第十四届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2023 年 5 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	10	14	20	10	16	10	100
得分								

注意: 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、(本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 由方程 $\begin{cases} x+y=t, \\ x^2-y^2=t \end{cases}$ 确定的曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad y=x-1 \quad}$.

2. 记 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$ 则曲线积分 $\int_L (2x^2+x+y^2+y)\,ds=$ $\underline{\quad 2\pi \quad}$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵. 若 $A^n=0$ 但 $A^{n-1}\neq 0$, 则 A 的秩为 $\underline{\quad n-1 \quad}$.

4. 设 $\mathbb{R}$ 上函数 f 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt+x^2\ (x\in\mathbb{R})$. 则 $f(x)=$ $\underline{\quad 2e^x-2x-2. \quad}$.

二、(本题 10 分) 设二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 得此曲线的另一表达式.

(i) 求证 B^2-4AC 与 F 为上述正交变换的不变量;

(ii) 给出在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件.

解答. (i) Q 为正交矩阵, 因此, 有 $\theta\in[0,2\pi]$ 和 $\varepsilon=\pm1$ 使得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\varepsilon\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}.$$

代入 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 得到

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

其中 $F'=F$,

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta, \\ \varepsilon B' &= (C-A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta), \\ C' &= A\sin^2\theta - B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta. \end{aligned}$$

直接计算可得 $B'^2-4A'C'=B^2-4AC$, $F'=F$. 这就证明了 B^2-4AC 与 F 是正交变换的不变量.

.... (7 分)

注. 事实上,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0.$$

因此, $F'=F$,

$$\begin{aligned} A'C' - \frac{B'^2}{4} &= \det\begin{pmatrix} A' & \frac{B'}{2} \\ \frac{B'}{2} & C' \end{pmatrix} = \det\left[Q^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} Q\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} = AC - \frac{B^2}{4}. \end{aligned}$$

(ii) 依题意可知, 在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件为 $B'=0$, 即 $(C-A)\sin(2\theta)+B\cos(2\theta)=0$.

.... (10 分)

三、(本题 14 分) 设实系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, 其中 $a_m\neq 0$, $m\geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k=a\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m}ka_k=b\neq 0$. 证明: 对任意大于等于 2 的自然数 n 以及任意的 $\varepsilon\neq 0$, 必存在 n 阶复方阵 C, 使得 $f(C)=\begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$.

证明. 记 $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $J=I+H$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵. 则有

$$H^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\cdots,H^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},H^n=0;$$

$$J^2=(I+H)^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$J^k=(I+H)^k=\begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & C_k^1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}+\cdots.$$

于是

$$\begin{aligned} f(J)&=a_0I+a_1J+\cdots+a_mJ^m \\ &=\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_1 & a_1 \\ & & & a_1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_m & C_m^1a_m & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_m & C_m^1a_m \\ & & & a_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}.$$ ………………………………………… (7 分)

令 $W = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}$. 分别计算 W, V 的 Jordan 标准型 J_W 和 J_V.

注意到 W 的 n 个特征值均为 a, 进一步, 由 $W - aI = \begin{pmatrix} 0 & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & b \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 可知,

$W - aI$ 有 $n-1$ 阶子式 $\begin{vmatrix} b & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & b \end{vmatrix} = b^{n-1} \neq 0$. 故秩 $(W - aI) = n - 1$, 从而 a 作为 W 的特征值其几何重数为 1. 也就是 J_W 中相应于a 的 Jordan 块只有1块, 即:

$$J_W = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

同理, 由 $\varepsilon \neq 0$ 可知, $J_V = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$. 故有:存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}WP = V$. 即 $P^{-1}f(J)P = V$. 令 $C = P^{-1}JP$, 则 $f(C) = V$. 证毕.

………………………………………… (14 分)

注. 我们也可以采用以下写法. 令 H 同上, 则 $H^n = 0$. 我们有多项式 g 使得 $bx^2g(x) = f(1+x) - a - bx$, 问题转化为寻找 Q 使得 $Q + Q^2g(Q) = S = \frac{\varepsilon}{b}H$. 若这样的 Q 存在, 则 $f(I+Q) = aI + bQ + bQ^2g(Q) = aI + \varepsilon H$.

我们来寻找常数 $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ 使得 $Q = S + \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k S^k$ 满足要求. 对于上述形

式的 Q, 我们有 $Q^n=0$, 且由展开 $(Q+Q^2g(Q))^k$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 可得

$$\begin{cases} Q + c_{1,2}Q^2 + c_{1,3}Q^3 + \cdots + c_{1,n-1}Q^{n-1} = S, \\ \qquad Q^2 + c_{2,3}Q^3 + \cdots + c_{2,n-1}Q^{n-1} = S^2, \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad Q^{n-2} + c_{n-2,n-1}Q^{n-1} = S^{n-2}, \\ \qquad\qquad\qquad Q^{n-1} = S^{n-1}. \end{cases}$$

其中 $c_{i,j}$ 为(与 Q 无关的)常数. 立即可以解得有 $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1}$ 使得 $Q=S+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\alpha_kS^k$ 满足上式, 而上述方程中的第一式即为 $Q+Q^2g(Q)=S$. 结论得证.

四、（本题 20 分）设 $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个排列, 满足 $|q_n| < n\,(\forall n \geqslant 1)$. 又设 $r \in (0,1)$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$. 证明:

(i) g 在 $\mathbb{R}$ 上连续且严格单增. 集合 $E = \{g(q) | q \in \mathbb{Q}\}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to t} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}$, 这里我们规定 $\frac{1}{0} = +\infty$;

(iii) g 的反函数 f 处处可导, 且 f' 在 E 上为零;

(iv) 对任意 $a < b$, 存在不同的 $\xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明. (i) 由题设,

$$\Big| r^n (x-q_n) \Big| \leqslant (|x|+n)^{\frac{1}{3}} r^n, \qquad \forall n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 内闭一致收敛, 进而 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 又由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 的每一项都严格单增, 因此, g 严格单增.

…………………………………………………… (3 分)

注意到当 $x > 0$ 时,

$$g(x) - g(0) > r\Big((x-q_1)^{\frac{1}{3}} + q_1^{\frac{1}{3}} \Big),$$

我们有 $g(+\infty) = +\infty$. 同理 $g(-\infty) = -\infty$. 由连续函数的介值性, 对任何 $t_0 \in \mathbb{R}$, 有 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x_0) = t_0$. 取 $\mathbb{Q}$ 中点列 $\{x_n\}$ 趋于 x_0, 即得 $t_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) \in \overline{E}$. 因此, $\overline{E} = \mathbb{R}$.

…………………………………………………… (6 分)

(ii) 对于 $x \neq t$, 我们有

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{(x-q_n)^{\frac{1}{3}} - (t-q_n)^{\frac{1}{3}}}{x-t} r^n, \qquad \forall m \geqslant 1.$$

因此,

$$\varliminf_{x \to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \forall m \geqslant 1.$$

进而令 $m \to +\infty$ 得到

$$\varliminf_{x \to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

…………………………………………………… (9 分)

另一方面, 易见对任何 $x \neq t$ 成立

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}-t^{\frac{1}{3}}}{x-t}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{2}{3}}}\leqslant\frac{4}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

从而 $\forall m \geqslant 1$,

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t}\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{(x-q_n)^{\frac{1}{3}}-(t-q_n)^{\frac{1}{3}}}{x-t}r^n+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{4}{(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}r^n.$$

因此,

$$\varlimsup_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{4r^n}{(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

令 $m\to+\infty$ (无论下式右端是否有限)可得

$$\varlimsup_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

最终得到

$$\lim_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

(iii) 注意到

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}\leqslant+\infty.$$

结合 g 的连续性, 可得(这里, 记 $\frac{1}{+\infty}=0$)

$$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}}\in[0,+\infty).$$

因此, f 处处可导且且 f' 在 E 上为零. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

(iv) 任取 $a<b$. 由中值定理, 有 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=k\equiv\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$. 易见 $\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}\geqslant k$ 或 $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\geqslant k$.

不失一般性, 设后者成立, 则有 $\zeta_1\in(a,\xi)$ 使得 $f'(\zeta_1)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\geqslant k$.

而由 E 的稠密性, 有 $\zeta_2\in(a,\zeta_1)\cap E$, 此时 $f'(\zeta_2)=0$. 于是, 由微分 Darboux 定理得到存在 $\eta\in(\zeta_2,\zeta_1]\subset(a,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=k$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (20 分)

五、(本题 10 分) 设 A 为复数域上的 4 阶幂等阵 (即 $A^2 = A$). 证明: 存在复数 c_0, c_1, c_2, c_3 使得 A 相似于 $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$.

证明. (1) 首先, 由 A 幂等可知 $\mathbb{C}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$, 进而 $\operatorname{Ker} A$ 的一组基并上 $\operatorname{Im} A$ 的一组基便构成$\mathbb{C}^4$ 的一组基. 显然 $\operatorname{Ker} A$ 的基为 A 关于特征值 0 的特征向量, $\operatorname{Im} A$ 的基为 A 关于特征值 1 的特征向量, 故 A 拥有 4 个线性无关的特征向量, A 相似于对角阵 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_4)$.

.... (5 分)

其次, 记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^4 = I_4.$$

显见, B 的特征多项式为 $|\lambda I - B| = \lambda^4 - 1$, B 有 4 个不同的特征值: $\xi_1, \ldots, \xi_4$. 从而 $B \sim \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_4 \end{pmatrix}$.

考察下列关于 a_0, a_1, a_2, a_3 的方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_1^2 + a_3\xi_1^3 = \lambda_1 \\ a_0 + a_1\xi_2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_2^3 = \lambda_2 \\ a_0 + a_1\xi_3 + a_2\xi_3^2 + a_3\xi_3^3 = \lambda_3 \\ a_0 + a_1\xi_4 + a_2\xi_4^2 + a_3\xi_4^3 = \lambda_4, \end{cases}$$

其系数行列式为范得蒙行列式, 它 $\neq 0$. 故有唯一解: $c_0, \ldots, c_3$. 令$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, 则有 $f(\xi_i) = \lambda_i, i = 1, \ldots, 4$.

最后, $f(B) \sim \begin{pmatrix} f(\xi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\xi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_4 \end{pmatrix} \sim A$. 直接地,

$f(B) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$. 证毕.

…………………………………………………… (10 分)

六、(本题 16 分) 设 f 是 $[0,1]$ 上的可积函数, $\alpha>0$ 是常数. 证明: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\,dt$ 存在.

证明. 我们只要证明如下结论:

对任何 $a,b>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt$ 存在蕴含 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt$ 存在.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (2 分)

现设 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt=A\in\mathbb{R}$, 记

$$F(x)=\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt,\qquad x\geqslant0,$$
$$\omega(r)=\sup_{x\in(0,r)}\left|\frac{F(x)}{x^a}-A\right|,\qquad r>0.$$

则 $\lim\limits_{r\to0^-}\omega(r)=0$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (6 分)

我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt&=\frac{t^{b-a}F(t)}{x^b}\Big|_0^x-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-a-1}F(t)\,dt\\
&=\frac{F(x)}{x^a}-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-a-1}F(t)\,dt\\
&=\frac{1}{x^a}F(x)-\frac{(b-a)A}{b}-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\Big(\frac{F(t)}{t^a}-A\Big)\,dt,\qquad x>0,\end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (11 分)

而

$$\left|\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\Big(\frac{F(t)}{t^a}-A\Big)\,dt\right|\leqslant\frac{\omega(x)}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\,dt=\frac{\omega(x)}{b},\qquad x>0.$$

由此立即得到 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt=A$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (16 分)

七、(本题 10 分) 求在 $\mathbb{R}$ 上处处可微且满足 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 - y^2$ 的所有实函数 $y = y(x)$.

证明. 形式求解 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$, 易见在任何区间 $(a,b) \subseteq (-\infty,+\infty)$ 和任何常数 $C \in \mathbb{R}$, $y = \pm 2$ 以及 $y = 2\sin(x+C)$ 均满足 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$.

…………………………………………………………………………(1 分)

另一方面, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 若 $|y(x_0)| = 2$, 则 $y'(x_0) = 0$.

若 $|y(x_0)| < 2$, 则由连续性, 有 $\delta > 0$ 使得在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 $|y(x)| < 2$. 进而在此区间内 $y'(x) \neq 0$. 由微分 Darboux 定理, 可得 $y'(x)$ 在此区间内恒正或恒负. 进一步, 设 $(\alpha,\beta) \ni x_0$ 是使得 $y'(x)$ 恒正或恒负的最大区间(目前, 不排除 α,β 有可能是 $-\infty, +\infty$).

…………………………………………………………………………(3 分)

若 $y'(x_0) > 0$, 则

$$y'(x) = \sqrt{4-y^2}, \qquad x \in (\alpha,\beta).$$

解得

$$\arcsin\frac{y}{2} = x - x_0 + \arcsin\frac{y(x_0)}{2}, \qquad x \in (\alpha,\beta).$$

从而

$$y = 2\sin(x+C), \qquad x \in (\alpha,\beta),$$

其中 $C = \arcsin\frac{y(x_0)}{2} - x_0$. 由此可见 $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. 此时由 (α,β) 的最大性, 必然有 $|y(\alpha)| = |y(\beta)| = 2$, 即 $y'(\alpha) = y'(\beta) = 0$. 结合 y' 在 (α,β) 内恒正得到 $\beta - \alpha = \pi$. 此时可以重写 y 的表达式为

$$y(x) = -2\cos(x-\alpha), \qquad x \in (\alpha, \alpha+\pi).$$

类似地, 若 $y'(x_0) < 0$, 则成立 $\beta = \alpha + \pi$,

$$y(x) = 2\cos(x-\alpha), \qquad x \in (\alpha, \alpha+\pi).$$

易见, y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现的.

…………………………………………………………………………(6 分)

一般地, 可得开集 $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |y(x)| < 2\}$ 是一列两两不交的长度为 π 的区间的并, 其中 y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现.

为清晰起见, 我们按如下方式写出 y 所有可能的表达式.

情形 1: y 没有严格单调区间. 此时, $y\equiv 2$ 和 $y\equiv -2$.

情形 2: y 至少有一个严格单调区间.

此时, 有 $\varepsilon=\pm 1$, $-\infty\leqslant \ell\leqslant m\leqslant +\infty$ 以及相应的 $\{a_k\}_\ell^m$ 满足 $a_{k+1}-a_k\geqslant \pi\ (\ell\leqslant k\leqslant m-1)$, 使得

$$y(x)=2\varepsilon\begin{cases}(-1)^{k+1}\cos(x-a_k), & x\in(a_k,a_k+\pi), \ell\leqslant k\leqslant m,\\ (-1)^k, & a_k+\pi\leqslant x\leqslant a_{k+1}, \ell\leqslant k\leqslant m-1,\\ (-1)^{\ell+1}, & x\leqslant a_\ell,\\ (-1)^m, & x\geqslant a_m+\pi,\end{cases}$$

其中, 上式中, 后两种情形分别对应在 $\ell>-\infty$ 和 $m<+\infty$ 时出现.

另一方面, 上述给出的函数满足题设条件. 因此, 我们找到了满足题设条件的所有函数.

…………………………………………………………………… (10 分)