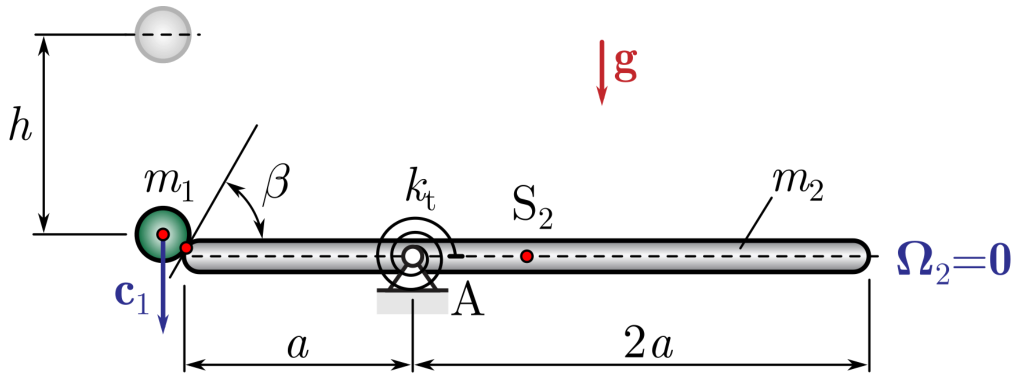
1. Gyakorlat - Ütközések

2021.03.31

Feladat:



A mellékelt ábrán egy 1 szabadságfokú rezgő rendszer látható, ami az m_1 tömegű golyóból és az m_2 tömegű rúdból áll. A rúd az A pontban található csuklópont körül el tud fordulni. A rendszer gravitációs erőtérben van, a nehézségi gyorsulás vektora függőlegesen lefelé mutat. A torziós rugó előfeszítése olyan, hogy a rúd egyensúlyi helyzete a vízszintes pozíció. A nyugalomban lévő rúd rezgését az m_1 tömegű golyóval való ütközés idézi elő. Az ütközés előtt a golyó h magasságból szabadon esik nulla kezdeti sebesség mellett.

Adatok:

m_1 = 6 kg	m_2 = 6 kg
a = 0,3 m	β = 60 °
h = 0,115 m	e = 1

Részfeladatok:

1. Határozza meg a golyó sebességét és a rúd szögsebességét az ütközés utáni pillanatban!

Megoldás:

1. Feladat

In [1]:
```
import sympy as sp
import numpy as np
from IPython.display import Math #szükséges könyvtárak importálása

sp.init_printing() #szép kiiratás

h, m_1, m_2, e, β, a, g = sp.symbols("h, m_1, m_2, e, β, a, g") #használt szimbólumo

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = [(h,0.115), (m_1, 6), (m_2,6), (e,1), (β, sp.pi/3), (a,0.3), (g,9.81)]
```

A leejtett m_1 tömegű test sebességének meghatározása az ütközés pillanata előtt, a munkatétel szerint:

$$T_1 - T_0 = W_{01},$$

ahol T_0 a kezdeti kinetikus energia, T_1 pedig az ütközés pillanatában a kinetikus energia, W_{01} a mechanikai munka, amit a gravitációs erőtér végez. Mivel az m_1 tömegű testet 0 kezdősebességgel ejtettük le: $T_0 = 0$.

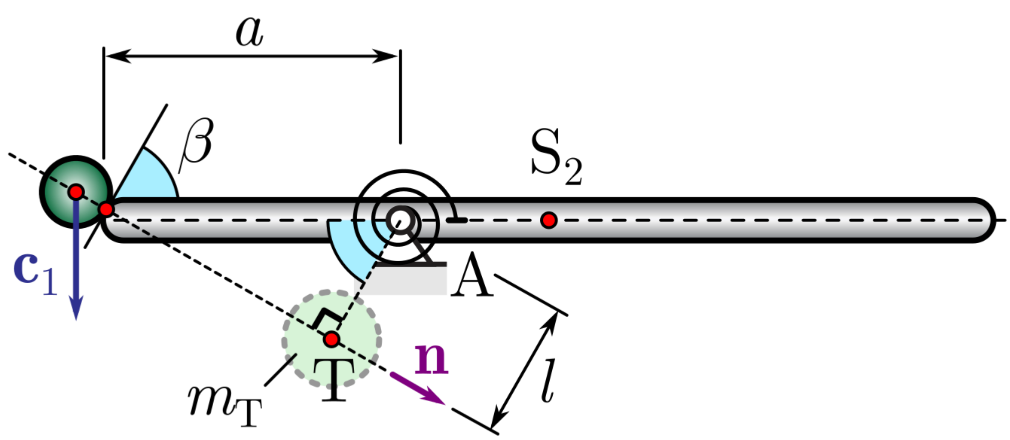
$$\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = m_1 g h \longrightarrow c_1 = \sqrt{2gh}.$$

In [2]:

```
c_1 = sp.sqrt(2*g*h)                                    #1
display(Math('c_1 = {}'.format(sp.latex(c_1))))         #2

c_1_num = c_1.subs(adatok).evalf(2)                     #3 `.subs(adatok)`: behelyettesít
display(Math('c_1 = {}\ \\text{{m/s}}'.format(c_1_num)))  #4

c_1 = sp.symbols("c_1")                                 #5
adatok.append((c_1,c_1_num))                            #6

# Megjegyzés:
# Az első kódsorban található a szimbólikus számítás, a másodikban a szimbólikus meg
# A harmadik kódsorban a numerikus megoldás kiszámítása, a negyedikben a numerikus m
# Az ötödik kódsorban definiálunk egy szimbólumot a kiszámolt értékhez, a hatodik kó
# és annak numerikus értékét hozzáadjuk a behelyettesítési listához, hogy a későbbie

# Ezen túl minden cellában hasonló metódus szerint történik a számítás
```

$c_1 = \sqrt{2}\sqrt{gh}$

$c_1 = 1.5\ \mathrm{m/s}$



Az ütközés m_1 szempontjából centrikus ütközés, m_2 szempontjából álló tengely körül elforduló test ütközése, ezért meg kell keresni az ütközési talppontot, melyet a következőképpen tehetünk meg:

1. Kijelöljük az ütközési normálist.
2. "A" pontból (elforduló tengely) merőlegest állítunk $\mathbf{n}$ ütközési normálisra

Szükség van a talppont és az álló tengely közötti távolságra, amely:

$$l = \overline{AT} = a\cos(\beta).$$

In [3]:

```
l = a*sp.cos(β)
display(Math('l = {}'.format(sp.latex(l))))
```

```
l_num = l.subs(adatok).evalf(2) #m-ben
display(Math('l = {}\ \\text{{m}}'.format(l_num)))

l = sp.symbols("l")
adatok.append((l,l_num))
```

$l = a\cos(\beta)$

$l = 0.15\ \mathrm{m}$

A redukált tömeg kiszámításához szükség van a tehetetlenségi nyomatékra, amely az A pontra számolva:

$$\theta_{\mathrm{A}} = \theta_{\mathrm{S}} + \theta_{\mathrm{AS}} = \frac{1}{12}m_2(3a)^2 + m_2\left(\frac{3}{2}a - a\right).$$

In [4]:
```
θ_A = sp.Rational(1,12)*m_2*(3*a)**2 + m_2*(sp.Rational(3,2)*a - a)**2
display(Math('\\theta_A = {}'.format(sp.latex(θ_A)))) # \theta_A nem elég, kettő \\
                                                       # + egyből egyszerűsíti a fent

θ_A_num = θ_A.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('\\theta_A = {}\ \\text{{kgm$^2$}}'.format(θ_A_num)))

θ_A = sp.symbols("θ_A")
adatok.append((θ_A,θ_A_num))
```

$\theta_A = a^2 m_2$

$\theta_A = 0.54\ \mathrm{kgm}^2$

Így a redukált tömeg számítható:

$$m_{\mathrm{T}} = \frac{\theta_{\mathrm{A}}}{l^2}.$$

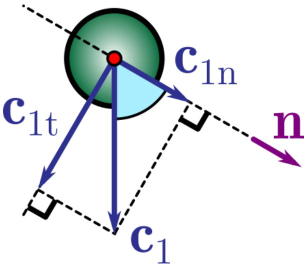
In [5]:
```
m_T = θ_A / (l**2)
display(Math('m_T = {}'.format(sp.latex(m_T))))

m_T_num = m_T.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('m_T = {}\ \\text{{kg}}'.format(m_T_num)))

m_T = sp.symbols("m_T")
adatok.append((m_T,m_T_num))
```

$m_T = \frac{\theta_A}{l^2}$

$m_T = 24\ \mathrm{kg}$

A golyó mozgásállapota az ütközés előtt: $[\boldsymbol{\Omega}_1; \mathbf{c}_1] = [\mathbf{0}; -1,5\mathbf{j}$ [m/s]$]$, ahol $\mathbf{j}$ jelöli az y irányú egységvektort.

A rúd mozgásállapota az ütközés előtt: $[\boldsymbol{\Omega}_2; \mathbf{c}_{\mathrm{Tn}}] = [\mathbf{0}; \mathbf{0}]$, mivel a rúd az ütközés pillanata előtt nyugalomban van.



In [6]:
```
c_Tn = sp.symbols("c_Tn") # a rúd az ütközés előtt nyugalomban van, ezért c_Tn = 0
adatok.append((c_Tn,0))
```

A $\mathbf{c}_1$ sebesség vektor $\mathbf{n}$ ütközési normális irányú, és az arra merőleges tangenciális irányú komponense a következőképpen számolható az ábra alapján:

$$c_{1\mathrm{n}} = c_1 \cos(\beta),$$

$$c_{1\mathrm{t}} = c_1 \sin(\beta).$$

In [7]:
```
c_1n = c_1 * sp.cos(β)
display(Math('c_{{1n}} = {}'.format(sp.latex(c_1n))))

c_1n_num = c_1n.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('c_{{1n}} = {} \ \\text{{m/s}}'.format(c_1n_num)))

c_1n = sp.symbols("c_1n")
adatok.append((c_1n,c_1n_num))
```

$$c_{1n} = c_1 \cos\left(\beta\right)$$

$$c_{1n} = 0.75 \ \mathrm{m/s}$$

In [8]:
```
c_1t = c_1 * sp.sin(β)
display(Math('c_{{1t}} = {}'.format(sp.latex(c_1t))))

c_1t_num = c_1t.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('c_{{1t}} = {}\ \\text{{m/s}}'.format(c_1t_num)))

c_1t = sp.symbols("c_1t")
adatok.append((c_1t,c_1t_num))
```

$$c_{1t} = c_1 \sin\left(\beta\right)$$

$$c_{1t} = 1.3 \ \mathrm{m/s}$$

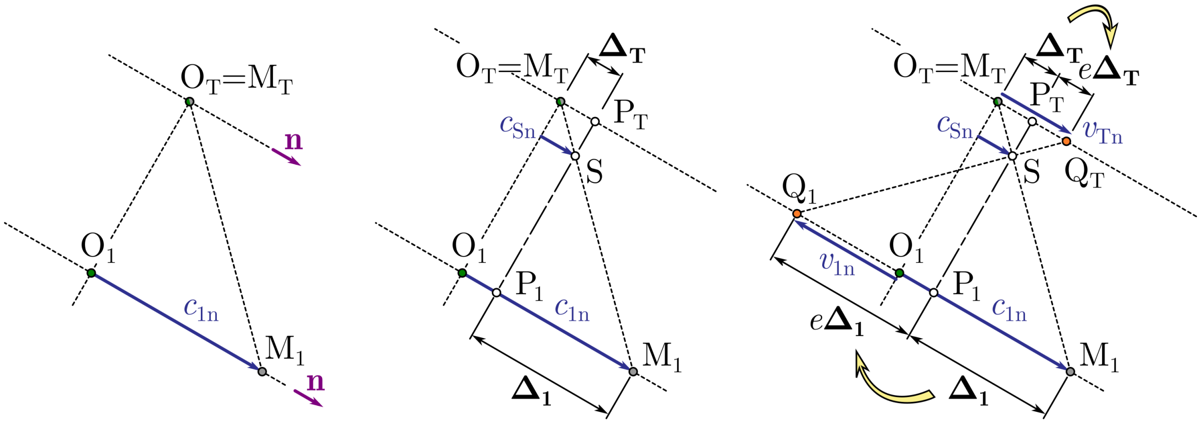
Ezzel a feladat az m_1 és m_T tömegű testek centrikus ütközéseként modellezhető, melyeknek ütközés előtti sebességeinek normális komponensei $c_{1\mathrm{n}}$ és c_{Tn}. Ez a probléma Maxwell diagram alkalmazásával grafikusan is megoldható.

Ehhez először kiszámítjuk a közös súlypont sebességét, ami az ütközés során változatlan marad.

In [9]:
```
c_Sn = (m_1*c_1n + m_T*c_Tn)/(m_1 + m_T)
display(Math('c_{{Sn}} = {}'.format(sp.latex(c_Sn))))

c_Sn_num = c_Sn.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('c_{{Sn}} = {}\ \\text{{m/s}}'.format(sp.latex(c_Sn_num))))

c_Sn = sp.symbols("c_Sn")
adatok.append((c_Sn,c_Sn_num))
```

$$c_{Sn} = \frac{c_{1n}m_1 + c_{Tn}m_T}{m_1 + m_T}$$

$$c_{Sn} = 0.15\ \mathrm{m/s}$$



(a) (b) (c)

A Maxwell diagram megszerkesztésének folyamatát mutatja a fenti ábra. Először (a) az O_1 és O_T pontokban párhuzamos egyeneseket húzunk az ütközési normálissal, valamint berajzoljuk a testek normális irányú, ütközés előtti sebességeit. Mivel a rúd az ütközés előtt nyugalomban volt, így annak ütközés előtti sebessége zérus. Ezt követően összekötjük a sebességvektorok végpontjait, majd megállapítjuk a közös súlypont helyét a golyó tömegének és a rúd redukált tömegének segítségével az $\frac{\overline{\mathrm{SM}_\mathrm{T}}}{\overline{\mathrm{SM}_1}} = \frac{m_1}{m_\mathrm{T}}$ arány felhasználásával. A közös súlypontnak a normális irányú egyenesekre eső merőleges vetületei alapján megállapíthatjuk a Δ_1 és Δ_T 'távolságokat' (b), amik ahhoz a sebességváltozáshoz tartoznak, amikor az ütközésben részt vevő testek elérik a közös súlypont sebességét. Az e ütközési tényező felhasználásával megállapíthatjuk az ütközés utáni ütközési normális irányú sebességeket, mégpedig $e\Delta_1$ és $e\Delta_\mathrm{T}$-t mérve a $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_\mathrm{T}$ egyenes túloldalára (c). A golyó ütközés utáni normális irányú sebességét az $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{Q}_1}$, a rúdét az $\overline{\mathrm{O}_\mathrm{T}\mathrm{Q}_\mathrm{T}}$ adja.

Ezek alapján az ütközés utáni normális irányú sebességkomponensek

$$v_{1\mathrm{n}} = c_{\mathrm{Sn}} - e\Delta_1 = c_{\mathrm{Sn}} - e(c_{1\mathrm{n}} - c_{\mathrm{Sn}}),$$

$$v_{\mathrm{Tn}} = c_{\mathrm{Sn}} - e\Delta_\mathrm{T} = (1+e)c_{\mathrm{Sn}},$$

In [10]:

```
v_1n = c_Sn - e*(c_1n - c_Sn)
display(Math('v_{{1n}} = {}'.format(sp.latex(v_1n))))

v_1n_num = v_1n.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('v_{{1n}} = {}\ \\text{{m/s}}'.format(sp.latex(v_1n_num))))

v_1n = sp.symbols("v_1n")
adatok.append((v_1n,v_1n_num))

v_Tn = (1 + e)*c_Sn
display(Math('v_{{Tn}} = {}'.format(sp.latex(v_Tn))))

v_Tn_num = v_Tn.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('v_{{Tn}} = {}\ \\text{{m/s}}'.format(sp.latex(v_Tn_num))))

v_Tn = sp.symbols("v_Tn")
adatok.append((v_Tn,v_Tn_num))
```

$$v_{1n} = c_{Sn} - e\left(c_{1n} - c_{Sn}\right)$$

$$v_{1n} = -0.45\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{Tn} = c_{Sn}\left(e + 1\right)$$

$$v_{Tn} = 0.3\ \mathrm{m/s}$$

Így, a golyó ütközés utáni normális irányú sebessége

$$v_{1\mathrm{n}} = -0,45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a tangenciális irányú sebessége változatlan, ugyanis az ütközés súrlódásmentes, azaz

$$v_{1\mathrm{t}} = c_{1\mathrm{t}} = 1,3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A rúd az A pont körül végez forgómozgást, ezért T pontjának sebességének segítségével az ütközés utáni szögsebessége számítható:

$$\omega_2 = \frac{v_{\mathrm{Tn}}}{l}.$$

In [11]:
```
ω_2 = v_Tn / l
display(Math('ω_{{2}} = {}'.format(sp.latex(ω_2))))

ω_2_num = ω_2.subs(adatok).evalf(2)
display(Math('ω_{{2}} = {}\ \\text{{rad/s}}'.format(sp.latex(ω_2_num))))
```

$$\omega_2 = \frac{v_{Tn}}{l}$$

$$\omega_2 = 2.0\ \mathrm{rad/s}$$

Így a rúd ütközés utáni szögsebessége

$$\omega_2 = 2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Készítette:


```
        Hertelendy Krisztián és Piri Barnabás (Alkalmazott Mechanika
Szakosztály)
        Takács Dénes (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

        Hibák, javaslatok:
        amsz.bme@gmail.com

        2021.03.31.
```