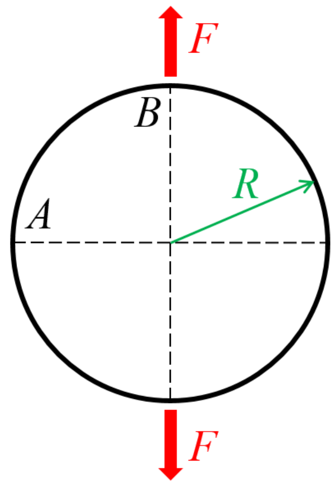
1 Példa 7.12

Határozzuk meg az alábbi keretnél a hajlítónyomatéki igénybevétel eloszlását! Mekkora a maximális (abszolút értelemben) hajlítónyomaték, és hol ébred? Hol lesz a hajlítónyomaték zérus értékű? A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.



2 Megoldás

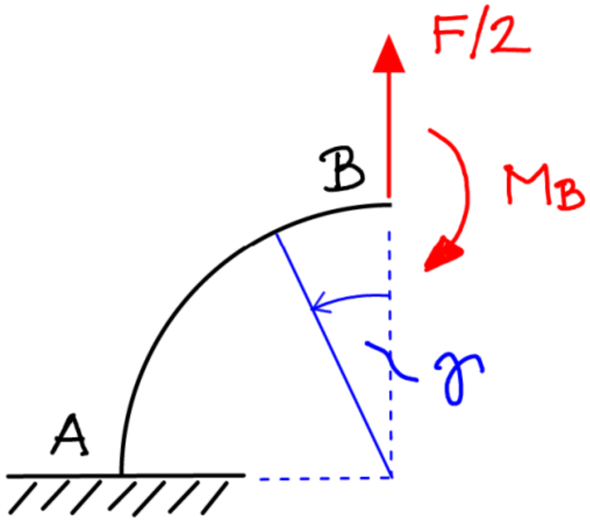
Betöltjük a `sympy` modult. Definiáljuk a szimbólumokat.

In [1]:

```
import sympy as sp
sp.init_printing()

F, M_B, R, γ, I, E, A = sp.symbols("F, M_B, R, γ, I, E, A") #γ: \gamma + tab
```

A feladat megoldását egyszerűbbé tehetjük a szimmetriák kihasználásával.



Az igénybevételi függvények:

$$N(\gamma) = \frac{F}{2}\sin\gamma,$$

$$M_h(\gamma) = -\frac{F}{2} R \sin\gamma + M_B.$$

"Vigyük be" $N(\gamma)$-t és $M_h(\gamma)$-t a programkódba, és ott számoljunk tovább, többek közt a parciális deriváltjaikat.

In [2]:

```
Nγ = F/2*sp.sin(γ)
Mhγ = -F/2*R*sp.sin(γ)+M_B

#parciális deriváltak:
parcderNγ = Nγ.diff(M_B)
display(parcderNγ)
```

$$0$$

In [3]:

```
parcderMhγ = Mhγ.diff(M_B)
display(parcderMhγ)
```

$$1$$

B-ben a szögelfordulás 0, így a következő egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\varphi_B &= 0, \\
U &= U_{M_h} + U_N, \\
\frac{\partial U}{\partial M_B} &= 0, \\
\frac{\partial U}{\partial M_B} &= \frac{\partial U_{M_h}}{\partial M_B} + \frac{\partial U_N}{\partial M_B}, \\
\frac{\partial U_{M_h}}{\partial M_B} &= \frac{1}{IE} \int_0^{\pi/2} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M_B} R \mathrm{d}\gamma, \\
\frac{\partial U_N}{\partial M_B} &= \frac{1}{AE} \int_0^{\pi/2} N \frac{\partial N}{\partial M_B} R \mathrm{d}\gamma.
\end{aligned}$$

Most írjuk be $\frac{\partial U_{M_h}}{\partial M_B}$-t és $\frac{\partial U_N}{\partial M_B}$-t.

In [4]:

```
parcderUMh = 1/E/I*sp.integrate(Mhγ*parcderMhγ*R,(γ,0,sp.pi/2))
display(parcderUMh)
parcderUN = 1/A/E*sp.integrate(Nγ*parcderNγ*R,(γ,0,sp.pi/2))
parcderUN #mivel N(γ) parciális deriváltja 0, az integrál is 0 lesz
```

$$\frac{-\frac{FR^2}{2} + \frac{\pi M_B R}{2}}{EI}$$

Out[4]:

$$0$$

Most már felírhatjuk a

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{\partial U_{M_h}}{\partial M_B} + \frac{\partial U_N}{\partial M_B} = 0$$

egyenletet is és megoldhatjuk M_B-re.

In [5]:

```
parcderU = parcderUMh+parcderUN
MBsol = sp.solve(parcderU,M_B)
MBsol = MBsol[0] #kiszedjük a megoldást az 1 elemű listából
MBsol
```

Out[5]:

$$\frac{FR}{\pi}$$

Ez alapján ábrázolhatjuk a hajlítónyomatéki függvényt. Ehhez először be kell helyettesítenünk az M_B-re kapott kifejezést a korábbi kifejezésbe.

In [6]:

```
Mhysubs = Mhy.subs(M_B,MBsol)
Mhysubs
```

Out[6]:

$$-\frac{FR\sin(\gamma)}{2} + \frac{FR}{\pi}$$

Betöltjük a `matplotlib` -et és a `linspace` -t az ábrázoláshoz.

In [7]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace
```

Láthatjuk, hogy a γ koordinátán kívül R és F is benne marad az igénybevételi függvény kifejezésében. Mivel plotolni csak konkrét számokkal tudunk, ezért ezeknek szükséges valamilyen önkényes (de fizikailag értelmes) értéket adnunk. Ez nem befolyásolja az ábrák jelleghelyességét. Itt most $R = 1\,\mathrm{m}$-t és $F = 1\,\mathrm{N}$-t választunk.

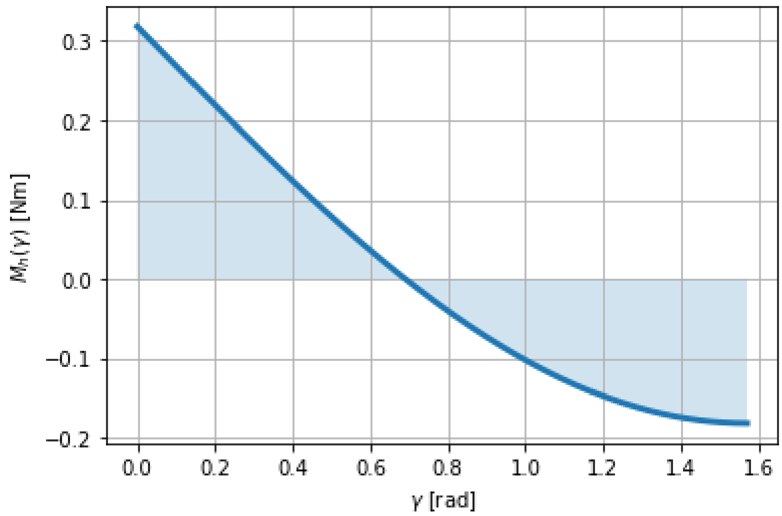
In [8]:

```
R_val = 1
F_val = 1

γs = linspace(0,float(sp.pi/2),201) #felveszünk 201 pontot a 0 - π/2 távolságon
Mh_konkret = Mhγsubs.subs([(R,R_val),(F,F_val)]) #behelyttesítjük R=1 és F=1-t
display(Mh_konkret)

Mhs = [float(Mh_konkret.subs(γ,γi)) for γi in γs] #kiszámoljuk V(x) értékeit az
                                                    #és egyből 'float'-tá alakítj
plt.plot(γs, Mhs, lw = 3) # Az Mh(γ) függvény képének létrehozása 3-as vonalvast
plt.fill_between(γs, Mhs, alpha=0.2) #Kiszínezi a függvény alatti területet
plt.xlabel("$\gamma$ [rad]") #x tengelyhez tartozó tengelyfelirat
plt.ylabel("$M_h(\gamma)$ [Nm]") #y tengelyhez tartozó tengelyfelirat
plt.grid() #rács
plt.show() #kirajzolás
```

$$-\frac{\sin(\gamma)}{2} + \frac{1}{\pi}$$



Az ábrán láthatjuk, hogy hajlító igénybevétel maximuma $\gamma = 0$-nál van, azaz a B pontban. Ahhoz, hogy megtaláljuk a hajlítónyomaték zérushelyét, használhatjuk a `solve` -ot.

In [9]:

```
γ0 = sp.solve(Mhγsubs,γ)
γ0 = γ0[0] #kiszedjük az eredményt a listából
γ0 = γ0*180/sp.pi #átváltás fokba
γ0.evalf(5) #fok
```

Out[9]:

$$140.46$$

Láthatjuk, hogy a `solve` által adott gyök kívül esik az általunk vizsgált tartományon. Kihasználva a szinusz azonosságait, megkaphatjuk a keresett megoldást.

In [10]:

```
γ0 = 180-γ0
γ0.evalf(5) #fok
```

Out[10]:

39.54