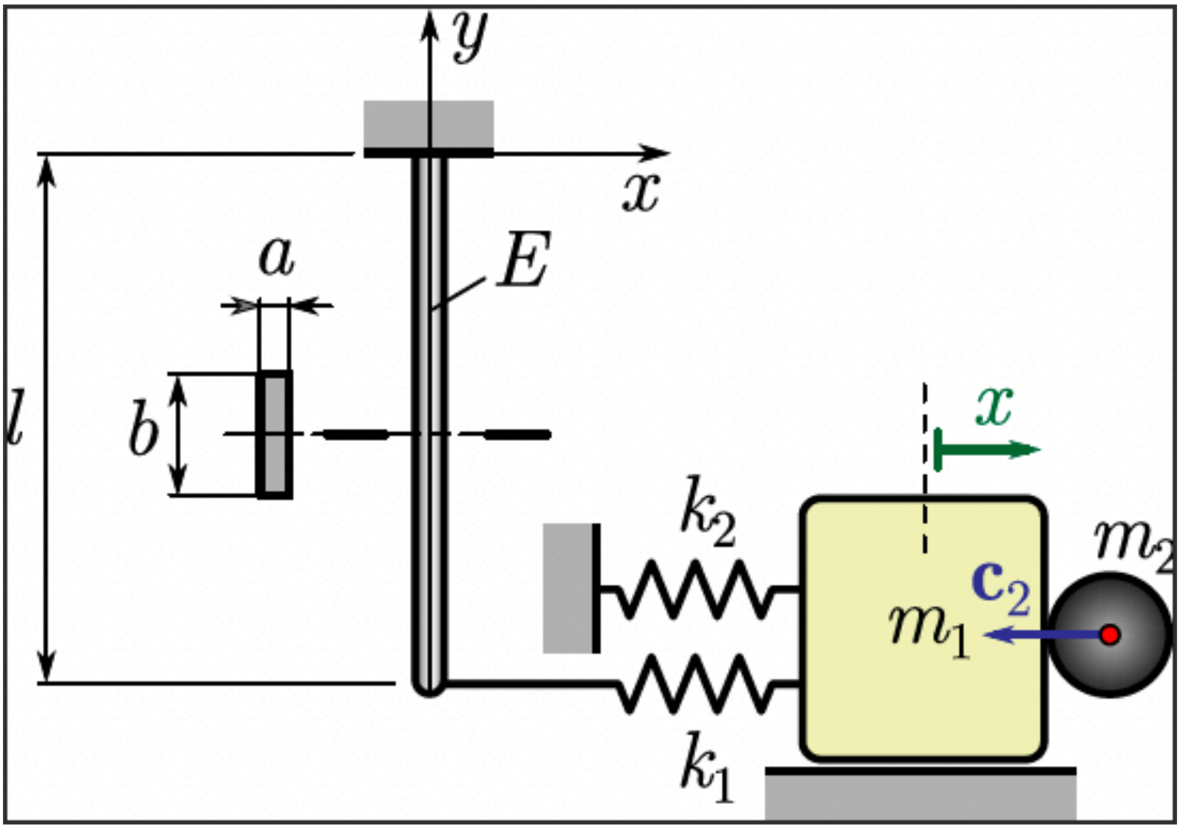
2. Gyakorlat - 1 DoF csillapítatlan rendszer

2021.02.16

Feladat:



A mellékelt ábrán egy 1 szabadságfokú lengőrendszer látható, mely áll egy m_1 tömegből, valamint k_1 és k_2 rugómerevségű rugókból. Az egyik rugó egy vertikális befogott tartóhoz csatlakozik, melynek hossza l, a keresztmetszetét az a és b paraméterrel lehet jellemezni, továbbá anyagának rugalmassági modulusza E. A gerenda tömege elhanyagolható. Az m_1 tömeg helyzete az x általánosított koordinátával írható le. A rendszert egy ütközés hozza mozgásba (rezgésbe), mely az m_1 tömeg és m_2 redukált tömeg között jön létre.

Adatok:

a = 0,006 m	b = 0,025 m
l = 0,5 m	E = 200 GPa
m_1 = 5 kg	m_2 = 1 kg
k_1 = 100 N/m	k_2 = 50 N/m
c_1 = 0 m/s	c_2 = 0,6 m/s
e = 0,5	

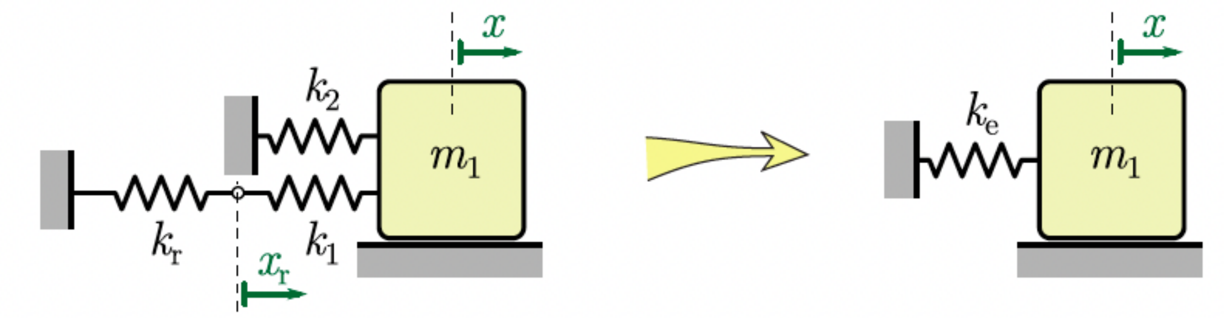
Részfeladatok:

1. Határozza meg a rendszer sajátkörfrekvenciáját!
2. Számítsa ki az m_1 test ütközés hatására létrejövő rezgésének maximális elmozdulását, sebességét, és gyorsulását. Ábrázolja diagramon az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás időfüggvényét.

Megoldás:

1. Feladat

Redukáljuk a rendszert az alábbi alakúra:



A befogott tartó végpontjának adott erőhatásra történő f elmozdulása az alábbi módon számítható:

$$f = \frac{Fl^3}{3I_z E},$$

melyben I_z a tartó keresztmetszetének z tengelyre vett másodrendű nyomatéka. A gerenda merevsége, mely a helyettesítő rugó merevségét adja meg:

$$k_r = \frac{F}{f}.$$

In [1]:
```python
import sympy as sp
import numpy as np
from IPython.display import Math # Hogy tudjunk LaTeX szöveget kiírni

sp.init_printing()  # a szebb kiíratásért

a,b,l,E,m1,m2,k1,k2,c1,c2,e = sp.symbols('a, b, l, E, m1, m2, k1, k2, c1, c
F = sp.symbols('F')
x,xr = sp.symbols('x, x_r')

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = ((a, 0.006), (b, 0.025), (l, 0.5), (E, 2*10**11),
          (m1, 5), (m2, 1), (k1, 100), (k2, 50), (c1, 0),
          (c2, 0.6), (e, 0.5))

Iz = a**3*b/12  # sziltan
f = F*l**3/3/Iz/E
kr = F/f
kr
```

Out[1]:

$$\frac{Ea^3b}{4l^3}$$

In [2]:
```python
display(Math('k_r = {}'.format(sp.latex(kr))))

# Ez a sor elsőre lehet kicsit sok. Gyakorlatilag az történik, hogy a
# `display` függvény az argumentumába egy `Math` objektumot kap, amit
# LaTeX stílusban fog kiíratni. Amennyiben a beadott stringhez sze-
# retnénk hozzáfűzni egy változót is, úgy annak helyét `{}`-kel kell
# jelezni. Ezt követően a `.format()` metódussal "cseréljük ki" ezt a
# tényleges változóban tárolt kifejezésre, esetleg értékre. Mivel
# most egy kifejezést szeretnék kiíratni, nem egy egyszerű értéket,
# így nem csupán a `kr` kerül a `format()` argumentumába, hanem a kifejezés
# LaTeX kódja. Így a `display` függvény ezt is megfelelő módon formázza:
```

$$k_r = \frac{Ea^3b}{4l^3}$$

In [3]:
```python
# Nézzünk mi történik, ha a pusztán a `kr` kifejezést íratjuk ki

display(Math('k_r = {}'.format(kr)))
# Eredmény: csúnya, nem LaTeX :(
```

$$k_r = E*a**3*b/(4*l**3)$$

In [4]:
```python
# Megoldás: nézzük `kr` LaTeX kódját:
sp.latex(kr)
# Ha ezt a kódot íratjuk ki, a display függvény beformázza.
```

Out[4]:
```
'\\frac{E a^{3} b}{4 l^{3}}'
```

In [5]:
```python
# Numerikusan az eredmény N/m-ben
kr_num = kr.subs(adatok);

display(Math('k_r = {:.1f}'.format(kr_num)))
# `:.1f` -> floatot íratunk ki, egy tizedes pontossággal
```

$k_r = 2160.0$

Az egyenértékű merevség a potenciális energiák egyenlőségéből meghatározható:

$$U = \frac{1}{2}k_r x_r^2 + \frac{1}{2}k_1(x-x_r)^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 \leftrightarrow U = \frac{1}{2}k_e x^2,$$

ahol x_r a befogott tartó szabad végének elmozdulása. A soros elrendezés miatt a k_r és k_1 rugóállandójú rugókban ébredő erő megegyezik:

$$F_r = F_1 \rightarrow k_r x_r = k_1(x-x_r),$$

ahonnan

$$x_r = \frac{k_1}{k_1+k_r}x.$$

In [6]:
```
Fr = kr*xr
F1 = k1*(x-xr)

# Megoldjuk az `F1-Fr = 0` egyenletet `xr`-re. Ebben a formában
# már `kr`-nek a kifejtett alakja van behelyettesítve
xr = sp.solve(F1-Fr,xr)[0]

display(Math('x_r = {}'.format(sp.latex(xr))))
```

$$x_r = \frac{4k_1 l^3 x}{Ea^3b + 4k_1 l^3}$$

In [7]:
```
U = 0.5*kr * xr**2 + 0.5*k1 * (x-xr)**2 + 0.5*k2 * x**2

# A potenciális energia kifejezésében az egyenértékű merevség
# az x^2 együtthatójának duplája.

U = U.expand()
# Ez egy nagyon fontos parancs, csak így tudjuk az együtthatókat keresni.
# Így a kifejezésben minden zárójeles tag kifejtésre kerül


ke = 2*U.coeff(x,2)  # (x,2) -> x^2 együtthatóját keressük

display(Math('k_e = {}'.format(sp.latex(ke))))
```

$$k_e = \frac{4.0Ea^3bk_1^2l^3}{E^2a^6b^2 + 8Ea^3bk_1l^3 + 16k_1^2l^6} + \frac{16.0k_1^3l^6}{E^2a^6b^2 + 8Ea^3bk_1l^3 + 16k_1^2l^6} - \frac{8.0k_1^2l^3}{Ea^3b + 4k_1l}$$

In [8]:
```
# Numerikusan az eredmény, N/m-ben:
ke_num = ke.subs(adatok).evalf(6)

display(Math('k_e = {}'.format(ke_num)))
```

$k_e = 145.575$

A rugórendszert így már helyettesíthetjük a kiszámolt eredő rugómerevséggel. Ebben az esetben a vizsgált rendszer mozgásegyenlete a következő alakot ölti:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k_e}{m_1}}_{\omega_n^2} x = 0.$$

In [9]:
```
ω_n = sp.sqrt(ke/m1)
ω_n_num = ω_n.subs(adatok).evalf(5);

# Numerikusan az eredmény rad/s-ban
display(Math('\omega_n = {}'.format(ω_n_num)))
```

$\omega_n = 5.3958$

2. Feladat

A felvázolt differenciálegyenletet kezedeti érték híján nem tudjuk még megoldani. Azt az ütközésből számíthatjuk, mely mindkét test számára centrikus.

A testek sebességeinek normális komponense az ütközés előtt:

In [10]:
```
c1_n = 0   # SI
c2_n = -0.6   # SI

# A közös súlypont sebessége

cS_n = (m1*c1_n+m2*c2_n)/(m1+m2)
cS_n = cS_n.subs(adatok)
display(Math('c_{{Sn}} = {:.1f}'.format(cS_n)))

# m/s-ban
```

$c_{Sn} = -0.1$

Az ütközés utáni sebességek az alábbi módon számíthatóak:

In [11]:
```
v1_n = (cS_n + e*(cS_n - c1_n)).subs(adatok)
v2_n = (cS_n + e*(cS_n - c2_n)).subs(adatok)

display(Math('v_{{1n}} = {:.2f}'.format(v1_n)))
display(Math('v_{{2n}} = {:.2f}'.format(v2_n)))

# m/s-ban
```

$v_{1n} = -0.15$

$v_{2n} = 0.15$

In [12]:
```
t = sp.symbols('t')
x_t = sp.Function('x')(t) # meg kell különbözteteni az eddig használt `x`-t
                           # mert ez egy függvény.

mozg_egy = x_t.diff(t,2) + ω_n_num**2*x_t
display(Math('{} = 0'.format(sp.latex(mozg_egy))))

# A mozgásegyenlet
```

$$29.115x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

In [13]:
```
megold_sym = sp.dsolve(mozg_egy,x_t)
megold_sym
```

Out[13]: $x(t) = C_1 \sin\left(5.3958364754254t\right) + C_2 \cos\left(5.3958364754254t\right)$

In [14]:
```
# A kezdeti értékek felvétele:

kezdeti_ert = {x_t.subs(t,0): 0, x_t.diff(t).subs(t,0): v1_n}
kezdeti_ert
```

Out[14]: $\left\{x(0) : 0, \ \left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} : -0.15\right\}$

Részletekért lásd: AMSZ Python gyorstalplaló.

In [15]:
```
x_t_megold = sp.dsolve(mozg_egy,x_t,ics=kezdeti_ert)
x_t_megold
```

Out[15]: $x(t) = -0.0277992116112404 \sin\left(5.3958364754254t\right)$

In [16]:
```
# Nézzük a sebességet és a gyorsulást (deriváltak)
v_t = x_t_megold.rhs.diff(t) # az egyenlet jobb oldalát (rhs) deriváljuk
a_t = x_t_megold.rhs.diff(t,2)

display(Math('\dot x(t) = {}'.format(sp.latex(v_t))))
display(Math('\ddot x(t) = {}'.format(sp.latex(a_t))))
```

$$\dot x(t) = -0.15 \cos\left(5.3958364754254t\right)$$

$$\ddot x(t) = 0.809375471313811 \sin\left(5.3958364754254t\right)$$

In [17]:
```
# Keressük az elmozdulás maximumát!

szelsoertek_helyek = sp.solve(v_t,t)

szelsoertek_ertekek = [x_t_megold.rhs.subs(t,szelsoertek_helyek[i])
                       for i
                       in range(len(szelsoertek_helyek))]  # list comprehen
                                                            # AMSZ Python gy

display(szelsoertek_helyek)
display(szelsoertek_ertekek)
```

$[0.291112663244869,\ 0.873337989734608]$

$[-0.0277992116112404,\ 0.0277992116112404]$

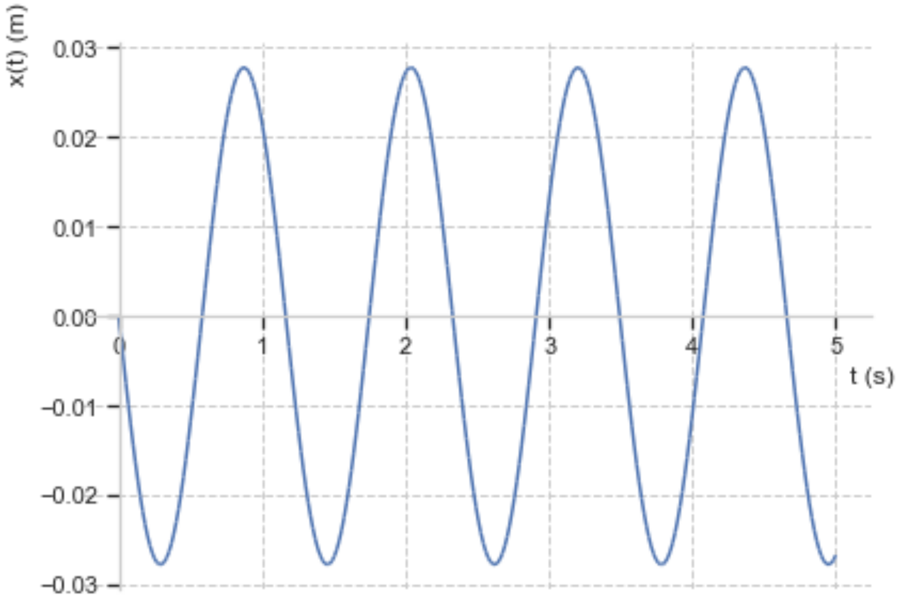
In [18]:

```
x_max = max(szelsoertek_ertekek)
display(Math('x_{{max}} = {:.5f}'.format(x_max)))

# méterben
```

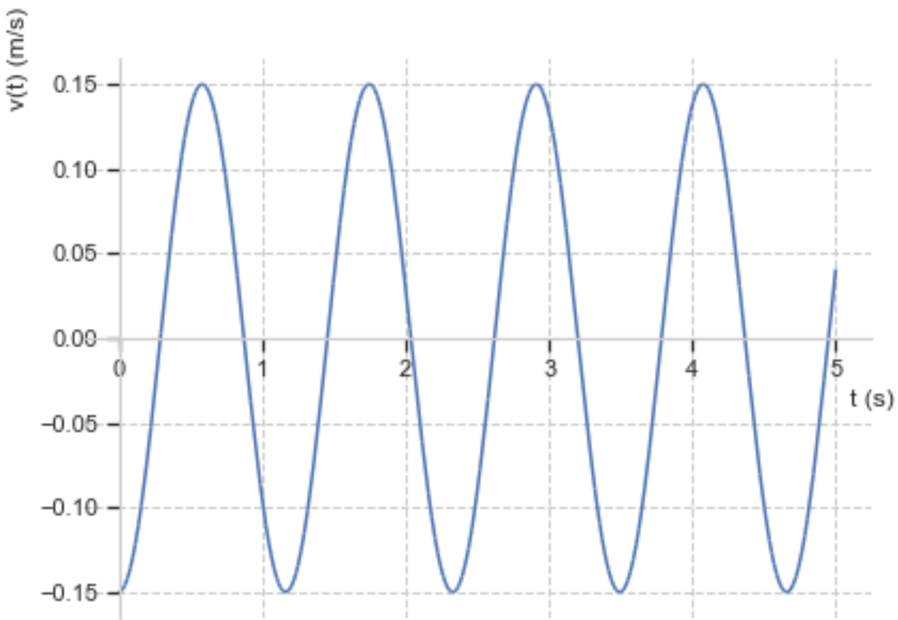
$x_{max} = 0.02780$

In [19]:

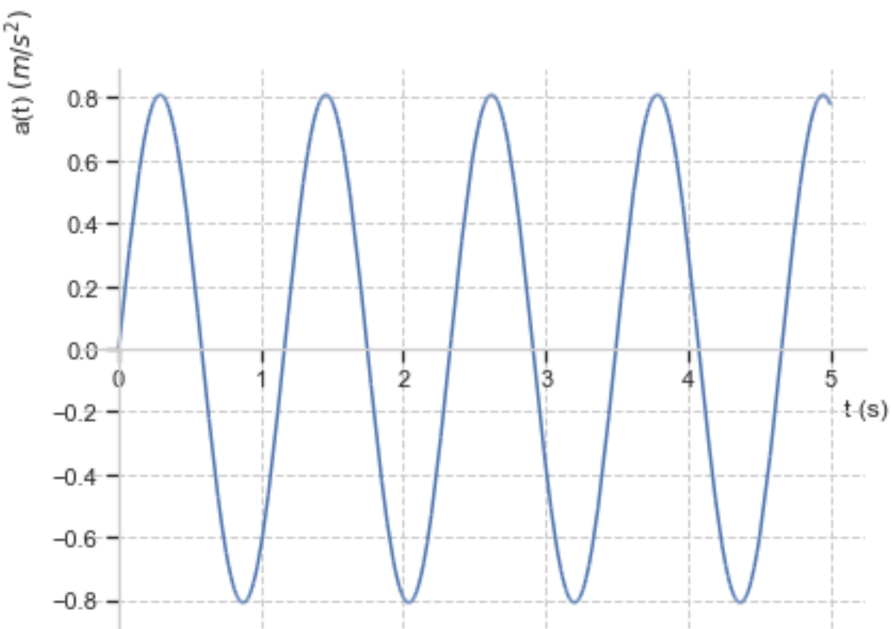
```
# Ez egy példa volt, hogyan lehet ezt automatizálni sympyban. A többit inká
# alapján. Léteznek egyéb numerikus szélsőérték kereső algoritmusok, de
# most így volt a legegyszerűbb.

# Plottoláshoz rengeteg eszköz áll rendelkezésre (matplotlib, seaborn, plot
# Most használjuk a sympy sajátját (ami elég hiányos, de egyszerű),
# kiegészítve a `seaborn` könyvtár funkcióival. Jelen esetben ezt arra
# használjuk, hogy legyen rácsvonal.

import seaborn as sns
sns.set()
sns.set_style("whitegrid", {'grid.linestyle': '--'})

plot_x = sp.plot(x_t_megold.rhs,
                 (t,0,5),
                 ylabel='x(t) (m)',
                 xlabel='t (s)',
                 adaptive=False,
                 nb_of_points = 300)  # az eredeti plot kicsit szakaszos vo
plot_v = sp.plot(v_t,
                 (t,0,5),
                 xlabel='t (s)',
                 ylabel='v(t) (m/s)')
plot_a = sp.plot(a_t,
                 (t,0,5),
                 xlabel='t (s)',
                 ylabel='a(t) $(m/s^2)$')

# Ez a parancs majd csak az 1.8-as verziójú sympyban fog működni.
# sp.PlotGrid(3, 1 , plot_x, plot_v, plot_a)
```



x(t) (m)
0.03
0.02
0.01
0.00
−0.01
−0.02
−0.03
0
1
2
3
4
5
t (s)



v(t) (m/s)
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
0
1
2
3
4
5
t (s)



a(t) (m/s^2)
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
0
1
2
3
4
5
t (s)

Készítette:

Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Takács Dénes (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com

2021.02.16