2022阿里巴巴全球数学竞赛
预选赛

姓名：　　　　生日：　　　　职业：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

1. 单选题：磁性几何魔方

把实心立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (假设 $AB=1$)按如下方式分成 12 块（图1）：

1) 取 6 条面上的对角线 AC,AB_1, AD_1, C_1B, C_1D, C_1A_1;
2) 考虑以立方体中心为顶点, 上述 6 条对角线及 12 条棱之一为对边的三角形;
3) 这 18 个三角形把立方体切成了 12 块, 每块是一个四面体, 每个四面体有两条棱是立方体的棱;
4) 每个四面体仅通过其上立方体的棱和其它四面体连结.

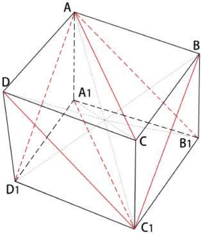

图1: 磁性几何魔方

这样一个 具可以摆出各种形状（图2）.

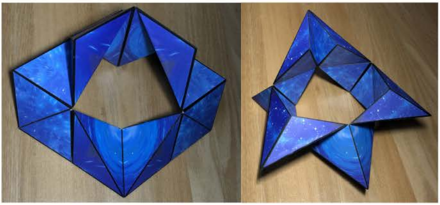

图2: 其它形状的例子

问: 在这个具所有可能的形状中,其上两点之间(在空间中)距离的最大值是多少?

A. $\sqrt{11}$　　B. $\sqrt{7+4\sqrt{2}}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $1+2\sqrt{2}$　　E. 以上都不对

2. 单选题：间隔围观

某日，某地的一片巨大空场地上有一场街头艺术表演，引起部分群众围观. 我们将此地看作一个欧氏平面，表演的区域中心记作点 K.

设群众为 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, 他们按照从 A_1 开始的顺序依次选定一个围观的位置

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots,$$

但需同时满足以下三个条件.

条件1: A_n 围观的位置与 K 的距离不小于 10 米，即对任意 n, $KP_n \geq 10$ 米；

条件2: A_n 围观的位置与前面每个人位置的距离都需要不小于 1 米，即对任意 $n \geq 2$ 和任意 $1 \leq m \leq n-1$, $P_mP_n \geq 1$ 米.

条件3: 在满足条件1 和条件2 的前提下，A_n 选择与 K 尽量接近的点进行围观，即他希望 KP_n 取到最小可能的值. 如果同时满足条件1 和条件2 且使得 KP_n 取到最小可能值的 P_n 不止一个，那么 A_n 可以选择其中的任意一个点.

例如，对于 A_1, 他选择位置时没有条件2，故他会选择以 K 为圆心，10 米为半径的圆周 C 上的任意一点（与 K 的距离恰为 10 米）；对于 A_2, 他也希望 P_2 与 K 的距离恰为 10 米，即 P_2 也在 C 上. 由于 C 上有许多点与 P_1 的距离不小于 1 米，他可以选择其中任意一点.

(1) 请问，以下说法哪个正确？

A. 存在正实数 c_1, c_2, 使得对任意正整数 n, 无论 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 怎么选择位置，均有 $c_1 \leq KP_n \leq c_2$ （单位：米）；

B. 存在正实数 c_1, c_2, 使得对任意正整数 n, 无论 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 怎么选择位置，均有 $c_1\sqrt{n} \leq KP_n \leq c_2\sqrt{n}$ （单位：米）；

C. 存在正实数 c_1, c_2, 使得对任意正整数 n, 无论 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 怎么选择位置，均有 $c_1 n \leq KP_n \leq c_2 n$ （单位：米）；

D. 存在正实数 c_1, c_2, 使得对任意正整数 n, 无论 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 怎么选择位置，均有 $c_1 n^2 \leq KP_n \leq c_2 n^2$ （单位：米）.

(2) 由于人是有一定体积的，所以如果某人站在另一人围观的视线路径附近时，第二人就会被第一人挡住视线. 我们认为，对不同的 i, j, 如果以 P_i 为圆心，$\frac{1}{6}$ 米为半径的圆周与线段 KP_j 相交，那么 A_j 就会被 A_i 挡住视线而看不到表演的全貌.

请问，以下哪个说法正确？

A. 当有 60 名群众围观时，一定有人看不到表演的全貌；

B. 当有 60 名群众围观时，存在所有人都看到表演全貌的可能性，但当有 800 名群众围观时，一定有人看不到表演的全貌；

C. 当有 800 名群众围观时，存在所有人都看到表演全貌的可能性，但当有 10000 名群众围观时，一定有人看不到表演的全貌；

D. 当有 10000 名群众围观时，存在所有人都看到表演全貌的可能性.

3. 单选题：“虎虎生威”盲盒

春节期间，牛奶公司推出了新春集福活动：每盒牛奶都附赠一个红包，红包中藏有下列“虎”，“生”，“威”中的一款图案。（如下图）

集齐两个“虎”，一个“生”，一个“威”即可拼齐成为“虎虎生威”全家福。这项活动一经推出，就成为了网红爆款，很多人希望能够集齐一整套。假设红包中的图案是独立随机分布的（并且不能从红包外观上进行区别），“虎”，“生”，“威”三款红包按均匀概率$\frac{1}{3}$分布。

(1) 收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是多少？

A. $6\frac{1}{3}$;

B. $7\frac{1}{3}$;

C. $8\frac{1}{3}$;

D. $9\frac{1}{3}$;

E. 以上都不对。

(2) 在市场部的周会讨论中，大家认为当前的图案投放比例，会导致在收集“虎虎生威”全家福时收集到太多的“生”和“威”，于是探讨可能的改进方案。记图案“虎”、“生”和“威”的投放比例为(p,q,r)，那么下面哪种方案下，收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是最小的？

A. $(p,q,r)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$;

B. $(p,q,r)=(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$;

C. $(p,q,r)=(\frac{2}{5},\frac{3}{10},\frac{3}{10})$;

D. $(p,q,r)=(\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$.

4. 证明题

给定集合 X, 若函数 $f : X \times X \to [0,1]$ 满足：对任意 $\epsilon > 0$, 存在有限个 X 中元素 $b_1, b_2, ..., b_m$ 使得对任意 $t \in X$, 存在某个 $b_{i(t)}$ 满足：

$$|f(x,t) - f(x, b_{i(t)})| < \epsilon, \forall x \in X,$$

则称 f 是右一致的。类似地，对任意 $\epsilon > 0$, 存在有限个 X 中元素 $a_1, a_2, ..., a_n$ 使得对任意 $t \in X$, 存在某个 $a_{i(t)}$ 满足：

$$|f(t,x) - f(a_{i(t)}, x)| < \epsilon, \forall x \in X,$$

则称 f 是左一致的。求证：左一致等价于右一致。

5. 证明题

设 n 是正整数, $V=\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间, 有一组基 $e_i=(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i})$ $(1\le i\le n)$满足

$$(e_i,e_j)=\delta_{i,j},$$

其中

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 \text{ if } i=j\\ 0 \text{ if } i\neq j\end{cases}$$

是Kronecker 符号, $(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的内积. 对 V 中的非零向量 v , 定义线性变换 $s_v:V\to V$ 为

$$s_v(u)=u-\frac{2(u,v)}{(v,v)}v,\ \forall u\in V.$$

对于介于 0 和 n 之间的整数 k, 记 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 为 V 的 k 维子空间的集合. 对于 V 的一个 k 维子空间 W, 记 $[W]$ 为 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 中的相应元素. 取 W 的一组正交规范基 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ (也即, $(v_i,v_j)=\delta_{i,j}$), 定义 $s_{[W]}:V\to V$ 为

$$s_{[W]}=s_{v_1}\cdots s_{v_k}.$$

(1) 证明 $s_{[W]}$ 不依赖于正交规范基 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ 的选取.

(2) 证明 $s_{[W]}^2=\mathrm{id}$.

(3) 对 $[W']\in\mathrm{Gr}_k(V)$, 定义

$$t_{[W]}([W'])=[s_{[W]}(W')],$$

其中 $s_{[W]}(W')$ 是 W' 在 $s_{[W]}$ 下的像. 我们称 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 的子集 X 为一个"有趣集"若

$$t_{[W]}([W'])=[W'],\ \forall[W],[W']\in X.$$

请找到 $\mathrm{Gr}_k(V)$ 中有趣集的最大的元素个数, 并证明之.

6. 解答题：忙碌的快递员

一位快递员在二维格点平面上坐标为 $(n,0)$ 处取到了快递。此后，快递员每一步做步长为 1 的简单随机游动。他所工作的快递站则在原点 $(0,0)$ 处。在以下的各问中，不妨认为正整数 n 远大于 1。

(1) 令 $P_{1,n}$ 为该快递员在走了恰好 $\lfloor n^{1.5} \rfloor$ 步时，距离快递站的直线距离大于 $\frac{n}{2}$ 的概率，试证明

$$\lim_{n\to+\infty} P_{1,n} = 1$$

(2) 令 $P_{2,n}$ 为该快递员在前 $\lfloor n^{1.5} \rfloor$ 步内曾经回到过快递站的概率，试证明

$$\lim_{n\to+\infty} P_{2,n} = 0$$

(3) 令 $P_{3,n}$ 为该快递员的前 2^n 步内曾经回到过快递站的概率，试证明

$$\lim_{n\to+\infty} P_{3,n} = 1$$

7. 解答题

(1) 证明不存在满足如下条件的周期序列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$, 每项均为 ± 1, 且对任意有理数 θ,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta} \right| < +\infty.$$

(2) 证明不存在每项均为 ± 1 的序列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 满足：对任意有理数 θ

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta} \right| \leq 2022 .$$

(3) 举例说明：存在每项均为 ± 1 的序列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 满足：其中有无穷多项 1，也有无穷多项 -1，且对任意 $\theta \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$,

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta} \right| < +\infty.$$

8. 解答题:开幕式的节目设计

假设你被冬奥会开幕式的导演选为技术助理，负责用数学知识研究设计方案的合理性。在开幕式的备选节目中，有一个方案是让一群由无人机控制的吉祥物绕一个圆圈形状的场地滑冰。因为无人机足够的多（但是不会拥堵或者相撞），我们认为可以用一个概率密度函数 $\rho(t,v)(\geq 0)$ 来刻画无人机的分布。因为场地是圆环形的，所以我们可以认为速度 $v\in\mathbb{R}$，它表示无人机的线速度。那么，对于任意给定的时间 t, 和两个速度 $v_1<v_2$，

$$\int_{v_1}^{v_2}\rho(t,v)\,dv$$

表示全体无人机中速度介于 v_1 和 v_2 之间的概率。

由于无人机的运动机理，已知这个密度函数的演化满足如下的方程

$$\rho_t+\big((u(t)-v)\rho\big)_v=\rho_{vv},\quad v\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

其中 $u(t)$ 为无人机的指令速度。

(1) 为了研究怎么给无人机合适的指令速度，大宝给导演提议说，应该让

$$u(t)=u_0+u_1N(t)$$

其中 $u_0>0$，$u_1>0$，而 $N(t)$ 表示无人机的速度正部（$v_+=\max\{0,v\}$）的平均

$$N(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}v_+\rho(t,v)\,dv=\int_0^{+\infty}v\rho(t,v)\,dv.$$

但是，你善意地提醒道，如果 $u_1>1$ 那么 $N(t)$ 在演化过程中不会有上界，以至于很快引起无人机的故障。你可以证明你的上述结论吗？（为了方便讨论，我们忽略 ρ 及其导数在 $|v|\to+\infty$ 时的贡献。）

(2) 在采纳了大宝和你的建议后，导演又在考虑这些无人机是否会在滑行中在圆圈场地上均匀分布，于是我们需要考虑关于速度和位置的联合密度函数 $p(t,x,v)(\geq 0)$。这里 $x\in[0,2\pi]$ 表示无人机在圆圈上的相对位置，显然 $\int_0^{2\pi}p(t,x,v)dx=\rho(t,v)$。已知这个联合密度函数的演化满足

$$p_t+vp_x+\big((u(t)-v)p\big)_v=p_{vv},\quad x\in[0,2\pi],\quad v\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

且由于无人机在绕圈滑行，在 x 方向上如下条件满足

$$p(t,0,v)=p(t,2\pi,v),\quad v\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

你大胆猜测：无论初始分布如何，无人机很快就在圆圈上接近一个均匀分布。你可以证明或者证伪这个命题吗？（为了方便讨论，我们忽略 p 及其导数在 $|v|\to+\infty$ 时的贡献。）