

# 制动器试验台的控制方法分析

邹德阳, 赵扬, 常德键

(山东大学数学学院, 济南, 250100)

**编者按:** 论文主要建立了制动器试验台控制方法的数学模型。在小时间段内制动器减速度保持不变的假定下, 根据前一阶段的转速或扭矩, 分别设计出目前时间段的驱动电流的控制方法, 并以能量误差为指标对它们进行了评价分析, 有一定创意。

**摘 要:** 论文主要建立了制动器试验台控制方法的数学模型。首先, 根据刚体定轴转动微分方程, 建立了电动机驱动电流依赖于可观测量转速或扭矩的数学模型; 然后, 在小时间段内制动器减速度保持不变的假定下, 根据已建立的数学模型, 分别设计出目前时间段驱动电流依赖于前一时间段可观测量瞬时转速或瞬时扭矩的控制方法, 并用补偿法思想对模型进行了多种改进和优化; 最后, 以能量误差作为指标, 利用数值积分等方法对各种控制和改进方法进行了定量的评价和分析。

**关键词:** 等效转动惯量, 驱动电流, 能量误差, 计算机控制, 角速度补偿

**分类号:** AMS(2000) 65P99 ;

**中图分类号:** TB115

**文献标识码:** A

## 1 问题分析与基本假设

汽车的制动器用于在行驶时使汽车减速或者停止, 直接影响着车辆行驶的安全, 是车辆设计的重要环节, 所以通过测试检验设计的优劣就显得尤为重要。鉴于车辆在设计阶段无法进行路试, 故只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。

制动器试验台控制问题是个物理模拟试验问题。针对题目要求, 本文首先根据模拟试验的原则, 假定试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致, 即实验台上主轴的瞬时转速与路试时车轮的瞬时转速保持一致, 制动扭矩也保持一致; 其次, 宏观上只考虑载荷在车辆平时具有的能量, 而忽略车轮自身转动具有的能量; 最后, 将整个制动时间离散化, 并假设每个小时间段内制动减速度保持不变, 且不考虑离散化产生的误差。最后, 由于是模拟试验, 所以不考虑电动机由于功率等问题而无法补偿电惯量的情况以及制动过程中风阻和轴承摩擦等阻力产生的能量损耗。

综合以上分析, 本文作如下基本假设:

(1) 电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比。

(2) 模拟实验中, 实验台上主轴的瞬时转速与路试时车轮的瞬时转速保持一致, 制动扭矩也保持一致。

(3) 路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷, 这个载荷在车辆平时具有的能量假设可以等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量。

(4) 把整个制动时间离散化为许多小的时间段, 并假设在每个小时间段内制动减速度是恒定的。

---

<sup>1</sup> 收稿日期: . 作者简介:

基金项目:

- (5) 忽略车轮自身转动具有的能量。
- (6) 不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。
- (7) 不管等效惯量与机械惯量相差多少, 电动机都能够补偿。
- (8) 忽略制动过程中风阻和轴承摩擦等阻力产生的能量损耗。
- (9) 假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大, 因此轮胎与地面无滑动。

## 2 符号说明

- $J$ : 等效的转动惯量 ( $kg \cdot m^2$ );  
 $J_0$ : 机械惯量, 即飞轮惯量之和加上主轴等机构的基础惯量 ( $kg \cdot m^2$ );  
 $\omega$ : 主轴的角速度 ( $rad/s$ );  
 $I$ : 驱动电流 ( $A$ );  
 $T$ : 离散化计算机控制时各个小时时间段的周期 ( $s$ );  
 $M_z$ : 制动扭矩 ( $N \cdot m$ );  
 $M_d^{(k)}$ : 第  $k$  个时间段的电动机驱动电流产生的扭矩 ( $N \cdot m$ );  
 $M_z^{(k)}$ : 第  $k$  个时间段的制动扭矩 ( $N \cdot m$ );  
 $\omega_0$ : 初始时与设定的车速相当的主轴角速度, 即轮缘的线速度除以车轮半径 ( $rad/s$ );  
 $\omega_k$ : 表示在  $kT$  时刻主轴的角速度 ( $rad/s$ ).

## 3 模型的建立与求解

### 3.1 问题一

记车辆制动时指定车轮承受的载荷为  $G$ , 线速度为  $v$ , 重力加速度为  $g$ 。

由于指定车轮在制动时承受的载荷在车辆平动时具有的能量等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量, 且与此能量相应的转动惯量即为等效的转动惯量。

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v^2 = \frac{1}{2} \cdot J \omega^2 \quad (1)$$

其中  $v = r \cdot \omega$ 。

由已知  $G = 6230N$ ,  $r = 0.286m$ , 可得相应的等效转动惯量为

$$J = Gr^2/g = \frac{6230 \times 0.286^2}{9.8} = 52.00kg \cdot m^2$$

### 3.2 问题二

设飞轮的厚度为  $h$ , 密度为  $\rho$ , 内半径为  $r_0$ , 外半径为  $r_1$ 。根据连续分布刚体的转动惯量计算公式<sup>[2]</sup>可得:

$$J = \iiint_M r^2 dm = \iiint_V \rho r^2 dV = 2\pi\rho h \int_{r_0}^{r_1} r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h(r_1^4 - r_0^4) \quad (2)$$

当飞轮的厚度为  $0.0392m$  时,

$$J_1 = \frac{1}{2}\pi \times 7810 \times 0.0392 \times (0.5^4 - 0.1^4) \approx 30kg \cdot m^2$$

当飞轮的厚度为  $0.0784m$  时,

$$J_2 = 2J_1 = 60kg \cdot m^2$$

当飞轮的厚度为  $0.1568m$  时,

$$J_3 = 4J_1 = 120kg \cdot m^2$$

综上所述, 可以组成的机械惯量共 8 个, 分别为:  $10kg \cdot m^2$ 、 $40kg \cdot m^2$ 、 $70kg \cdot m^2$ 、 $100kg \cdot m^2$ 、 $130kg \cdot m^2$ 、 $160kg \cdot m^2$ 、 $190kg \cdot m^2$ 、 $220kg \cdot m^2$ 。

由于电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为  $[-30, 30]kg \cdot m^2$ , 而问题一中得到的等效转动惯量为  $52kg \cdot m^2$ , 所以可把机械惯量设为  $40kg \cdot m^2$  或  $70kg \cdot m^2$ , 相应的需要用电动机补偿  $12kg \cdot m^2$  或  $-18kg \cdot m^2$  的惯量。

### 3.3 问题三

(1) 建立模型: 根据刚体定轴转动微分方程 [2]:

$$\sum M = J \frac{d\omega}{dt} \quad (3)$$

故理想刹车情况下制动力矩:

$$M_z = J \frac{d\omega}{dt} \quad (4)$$

设机械惯量是  $J_0$ , 则在试验情况下:

$$M_z + M_d = J_0 \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

由 (4), (5) 两式可得:

$$M_d = (J_0 - J) \frac{d\omega}{dt} \quad (6)$$

或由 (4), (6) 两式得:

$$M_d = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right) M_z \quad (7)$$

由题目可知: 一般假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比 (本题中比例系数取为  $1.5A/N \cdot m$ ), 且主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。所以驱动电流依赖于可观测量的数学模型为:

$$I = 1.5M_d = 1.5(J_0 - J) \frac{d\omega}{dt} \quad (8)$$

或者

$$I = 1.5M_d = 1.5\left(\frac{J_0}{J} - 1\right) M_z \quad (9)$$

备注: 以上推导过程中扭矩和角速度均为矢量。

(2) 根据题目要求, 假设制动减速度为常数, 将  $v_0 = 50km/h$ , 制动时间  $t = 5.0$  秒后车速为零, 代入到建立的数学模型中可得驱动电流  $I$ :

$$I = 1.5(J_0 - J) \frac{d\omega}{dt} = 1.5(J_0 - J) \frac{dv}{rt} = 1.5(J_0 - J) \frac{v_0}{rt} = 174.825A$$

### 3.4 问题四

本文采用能量误差作为评价标准对该方法执行的结果进行评价。

首先, 计算理想情况下等效转动惯量对应的能量, 由刚体定轴转动的动能定理<sup>[2]</sup>:

$$\sum W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (10)$$

由于只有制动力做功, 所以

$$W_z = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2} \times 48 \times \left[ \left( \frac{2\pi \times 257}{60} \right)^2 - \left( \frac{2\pi \times 514}{60} \right)^2 \right] \approx -52150.29J$$

然后计算在试验台上利用该控制方法制动器在制动过程中作的功, 根据定轴转动刚体上力矩做功公式<sup>[2]</sup>:

$$W_r = \int_a^b M_z(t)\omega(t)dt \quad (11)$$

令  $f(t) = M_z(t)\omega(t)$ , 根据数值分析中复合梯形公式<sup>[1]</sup>:

$$W_r = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \approx \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + f(b) \right] \quad (12)$$

其中,  $t_0 = a, t_n = b, h = t_{i+1} - t_i$ , 代入数据  $h = 0.01s, a = 0s, b = 4.67s$  及各时间点  $t_i$  的转速和扭矩, 利用 Matlab 计算得  $W_r = -49242.29J$ .

综上所述, 可得能量绝对误差:  $E = |W_r - W_z| = 2908J$ ; 相对误差:  $\varepsilon = |E/W_z| = 5.576\%$

由计算结果可知, 该控制方法能量误差较大, 不够精确。此外, 该控制方法下, 实验台上制动器在制动过程中消耗的能量小于所设计的路试时的制动器在制动过程中消耗能量, 这说明电流产生的扭矩不够大, 无法准确测试制动器的刹车性能, 可能造成高估制动器的制动性能。

### 3.5 问题五

利用第三题中的两个模型, 根据前一个时间段观测到的瞬时转速或瞬时扭矩, 分别给出两种电流值的控制方法, 且在这两种控制方法中, 均假定每一个小时时间段的制动减速度保持不变。

设  $T$  为每个小时时间段的周期,  $M_d^{(k)}$  为第  $k$  个时间段的电动机驱动电流产生的扭矩,  $M_z^{(k)}$  为第  $k$  个时间段的制动扭矩,  $\omega_0$  为初始时与设定的车速相当的主轴角速度,  $\omega_k$  为在  $kT$  时刻主轴的角速度,  $I_k$  为第  $k$  个时间段的电流值。

以下推导过程中扭矩和角速度均为矢量。

#### 3.5.1 控制方法一

假设角速度变化率不是突变的, 即有一定连续性。

根据问题三中的数学模型 (8):

$$I = 1.5M_d = 1.5(J_0 - J) \frac{d\omega}{dt}$$

由于每个小时间段内制动减速度是恒定的, 可知电流扭矩和角速度变化之间的关系:

$$M_d^{(k)} = (J_0 - J) \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{T}$$

用前一时间段的角速度差来代替这一时段的角速度差, 可得:

$$M_d^{(k)} = (J_0 - J) \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{T} \quad (13)$$

由此可得该控制方法中第  $k$  个时间段的驱动电流为:

$$I_k = 1.5M_d^{(k)} = 1.5(J_0 - J) \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{T} \quad (14)$$

$k = 2, 3, \dots, n-1, n$ . 其中  $n$  由制动终止时间决定.

### 3.5.2 控制方法二

假设制动扭矩的变化率不是突变的, 即有一定连续性。

根据问题三中的数学模型 (9):

$$I = 1.5M_d = 1.5\left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z$$

用前一个时间段的制动扭矩来推算本时间段的电流, 设计驱动电流控制方法如下:

$$I_k = 1.5M_d^{(k)} = 1.5\left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)} \quad (15)$$

$k = 2, 3, \dots, n-1, n$ , 其中  $n$  由制动终止时间决定

### 3.5.3 对以上两种控制方法的评价

对于上述两种控制方法, 依然均采用能量误差作为评价标准。

(1) 控制方法一的能量误差:

在试验情况下, 已知 (5)

$$M_z + M_d = J_0 \frac{d\omega}{dt}$$

由于在第  $k$  个时间段内  $M_z^k$  为定值, 在第  $k$  个时间段内分别对上式两边积分可得

$$M_z^{(k)}T + M_d^{(k)}T = J_0(\omega_k - \omega_{k-1}) \quad (16)$$

再将控制方法 (13) 代入到 (16) 中, 整理得  $kT$  时刻的主轴角速度

$$\omega_k = \left(2 - \frac{J}{J_0}\right)\omega_{k-1} + \left(\frac{J}{J_0} - 1\right)\omega_{k-2} + \frac{M_z^{(k)}T}{J_0} \quad (17)$$

首先, 计算理想情况下等效转动惯量对应的能量, 从开始制动到第  $k$  个时间段制动器消耗的能量

$$W_z^{(k)} = \frac{1}{2}J\omega_k^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (18)$$

然后, 计算在相对应的实验台上利用本控制方法制动器在制动过程中消耗的能量, 从开始制动到第  $k$  个时间段制动器消耗的能量

$$W_r^{(k)} = \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} M_z^{(i)}(t) \omega_i(t) dt \quad (19)$$

根据假设, 第  $i$  个时间段内制动减速度保持不变, 制动扭矩  $M_z^{(i)}$  为常数, 所以可得

$$W_r^{(k)} = \sum_{i=1}^k M_z^{(i)}(t) \int_{(i-1)T}^{iT} \omega_i(t) dt = \sum_{i=1}^k M_z^{(i)}(t) \frac{\omega_{i-1} + \omega_i}{2} T \quad (20)$$

对于每一个时间段, 都可以根据前一个时间段末观测到的角速度和本时间段制动扭矩, 由公式 (17) 得到该时间段末的角速度, 代入到能量公式 (18),(20) 即可分别求出理想情况下和试验情况下消耗的能量, 进而求得能量的绝对误差和相对误差。

(2) 控制方法二的能量误差:

将控制方法 (15) 代入到 (16) 整理得  $kT$  时刻的主轴角速度

$$\omega_k = \omega_{k-1} + \frac{T}{J_0} \left[ \left( \frac{J_0}{J} - 1 \right) M_z^{(k-1)} + M_z^{(k)} \right] \quad (21)$$

与第一种控制方法下求能量误差的方法相似, 利用已推得的能量公式 (18), (20), 可同理求得控制方法二的能量误差。

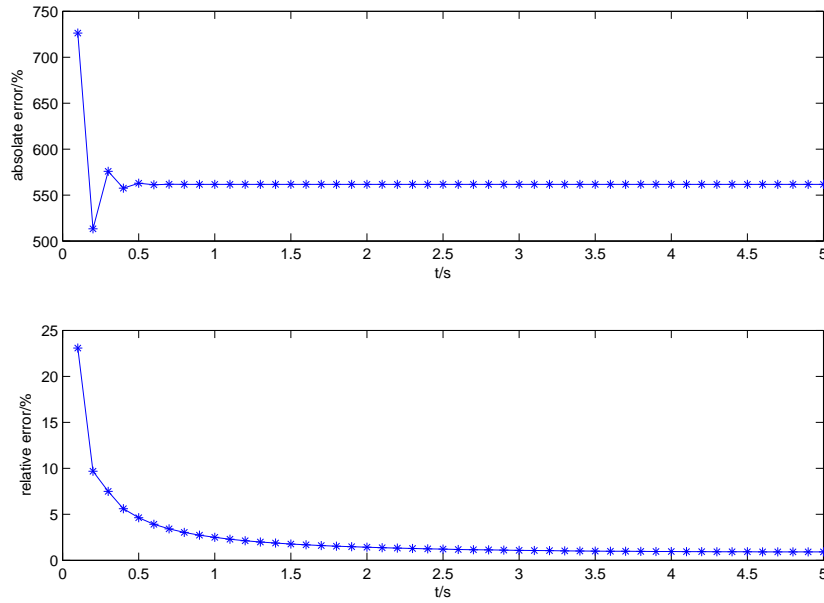


图 1: 控制方法一的能量误差

为便于定量给出直观图像, 我们进一步假设在整个制动过程中的制动扭矩保持不变, 并且在第一时间段内不加控制。然后根据问题一、二的数据  $J = 52kg \cdot m^2$ ,  $J_0 = 40 \cdot m^2$ ,  $r = 0.286m$ , 并假设刹车完成时间  $t = 5s$ , 初始速度  $v_0 = 50km \cdot h^{-1}$ ,  $T = 0.1s$ ,  $M_z = 505N \cdot m$ , 对第一、二种控制方法下的能量误差和角速度误差分别用 Matlab 进行数据处理, 得到图 1, 图 2:

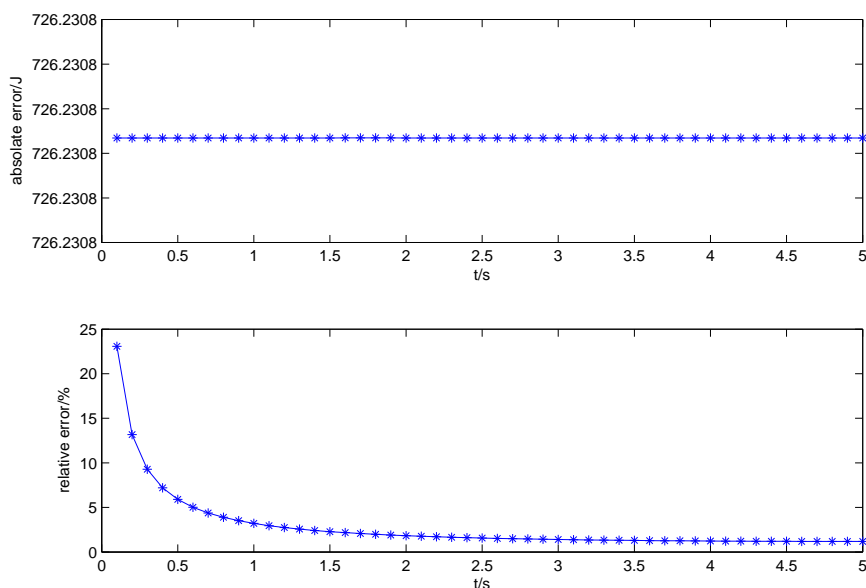


图 2: 第五题控制方法二下能量误差

从以上两图可以看出: 该这两种控制方法下, 实验台上制动器在制动过程中消耗的能量小于所设计的路试时的制动器在制动过程中消耗能量, 电流产生的电惯量不足以补偿缺少的机械惯量, 使得控制器的监测不够准确, 这是由初始参量不足造成的。此外, 能量绝对误差和相对误差随着制动过程的进行不断减小, 最终趋于非零的稳定值, 说明这两种控制方法不能有效地修正误差, 初始误差会一直存在。这是由于以上两种方法只利用之前一个时间段的观测值, 而未考虑整个制动过程, 所以不能有效的纠正初始观测值未知等因素造成的误差, 以下用角速度补偿法进行改进。

### 3.6 问题六

角速度补偿法是在之前的控制方法的基础上, 把每个时间段的控制电流分为两部分, 除原有的控制电流外, 又增加补偿电流, 用于补偿当前角速度与理论角速度的差值, 本文用补偿的思想设计了以下两种补偿方法。

#### 3.6.1 改进方法一

将每一时间段电流理想值与实际值的差作为下一时间段的补偿电流, 加在下一时间段的

电流上, 以达到减小误差, 优化控制方法的目的。设  $M_b^{(k)}$  为第  $k$  个时间段补充的电流扭矩,  $M_c^{(k)}$  为第  $k$  个时间段修正后的电流扭矩, 则有

$$M_c^{(k)} = M_d^{(k)} + M_b^{(k)} \quad (22)$$

设  $M_l^{(k)}$  为理想状态下  $kT$  时刻的电流扭矩, 则

$$M_b^{(k)} = M_l^{(k-1)} - M_d^{(k-1)} \quad (23)$$

而在理想状态下, 由模型 (7)

$$M_l^{(k-1)} = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)} \quad (24)$$

由控制方法 (15)

$$M_d^{(k)} = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)}$$

将 (23)、(24)、(15) 三式代入到 (22) 中可得

$$M_c^{(k)} = M_d^{(k)} + M_b^{(k)} = 2\left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)} - M_d^{(k-1)} \quad (25)$$

由第  $k-1$  时间段的角动量定理可得:

$$M_z^{(k-1)} + M_d^{(k-1)} = J_0 \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{T} \quad (26)$$

则由 (25)、(26) 可求得  $M_c^{(k)}$ , 并由此得计算机控制方法

$$I_c^{(k)} = 1.5M_c^{(k)} = 1.5 \left[ \left(\frac{2J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)} - J_0 \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{T} \right] \quad (27)$$

为进行定量分析, 我们采用第四问的数据, 此数据不规则, 能较好的检测在制动力矩非恒定时控制方法的优劣。用 Matlab 进行数据处理, 得到以下图表:

### 3.6.2 改进方法二

改进方法二不仅使用前一时段的观测值角速度及制动扭矩, 而且使用了前面的更多状态的观测值来计算理想情况下前一时间段的角速度, 以得到更精确的补偿电扭矩, 从而减小误差

同改进方法二中 (22)、(15)

$$M_c^{(k)} = M_d^{(k)} + M_b^{(k)}$$

$$M_d^{(k)} = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right)M_z^{(k-1)}$$

对于  $M_b^{(k)}$ , 按以下方法给出: 设  $M_z^{(i)}$  为第  $i$  个时间段的制动扭矩,  $\omega_l^{(i)}$  表示在理想状态下第  $i$  个时间段末的角速度, 那么在理想状态下, 根据刚体定轴转动微分方程可以得到

$$M_z^{(i)} = J \frac{\omega_l^{(i)} - \omega_l^{(i-1)}}{T} \quad (28)$$



将上式从  $i=1$  到  $k-1$  累加可得

$$\sum_{i=1}^{k-1} M_z^{(i)} = J \frac{\omega_l^{(k-1)} - \omega_l^{(0)}}{T} \quad (29)$$

从而求得

$$\omega_l^{(k-1)} = \omega_l^{(0)} + \frac{T}{J} \sum_{i=1}^{k-1} M_z^{(i)} \quad (30)$$

另外

$$M_b^k = J_0 \frac{\omega_l^{(k-1)} - \omega_{k-1}}{T} \quad (31)$$

综合以上各式可以得到

$$M_c^{(k)} = M_d^{(k)} + M_b^{(k)} = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right) M_z^{k-1} + J_0 \frac{\omega_l^{(0)} + \frac{T}{J} \sum_{i=1}^{k-1} M_z^{(i)} - \omega_{k-1}}{T} \quad (32)$$

并由此可得改进方法三的控制电流为:

$$I_c^{(k)} = 1.5 M_c^{(k)} = 1.5 \left[ \left(\frac{J_0}{J} - 1\right) M_z^{k-1} + J_0 \frac{\omega_l^{(0)} + \frac{T}{J} \sum_{i=1}^{k-1} M_z^{(i)} - \omega_{k-1}}{T} \right] \quad (33)$$

对于该控制方法, 用 Matlab 进行数据处理, 得到图 3.

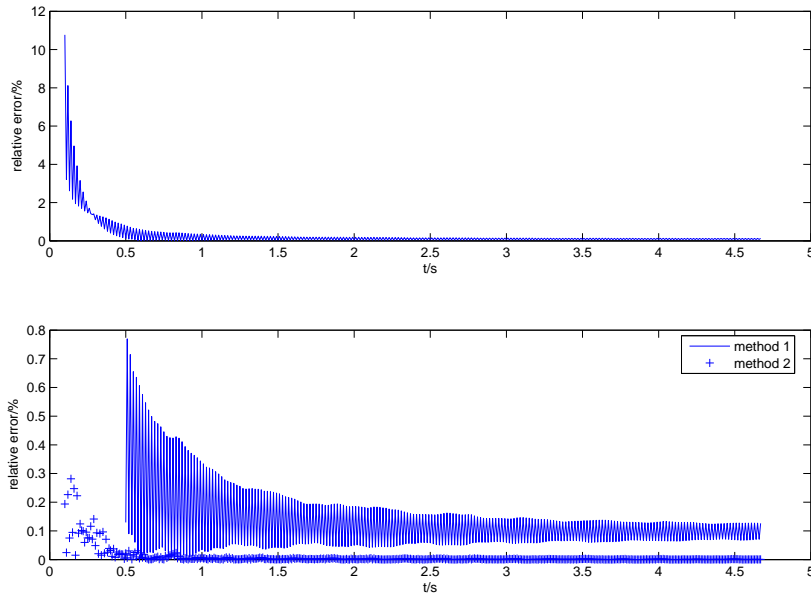


图 3: 两种改进控制方法下能量相对误差

## 参考文献:

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires. 数值分析 (第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008
- [2] 王永岩. 理论力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [3] 王慧. 计算机控制系统 (第二版) [M]. 北京: 化学工业出版社, 2005
- [4] 林荣会, 刘明美. 制动器试验台中模拟负载的新方法 [J]. 机械科学与技术, 第 26 卷, 1997 年第 6 期: 58-60

## Analysis on Control Methods of Brake Test Bench

Deyang ZOU, Yang ZHAO, Dejian CHANG

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan, 250100)

**Abstract:** In this paper, some control methods of brake test bench are established. Firstly, according to the differential equation about fixed-axis rotation rule of rigid body, two mathematical models are derived based on the relationship between the motor drive current and observable quantities. Then, under the hypothesis of constant deceleration in each time interval, two control methods of current are given based on the instantaneous angular velocity and torque respectively. Moreover, two improved control methods are given by compensating angular velocity, and evaluated by energy error using numerical integration.

**Keywords:** equivalent inertia, drive current, energy error, computer control, compensation of angular velocity