Numpy 矩阵运算代码参考教程，请大家一定自己动手练习

[http://liao.cpython.org/numpy10/ (http://liao.cpython.org/numpy10/)](http://liao.cpython.org/numpy10/)

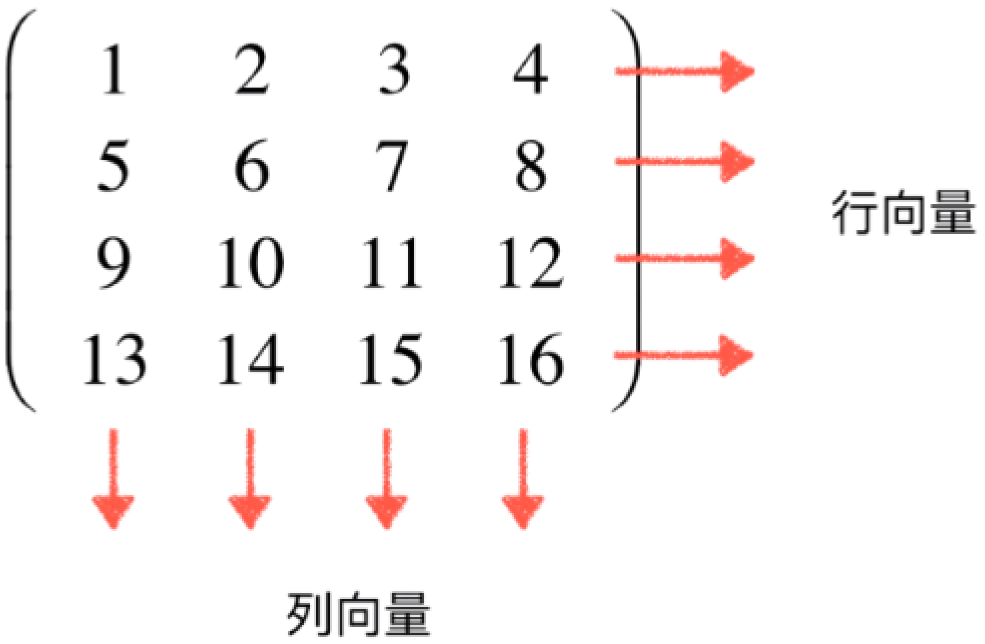
书籍推荐，Part I 为数学基础

[https://github.com/exacity/deeplearningbook-chinese (https://github.com/exacity/deeplearningbook-chinese)](https://github.com/exacity/deeplearningbook-chinese)

矩阵

如果把向量看成是对数的拓展，一个向量表示一组数；那么矩阵可以看成是对向量的拓展，一个矩阵表示一组向量。

矩阵的行数和列数可以不相等，行数和列数相等的矩阵叫做方阵。



1. 矩阵的表示

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ij} 表示第i行第j列

2. 矩阵的加法

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rc} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1c} + b_{1c} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2c} + b_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} + b_{r1} & a_{r2} + b_{r2} & \dots & a_{rc} + b_{rc} \end{pmatrix}$$

3. 矩阵的数量乘法

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix}$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1c} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & \dots & ka_{rc} \end{pmatrix}$$

4. 矩阵运算的基本性质

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

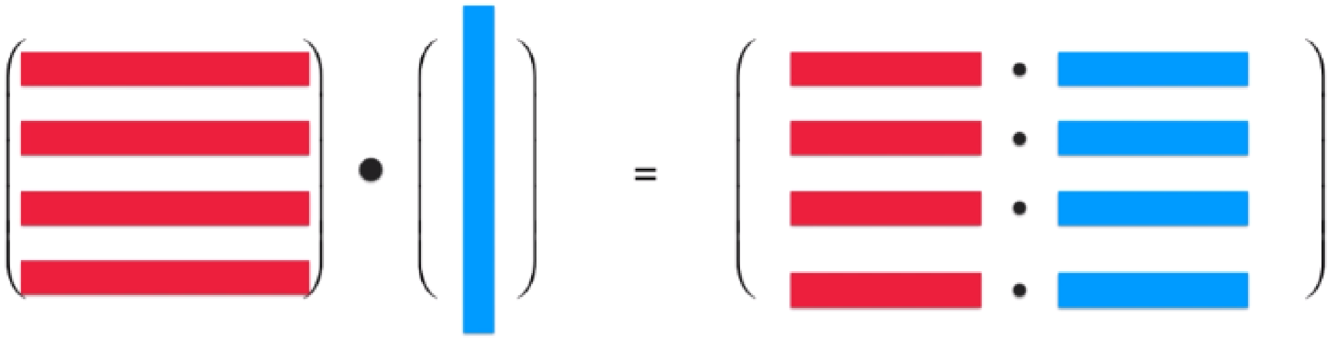
$$(ck)A = c(kA)$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

$$(c + k) \cdot A = c \cdot A + k \cdot A$$

5. 矩阵和向量的乘法

矩阵A的列数必须和向量u的元素个数一致， 矩阵A的行数没有限制。
可以把一个矩阵看成向量的函数，完成了一个向量到另一个向量的映射。

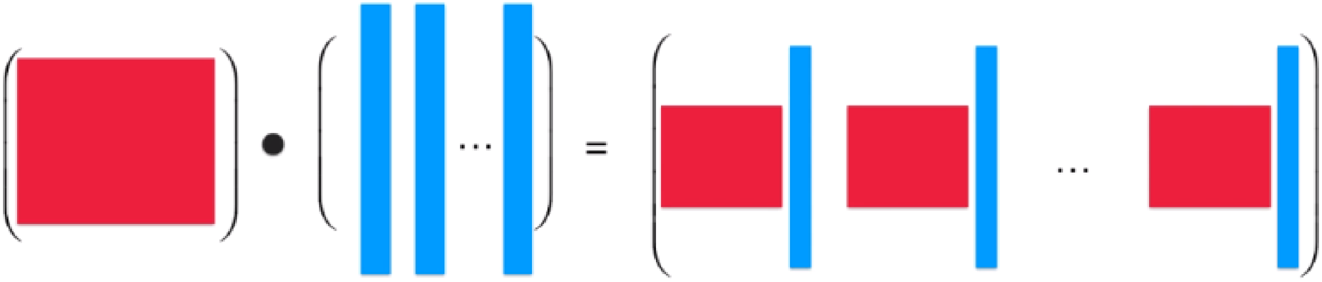


$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot u_1 & a_{12} \cdot u_2 & \dots & a_{1n} \cdot u_n \\ a_{21} \cdot u_1 & a_{22} \cdot u_2 & \dots & a_{2n} \cdot u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \cdot u_1 & a_{m2} \cdot u_2 & \dots & a_{mn} \cdot u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} --\vec{r}_1-- \\ --\vec{r}_2-- \\ \dots \\ --\vec{r}_n-- \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{u}_2 \\ \dots \\ \vec{r}_n \cdot u_n \end{pmatrix}$$

5. 矩阵和矩阵的乘法

矩阵A的列数必须和矩阵B的行数一致：$A_{mk} \cdot B_{kn} = C_{mn}$



$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ A \cdot \vec{c}_1 & A \cdot \vec{c}_2 & \cdots & A \cdot \vec{c}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} --\vec{r}_1-- \\ --\vec{r}_2-- \\ \cdots \\ --\vec{r}_n-- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_2 \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_n \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_2 \cdots & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_n \\ \cdots\cdots & & \\ \vec{r}_m \cdot c_1 & \vec{r}_m \cdot c_2 \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{c}_n \end{pmatrix}$$

In [1]:

```python
import numpy as np
```

In [3]:

```python
np.dot()
np.matmul()
```

```
---------------------------------------------------------------------------
TypeError                                 Traceback (most recent call last)
<ipython-input-3-b46422db0f4d> in <module>
----> 1 np.dot()
      2 np.matmul()

TypeError: Required argument 'a' (pos 1) not found
```

6. 矩阵乘法的性质

1. 矩阵的乘法不遵守交换律 $A \cdot B \neq B \cdot A$
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
5. 对于任意 $r * c$的矩阵A， 存在$c * x$的矩阵O，满足：$A \cdot O_{cx} = O_{rx}$
6. 对于任意 $r * c$的矩阵A， 存在$x * r$的矩阵O，满足：$O_{xr} \cdot A = O_{xo}$

7. 矩阵的幂

只有方阵才可以进行幂运算: $A^k = A \cdot A \cdot ... \cdot A$, k个A相乘。

8.矩阵的转置

把矩阵的行变成列，列变成行。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

性质：

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

9. 单位矩阵

$I \cdot A = A$， I为单位矩阵。
单位矩阵一定是方阵。

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = (i_{kj}) \begin{cases} 1, & (k = j) \\ 0, & (k \neq j) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

10. 逆矩阵

回忆：数字系统中, $x \cdot (x^{-1}) = 1$
在矩阵中， $AB = BA = I$, 则称B是A的逆矩阵，记作：$B = A^{-1}$。$A^0 = I$。
A称为可逆矩阵，或者叫**非奇异**矩阵。
有些矩阵是不可逆的，称为**奇异**矩阵。

如果$BA = I$, 则称B是A的左逆矩阵。
如果$AC = I$, 则称C是A的右逆矩阵。
如果一个矩阵A既存在左逆矩阵B,又存在右逆矩阵C，则$B = C$。
可逆矩阵一定为方阵！
非方阵一定不可逆！

11. 矩阵逆的性质

1. 对于矩阵A，如果存在逆矩阵B，则B唯一。(可以用反证法证明)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

12. 看待矩阵的四个重要视角

1. 数据表

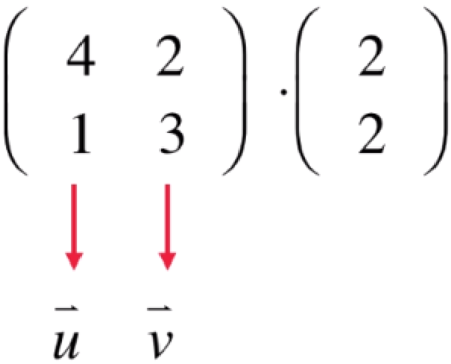
name	age
LearnShare	12
Mike	32

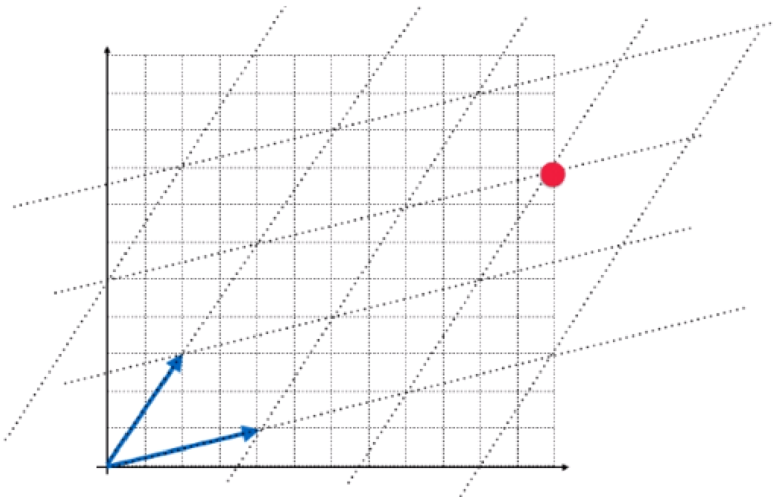
1. 线性系统

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ \frac{1}{10}x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. 变换（向量的函数）: $T \cdot \vec{a} = \vec{b}$
2. 空间





13. 线性系统和矩阵

线性方程：未知数x只能是一次方。$ax + b = y$，$x + y + 3z = 0$。

线性方程组组成了线性系统：$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 10x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$

13.1 消元法

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 10x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases} => \begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 6 \\ 10x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases} => 2x_1 = 1 => x_1 = 0.5$$

13.2 高斯消元法

利用增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 10 & 6 & | & 5 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 12 & 6 & | & 6 \\ 10 & 6 & | & 5 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 1 \\ 10 & 6 & | & 5 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0.5 \\ 10 & 6 & | & 5 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0.5 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

13.3求矩阵的逆

已知 $AA^{-1} = I$，把A^{-1} 看成 $\begin{bmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{bmatrix}$,

那么求解过程为：$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 10 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x1 & x2 \\ 0 & 1 & | & x3 & x4 \end{bmatrix}$,

即：$(A|I) => (I|A^{-1})$

13.4 使用矩阵的逆求解

假设 A^{-1} 存在，则 $Ax = b$ 的解 $x = A^{-1}b$ $$ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2

\end{bmatrix}

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/10 & 6 \end{bmatrix}$$

^{-1} \cdot

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/jax.js

14. 初等矩阵

对单位矩阵进行一次初等变换，得到初等矩阵。
高斯消元法的过程可以看成寻找一系列的初等矩阵E，使得：$E_p \cdot \ldots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = rref(A)$

1. 矩阵中的某一行乘以一个常数： $$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \ 2 & 3 \ 4 & 5 \

   # \end{pmatrix}

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   $$
2. 矩阵的一行加（减）另一行的若干倍 $$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \ 2 & 3 \ 4 & 5 \

   # \end{pmatrix}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2-4p & 3-5p \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   $$
3. 交换矩阵的两行 $$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

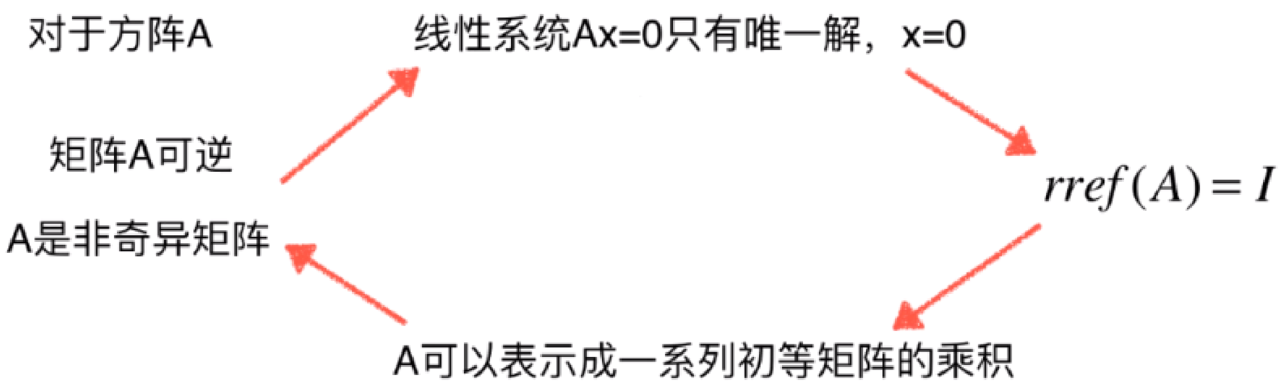
   \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \ 2 & 3 \ 4 & 5 \

   # \end{pmatrix}

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

15. 初等矩阵和可逆性

由于初等矩阵是对单位矩阵进行一次初等变换得到的，单位矩阵是可逆的，初等变换是可逆的，所以初等矩阵页数可逆的。



证明：

1. 对于方阵A，如果A可逆，那么线性系统$Ax = 0$只有唯一解,$x = 0$。
   证明：$A \cdot x = OA^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot OI \cdot x = Ox = O$
2. 线性系统$Ax = 0$只有唯一解,$x = 0$， 那么reef(A) = I
   证明： 假设A为$n * n$矩阵, $Ax = 0$有唯一解，则有n个未知数，且$rref(A)$有n个非零行。
   根据行最简形式的定义，$rref(A) = I$
3. 若$rref(A) = I$， 则A可以表示成一系列初等矩阵的乘积。 证明：
   $E_p \cdot ... \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = rref(A) = I$
   $(E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot ... \cdot E_p^{-1}) \cdot E_p \cdot ... \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot ... \cdot E_p^{-1}) \cdot rref(A)$
   $I \cdot A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot ... \cdot E_p^{-1}) \cdot I$
   $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot ... \cdot E_p^{-1}$
4. A可以表示成一系列初等矩阵的乘积, A可逆。
   $A = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot ... \cdot E_p$
   $B = E_p^{-1} \cdot ... \cdot E_3^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_1^{-1}$
   $A \cdot B = I$
   $B = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot ... \cdot E_p)^{-1}$
   $B \cdot A = ((BA)^{-1})^{-1} = (A^{-1} \cdot B^{-1})^{-1}$

16. 线性组合

对于若干个n维向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p$， $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \ldots + k_p\vec{v}_p$ 称为这些向量的线性组合。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{r_1} \\ \overline{r_2} \\ \overline{r_3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\overline{r_1} \\ \overline{r_2} \\ \overline{r_3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\overline{r_1} \\ \overline{r_2}+\overline{r_1} \\ \overline{r_3}-3\overline{r_1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\overline{r_1} \\ -\frac{1}{2}(\overline{r_2}+\overline{r_1}) \\ \overline{r_3}-3\overline{r_1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\overline{r_1} \\ -\frac{1}{2}(\overline{r_2}+\overline{r_1}) \\ \overline{r_3}-3\overline{r_1}-\frac{1}{2}(\overline{r_2}+\overline{r_1}) \end{pmatrix}$$

$$\overline{r_3}' = \overline{r_3} - \frac{7}{2}\cdot\overline{r_1} - \frac{1}{2}\cdot\overline{r_2}$$

17. 线性相关和线性无关

对于若干个n维向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p$，存在一组k不全为0， 使得$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \ldots + k_p\vec{v}_p = 0$，则称$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p$线性相关。

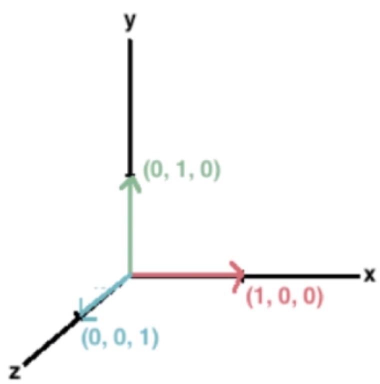
=> 其中一个向量可以写成其他向量的线性组合。

对于若干个n维向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p$，只有全为0时， $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \ldots + k_p\vec{v}_p = 0$， 则称 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p$线性无关。

=> 任何一个向量都不可以表示成其他向量的线性组合。

三维空间中，有三个标准单位向量

$$\overline{e_1} = (1,0,0)^T \qquad \overline{e_2} = (0,1,0)^T \qquad \overline{e_3} = (0,0,1)^T$$



$$\vec{v} = (x,y,z) = x\cdot\overline{e_1} + y\cdot\overline{e_2} + z\cdot\overline{e_3}$$

$$x\cdot\overline{e_1} + y\cdot\overline{e_2} + z\cdot\overline{e_3} = O \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

17. 线性相关的重要性质

1. m个n维向量$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$，若m>n，则$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$线性相关。
   举例：100个三维向量一定线性相关。

证明：m个n维向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$，若 m > n，则 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$ 线性相关

是否存在k1，k2，…，km不全为0，满足：$k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + k_m \cdot \vec{v}_m = 0$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

有唯一零解?

因为 m > n

所以系数矩阵化为行最简形式，肯定非零行小于列数

肯定有无数解，而不仅仅有唯一的零解

得证!

2. $n*n$的方阵A，其列向量由$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$组成，即：$A = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3 \ldots \vec{v}_n)$, 则：A可逆 <=> $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ 线性无关。

m个n维向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$，何时 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_m$ 线性无关?

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \cdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

只有唯一零解。

矩阵A可逆(A是非奇异矩阵)

线性系统Ax=0只有唯一解，x=0

$$rref(A) = I$$

A可以表示成一系列初等矩阵的乘积

Ax=b只有唯一解

18. 生成空间

二维空间中的任何向量，
都可以表示为u和v的线性组合

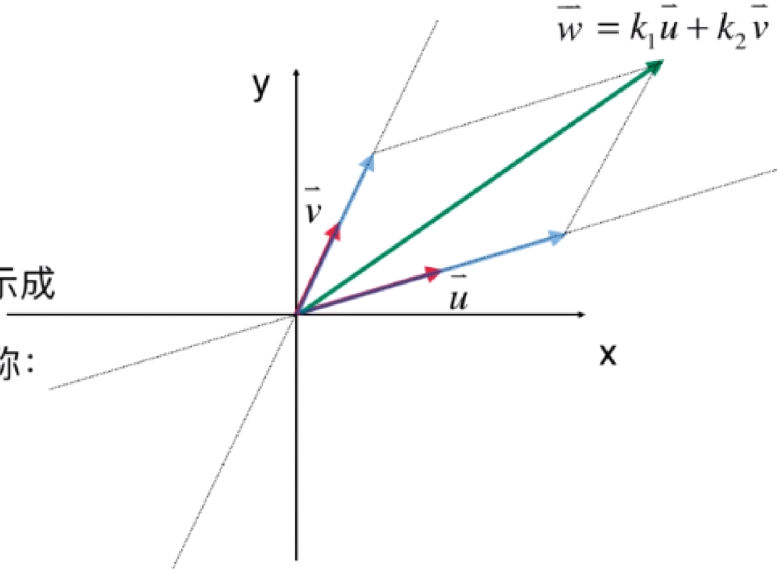
我们说u和v可以生成整个二维空间

若空间中的所有向量，都可以被表示成

$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_p$ 的线性组合，则称：

这些向量可以生成这个空间。

u，v，w也可以生成整个二维空间



思考：*最少几个向量生成二维空间？*
一个向量只能生成这条直线上的其他向量
二位空间中的3个向量肯定是现行相关的。
所以？

对于一个**n**维空间，至少需要**n**个向量才能够生成。

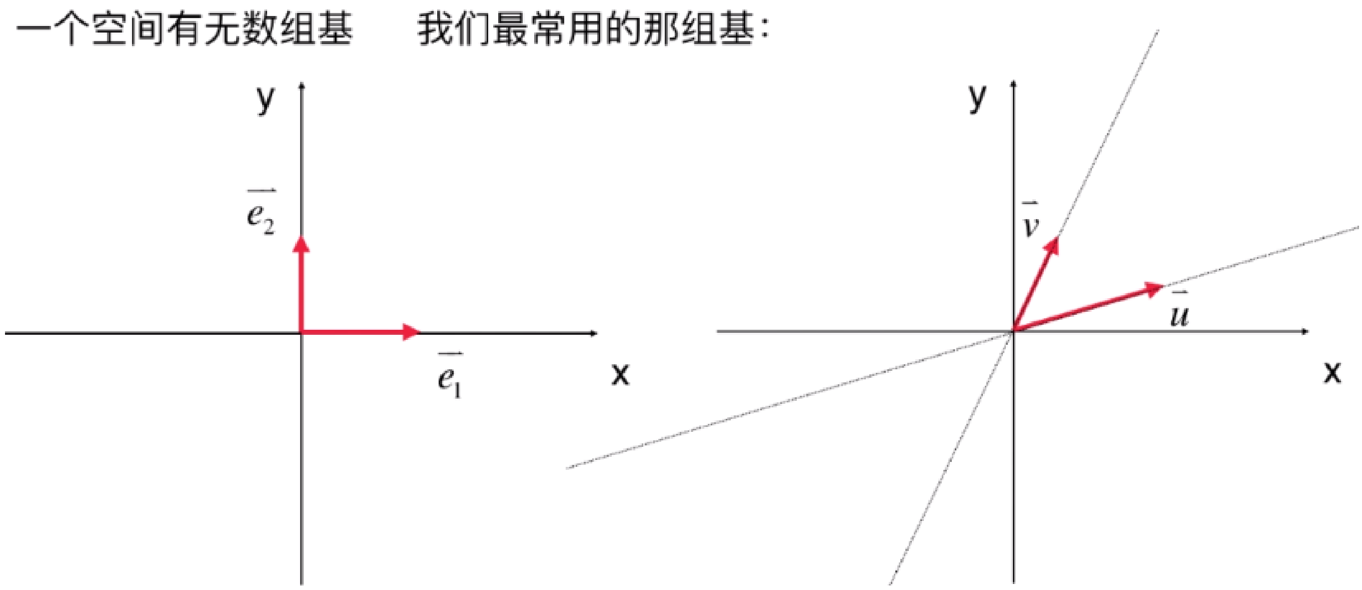
n个向量何时才成整个空间？

19. 空间的基

若一组向量可以生成整个n维空间，且线性无关，这组向量一定有n个，称这组向量为这个n维空间的一组基。

n个n维向量$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$,若他们是这个n维空间的基：

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$生成整个n维空间。
2. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$线性无关。



在n维空间中，如果给定一组基，任何一个向量（或者是点）都可以表示成这组基的线性组合，**且表示方法唯一**。

20. 正交基和标准正交基

正交：垂直

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + ... + u_n \cdot v_n = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot cos\theta$

当 $\theta = 90 \circ$， $cos\theta = 0$， $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

两个向量相互垂直，两个向量相互正交。

正交向量组：一组向量，如果两两正交，则称为正交向量组。
正交非零向量组一定线性无关。

证明： 假设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$ 是一组正交向量组

需证明：$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + ... + k_n\vec{v}_n = 0$ 只有零解。

$$(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + ... + k_n\vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i = 0 \cdot \vec{v}_i$$

$$k_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + k_2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_i + ... + k_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + ... + k_n\vec{v}_n \cdot \vec{v}_i = 0$$

$$k_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \rightarrow k_i\|\vec{v}_i\|^2 = 0 \rightarrow \|\vec{v}_i\|^2 > 0, k_i = 0$$

如果空间中的一组基两两正交，则称这组基为一组正交基。
标准正交基的模是1。
一个空间中的标准正交基也有无数组。

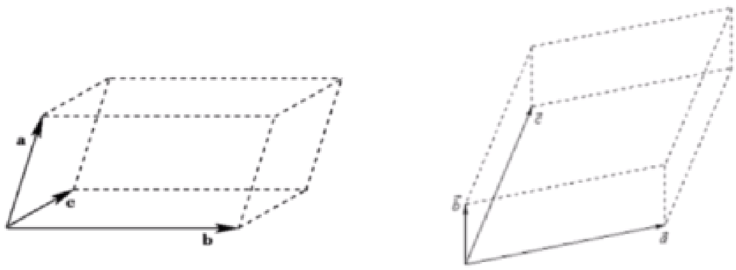
21. 行列式

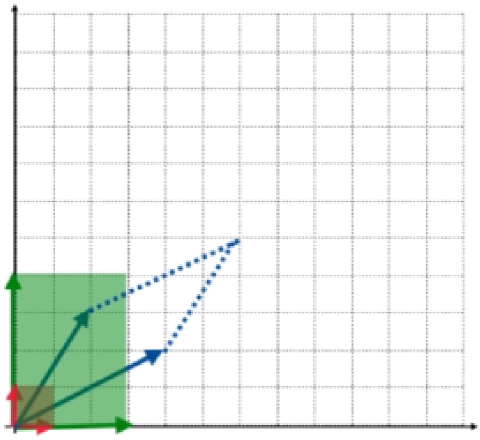
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%8C%E5%88%97%E5%BC%8F

行列式是**方阵**的一个属性。

矩阵可以表示一组向量，方阵表示n个n维向量

用一个数字表示这些向量组的不同?

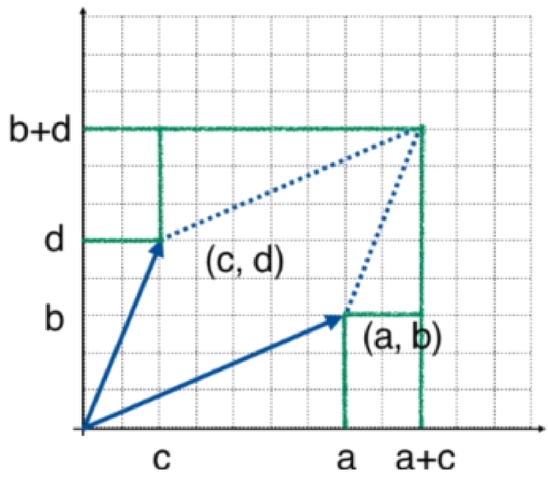




每组基之间的**有向**面积（或 体）来表示。

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+c)(b+d) - 2bc - cd - ab \\
&= ab + cb + ad + cd - 2bc - cd - ab \\
&= bc + ad - 2bc \\
&= ad - bc
\end{aligned}$$



有向

$ \begin{vmatrix} a & b \ c & d

\end{vmatrix}

ad - bc $

$ \begin{vmatrix} c & d \ a & b

\end{vmatrix}

bc - ad $

$ \begin{vmatrix} a & b \ c & d

\end{vmatrix}

-

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

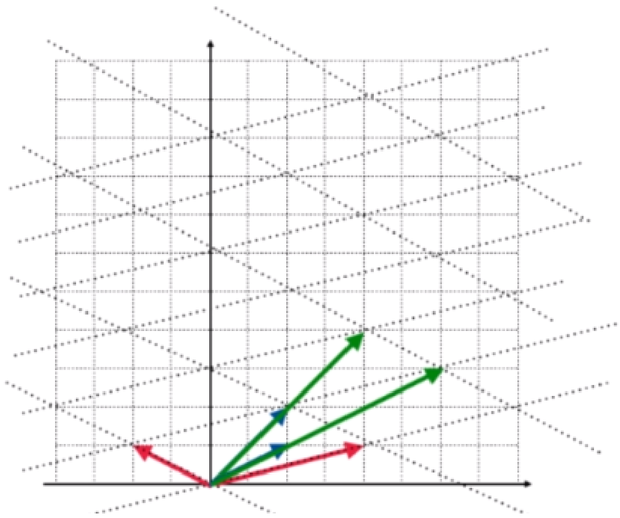
$

22. 特征值和特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

λ称为A的特征值，

$\vec{u}$称为对应于λ的特征向量。

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/jax.js

22.1 求解特征值和特征向量

注意：零向量肯定能满足，是平凡解，所以特征向量不考虑零向量。
思考：$\lambda = 0$的时候呢？
$A\vec{u} = 0$有非零解，所以$\lambda = 0$不通用，特征值可以为0.

=> $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$
=> $A\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0$
=> $A\vec{u} - \lambda I\vec{u} = 0$
=> $(A - \lambda I)u = 0$
=> 有非零解 => $det(A - \lambda I) = 0$

求解特征值和特征向量 $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ $\quad \det(A - \lambda I) = 0$ 特征方程

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda) - (-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

$\lambda_1 = 2 \quad (A - 2I)\vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{u} = 0 \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}s$$

$\lambda_2 = 3 \quad (A - 3I)\vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\vec{u} = 0$$

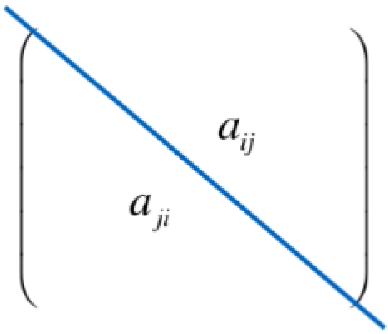
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{u} = 0 \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}s$$

23. 对称矩阵

$$A = A^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{5} \\ -1 & 2 & \pi \\ \sqrt{5} & \pi & 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

24. 矩阵的相似性

如果矩阵A，B满足$A = P^{-1}BP$，则称A和B相似。=》 $B = P^{-1}AP$

类比相似三角形

不同的视角观察相同的内容

观察B变换是在标准坐标系下，观察A变换是在P矩阵定义的坐标下，观察同一个矩阵，在不用坐标系下得到的结果也是不同的。

P是一个坐标系，则A变换是在P坐标系下观察的B变换 $A[\vec{x}]_P = P^{-1}BP[\vec{x}]_P$

$$\begin{array}{ccc} [\vec{x}]_P & \xrightarrow{\quad A \quad} & A[\vec{x}]_P \\ P \downarrow & & \uparrow P^{-1} \\ [\vec{x}]_\varepsilon = P[\vec{x}]_P & \xrightarrow{\quad B \quad} & B[\vec{x}]_\varepsilon = BP[\vec{x}]_P \end{array}$$

***A*和*B*的特征方程相同、特征值相同。**

$$\det(A-\lambda I) = \det(P^{-1}BP-\lambda I) = \det(P^{-1}BP-\lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}BP-P^{-1}\lambda P)$$

$$= \det(P^{-1}(B-\lambda I)P)$$

$$= \det(P^{-1})\det(B-\lambda I)\det(P) \quad = \det(B-\lambda I)\det(P^{-1}P)$$

$$= \det(B-\lambda I)$$

25. 矩阵的对角化

用最好的角度观察矩阵变换。

$A = PDP^{-1}$在p坐标系下观察A变换，得到D，D是一个对角矩阵。
如果A有n个线性无关的特征向量，则A和某个D相似。

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

证明：

$$AP = A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{u}_1 & A\vec{u}_2 & \dots & A\vec{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2 & \dots & \lambda_n\vec{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2 & \dots & \lambda_n\vec{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$