$$D\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_M}{M}\right)=\frac{1}{M^2}\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_M,\ \xi_1+\ldots+\xi_M)=\frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{M}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) \ominus$$

$\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)=\rho\sigma^2$ – по условию

$\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_i)=D(\xi_i)=\sigma^2$

$$\ominus\ \frac{1}{M^2}\left(M\cdot\sigma^2+M(M-1)\rho\sigma^2\right)=\frac{\sigma^2}{M}+\frac{(M-1)}{M}\rho\sigma^2=\frac{\sigma^2}{M}+\rho\sigma^2-\frac{\rho\sigma^2}{M}=$$

$$=\rho\sigma^2+(1-\rho)\frac{\sigma^2}{M}$$

∎

---

(2) Композиция строится с помощью бэггинга

$$a(x)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}a_m(x)$$

Рассмотрим $E_{X,Y,x,y}$ – смещение для одного алгоритма: $E_{X,Y,x,y}(a(x))=\frac{1}{M}\cdot M E_{X,Y,x,y}a_1(x)$

$= E_{X,Y,x,y}a_1(x)$

Теперь рассмотрим разброс.

$$Var_{X,Y,x,y}(a(x^2))=\frac{1}{M^2}Var_{X,Y,x,y}\left(\sum_{i,j=1}^{M}a_i(x)a_j(x)\right)=\frac{1}{M}Var_{X,Y,x,y}(a_1(x))+\frac{1}{M^2}\sum_{i\neq j}\operatorname{cov}(a_i(x),a_j(x))$$

Пусть $\operatorname{cov}(a_i(x),a_j(x))=\rho\ \forall i,j \Rightarrow$

$$\frac{1}{M}Var_{X,Y,x,y}(a_1(x))+\frac{1}{M^2}\sum_{i\neq j}\rho\cdot Var_{X,Y,x,y}(a_1(x))=\left(\frac{1}{M}+\frac{\rho(M-1)}{M}\right)Var_{X,Y,x,y}(a_1(x)).$$

Тогда посмотрим на коэфф-ент перед разбросом. Он определяет соотношение смещения и разброса.

$M=const$

$\Rightarrow$ при $\rho\downarrow$ Var меньше $\Rightarrow$ чем менее коррелированы элементы, тем ниже разброс

∎