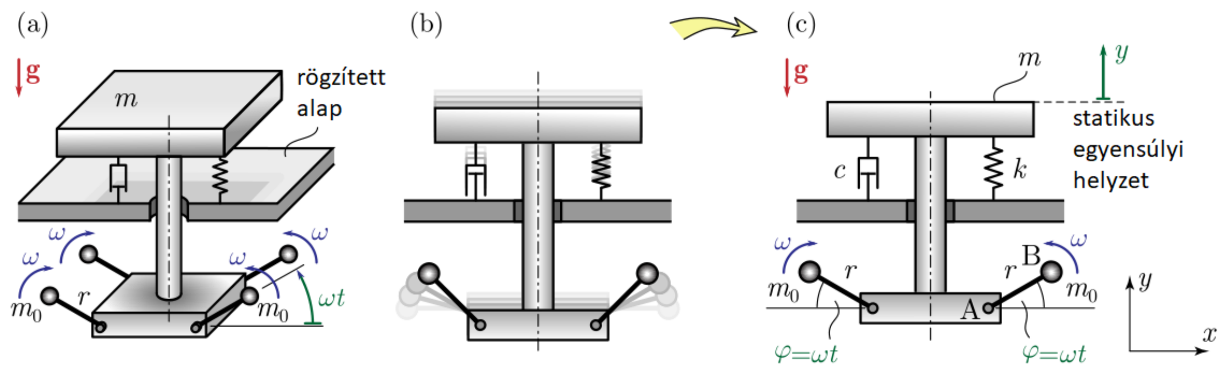
9. Gyakorlat - Rezgésgerjesztő

2021.04.04.

Feladat:



A mellékelt ábrán egy gerjesztő látható, ami egy m tömegű merev testből, és 4 ω szögsebességgel szimmetrikusan forgó r excentricitású m_0 tömegből áll. Az egyszerűsített mechanikai modellben a mozgó merev test egy k merevségű rugó és egy c csillapítási tényezőjű csillapító elmmel van az alaphoz rögzítve. A mozgás leírásához az $y(t)$ általános koordinátát használjuk, melyet a statikus egyensúlyi ponttól mérünk. Az egyensúlyi pontban ($y = 0$) a rugó előterhelt állapotban van, ami a gravitációs erővel ellentétes irányú erőt eredményez.

Adatok:

m = 60 kg	ω = 75 rad/s
m_0 = 0.5 kg	k = 25000 N/m
r = 0,1 m	

Részfeladatok:

1. Határozza meg a c csillapítási tényezőt, ha a relatív csillapítási tényező $\zeta = 0.05$!
2. Határozza meg az állandósult állapotban ($y_p(t)$) a rezgés amplitúdóját (Y)!
3. Mekkora az alapra ható erő ($F_{a,max}$) legnagyobb értéke az állandósult állapotban?

Megoldás:

1. Feladat:

A mozgásegyenletet a Lagrange-egyenlet segítségével határozzuk meg. Mivel a rendszerre nem hat semmilyen külső erő, ezért az álatlános erő $Q^{\star} = 0$. A Lagrange-egyenlet tehát az y általános koordináta segítségével az alábbi alakban írható:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

ahol T a kinetikus energia, $\mathcal{D}$ a Rayleigh-féle disszipatív potenciál, U a potenciálfüggvény.

In [1]:
```
import sympy as sp
from IPython.display import display, Math

sp.init_printing()
```

In [2]:
```
## Függvények, szimbólumok definiálása

m, m0, r, ω, k, ζ, c, g = sp.symbols("m, m0, r, ω, k, ζ, c, g", real=True)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = [(m, 60), (m0, 0.5), (r, 0.1), (ω, 75), (k, 25000), (ζ, 0.05), (g,

# általános koordináta
t = sp.symbols("t", real=True, positive=True)
y = sp.Function('y')(t)
```

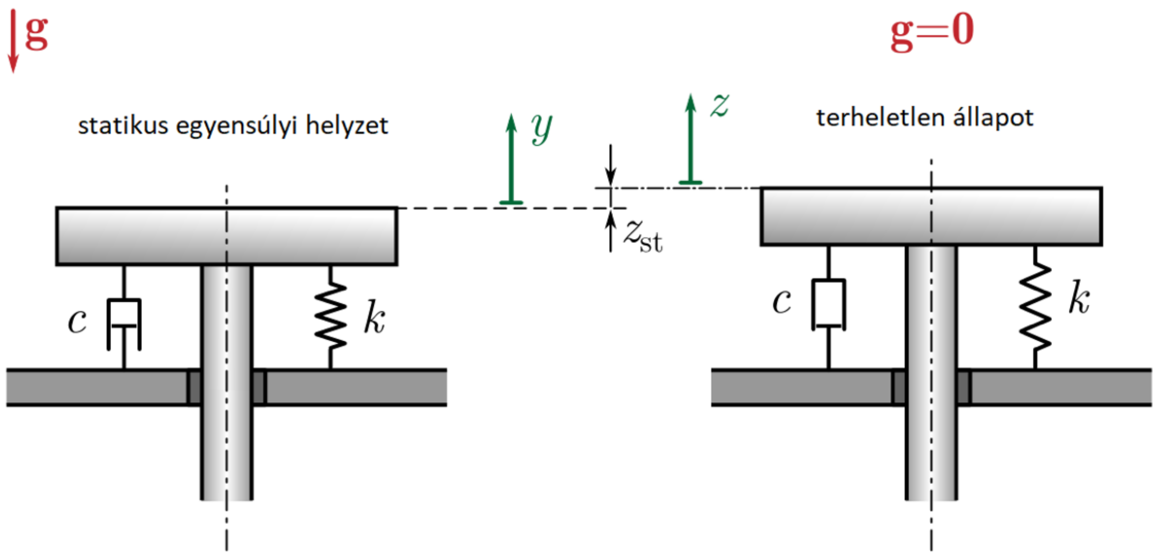
In [3]:
```
## A kinetikus energia

"""(Így is lehet több soros kommentet írni!)
A kinetikus energia felírásakor a merev test függőleges mozgását
és a négy tömegpont excentrikus forgását kell figyelembe venni.
Mivel a Lagrange-egyenletben az általános koordináta szerinti derivált sze
ezért az excentrikus forgásból adódó v0 sebességet is az
y általános koordináta segítségével kell kifejezni."""

# Ehhez először írjuk fel a tömegpont helyzetét leíró r0 vektort
C1, C2 = sp.symbols("C1, C2") # konstansok
r0 = sp.Matrix([[r*sp.cos(ω*t) + C1],[y + r*sp.sin(ω*t) + C2]])

# Ebből deriválás segítségével kapható a sebességvektor
v0 = r0.diff(t)

T = (sp.Rational(1,2) * m * y.diff(t)**2 + 4*sp.Rational(1,2)*m0 * v0.dot(v

display(Math('T = {}'.format(sp.latex(T))))
```

$$T = \frac{m\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{2} + 2m_0\left(r^2\omega^2 + 2r\omega\cos(t\omega)\frac{d}{dt}y(t) + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2\right)$$

In [4]:

```
## A Rayleigh féle disszipatív potenciál

# A csillapító elemre az alábbi disszipatív potenciál írható fel
D = sp.Rational(1,2)*c*y.diff(t,2)

display(Math('\mathcal{{D}} = {}'.format(sp.latex(D))))
```

$$\mathcal{D} = \frac{c\frac{d^2}{dt^2}y(t)}{2}$$



In [5]:

```
## A potenciális energia

"""A potenciális energia a rugókban felhalmozódó potenciális energia
és a gravitációs erő potenciális energiájából tevődik össze.
Mivel a rugó előterhelt állapotban van az egyensúlyi pozícióban, ezért
célszerű a potenciális energiának bevezetni egy új koordináta rendszert,
aminek a függőleges nullpontja ott van, ahol a rugó hossza megegyegyzik
a terheletlen hosszával (lásd fenti ábra). Ezzel a transzformációval
az új koordináta-rendszerben a nullszinttől való eltérést a z koordináta mé

z_st, C0 = sp.symbols("z_st, C0")
z = y - z_st

# Az új koordinátával a potenciális energia az alábbi alakban írható
# (C0 tetszőleges konstans, a deriválás után ki fog esni.)
U = sp.Rational(1,2)*k*z**2 + m*g*z + 4*m0*g*(z + r*sp.sin(ω*t)) + C0

display(Math('U = {}'.format(sp.latex(U))))
```

$$U = C_0 + gm\left(-z_{st} + y(t)\right) + 4gm_0\left(r\sin(t\omega) - z_{st} + y(t)\right) + \frac{k\left(-z_{st} + y(t)\right)^2}{2}$$

In [6]:

```
## A mozgásegyenlet

mozgegy_0 = ((T.diff(y.diff(t))).diff(t) - T.diff(y) + D.diff(y.diff(t)) +

display(mozgegy_0)
```

$$gm + 4gm_0 - kz_{st} + ky(t) - 4m_0 r\omega^2 \sin(t\omega) + (m + 4m_0)\frac{d^2}{dt^2}y(t)$$

In [7]:

```
"""A mozgásegyenletben az időfüggetlen tag az egyensúlyi egyenletet adja vi
Mivel az egyensúlyban a rugóerő és a gravitációs
erő kiegyenlítik egymást, ezért ez a tag nullával egyenlő,
tehát elhagyható a mozgásegyeneletből."""

mozgegy_1 = mozgegy_0.subs(g*m + 4*g*m0 - k*z_st, 0)

# Osszunk le a főegyütthatóval, hogy a megszokott alkra jussunk
foegy = mozgegy_1.coeff(y.diff(t,2))
mozgegy = (mozgegy_1 / foegy)

display(mozgegy)
```

$$\frac{ky(t) - 4m_0 r\omega^2 \sin(t\omega) + (m + 4m_0)\frac{d^2}{dt^2}y(t)}{m + 4m_0}$$

In [8]:

```
## A csillapítási tényező, a körfrekvenciák, és a statikus kitérés számolás

# csillapítatlan sajátkörfrekvencia
y_coeff = mozgegy.expand().coeff(y)
ω_n = sp.sqrt(y_coeff)

# csillapítási tényező
c = (2*ζ*ω_n) * (m + 4*m0)

# statikus deformáció (inhomogenitást okozó tagban a szögfüggvény együttha
inhom_coeff = -(mozgegy.expand().coeff(y,0)).coeff(sp.sin(ω*t))
f_0 = inhom_coeff / ω_n**2

## numerikusan
ω_n_num = ω_n.subs(adatok).evalf(4)
c_num = c.subs(adatok).evalf(4)
f_0_num = f_0.subs(adatok).evalf(6)

display(Math('ω_n= {}\\ \\text{{rad/s}}'.format(sp.latex(ω_n_num))))
display(Math('c = {}\\ \\text{{Ns/m}}'.format(sp.latex(c_num))))
display(Math('f_0 = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(f_0_num))))
```

$$\omega_n = 20.08 \ \text{rad/s}$$

$$c = 124.5 \ \text{Ns/m}$$

$$f_0 = 0.045 \ \text{m}$$

2. Feladat:

A partikuláris megoldást a legegyszerűbb alakra rendezve a kifejezésben megjelenik a rezgésamplitúdó, Y:

$$y_p(t) = Y\sin(\omega t - \vartheta),$$

ahol ϑ a fázisszög. A rezgésamplitúdó a nagyítás segítségével számítható:

$$Y = N f_0,$$

ahol a nagyítás a következő alakban kapható

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}.$$

In [9]:

```
## rezgésamplitúdó meghatározása

# frekvencia hányados
λ = (ω/ω_n)
λ_num = λ.subs(adatok).evalf(5)
display(Math('λ = {}\\ \\text{{[1]}}'.format(sp.latex(λ_num))))

# nagyítás
N = 1/(sp.sqrt((1-λ**2)**2+4*ζ**2*λ**2))
N_num = N.subs(adatok).evalf(4)
display(Math('N = {}\\ \\text{{[1]}}'.format(sp.latex(N_num))))

# rezgésamplitúdó
Y = N*f_0
Y_num = Y.subs(adatok).evalf(3)
display(Math('Y = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(Y_num))))

# fázisszög
ϑ =  sp.atan2(2*ζ*λ,(1-λ**2))
ϑ_num = (ϑ).subs(adatok).evalf(5)
display(Math('ϑ = {}\\ \\text{{rad}}'.format(sp.latex(ϑ_num))))

# partikuláris megoldás
y_p = Y*sp.sin(ω*t-ϑ)
y_p_num = Y_num*sp.sin(ω.subs(adatok)*t-ϑ_num)
display(Math('y_p(t) = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(y_p_num))))
```

$\lambda = 3.735\ [1]$

$N = 0.07719\ [1]$

$Y = 0.00347\ \text{m}$

$\vartheta = 3.1128\ \text{rad}$

$y_p(t) = 0.00347 \sin(75t - 3.1128)\ \text{m}$

3. Feladat

In [10]:
```
## Az alapra átadódó erő egy statikus (rugó) és egy dinamikus (rugó + csil

# A statikus tag a gravitációs erővel egyezik meg:
F_st = g * (m + 4*m0)
F_st_num = F_st.subs(adatok)
display(Math('F_{{st}} = {}\\ \\text{{N}}'.format(sp.latex(F_st_num))))
```

$F_{st} = 608.22\ \text{N}$

Az átadódó erő dinamikus része felírható a partikuláris megoldáshoz hasonlóan egy egyszerűsített alakban

$$F_{din} = F_A \cos(\omega t + \delta),$$

ahol F_A az átadódó erő amplitúdója. A trigonometrikus azonosságokat kihasználva ez az erőamplitúdó könnyen meghatározható, ha felírjuk a dinamikus erőt a rugóerővel és a csillapító erővel kifejezve:

$$\begin{aligned} F_A \cos(\omega t + \delta) &= F_A \cos(\omega t)\cos\delta - F_A \sin(\omega t)\sin\delta = \\ &= kY\sin(\omega t)\cos\vartheta - kY\cos(\omega t)\sin\vartheta + cY\omega\cos(\omega t)\cos\vartheta - cY\omega \sin \\ &= kY\sin(\omega t - \vartheta) + cY\omega\cos(\omega t - \vartheta). \end{aligned}$$

Az egyenlet két oldalán szereplő együtthatóknak meg kell egyezniük, tehát erre a feltételre felírhatunk egy egyenletrendszert, amit megoldva adódik az átadódó erő amplitúdója F_A. Ez a megoldás Pythonban kicsit nehézkes, sőt az sem biztos hogy a sympy solvere megtalálja az egyenletrendszer megoldását, ezért célszerű ezt numerikusan kiszámolni.

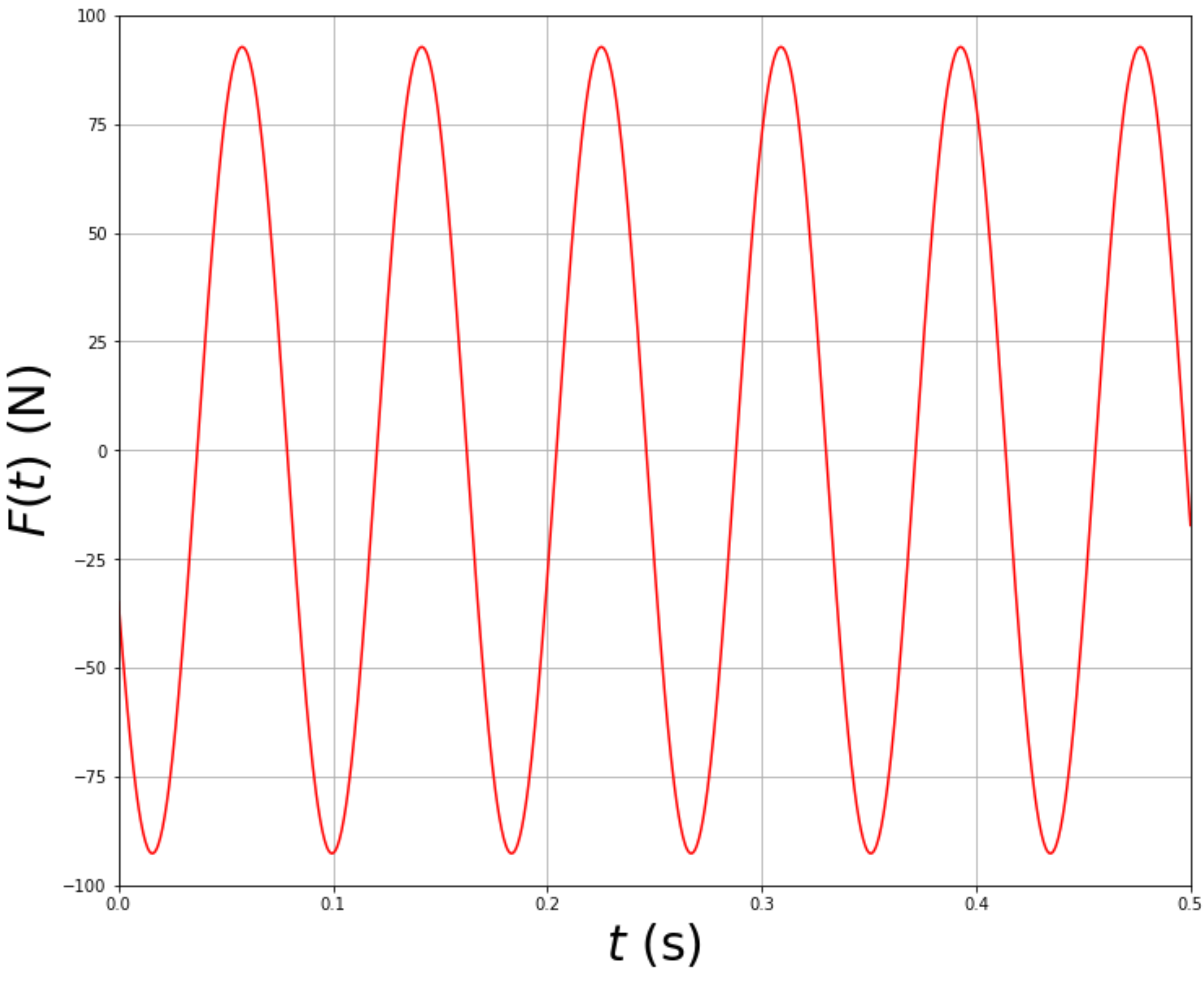
In [11]:
```
import numpy as np

# A rugóerő dinamikus része
F_r = k*y_p_num

# A csillapításból származó erő
F_c = c*y_p_num.diff(t)

# A dinamikus tag
F_din = F_r + F_c

### dinamikus erőtag értékeinek előállítása az idő függvényében
t_val = np.linspace(0,0.5,1000) # lista létrehozása a [0 ; 0,5] intervallum
F_din_val = np.zeros(len(t_val)) # nulla lista létrehozása (ugyanannyi elem
# for ciklus segítségével írjuk felül a nulla listában szereplő elemeket az
for i in range(len(t_val)):
    F_din_val[i] = F_din.subs(adatok).subs(t,t_val[i]).evalf()

# Erőmaximum megkeresése
F_din_max = np.around(max(F_din_val),decimals=2) # két tizedesre kerekítve
display(Math('F_{{din,max}} = {}\\ \\text{{N}}'.format(sp.latex(F_din_max))

# A dinamikus taghoz még hozzá kell adni a statikus tagot
F_A_max = F_din_max+F_st_num
display(Math('F_{{A,max}} = {}\\ \\text{{N}}'.format(sp.latex(F_A_max))))
```

$F_{din,max} = 92.69$ N

$F_{A,max} = 700.91$ N

In [12]:

```
import matplotlib.pyplot as plt

### Ellenőrzésképp érdemes ábrázolni a diamikus erőt
# rajzterület létrehozása
plt.figure(figsize=(30/2.54,25/2.54))

# függvény kirajzolása az x és y kordináta értékeket tartalmazó listák mega
plt.plot(t_val,F_din_val,color='r',label=r'num_sim')

# tengelyek
axes = plt.gca()
axes.set_xlim([0,t_val[-1]]) # `-1`: utolsó eleme a listának, `-2`: utolsó
axes.set_ylim([-100, 100])

# rácsozás
plt.grid()

# tengelyfeliratozás
plt.xlabel(r'$ t\ (\mathrm{s}) $',fontsize=30)
plt.ylabel(r'$ F(t)\ (\mathrm{N}) $',fontsize=30)

plt.show()
```



Készítette:

Juhos-Kiss Álmos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Hajdu Dávid (BME MM) kidolgozása és ábrái alapján.

Hibák, javaslatok:
amsz.bme@gmail.com
csuzdi02@gmail.com
almosjuhoskiss@gmail.com

2021.04.04