

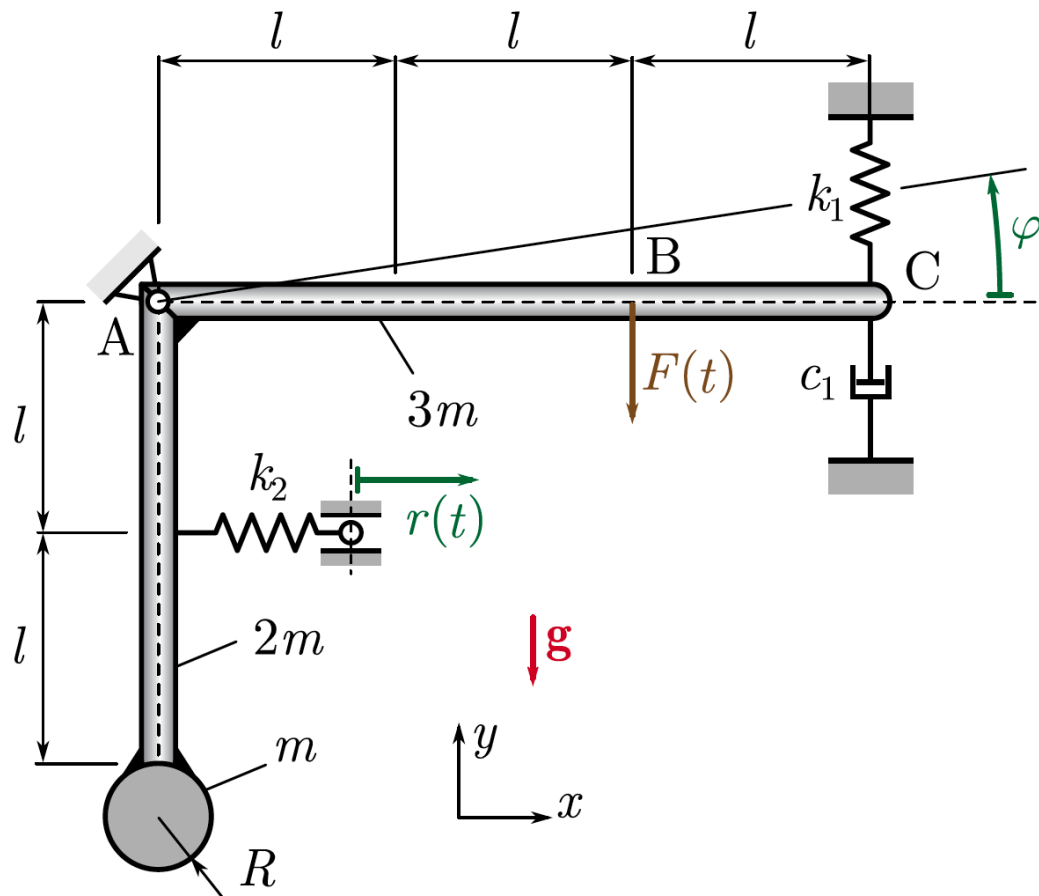
8. Gyakorlat - 1 DoF gerjesztett, csillapított lengőkar

2021.03.29

Feladat:

```
In [1]: from IPython.display import Image  
Image(filename='gyak8_1.png',width=500)
```

Out[1]:



A mellékelt ábrán különböző méretű és tömegű rudakból és egy korongból összehegesztett szerkezet látható, mely csak az A csukló körüli szögelfordulásra képes. A környezet és a vízszintes rúd közötti összeköttetést egy k_1 rugómerevségű rugó, és egy c_1 csillapítási tényezőjű csillapítás biztosítja, továbbá a B pontban egy harmonikus erőgerjesztés hat. A függőleges rúdon a k_2 rugómerevségű rugón keresztül egy harmonikus útgerjesztést alkalmazunk. A szerkezet vízszinteshez képesti elfordulását a φ általánosított koordináta írja le. A gravitációs mezőben elhelyezkedő rendszer egyensúlyi helyzete a $\varphi = 0$ helyen található, ahol csak a k_1 rugómerevségű rugó statikus deformációja nem zérus.

Adatok:

$m = 0.12 \text{ kg}$	$l = 0.2 \text{ m}$	$R = 0.1 \text{ m}$
$r(t) = r_0 \sin(\omega t)$	$r_0 = 0.01 \text{ m}$	$\omega = 20 \text{ rad/s}$
$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$	$F_0 = 2 \text{ N}$	$c_1 = 2 \text{ Ns/m}$
$k_1 = 300 \text{ N/m}$	$k_2 = 10 \text{ N/m}$	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Részfeladatok:

1. Vezesse le a mozgásegyenletet az egyensúlyi helyzet körül végzett kis kitérések esetén a másodfajú Lagrange-egyenlettel! Számítsa ki a csillapítatlan, valamint a csillapított rendszer sajátkörfrekvenciáját, a relatív csillapítási tényezőt, és a statikus kitérést!
2. Határozza meg a rendszer stacionárius megoldását (mozgástörvényét).

Megoldás:

1. Feladat

Mivel a rendszer 1 szabadságfokú, és általánosított koordinátája φ , ezért a másodfajú Lagrange-egyenlet alakja:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q^*.$$

Itt T a kinetikus energia, \mathcal{D} a Rayleigh-féle disszipatív potenciál, U a potenciálfüggvény, valamint Q^* az általános erő.

```
In [2]: # A következőkben a feladat az lesz, hogy ezen kifejezéseket
# szimbolikusan meghatározzuk, majd a megfelelő deriválásokat
# elvégezve előáll a mozgásegyenlet.

import sympy as sp
from IPython.display import Math # hogy tudjunk LaTeX szöveget kiírni
sp.init_printing()

t, m, l, R, c, k1, k2, ω, r0, F0, g = sp.symbols('t, m, l, R, c, k_1, k_2, ω, r0, F0, g')
φ = sp.Function('φ')(t)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben:
adatok = [(m, 0.12), (l, 0.2), (R, 0.1), (r0, 0.01), (ω, 20),
           (k1, 300), (k2, 10), (c, 2), (F0, 2), (g, 9.81)]
```

```
In [3]: ## A kinetikus energia

# Ha nem akarunk csúnya tizedes törteket a szimbolikus
# kifejezésünkbe, használjuk az `sp.Rational`-t.
θ_A = (sp.Rational(1,3) * 3*m * (3*l)**2
        + sp.Rational(1,3) * 2*m * (2*l)**2
        + sp.Rational(1,2) * m * R**2
        + m * (2*l + R)**2)

T = sp.Rational(1,2)*θ_A*φ.diff(t)**2

display(Math('T = {}'.format(sp.latex(T))))
```

$$T = \left(\frac{R^2 m}{4} + \frac{35 l^2 m}{6} + \frac{m(R + 2l)^2}{2} \right) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2$$

```
In [4]: ## A disszipatív potenciál

# Mivel a linearizált mozgásegyenletet szeretnénk meghatározni, ezért a csúszás
# deformációs sebességét közelíthetjük annak lineáris megfelelőjével:

D = sp.Rational(1,2) * c * (3*l * φ.diff(t))**2

display(Math('\mathcal{D} = {}'.format(sp.latex(D))))
```

$$\mathcal{D} = \frac{9cl^2 \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2}{2}$$

```
In [5]: ## A potenciális energia

# A potenciális energia a rugókban felhalmozódó potenciális energia
# és a gravitációs erő potenciális energiájából tevődik össze.

Δst_sym = sp.Symbol('Δ_st')
r = r0*sp.sin(ω*t)
U_r1 = sp.Rational(1,2) * k1 * (Δst_sym + 3*l*φ)**2 # a `k1` rugómervevségű rugó
U_r2 = sp.Rational(1,2) * k2 * (r - l*φ)**2 # a `k2` rugómervevségű rugó

U_frud = -2*m * g * l*sp.cos(φ) # függőleges rúd, ezt nem szabad még lineárisan
U_vrud = 3*m * g * sp.Rational(3,2)*l*sp.sin(φ)
U_kor = -m * g * (2*l + R)*sp.cos(φ) # korong
```

```
In [6]: # `Δst` még ismeretlen. Ez a `k1` rugó statikus deformációja, mely meghatározza a
# helyzetben felvett szabadtest ábra segítségével, a `A` pontra felírt nyomatékos
# egyensúlyi egyenletet.

egyens_egyenl = k1*Δst_sym * 3*l - 3*m * g * sp.Rational(3,2)*l # egy oldali
Δst = sp.solve(egyens_egyenl,Δst_sym)[0]

# Mivel ez a kitérés ellentétes irányú (meg van nyúlva a rugó) az általános
# `Δst` mínusz egyszeresét kell venni.
Δst = -Δst
display(Math('\Delta_{{st}} = {}'.format(sp.latex(Δst))))
```

$$\Delta_{st} = -\frac{3gm}{2k_1}$$

```
In [7]: U = U_r1.subs(Δst_sym,Δst) + U_r2 + U_frud + U_vrud + U_kor
U = U.simplify()
display(Math('U = {}'.format(sp.latex(U))))
```

$$U = -Rgm \cos(\varphi(t)) + \frac{9glm \sin(\varphi(t))}{2} - 4glm \cos(\varphi(t)) + \frac{k_2(l\varphi(t) - r_0 \sin(t\omega))}{2}$$

```
In [8]: ## Az általános erő

F = F0*sp.sin(ω*t)

# Az általános erő a teljesítményből számítható

F_vect = sp.Matrix([[0],[-F]])

# A `B` pont helyvektora
rB_vect = sp.Matrix([[2*l*sp.cos(φ)],[2*l*sp.sin(φ)]])
vB_vect = rB_vect.diff(t)

# Az F erő teljesítménye
P = F_vect.dot(vB_vect) # skaláris szorzás, aka. dot product
display(Math('P = {}'.format(sp.latex(P))))

# Ebből `Q` az általánosított sebesség együtthatója
Q = P.coeff(φ.diff(t))
Q = Q.subs(sp.cos(φ),1) # linearizáljunk

display(Math('Q^{\star} = {}'.format(sp.latex(Q))))
```

$$P = -2F_0 l \sin(t\omega) \cos(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \varphi(t)$$

$$Q^{\star} = -2F_0 l \sin(t\omega)$$

```
In [9]: ## A mozgásegyenlet, egy oldalra rendezve

eom = (T.diff(φ.diff(t)).diff(t) - T.diff(φ) + D.diff(φ.diff(t)) + U.diff(φ))
eom = eom.subs([(sp.sin(φ), φ), (sp.cos(φ), 1)]) # linearizálás
eom = eom.expand().collect(φ) # kis rendezés
eom = (eom/eom.coeff(φ.diff(t,2))).expand() # leosztás a főegyütthatóval és

# Egyelőre nem találtam módját, hogy a sympy szépen kezelje a mozgásegyenletet
# amire jutottam (egy oldalra rendezve)
display(eom.ratsimp().collect(φ))
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + \frac{12F_0l \sin(t\omega) + 54cl^2 \frac{d}{dt}\varphi(t) - 6k_2lr_0 \sin(t\omega) + (6Rgm + 24glm + 54kl^2)}{9R^2m + 24Rlm + 94l^2m}$$

```
In [10]: # A csillapítási tényező, a körfrekvenciák, és a statikus kitérés számolása

ζ_sym, ωn_sym, f0_sym, ωd_sym = sp.symbols('ζ, ω_n, f_0, ω_d')

φd_coeff = sp.Eq(eom.coeff(φ.diff(t)), 2*ζ_sym*ωn_sym)
φ_coeff = sp.Eq(eom.coeff(φ), ωn_sym**2)
sin_coeff = sp.Eq(-eom.coeff(sp.sin(ω*t)), f0_sym*ωn_sym**2) # kell a ``j``
ωd_egyenl = sp.Eq(ωn_sym*sp.sqrt(1-ζ_sym**2), ωd_sym)

# Futásidő szempontjából ez nem optimális, mert így egy nemlineáris 4 ismeretlen
# egyenletrendszerrel kell megoldania a gépnek. Érdemesebb egyesével megoldani
# kezdve pl. ``ωn`` kifejezésével. Így viszont kompaktabb.
megold = sp.solve([φd_coeff, φ_coeff, sin_coeff, ωd_egyenl],
                  [ωn_sym, ζ_sym, f0_sym, ωd_sym])[1] # megoldjuk az egyenletrendszert
# és a megoldásokból vesszük a pozitív értékeket
# indexet, amik a pozitív értékeket adják

# minden megoldásba behelyettesítünk, és kiértékeljük
num_megold = [elem.subs(adatok).evalf(4) for elem in megold] # list comprehension
display(num_megold)
```

[35.55, 0.1169, -0.007126, 35.31]

```
In [11]: # Az eredmények kiírása:
display(Math('\omega_n = {} \backslash \text{{rad/s}}'.format(num_megold[0])))
display(Math('\zeta = {} \backslash [1]'.format(num_megold[1])))
display(Math('\omega_d = {} \backslash \text{{rad/s}}'.format(num_megold[3])))
display(Math('f_0 = {} \backslash \text{{rad}}'.format(num_megold[2])))
```

$$\omega_n = 35.55 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.1169 [1]$$

$$\omega_d = 35.31 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = -0.007126 \text{ rad}$$

2. Feladat

A stacionárius megoldást az alábbi formában keressük:

$$\varphi_p(t) = \Phi \sin(\omega t - \vartheta).$$

```
In [12]: λ = (ω/num_megold[0]).subs(adatok) # frekvencia hányados
N = 1 / sp.sqrt( (1 - λ**2)**2 + 4 * num_megold[1]**2 * λ**2 )

# ezekből

Φ = N*num_megold[2]
θ = sp.atan((2*num_megold[1]*λ/(1-λ**2)))

display(Math('\Phi = {} \ \text{{rad}}'.format(Φ)))
display(Math('\theta = {} \ \text{{rad}}'.format(θ)))
```

$$\Phi = -0.01024 \text{ rad}$$

$$\vartheta = 0.1901 \text{ rad}$$

Készítette:

Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Takács Dénes (BME MM) ábrái és Berezhvai Szabolcs (BME MM)
kidolgozása alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com

2021.03.29