Rapport de Travaux Pratiques - Séance 1

Anis Djelil
Master 2 Mathématiques et Applications
Université de Montpellier
Module : Estimation a posteriori

Septembre 2025

Introduction

Cette première séance vise à se familiariser avec Python (Spyder ou Jupyter Notebook) et à appliquer des méthodes numériques pour résoudre une équation différentielle ordinaire (EDO). L'objectif est de comparer les solutions numériques obtenues par le schéma d'Euler explicite avec la solution exacte et d'étudier la convergence de l'erreur en fonction du pas de temps.

Objectif de la séance

On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u, \quad u(0) = 1, \quad \lambda = 1$$

en utilisant le schéma d'Euler explicite, puis à comparer les résultats obtenus avec la solution exacte et à analyser la convergence.

Méthodologie

Le schéma d'Euler explicite est défini par :

$$U_{k+1} = U_k - \lambda \, \Delta t \, U_k$$

L'erreur ponctuelle est :

$$erreur(t_k) = |U_k - u_{exact}(t_k)|$$

La convergence est étudiée à l'aide de la norme L2 :

$$\|U - u_{exact}\|_{L2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (U_k - u_{exact}(t_k))^2}$$

Résultats et analyses

Figure 1 – Comparaison des solutions

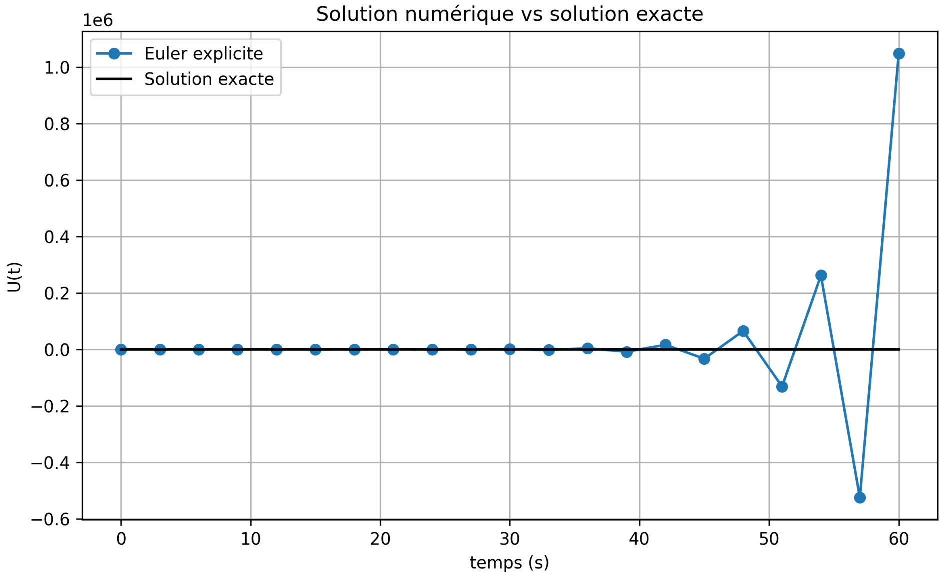

FIGURE 1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique (Euler explicite).

La Figure 1 illustre la comparaison entre la solution exacte et la solution numérique obtenue par le schéma d'Euler explicite. On observe que pour un pas de temps suffisamment petit, la solution numérique suit fidèlement la solution exacte. En revanche, lorsque le pas de temps devient trop grand, la solution numérique diverge progressivement, ce qui met en évidence la sensibilité du schéma d'Euler explicite à la taille du pas de temps.

Figure 2 – Évolution de l'erreur

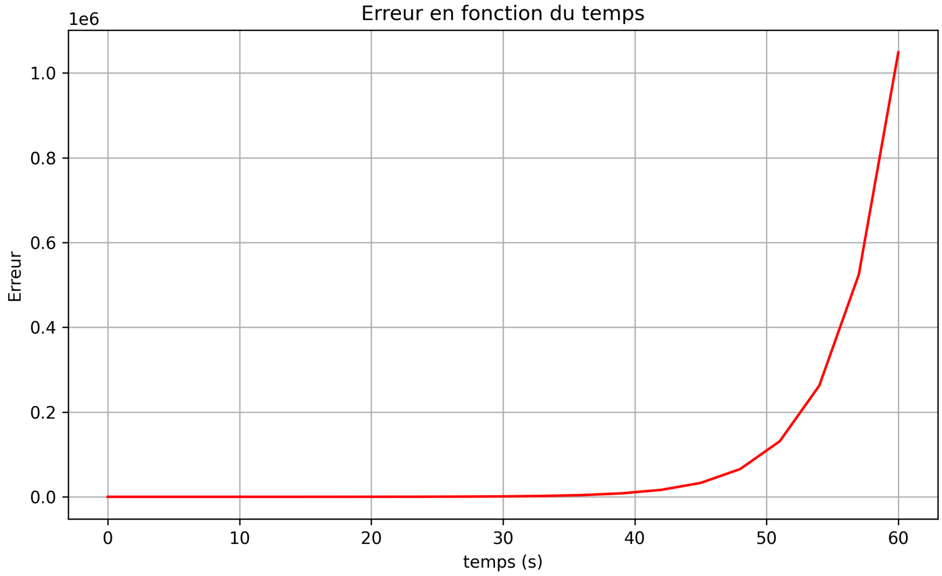

FIGURE 2 – Évolution de l'erreur en fonction du temps.

La Figure 2 montre l'évolution de l'erreur en fonction du temps. L'erreur augmente au fil du temps, ce qui est typique d'un schéma explicite non stabilisé. Cette croissance peut être linéaire ou exponentielle selon la taille du pas de temps Δt. Une amélioration de la précision peut être obtenue en diminuant Δt ou en utilisant un schéma implicite plus stable. Il serait également pertinent d'ajouter une borne théorique de l'erreur pour valider la cohérence de la simulation.

Figure 3 – Convergence de l'erreur L2 de la solution

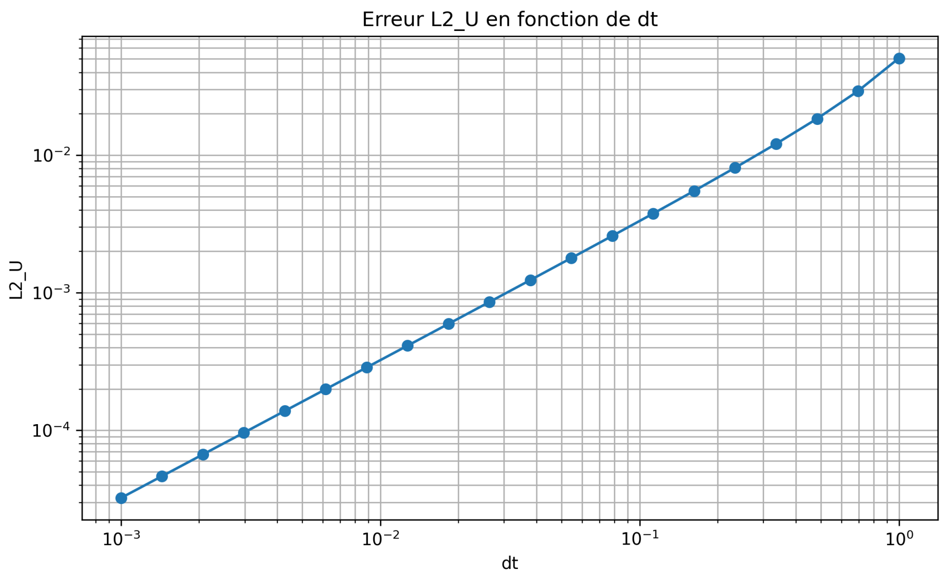

FIGURE 3 – Erreur L2 de la solution en fonction du pas de temps Δt.

La Figure 3 présente la convergence de l'erreur L2 de la solution en fonction du pas de temps. On constate une décroissance régulière de l'erreur lorsque Δt diminue, ce qui confirme la convergence du schéma. L'utilisation d'une échelle logarithmique permet de visualiser clairement la pente de convergence. On observe une pente proche de 1, ce qui correspond à une convergence d'ordre 1, caractéristique du schéma d'Euler explicite.

Figure 4 – Convergence de l'erreur L2 de la dérivée

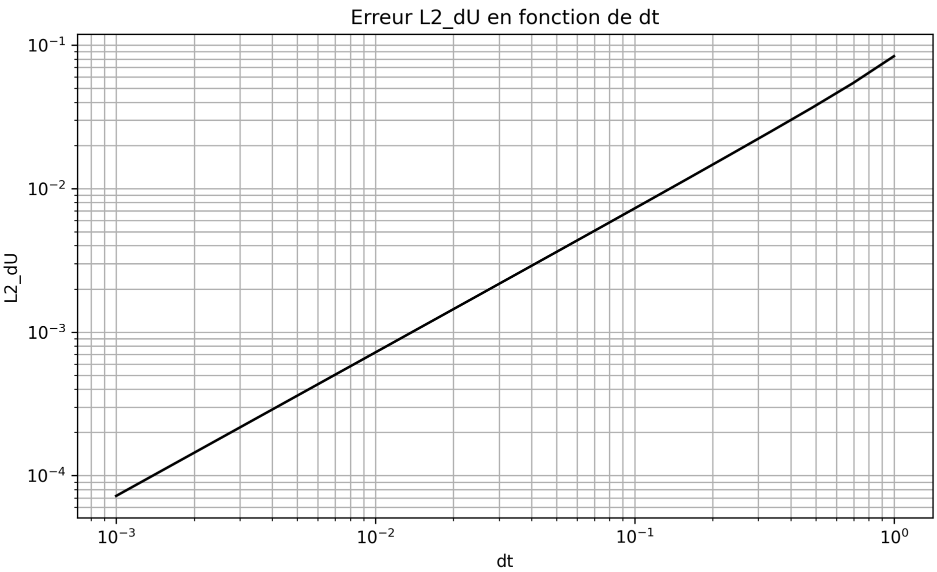

FIGURE 4 – Erreur L2 de la dérivée de la solution en fonction du pas de temps Δt.

La Figure 4 montre la convergence de l'erreur L2 de la dérivée de la solution. Cette erreur est plus sensible aux variations du pas de temps car elle dépend des différences finies, donc plus instable pour des Δt élevés. Cependant, on remarque une décroissance cohérente avec celle de la solution, confirmant la validité du schéma pour la dérivée. Comparer les pentes des deux erreurs (solution et dérivée) permet de mieux comprendre la précision globale du schéma numérique.

Conclusion

Cette séance a permis :

— De se familiariser avec Python pour la résolution d'équations différentielles ordinaires.

— De mettre en œuvre le schéma d'Euler explicite.

— De comparer la solution numérique avec la solution exacte et d'analyser les erreurs.

— De vérifier expérimentalement la convergence d'ordre 1 du schéma.

Le schéma d'Euler explicite est simple à implémenter, mais il reste sensible à la taille du pas de temps. L'analyse des erreurs et des figures a permis de valider la cohérence des résultats numériques obtenus.

Résolution numérique d'une équation ADRS avec source localisée

Objectif

Cette partie vise à résoudre numériquement une équation d'advection-diffusion-réaction avec source localisée dans un domaine rectangulaire. L'objectif est de simuler l'évolution d'une grandeur $u(t, \mathbf{s})$ soumise à un champ de vitesse constant, à une diffusion isotrope, à une réaction linéaire, et à une source ponctuelle. On souhaite illustrer la solution obtenue, l'erreur L^2 par rapport à l'état initial, ainsi que la norme du gradient de la solution.

Modèle mathématique

L'équation étudiée est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\lambda u + f(t, \mathbf{s})$$

avec :
- $V = (v_1, v_2) = (1.0, 0.5)$: champ de vitesse constant
- $\nu = 0.01$: coefficient de diffusion
- $\lambda = 1.0$: coefficient de réaction
- $f(t, \mathbf{s}) = T_c \exp(-k \cdot d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_c)^2)$: source localisée au point $\mathbf{s}_c = (0.5, 0.5)$, avec $T_c = 1.0$, $k = 50.0$

La distance au centre de la source est définie par :

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_c)^2 = (s_1 - s_{c1})^2 + (s_2 - s_{c2})^2$$

Méthodologie numérique

Le domaine est carré $[0, 1] \times [0, 1]$, discrétisé en 100×100 points. Le temps est simulé jusqu'à $T = 0.1$, avec un nombre de pas N_t choisi par l'utilisateur. Le schéma utilisé est Euler explicite en temps, avec différences finies centrées en espace. Les conditions de Dirichlet sont imposées uniquement sur les bords entrants, c'est-à-dire là où $V \cdot n < 0$.

Résultats et interprétation

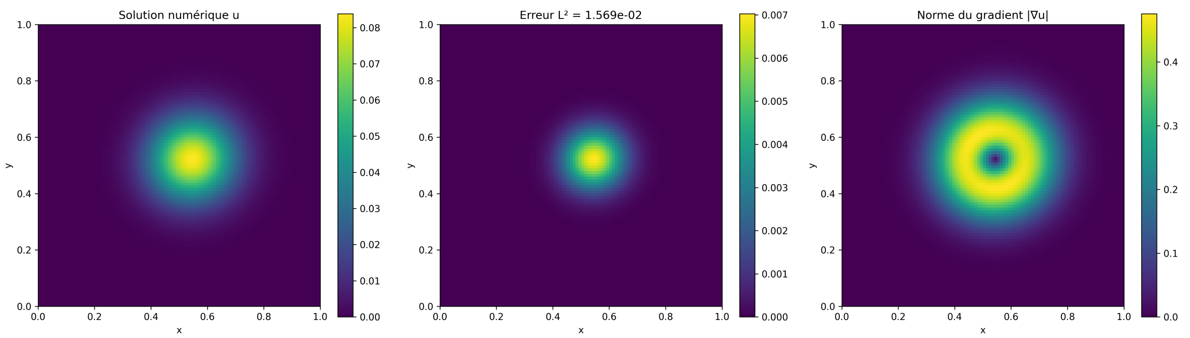

FIGURE 5 – De gauche à droite : solution numérique u, erreur L^2 par rapport à l'état initial, norme du gradient $|\nabla u|$

Solution numérique u : La solution est bien localisée autour du centre $(0.5, 0.5)$, là où la source est maximale. On observe une propagation anisotrope dans la direction du champ de vitesse V, ce qui est cohérent avec le terme d'advection. L'amplitude maximale est modérée (~ 0.08), ce qui montre que la réaction $-\lambda u$ joue bien son rôle de dissipation. La diffusion étant faible, la solution reste concentrée.

Erreur L^2 : L'erreur est concentrée autour de la zone d'influence de la source, ce qui est attendu puisque $u_0 = 0$. La valeur globale $L^2 = 1.56 \times 10^{-2}$ est raisonnable pour une simulation courte avec un schéma explicite. L'erreur est spatialement lisse, ce qui témoigne d'une bonne régularité numérique.

Norme du gradient $|\nabla u|$: Le gradient est maximal sur les fronts de propagation, là où la solution change rapidement. Les valeurs restent faibles (~ 0.007), ce qui indique une solution bien résolue sans oscillations numériques. Cette figure est utile pour identifier les zones sensibles à la discrétisation et pour évaluer la stabilité du schéma.

Conclusion

Cette partie a permis de :

- Implémenter un schéma d'Euler explicite pour une équation ADRS en 2D
- Intégrer une source localisée et des conditions aux limites adaptées au flux
- Visualiser la solution, l'erreur L^2, et la norme du gradient
- Valider qualitativement la cohérence du schéma et l'influence des paramètres physiques

Une amélioration possible serait d'étudier la convergence en temps ou de comparer avec un schéma implicite plus stable.