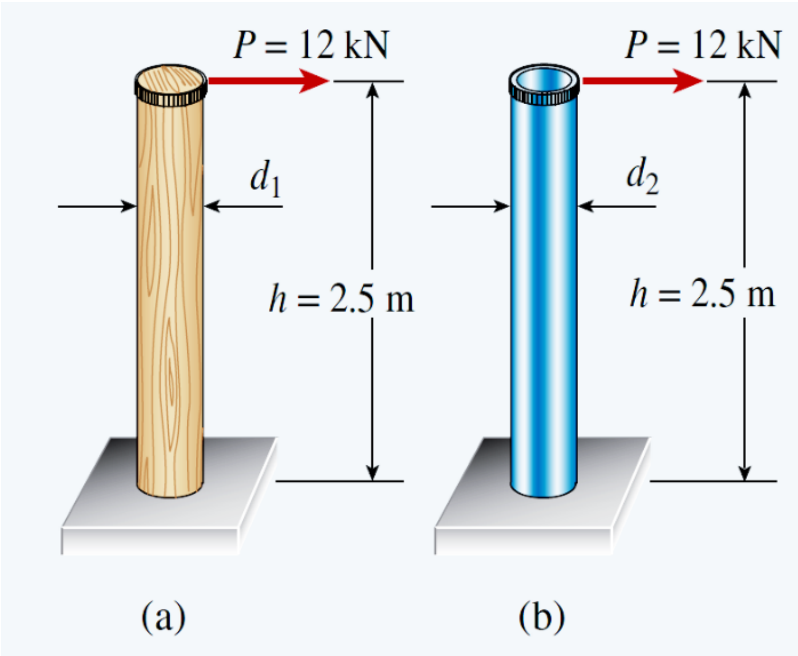
1 Példa 1.8

Egy függőleges oszlop terhelése a felső végén működő koncentrált erő az ábrán látható módon. Célunk meghatározni az oszlop anyagát és keresztmetszetét az alábbi módon:

a) Tömör kör keresztmetszetű fából kívánjuk elkészíteni

b) Alumínium csőből gyártjuk le úgy, hogy a cső falvastagsága a külső átmérő nyolcada.

A fára és az alumíniumra megengedhető feszültségek: $\sigma_{\text{meg,fa}} = 15\,\text{MPa}$, $\sigma_{\text{meg,alu}} = 50\,\text{MPa}$.



2 Megoldás

A megoldás során szimbolikus számításokat fogunk végezni (azaz a konkrét értékeket csak a végén helyettesítjük be, előtte a képleteket írjuk fel és rendezzük át). Ehhez szükségünk van a `sympy` modulra.

In [1]:

```
import sympy as sp #betöltünk a sympy modul összes függvényét, és sp-ként hivat
# ami függvényt a sympyből használunk azt sp.függvény formában hívjuk meg,
```

executed in 548ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Definiálnunk kell a később haszált szimbólumokat. Az átláthatóság kedvéért mi most a kód legelején definiáljuk őket.

In [2]:

```
P = sp.symbols("P")
h = sp.symbols("h")

# vagy egyszerre többet meg tudunk adni:
d1,d2,σ_meg=sp.symbols("d1,d2,σ_meg") # sigma: \sigma + TAB
# a görög szimbólumok a "LaTeX jelölésük" + TAB segítségével hívhatók meg
```

executed in 5ms, finished 09:30:08 2020-02-18

A feladat megad néhány konkrét értéket, amit később behelyettesítetünk. Ezeket az átláthatóság kedvéért itt, a feladat elején definiáluk.

In [3]:

```
P_adat=12 #kN
h_adat=2.5 #m
σ_meg_al_adat=50 #MPa
σ_meg_fa_adat=15 #MPa
```

executed in 18ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Hajlító nyomatéki függvény értéke az oszlop tövében: $M_{\text{hajl}} = hP$

In [4]:

```
M_hajl=h*P
```

executed in 14ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Maximuma: $h = 2.5\ \text{m}$-nél.

In [5]:

```
M_hajl_max=M_hajl.subs(P,P_adat).subs(h,h_adat)
M_hajl_max #megnézzük az eredményt, mértékegység: kNm
```

executed in 26ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[5]:

30.0

2.1 a) feladatrész

Minimális keresztmetszeti tényező:

$$K_{\text{min}} = \frac{M_{\text{hajl,max}}}{\sigma_{\text{meg}}}.$$

Mértékegységek egyeztetése: $M_{\text{hajl,max}}$ átváltása kNm-ről Nmm-re.

In [6]:

```
K_min=1e6*M_hajl_max/σ_meg
```

executed in 13ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Fa esetén:

$$K_{\text{min,fa}} = \frac{M_{\text{hajl,max}}}{\sigma_{\text{meg,fa}}}.$$

In [7]:

```
K_min_fa=K_min.subs(σ_meg,σ_meg_fa_adat)
K_min_fa #mm**3
```

executed in 19ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[7]:

2000000.0

Az összefüggés a keresztmetszeti tényező és az átmérő között:

$$K = \frac{I}{\frac{d_1}{2}} = \frac{\frac{d_1^4 \pi}{64}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{d_1^3 \pi}{32}$$

Ebből kifejezhető:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32 K_{\text{min,fa}}}{\pi}}$$

In [8]:

```
d1_eredmeny=sp.root(32*K_min_fa/sp.pi,3) #valami n-edik gyöke: sympy.root(valam
d1_eredmeny #mm
```

executed in 488ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[8]:

$$\frac{400.0}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Ezt az eredényt célszerű numerikusan kifejezni:

In [9]:

```
# Numerikus végeredmény 5 értékes jegyre az evalf(5) metódusával/tagfüggvényéve
d1_eredmeny.evalf(5)
```

executed in 5ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[9]:

273.11

2.2 b) feladatrész

A csőkeresztmetszet másodrendű nyomatéka:

$$I_{\text{cso}} = \frac{\pi}{64}\left(d_{\text{kulso}}^4 - d_{\text{belso}}^4\right)$$

Jelen esetben:

$$d_{\text{kulso}} = d_2, \qquad d_{\text{belso}} = d_{\text{kulso}} - 2\frac{1}{8}d_{\text{kulso}} = \frac{3}{4}d_2$$

.

Azaz:

$$I_{\text{cso}} = \frac{\pi}{64}\left(d_2^4 - \left(\frac{3}{4}d_2\right)^4\right)$$

In [10]:

```
# sympy.Rational(3,4): a 3/4-et racionális számként kezeljük,
# Ellenkező esetben a program a 3/4-et float-ként kezeli
I_cso=sp.pi/64*(d2**4-(sp.Rational(3,4)*d2)**4)
I_cso
```

executed in 26ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[10]:

$$\frac{175\pi d_2^4}{16384}$$

A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{\text{min,al}} = \frac{M_{\text{hajl,max}}}{\sigma_{\text{meg,al}}} = \frac{I_{\text{cso}}}{\frac{d_2}{2}}$$

In [11]:

```
K_min_al=K_min.subs(σ_meg,σ_meg_al_adat)
K_min_al #mm**3
```

executed in 14ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[11]:

$$600000.0$$

Az előbbiek alapján:

$$K_{\text{min,al}} = \frac{I_{\text{cso}}}{\frac{d_2}{2}} = \frac{175\pi d_2^3}{8192}$$

Ebből kifelezhető d_2 értéke:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{8192 K_{\text{min,al}}}{175\pi}}$$

In [12]:

```
d2_eredmeny = sp.root((8192*K_min_al)/(175*sp.pi),3)
d2_eredmeny #mm
```

executed in 16ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[12]:

$$\frac{303.972560509759}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Ez az eredmény elég rosszul olvasható, mert a `K_min_al` változó lebegőpontos (`float`) típusként van tárolva. Az olvashatóság kedvéért használjuk az `sympy.nsimplify` függvényt.

(Ennek elsősorban jóval hosszabb, komplexebb számításoknál van jelentőssége, de jó "rászokni" már egyszerű feladatoknál is. Ebben a segédletben az átláthatóság kedvéért csak így, a legvégén alkalmaztuk.)

In [13]:

```
d2_eredmeny = sp.root((8192*sp.nsimplify(K_min_al))/(175*sp.pi),3)
d2_eredmeny #mm
```

executed in 77ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[13]:

$$\frac{320\sqrt[3]{6}\cdot 7^{\frac{2}{3}}}{7\sqrt[3]{\pi}}$$

In [14]:

```
# Numerikus végeredmény 5 értékes jegyig
d2_eredmeny.evalf(5)
```

executed in 6ms, finished 09:30:08 2020-02-18

Out[14]:

$$207.55$$