第十四届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类高年级组, 2023 年 5 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	10	14	20	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、(本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 由方程 $\begin{cases} x+y=t, \\ x^2-y^2=t \end{cases}$ 确定的曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad y=x-1 \quad}$.

2. 记 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$ 则曲线积分 $\int_L (2x^2+x+y^2+y)\,ds =$ $\underline{\quad 2\pi \quad}$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵. 若 $A^n=0$ 但 $A^{n-1}\neq 0$, 则 A 的秩为 $\underline{\quad n-1 \quad}$.

4. 设 $\mathbb{R}$ 上函数 f 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt+x^2\ (x\in\mathbb{R})$.

则 $f(x)=$ $\underline{\quad 2e^x-2x-2. \quad}$.

二、(本题 10 分) 设二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 得此曲线的另一表达式.

(i) 求证 B^2-4AC 与 F 为上述正交变换的不变量;

(ii) 给出在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件.

解答. (i) Q 为正交矩阵, 因此, 有 $\theta\in[0,2\pi]$ 和 $\varepsilon=\pm1$ 使得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\varepsilon\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}.$$

代入 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 得到

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

其中 $F'=F$,

$$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta,$$

$$\varepsilon B' = (C-A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta),$$

$$C' = A\sin^2\theta - B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta.$$

直接计算可得 $B'^2-4A'C'=B^2-4AC$, $F'=F$. 这就证明了 B^2-4AC 与 F 是正交变换的不变量.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

注. 事实上,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0.$$

因此, $F'=F$,

$$A'C' - \frac{B'^2}{4} = \det\begin{pmatrix} A' & \frac{B'}{2} \\ \frac{B'}{2} & C' \end{pmatrix} = \det\left[Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} Q\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} = AC - \frac{B^2}{4}.$$

(ii) 依题意可知, 在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件为 $B'=0$, 即 $(C-A)\sin(2\theta)+B\cos(2\theta)=0$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

三、(本题 14 分) 设实系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, 其中 $a_m\neq 0$, $m\geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k=a\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m}ka_k=b\neq 0$. 证明: 对任意大于等于 2 的自然数 n 以及任意的 $\varepsilon\neq 0$, 必存在 n 阶复方阵 C, 使得 $f(C)=\begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$.

证明. 记 $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $J=I+H$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵. 则有

$$H^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\cdots,H^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},H^n=0;$$

$$J^2=(I+H)^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$J^k=(I+H)^k=\begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & C_k^1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}+\cdots.$$

于是

$$\begin{aligned} & f(J)=a_0I+a_1J+\cdots+a_mJ^m \\ =&\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_1 & a_1 \\ & & & a_1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_m & C_m^1a_m & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_m & C_m^1a_m \\ & & & a_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7\text{ 分})$$

令 $W = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}$. 分别计算 W, V 的 Jordan 标准型 J_W 和 J_V.

注意到 W 的 n 个特征值均为 a, 进一步, 由 $W - aI = \begin{pmatrix} 0 & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & b \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 可知,

$W - aI$ 有 $n-1$ 阶子式 $\begin{vmatrix} b & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & b \end{vmatrix} = b^{n-1} \neq 0$. 故秩 $(W - aI) = n - 1$, 从而 a 作为 W 的特征值其几何重数为 1. 也就是 J_W 中相应于 a 的 Jordan 块只有1块, 即:

$$J_W = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

同理, 由 $\varepsilon \neq 0$ 可知, $J_V = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$. 故有:存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}WP = V$. 即 $P^{-1}f(J)P = V$. 令 $C = P^{-1}JP$, 则 $f(C) = V$. 证毕.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

注. 我们也可以采用以下写法. 令 H 同上, 则 $H^n = 0$. 我们有多项式 g 使得 $bx^2g(x) = f(1+x) - a - bx$, 问题转化为寻找 Q 使得 $Q + Q^2g(Q) = S = \frac{\varepsilon}{b}H$. 若这样的 Q 存在, 则 $f(I+Q) = aI + bQ + bQ^2g(Q) = aI + \varepsilon H$.

我们来寻找常数 $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ 使得 $Q = S + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \alpha_k S^k$ 满足要求. 对于上述形

式的 Q, 我们有 $Q^n=0$, 且由展开 $(Q+Q^2g(Q))^k$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 可得

$$\begin{cases} Q + c_{1,2}Q^2 + c_{1,3}Q^3 + \cdots + c_{1,n-1}Q^{n-1} = S, \\ \qquad Q^2 + c_{2,3}Q^3 + \cdots + c_{2,n-1}Q^{n-1} = S^2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad Q^{n-2} + c_{n-2,n-1}Q^{n-1} = S^{n-2}, \\ \qquad\qquad\qquad Q^{n-1} = S^{n-1}. \end{cases}$$

其中 $c_{i,j}$ 为(与 Q 无关的)常数. 立即可以解得有 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}$ 使得 $Q=S+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\alpha_k S^k$ 满足上式, 而上述方程中的第一式即为 $Q+Q^2g(Q)=S$. 结论得证.

四、（本题 20 分）设 $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个排列, 满足 $|q_n| < n\ (\forall n \geqslant 1)$. 又设 $r \in (0,1)$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$. 证明:

(i) g 在 $\mathbb{R}$ 上连续且严格单增. 集合 $E = \{g(q) | q \in \mathbb{Q}\}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to t} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}$, 这里我们规定 $\frac{1}{0} = +\infty$;

(iii) g 的反函数 f 处处可导, 且 f' 在 E 上为零;

(iv) 对任意 $a < b$, 存在不同的 $\xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明. (i) 由题设,

$$\left|r^n(x-q_n)\right| \leqslant (|x|+n)^{\frac{1}{3}} r^n, \qquad \forall n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 内闭一致收敛, 进而 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 又由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 的每一项都严格单增, 因此, g 严格单增.

…………………………………………………… (3 分)

注意到当 $x > 0$ 时,

$$g(x) - g(0) > r\Big((x-q_1)^{\frac{1}{3}} + q_1^{\frac{1}{3}}\Big),$$

我们有 $g(+\infty) = +\infty$. 同理 $g(-\infty) = -\infty$. 由连续函数的介值性, 对任何 $t_0 \in \mathbb{R}$, 有 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x_0) = t_0$. 取 $\mathbb{Q}$ 中点列 $\{x_n\}$ 趋于 x_0, 即得 $t_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) \in \overline{E}$. 因此, $\overline{E} = \mathbb{R}$.

…………………………………………………… (6 分)

(ii) 对于 $x \neq t$, 我们有

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{(x-q_n)^{\frac{1}{3}} - (t-q_n)^{\frac{1}{3}}}{x-t} r^n, \qquad \forall m \geqslant 1.$$

因此,

$$\varliminf_{x\to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \forall m \geqslant 1.$$

进而令 $m \to +\infty$ 得到

$$\varliminf_{x\to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

…………………………………………………… (9 分)

另一方面, 易见对任何 $x \neq t$ 成立

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}}{x - t} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{4}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

从而 $\forall m \geqslant 1$,

$$\frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{(x - q_n)^{\frac{1}{3}} - (t - q_n)^{\frac{1}{3}}}{x - t} r^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{4}{(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} r^n.$$

因此,

$$\varlimsup_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{4r^n}{(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

令 $m \to +\infty$ (无论下式右端是否有限)可得

$$\varlimsup_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

最终得到

$$\lim_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

.... (12 分)

(iii) 注意到

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} \leqslant +\infty.$$

结合 g 的连续性, 可得(这里, 记 $\frac{1}{+\infty} = 0$)

$$\lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}} \in [0, +\infty).$$

因此, f 处处可导且且 f' 在 E 上为零. .... (14 分)

(iv) 任取 $a < b$. 由中值定理, 有 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = k \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. 易见 $\frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi} \geqslant k$ 或 $\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \geqslant k$.

不失一般性, 设后者成立, 则有 $\zeta_1 \in (a, \xi)$ 使得 $f'(\zeta_1) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \geqslant k$.

而由 E 的稠密性, 有 $\zeta_2 \in (a, \zeta_1) \cap E$, 此时 $f'(\zeta_2) = 0$. 于是, 由微分 Darboux 定理得到存在 $\eta \in (\zeta_2, \zeta_1] \subset (a, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = k$.

.... (20 分)

五、(本题 12 分) 设 $x \in \mathbb{R}$, 记 $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$, 其中, $x_n\,(n \geqslant 0)$ 为整数, 当 $n \geqslant 1$ 时, $0 \leqslant x_n \leqslant 9$. 除一零测集外, 各点的表示唯一. 对于 $n \geqslant 1$, 定义 $\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & x_n \text{ 为偶数;} \\ -1, & x_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 证明: 若 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx = 0$.

证明. (i) 将 $[0,1]$ 区间 10 等分, 在每个小区间上, $\varphi_1(x)$ 的值依次为 $1, -1$.

将 $[0,1]$ 周期延拓到 $[k, k+1]$ 并作同样的十等分划分，显然有对任意的整数 k, 在区间 $[k, k+1]$ 上有同样的结果.

因此, $|\varphi_1(x)| \equiv 1$ 且对任意的 $N \in \mathbb{N}^+$, $\int_{-N}^{N} \varphi_1(x)\,dx = 0$.

.... (1 分)

将上一步讨论 $\varphi_1(x)$ 的每小个区间再 10 等分, 即：将 $[0,1]$ 进行 10^2 等分。

在 10^2 等分下, 一方面 $\varphi_1(x)$ 的值不变, 另一方面 $\varphi_2(x)$ 的值在这些区间上，依次为 $1, -1$. 所以

$$|\varphi_2(x)| \equiv 1, \qquad \int_{-N}^{N} \varphi_2(x)\,dx = 0, \quad \text{且} \quad \int_{-N}^{N} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

.... (2 分)

重复以上操作, 将 $[0,1]$ 进行 10^n 等分,并进行周期延拓到 $[k, k+1]$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $|\varphi_n(x)| \equiv 1$.

显然，对任意的 $m < n$, 在 $\varphi_n(x)$ 的划分区间上, $\varphi_m(x)$ 并不改变，即为常数, 从而有

$$\int_{-N}^{N} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0.$$

.... (3 分)

因此, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\varphi_n(x) \in L^2[-N, N], \qquad \|\varphi_n\|_{L^2[-N,N]} = \sqrt{2N}.$$

所以 $\{\frac{1}{\sqrt{2N}}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $L^2[-N, N]$ 中的标准正交系.

.... (4 分)

(ii) 设 g 为 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, $\operatorname{supp}\ g \subseteq [-N, N]$. 因为 $\{\frac{1}{\sqrt{2N}}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $L^2[-N,N]$ 中标准正交系, 由 Bessel 不等式, 可得

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\int_{-N}^{N} g(x)\varphi_n(x)\,dx\Big|^2 \leqslant \int_{-N}^{N}|g(x)|^2\,dx < +\infty.$$

由此可知,

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_{-N}^{N} g(x)\varphi_n(x)\,dx\Big| = 0.$$

.... (8 分)

(iii) 因为 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的有界函数在 $L^1(\mathbb{R})$ 中稠密, 所以对 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在有界函数 g, $\operatorname{supp} g \subseteq [-N, N]$, $N \in \mathbb{N}^+$, 使得

$$\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

从而有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx\Big| &\leqslant \Big|\int_{\mathbb{R}}(f(x)-g(x))\varphi_n(x)\,dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi_n(x)\,dx\Big| \\ &\leqslant \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} + \Big|\int_{-N}^{N} g(x)\varphi_n(x)\,dx\Big|.\end{aligned}$$

当 n 充分大时, $0 < \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| < 2\varepsilon$, 由此可知,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

.... (12 分)

六、(本题 12 分) 设 $a_0=1, a_1\neq 0$, 函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<1$ 内解析. 证明:

(i) 若 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n|a_n|<|a_1|$, 则 f 在 $|z|<1$ 内单叶;

(ii) 若在 $|z|<1$ 内, $\mathrm{Re}\,f(z)\geqslant 0$, 则 $|a_1|\leqslant 2$.

证明. (1) 对于 $|z|<1$ 内的任意两点 z_1 和 z_2, $z_1\neq z_2$, 则

$$
\begin{aligned}
&|f(z_2)-f(z_1)|=|(1+a_1z_2+a_2z_2^2+a_3z_2^3+\cdots)-(1+a_1z_1+a_2z_1^2+a_3z_1^3+\cdots)|\\
=&|a_1(z_2-z_1)+a_2(z_2^2-z_1^2)+a_3(z_2^3-z_1^3)+\cdots|\\
=&|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z_2^n-z_1^n)|\\
=&|(z_2-z_1)[a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_2^{n-1}+z_2^{n-2}z_1+\cdots+z_1^{n-1}]|\\
\geqslant&|z_2-z_1||a_1|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z_2^{n-1}+z_2^{n-2}z_1+\cdots+z_1^{n-1}|\\
\geqslant&|z_2-z_1|(|a_1|-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|)>0.
\end{aligned}
$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (4 分)

于是, 对于$|z_1|<1, |z_2|<1$, 只要 $z_1\neq z_2$, 就有 $f(z_2)\neq f(z_1)$. 故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内单叶.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (5 分)

(2) 由于 $\mathrm{Re}\,f(z)\geqslant 0$, 所以 $|1+f(z)|\geqslant|1-f(z)|$, 因此

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}=\frac{a_1}{2}z+\frac{2a_2-a_1^2}{4}z^2+\cdots$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (9 分)

为 $|z|<1$ 内的解析函数. 这时, 在 $|z|<1$ 内, $|\varphi(z)|\leqslant 1, \varphi(0)=0$. 由 Schwarz 引理, 当 $|z|<1$ 时 $|\varphi(z)|\leqslant|z|$, 且 $|\varphi'(0)|\leqslant 1$.

最后, 由于 $\varphi'(z)=\frac{a_1}{2}+\frac{2a_2-a_1^2}{2}z+\cdots$, 所以 $|\varphi'(0)|=|\frac{a_1}{2}|\leqslant 1$, 即 $|a_1|\leqslant 2$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

七、(本题 12 分) 设环 R 的任意理想都是有限生成的, 证明: R 到自身的满同态一定是同构.

证明. 设 $\varphi: R \to R$ 是满同态, 对任意正整数 n, 用 φ^n 表示 n 个 φ 的合成, 则 $\varphi^n: R \to R$ 依然是满同态. 令 $I_n = \ker \varphi^n$, 则 I_n 是 R 的理想且有

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots.$$

设 $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$, 则 I 依然是 R 的理想.

.... (4 分)

由已知, I 是有限生成的, 不妨设 $I = (a_1, a_2, \cdots, a_t)$, 且 $a_i \in I_{k_i}$, $1 \le i \le t$. 设正整数 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 中最大者为 k, 则有 $a_1, a_2, \cdots, a_t \in I_k$, 从而 $I = (a_1, a_2, \cdots, a_t) \subseteq I_k$, 这表明

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots,$$

即如上的理想升链终止.

.... (8 分)

任取 $r \in \ker \varphi \subseteq R$, 由于 φ^k 是满同态, 所以存在 $a \in R$ 使得 $\varphi^k(a) = r$. 这时 $\varphi^{k+1}(a) = \varphi(r) = 0$, 即

$$a \in \ker \varphi^{k+1} = I_{k+1} = I_k = \ker \varphi^k,$$

所以 $r = \varphi^k(a) = 0$, 这便证出 $\ker \varphi = \{0\}$, 即 φ 为单射, 所以 φ 是同构.

.... (12 分)

八、(本题 12 分)

(i) 设庞加莱上半平面 $\mathbb{H}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\}$ 带有黎曼度量 $\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2}$, 证明 $\mathbb{H}^2$ 的测地线为圆心在 x 轴上的上半圆或者为平行于 y 轴的直线;

(ii) 对于半径为 r 的球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$, 称经过球心的平面与球面的交线为大圆. 求球面上的测地线方程, 并说明球面上的大圆是测地线;

(iii) 阐明 (i), (ii) 的几何意义.

解答. (i) 由题设可得

$$g_{11}=g_{22}=\frac{1}{y^2},\ g_{12}=g_{21}=0,$$

而且 $g=(g_{ij})$ 的逆矩阵 $g^{-1}=(g^{ij})$, $g^{11}=g^{22}=y^2, g^{12}=g^{21}=0$. 由此经计算可得联络系数为

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{y},\ \Gamma^2_{11}=\frac{1}{y},\ \Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^1_{22}=0.$$

代入到测地线方程

$$\ddot{\gamma}^k+\Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j=0,\ i,j,k=1,2, \tag{1}$$

其中 $\gamma_1=x,\ \gamma_2=y$, 可得

$$\begin{cases}\ddot{x}-\frac{2}{y}\dot{x}\dot{y}=0,\\ \ddot{y}+\frac{1}{y}\left((\dot{x})^2-(\dot{y})^2\right)=0.\end{cases} \tag{2}$$

当 $\dot{x}=0$ 时可知 x 为常数. 此时, 测地线为平行于 y 轴的直线. 当 $\dot{x}\neq 0$ 时, 由 (2) 的第一个方程可得

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}=\frac{2\dot{y}}{y}. \tag{3}$$

由 (3) 积分可得

$$\dot{x}=Cy^2, \tag{4}$$

其中 C 为积分常数. 另外, 为简化运算过程, 我们选取测地线 $r(t)=(x(t),y(t))$ 的参数 t 为弧长参数, 即 $|\dot{r}|_g=1$, 它等价于

$$\frac{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}{y^2}=1. \tag{5}$$

由 (2)、(4) 以及 (5), 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm\frac{\sqrt{1 - C^2y^2}}{Cy}, \tag{6}$$

对 (6) 积分并整理可得

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2,$$

其中 a, b 均为常数. 此时测地线为圆心为 $(a,0)$, 半径为 b 的上半圆周.

…………………………………………………… (5 分)

(ii) 设球坐标系

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

以及

$$r(\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

经计算可得

$$\begin{aligned} r_\theta &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta), \\ r_\varphi &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0), \end{aligned}$$

$$g_{\theta\theta} = r_\theta\cdot r_\theta = r^2,\ g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = r_\theta\cdot r_\varphi = 0,\ g_{\varphi\varphi} = r_\varphi\cdot r_\varphi = r^2\sin^2\theta,$$

以及

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},\ g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

令 $\theta^1 = \theta$, $\theta^2 = \varphi$, 注意到度量是对角矩阵, 则有

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial\theta^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial\theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta^l}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial\theta^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial\theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta^k}\right) \end{aligned},\ i,j,k = 1,2.$$

于是, 可得非零的联络系数满足

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta. \tag{7}$$

将 (7) 代入测地线方程

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0,\ i,j,k = 1,2, \gamma_1 = \theta,\ \gamma_2 = \varphi, \tag{8}$$

可得

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\left(\dot{\varphi}\right)^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

进而有

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\left(\dot{\varphi}\right)^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

由(10)可知, 当$\theta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\phi(t) = t$时, 赤道为大圆, 满足上述测地线方程.

.... (10 分)

(iii) 问题 (i) 说明了双曲几何与欧氏几何的不同, 对于双曲几何, 无数条测地线(垂直于 x 轴的上半圆)可以交于一点. 问题 (ii) 说明了球面几何与欧氏几何的区别, 在球面几何中, 所有垂直于赤道的经线(大圆)都经过球面的南北两极, 即垂直于同一条曲线的测地线可以交于一点. 问题 (i) 与问题 (ii) 的结论推广了欧氏几何中"两条不重合的平行线不能交于一点"的假设.

.... (12 分)

九、(本题 12 分) 设 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列独立同分布随机变量且其共同分布为参数为 1 的指数分布. 定义

$$S_0 = 0,\ \ S_n = T_1 + \cdots + T_n,\ n \geqslant 1$$

以及

$$N_t := \max\{n \geqslant 0 : S_n \leqslant t\},\ t \geqslant 0.$$

(i) 求 S_n 的概率分布函数以及 N_t 的概率分布列;

(ii) 假定 $f \in L^1([0,1])$ 为一可积函数, 试证明

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 f(s)\,dN_s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\mathbf{1}_{\{S_n\leqslant 1\}}\right) = \int_0^1 f(s)\,ds;$$

(iii) 基于上述等式构造计算积分 $\int_0^1 f(s)\,ds$ 的蒙特卡洛算法.

解答. (i) 已知 T_n 的概率分布密度为 $f(t) = \mathrm{e}^{-t}, t \geqslant 0$. 则 S_n 的概率分布密度 $f_n(t)$ 为 $f(t)$ 的n- 重卷积. 即:

$$f_n(t) = (f * f * \cdots * f)(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-t},\ \ t \geqslant 0.$$

…………………………………………………… (2 分)

用归纳法证明即可. 从而 S_n 的概率分布函数为

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s.$$

…………………………………………… (3 分) 由定义知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(S_k \leqslant t, S_{k+1} > t) = \mathbb{P}(S_k \leqslant t, S_k + T_{k+1} > t)\\ &= \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x+y>t\}} f_k(x) f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(k-1)!}\int_0^t x^{k-1}\mathrm{d}x = \frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

…………………………………………………… (6 分)

(ii) 注意 $s \mapsto N_s$ 为一阶梯函数，其跳跃点为 $S_1, S_2, \cdots$，从而由定义知

$$\int_0^1 f(s)\mathrm{d}N_s = \sum_{s\leqslant 1} f(s)(N_s - N_{s-}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\mathbf{1}_{\{S_n\leqslant 1\}}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (8 分)

此外用 Fubini 定理以及 (i) 中所得,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\mathbf{1}_{\{S_n\leqslant 1\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(f(S_n)\mathbf{1}_{\{S_n\leqslant 1\}}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(s)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10分)

(iii) 给定样本轨道数N, 设 $\{(S_n^{N,j})_{n\geqslant 1}, j=1,\cdots,N\}$ 为 N 个独立的等待时随机变量列，基于大数定律我们知道

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n^{N,j})\mathbf{1}_{\{S_n^{N,j}\leqslant 1\}}\right) \to \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12 分)

十、(本题 12 分) 设 A 是 n 阶实方阵.

(i) 给出矩阵 A 的 LU 分解的算法描述;

(ii) 分析 LU 分解算法的运算量(复杂度);

(iii) 证明: A 具有唯一的 LU 分解当且仅当 A 的前 $n-1$ 阶顺序主子式均不为零.

解答. 矩阵 A 的 LU 分解算法

矩阵 A 的 LU 分解即将矩阵 A 分解为两个三角矩阵之积 $A = LU$, 其中

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n-1} & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

计算矩阵 A 的 LU 分解的过程如下.

Algorithm 1 LU分解算法

Input: 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Output: 矩阵 L 和 U, 满足 $A = LU$.

  for $k = 1, 2, \cdots$, n-1 **do**

    for $i = k+1, k+2, \cdots$, n **do**

      $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$;

    for $j = k+1, k+2, \cdots$, n **do**

      for $i = k+1, k+2, \cdots$, n **do**

        $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$;

U 对应 A 的对角元和上三角部分;

L 的对角元素为 1, 下三角部分对应 A 的下三角部分.

…………………………………………………………… (3分)

LU 分解算法的运算量(复杂度)

加减的的运算量:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

乘除的的运算量：

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+(n-k)^2)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+O(n^2)$$

总的运算量：

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+2(n-k)^2)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}=\frac{2}{3}n^3+O(n^2)$$

…………………………………………………… (6 分)

说明: 如果只分析了乘除法的运算量, 本部分给 2 分.

(ii) A 具有唯一的 LU 分解当且仅当 A 的前 $n-1$ 阶顺序主子式均不为零.

用 A_i 表示 A 的前 i 行、前 i 列构成的 i 阶子矩阵, $i=1,2,\ldots,n$. 则 $\det(A_i)$ 即 A 的 i 阶顺序主子式. 首先利用数学归纳法证明充分性.

当 $n=1$ 时结论显然. 当 $n=2$ 时, 假设 $\det(A_1)=a_{11}\neq 0$. 则

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{21}/a_{11} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & \det(A)/a_{11}\end{pmatrix}$$

是 A 的唯一LU分解. 下面假设, 当 $i=n-1$ 时结论成立，即若 $\det(A_i)\neq 0$, $i=1,2,\ldots,n-2$, 则 A_{n-1} 存在唯一的 LU 分解: $A_{n-1}=L_{n-1}U_{n-1}$. 接下来证明 $i=n$ 时结论成立. 为此假设 $\det(A_i)\neq 0$, $i=1,2,\ldots,n-1$, 由归纳假设, A_{n-1} 具有唯一 LU 分解: $A_{n-1}=L_{n-1}U_{n-1}$, 且 L_{n-1} 与 U_{n-1} 均可逆.

将 $A_n=A$ 写成分块矩阵形式:

$$A_n=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{c}\\ \mathbf{d}^{\mathbf{T}} & a_{nn}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

因为 A_{n-1} 的 LU 分解具有唯一性, 那么 A_n 的 LU 分解如果存在, 则必具有如下形式:

$$A_n=L_nU_n=\begin{pmatrix}L_{n-1} & 0\\ \mathbf{l}^{\mathbf{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{n-1} & \mathbf{u}\\ \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & u_{nn}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

比较 (1)与 (2) 两式得 $\mathbf{l}^T U_{n-1} = \mathbf{d}^T$, $L_{n-1}\mathbf{u} = \mathbf{c}$, $\mathbf{l}^T\mathbf{u} + u_{nn} = a_{nn}$. 故 $\mathbf{l} = (U_{n-1}^T)^{-1}\mathbf{d}$, $\mathbf{u} = L_{n-1}^{-1}\mathbf{c}$, $u_{nn} = a_{nn} - \mathbf{l}^T\mathbf{u}$. 即 A 的 LU 分解唯一.

.... (9 分)

接下来证明必要性.

设 A 有唯一的LU分解: $A = A_n = L_n U_n$, 则 A_i 也具有 LU 分解 $A_i = L_i U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. 从而 $\det(A_i) = \det(U_i) = u_{ii}\cdots u_{22}u_{11}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 特别地, $\det(A) = u_{nn}\cdots u_{22}u_{11}$. 我们考虑两种情况.

情形 1. A 可逆. 则 $u_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 从而 $\det(A_i) \neq 0$, 即 A 的各阶顺序主子式非零.

情形 2. A 奇异. 则 u_{ii} 中至少一个为零, 不妨设 u_{kk} 是所有为零元素中小标 k 最小的元素. 则分解式(2) 可以进行到第 k 步，从第 $k+1$ 步起，由于 U_k 奇异，A_{k+1}的 LU 分解不唯一，即 A 的 LU 分解也不唯一，除非 $k = n$. 因此, 如果 A 有唯一 LU 分解，必然有 $k = n$, $\det(A_i) = u_{ii}\cdots u_{22}u_{11} \neq, i = 1, 2, \ldots, n-1$.

证毕.

.... (12 分)