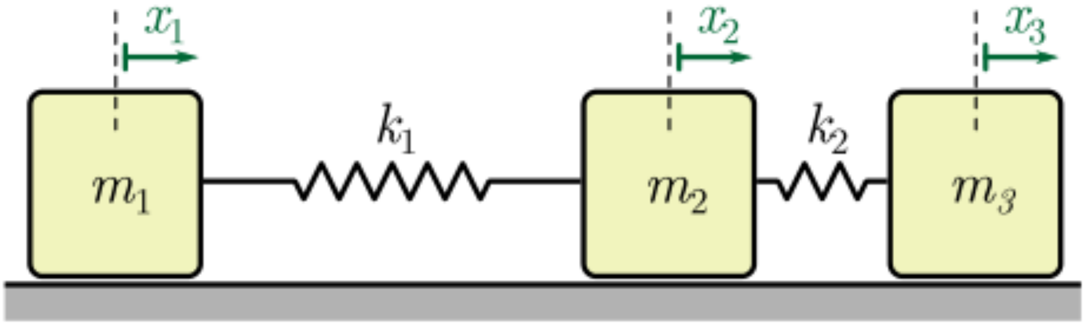
11. Gyakorlat - Rezgésgerjesztő

2021.04.19.

Feladat:



A mellékelt ábrán az m_1, m_2 és m_3 tömegekből álló 3 szabadságfokú rendszer látható. A testeket egy-egy rugó köti össze melyeknek merevsége k_1 és k_2. A testek elmozdulásait az x_1, x_2 és x_3 általános koordináták írják le.

Adatok:

m_1 = 2 kg	k_1 = 200 N/m
m_2 = 4 kg	k_2 = 500 N/m
m_3 = 5 kg	

Részfeladatok:

1. Írja fel a mozgásegyenleteket!
2. Számítsa ki a többszabdságfokú rendszer sajátkörfrekveciáit és a hozzá tartozó lengésképvektorokat!

Megoldás:

1. Feladat:

Kis elmozdulások esetén a lineáris mozgásegyenlet mátrix együtthatós alakja a következő egyenlettel adható meg:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*,$$

ahol $\mathbf{q}$ az általános koordináták vektora, $\mathbf{M}$ a tömegmátrix, $\mathbf{C}$ a csillapítási mátrix, $\mathbf{K}$ a merevségi mátrix, $\mathbf{Q}^*$ pedig az általános erők vektora.

In [1]:
```python
import sympy as sp
from IPython.display import display, Math

sp.init_printing()
```

In [2]:
```python
## Függvények, szimbólumok definiálása

m1, m2, m3, k1, k2 = sp.symbols("m1, m2, m3, k1, k2", real=True)

# Készítsünk behelyettesítési listát az adatok alapján, SI-ben
adatok = [(m1, 2), (m2, 4), (m3, 5), (k1, 200), (k2, 500)]

# általános koordináták
t = sp.symbols("t", real=True, positive=True)
x1 = sp.Function('x1')(t)
x2 = sp.Function('x2')(t)
x3 = sp.Function('x3')(t)
```

In [3]:
```python
## A kinetikus energia
T = sp.Rational(1,2)*m1*x1.diff(t)**2 + sp.Rational(1,2)*m2*x2.diff(t)**2 +

display(Math('T = {}'.format(sp.latex(T))))

## Potenciális energia
U = sp.Rational(1,2)*k1*(x2-x1)**2 + sp.Rational(1,2)*k2*(x3-x2)**2

display(Math('U = {}'.format(sp.latex(U))))

## Disszipatív energia most nincs!
## Külső erő nincs!
```

$$T = \frac{m_1 \left(\frac{d}{dt} \operatorname{x_1}(t)\right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\frac{d}{dt} \operatorname{x_2}(t)\right)^2}{2} + \frac{m_3 \left(\frac{d}{dt} \operatorname{x_3}(t)\right)^2}{2}$$

$$U = \frac{k_1 \left(- \operatorname{x_1}(t) + \operatorname{x_2}(t)\right)^2}{2} + \frac{k_2 \left(- \operatorname{x_2}(t) + \operatorname{x_3}(t)\right)^2}{2}$$

In [4]:

```
### Mátrix együtthatók legenerálása
""" A mátrix együtthatók egyes elemeit a megfelelő általános koordináta sze
parciális deriválással lehet előállítani. Ehhez először célszerű egy listák
"""
DoF = [x1, x2, x3]

## Tömegmátrix (kinetikus energiából)
# nullmátrix létrehozása a tömegmátrixnak
M = sp.zeros(3,3)
# nullmátrix feltöltése a megfelelő parciális derivált értékekkel
for i in range(3):
    for j in range(3):
        M[i,j] = T.diff((DoF[i]).diff(t)).diff((DoF[j]).diff(t))

display(Math('M = {}'.format(sp.latex(M))))

## Merevségi mátrix (potenciális energiából)
# nullmátrix létrehozása a merevségi mátrixnak
K = sp.zeros(3,3)
# nullmátrix feltöltése a megfelelő parciális derivált értékekkel
for i in range(3):
    for j in range(3):
        K[i,j] = U.diff(DoF[i]).diff(DoF[j])

display(Math('K = {}'.format(sp.latex(K))))

# Külső erő és disszipatív energia most nincs, tehát az általános erővektor
```

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Így a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

2. Feladat

A mozgásegyenlet egy homogén lineáris közönséges differenciál egyenlet, melynek megoldásást exponenciális próbafüggvénnyel keressük

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{i\omega_n t},$$

ahol $\mathbf{A}$ a lengésképvektor. Visszahelyettesítve a próbafüggvényt és annak deriváltját a mozgásegyenletbe,

$$(-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{A}e^{i\omega_n t} = \mathbf{0}$$

adódik. A fenti egyenletnek csak akkor van nem triviális megoldása, ha a következő teljesül:

$$\det(-\omega_n^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0.$$

Ez az úgyenvezett frekvencia egyenlet, amiből a rendszer sajátkörfrekvenciái kaphatók. A lengéskép vektorokat úgy lehet megkapni, hogy a frekvencia egyenlet megolásait beírjuk az alábbi egyenletbe:

$$(-\omega_{ni}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{A}_i = 0.$$

Mivel ennek az egyenletnek végtelen megoldása van, ezért az $\mathbf{A}_i$ lengésképvektor egyik koordinátáját, szokás szerint az elsőt tetszőlegesen 1-nek választhatjuk.

In [5]:
```
## A frekvencia egynelet
ω_n2, ω_n = sp.symbols("ω_n2, ω_n")
# oldjuk meg az egyenletet ω_n^2-re, majd vonjunk gyököt
ω_n2_val = sp.solve((-ω_n2*M+K).subs(adatok).det())
ω_n = [(sp.sqrt(i)) for i in ω_n2_val]


display(Math('ω_{{n,1}} = {}\\ \\text{{rad/s}}'.format(sp.latex(ω_n[0]))))
display(Math('ω_{{n,2}} = {}\\ \\text{{rad/s}}'.format(sp.latex(ω_n[1]))))
display(Math('ω_{{n,3}} = {}\\ \\text{{rad/s}}'.format(sp.latex(ω_n[2].eval
```

$$\omega_{n,1} = 0\ \text{rad/s}$$

$$\omega_{n,2} = 10\ \text{rad/s}$$

$$\omega_{n,3} = 16.583\ \text{rad/s}$$

In [6]:

```
## lengéskép vektorok meghatározása
# Hozzunk létre a lengésképvektoroknak egy üres listát, majd töltsük fel 3
A = []
A2, A3 = sp.symbols("A2, A3")
for i in range(3):
    A.append(sp.Matrix([[1],[A2],[A3]]))

    # oldjuk meg az egyenletet a lengésképekre és írjuk be a megoldásokat a
    """A solver most a két ismeretlen változóra számított megoldást egy dic
    melyben az egyes elemekre a hozzá rendelt névvel, jelen esetben a szimb
    A[i][1] = sp.solve((((-ω_n[i]**2*M+K)*A[i]).subs(adatok)))[A2]
    A[i][2] = sp.solve((((-ω_n[i]**2*M+K)*A[i]).subs(adatok)))[A3]

display(Math('A_{{1}} = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(A[0]))))
display(Math('A_{{2}} = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(A[1].evalf(4)))))
display(Math('A_{{3}} = {}\\ \\text{{m}}'.format(sp.latex(A[2].evalf(4)))))
```

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ \text{m}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \\ -0.4 \end{bmatrix}\ \text{m}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.75 \\ 1.0 \end{bmatrix}\ \text{m}$$

Készítette:


```
Juhos-Kiss Álmos (Alkalmazott Mechanika Szakosztály)
Bodor Bálint (BME MM) kidolgozása alapján.

 Hibák, javaslatok:
 amsz.bme@gmail.com
 csuzdi02@gmail.com
 almosjuhoskiss@gmail.com

     2021.04.19
```