1 Példa 2.1

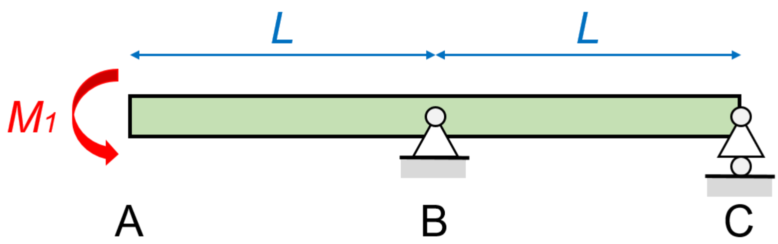
Az alábbi egyenes rúd terhelése az $\mathbf{A}$ keresztmetszetben működő $M_1 = 2\,\mathrm{Nm}$ nyomaték. A tartó hajlítómerevsége $150\,\mathrm{Nm}^2$, az $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BC}$ szakaszok hossza $L = 1\,\mathrm{m}$.

Feladatok:

a) Határozzuk meg a $\mathbf{BC}$ szakaszon a maximális lehajlás értékét és helyét;

b) Számítsuk ki az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ keresztmetszetekben a szögelfordulásokat és az $\mathbf{A}$ helyen a lehajlás értékét!

c) Mekkora d átmérőjű kör keresztmetszetű acélból ($E = 200\,\mathrm{GPa}$) készítsük a tartót ha azt szeretnék, hogy az $\mathbf{A}$ keresztmetszet lehajlása $10\,\mathrm{mm}$ legyen?



2 Megoldás

Szükségünk lesz a `sympy` modulra. Definiáljuk a szimbólumokat, az adatokat megadjuk és listába tesszük a könnyebb behelyettesítés miatt. A hajlítómerevséget IE-vel jelöljük.

In [1]:

```python
import sympy as sp
sp.init_printing()

M1, L, IE, E, x = sp.symbols('M1, L, IE, E, x')

M1_adat = 2 #Nm
L_adat = 1 #m
IE_adat = 150 #Nm^2
E_adat = 200e9 #Pa

adatok = [(M1,M1_adat),(L,L_adat),(IE,IE_adat),(E,E_adat)]

```

executed in 1.78s, finished 17:47:35 2020-04-16

2.0.0.1 A reakcióerők kiszámítása:

Írjuk fel a $\mathbf{C}$ pontra a nyomaték egyensúly egyenletét, majd a rúdra a függőleges (y) erők egyensúlyát:

$$M_1 + LF_{By} = 0,$$
$$F_{By} + F_{Cy} = 0.$$

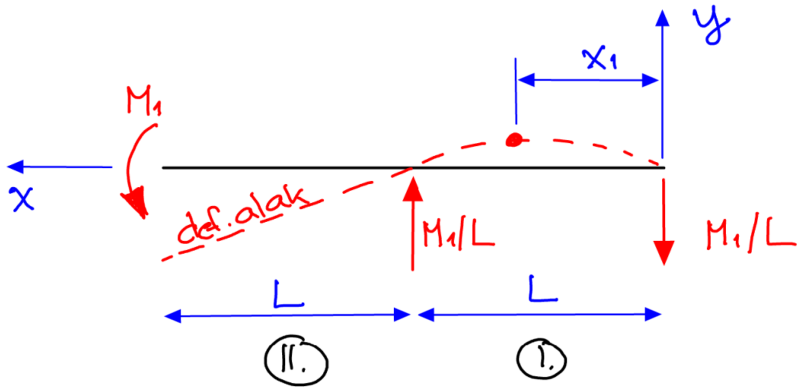
In [2]:

```
FBy = M1/L
FCy = -FBy
```

executed in 6ms, finished 17:47:35 2020-04-16

2.0.0.2 Differenciálegyenlet

Válasszunk egy koordináta rendszert a differenciálegyenlet felírásához!



A hajlító nyomatéki függvény két szakaszból áll:

$$M_{h1}(x) = \frac{M_1}{L}x, \text{ ha } 0 \leq \text{x} < \text{L},$$

$$M_{h2}(x) = M_1, \text{ ha L} \leq \text{x} \leq 2\text{L}.$$

In [3]:

```
Mh1 = M1/L*x
Mh2 = M1
```

executed in 17ms, finished 17:47:35 2020-04-16

I. szakasz

A rugalmas szál differenciálegyenlete az I. szakaszon:

$$-IEw_1'' = M_{h1}.$$

A `sympy` számára w-t nem adhatjuk meg egyszerű szimbólumként, ugyanis a szimbólumok (ismeretlen) konkrét értékeket jelölnek (ezeket nem tudjuk rendesen deriválni). Függvényeket a következő szintaktikával kell definiálni: `fuggveny=sp.Function('fuggveny')(valtozo)` .

Függvényeket `.diff(valtozo, N)` szintaktikával deriválhatunk `valtozo` szerint `N` -szer. (Az `N=1` -t nem kell kiírni.)

A fenti egyenletet 0-ra rendezve adjuk meg a programban.

In [4]:

```
w1 = sp.Function('w1')(x) #megadjuk w1-t, mint x ismeretlen függvényét

diffegy1 = -Mh1-IE*w1.diff(x,2)
diffegy1
```

executed in 839ms, finished 17:47:36 2020-04-16

Out[4]:

$$-IE\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}_1(x) - \frac{M_1 x}{L}$$

Mivel ez egy nagyon egyszerű differenciálegyenlet, ezért a $w_1(x)$-et megkaphatjuk az $-IEw_1'' = M_{h1}$ egyenlet kétszeri integrálásával.

Megjegyzés: akár a két integrálást manuálisan is megcsinálhatjuk, de ekkor az integrálási konstansokat nem adja hozzá a `sympy`, ezt nekünk kell megtenni:

In [5]:

```
temp=sp.integrate(-Mh1/IE,x) + sp.Symbol('C_1')
temp
```

executed in 813ms, finished 17:47:37 2020-04-16

Out[5]:

$$C_1 - \frac{M_1 x^2}{2IEL}$$

In [6]:

```
sp.integrate(temp,x) + sp.Symbol('C_2')
```

executed in 840ms, finished 17:47:38 2020-04-16

Out[6]:

$$C_1 x + C_2 - \frac{M_1 x^3}{6IEL}$$

Ha szükségünk van a C_n integrálási konstansokra akkor érdemes a `dsolve` -ot használni, mert az automatikusan kezeli őket.

A differenciálegyenleteket a `dsolve(diffegyenlet,fuggveny)` utasítással tudjuk megoldani.

In [7]:

```
dsolu1 = sp.dsolve(diffegy1,w1)
dsolu1
```

executed in 2.30s, finished 17:47:40 2020-04-16

Out[7]:

$$\mathrm{w}_1(x) = C_1 + C_2 x - \frac{M_1 x^3}{6IEL}$$

Ne ijedjünk meg, ha a `dsolve` C_n-es tagokat a megszokottól eltérő számozással kapjuk meg. A kapott megoldást kezelhetnénk algebrai egyenletként és a peremfeltételeket beírva megkaphatnánk C_1-t és C_2-t.

Ennél egyszerűbb, ha a `dsolve` -nak adjuk meg a peremfeltételeket.

A szintaktikát egy pédával mutatjuk be. Az $f(x)$ függvényhez akarjuk megadni az $f(x_0) = y_0$ és $f''(x_1) = y_1$ peremfeltételeket. Ekkor a peremfeltételeket leíró struktúra: `{f.subs(x,x0): y0, f(x).diff(x,2).subs(x, x1): y2}` . Ezt a `dsolve` -nak a `dsolve(diffegenlet,fuggveny, ics={...})` szintaktikával adhatjuk meg, ahol ics (initial conditions) a kezdeti értékek, és peremfeltételek (a különbségről majd matekből, most peremfeltétel van).

$w_1(x)$-nek a következő peremfeltételeket kell teljesítenie:

$$w_1(0) = 0,$$
$$w_1(L) = 0.$$

In [8]:

```
peremf1 = {w1.subs(x,0):0,w1.subs(x,L):0}
pfsolu1 = sp.dsolve(diffegy1,w1,ics=peremf1)
pfsolu1
```

executed in 2.35s, finished 17:47:43 2020-04-16

Out[8]:

$$\mathrm{w}_1(x) = \frac{LM_1x}{6IE} - \frac{M_1x^3}{6IEL}$$

A maximális elmozduláshoz ennek a függvénynek a szélsőértékére van szükségünk . Ezt ott találhatjuk, ahol a deriváltja (a szögelfordulási függvény - $\varphi_1(x)$ - értéke) zérus.

A `pfsolu1` nem egy egyszerű kifejezés, hanem egy `sympy Equation` (egyenlet), aminek bal oldala `w1(x)` , a jobb oldala a számunkra fontos kifejezés. A jobb oldalt az `.rhs` (right hand side) utasítással kérhetjük ki. (Hasonlóan az `.lhs` utasítás a bal oldalt adja.)

In [9]:

```
jobboldal1 = pfsolu1.rhs
ϕ1 = jobboldal1.diff(x) #\varphi + tab
ϕ1
```

executed in 821ms, finished 17:47:43 2020-04-16

Out[9]:

$$\frac{LM_1}{6IE} - \frac{M_1x^2}{2IEL}$$

Ennek az egyenletnek keressük a zérushelyét. Ez algebrai egyenlet, amit a `solve` paranccsal oldhatunk meg.

In [10]:

```
zerushely = sp.solve(ϕ1,x)
zerushely
```

executed in 809ms, finished 17:47:44 2020-04-16

Out[10]:

$$\left[-\frac{\sqrt{3}L}{3}, \ \frac{\sqrt{3}L}{3}\right]$$

Nekünk csak a pozitív gyök kell (negatív x irányban nincs rúd...). Így megkapjuk a maximális elmozdulás helyét, amit célszerű numerikusan kiértékelnünk.

In [11]:

```
valodigyok = zerushely[1]
print("Maximális elmozdulás helye C-től számítva [m]:")
valodigyok.subs(adatok).evalf(5) #behelyettesítés, kiértékelés 5 értékesjegyre
```

executed in 804ms, finished 17:47:45 2020-04-16

```
Maximális elmozdulás helye C-től számítva [m]:
```

Out[11]:

$$0.57735$$

Ezt behelyettesítve $w_1(x)$-be kapjuk a maximális elmozdulás értékét.

In [12]:

```
maxelmozd = jobboldal1.subs(x,valodigyok).subs(adatok)
print("Maximális elmozdulás mértéke [m]:")
maxelmozd.evalf(5)
```

executed in 825ms, finished 17:47:46 2020-04-16

```
Maximális elmozdulás mértéke [m]:
```

Out[12]:

$$0.00085533$$

Ki tudjuk számítani a szögelfordulásokat a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{B}$ pontokban, ha $x = 0$-t és $x = L$-t helyettesítünk $\varphi_1(x)$-be. A numerikus értékeket az adatok behelyettesítése után kaphatjuk meg. Ezeket célszerű átváltanunk radiánról fokba (*180/pi).

In [13]:

```
ϕC = ϕ1.subs(x,0)
ϕB = ϕ1.subs(x,L)

print("Elfordulás a C pontban [deg]:")
display(ϕC.subs(adatok)*180/sp.pi.evalf(5))

print("Elfordulás a B pontban [deg]:")
ϕB.subs(adatok)*180/sp.pi.evalf(5)
```

executed in 1.45s, finished 17:47:47 2020-04-16

```
Elfordulás a C pontban [deg]:
```

$$0.12732$$

```
Elfordulás a B pontban [deg]:
```

Out[13]:

$$-0.25465$$

II. szakasz

A rugalmas szál differenciálegyenlete a II. szakaszon:

$$-IEw_2'' = M_{h2}.$$

Az egyenletet az I. szakaszhoz hasonlóan adhatjuk meg.

In [14]:

```
w2 = sp.Function('w2')(x) #megadjuk w2-t, mint x ismeretlen függvényét

diffegy2 = -Mh2-IE*w2.diff(x,2)
diffegy2
```

executed in 733ms, finished 17:47:48 2020-04-16

Out[14]:

$$-IE\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}_2(x) - M_1$$

Az illesztési feltétel:

$$w_1'(L) = w_2'(L).$$

Peremfeltétel:

$$w_2(L) = 0.$$

$w_1'(L)$-t már kiszámítottuk, mint $\varphi_1(L)$.

In [15]:

```
peremf2 = {w2.subs(x,L):0,w2.diff(x).subs(x,L):ϕB}
pfsolu2 = sp.dsolve(diffegy2,w2,ics=peremf2)
pfsolu2.simplify() #egyszerűsítve jelenítjük meg a megoldást, hogy olvashatóbb
```

executed in 2.72s, finished 17:47:51 2020-04-16

Out[15]:

$$\mathrm{w}_2(x) = \frac{M_1\left(-L^2 + x(4L - 3x)\right)}{6IE}$$

Az elfordulási függvényt ($\varphi_2(x)$) itt is az előbbi megoldás jobb oldalának deriváltjaként kaphatjuk.

In [16]:

```
jobboldal2 = pfsolu2.rhs
ϕ2 = jobboldal2.diff(x) #\varphi + tab
ϕ2
```

executed in 794ms, finished 17:47:52 2020-04-16

Out[16]:

$$-\frac{M_1 x}{2IE} + \frac{\frac{2LM_1}{3} - \frac{M_1 x}{2}}{IE}$$

$w_2(x)$-be és $\varphi_2(x)$-be $x = 2L$-t helyettesítve megkaphatjuk az elmozdulást és elfordulást az $\mathbf{A}$ pontban. A numerikus értékeket az adatok behelyettesítése után kaphatjuk meg. Az elfordulást célszerű átváltanunk radiánról fokba (*180/pi).

In [17]:

```
wA = jobboldal2.subs(x,2*L)
ϕA = ϕ2.subs(x,2*L)

print("Elmozdulás az A pontban [m]:")
display(wA.subs(adatok).evalf(5))

print("Elfordulás az A pontban [deg]:")
ϕA.subs(adatok)*180/sp.pi.evalf(5)
```

executed in 1.72s, finished 17:47:53 2020-04-16

```
Elmozdulás az A pontban [m]:
```

$$-0.011111$$

```
Elfordulás az A pontban [deg]:
```

Out[17]:

$$-1.0186$$

2.0.0.3 Ábrázolás

Szükségünk lesz a `matplotlib` modulra, a `linspace` és `rad2deg` (radiánt fokba váltó) függvényre.

In [18]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, rad2deg
```

executed in 826ms, finished 17:47:54 2020-04-16

A kapott $w_1(x)$ és $w_2(x)$ függvények szakaszonként adják a teljes rúdon értelmezett lehajlásfüggvényt. A `Piecewise` segítségével a kódban is megtehetjük ezt - így egyszerre tudunk a rúd teljes hosszán behelyettesíteni.

In [19]:

```
w = sp.Piecewise((jobboldal1,x<L),(jobboldal2,x<2*L))
w = w.subs(adatok)
w
```

executed in 786ms, finished 17:47:55 2020-04-16

Out[19]:

$$\begin{cases} -\frac{x^3}{450} + \frac{x}{450} & \text{for}\: x < 1 \\ \frac{x\left(\frac{4}{3}-x\right)}{150} - \frac{1}{450} & \text{for}\: x < 2 \end{cases}$$

Hozzuk létre az x adatsort és végezzük el a behelyettesítést!

In [20]:

```
xdata = linspace(2*L_adat,0,201)
wdata = [w.subs(x,xc) for xc in xdata] #a Piecewise használata nélkül csak külö
                                       #létrehozni ezeket az adatsorokat w1-re
```

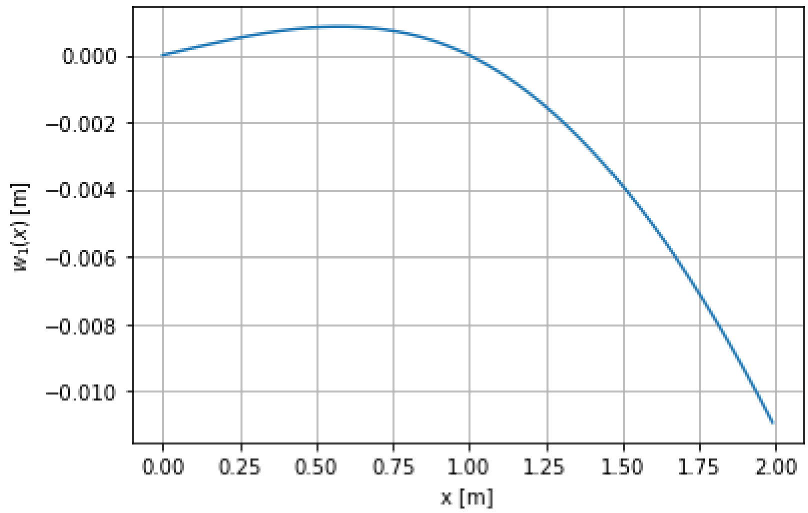
executed in 608ms, finished 17:47:56 2020-04-16

Mivel az x tengelyünk balra mutat, az ábrát "fordítva" kapjuk meg a feladatban megadotthoz képest. Ez matematikailag helyes, de zavaró lehet.

In [21]:

```
plt.plot(xdata,wdata)
plt.grid()
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel(r"$w_1(x) \,\rm{[m]}$")
plt.show()
```

executed in 1.46s, finished 17:47:57 2020-04-16



Ha az ábrázolás során az x tengelyt $\mathbf{A}$-ból szeretnénk indítani, hogy jobbra mutasson, akkor meg kell fordítanunk az `xdata` vagy `wdata` válozóban az elemek sorrendjét. Ezt legtömörebben egy indexelési "trükkel" tehetjük meg: `[::-1]` .

A `[::-1]` magyarázata érdeklődőknek:

Legyen `l=list(range(11))` azaz `l==[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]` .

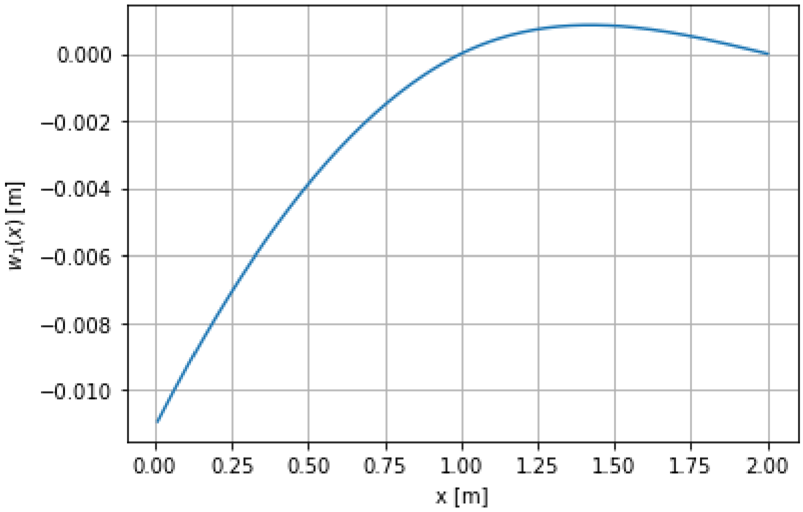
`Python` -ban egy listát indexelhetünk a következő módon: `l[kezdet:vege:lepes]` . Ez a szintaktika a `kezdet` -től számítva `vege-1` -ig számol, `lepes` lépésközzel. A `l[0:10]` a `[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]` -t adja (a vége-index nincs benne!). Az `l[0:10:2]` a `[0, 2, 4, 6, 8]` -t adja, azaz az előbbi eredménynek minden második elemét.

Ha negatív lépésközt adunk meg, akkor visszafélé megyünk és az első két index értelme felcserélődik. Azaz `l[10:0:-1]` -el kapjuk a listát visszafelé: `[10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]` . Ha kihagyjuk az első két indexet (a kettőspontot ekkor is ki kell tenni!), akkor a Python automatikusan az első illetve utolsó indexet írja be a kihagyott index helyére. Így adódik a `[::-1]` írásmód.

In [22]:

```
plt.plot(xdata[::-1],wdata)
plt.grid()
plt.xlabel("x [m]")
plt.ylabel(r"$w_1(x) \,\rm{[m]}$")
plt.show()
```

executed in 482ms, finished 17:47:57 2020-04-16



2.0.0.4 Az $\mathbf{A}$ pont lehajlásának beállítása

Írjuk ki a $w_2(x)$ függvény értékét az $\mathbf{A}$ helyen! Ezt a feladat korábbi részében a `wA` változóba mentettük el.

In [23]:

```
wA
```

executed in 786ms, finished 17:47:58 2020-04-16

Out[23]:

$$-\frac{5L^2M_1}{6IE}$$

A d átmérő a hajlítómerevséget (IE) fogja befolyásolni, azaz ki kell fejeznünk IE-t a fenti összefüggésből. A kívánt lehajlás értéke $w_A = -10\,\mathrm{mm}$. Ezt a kódban méterben kell megadnunk, mert korábban is méterben számoltunk.

IE kifejezéséhez a $w_2(A) = w_A$ egyenletet oldjuk meg IE-re. A megoldást egy egy elemű listában kapjuk.

In [24]:

```
wA_kivant = sp.Rational(-1,100) #m (rational: közönséges törtet készít)
IE_sol = sp.solve(wA-wA_kivant,IE)
display(IE_sol) #IE_sol egy 1 elemű lista
IE_kif = IE_sol[0] #kiszedjük a lista elemét egy új változóba
IE_kif
```

executed in 1.62s, finished 17:48:00 2020-04-16

$$\left[\frac{250L^2M_1}{3}\right]$$

Out[24]:

$$\frac{250L^2M_1}{3}$$

Ebbe a kifejezésbe behelyettesíve megkapjuk a kívánt IE értéket.

In [25]:

```
IE_kif.subs(adatok) #Nm^2
```

executed in 812ms, finished 17:48:01 2020-04-16

Out[25]:

$$\frac{500}{3}$$

Tudjuk, hogy:

$$IE = I \cdot E,$$

valamint kör keresztmetszetnél:

$$I = \frac{d^4\pi}{64}.$$

In [26]:

```
I_kivant = IE_kif/E
I_kivant.subs(adatok).evalf(5)
```

executed in 890ms, finished 17:48:02 2020-04-16

Out[26]:

$$8.3333 \cdot 10^{-10}$$

A fentebbi összefüggésből d kifejezhető:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64I}{\pi}}$$

In [27]:

```
d = sp.root(64*I_kivant/sp.pi,4)#I_kivant
print("A szükséges átmérő [m]:")
d.subs(adatok).evalf(5) #m
```

executed in 933ms, finished 17:48:03 2020-04-16

```
A szükséges átmérő [m]:
```

Out[27]:

0.011415