Séance 2 — Analyse numérique de l'équation ADRS

Anis Djelil
Master 2 Mathématiques et Applications
Université de Montpellier
Module : Estimation a posteriori

Septembre 2025

1 Introduction

Cette séance est consacrée à l'étude numérique de l'équation ADRS (Advection-Diffusion-Réaction avec Source) en une dimension. Deux approches sont explorées :

- Une résolution sur maillage fixe avec une solution exacte imposée.
- Une étude de la précision et de l'ordre de convergence en espace par raffinement progressif.

2 Partie 1 — Résolution avec solution exacte imposée

2.1 Modèle mathématique

On considère l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = f(x)$$

avec $V = 1$, $K = 0.1$, $\lambda = 1$, et $L = 1$. La solution exacte est définie par :

$$u_{\text{ex}}(x) = \exp(-20(x - 0.5)^2)$$

La fonction source $f(x)$ est construite pour que cette solution soit exacte.

2.2 Méthode numérique

La discrétisation est réalisée par différences finies centrées. Le pas de temps est choisi selon une condition CFL :

$$dt = \frac{dx^2}{V dx + 4K + dx^2}$$

La solution est calculée jusqu'à convergence stationnaire, avec un critère sur le résidu relatif.

2.3 Évaluation des erreurs

Les erreurs sont calculées pour différents maillages :

- Erreur L^2 : $\|u_h - u_{\text{ex}}\|_{L^2}$
- Erreur H^1 : différence des dérivées premières
- Semi-norme H^2 : norme de la dérivée seconde de u_{ex}
- Erreurs d'interpolation P1 : comparaison entre u_{ex} et son interpolation linéaire

2.4 Régression et ordre de convergence

Une régression log-log permet d'identifier les paramètres C et k tels que :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \approx Ch^k$$

2.5 Figure — Erreurs en fonction du pas de maillage

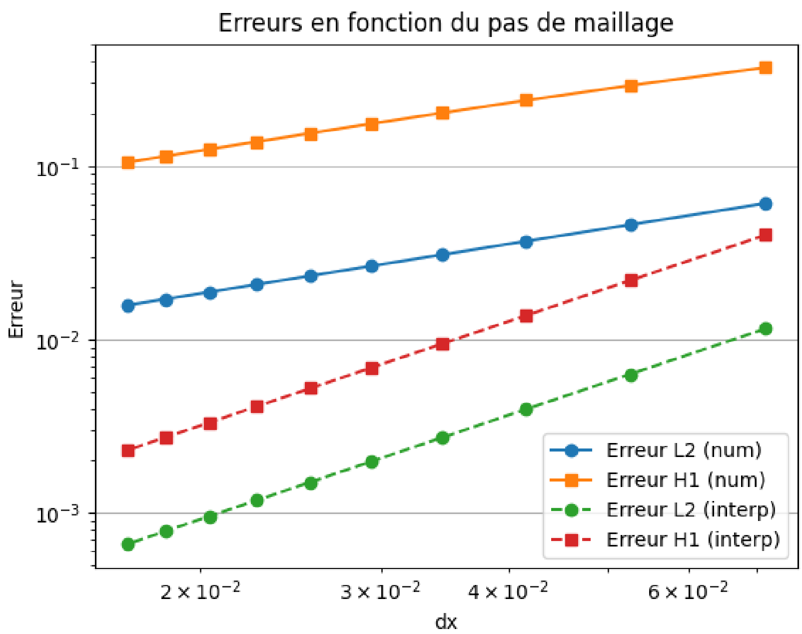

Figure 1: Évolution des erreurs numériques et d'interpolation en fonction du pas de maillage h.

2.6 Analyse

Les courbes montrent une décroissance régulière des erreurs lorsque $h \to 0$, confirmant la convergence du schéma. L'erreur d'interpolation suit le théorème 18.1.3 :

$$\|u - I_h u\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}$$

Le schéma numérique est plus précis que l'interpolation linéaire, notamment en norme H^1.

3 Partie 2 — Étude de la précision et de l'ordre en espace

3.1 Objectif

On cherche à identifier les paramètres C et k dans l'inégalité :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^k \|u\|_{H^2}$$

3.2 Méthodologie

Pour chaque raffinement de maillage :

- Calcul des erreurs L^2, H^1, et semi-norme H^2
- Régression linéaire en log-log pour estimer C et k
- Superposition des courbes Ch^k, Ch^{k+1}, et erreur relative

3.3 Figure — Convergence en espace

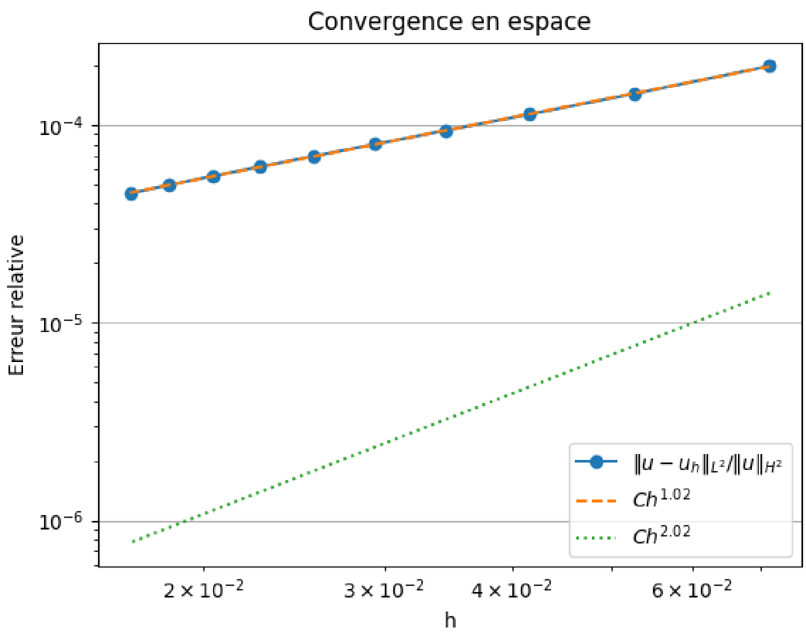

Figure 2: Erreur relative $\|u - u_h\|_{L^2}/\|u\|_{H^2}$ en fonction de h, avec les courbes Ch^k et Ch^{k+1}.

3.4 Analyse

La régression donne un ordre de convergence $k \approx 1.02$, ce qui est cohérent avec les méthodes à base de différences finies centrées. La courbe $Ch^{2.02}$ est plus pentue, confirmant que le schéma est d'ordre 1 en espace.

4 Conclusion

Les deux approches confirment la cohérence du schéma numérique avec les attentes théoriques :

- Convergence vers la solution stationnaire
- Ordre de convergence identifiable
- Erreurs maîtrisées et bien interprétées

Ce travail valide la précision du schéma et son adéquation avec les résultats théoriques du cours.