第1题 球状闪电

作为一名秘密任务的长官，你和首席科学家大宝有如下的谈话。

科学家："长官，我们已经掌握了球状闪电的控制规律，我们发现实验室中的球状闪电半径的变化率$v(t)$ 满足如下的方程。

$$v = ar + r^3 - r^5.$$

这里$r(t)$ 表示球状闪电的半径，而t 是时间变量。初始时刻，没有球状闪电，即$r(0) = 0$。相应地，我们也有$v(0) = 0$。而$a \in \mathbb{R}$ 可以被人为控制，您可以通过拉动一个控制杆来迅速的改变a 的值。我们给它的预设值是$a = -1$。"

你："做的漂亮，博士！a 是我们的唯一控制方式吗？这似乎并不能把球状闪电启动起来。"

科学家："您说的对，长官。我们的确有另一个控制方式，就是踢一下仪器。"

你："博士，您没开玩笑吧？踢一下？"

科学家："没错，如果踢一下的话，$r(t)$ 的值就会瞬间提高ε（ε 远小于1）。"

你："明白了，这的确有帮助。我们今天的测试目标是启动球状闪电，让它的半径严格超过$\sqrt{2}$，再让它逐渐完全消失。"

科学家："是的，长官。我们为此设计了四个控制方案。

请问长官您觉得这些方案如何？"

你看了一下这些选项，发现其中可行的方案有（）。

(A). 设置$a = 2$, 踢一下仪器，等球状闪电半径严格超过$\sqrt{2}$，再设置$a = -\frac{1}{2}$；

(B). 设置$a = 3$, 踢一下仪器，等球状闪电半径严格超过$\sqrt{2}$，再设置$a = -\frac{1}{3}$；

(C). 设置$a = 4$, 踢一下仪器，等球状闪电半径严格超过$\sqrt{2}$，再设置$a = -\frac{1}{4}$；

(D). 设置$a = 5$, 踢一下仪器，等球状闪电半径严格超过$\sqrt{2}$，再设置$a = -\frac{1}{5}$。

1 答案 选(B)。

我们记变化率方程为

$$v = f(r; a).$$

如果$v > 0$ 则r 随时间增长；如果$v < 0$ 则r 随时间下降；如果$v = 0$ 则r 保持不变。

我们首先注意到$f(0,a)=0$，即$r=0$ 永远是一个根。但是变化率函数的非负实根数量受a 的取值影响。事实上，我们可以算出来$f(r,a)=0$ 的所有的根：

$$r_1=0,\quad r_2=-\frac{\sqrt{1-\sqrt{4a+1}}}{\sqrt{2}},\quad r_3=\frac{\sqrt{1-\sqrt{4a+1}}}{\sqrt{2}},$$

$$r_4=-\frac{\sqrt{1+\sqrt{4a+1}}}{\sqrt{2}},\quad r_5=\frac{\sqrt{1+\sqrt{4a+1}}}{\sqrt{2}}.$$

下面我们分类讨论，当$a>0$ 的时候，我们有两个非负实根$r_1=0$ 和$r_5>0$。我们容易验证，当$r\in(0,r_5)$ 时$v>0$，但$r\in(r_5,+\infty)$ 时$v<0$。于是当$a>0$ 的时候，如果我们踢一下机器，就能启动球状闪电，闪电的半径逐渐增大到r_5，但不会超过r_5。

为了使得半径严格超过$\sqrt{2}$，我们需要令$r_5>\sqrt{2}$。所以启动时，我们需要令$a>2$。这样排除了选项(A) 。

当$-\frac{1}{4}<a<0$ 的时候，我们有三个非负实根，从小到大依次是$r_1=0$, $r_3>0$ 和$r_5>0$。特别地，$r_5<1$ 且当$r\in(r_5,+\infty)$ 时，$v<0$ 半径缩小。如果此刻$r=\sqrt{2}$，半径会逐步缩小直到$r=r_5$，但不会小于r_5。所以此时，球状闪电不能完全消失。这样，排除了选项(D)。

当$a=-\frac{1}{4}$ 时，我们有两个非负实根$r_1=0$ 和$r_5=\frac{1}{\sqrt{2}}$。类似上述情况，如果此刻$r=\sqrt{2}$，半径会逐步缩小直到$r=r_5$，但不会小于r_5。所以此时，球状闪电不能完全消失。这样，排除了选项(C)。

当$a<-\frac{1}{4}$ 时，我们只有一个非负实根$r_1=0$，且当$r>0$ 时，$v<0$。所以球状闪电会逐渐完全消失。选项(B) 的确是合理的选项。

第2题 设两个凸八面体O_1, O_2的每个面都是三角形, 且O_1在O_2的**内部**. 记$O_1(O_2)$的棱长之和为$\ell_1(\ell_2)$. 当我们计算ℓ_1/ℓ_2时, 可能得到以下哪个(些)值?（多选题）

(A). 0.64

(B). 1

(C). 1.44

(D). 1.96

(E). 4

2 答案 选 **(A) (B) (C) (D)**。

说明：在60-70年代全苏中学生数学奥林匹克中，有过这样一个题：“四面体V_1位于四面体V_2内部, 证明V_1的棱长之和小于V_2的棱长之和的$\frac{4}{3}$倍”. 这里反直觉的地方在于，如果是二维平面上一个三角形位于另一个三角形内部, 那么小三角形不仅面积是严格小于大三角形的, 周长也是如此. 而在三维情形, 虽然体积和表面积的大小关系是保持的，但棱长之和的大小关系会被破坏.

这道题的“出处”应该是两个波兰数学家于1962年发表的：

Holsztyński, W. and Kuperberg, W., *O pewnej wlasnósci czworościanów*, Wiadomości Matematyczne 6 (1962), 14-16. 这文章用波兰语写的，自然没有什么人知道，然后1977年他们出了一个英文版

Holsztyński, W. and Kuperberg, W., *On a Property of Tetrahedra*, Alabama J. Math. 1(1977), 40-42.

到了1986年, Alabama大学的Carl Linderholm把这个结果推广到了高维欧氏空间中的单形:

定理: 对于$\mathbb{R}^n$中的两个m维单形S和T(前者完全位于后者的内部), 和任意正整数$1 \leqslant r \leqslant m$. 存在常数$B_{m,r}$, 使得$S$的所有$r$维面的面积之和不超过$T$的所有$r$维面的面积之和的$B_{m,r}$倍. 这里$B_{m,r}$的具体数值计算如下: 设$m+1=(r+1)q+s$(带余除法), 则

$$B_{m,r} = \frac{q^{r+1-s}(q+1)^s}{m+1-r}.$$

(CARL LINDERHOLM, AN INEQUALITY FOR SIMPLICES, Geometriae Dedicata (1986) 21, 67-73.)

回到本题, 这里的选项(A)是平凡的, 关键是要说明:

- 为什么(B)、(C)和(D)可以实现?
- 为什么(E)不能实现?

这里需要的数学知识大致有:

(A) 一些几何拓扑: 每个面都是三角形的凸八面体, 共有$3 \times 8/2 = 12$条棱, 于是由Euler公式, 顶点数为6.

(B) 一点点图论: 如果有一个顶点引出5条棱, 那么简单讨论可知必有另一个顶点也引出5条棱, 这个八面体的各顶点度数为$(5,5,4,4,3,3)$. 除此之外, 唯一可能的情形就是每个顶点都引出4条棱(如正八面体).

(C) 一点点凸几何知识: 因为我们考虑的都是凸八面体, 所以八面体的任意两点之间距离的最大值必定在某两个顶点之间实现.

- 如果大八面体的每个顶点都引出4条棱, 且最大距离ℓ在两个不相邻顶点A和B之间实现, 那么因为另四个顶点与这两个顶点均相邻, 所以大八面体的棱长之和至少是4ℓ(且在另四个顶点到直线AB的距离充分小的时候可以充分接近), 而对于小八面体来说, 假设也是每个顶点引出4条棱, 让三个顶点趋近于A, 另三个趋近于B, 其棱长之和会趋近于6ℓ. 这样所有小于1.5的比例均可实现. (所以有选手会选(A),(B),(C))
- 如果大八面体的两点间最大距离是在两个度数为3的顶点之间实现的, 那么大八面体的棱长之和至少是3ℓ(且在另四个顶点到直线AB的距离充分小的时候可以充分接近), 而对于小八面体来说, 仍假设每个顶点引出4条棱, 让三个顶点趋近于A, 另三个趋近于B, 其棱长之和会趋近于6ℓ.这样所有小于2的比例均可实现. 而如果此时小八面体与大八面体的拓扑结构相同, 且两个度数为5的顶点非常接近, 与此同时另4个顶点非常接近, 那么比例上限可提高到$8/3$.
- 作简单的分类讨论可知, 如果大八面体的两顶点间最大距离ℓ_2是在一个度数为a的顶点和一个度数为b的顶点之间实现的(不管它们是否相邻), 那么大八面体的各棱长度之和大于$\min(a,b)\ell$, 而小八面体的棱长之和显然不超过12ℓ, 所以(E)是不可能实现的.

第3题 A 与 B 二人进行"抽鬼牌"游戏。游戏开始时，A 手中有n张两两不同的牌。B 手上有$n+1$张牌，其中n张牌与 A 手中的牌相同，另一张为"鬼牌"，与其他所有牌都不同。游戏规则为：

i) 双方交替从对方手中抽取一张牌，A 先从 B 手中抽取。

ii) 若某位玩家抽到对方的牌与自己手中的某张牌一致，则将两张牌丢弃。

iii) 最后剩一张牌（鬼牌）时，持有鬼牌的玩家为输家。

假设每一次抽牌从对方手上抽到任一张牌的概率都相同，请问下列n中哪个n使 A 的胜率最大？

(A). $n=31$

(B). $n=32$

(C). $n=999$

(D). $n=1000$

(E). 对所有的n，A 的胜率都一样

3 答案 选 (B)。

记初始A手上n张牌时A的胜率为a_n，则

$$a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a_1, \tag{1}$$

故有$a_1=\frac{2}{3}$。而

$$a_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}a_2, \tag{2}$$

故有$a_2=\frac{3}{4}$。

我们可以得到递推公式

$$a_n=\frac{n}{n+1}a_{n-2}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}a_n+\frac{1}{n+1}\frac{n}{n+1}p_{n,n-1}, \tag{3}$$

其中右端第一项为A未抽中鬼牌的情况，这时B无论抽中什么都能成功配对（鬼牌在B手上），这时A手上有$n-2$张牌，B手上有$n-1$张牌且A先手。右端第二项为A，B均抽中对方手上的鬼牌的情况，右端第三项为A抽中B手上的鬼牌而B没抽中A手上的鬼牌的情况，而$p_{n,n-1}$为A先手，手上有包含鬼牌的n张牌，B手上有不包含鬼牌的$n-1$张牌时A的胜率。我们有

$$p_{n,n-1}=1-a_{n-2}, \tag{4}$$

这是因为A无论抽到哪一张均能配对，此时变为A手上有包含鬼牌的$n-1$张牌，B手上有不包含鬼牌的$n-2$张牌且为B先手，故此时B的胜率为a_{n-2}而A的胜率为$1-a_{n-2}$。

因此

$$a_n=\frac{n}{n+1}a_{n-2}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}a_n+\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^2}a_{n-2} \tag{5}$$

进而可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+2}a_{n-2}+\frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n}{n+2}(\frac{n-2}{n}a_{n-4}+\frac{1}{n})+\frac{1}{n+2} \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

若n为奇数，由递推可得

$$a_n=\frac{n+3}{2(n+2)}, \tag{7}$$

若n为偶数，由递推可得

$$a_n=\frac{n+4}{2(n+2)}. \tag{8}$$

因此

- $a_{31}=\frac{17}{33}$
- $a_{32}=\frac{9}{17}$
- $a_{999}=\frac{501}{1001}$
- $a_{1000}=\frac{251}{501}$

答案为(B)，即A初始手上有32张牌时A的胜率最大。

第4题 某个城市有10条东西向的公路和10条南北向的公路，共交于100个路口．小明从某个路口驾车出发，经过每个路口恰一次，最后回到出发点．在经过每个路口时，向右转不需要等待，直行需要等待1分钟，向左转需要等待2分钟．设小明在路口等待总时间的最小可能值是S分钟，则

(A)．$S < 50$；

(B)．$50 \leq S < 90$；

(C)．$90 \leq S < 100$；

(D)．$100 \leq S < 150$；

(E)．$S \geq 150$．

4 答案 选 (C)。

由题意知小明行驶的路线是一条不自交的闭折线．将每个路口看作一个顶点，那么他行驶的路线可以看成是一个100边形（有的内角可能是平角，也有大于平角的内角）．由多边形内角和公式知这个100边形的所有内角之和为$98 \times 180°$．注意内角只能是$90°$，$180°$和$270°$，设$90°$有a个，$270°$有b个，那么$90a + 270b + 180(100 - a - b) = 98 \times 180$，整理得$a - b = 4$．如果小明在这条路上是顺时针行驶的，那么$90°$内角对应右转，$180°$内角对应直行，$270°$内角对应左转，他在路口等待的总时间是$(100 - a - b) + 2b = 100 - (a - b) = 96(min)$；如果小明在这条路上是逆时针行驶的，那么$90°$内角对应左转，$180°$内角对应直行，$270°$内角对应右转，他在路口等待的总时间是$(100 - a - b) + 2a = 100 + (a - b) = 104(min)$．因此，$S = 96$，选项(C)正确．

注：如果小明的起点/终点处的转弯时间不计，那么等待的总时间还可以减少2分钟（选择一个左转的位置作为起点），这样$S = 94$，但不影响选择的选项．

第5题 设$n\geq 2$ 是给定正整数. 考虑$n\times n$ 矩阵$X=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ ($a_{i,j}=0$ 或者1) 的集合.

(1) 证明: 存在这样的X 满足$\det X=n-1$.

(2) 若$2\leq n\leq 4$, 证明$\det X\leq n-1$.

(3) 若$n\geq 2023$, 证明存在X 使得$\det X>n^{\frac{n}{4}}$.

5 答案

(1)若X有一行全为0或者有两行相等, 则$\det X=0$; 若X有一行只有一个1, 则可约化到$(n-1)$阶矩阵的情形; 若X有一行全为1, 还有一行有$n-1$个1, 则可约化到有一行只有一个1的情形, 进一步约化到$(n-1)$阶矩阵的情形. 若以上都不发生, 则X的各行有很少的可能性, 我们可以逐个讨论.

(2)取$X'=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, 其中

$$a_{i,j}=1-\delta_{i,j},\quad 1\leq i,j\leq n.$$

则$\det X'=(-1)^{n-1}(n-1)$. 若n 是奇数, 令$X=X'$. 若n是偶数, 令X为调换X'的最后两行所得矩阵. 则$\det X=n-1$.

(3)当$n=2^k-1$时, 令

$$Y=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{\otimes k}.$$

则Y是元素为±1的$(n+1)\times(n+1)$矩阵, 且

$$\det Y=(\sqrt{2^k})^{2^k}=2^{k2^{k-1}}.$$

注意Y的最后一行为$\alpha_{n+1}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{n+1})$. 记$t_i=\pm1$为$Y$的第$i$行的最后一个元素$(1\leq i\leq n)$. 令

$$\beta_i'=\frac{1}{2}(t_i\alpha_i-\alpha_{n+1}).$$

去掉β_i'的最后一个元素(其等于0), 得到一个n行向量β_i. 令

$$X'=(\beta_1,\ldots,\beta_n)^t.$$

记

$$t=\prod_{1\leq i\leq n}t_i=\pm1.$$

则X' 是元素为0, 1的$n\times n$矩阵, 且

$$\det X'=t2^{(k-2)2^{k-1}+1}.$$

若有必要，则调换X'的最后两行，可以得到一个元素为0，1 的$n\times n$矩阵，满足$\det X = 2^{(k-2)2^{k-1}+1}$.

不妨设$2^k-1\le n<2^{k+1}-1$. 当$2^k-1\le n<3\cdot 2^{k-1}$且$n\ge 2023$时，则$k\ge 11$. 存在元素为0，1的$n\times n$矩阵$X$，满足

$$\det X\ge 2^{(k-2)2^{k-1}+1}>2^{(k-2)2^{k-1}}.$$

另一方面，

$$n^{\frac{n}{4}}<(2^{k+1})^{3\cdot 2^{k-3}}=2^{3(k+1)\cdot 2^{k-3}}.$$

由于$k\ge 11$，得

$$(k-2)2^{k-1}\ge 3(k+1)\cdot 2^{k-3}.$$

这样，$\det X>n^{\frac{n}{4}}$.

当$3\cdot 2^{k-1}\le n<2^{k+1}-1$且$n\ge 2023$时，则$k\ge 10$. 存在元素为0，1的$n\times n$矩阵$X$，满足

$$\det X\ge 2^{(k-2)2^{k-1}+1}2^{(k-3)\cdot 2^{k-2}+1}>2^{(3k-7)2^{k-2}}.$$

另一方面，

$$n^{\frac{n}{4}}<(2^{k+1})^{2^{k-1}}=2^{(k+1)\cdot 2^{k-1}}.$$

由于$k\ge 10$，得

$$(3k-7)2^{k-2}>(k+1)\cdot 2^{k-1}.$$

这样，$\det X>n^{\frac{n}{4}}$.

第6题 对实数r, 用$||r||$表示r和最近的整数的距离：$||r|| = \min\{|r-n| : n \in \mathbb{Z}\}$.

1. 试问是否存在非零实数s, 满足$\lim_{n\to\infty} ||(\sqrt{2}+1)^n s|| = 0$?
2. 试问是否存在非零实数s, 满足$\lim_{n\to\infty} ||(\sqrt{2}+3)^n s|| = 0$?

6 答案

1. 存在，取$s = 1$即可。设$(\sqrt{2}+1)^n = x_n + \sqrt{2}y_n$, 则$(-\sqrt{2}+1)^n = x_n - \sqrt{2}y_n$. 从而$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$. 由此$|x_n + \sqrt{2}y_n - 2x_n| = |\sqrt{2}y_n - x_n| = \frac{|2y_n^2 - x_n^2|}{\sqrt{2}y_n + x_n} \to 0$.

2. 不存在。反证法，假设s满足$(\sqrt{2}+3)^n s = m_n + \epsilon_n$, 其中$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. 记$\alpha = \sqrt{2}+3, \bar{\alpha} = -\sqrt{2}+3$. 考虑幂级数

$$\frac{s}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n.$$

$(1-\alpha x)(1-\bar{\alpha}x) = 1 - 6x + 7x^2$, 上式两边乘以$1-6x+7x^2$可得

$$s(1-\bar{\alpha}x) = (1-6x+7x^2)\sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n + (1-6x+7x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n. \tag{9}$$

设$(1-6x+7x^2)\sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, (1-6x+7x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n x^n$, 则$p_n \in \mathbb{Z}, \lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$. 因为(9)左边是一次式，从而右边满足$p_n + \eta_n = 0, n \geq 2$. n充分大时η_n很小，所以必有$p_n = \eta_n = 0$, 即(9)右边两项均为多项式。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n = \frac{G(x)}{1-6x+7x^2}.$$

右边写成部分分式形如$H(x) + \frac{A}{1-\bar{\alpha}x} + \frac{B}{1-\alpha x}$. 因为$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, 所以左边的收敛半径至少为1，而$\alpha, \bar{\alpha}$均大于1，所以必须$A = B = 0$. 这样当$n$充分大时，$\epsilon_n = 0$, 从而$(\sqrt{2}+3)^n s = m_n \in \mathbb{Z}$, 矛盾！

第7题 某公司要招聘一名员工，有N 人报名面试。假设N 位报名者所具有该职位相关的能力值两两不同，且招聘委员会能观察到的能力值排名与其真实能力值排名吻合。委员会决定采取如下招聘程序：

1. 招聘委员会按随机顺序逐个面试候选人，且他们能观察到当时所见候选人的相对排名。比如委员会面试到第m 位候选人时，他们拥有的信息是前m 位面试者的相对排名，但不知后$N-m$ 位候选人的能力情况。
2. 每面试完一位候选人，委员会需当即决定是否给他/她发工作offer。
3. 如果委员会决定给某位候选者发offer，那么这位候选者以概率p 接受，以概率$1-p$ 拒绝，且独立于(之前) 所有其他面试者的决定。如果该候选人接受offer，那么委员会将不再继续面试接下去的候选人。如果该候选人拒绝offer，那么委员会将继续面试下一位。
4. 如果委员会决定不给某位面试者发offer，那么他们将继续面试下一位候选人，且不能再回头去找前面已经面试过的人。
5. 反复该面试程序，直到有候选者接受offer。如果没有候选者接收该工作，那么委员会面试完所有的N 位候选者。

由于N 位面试者的顺序是完全随机的，因此他们能力的排名在$N!$ 的可能性中是均匀分布。且委员会所具有的全部信息是当前面试过的候选人的相对排名。委员会的任务是，在遵守如上程序的前提下，找到一个策略，使得招到N 位候选者中能力最优者的概率最大化。

问题如下：

(a) 考虑如下策略。委员会先面试前$m-1$ 位候选者，不管其能力排名如何，都不发工作offer。从第m 位开始，一旦看到能力在所面试过候选人中的最优者，即发工作offer。如对方拒绝，则继续面试直到下一位当前最优者[1]出现。试证明：对于任意的N，都存在一个$m=m_N$，使得依靠上述策略找到(所有N 位候选人中) 最优者的概率值，在所有可能的策略所给出的概率值中是最大的。

(b) 假设$p=1$。当$N\to+\infty$，求$\frac{m_N}{N}$ 的极限。

(c) 对一般的$p\in(0,1)$，当$N\to+\infty$，求$\frac{m_N}{N}$ 的极限。

7 答案 对于任意的$1\le k\le N$，我们令Z_k 为委员会完全略过前$k-1$ 位面试者，而从第k 位开始采取最优策略的最终所得，即N位候选者中能力最高者接受该工作的概率。则我们有

$$Z_k \ge Z_{k+1}\ .$$

(a) 如果委员会面试了第k 位候选人，且其能力在前k 位被面试者中居首，那么委员会发出offer。在这个事件下，委员会最终找到能力值最高者的条件概率为

$$Y_k=\frac{pk}{N}+(1-p)Z_{k+1}\ .$$

[1] “当前最优者”指当前被面试者在所有被面试过的人(包括被发offer 并婉拒的人)中的最优者。

由此可知，委员会向第k 位面试者发出offer，当且仅当其在前k 位中的能力值最高，且

$$\frac{pk}{N}+(1-p)Z_{k+1}\geq Z_{k+1}\ , \tag{10}$$

即$\frac{k}{N}\geq {Z_{k+1}}$[2]. 由于$\{\frac{k}{N}\}_k$ 递增，而$\{Z_k\}_k$ 递减，且$Z_k\leq\frac{N-k+1}{N}$，易见不等式(10) 必定对某一个$k\geq N-1$ 成立。由此可知，最优策略可以通过选择某个m 来达到，也即满足不等式(10) 的k 中的最小值。此外，如果$k=m$ 满足不等式(10)，则任意的$k\geq m$ 也满足。因此，对于第m 位之后的“当前最优者”，也应当发放offer。

(b) 令p_m 为委员会采取(a) 中的策略，且找到能力最高者的概率。当$p=1$ 时，被发offer的候选者一定会接受，所以这时选中能力最高者对应的是事件

$$\bigcup_{k=m}^{N}A_k$$

的不相交并集，其中A_k 对应的事件为第k 位候选人是N 位中的能力最高者，且被面试了。这样的话，事件A_k 的概率为

$$\mathbf{P}(A_k)=\frac{1}{N}\cdot\frac{m-1}{k-1}\ ,$$

其中$\frac{1}{N}$ 对应的是这位候选者是能力最高者的概率，$\frac{m-1}{k-1}$ 是他/她被面试到的概率，即前$k-1$ 位中的相对能力最高者在前$m-1$ 位中。这样，我们就有

$$p_m=\frac{m-1}{N}\sum_{k=m}^{N}\frac{1}{k-1}\ .$$

易见p_m 先曾后减，因此其最优值$m^*=m_N$ 应为满足

$$p_m\geq p_{m+1}$$

的最小的m，即满足

$$\sum_{k=m+1}^{N}\frac{1}{k-1}\leq 1$$

的最小m。当N 很大时，由左端的近似逼近为$\log(N/m)$ 可知，$\frac{m_N}{N}\to\frac{1}{e}$.

(c) 对一般的于$p\in(0,1)$，同样的，p_m 的值为下列不相交事件并的概率：

$$\bigcup_{k=m}^{N}A_k\ ,$$

其中A_k 对应的事件为第k 位候选人是N 人中的能力最高者、被面试了、并且接受了offer. 我们有

$$p_m=\frac{p}{N}\sum_{k=m}^{N}q_k\ ,$$

[2]如果这个不等式不满足，则略过第k 个人，且从第$k+1$ 位开始采取最优策略，则得到最佳求职者的概率将更大。

其中q_k 为假定第k 位候选人为N 人中能力最高者后，他/她被面试的条件概率。则我们有

$$q_k = \Big(\frac{m-1}{m} + \frac{1-p}{m}\Big)\Big(\frac{m}{m+1} + \frac{1-p}{m+1}\Big)\cdots\Big(\frac{k-2}{k-1} + \frac{1-p}{k-1}\Big) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(k-p)}{\Gamma(k)\Gamma(m-p)} ,$$

其中Γ 为经典的Γ 函数。据此，我们得到如果从第m 位开始，委员会找到(所有N 位候选人中)能力值最高者的概率为

$$p_m = \frac{p}{N} \cdot \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-p)} \sum_{k=m}^{N} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k)} ,$$

p_m 对于m 先增后减。由Γ 函数的近似及积分对求和的逼近，我们计算得，当N 非常大时，让p_m 最大化的m_N 的值满足

$$\frac{m_N}{N} \to p^{\frac{1}{1-p}} .$$

当$p = 1$ 时，极限为$1/e$.