竞赛论坛

关于2011年CUMCM-D题的一种解法与若干思考

杨忠,张岐良,徐小辉
指导教师:凌巍炜
(江西应用技术职业学院,江西 赣州 341000)

摘　要:本文系2011年全国大学生数学建模竞赛专科组高教社杯获得者针对本年度竞赛D题的一种解法与若干思考的阐述。首先系统介绍了对此题认识和解题思路;其次提供了一类基于启发式算法求解此问题的参考解法;最后对该问题提出了进一步研究的一个方向。

关键词:数学建模竞赛;天然肠衣;搭配方案;启发式算法

中图分类号:O29;TP391　　文献标志码:A　　文章编号:2095-3070(2012)02-0035-04

1　引言

2011年全国大学生数学建模竞赛D题为"天然肠衣的搭配"问题。针对天然肠衣制作加工中的组装工序,要求根据题目给出的成品规格表和原料描述表,在满足公司的5条要求的基础上设计一个原料搭配方案,使得工人可以根据这个方案"照方抓药"进行生产。

公司对搭配方案的5条要求为:1)对于给定的一批原料,装出的成品捆数越多越好;2)对于成品捆数相同的方案,最短长度最长的成品越多,方案越好;3)为提高原料使用率,总长度允许有±0.5米的误差,总根数允许比标准少1根;4)某种规格对应原料如果出现剩余,可以降级使用;5)为了食品保鲜,要求在30分钟内产生方案。

2　对问题分析与解题的思路

2.1　对问题的分析

此题题目背景简单,基本无需专业背景知识,这对参赛者降低了要求,符合专科组别学生的认知。题目有一些创新之处,比如目标函数不是通常所见的单目标或双目标,而是递进式的两层目标,另外给出了一个很少见但有很有深意的计算时间要求"在半小时内产生方案",这些都让我们耳目一新,也给模型的构建和求解带来了难度。对于题目中的5个要求,要求1)、3)的理解并不复杂;要求2)的模型建立有一定的难度;要求4)给我们留下了假设的空间,但对如何降级也给求解带来了一定的难度;要求5)对算法的实时性提出了要求,增大了计算的难度也扩宽了创新空间。

从题目本身出发,入手简单,要给出搭配方案并不太困难,人工搭配与一定的计算机辅助就可以做到,对于专科的同学来说是可以解决的,但从"建立上述问题的数学模型"、"给出求解方法"此解答要求的两个本质性方面来看,对这一问题从数学角度作更深一层次的探讨,其实已经超出大部分专科学生的能力范畴。在模型构建中,单纯建立以最大捆数为目标,以原材料数量限制及要求3)为约束的优化模型是比较容易的,但是要建立满足条件1)—4)的综合模型却有一定的困难。在模型求解方面,很显然这是一个整数规划问题。而众所周知,整数规划是一类典型的NPC问题。当求解规模不大时,可以轻易地求出整数规划的最优解。而当求解规模较大时,例如本题的求解规模,求解的时间将会非常长。因而针对这一类有计算时间要求的整数规划模型的求解,启发计算或利用现代智能算法近似搜索计算成了唯一的途径。构建一个有效的、结果较优

收稿日期:2012-05-18
通讯作者:凌巍炜,E-mail:ling0976@163.com

的好算法，对于专科的同学来说是有很大的挑战性的。

2.2 解题的思路

首先，分析表格数据，把原料描述表转换成档数及其对应的简化长度值表。

其次，明确建模目的。由题意可知要解决的问题是求出一种满足5项要求的搭配方案。进一步分析，题目中5个要求中要求1)、2)是目标。要求1)要达到捆数最大，而满足1)的搭配方案可能有多种，再在满足要求1)的搭配方案中进一步优选即达到满足要求2)，所以这是一个递进的两个层次的规划问题；要求3)、4)为约束条件，其中要求3)为成品的根数约束和长度约束，要求4)为降级约束；要求5)是要求能在30分钟内产生方案，这其实也暗示我们对于这个NPC问题，直接根据模型不一定能在一定时间内求出，所以当在半小时内求不出解时，应该利用启发式算法来求解。综上我们明确了建模目的，即建立以要求1)、2)为目标函数，以要求3)，4)为约束条件的整数规划模型，如果模型对应的计算程序不能在30分钟内运行出结果，就应该考虑启发式求解该问题。

在建模思路方面，对于这种有多要求的题目的模型建立，我们可以采用逐个击破的方法。首先确立约束条件，主要有要求3)、4)的约束和原料本身数量的限制。对于降级使用，为了减少题目复杂度可以合理假设为只降一级使用。其次，对于目标函数有两个，也即要求1)、2)所给。要求2)是在达到要求1)的基础上再从中选取更优的搭配方案，所以应该先求出以要求1)为目标的搭配方案，其中可能含有多个方案使其满足要求1)、3)、4)。然后再以要求2)中最短长度最长的成品数最大为目标，这时所求的方案既为满足所有要求的方案。

对于这种NPC问题的求解，基于计算方法和当前软件的局限性，我们可以进行试算，试算结果表明不能在30分钟内求解出答案，所以我们需要借助于启发式算法、现代算法等来求解该NPC问题。对于整数规划模型，求解速度本就是困扰着我们的问题。在紧张激烈的竞赛中和这个瓶颈不期而遇，我们只有两条路可走，一是迎难而上，降低问题的规模，缩短求解时间；二是另辟蹊径，寻找新的求解方法。

关于启发式算法的思路方面，由生活经验可知一个好的肠衣搭配方案应该使工人组装时越方便越好，而这个“方便”可以理解为尽量使捆法数越少越好，即尽量用一种捆法使得捆数达到最大，依此类推。根据这一理念就可以产生一种算法，算法的思路为：第一步，求解以满足要求3)、4)和原料本身数量的限制为约束条件的整数规划模型，即先求出捆数最大的捆法，此种捆法可能有多种；第二步，根据要求2)对多种捆法进行选优；第三步，对于原料剩余部分返回第一步，在剩余原料中又可求得一种捆法使得捆数达到最大并且为要求2)中的最优方案，依次求解下去直到最终没有解为止。将前面求得的捆数相加，将其相应捆法和原料对应剩余根数记入，即为不降级时的近似最大捆数及相应的搭配方案；第四步，求降级使用的近似最大捆数及相应的搭配方案。虽然题目中没有降级使用的具体要求，但根据经验可知应该尽量使得长度长的先用完，所以应三级降到二级算起更符合实际。对于降级部分原料，仍然使用第一、二、三步即可求得降级部分的近似最大捆数和相应的搭配方案。

3 模型建立与求解

基于题目两个目标为递进的两个层次的情形，在模型构建中，亦采用分步建立的办法。首先，建立以3种规格产品组装的最多捆数为目标，即建立满足要求1)、3)、4)的优化模型；其次，基于第一步模型的求解结果，建立满足要求2)的优化模型。

3.1 基于求3种规格产品的最多捆数的模型建立

依据题意要求，以各种规格产品的最大捆数之和为目标函数，以要求3)及原材料的数量限制为约束条件，并同时增加考虑降级使用的情况，建立整数规划模型。

目标函数为：$\max Z=\sum_{k=1}^{3}n_k+Q_1+Q_2$，

约束条件为：$L-0.5\leqslant\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k}m_ix_{ij}\leqslant L+0.5\quad(k=1,2,3;j=1,\cdots,n_k)$， (1)

$$g_k - 1 \leqslant \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} x_{ij} \leqslant g_k \quad (k=1,2,3;j=1,\cdots,n_k), \tag{2}$$

$$p_i - \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij} = v_i \quad (k=1,2,3;j=1,\cdots,n_k), \tag{3}$$

$$L - 0.5 \leqslant \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_{k+1}} m_i s_{ij} \leqslant L + 0.5 \quad (k=1,2,3;j=1,\cdots,n_k), \tag{4}$$

$$g_k - 1 \leqslant \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} s_{ij} \leqslant g_k \quad (k=1,2,3;j=1,\cdots,n_k), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{Q_1} s_{ij} \leqslant v_i \quad (i=1,\cdots,y_1), \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{Q_1+Q_2} s_{ij} \leqslant v_i \quad (i=y_1+1,\cdots,y_2), \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{Q_2} s_{ij} \leqslant v_i \quad (i=y_2+1,\cdots,y_3), \tag{8}$$

其中，x_{ij}，s_{ij}，v_i 均取正整数，L 表示每捆成品的总长度；m_i 表示第 i 档长度原料的长度；x_{ij} 表示第 j 捆成品中第 i 档长度原料的根数；y_k 表示 3 米到第 k 规格最长长度原料的长度档数；g_k 表示第 k 规格成品中每捆的根数；p_i 表示第 i 档长度原料的根数；n_k 表示原料不降级使用时第 k 规格原料组装为成品的捆数；v_i 表示原料不降级使用时第 i 档长度原料组装完后剩余的根数；s_{ij} 表示原料降级使用时第 j 捆成品中第 i 档长度原料的根数；Q_1 表示规格 2 剩余的原料降级后与规格 1 剩余的原料组装成成品的捆数；Q_2 表示规格 3 剩余的原料降级后与规格 2 剩余的原料组装成成品的捆数。

说明：约束(1)、(2) 分别要求 3) 的成品总长度约束和总根数约束；约束(3) 为每种规格的原料总根数减去对应原料组装成成品的根数等于剩余的根数，要求剩余的根数大于等于 0，即原料本身数量的限制；约束(4)、(5) 分别表示降级使用的原料部分满足要求 3) 的成品总长度约束和总根数约束；约束(6)、(7)、(8) 分别为每种规格产品中用于降级使用的原料数量不能超过每种规格产品中降级前组装成成品中剩余的原料数量。

3.2　增加考虑要求 2) 的"优中选优"的模型建立

对于成品捆数相同的方案，最短长度最长的成品越多，方案越好，即

$$\max \operatorname{card}\{\min\{s_u\} \mid u=1,\cdots,n \text{ 且 } \min\{s_u\}=M\}, \tag{9}$$

其中，$\max\{\min\{s_u\}\}=M$；$\operatorname{card}(A)$ 表示集合 A 的元素个数；s_u 表示捆法的方案；M 表示最短长度最长的成品捆数。

3.3　启发式算法的构建

算法符号说明：r_j 表示第 j 步最多捆数的取法。

Step1　初始 $j=1$ 时求解模型：

$$\max r_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_k - 1 \leqslant \displaystyle\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} r_j \leqslant g_k \\ L - 0.5 \leqslant \displaystyle\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} r_j m_i \leqslant L + 0.5 \\ v_i = p_i - r_j m_i \geqslant 0 \\ m_i, r_j \text{ 均取非负整数} \end{cases};$$

Step2　利用式(9) 选择最短长度最长的成品最多的方案，得一种最佳方案；

Step3　将 v_i 换为 p_i 返回 Step1，令 $j=j+1$，当 r_j 无可行解或 $r_j=0$ 时终止 j。执行 $n_k=\sum_{j=1}^{j} r_j$；

Step4　$k=1$ 开始，令 $k=k+1$，至 $k=3$ 止；

Step5　将Step3中剩余的重新记为 p_i，再将 i 的求和范围变为 $y_{k-1}+1$ 到 y_{k+1}，转Step1，到Step3时则转Step6；

Step6　$k=2$ 开始，令 $k=k+1$，至 $k=1$ 止。

根据启发式算法，针对题目给出的原料描述表，利用LINGO软件，从规格3开始计算，求得了每种规格下的最大捆数情况下的最好方案，进而求得最大捆数总和为191捆，求解时间为16分钟。

若降级处理为将上一规格剩余原料降级至下一规格，与下一规格原料合成进行优化搭配，则启发式算法只要将“Step4、Step5、Step6”更改为“Step4：将Step3中剩余的重新记为 p_i 再降到下一规格，将 i 的求和范围变为 $y_{k-1}+1$ 到 y_{k+1}，转Step1。 $k=3$ 始，至 $k=1$ 止。”，该算法求得最大捆数总和为192捆，求解时间为35分钟。

4　对问题的进一步思考

对于此天然肠衣的搭配问题，赛后我们对此问题进行了更深入的思考。此题的难点就在于整数规划模型的求解，求解方法即要有效又要满足时间要求。整数规划问题的特殊性是变量要求是整数，所以它的求解方法受到了一定的限制。因此，求解整数规划问题比求一般的数学规划问题更具有挑战性。当然，由于问题的可行域内只有有限个整点，所以我们可以尝试用穷举法。通过比较可行域内每个整点的函数值，从而找到原问题的最优解。对于小规模的问题这种方法是可行的，但是对于较大规模的问题，穷举法显然不可行。因为穷举法的计算量是随着变量的增加呈指数增长的。因此，构造启发式算法求解整数规划是势在必行的。

对于整数规划的求解算法，国内外许多学者都进行了深入的研究，文献[1-5]提供了几种主要的整数规划的求解算法。我们认为，站在前人的研究基础上，结合本问题，构建快速而有效的求解算法，值得我们进一步地深入思考和研究。

参考文献

[1]王粉兰.非线性整数规划问题的若干新算法[D].上海：上海大学，2005.

[2]李肯立，李庆华.整数规划的新算法[J].小型微型计算机系统，2004，25(7)：1298-1302.

[3]张天鹤.整数线性规划问题解法探究[J].湖州职业技术学院学报，2005(4)：74-76.

[4]宛士春，郭永发，陶凤玲.邻域整点搜索法求解标准型纯整数规划[J].武汉大学学报：工学版，2004，37(5)：13-17.

[5]徐小来，雷英杰，戴文义.基于改进微粒群算法的直觉模糊整数规划[J].计算机应用，2008，28(9)：2395-2397.

A Solution to the Problem D in the 2011 CUMCM and Some Relevant Reflection

Yang Zhong，Zhang Qiliang，Xu Xiaohui，Ling Weiwei

(Jiangxi College of Applied Technology，Ganzhou，Jiangxi 341000，China)

Abstract：This article is written by the prize-winner of the Higher Education Press Cup in the 2011 China Undergraduate Mathematical Modeling Contest and has put forward a solution to the Subject D in this year's contest as well as some reflection on the modeling contest. First of all，the article has systematically introduced the author's comprehension and thinking of the subject and has provided a reference solution to the subject based on the heuristic algorithm. Finally，the article has further put forward one research directions of the problem.

Key words：mathematical modeling contest；natural casing；collocation solution；heuristic algorithm

作者简介

杨忠，江西应用技术职业学院机械制造与自动化专业2010级专科生。

张岐良，江西应用技术职业学院工程造价专业2010级专科生。

徐小辉，江西应用技术职业学院电子信息工程技术专业2010级专科生。

凌巍炜，讲师，在职硕士，研究方向：数学建模教育、金融数学。