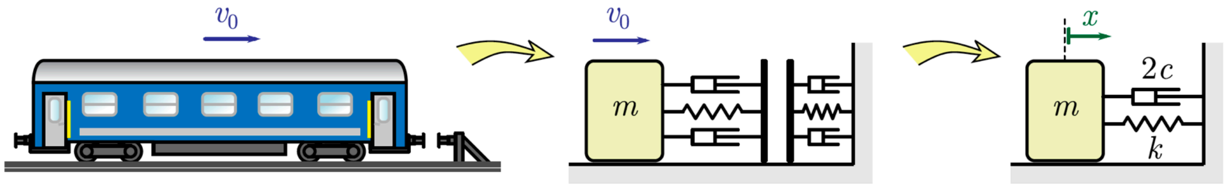
4. Gyakorlat - Vasúti ütközőbak

2021.03.01

Feladat:

In [1]:
```
from IPython.display import Image
Image(filename='gyak4_1.png',width=900)
```

Out[1]:



A mellékelt ábrán látható módon egy m tömegű vasúti szerlvény egy ütközőbakba csapódik v_0 kezdősebességgel. Feltételezzük, hogy a folyamat során a bak mozdulatlan marad. Modellezvén a bak elaszticitását és energia disszipációját, a fenti ábrán látható mechanikai modellt használjuk. Miközben a szerelvény ütközője érintezik a bak ütközőjével, kettejük rugómerevségét és csillapítási tényezőjét kombinálhatjuk egy k eredő rugómerevséggé, valamint egy $2c$ nagyságú eredő csillapítási tényezővé.

Adatok:

m = 5·10^4 kg	v_0 = 1 m/s
k = 10^6 N/m	c = 10^5 Ns/m

Részfeladatok:

1. Számítsa ki az ütközés során a rugóban ébredő maximális erőt!
2. Határozza meg az ütközés során elnyelt energiát!

Megoldás:

1. Feladat

További részletezés nélkül a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = 0.$$

In [2]:
```
import sympy as sp
from IPython.display import Math # hogy tudjunk LaTeX szöveget kiírni

sp.init_printing()

m,c,k,ζ,ω_n,ω_d,v_0,t = sp.symbols('m,c,k,ζ,ω_n,ω_d,v_0,t')
x = sp.Function('x')(t)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = [(m, 5*10**4), (v_0, 1), (k, 10**6), (c, 10**5)]

mozgasegy = m*sp.diff(x,t,2) + 2*c*sp.diff(x,t,1) + k*x

# Osszunk le a főegyütthatóval:
foegyutthato = mozgasegy.coeff(sp.diff(x,t,2))

mozgasegy = (mozgasegy/foegyutthato).expand()

mozgasegy
```

Out[2]:

$$\frac{2c\frac{d}{dt}x(t)}{m} + \frac{kx(t)}{m} + \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

In [3]:
```
mozgasegy = mozgasegy.subs([(2*c/m,2*ζ*ω_n),(k/m,ω_n**2)])
mozgasegy
```

Out[3]:

$$2\zeta\omega_n\frac{d}{dt}x(t) + \omega_n^2 x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

In [4]:
```
ω_n_num = sp.sqrt(k/m).subs(adatok)

display(Math('\omega_n = {}'.format(sp.latex(ω_n_num))))

# rad/s
```

$$\omega_n = 2\sqrt{5}$$

In [5]:
```
ζ_num = (c/m/ω_n).subs(adatok).subs(ω_n,ω_n_num)

display(Math('\zeta = {}'.format(sp.latex(ζ_num))))

# 1
```

$$\zeta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

In [6]:
```
ω_d_num = (ω_n*sp.sqrt(1-ζ**2)).subs(adatok).subs(ω_n,ω_n_num).subs(ζ,ζ_nur

display(Math('\omega_d = {}'.format(sp.latex(ω_d_num))))

# rad/s
```

$$\omega_d = 4$$

In [7]:
```
T_d_num = ((2*sp.pi)/ω_d).subs(adatok).subs(ω_d,ω_d_num)

display(Math('T_d = {}'.format(sp.latex(T_d_num))))

# s
```

$$T_d = \frac{\pi}{2}$$

In [8]:
```
mozgasegy_num = mozgasegy.subs([(ζ,ζ_num),(ω_n,ω_n_num)])
mozgasegy_num # természetesen ez a bal oldal, amennyiben a jobb oldal 0
```

Out[8]:

$$20x(t) + 4\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

In [9]:
```
# Oldjuk meg a mozgásegyenletet először
# az integrálási konstansok kézi meghatározásával.

# általános megoldás:
alt_meg = sp.dsolve(mozgasegy_num,x).rhs  # right hand side
alt_meg  # figyelem, itt az eredeti kidolgozásban pont fordítva van C1 és (
```

Out[9]:

$$(C_1 \sin(4t) + C_2 \cos(4t))\, e^{-2t}$$

In [10]:
```
# Általános megoldás deriváltja:
d_alt_meg = sp.diff(alt_meg,t)
d_alt_meg
```

Out[10]:

$$-2\,(C_1 \sin(4t) + C_2 \cos(4t))\, e^{-2t} + (4C_1 \cos(4t) - 4C_2 \sin(4t))\, e^{-2t}$$

In [11]:
```
# Kezedit értékek: x(0) = 0, v(0) = v0.
# C1, C2 konstansok kifejezése:
v0, C1, C2 = sp.symbols("v0, C1, C2")

# Oldjuk meg az egyenletrendszert C1 és C2-re.
konst = sp.solve([alt_meg.subs(t,0),d_alt_meg.subs(t,0)-v0],C1, C2)
C1_num = konst[C1]
C2_num = konst[C2]

display(Math('C_1 = {},'.format(sp.latex(konst[C1]))))
display(Math('C_2 = {}.'.format(sp.latex(konst[C2]))))
```

$$C_1 = \frac{v_0}{4},$$

$$C_2 = 0.$$

In [12]:
```
alt_meg.subs([(C1,C1_num),(C2,C2_num)])
```

Out[12]:

$$\frac{v_0 e^{-2t} \sin(4t)}{4}$$

In [13]:
```python
# Most pedig értékeljük, hogy a sympy a fentieket
# automatikusan is képes elvégezni:

kezdeti_ert = {x.subs(t,0): 0, x.diff(t).subs(t,0): v_0}
display(kezdeti_ert)

mozg_torv = sp.dsolve(mozgasegy_num,x,ics=kezdeti_ert)
mozg_torv
```

$$\left\{x(0) : 0,\ \frac{d}{dt}x(t)\bigg|_{t=0} : v_0\right\}$$

Out[13]:
$$x(t) = \frac{v_0 e^{-2t}\sin(4t)}{4}$$

Maximális rugóerő a maximális kitérésnél: keressük a maximális kitéréshez tartozó t^* időt:

In [14]:
```python
# A maximumban a derivált értéke zérus.
# Itt már felhasználhatjuk azt, hogy C2 = 0
d_alt_meg.subs(C2,0)
```

Out[14]:
$$-2C_1e^{-2t}\sin(4t) + 4C_1e^{-2t}\cos(4t)$$

In [15]:
```python
# Megoldva az egyenletet t-re:
meg = sp.solve(d_alt_meg.subs(C2,0),t)
t_csillag = meg[0]

display(Math('t^* = {}'.format(t_csillag.evalf(4))))

# s
```

$$t^* = 0.2768$$

In [16]:
```python
# Visszahelyettesítve a mozgástörvénybe:
x_max = mozg_torv.rhs.subs(t,t_csillag).subs(v_0,1)

display(Math('x_{{max}} = {}'.format(x_max.evalf(4))))

# m
```

$$x_{max} = 0.1285$$

In [17]:
```python
# Amiből a maximális rugóerő:
F_max = (k*x_max).subs(adatok)


display(Math('F_{{r,max}} = {}'.format(F_max.evalf(5)/1000)))

# kN
```

$$F_{r,max} = 128.55$$

Második feladat

In [18]:
```
# Newton II-ből a mozdony által az ütközőre ható erő
kontakt_egy = sp.Eq(k*alt_meg+2*c*d_alt_meg,0)
kontakt_egy = kontakt_egy.subs(C2,0).simplify()
kontakt_egy
```

Out[18]: $$C_1\left(-4c\left(\sin\left(4t\right)-2\cos\left(4t\right)\right)+k\sin\left(4t\right)\right)e^{-2t}=0$$

In [19]:
```
# Oldjuk meg t-re, felhasználva, hogy C2 = 0 és C1 ≠ 0:
kontakt_megold = sp.solve(kontakt_egy.subs(adatok),t)
display(kontakt_megold)

# a 2 megoldás közül a legkisebb kell, ami még pozitív.
# Módszer: `ternary operator`, ami könnyen olvasható és értelmezhető.
t_cscs = kontakt_megold[0] if 0 < kontakt_megold[0] < kontakt_megold[1] els

display(Math('t^{{**}} = {}'.format(t_cscs.evalf(4))))

# s
```

$$\left[-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}\right)}{2},\ \frac{\operatorname{atan}\left(2\right)}{2}\right]$$

$$t^{**}=0.5536$$

In [20]:
```
# A mozdony sebessége az elválás pillanatában (t** időpontban)

v_t = mozg_torv.rhs.diff(t) # mozgástörvény deriváltja -> sebesség
v_tcscs = v_t.subs(t,t_cscs).subs(adatok).evalf(4)

display(Math('v_{{t^{{**}}}} = {}'.format(v_tcscs.evalf(4))))

# m/s
```

$$v_{t^{**}}=-0.3305$$

In [21]:
```
# A kinetikus energia megváltozása a munkavégzéssel egyenlő:
W_diss = (1/2*m*v_tcscs**2-1/2*m*v_0**2).subs(adatok)

# A disszipált energia ennek mínusz egyszerese
display(Math('E^\mathrm{{diss}} = {}'.format(-W_diss.evalf(4)/1000)))

# kJ
```

$$E^{\mathrm{diss}}=22.27$$

Készítette:

Juhos–Kiss Álmos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
és
Csuzdi Domonkos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Takács Dénes (BME MM) ábrái és Vörös Illés (BME MM)
kidolgozása alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com
almosjuhoskiss@gmail.com

2021.03.01