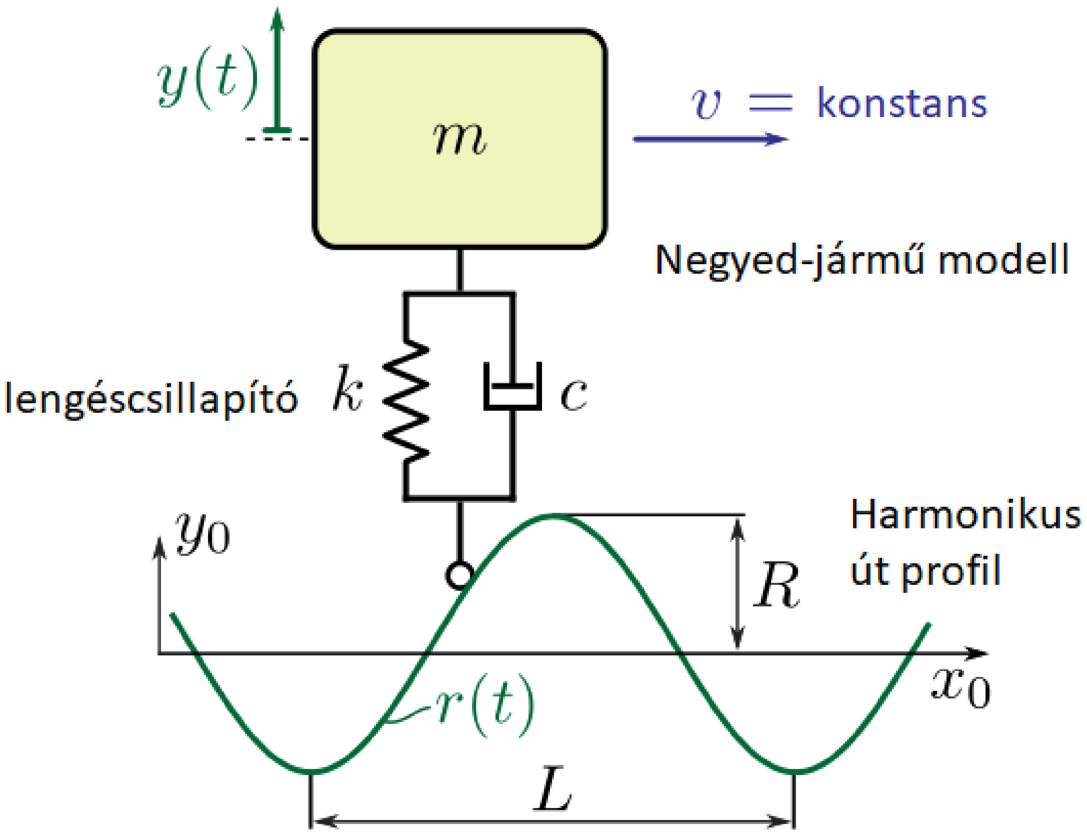
# 7. Gyakorlat - 1 DoF negyed-jármű modell

2021.03.22.

## Feladat:

In [1]:
```
from IPython.display import Image
Image(filename='gyak7_1.png',width=600)
```

Out[1]:




A mellékelt ábrán egy negyed-jármű modell látható, mellyel a jármű függőleges dinamikáját lehet vizsgáni. A gyakorlatban a lengéscsillapító merevségét és csillapítási tényezőjét az útviszonyoknak megfelelően, a komfort szempotokat kielégítve szokták beállítani. A negyed-jármű tömegét $m$, a lengéscsilapító egyenértékű merevségét $k$, csillapítási tényezőjét $c$ jelöli. A jármű longitudinális sebesség komponense $v$ konstans, míg a harmonikus útprofil miatt a függőleges sebesség komponenst az $r(t) = R\sin(\omega t)$ függvénnyel lehet megadni, ahol $R$ az út egyenetlenségének amplitúdója, $\omega$ pedig a gerjesztési frekvencia, melyet a $v$ sebesség és az $L$ hullámhossz határoz meg. A mozgás leírásához az $y(t)$ általános koordinátát használjuk. A gravitációs hatást elhanyagoljuk és feltételezzük, hogy a kerék sosem emelkedik el a talajtól.

## Adatok:

| | |
|---|---|
| $m$ = 300 kg | $v$ = 36 km/h = 10 m/s |
| $k$ = 2·10$^5$ N/m | $R$ = 0,04 m |

$c$ = 9800 Ns/m  $L$ = 1,2 m

$r(t)$ = $R\sin(\omega t)$

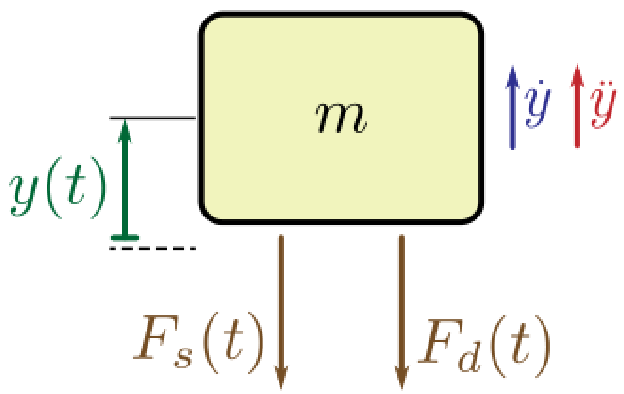
## Részfeladatok:

1. Írja fel a negyed-jármű modell mozgásegyenletét!
2. Számítsa ki a csillapított és a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciáját, a relatív csillapítási tényezőt, a frekvencia hányadost és a statikus deformációt!
3. Határozza meg az állandósult állapotot leíró mozgástörvényt $y_p(t) = Y\sin(\omega t + \delta - \vartheta)$ alakban!
4. Határozza meg a stacionárius állapotban a csillapító erő maximumát ($F_{d,max}$)!

# Megoldás:

In [2]:
```
from IPython.display import Image
Image(filename='gyak7_2.png',width=500)
```

Out[2]:




# 1. Feladat:

A fenti ábrán a negyed-jármű modell szabadtest ábrája látható egy kitérített pozícióban. A mozgás egyenlet Newton II alapján:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}. \tag{1}$$

Mivel most csak a függőleges mozgásra vagyunk kíváncsiak, ezért a mozgásegyenlet a következő alakban adódik

$$m\ddot{y} = -F_s(t) - F_d(t), \tag{2}$$

ahol $F_s(t)$ és $F_d(t)$ a rugóerő és a csillapítóerő

$$F_s(t) = k(y - r(t)), \tag{3}$$

$$F_d(t) = c(\dot{y} - \dot{r}(t)). \tag{4}$$

In [3]:

```
import sympy as sp
from IPython.display import display, Math

sp.init_printing()
```

In [4]:

```
## Függvények, szimbólumok definiálása

m, k, c, v, R, L, ω= sp.symbols("m, k, c, v, R, L, ω", real=True)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = [(m, 300), (k, 2*10**5), (c, 9300), (v,10), (R, 0.04), (L, 1.2)]

#általános koordináta
t = sp.symbols("t",real=True, positive=True)
y = sp.Function('y')(t)

# Útgerjesztés
r = R*sp.sin(ω*t)

# Rugóerő, csillapítóerő
F_s = k*(y-r)
F_c = c*(y.diff(t)-r.diff(t))
display(Math('F_s = {}'.format(sp.latex(F_s))),Math('F_c = {}'.format(sp.latex(F_c))
```

$$F_s = k\left(-R\sin\left(t\omega\right) + y(t)\right)$$

$$F_c = c\left(-R\omega\cos\left(t\omega\right) + \frac{d}{dt}y(t)\right)$$

In [5]:

```
# A gerjesztési frekvencia a hullámhosszal és a longitudinális sebességgel fejezhető

# periódusidő
T_g = L/v

# gerjesztési körfrekvencia
# Ennek a mennyiségnek hozzunk létre egy új változót és ne a korábban használt ω-t í
# (Ez azért fontos, mert az ω szimbólum már szerepel az útgerjesztés kifejezésében é
ω_g = 2*sp.pi/T_g
display(Math('ω_g = {}'.format(sp.latex(ω_g))))

# Numerikusan
ω_g_num = ω_g.subs(adatok).evalf(6)
display(Math('ω_g = {}'.format(sp.latex(ω_g_num))))

# [rad/s]
```

$$\omega_g = \frac{2\pi v}{L}$$

$$\omega_g = 52.3599$$

In [6]:

```
# mozgásegyenlet nullára rendezve
mozgegy = (m*y.diff(t,2)+F_s+F_c).apart(y)
mozgegy
```

Out[6]:

$$-Rc\omega\cos\left(t\omega\right) - Rk\sin\left(t\omega\right) + c\frac{d}{dt}y(t) + ky(t) + m\frac{d^2}{dt^2}y(t)$$

A mozgásegyenletben a gerjesztés az alább egyszerűsített alakra hozható:

$$kR\sin(\omega t) + cR\omega\cos(\omega t) = F_0\sin(\omega t + \delta), \tag{5}$$

ahol $\delta$ a fáziskésés és $F_0$ a gerjesztés erőamplitúdója. Trigonometrikus azonosságot alkalmazva ez a kifejezés kibontható:

$$F_0\sin(\omega t + \delta) = F_0\sin(\omega t)\cos(\delta) + F_0\cos(\omega t)\sin(\delta), \tag{6}$$

majd összevetve a gerjesztés eredeti alakjával, az egyenlet két oldalán a szinusz és a koszinusz függvény együtthatói meg kell egyezzenek

$$kR\sin(\omega t) + cR\omega\cos(\omega t) = F_0\sin(\omega t)\cos(\delta) + F_0\cos(\omega t)\sin(\delta), \tag{7}$$

Így ebből $F_0$ és $\delta$ paraméterek meghatározhatók.

In [7]:

```
δ, F_0 = sp.symbols("δ, F_0")
# A sympy jól ismert expand() függvénye a trigonometrikus azonosságokra nem alkalmaz
# Szerencsére erre van egy külön függvény, az expand_trig()
# (Megjegyzés: ugyanúgy a simplify() sem alkalmazható trigonometrikus kifejezések eg
# abban az esetben a trigsimp() függvény nyújthat segítséget)
gerj_expand = sp.expand_trig(F_0*sp.sin(ω*t+δ)).expand()
gerj_expand
```

Out[7]: $F_0\sin\left(\delta\right)\cos\left(t\omega\right) + F_0\sin\left(t\omega\right)\cos\left(\delta\right)$

In [8]:

```
# Most szedjük ki a mozgásegyenletből a gerjesztést
gerj = mozgegy.coeff(y,0) # y nulladik hatványának az együtthatója (a diffegyenlet i
gerj
```

Out[8]: $-Rc\omega\cos\left(t\omega\right) - Rk\sin\left(t\omega\right)$

In [9]:

```
# És most oldjuk meg az adódó egyenletrendszert az együtthatókra
egyutthatok = sp.solve([gerj.coeff(sp.sin(ω*t))-gerj_expand.coeff(sp.sin(ω*t)), gerj
F_0_val = sp.ratsimp(egyutthatok[1][0]) # A két megoldás közül a pozitívat vesszük k
δ_val = sp.simplify(egyutthatok[0][1])
display(Math('F_0 = {}'.format(sp.latex(F_0_val))), Math('δ = {}'.format(sp.latex(δ_

# numerikusan
F_0_num = F_0_val.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(8)
δ_num = δ_val.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(5)
display(Math('F_0 = {}'.format(sp.latex(F_0_num))), Math('δ = {}'.format(sp.latex(δ_

# [N]
# [rad]
```

$$F_0 = \frac{Rc^2\omega^2}{k + \sqrt{c^2\omega^2 + k^2}} + Rk$$

$$\delta = -2\,\mathrm{atan}\left(\frac{k - \sqrt{c^2\omega^2 + k^2}}{c\omega}\right)$$

$$F_0 = 21056.771$$

$\delta = 1.1811$

## 2. Feladat

In [10]:

```
# Mozgásegyenlet leosztása a főegyütthatóval
mozgegy = (mozgegy/mozgegy.coeff(y.diff(t,2))).expand()

# csillapítatlan sajátkörfrekvencia
ω_n = sp.sqrt(mozgegy.coeff(y))

# frekvenciahányados
λ = ω_g/ω_n

# Relatív csillapítási tényező
ζ = mozgegy.coeff(y.diff(t))/(2*ω_n)

# csillapított sajátkörfrekvencia
ω_d = ω_n*sp.sqrt(1-ζ**2)

# statikus deformáció
f_0 = F_0_val/(ω_n**2*m)

## Numerikusan

ω_n_num = ω_n.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(6)
λ_num = λ.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(5)
ζ_num = ζ.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(4)
ω_d_num = ω_d.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(6)
f_0_num = f_0.subs(ω, ω_g).subs(adatok).evalf(4)

display(Math('ω_n= {}'.format(sp.latex(ω_n_num))), Math('λ = {}'.format(sp.latex(λ_n
display(Math('ζ = {}'.format(sp.latex(ζ_num))), Math('ω_d = {}'.format(sp.latex(ω_d_
display(Math('f_0 = {}'.format(sp.latex(f_0_num))))

# [rad/s]
# [1]
# [1]
# [rad/s]
# [m]
```

$\omega_n = 25.8199$

$\lambda = 2.0279$

$\zeta = 0.6003$

$\omega_d = 20.6499$

$f_0 = 0.1053$

## 3. Feladat

Az állandósult állapotban a rendszert leíró mozgástörvényt a differenciálegyenlet partikuláris megoldása adja, melyet az alábbi alakra lehet rendezni

$$y_p(t) = Y_1 \sin(\omega t + \delta_1 - \vartheta_1), \tag{8}$$

ahol $Y$ az állandósult állapotban a rezgés amplitúdó, $\vartheta$ az erőgerjesztéshez képesti fáziskésés, $\delta - \vartheta$ pedig az útgerjesztéshez képesti fáziskésés.

In [11]:
```
# Az Y rezgésamplitúdó a nagyítási függvény segítségével fejezhető ki
# Nagyítási függvény
N = 1/(sp.sqrt((1-λ**2)**2+4*ζ**2*λ**2))
N_num = N.subs(adatok).evalf(4)
display(Math('N = {}'.format(sp.latex(N_num))))

## Rezgésamplitúdó
Y = N*f_0
Y_num = Y.subs(ω,ω_g).subs(adatok).evalf(3)
display(Math('Y = {}'.format(sp.latex(Y_num))))

# [1]
# [m]
```

$$N = 0.2531$$

$$Y = 0.0266$$

In [12]:
```
# A fáziskésés
ϑ =  sp.atan2(2*ζ*λ,(1-λ**2))
ϑ_num = (ϑ).subs(adatok).evalf(5)
display(Math('ϑ = {}'.format(sp.latex(ϑ_num))))

# [rad]
```

$$\vartheta = 2.4777$$

In [13]:
```
# A partikuláris megoldás
yp =Y*sp.sin(ω*t+δ-ϑ)
yp_num = Y_num*sp.sin(ω*t+δ_num-ϑ_num)
display(Math('y_p = {}'.format(sp.latex(yp_num))))

# [m]
```

$$y_p = 0.0266 \sin\left(t\omega - 1.2967\right)$$

# 4. Feladat

A csillíptási erő az alábbi kondenzált formára hozható

$$F_c(t) = c(\dot{y}_p(t) - \dot{r}(t)) = c\omega(Y\cos(\omega t + \delta - \vartheta) - R\cos(\omega t)) \tag{9}$$

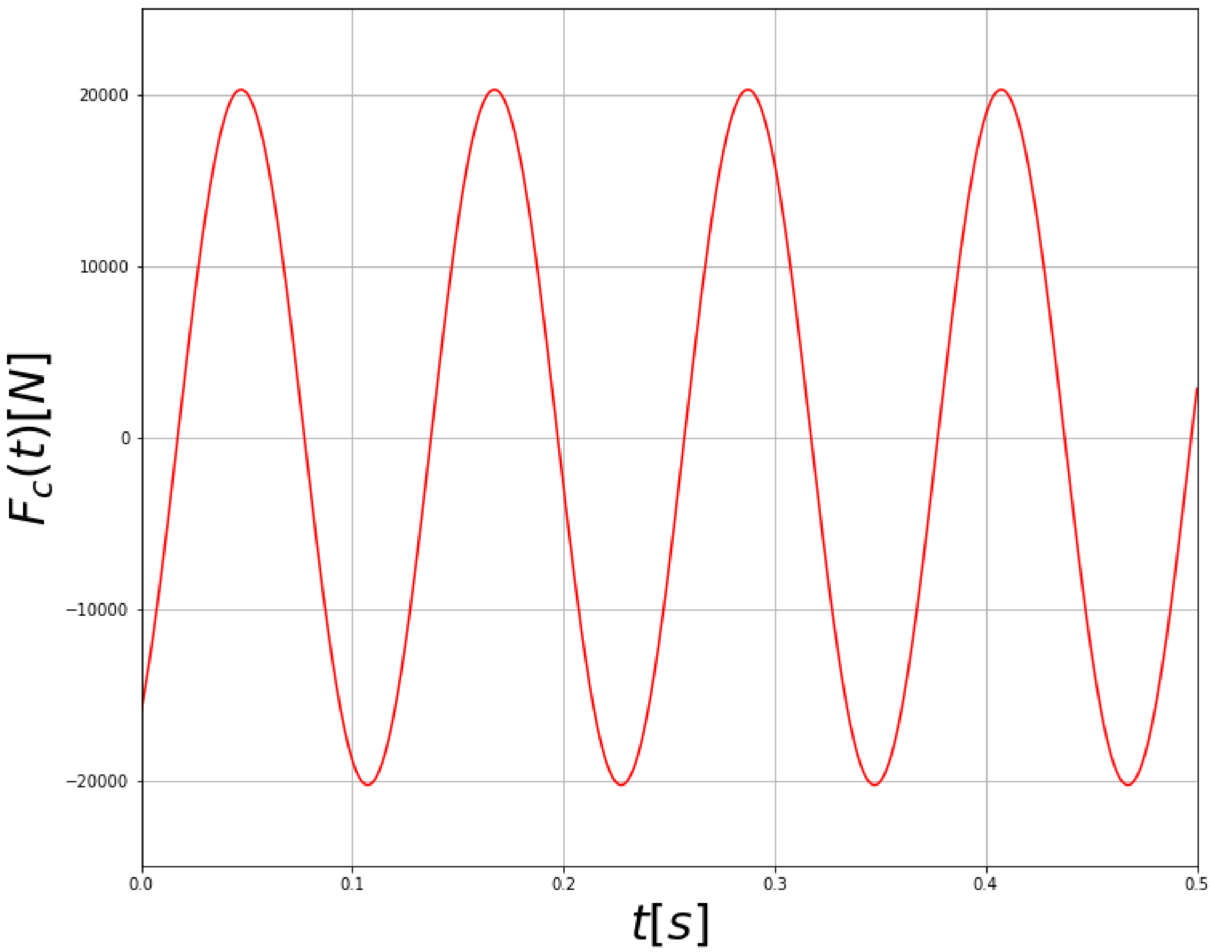
$$(1) \qquad c\omega(Y\cos(\omega t + \delta - \vartheta) - R\cos(\omega t)) = c\omega Y^*\cos(\omega t + \delta^*) \tag{10}$$

A csillapítási erő amplitúdója ($Y^*$) az első feladatban ismeretett módon most is meghatározható az (1) egyenlet trigonometrikus bővítésével, majd az együtthatókra adódó egyenletrendszer megoldássával. Nézzük meg hogyan lehetne megkeresni az erőmaximumot numerikus módszer segítségével. Ehhez először célszerű kirajzoltatni a függvényünket.

In [14]:
```
# Csillapítási erő az állandósult állapotban
F_c_stac = F_c.subs(y, yp).simplify()

# numerikusan az idő függvényeként megadva
F_c_stac_num = (F_c_stac.subs(ω, ω_g).subs(δ, δ_num).subs(adatok)).evalf(5)
```

In [15]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [16]:
```
### Csillapítási erőidőfüggvényének ábrázolása

t_val = np.linspace(0,0.5,1000) # lista létrehozása a [0 ; 0,5] intervallum 1000 rés
F_c_val = np.zeros(len(t_val)) # nulla lista létrehozása (ugyanannyi elemszámmal)
# for ciklus segítségével írjuk felül a nulla listában szereplő elemeket az adott x
for i in range(len(t_val)):
    F_c_val[i] = F_c_stac_num.subs(t,t_val[i]).evalf()


# rajzterület létrehozása
plt.figure(figsize=(30/2.54,25/2.54))

# függvény kirajzolása az x és y kordináta értékeket tartalmazó listák megadásásval
plt.plot(t_val,F_c_val,color='r',label=r'num_sim')

# tengelyek
axes = plt.gca()
axes.set_xlim([0,t_val[-1]])
axes.set_ylim([-25000, 25000])

# rácsozás
plt.grid()

# tengelyfeliratozás
plt.xlabel(r'$ t [s] $',fontsize=30)
plt.ylabel(r'$ F_c(t) [N] $',fontsize=30)

plt.show()
```



In [17]:
```
# Az erőmaximum az erőértékeket tartalmazó listából könnyen kiszedhető a max() függv
F_c_max = np.around(max(F_c_val),decimals=2) # két tizedesre kerekítve

display(Math('F_{{c,max}} = {}'.format(sp.latex(F_c_max))))

# [N]
```

$$F_{c,max} = 20270.5$$

Készítette: Juhos-Kiss Álmos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály) Takács Dénes (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

```
Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com
almosjuhoskiss@gmail.com

    2021.03.22
```