1 Példa 6.2

Egy $L = 1\,\mathrm{m}$ hosszú, $d = 10\,\mathrm{mm}$ átmérőjű egyenes rúd végein $F = 1\,\mathrm{kN}$ húzóerő, M_1 hajlítónyomaték és M_2 csavarónyomaték működik. Hogyan válasszuk meg az M_1/F ill. M_2/F arányt, ha azt akarjuk, hogy az egyes terhelések hatására azonos mértékű alakváltozási energia halmozódjon fel a rúdban? Mekkora lesz ebben az esetben (amikor mindhárom igénybevétel működik) a teljes alakváltozási energia?

Adatok: $E = 200\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 0,3$.

2 Megoldás

Szükségünk lesz a `sympy` modulra és a különböző mennyiségek szimbólmaira. A keresztmetszet területe és másodrendű nyomatéka az átmérőből számolható. A nyírási rugalmassági modulus a rugalmassági modulus és a Poisson tényező segítségével határozható meg.

In [1]:

```
import sympy as sp
sp.init_printing()

L, d, F, M1, M2, E, v, x = sp.symbols("L, d, F, M1, M2, E, v, x")
A = d**2*sp.pi/4
I = d**4*sp.pi/64
Ip = d**4*sp.pi/32
G = E/(2*(1+v))
```

Megadjuk az adatokat egy listában, hogy egyszerűen behelyettesíthessünk a későbbiekben. Térjünk át a mm-kN-MPa mértékegységekre!

In [2]:

```
L_adat = 1000 #mm
d_adat = 10 #mm
F_adat = 1 #kN
E_adat = 200000 #MPa
v_adat = 0.3 #1
adatok = [(L,L_adat),(d,d_adat),(F,F_adat),(E,E_adat),(v,v_adat)]
```

A `sympy` -ban az $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ határozott integrált `integrate(f, (x, a, b))` szintaktikával tudjuk megadni.

Normál igénybevétel esetén:

In [3]:

```
U_N = sp.integrate(F**2/(2*A*E),(x,0,L))
U_N
```

Out[3]:

$$\frac{2F^2L}{\pi E d^2}$$

2.0.0.1 Hajlítás esetén:

In [4]:

```
U_Mh = sp.integrate(M1**2/(2*I*E),(x,0,L))
U_Mh
```

Out[4]:

$$\frac{32LM_1^2}{\pi E d^4}$$

Azonos alakváltozási energia esetén: $U_N = U_{Mh}$. Ezt az egyenletet a `sympy` -ban 0-ra rendezve kell megadnunk. Az M_1/F arányt közvetlenül nem tudjuk megkapni, viszont kifejezhetjük M_1-t F-el.

In [5]:

```
egyenlet1 = U_N-U_Mh
megoldas1 = sp.solve(egyenlet1, M1) #az egyenlet megoldása M1 hajlítónyomatékra
megoldas1
```

Out[5]:

$$\left[-\frac{Fd}{4}, \ \frac{Fd}{4}\right]$$

Ebből kifejezhető:

$$\frac{M_1}{F} = \pm\frac{d}{4}.$$

A $\pm$ előjelnek nagy jelentősége nincsen, mivel az alakváltozási energiák számításakor mind F, mind M_1 négyzetre van emelve.

2.0.0.2 Csavarás esetén:

In [6]:

```
U_Mt = sp.integrate(M2**2/(2*Ip*G),(x,0,L))
U_Mt
```

Out[6]:

$$\frac{16LM_2^2\left(2\nu+2\right)}{\pi E d^4}$$

Az előzőekhez hasonlóan az $U_N = U_{Mt}$ egyenletet 0-ra rendezve kell megadnunk. Kifejezzük M_2-t F-el.

In [7]:

```
egyenlet2 = U_N-U_Mt
megoldas2 = sp.solve(egyenlet2, M2) #az egyenlet megoldása M2 csavarónyomatékra
megoldas2
```

Out[7]:

$$\left[-\frac{Fd\sqrt{\frac{1}{\nu+1}}}{4}, \frac{Fd\sqrt{\frac{1}{\nu+1}}}{4} \right]$$

Ebből kifejezhető:

$$\frac{M_2}{F} = \pm\frac{d\sqrt{\frac{1}{\nu+1}}}{4}.$$

A $\pm$ előjelnek nagy jelentősége itt sincsen, mivel az alakváltozási energiák számításakor mind F, mind M_2 négyzetre van emelve.

2.0.0.3 Teljes alakváltozási energia:

Mivel a $U_N = U_{Mh} = U_{Mt}$, ezért a teljles alakváltozási energia $3U_N$-ként is számítható. Az eredmény mértékegysége kNm (=kJ) lesz.

In [10]:

```
3*U_N.subs(adatok).evalf(5) #kJ
```

Out[10]:

$$9.5493 \cdot 10^{-5}$$