感知机

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
```

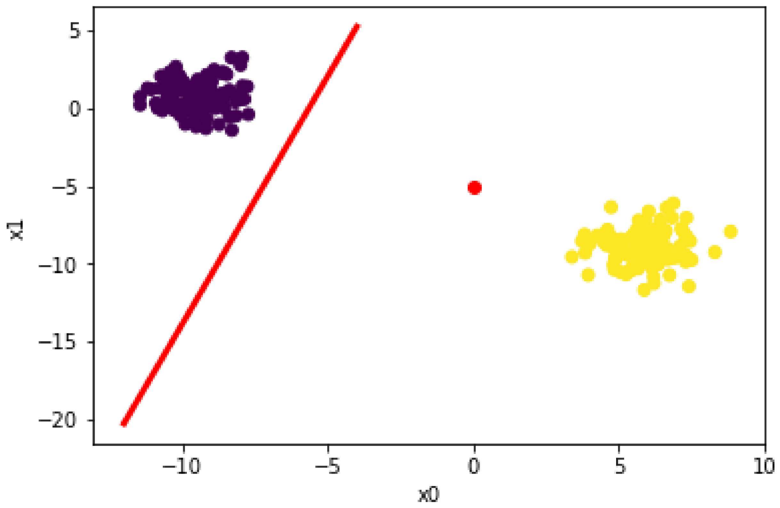
In [2]:

```
from sklearn.datasets import make_classification, make_blobs
from sklearn.linear_model import LogisticRegression

np.random.seed(600)
# 生成数据
X, y = make_blobs(n_samples=200,n_features=2, centers=2)

# 这里创建了一个逻辑回归模型
model = LogisticRegression(solver='lbfgs')
model.fit(X, y)

w0, w1 = model.coef_[0]
b = model.intercept_

line_x0 = [-12, -4]
line_x1 = [(-b-w0*(-12))/ w1, (-4*w0-b) / w1]
```

首先直观的认识一下感知机：对于下图的二维空间中的两类数据，我们能找到一条直线将两类数据分开（直线上方为一类，直线下方为一类），这么这条直线和其符号函数（激活函数）sign也就是一个我们的找到的感知机。

In [7]:

```
plt.plot(line_x0, line_x1, color='r', linewidth=3)
plt.scatter(0, -5, color='r')
plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], marker='o', c=y)
plt.xlabel('x0')
plt.ylabel('x1')
plt.show()
```



In [ ]:

```
w0*x0 + w1*x1 + b = 0
```

In [10]:

```
len(X)
```

Out[10]:

```
200
```

In [11]:

```
X[:5]
```

Out[11]:

```
array([[  7.28678297,  -8.51538322],
       [-10.62425645,   0.33021018],
       [  5.41530338,  -8.30187345],
       [  7.32179896,  -7.04656047],
       [ -7.72847208,  -0.39799556]])
```

In [12]:

```
len(y) == len(X)
```

Out[12]:

```
True
```

In [14]:

```
y[:5]
```

Out[14]:

```
array([1, 0, 1, 1, 0])
```

这里，什么是符号函数sign呢？
首先了解一下我们的数据，用集合$T = (\vec{x}_0, y_0), (\vec{x}_1, y_1), \dots, (\vec{x}_n, y_n)$表示。其中$(\vec{x}_i, y_i)$，表示数据中的第i个样本，$x_i$是样本的特征向量，$x_i$的维度是由数据本身决定，或者我们打算采用的特征数决定的，y_i是样本对于的分类标签。

那么以二维空间为例，即：x_i是二维的。假设我们现在有一条直线，其表达式是$w_0 x^{(0)} + w_1 x^{(1)} + b = 0$，其中$x^{(0)}$，$x^{(1)}$代表过该直线的任意一点，$x^{(0)}$是横坐标，$x^{(1)}$是纵坐标。
现在有一点$(2, 5)$，怎么判断他是在直线上方还是下方呢？
我们需要把(2,5)带入上面的公式, $\hat{y} = w_0 * 2 + w_1 * 5 + b$ $\hat{y}$是这个线性方程算出来的，代表预测值。如果$\hat{y} > 0$ 也就是点在直线上方，这个点被记作属于C1类。如果$\hat{y} < 0$ 也就是点在直线上方，这个点被记作属于C2类。

根据上面的解释，由于$\hat{y}$大于0的值最多可能和x_i的个数一样多，小于0的值也是同样的情况，所以，能不能经过一个函数$sign = f(\hat{y})$，使得$\hat{y}$为变为一个的值，又能反应类别呢。伟大的数学家们就定义了这么一个函数，确实能做到。

$$sign(\hat{y}) = \begin{cases} \hat{y} = 1, \hat{y} \geq 0 \\ \\ \hat{y} = -1, \hat{y} < 0 \end{cases}$$

$\hat{y}$ 经过上面sign函数后，我们就能把$(2, 5)$点分为 +1类 或者 -1类 了。

那么，我们怎么确定这条直线呢？
我们现在已经知道了X，所以就要用这些X来确定这条直线了。这里X是大写，表示一个矩阵，矩阵的每一行代码我们的一个样本，每一列代表样本的每个特征。

那么怎么开始求解呢，先随机生成我们的$\vec{w} = [w_0, w_1]$ 和 b，这就能在二维空间中确定一条直线了。然后接着看看这条直线能否把这两堆数据分开，如果不能全部分开，那么计算下还差多少（损失函数）才能分开，根据偏差的成调整$\vec{w}$和b的值。

一直重复这个过程，知道找到合适的$\vec{w}$和b，能把这两堆数据划分开。 计算过程使用梯度下降法，损失函数使用：

$$L(w, b) = -\sum_{x_i \in M} y_i(\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b)$$

关于为什么要使用梯度下降法的一点想法：

怎么求$L(\vec{w}, b)$在最小值呢？我们知道数学上，可以使用导数，即$L'(\vec{w}, b) = 0$的解。

对L求导数可能出现的情况：对系数矩阵X（因为x已知,我们求解的w和b） $X = \begin{bmatrix} --x_0-- \\ --x_1-- \\ \dots \\ --x_m-- \end{bmatrix}$

X是$m * n$矩阵，是方程的系数矩阵。同时代表着每个样本的特征向量$\vec{x}_i$是n维的，样本总数是m个。

a. 如果系数矩阵的秩$r(X)$小于增广矩阵的秩$r(X, -b)$，$r(XS) < r(X, -b)$，那么方程组无解
$r(X) < r(X, -b)$，那么方程组$L^{'}(w, b) = 0$无解；
b. 如果系统矩阵的秩小于方程组未知数个数，$r(X) = r(X, -b) < n$，那么方程组有多个解
$r(X) = r(X, -b) < n$，那么方程组$L^{'}(w, b) = 0$有多个解。
c. 如果系统矩阵的秩等于方程组未知数个数，$r(X) = r(X, -b) = n$，那么方程组有唯一解
$r(X) = r(X, -b) = n$，那么方程组$L^{'}(w, b) = 0$有唯一解。

1. 样本数量m**大于**特征维度n，则以上三种情况都有可能发生
2. 样本数量m**小于**特征维度n，则会发生a和b两种情况。

而只有c情况才能用逆求解。
所以不能直接使用$w = -X^{-1}b$求解。
于是有了梯度下降法求解。

下面来解释下损失函数的意义：

对于二维空间来说，那么，二维空间中的任一个点到直线$w_0 x^{(0)i} + w_1 x^{(1)i} + b = 0$的距离就是：

$$\frac{|w_0 x_i^{(0)} + w_1 x_i^{(1)} + b|}{\sqrt{w_0^2 + w_2^2}} = \frac{1}{||\vec{w}||}|\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b|$$

拓展到n维空间，右边的式子也是成立的，表示空间中的任一点到超平面 S($\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b$)的距离。

下面引用《统计学习》中的话

对于未分类的数据（$\vec{x}_i, y_i$）来说，$-y_i(\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b) > 0$成立。因为当$\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b > 0$时，$y_i = -1$;而当$\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b < 0$时，$y_i = +1$。所以，误分类点到$x_i$到超平面的S的距离为：

$$-\frac{1}{||\vec{w}||}|\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b|$$

这样，假设超平面S的误分类点集合为M，那么所有误分类点到超平面S的总距离就是：

$$-\frac{1}{||\vec{w}||}\sum_{x_i \in M} y_i(\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b)$$

不考虑$\frac{1}{||\vec{w}||}$，就得到了感知机学习的损失函数,M是误分类点的集合：

$$L(w, b) = -\sum_{x_i \in M} y_i(\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b)$$

因此，如果没有误分类点，损失函数值是0。而且，误分类点越少，误分类点离超平面就越近，损失函数就越小。 所以，我们感知机算法的求解问题就相当度找到使得$L(\vec{w}, b)$最小（这里由于L是大于等于0的，所以L的最小值是0）的$\vec{w}$、b。

梯度下降法求得是损失函数极小化问题的解，也就是说，求出的解有可能出现局部最优解，二不是全局最优解。

一下引用书中的步骤：
假设误分类点M的集合是固定的，那么损失函数$L^{'}(\vec{w}, b)$的梯度由

$$\nabla_w L(\vec{w}, b) = -\sum_{x_i \in M} y_i \vec{x}_i$$

$$\nabla_b L(\vec{w}, b) = -\sum_{x_i \in M} y_i$$

给出。

随机选取一个误差分类点(x_i, y_i)，对w, b进行更新：

$$\vec{w} < -\vec{w} + \eta y_i \vec{x}_i$$

$$b < -b + \eta y_i$$

式中η是步长，又称为学习率(learning rate)，控制w和b更新的幅度。
这样，通过迭代可以期待损失函数$L'(\vec{w}, b)$不断减小，直到为0。

算法 2.1（感知机学习算法的原始形式）

输入：训练数据集$T=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_N,y_N)\}$，其中$x_i\in\mathcal{X}=\mathbf{R}^n$，$y_i\in\mathcal{Y}=\{-1,+1\}$，$i=1,2,\cdots,N$；学习率$\eta\ (0<\eta\leqslant 1)$；

输出：w,b；感知机模型$f(x)=\mathrm{sign}(w\cdot x+b)$.

（1）选取初值w_0,b_0

（2）在训练集中选取数据(x_i,y_i)

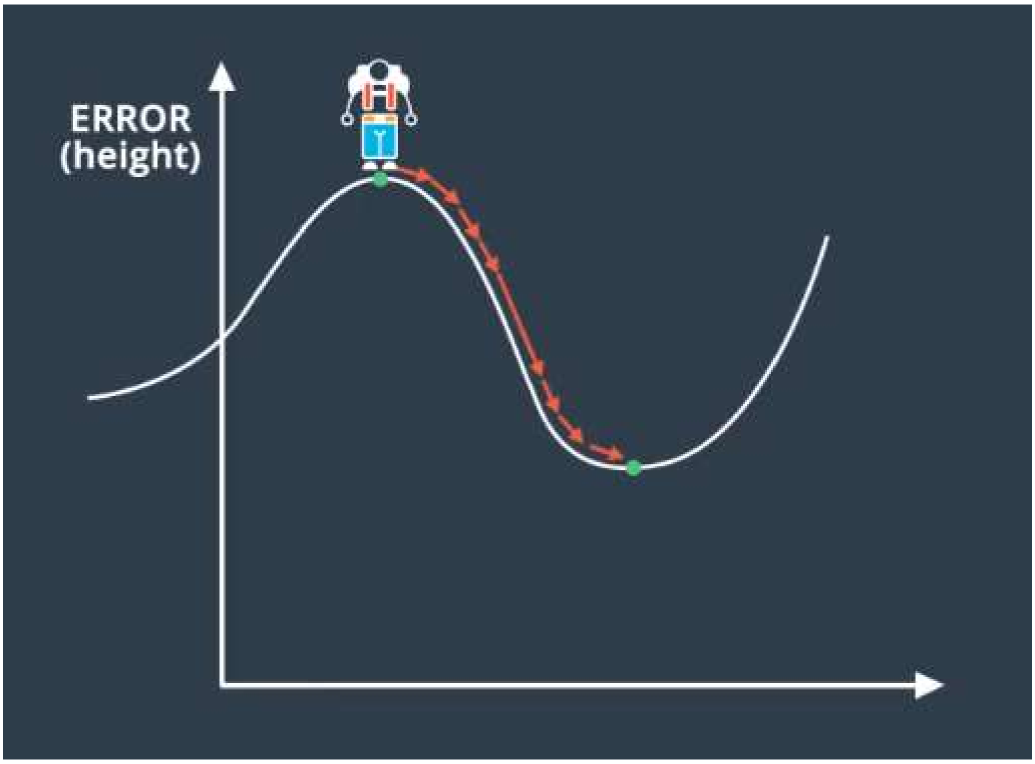
（3）如果$y_i(w\cdot x_i+b)\leqslant 0$

$$w\leftarrow w+\eta y_i x_i$$

$$b\leftarrow b+\eta y_i$$

（4）转至（2），直至训练集中没有误分类点. ■

这种学习算法直观上有如下解释：当一个实例点被误分类，即位于分离超平面的错误一侧时，则调整w，b的值，使分离超平面向该误分类点的一侧移动，以减少该误分类点与超平面间的距离，直至超平面越过该误分类点使其被正确分类.



代码实现

In [15]:

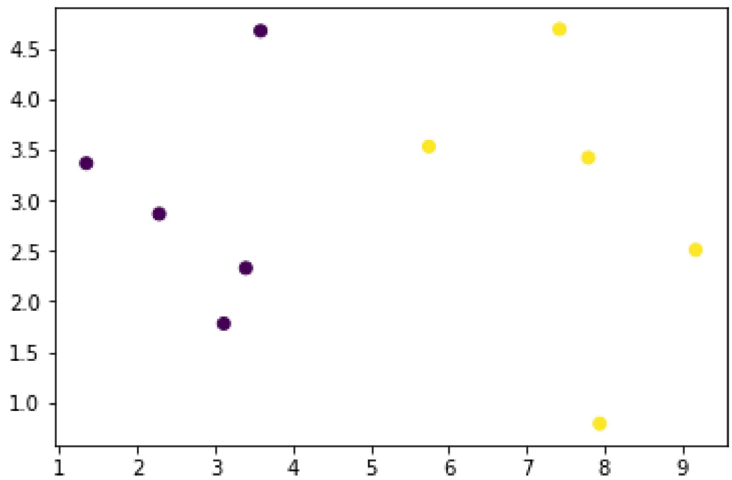
```
X = np.array([
    [3.393533211, 2.331273381],
    [3.110073483, 1.781539638],
    [1.343808831, 3.368360954],
    [3.582294042, 4.679179110],
    [2.280362439, 2.866990263],
    [7.423436942, 4.696522875],
    [5.745051997, 3.533989803],
    [9.172168622, 2.511101045],
    [7.792783481, 3.424088941],
    [7.939820817, 0.791637231]
])
y = np.array([-1, -1, -1, -1, -1,  1,  1,  1,  1,  1])
```

In [16]:

```
plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], marker='o', c=y)
```

Out[16]:

<matplotlib.collections.PathCollection at 0x2c7376c6e48>



In [17]:

```
# 符号函数
def sign(x, w, b):
    if x.dot(w) + b >= 0 :
        return 1
    else:
        return -1
```

In [18]:

```
# 损失函数
def loss_func(w, b):
    loss = 0
    for xi, yi in zip(X, y):
        y_hat = sign(xi, w, b)
        if yi != y_hat:
            loss += yi * (xi.dot(w) + b)
    return -loss
```

In [19]:

```
def train(X, y, eta=1e-1, epoch=100):
    w_list = []
    b_list = []
    loss_list = []
    # 随机生成w和b的初始值
    w = np.random.random(X[0].shape)
    b = np.random.random()
    # epoch 代表了所有的样本要循环多少遍
    for e in range(epoch):
        # 通过损失函数计算loss
        loss = loss_func(w, b)
        print('epoch {}: loos={}'.format(e, loss))
        # 把w b loss 存了起来，为了画图
        w_list.append(list(w))  # 注意list(w)
        b_list.append(b)
        loss_list.append(loss)
        # loss 为0的时候就可以结束计算了
        if loss == 0:
            break
        # 对于预测错误的样本，更新w 和 b
        for xi, yi in zip(X, y):
            if yi * (xi.dot(w) + b) < 0:
                w += eta * yi * xi
                b += eta * yi

    return w_list, b_list, loss_list
```

In [20]:

```
w_list, b_list, loss_list = train(X, y, eta=1e-2)
```

```
epoch 39: loos=0.4713324575054806
epoch 40: loos=0.5628718622522432
epoch 41: loos=0.6583320560104728
epoch 42: loos=0.8001353145728162
epoch 43: loos=0.9419385731351597
epoch 44: loos=1.0837418316975032
epoch 45: loos=1.2270710063039871
epoch 46: loos=0.19802605543999505
epoch 47: loos=0.6358923480187293
epoch 48: loos=0.7776956065810728
epoch 49: loos=0.9194988651434164
epoch 50: loos=1.0613021237057598
epoch 51: loos=0.11675923337651209
epoch 52: loos=0.4966554982563221
epoch 53: loos=0.613452640026986
epoch 54: loos=0.7552558985893294
epoch 55: loos=0.8970591571516728
epoch 56: loos=0.0435242679202645
epoch 57: loos=0.43590441604210667
```

In [22]:

```
# 生成直线数据
line_x0 = [1, 9]
line_x1_list = [((-bi-wi0*(9))/ wi1, (1*wi0-bi) / wi1) for (wi0, wi1), bi in zip(w_list, b_list)]
```

In [28]:

```
# 画图代码
from matplotlib.animation import FuncAnimation
%matplotlib notebook

fig, ax = plt.subplots()
ax.set_ylim(-5, 10)
ax.set_xlim(0, 10)

plt.scatter(X[:, 0], X[:, 1], marker='o', c=y)
line_x1 = line_x1_list[0]
line,  = ax.plot(line_x0, line_x1, 'r-', linewidth=2)

def update(i):
    label = 'epoch {}'.format(i)

    line.set_ydata(line_x1_list[i])
    ax.set_xlabel(label)
    return line, ax

anim = FuncAnimation(fig, update, frames=np.arange(0, len(loss_list)), interval=500)

plt.show()
```