

Campo fluido generado por un torbellino individual en presencia de una pared

Suponiendo una configuración como la mostrada en la Figura 1, un torbellino de intensidad Γ situado a una distancia a de una pared vertical, determinar el campo de velocidades y de presiones, así como las líneas de corriente y valor de la función de corriente Ψ .

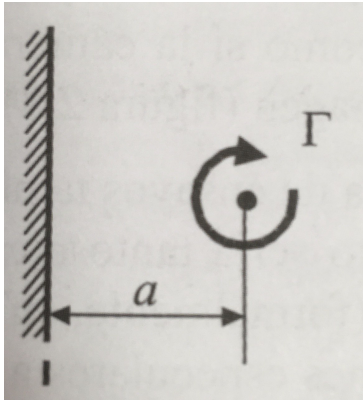


Figura 1. Torbellino en presencia de una pared.

Método de las imágenes

Las líneas de corriente rectas implican una restricción a la velocidad normal a través de ellas, lo que puede interpretarse como una condición de contorno de pared, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. La resolución de este tipo de configuraciones fluidas puede realizarse mediante la creación de una imagen especular de la distribución de singularidades respecto a la condición de contorno, que actúa así como eje de simetría. En el problema aquí propuesto, esto implica la localización de un torbellino de intensidad **opuesta** a una distancia $-a$.

Código Python para el cálculo del flujo potencial

En los siguientes párrafos se presenta una propuesta de cálculo numérico para el modelado discreto del flujo potencial. Existen muchas formas de realizar este cálculo, en este texto se presenta una alternativa sencilla que hace uso del módulo *NumPy* de Python, así como una representación gráfica de la función de corriente y el campo de velocidades. Se parte del código desarrollado inicialmente para el Óvalo de Rankine, y se modifica adecuadamente la función *velocity_field* para representar el campo fluido generado por dos torbellinos colocados de forma simétrica al eje $x = 0$ y de intensidad opuesta.

Nótese que en lo que corresponde al texto escrito en este documento, se usan variables en **negrita** para denotar vectores o matrices.

Junto a este documento se dispone de códigos MatLab o Python para su ejecución independiente, así como del Notebook original.

Del mismo modo, se puede ejecutar de forma online a través del siguiente enlace: [launch](#) [binder](#)

```
In [ ]: # 1. Importación de módulos
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
```

```
In [ ]: # 2. Definición de las funciones de cálculo del campo de velocidades
def velocity_field_vortex(x, z, S, x_s, z_s):
```

```

"""
Calcula el campo de velocidades inducido por una serie finita de torbellinos.

Parámetros:
x, z -- coordenadas en el plano xz. Estas variables pueden ser tanto matrices, como vector
S -- magnitud de los torbellinos (vector)
x_s, z_s -- coordenadas de los torbellinos (vectores)

Devuelve:
u, w -- Componentes del campo de velocidades. Será del mismo tipo que la variable de entrada
Si x y z son matrices, u y w contendrán el campo de velocidades completo. Si son puntos,
contendrán el valor de la velocidad en dichos puntos.

"""
u = np.zeros_like(x, dtype='f8')
w = np.zeros_like(z, dtype='f8')
N = len(S)
for i in range(N):
    r = np.sqrt((x - x_s[i])**2 + (z - z_s[i])**2)
    u += S[i] * (z - z_s[i]) / (2 * np.pi * r**2)
    w += -S[i] * (x - x_s[i]) / (2 * np.pi * r**2)
return u, w

```

La función *velocity_field_vortex* toma como entrada las coordenadas **x** e **z** en el plano xz (nótese que pueden ser tanto matrices o vectores, como puntos discretos), la magnitud Γ de los torbellinos (en el código nombrada como *S*), y las coordenadas **x_s**, **z_s** de las singularidades. La función devuelve las componentes **u** y **w** del campo de velocidades.

Para calcular las componentes del campo de velocidades, se utiliza un bucle *for* que considera cada uno de los torbellinos, y calcula la contribución de cada uno de ellos en las componentes **u** y **w** utilizando la formulación matemática correspondiente (que puede ser deducida analíticamente a partir de los contenidos teóricos de la asignatura).

Por ejemplo, la formulación matemática utilizada aquí para calcular las velocidades inducidas por un torbellino de intensidad Γ , que se encuentra localizado en (x_s, z_s) , en un punto del espacio, *p*, situado a una distancia radial *r* del torbellino, es la siguiente:

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{(z_p - z_s)}{r},$$

$$W = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{(x_p - x_s)}{r}.$$

Podemos utilizar esta función para calcular el campo de velocidades en los distintos ejes del sistema de referencia empleado, tanto a nivel vectorial como a nivel puntual, y usar esos datos para visualizar la solución en un gráfico.

```

In [ ]: # Definimos las coordenadas de los torbellinos
S_int = 200
a = 2.2
S = np.array([-S_int, S_int])
x_s = np.array([-a, a])
z_s = np.array([0, 0])

# Se definen también sus coordenadas en el plano complejo, para el cálculo del potencial.
t_s = x_s + 1j*z_s
num_sources = len(S)

# Definimos una malla para las coordenadas x e z
nx, nz = 40, 40
x = np.linspace(-10, 10, nx)
z = np.linspace(-10, 10, nz)
Xm, Zm = np.meshgrid(x, z)
Tm = Xm + 1j*Zm

# Calculamos las componentes u y v del campo de velocidades inducido por los manantiales o sum
u, w = velocity_field_vortex(Xm, Zm, S, x_s, z_s)

```

```

# Construimos la funcion potencial
pot = 0
for s in range(num_sources):
    pot += 1j*S[s]*np.log(Tm - t_s[s]) / (2*np.pi)

# De La función potencial extraemos tanto el potencial de velocidades (Phi) como la función de
phi = pot.real
psi = pot.imag

```

Una vez calculados el campo de velocidades, se calcula la función potencial de la forma habitual. Se recuerda que $f(t) = \Phi - i\Psi$, por lo que tras construir $f(t)$ es sencillo extraer tanto el potencial de velocidades, Φ , como la función de corriente, Ψ .

Tras la fase de cálculo, es conveniente representar gráficamente la solución. Para ello hacemos uso de las funciones *contourf* y *contour* de Matplotlib, para representar el campo de la Función Potencial (Φ), la Función de Corriente (Ψ), y la línea de corriente correspondiente a $\Psi = 0$.

Por último, empleamos la función *quiver* para representar el campo de velocidades vectorial de forma más visual. Por defecto, esta función representa la longitud de los vectores de forma inversa a su magnitud, por lo que aquí se realiza una normalización previa. Aunque sabemos que $\dot{f}(t) = \Phi_x - i\Phi_z = U - iW$, disponemos del campo de velocidades calculado previamente, en las variables **u** y **w**.

```

In [ ]: # Visualizamos la función de corriente y la función potencial
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,8)) # Creamos la figura
ax1, ax2 = axes.flatten()

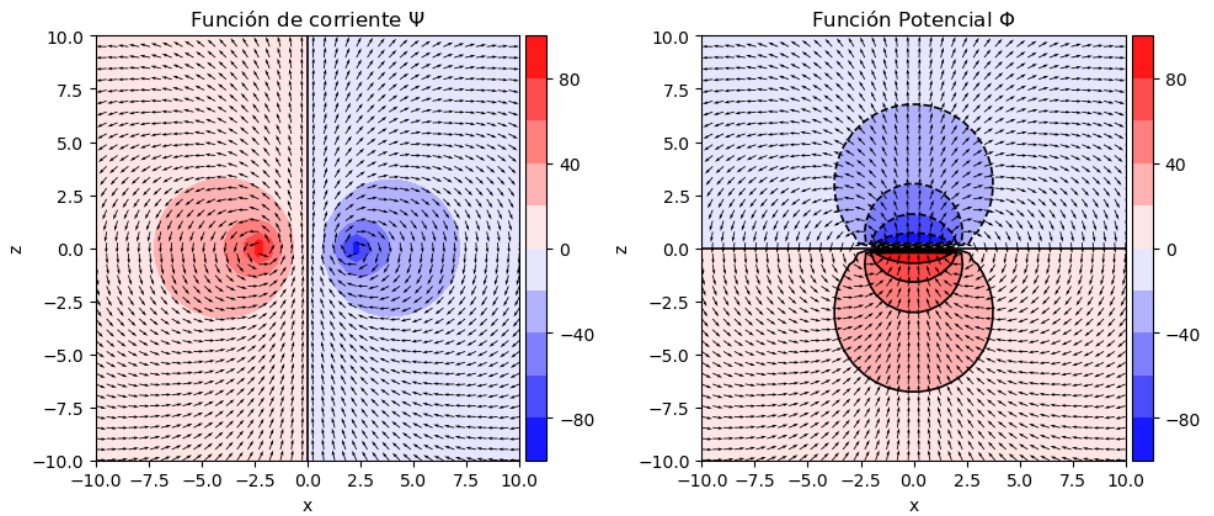
dividerPSI = make_axes_locatable(ax1) # Ajustamos la posición
caxPSI = dividerPSI.append_axes('right', size='5%', pad=0.05)
cont = ax1.contourf(Xm, Zm, psi, 10, cmap='bwr') # Pintamos los contornos
ax1.contour(Xm, Zm, psi, levels=[0], colors=['black'], linewidths=1.2) # Representamos la línea de corriente
fig.colorbar(cont, cax=caxPSI, orientation='vertical') # Pintamos la barra de color
ax1.set_title(r'Función de corriente $\Psi$')

dividerPHI = make_axes_locatable(ax2) # Ajustamos la posición
caxPHI = dividerPHI.append_axes('right', size='5%', pad=0.05)
cont = ax2.contourf(Xm, Zm, phi, 10, cmap='bwr') # Pintamos los contornos
ax2.contour(Xm, Zm, phi, levels=10, colors=['black'], linewidths=1.2) # Representamos la línea de corriente
fig.colorbar(cont, cax=caxPHI, orientation='vertical') # Pintamos la barra de color
ax2.set_title(r'Función Potencial $\Phi$')

N = np.sqrt(u**2 + w**2)
ax1.quiver(Xm, Zm, u/N, w/N, scale=40) # Representamos el campo de velocidades
ax2.quiver(Xm, Zm, u/N, w/N, scale=40)

for ax in axes:
    ax.set_xlabel('x') # Etiquetamos de forma
    ax.set_ylabel('z')
    ax.set_aspect('equal', 'box')
plt.tight_layout()

```



En este caso, la línea de corriente correspondiente a $\Psi = 0$ sigue la condición de contorno de la pared vertical recta, que plantea la simetría del problema.

De forma similar al proceso antes realizado, podríamos representar el campo de velocidades tanto horizontal como vertical:

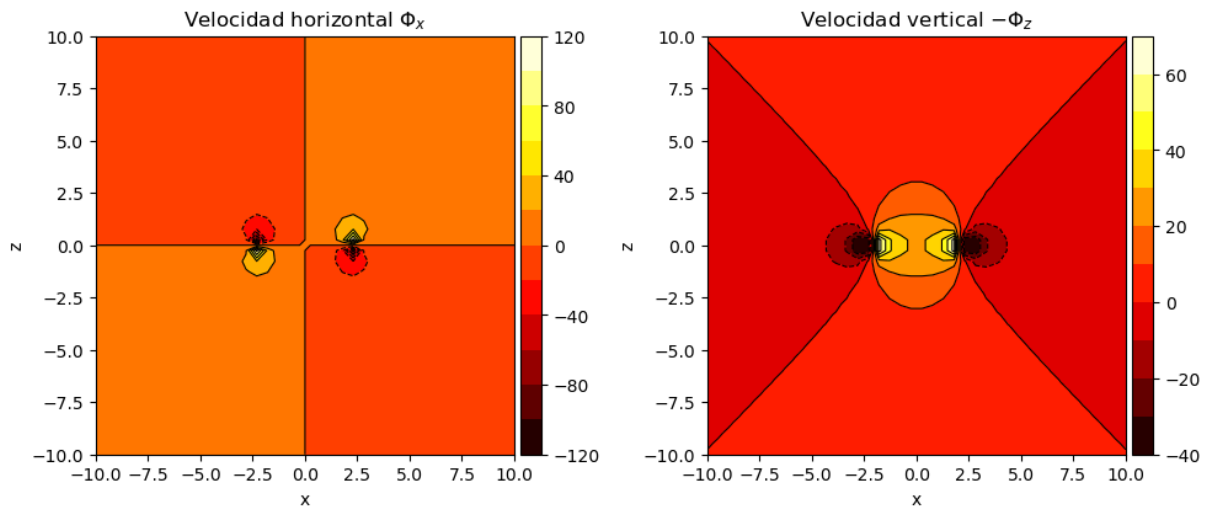
```
In [ ]: # Visualizamos el campo de velocidades
fig, axes = plt.subplots(1,2, figsize=(10,8))
ax1, ax2 = axes.flatten()

dividerU = make_axes_locatable(ax1)
caxU = dividerU.append_axes('right', size='5%', pad=0.05)
dividerV = make_axes_locatable(ax2)
caxV = dividerV.append_axes('right', size='5%', pad=0.05)

ax1.set_title(r'Velocidad horizontal $\Phi_x$')
cont = ax1.contourf(Xm, Zm, u, 10, cmap='hot')
ax1.contour(Xm, Zm, u, levels=10, colors=['black'], linewidths=0.8)
fig.colorbar(cont, cax=caxU, orientation='vertical')

ax2.set_title(r'Velocidad vertical $-\Phi_z$')
cont = ax2.contourf(Xm, Zm, w, 10, cmap='hot')
ax2.contour(Xm, Zm, w, levels=10, colors=['black'], linewidths=0.8)
fig.colorbar(cont, cax=caxV, orientation='vertical')

for ax in axes:
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('z')
    #ax.set(xlim=(-3, -1), ylim=(-1, 1))
    ax.set_aspect('equal', 'box')
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Cálculo de la velocidad y la presión en un punto dado

Visto el potencial de la función `velocity_field_vortex`, podemos en este caso obtener las velocidades horizontal y vertical **en cualquier punto del espacio**, así como la presión estática conocida una presión de referencia. Para el cálculo de estas variables en el punto $(x_p, z_p) = (2, 3)$ haríamos uso del procedimiento antes mencionado, así como de la Ecuación de Bernoulli, al tratarse de un flujo ideal, estacionario e incompresible:

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho}{2}(U_{\infty} - |\vec{v}|^2),$$

en este caso particularizando que $U_{\infty} = 0$.

```
In [ ]: # Obtenemos las velocidades en el punto deseado
xp, zp = 2, 3
up, wp = velocity_field_vortex(xp, zp, S, x_s, z_s)

U_inf = 0e0

p_inf = 1e5
rho = 1.0
vp2 = up**2 + wp**2
p = p_inf + 0.5*rho*(U_inf - vp2)

print('La velocidad, en m/s en el punto (x, z)={0:3.1f}, {1:3.1f} es (u, w)={2:6.4f}, {3:6.4f}'.format(xp, zp, up, wp))
print('La presión estática en el punto (x, z)={0:3.1f}, {1:3.1f} es p={2:4.2f} Pa'.format(xp, zp, p))

La velocidad, en m/s en el punto (x, z)=(2.0, 3.0) es (u, w)=(6.9788, 5.7226)
La presión estática en el punto (x, z)=(2.0, 3.0) es p=99959.27 Pa
```

In []: