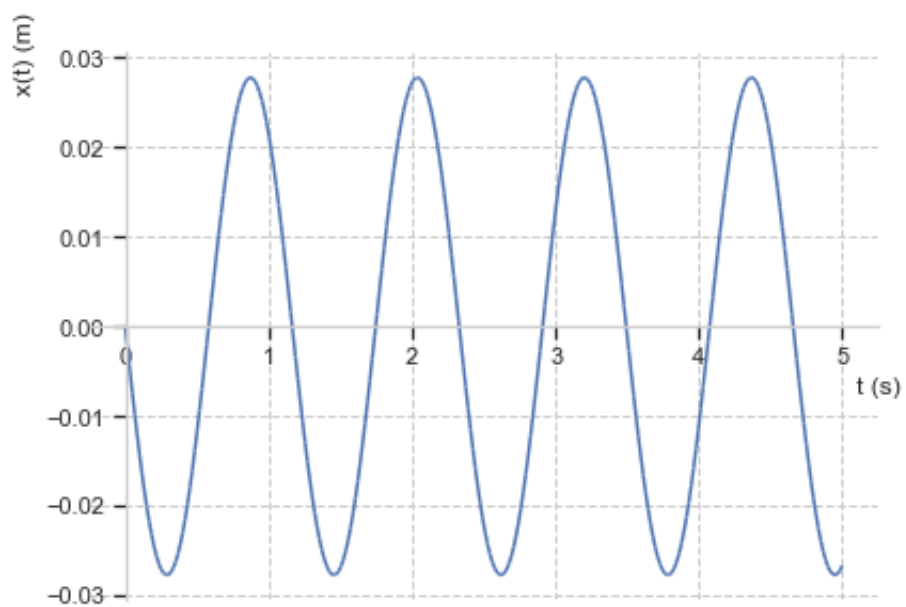
```
In [19]: # Ez egy példa volt, hogyan lehet ezt automatizálni sympyban. A többit inkább
# alapján. Léteznek egyéb numerikus szélsőérték kereső algoritmusok, de
# most így volt a legegyszerűbb.

# Plottoláshoz rengeteg eszköz áll rendelkezésre (matplotlib, seaborn, plotly)
# Most használjuk a sympy sajátját (ami elég hiányos, de egyszerű),
# kiegészítve a `seaborn` könyvtár funkcióival. Jelen esetben ezt arra
# használjuk, hogy legyen rácsvonal.

import seaborn as sns
sns.set()
sns.set_style("whitegrid", {'grid.linestyle': '--'})

plot_x = sp.plot(x_t_megold.rhs,
                 (t,0,5),
                 ylabel='x(t) (m)',
                 xlabel='t (s)',
                 adaptive=False,
                 nb_of_points = 300) # az eredeti plot kicsit szakaszos volt
plot_v = sp.plot(v_t,
                 (t,0,5),
                 xlabel='t (s)',
                 ylabel='v(t) (m/s)')
plot_a = sp.plot(a_t,
                 (t,0,5),
                 xlabel='t (s)',
                 ylabel='a(t) $(m/s^2)$')

# Ez a parancs majd csak az 1.8-as verziójú sympyban fog működni.
# sp.PlotGrid(3, 1 , plot_x, plot_v, plot_a)
```



Készítette:

Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Takács Dénes (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com

2021.02.16