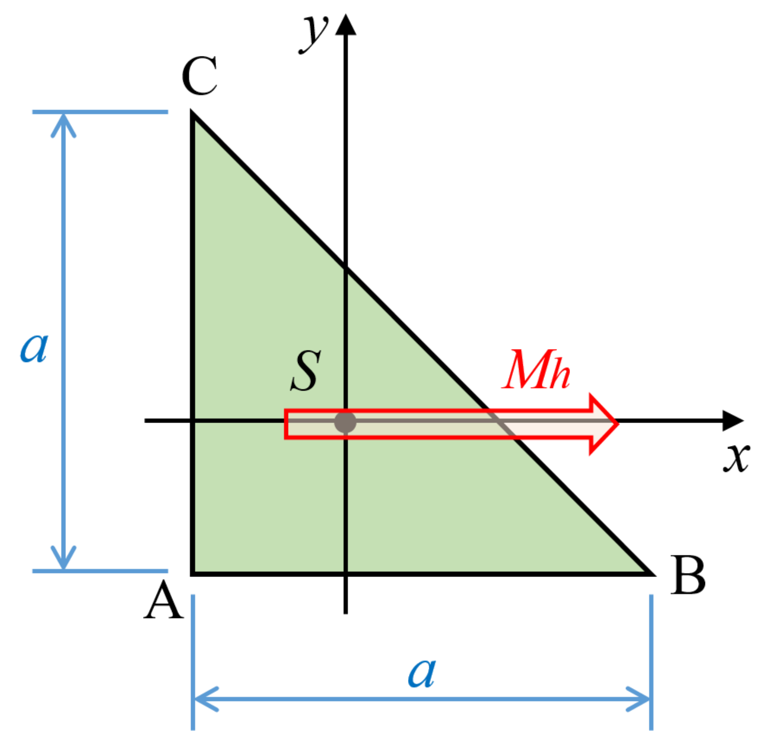
Példa 1.15

Egy tartó keresztmetszetének terhelése tiszta hajlítás. Az $M_\mathrm{h} = 3\,\mathrm{kNm}$ nagyságú hajlítónyomatéki igénybevétel vektorának irányát és értelmét az alábbi ábra mutatja:



A derékszögű háromszög alakú keresztmetszet mérete ismert: $a = 9\,\mathrm{cm}$.

Feladatok:

a) Határozzuk meg a keresztmetszet mentén a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlását!

b) Mekkora n biztonsági tényezővel felel meg hajlításra a tartó, ha $\sigma_\mathrm{meg} = 150\,\mathrm{MPa}$?

c) Határozzuk meg a zérustengely x-tengellyel bezárt β szögét!

Megoldás

A megoldás során szimbolikus számításokat fogunk végezni (azaz a konkrét értékeket csak a végén helyettesítjük be, előtte a képleteket írjuk fel és rendezzük át). Ehhez szükségünk van a `sympy` modulra.

In [1]:

```
import sympy as sp #betöltjük a sympy modult
sp.init_printing() # Eredmény szép megjelenítése (még a python "gyári" változói
 esetében is)
```

Definiáljuk a szükséges szimbólumokat:

In [2]:

```
a,M_h,σ_meg = sp.symbols("a,M_h,σ_meg")
```

A rendelkezésre álló adatok:

In [3]:

```
a_adat = 90 #mm
M_h_adat = 3 #kNm
σ_meg_adat = 150 #MPa
```

Hogy majd kényelmesebben helyettesíthessünk be, csinálunk belőlük egy listát:

In [4]:

```
osszesadat = [(a,a_adat),(M_h,M_h_adat),(σ_meg,σ_meg_adat)]
```

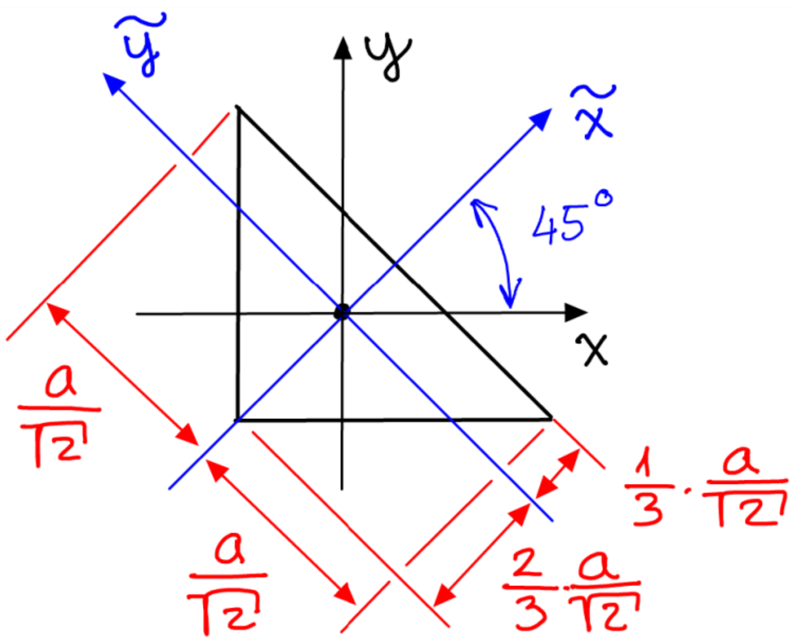
a) feladatrész

Korábbi levezetés/segédlet (https://www.mm.bme.hu/~kossa/segedletek/sziltan/haromszogfomasodrendu.pdf (https://www.mm.bme.hu/~kossa/segedletek/sziltan/haromszogfomasodrendu.pdf)) alapján:

$$I_1 = I_{\tilde{x}} = \frac{a^4}{24}$$

$$I_2 = I_{\tilde{y}} = \frac{a^4}{72}$$

$\tilde{x}$ és $\tilde{y}$ főtegelyek 45°-t zárnak be az x-y koordináta rendszerrel.



In [5]:

```
I1 = a**4/24
I1_eredmeny = I1.subs(osszesadat)
I1_eredmeny #mm^4
```

Out[5]:

2733750

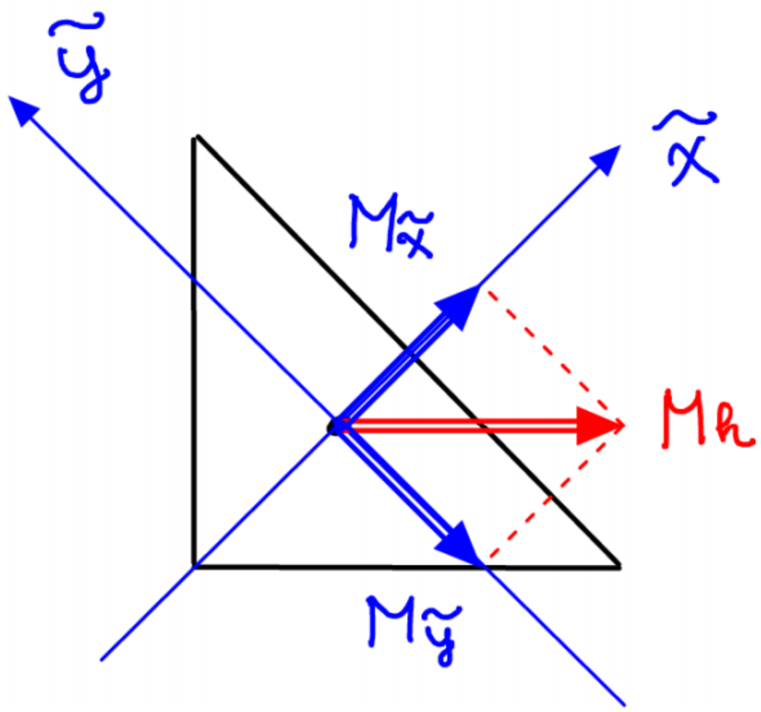
In [6]:

```
I2 = a**4/72
I2_eredmeny = I2.subs(osszesadat)
I2_eredmeny #mm^4
```

Out[6]:

911250

A terhelés felbontása a főtengelyek koordináta rendszerébe:



In [7]:

```
Mxhullam = 1000000*M_h/sp.sqrt(2) #átváltás Nmm-be; 1000000 = 1e6 -> 1*10^6
Myhullam = 1e6*M_h/sp.sqrt(2) #átváltás Nmm-be
Mxhullam.subs(osszesadat).evalf(5) #Nmm
```

Out[7]:

$2.1213 \cdot 10^6$

A főtengelyek körüli hajlításból származó feszültségek:

$$\sigma_z^{(\tilde{x})} = \frac{M_{\tilde{x}}}{I_{\tilde{x}}}\tilde{y},$$

$$\sigma_z^{(\tilde{y})} = \frac{M_{\tilde{y}}}{I_{\tilde{y}}}\tilde{x}.$$

Ehhez kelleni fog nekünk $\tilde{x}$ és $\tilde{y}$ szimbólumként.

In [8]:

```
xhullam,yhullam = sp.symbols(r"\tilde{x},\tilde{y}")
# \tilde{}: a hullám LaTeX kódja, hogy szépen írja ki.
# Ha LateX kódot írunk a nevekbe, használnunk kell a "" előtt az r karaktert.
# Ez mondja meg, hogy ez nyers (raw) szöveg, mert alapesetben pl a \t a tabuláto
rt jelenti, \n az új sort, stb.

σ_z_xhullam = Mxhullam/I1*yhullam #a terhelés kNm-ben, a hossz mm-ben
σ_z_xhullam.subs(osszesadat)
```

Out[8]:

$$\frac{400\sqrt{2}\tilde{y}}{729}$$

In [9]:

```
σ_z_yhullam = Myhullam/I2*xhullam #a terhelés kNm-ben, a hossz mm-ben
σ_z_yhullam.subs(osszesadat).evalf(5)
```

Out[9]:

$$2.3279\tilde{x}$$

Az ábrázoláshoz szükségünk van $\tilde{x}$ és $\tilde{y}$ minimum és maximum étékére. Ez a második ábra alapján:

$$\tilde{x}_{\min} = \frac{-2a}{3\sqrt{2}},$$

$$\tilde{x}_{\max} = \frac{a}{3\sqrt{2}},$$

$$\tilde{y}_{\min} = \frac{-a}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{y}_{\max} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

In [10]:

```
xhullam_min = sp.Rational(-2,3)*a/sp.sqrt(2)
# .Rational(szám1,szám2): 'szám1'/'szám2'-t szimbolikus törtté alakítja (egészek
et!).
xhullam_min = xhullam_min.subs(osszesadat).evalf() #behelyettesítünk, numerikusa
n kiszámoljuk
xhullam_max = sp.Rational(1,3)*a/sp.sqrt(2)
xhullam_max = xhullam_max.subs(osszesadat).evalf()

yhullam_min = -a/sp.sqrt(2)
yhullam_min = yhullam_min.subs(osszesadat).evalf()
yhullam_max = a/sp.sqrt(2)
yhullam_max = yhullam_max.subs(osszesadat).evalf()
```

Az ábrázoláshoz betöltjük a szükséges csomagokat:

In [11]:

```
import matplotlib.pyplot as plt #betöltjük a matplotlib modult, amivel plotolhat
unk
from numpy import linspace # Betöltjük a linspace függvényt a numpy modulból, am
ivel majd a plotoláshoz
                           # készítjük az 'x' értékeket.
```

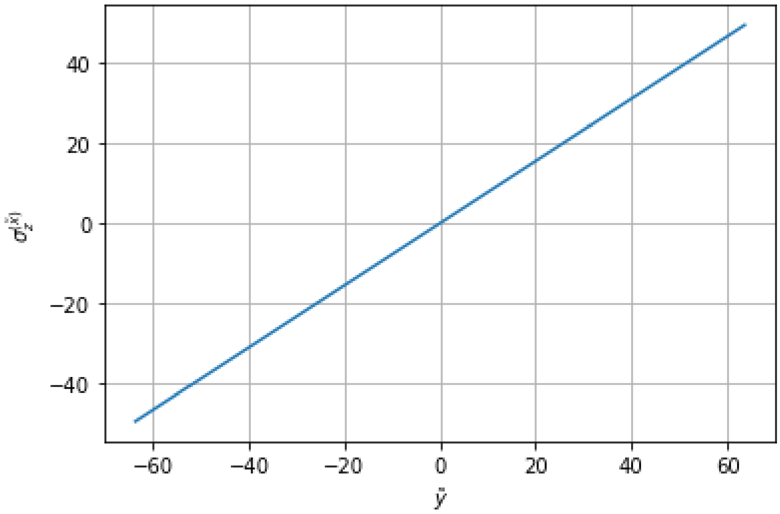
$\sigma_z^{(\tilde{x})}$ ábrázolása $\tilde{y}_{\min}$ és $\tilde{y}_{\max}$ között:

In [12]:

```
# A linspace függvény nem fogad el Sympy-féle lebegőpontos számot, konvertálnunk kell:
yhullam_min = float(yhullam_min) #most már sima lebegőpontos szám lesz, elfogadja a linspace
yhullam_max = float(yhullam_max)
yhullam_ertekek = linspace(yhullam_min,yhullam_max,101) #felveszünk 101 pontot 'yhullam' min. és max. értéke közt
σ_z_xhullam_ertekek = [σ_z_xhullam.subs(osszesadat).subs(yhullam,yhullam_ertek).evalf() \
                        for yhullam_ertek in yhullam_ertekek] # értékeket tartalmazó lista: "list comprehension"
                                                              # többsoros kód: '\'

# Két .subs egymás után: mivel az 'osszesadat' listában nincs benne 'yhullam', ezért kell még egy .subs, ahol
# azt is behelyettesítjük.

plt.plot(yhullam_ertekek,σ_z_xhullam_ertekek)
plt.grid()
plt.xlabel(r"$\tilde{y}$") #a feliratban LateX kód: r karakter előtte
plt.ylabel(r"$\sigma_z^{(\tilde{x})}$")
plt.show()
```

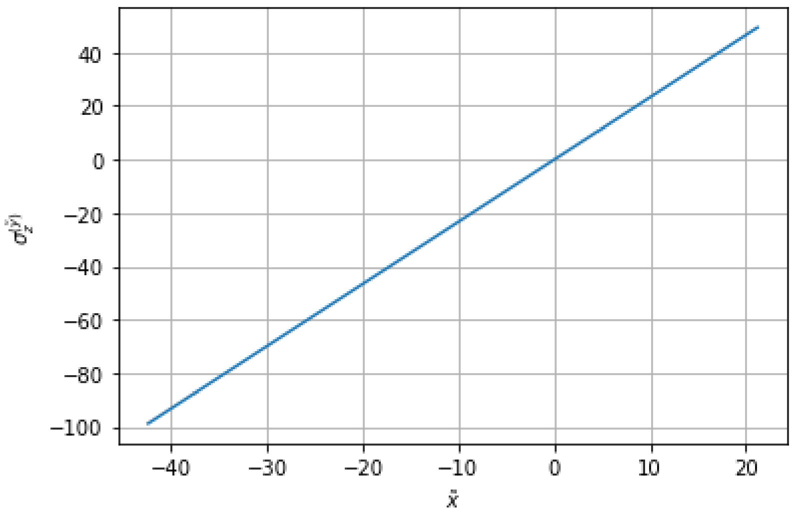


$\sigma_z^{(\tilde{y})}$ ábrázolása $\tilde{x}_{\min}$ és $\tilde{x}_{\max}$ között:

In [13]:

```
#a linspace függvény nem fogad el Sympy-féle lebegőpontos számot, konvertálnunk
 kell:
xhullam_min=float(xhullam_min) #most már sima lebegőpontos szám lesz, elfogadja
 a linspace
xhullam_max=float(xhullam_max)
xhullam_ertekek=linspace(xhullam_min,xhullam_max,101) #felveszünk 101 pontot 'xh
ullam' min. és max. értéke közt
σ_z_yhullam_ertekek = [σ_z_yhullam.subs(osszesadat).subs(xhullam,xhullam_ertek).
evalf() \
                        for xhullam_ertek in xhullam_ertekek] # többsoros kód:
 '\' segítségével

plt.plot(xhullam_ertekek,σ_z_yhullam_ertekek)
plt.grid()
plt.xlabel(r"$\tilde{x}$") #a feliratban LateX kód: r karakter előtte
plt.ylabel(r"$\sigma_z^{(\tilde{y})}$")
plt.show()
```



Megjegyzés: a [list comprehension (https://www.datacamp.com/community/tutorials/python-list-comprehension?utm_source=adwords_ppc&utm_campaignid=1455363063&utm_adgroupid=65083631748&utm_device=c&utm 486527602543&utm_loc_interest_ms=&utm_loc_physical_ms=9063082&gclid=EAIaIQobChMIrZvm-9Hi5wIVR7TtCh0n4w3nEAAYASAAEgJNk_D_BwE)](https://www.datacamp.com/community/tutorials/python-list-comprehension)-t először az 1.10-es feladat kidolgozásánál használtuk, így részletesebb magyarázat annál a feladatnál található.

b) feladatrész

A legnagyobb feszültség valamelyik sarokban várható.

A pont: $\tilde{x} = \frac{-2a}{3\sqrt{2}}, \tilde{y} = 0.$

B pont: $\tilde{x} = \frac{a}{3\sqrt{2}}, \tilde{y} = \frac{-a}{\sqrt{2}}.$

C pont: $\tilde{x} = \frac{a}{3\sqrt{2}}, \tilde{y} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$

A feszültségeket $\sigma_z^{(\tilde{x})}$ és $\sigma_z^{(\tilde{y})}$ összegeként számolhatjuk.

σ_A kiszámítása:

In [14]:

```
σ_A = σ_z_xhullam + σ_z_yhullam #feszültségek összege. 'σ_A'-ban 3 szimbolikus v
áltozó van, ezek helyére behelyettesítünk:
σ_A = σ_A.subs(xhullam,sp.Rational(-2,3)*a/sp.sqrt(2)).subs(yhullam,0) #Két .sub
s egymás után: egyszer az egyik
# változót helyettesítjük be, majd a másikat. Jelen esetben először 'xhullám' he
lyére írjuk be az adott
# kifejezést, ezt követően 'yhullám' helyére a 0-t.
σ_A = σ_A.subs(osszesadat) #a maradék adatot is beírjuk
σ_A.evalf(5) #MPa
```

Out[14]:

-98.765

σ_B kiszámítása:

In [15]:

```
σ_B = σ_z_xhullam + σ_z_yhullam #feszültségek összege
σ_B = σ_B.subs(xhullam,sp.Rational(1,3)*a/sp.sqrt(2)).subs(yhullam,-a/sp.sqrt(2
)) #koordináták behelyettesítése
σ_B = σ_B.subs(osszesadat) #adatok beírása
σ_B.evalf(5) #MPa
```

Out[15]:

0

σ_C kiszámítása:

In [16]:

```
σ_C = σ_z_xhullam + σ_z_yhullam #feszültségek összege
σ_C = σ_C.subs(xhullam,sp.Rational(1,3)*a/sp.sqrt(2)).subs(yhullam,a/sp.sqrt(2))
#koordináták behelyettesítése
σ_C = σ_C.subs(osszesadat) #adatok beírása
σ_C.evalf(5) #MPa
```

Out[16]:

$$98.765$$

A maximális feszültség értékét természetesen "látjuk", és így beírhatnánk manuálisan. Ha teljesen automatizálni szeretnénk a számítást, akkor meg kell oldanunk ennek a lépésnek is az automatizálását.

In [17]:

```
σ_max = max([sp.Abs(σ_A),sp.Abs(σ_B),sp.Abs(σ_C)]) # A  jelen esetben beírt 3 ér
ték közül a legnagyobbat
# adja vissza. A feszültségek miatt mi az abszolút értékre vagyunk kíváncsiak.
σ_max.evalf(5) #MPa
```

Out[17]:

$$98.765$$

A biztonsági tényező:

In [18]:

```
n = σ_meg/σ_max
n = n.subs(osszesadat)
n.evalf(5)
```

Out[18]:

$$1.5187$$

c) feladatrész

Zérustengely:

$$\sigma_z^{(\tilde{x})} + \sigma_z^{(\tilde{y})} = 0.$$

Ezt az egyenletet megoldjuk $\tilde{y}$-ra:

In [19]:

```
zerust_egyenl_megoldas = sp.solve(σ_z_xhullam + σ_z_yhullam,yhullam)
zerust_egyenl_megoldas
```

Out[19]:

$$[-3.0\tilde{x}]$$

Láthatjuk, hogy 1 megoldást kaptunk (1 elemű a kapott lista). Ezt "kicsomagoljuk":

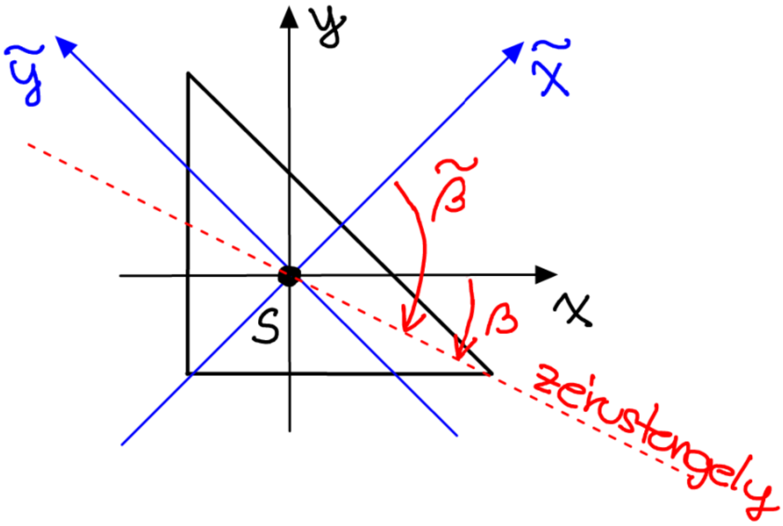
In [20]:

```
zerust_y = zerust_egyenl_megoldas[0]
zerust_y
```

Out[20]:

$-3.0\tilde{x}$

A keresett β szög:



Az előbb kapott egyenes egyenletében $\tilde{x}$ együtthatója az ábrán lévő $\tilde{\beta}$ szög tangensével egyezik meg. "Valami" együtthatóit a `coeff(valami)` parancsal kaphatjuk meg.

In [21]:

```
egyutthato = zerust_y.coeff(xhullam)
egyutthato
```

Out[21]:

-3.0

In [22]:

```
βhullam = sp.atan(egyutthato) #arkusz tangens
βhullam = sp.deg(βhullam) #átváltjuk fokba
βhullam.evalf(5) #fok
```

Out[22]:

-71.565

Az ábra alapján: $\beta = \tilde{\beta} + 45°$

In [23]:

```
β = βhullam + 45
β.evalf(5) #fok
```

Out[23]:

-26.565

+ Extra kíváncsiaknak

A `sympy` csomag `solve` függvénye több változós egyenletek esetében `dictionary` -ként kezeli. Ezt elő lehet hívni 1 változó esetére is.

A `dictionary` gyakorlatilag egy olyan lista, amelyet nem az elemeinek sorszáma hanem az elemeinek a címkéje (`key`) alapján lehet indexelni:

Például:

In [24]:

```
thisdict = {
  "brand": "Ford",
  "model": "Mustang",
  "year": 1964
} # a 'dictionary'-t kapcsos zárójelbe kell tenni ({...})

thisdict["brand"]
```

Out[24]:

```
'Ford'
```

Egyenletrendszer esetén a `solve` egy olyan `dictionary` -t hoz létre amiben a változó nevét (szimbólumát) használja címkének.

In [25]:

```
zerust_egyenl_megoldas = sp.solve(σ_z_xhullam + σ_z_yhullam,yhullam,dict = True)
# dict=True: nem csak magát eredményt adja vissza, hanem odaírja a kifejezett vá
ltozót is, ún. dictionaryt csinál.
zerust_egyenl_megoldas #megj: a LaTeX kód fordításához szükséges az `sp.init_pri
nting()` parancs a dokumentum elején
```

Out[25]:

$\left[\left\{ \tilde{y} : -3.0\tilde{x} \right\} \right]$

Láthatjuk, hogy 1 megoldást kaptunk (1 elemű a kapott lista). Ezt "kicsomagoljuk":

In [26]:

```
zerust_y = zerust_egyenl_megoldas[0][yhullam] # [0]: az első megoldást nézzük (l
ehetne több is);
                                              # [0][yhullam]: az első megoldáson
belül az 'yhullam' értékére
                                              # vagyunk kíváncsiak. Lehetne több
változós egyenletrendszer is,
                                              # változónként több megoldással.
zerust_y
```

Out[26]:

$-3.0\tilde{x}$