# Прогнозирование временных рядов

К. В. Воронцов, А.В. Зухба
vokov@forecsys.ru
a__l@mail.ru

май 2016

# Содержание

## Временной ряд

$y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots$ — временной ряд, $y_i \in \mathbb{R}$
$\hat{y}_{t+d}(w) = f_t(y_1, \ldots, y_t; w)$ — модель временного ряда,
где $d = 1, \ldots, D$, $D$ — горизонт прогнозирования,
$w$ — вектор параметров модели

Метод наименьших квадратов:

$$Q_t(w) = \sum_{i=t_0}^{t} \bigl(\hat{y}_i(w) - y_i\bigr)^2 \;\to\; \min_w$$

**Проблемы:**

- рядов может быть очень много
- решение задачи регрессии — это долго
- поведение рядов может не описываться одной моделью
- функция потерь может быть неквадратичной

## Эконометрика — основной источник задач прогнозирования

Примеры эконометрических временных рядов:

- рыночные цены
- объёмы продаж в торговых сетях
- объёмы потребления и цены электроэнергии
- объёмы грузовых и пассажирских перевозок
- дорожный трафик (прогнозирование пробок)

Основные явления в эконометрических временных рядах:

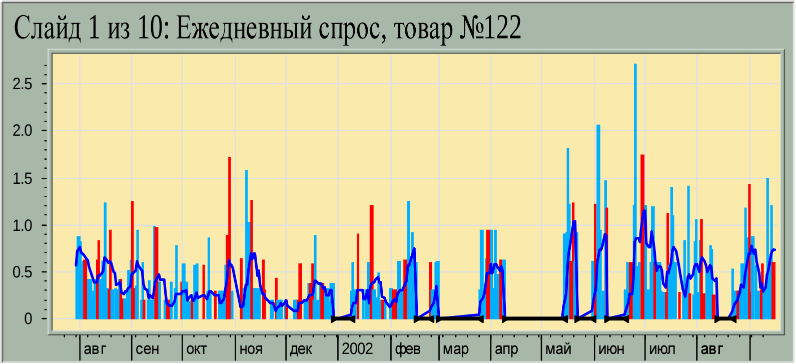
- тренды
- сезонности
- разладки (смены модели ряда)

---

*Марно Вербик.* Путеводитель по современной эконометрике, 2008.

## Пример. Задача прогнозирования объёмов продаж

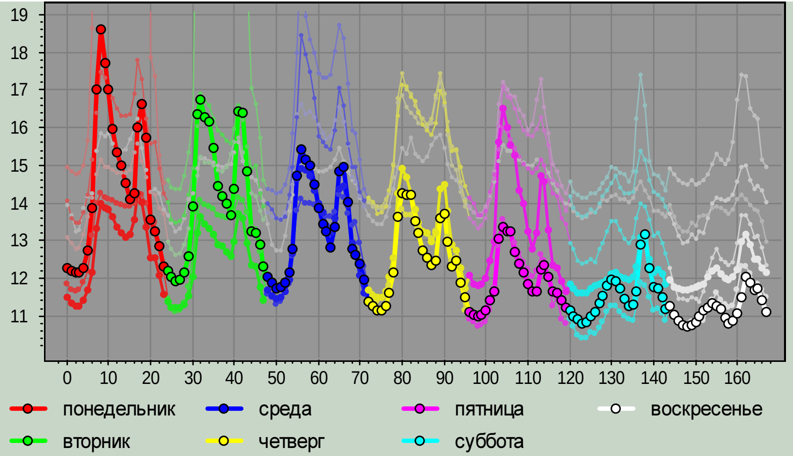
Ежедневные объёмы продаж товара




**Особенности задачи:** огромное число рядов, продажи зависят от типа товара, тренды, сезонность, пропуски, праздники, промоакции, скачки, плохо работают сложные модели

# Пример. Задача прогнозирования цен электроэнергии

Почасовые цены электроэнергии на бирже NordPool, 2000г.




**Особенности задачи:** три вложенные сезонности, скачки

## Линейная модель авторегрессии

В роли признаков — $n$ предыдущих наблюдений ряда:

$$\hat{y}_{t+1}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_{t-j+1}, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

В роли объектов $\ell = t - n + 1$ моментов в истории ряда:

$$\underset{\ell\times n}{F} = \begin{pmatrix} y_{t-1} & y_{t-2} & y_{t-3} & \cdots & y_{t-n} \\ y_{t-2} & y_{t-3} & y_{t-4} & \cdots & y_{t-n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_1 \\ y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\ell\times 1}{y} = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \ldots \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Функционал квадрата ошибки:

$$Q_t(w, X^\ell) = \sum_{i=n}^{t} \bigl(\hat{y}_i(w) - y_i\bigr)^2 = \|Fw - y\|^2 \to \min_w$$

## Беглый обзор методов прогнозирования

- Авторегрессионные модели
- ARMA, ARIMA, GARCH,...
- Нейросетевые модели
- Гусеница [Голяндина, 2003]
- Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования
- Адаптивная авторегрессия
- Адаптивная селекция моделей
- Адаптивная композиция моделей
- Прогнозирование плотности распределения
- Квантильная регрессия

---

*Лукашин Ю. П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. Финансы и статистика, 2003.

# Экспоненциальное скользящее среднее (ЭСС)

Простейшая регрессионная модель — константа $\hat{y}_{t+1} = c$, наблюдения учитываются с весами, убывающими в прошлое:

$$\sum_{i=0}^{t} \beta^{t-i}(y_i - c)^2 \to \min_c, \quad \beta \in (0,1)$$

Аналитическое решение — формула Надарая-Ватсона:

$$c \equiv \hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=0}^{t} \beta^i y_{t-i}}{\sum_{i=0}^{t} \beta^i}$$

Запишем аналогично $\hat{y}_t$, оценим $\sum\limits_{i=0}^{t} \beta^i \approx \sum\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{1}{1-\beta}$,

получим $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t\beta + (1-\beta)y_t$, заменим $\alpha = 1-\beta$:

$$\hat{y}_{t+1} := \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) \;=\; \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t,$$

$\alpha \in (0,1)$ называется параметром сглаживания.

## Рекуррентная формула для среднего арифметического

Экспоненциальное скользящее среднее (ЭСС):

$$\hat{y}_{t+1} := \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t)$$

Среднее арифметическое:

$$\hat{y}_{t+1} := \frac{1}{t+1}\sum_{i=0}^{t} y_i = \hat{y}_t + \frac{1}{t+1}(y_t - \hat{y}_t)$$

При $\alpha_t = \frac{1}{t+1}$ имеем среднее арифметическое
При $\alpha_t = \text{const}$ имеем экспоненциальное скользящее среднее

Условие сходимости к среднему (для стационарных задач):

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty, \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$$

ЭСС подходит также и для нестационарных задач

## Подбор параметра сглаживания

Чем больше $\alpha$, тем больше вес последних точек,
при $\alpha \to 1$ тривиальный прогноз $\hat{y}_{t+1} = y_t$.

Чем меньше $\alpha$, тем сильнее сглаживание,
при $\alpha \to 0$ тривиальный прогноз $\hat{y}_{t+1} = \bar{y}$.

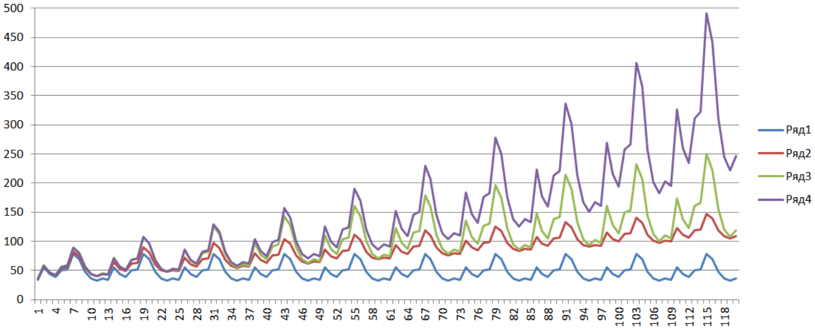
Оптимальное $\alpha^*$ находим по скользящему контролю:

$$Q(\alpha) = \sum_{t=T_0}^{T_1} \bigl(\hat{y}_t(\alpha) - y_t\bigr)^2 \to \min_{\alpha}$$

Эмпирические правила:
если $\alpha^* \in (0, 0.3)$, то ряд стационарен, ЭСС работает;
если $\alpha^* \in (0.3, 1)$, то ряд нестационарен, нужна модель тренда.

# Модели с трендом и сезонностью

**Пример.** Сочетания тренда и сезонности (модельные данные)




Ряд 1 — сезонность без тренда
Ряд 2 — линейный тренд, аддитивная сезонность
Ряд 3 — линейный тренд, мультипликативная сезонность
Ряд 4 — экспоненциальный тренд, мультипликативная сезонность

## Модель Хольта

Линейный тренд без сезонных эффектов:

$$\hat{y}_{t+d} = a_t + b_t d,$$

где $a_t$, $b_t$ — адаптивные коэффициенты линейного тренда

Рекуррентная формула:

$$a_t := \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1});$$
$$b_t := \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1-\alpha_2) b_{t-1}.$$

Частный случай — модель линейного роста Брауна:

$$\alpha_1 = 1 - \beta^2, \quad \alpha_2 = 1.$$

## Модель Тейла–Вейджа

Линейный тренд с аддитивной сезонностью периода $s$:

$$\hat{y}_{t+d} = (a_t + b_t d) + \theta_{t+(d \bmod s)-s}.$$

$a_t + b_t d$ — тренд, очищенный от сезонных колебаний,
$\theta_0, \dots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода $s$.

Рекуррентная формула:

$$\begin{aligned}
a_t &:= \alpha_1(y_t - \theta_{t-s}) + (1-\alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1});\\
b_t &:= \alpha_2(a_t - a_{t-1}) + (1-\alpha_2)b_{t-1};\\
\theta_t &:= \alpha_3(y_t - a_t) + (1-\alpha_3)\theta_{t-s}.
\end{aligned}$$

# Модель Уинтерса

Мультипликативная сезонность периода $s$:

$$\hat{y}_{t+d} = a_t \cdot \theta_{t+(d \bmod s)-s},$$

$\theta_0, \ldots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода $s$.

Рекуррентная формула:

$$a_t := \alpha_1(y_t/\theta_{t-s}) + (1-\alpha_1)a_{t-1};$$
$$\theta_t := \alpha_2(y_t/a_t) + (1-\alpha_2)\theta_{t-s}.$$

## Модель Уинтерса с линейным трендом

Мультипликативная сезонность периода $s$ с линейным трендом:

$$\hat{y}_{t+d} = (a_t + b_t d) \cdot \theta_{t+(d \bmod s)-s},$$

$a_t + b_t d$ — тренд, очищенный от сезонных колебаний,
$\theta_0, \dots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода $s$.

Рекуррентная формула:

$$\begin{aligned}
a_t &:= \alpha_1(y_t/\theta_{t-s}) + (1-\alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1});\\
b_t &:= \alpha_2(a_t - a_{t-1}) + (1-\alpha_2)b_{t-1};\\
\theta_t &:= \alpha_3(y_t/a_t) + (1-\alpha_3)\theta_{t-s}.
\end{aligned}$$

## Модель Уинтерса с экспоненциальным трендом

Мультипликативная сезонность с экспоненциальным трендом:

$$\hat{y}_{t+d} = a_t (r_t)^d \cdot \theta_{t+(d \bmod s)-s},$$

$a_t (r_t)^d$ — экспоненциальный тренд, очищенный от сезонности,
$\theta_0, \dots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода $s$.

Рекуррентная формула:

$$\begin{aligned}
a_t &:= \alpha_1 (y_t / \theta_{t-s}) + (1 - \alpha_1) a_{t-1} r_{t-1};\\
r_t &:= \alpha_2 (a_t / a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) r_{t-1};\\
\theta_t &:= \alpha_3 (y_t / a_t) + (1 - \alpha_3) \theta_{t-s}.
\end{aligned}$$

## Адаптивная авторегрессионная модель

Линейная модель авторегрессии (линейный фильтр):

$$\hat{y}_{t+1}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_{t-j+1}, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ — ошибка прогноза $\hat{y}_t$, сделанного на шаге $t-1$

Метод наименьших квадратов: $\varepsilon_t^2 \to \min\limits_w$.

Один шаг градиентного спуска в каждый момент $t$:

$$w_j := w_j + h_t \varepsilon_t y_{t-j+1}.$$

Градиентный шаг в методе скорейшего спуска:

$$h_t = \frac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n} y_{t-j+1}^2},$$

где $\alpha$ — аналог параметра сглаживания.

## Следящий контрольный сигнал

$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ — ошибка прогноза $\hat{y}_t$, сделанного на шаге $t-1$
Следящий контрольный сигнал (tracking signal [Trigg, 1964])

$$K_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\tilde{\varepsilon}_t} \qquad \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{t+1} &:= \gamma\varepsilon_t + (1-\gamma)\hat{\varepsilon}_t; \\ \tilde{\varepsilon}_{t+1} &:= \gamma|\varepsilon_t| + (1-\gamma)\tilde{\varepsilon}_t. \end{aligned}$$

Рекомендация: $\gamma = 0.05 \ldots 0.1$

Статистический тест адекватности (при $\gamma \leqslant 0.1,\ \ t \to \infty$):
гипотеза $H_0$: $\mathsf{E}\varepsilon_t = 0,\ \ \mathsf{E}\varepsilon_t\varepsilon_{t+d} = 0$
принимается на уровне значимости $\alpha$, если

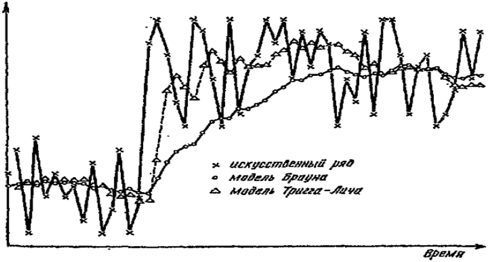
$$|K_t| \leqslant 1.2\Phi_{1-\alpha/2}\sqrt{\gamma/(2-\gamma)},$$

$\Phi_{1-\alpha/2}$ — квантиль нормального распределения,
$\Phi_{1-\alpha/2} = \Phi_{0.975} = 1.96$ при $\alpha = 0.05$

## Модель Тригга–Лича [Trigg, Leach, 1967]

**Проблема:** адаптивные модели плохо приспосабливаются к резким структурным изменениям

**Решение:** $\alpha = |K_t|$




**Недостатки:**
1) плохо реагирует на одиночные выбросы;
2) требует подбора $\gamma$, при рекомендации $\gamma = 0.05 \ldots 0.1$.