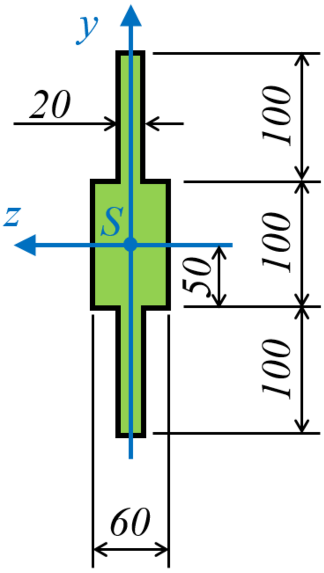
1 Példa 1.24

Az ábrán látható összetett keresztmetszet terhelése $20\,\mathrm{kN}$ nagyságú nyíró igénybevétel. Határozza meg a keresztmetszet mentén a nyírásból adódó csúsztatófeszültségek eloszlását megadó $\tau(y)$ függvényt és annak maximumát!



2 Megoldás

A megoldás során szükségünk van a `sympy` modulra, valamint az `y` szimbólumra.

In [1]:

```
import sympy as sp
sp.init_printing() # ezzel a beállítással szépen tudjuk kiíratni a 'gyári' Pyth
y=sp.symbols("y")
```

executed in 883ms, finished 13:46:53 2020-03-05

Megadjuk a később felhasznált adatokat. Jelöljük a-val a keresztmetszet z irányú méretét a végeken (az ábrán: $20\,\mathrm{mm}$), illetve b-vel az y irányú szélső méretet (az ábrán: $100\,\mathrm{mm}$).

In [2]:

```
V=20  #kN
a=20  #mm
b=100 #mm
```

executed in 3ms, finished 13:46:53 2020-03-05

A keresztmetszet: 1 db $a \times 3b$ téglalap és 2 db $a \times b$ téglalap. Ez alapján az I_z másodrendű nyomaték:

In [3]:

```
Iz=a*(3*b)**3/12+2*a*b**3/12
Iz #mm**4
```

executed in 608ms, finished 13:46:54 2020-03-05

Out[3]:

$$48333333.333333336$$

Mivel a keresztmetszet szimmetrikus a z tengelyre, elég csak a $y \geq 0$ résszel számolnunk. A "vékonyabb" részt jelöljük I.-vel ($50\,\mathrm{mm} < \mathrm{y} \leq 150\,\mathrm{mm}$), a "vastagabbat" II.-kal ($0\,\mathrm{mm} \leq \mathrm{y} \leq 50\,\mathrm{mm}$).

2.1 I. rész

A keresztmetszet szélessége:

$$a_I(y) = 20\,\mathrm{mm}.$$

Ez alapján az $S_I(y)$ statikai nyomaték a következő módon számolható:

In [4]:

```
S_I=20*(150-y)*(150+y)/2
S_I=S_I.simplify() #egyszerűsítjük a kapott kifejezést
S_I #mm**3
```

executed in 542ms, finished 13:46:54 2020-03-05

Out[4]:

$$225000 - 10y^2$$

Ebből a nyírásból származó csúszatófeszültség:

$$\tau_I(y) = \frac{V S_I(y)}{I_z a_I(y)}.$$

In [5]:

```
τ_I=1000*V*S_I/Iz/a # a terhelés kN-ban van megadva, ezt átváltjuk N-ba
τ_I.evalf(5) #MPa
```

executed in 525ms, finished 13:46:55 2020-03-05

Out[5]:

$$4.6552 - 0.0002069y^2$$

2.2 II. rész

A keresztmetszet szélessége:

$$a_{II}(y) = 60\,\mathrm{mm}.$$

Ez alapján az $S_{II}(y)$ statikai nyomaték a következő módon számolható:

In [6]:

```
S_II=20*100*100+60*(50-y)*(50+y)/2
S_II=S_II.simplify()
S_II
```

executed in 572ms, finished 13:46:55 2020-03-05

Out[6]:

$$275000 - 30y^2$$

In [7]:

```
τ_II=1000*V*S_II/Iz/(3*a) # a terhelés kN-ban van megadva, ezt átváltjuk N-ba
τ_II.evalf(5) #MPa
```

executed in 493ms, finished 13:46:56 2020-03-05

Out[7]:

$$1.8966 - 0.0002069y^2$$

2.3 Ábrázolás

A teljes feszültségeloszlást a `Piecewise` függvény segítségével adhatjuk meg. Ha $0\,\mathrm{mm} \le \mathrm{y} \le 50\,\mathrm{mm}$, akkor $\tau(y) = \tau_{II}(y)$. Ha $50\,\mathrm{mm} < \mathrm{y} \le 150\,\mathrm{mm}$, akkor $\tau(y) = \tau_I(y)$.

In [8]:

```
τ=sp.Piecewise((τ_II, y<=50),(τ_I, y<=150))
τ.evalf(5)
```

executed in 506ms, finished 13:46:56 2020-03-05

Out[8]:

$$\begin{cases} 1.8966 - 0.0002069y^2 & \text{for}\ y \le 50 \\ 4.6552 - 0.0002069y^2 & \text{for}\ y \le 150 \end{cases}$$

Láthatjuk, hogy a `Piecewise` szintaktikája matemetikailag nem tejesen korrekt, hiszen ami kielégíti az $y \le 50$ feltételt, az az $y \le 150$ feltételt is teljesíti. Viszont a program a feltételeket sorrendben értékeli ki: ha kap egy y értéket, amely az első ($y \le 50$) feltételt teljesíti, akkor nem vizsgálja meg a többi feltételt, hanem a függvény értéke az első teljesített feltételnek megfelelő lesz. (A teljesen korrekt feltételeket - pl: $50 < y \le 150$ - nem tudjuk megadni a `Piecewise` -nak.)

Az ábrázoláshoz szükségünk van a `matplotlib` modulra a rajzoláshoz és `numpy` modulból a `linspace` függvényre, amivel egyszerűen tudunk egy intervallumon egyforma távolságra lévő értékeket generálni.

In [9]:

```
import matplotlib.pyplot as plt # Matplotlib könyvtárból a PyPlot alkönyvtár
from numpy import linspace
```

executed in 471ms, finished 13:46:57 2020-03-05

Előállítjuk az y értékeket, ahol a $\tau(y)$ függvényt majd kiértékeljük:

In [10]:

```
y_ertekek=linspace(0,150,501) #501 értéket hozunk létre egynletesen 0 és 150 kö
```

executed in 3ms, finished 13:46:57 2020-03-05

Kiértékeljük a $\tau(y)$ függvényt ezeken a helyeken:

In [11]:

```
#készítünk egy listát úgy, hogy minden elemét úgy állítjuk elő, hogy behelyette
#a soron következő 'y' értéket a 'tau' függvénybe, majd 5 értékesjegyre kiérték
τ_ertekek=[τ.subs(y,y_ertek).evalf(5) for y_ertek in y_ertekek]
```

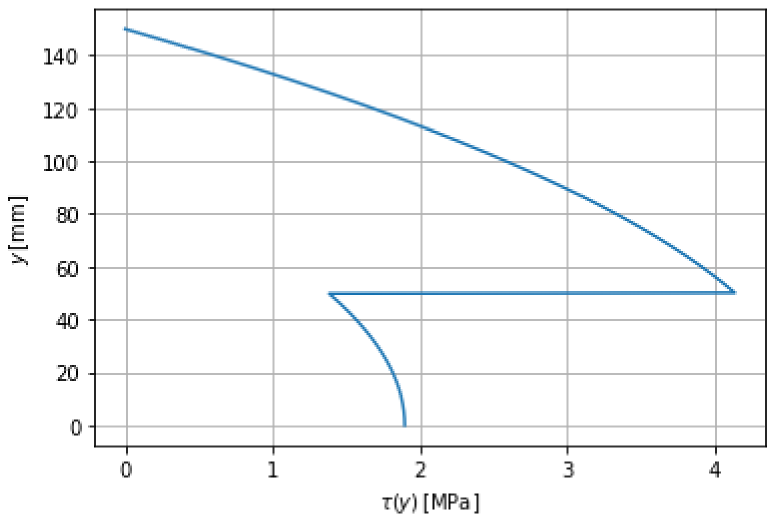
executed in 553ms, finished 13:46:57 2020-03-05

Ha a feladatban megadott ábrának megfelelően szeretnénk ábrázolni a feszültségeloszlást, akkor a vízszintes tengelyre a feszültség értékei, a függőlegesre pedig y értékei kerülnek.

In [12]:

```
plt.plot(τ_ertekek,y_ertekek)
plt.grid() #rács létrehozása
plt.xlabel(r"$\tau(y)\,\rm{[MPa]}$") #vízszintes tengely felirata, a LaTeX kód
plt.ylabel(r"$y\,\rm{[mm]}$")
plt.show() #kirajozás
```

executed in 823ms, finished 13:46:58 2020-03-05



Az eddigiekben csak az $y \geq 0$ tartományt vizsgáltuk, hiszen a keresztmetszet szimmetrikus. Ha a teljes $-150\,\mathrm{mm} \leq \mathrm{y} \leq 150\,\mathrm{mm}$ tartományt szeretnénk ábrázolni, azt az eddig kiszámol értékek alapján számos módon megtehetjük.

Ezek közül az egyik, hogy a szimmetria következő tulajdonságát használjuk ki:

$$\tau(y) = \tau(-y),$$

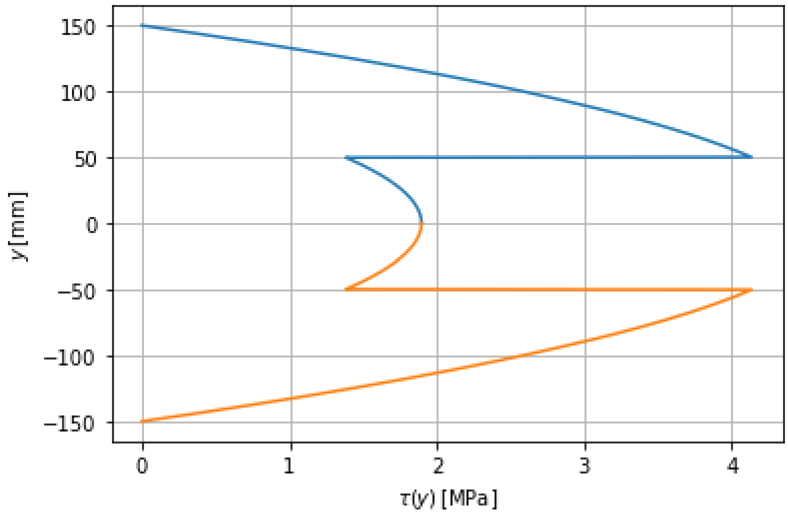
azaz használhatjuk a korábbi `tau_ertekek` adatsort, csak a hozzájuk tartozó `y_ertekek` -nek kell az előjelét megfordítani. Mivel az `y_ertekek` -t a `linspace` segítségével definiáltuk, ezért ezt megtehetjük `-y_ertekek` szintaktikával. Ez "sima" Python listával nem működik!

Magyarázat: a `numpy` modulból a `linspace` valójában nem listát hoz létre, hanem egy `numpy` tömböt. Ezek első ránézésre hasonlítanak a listákra, viszont egy tömbben csak egyféle típust tárolhatunk, jelen esetben `float` számokat. Ezért a `numpy` megengedi, hogy a tömb elemein ezzel az egyszerű szintaktikával végezzünk műveleteket. (Hasonlóképpen a `2*tomb` a tömb minden elemének a kétszersét adná vissza.) A "sima" lista többféle típust is tárolhat egyszerre, ezért nem engedi meg ezt a szintaktikát.

In [13]:

```
plt.plot(τ_ertekek,y_ertekek)
plt.plot(τ_ertekek,-y_ertekek)
plt.grid() #rács létrehozása
plt.xlabel(r"$\tau(y)\,\rm{[MPa]}$") #vízszintes tengely felirata, a LaTeX kód 
plt.ylabel(r"$y\,\rm{[mm]}$")
plt.show() #kirajozás
```

executed in 217ms, finished 13:46:58 2020-03-05



Ha azt szeretnénk, hogy a két vonal azonos színű legyen, akkor megadhatjuk a színeket manuálisan.

In [14]:

```
plt.figure(1,figsize=(1,3)) #ábra méretének megadása, hogy a gyakorlaton megism
plt.plot(τ_ertekek,y_ertekek,'b') #'b': a kék (=blue) szín rövid kódja
plt.plot(τ_ertekek,-y_ertekek,'b')
plt.grid() #rács létrehozása
plt.xlabel(r"$\tau(y)\,\rm{[MPa]}$") #vízszintes tengely felirata, a LaTeX kód 
plt.ylabel(r"$y\,\rm{[mm]}$")
plt.show() #kirajozás
```

executed in 256ms, finished 13:46:59 2020-03-05