1. Definición

La **Transformada de Laplace** de una función $f(t)$ está definida por la siguiente integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

donde:

- $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$.
- e^{-st} es un factor de atenuación.
- s es un número complejo con parte real positiva ($s > 0$).

La idea clave es transformar una función en el **dominio del tiempo** (t) en una función en el **dominio de Laplace** (s), donde es más fácil trabajar con ecuaciones diferenciales.

2. Propiedades básicas

Las siguientes propiedades son fundamentales para trabajar con la Transformada de Laplace.

Propiedad	Expresión
Linealidad	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
Derivadas	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
	$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Integración	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
Desplazamiento en el tiempo	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
Transformada de convolución	$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$

3. Tabla de transformadas más comunes

Las siguientes fórmulas son esenciales:

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1,2,3 \ldots$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{sen(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$
$\mathcal{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$
$\mathcal{L}\{senh(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2}$
$\mathcal{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

Resuelve la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace:

$y'' - 2y' + y = e^t$, con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

Solución:

1. **Aplicar la transformada de Laplace a ambos lados:**
   - Transformada de y'': $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$.
   - Transformada de y': $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$.
   - Transformada de y: $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$.
   - Transformada de e^t: $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$.

   Sustituyendo en la ecuación:

$$s^2Y(s) - s - 2\left(sY(s) - 1\right) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Simplificando:

$$s^2Y(s) - s - 2sY(s) + 2 + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Combinando términos:

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) - s + 2 = \frac{1}{s-1}$$

Observando que $s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$:

$$Y(s)(s-1)^2 = \frac{1}{s-1} + s - 2$$

2. **Despejar $Y(s)$:**

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-1} + s - 2}{(s-1)^2}$$

Simplificando el numerador ($s-2=(s-1)-1$):

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-1} + (s-1) - 1}{(s-1)^2}$$

Dividiendo en términos separados:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

3. **Calcular la transformada inversa de Laplace:**
   - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = \frac{t^2}{2}e^t.$
   - $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t.$
   - $\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = -te^t.$

   Combinando los resultados:

$$y(t) = e^t\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)$$