



Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II

Helio Pedro Amaral Souto

Nova Friburgo, 17 de Novembro de 2015

Graduação em Engenharia de Computação

1 A Equação de Advecção

Em problemas práticos, a equação de advecção pode ser empregada na determinação da variação espacial e temporal da concentração de um traçador escoando num meio físico. Por traçador entendemos ser uma pequena concentração de uma substância presente no fluido que escoa, de modo que a presença do traçador não tenha influência na dinâmica do escoamento. Como exemplo de aplicação, podemos citar o escoamento de um traçador no interior de um reservatório de petróleo, a fim de que os padrões de escoamentos sejam determinados em função do tempo transcorrido a partir da injeção do traçador.

A forma conservativa da equação de advecção para um problema unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) = 0 \quad (1)$$

onde Φ representa a variável dependente e u a velocidade de advecção.

Para uma velocidade de advecção constante a Eq. (1) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

sendo que nesta equação $u = \bar{u}$ é uma constante.

Da teoria das equações diferenciais parciais, sabemos que a Eq. (2) admite uma solução do tipo [1, 2]

$$\Phi(x, t) = \overset{\circ}{\Phi}(x - \bar{u}(t - t_0)) \quad (3)$$

para $t > t_0$ onde $\overset{\circ}{\Phi}(x)$ é a condição inicial. Portanto, o perfil inicial de ϕ é simplesmente transladado com velocidade \bar{u} .

Neste trabalho, devemos empregar o método dos volumes finitos na resolução da equação de advecção, Eq. (2), considerando condições de contorno do tipo periódicas. Queremos determinar as soluções para os instantes de tempo $t=1$ e $t=5$ e para um número de Courant $C = \bar{u}\Delta t/\Delta x$ igual a 0,8. O domínio unidimensional é limitado por $0 \leq x \leq 1$ e a condição inicial é dada por:

$$\overset{\circ}{\Phi}(x) = \exp[-200(x - 0,3)^2] + s(x) \quad (4)$$

$$\bar{u} = 1,0$$

onde

$$s(x) = \begin{cases} 1,0 & \text{se } 0,6 \leq x \leq 0,8 \\ 0,0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2 Solução Numérica

A resolução numérica da Equação (2) será realizada mediante a utilização da forma geral do método dos volumes finitos aplicado à lei de conservação

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\Phi) = 0 \quad (5)$$

onde $f(\Phi)$ representa a função de fluxo, que no caso considerado neste trabalho é igual a $\bar{u}\Phi$.

Portanto, da literatura [2] sabemos que a forma geral discretizada desta equação será

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (6)$$

onde Q representa o valor médio da variável dependente em um determinado volume finito

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Phi(x, t_{n+1}) dx \quad (7)$$

e,

$$Q_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Phi(x, t_n) dx \quad (8)$$

Por outro lado, F representa o valor do fluxo calculado na face do volume finito

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\Phi(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (9)$$

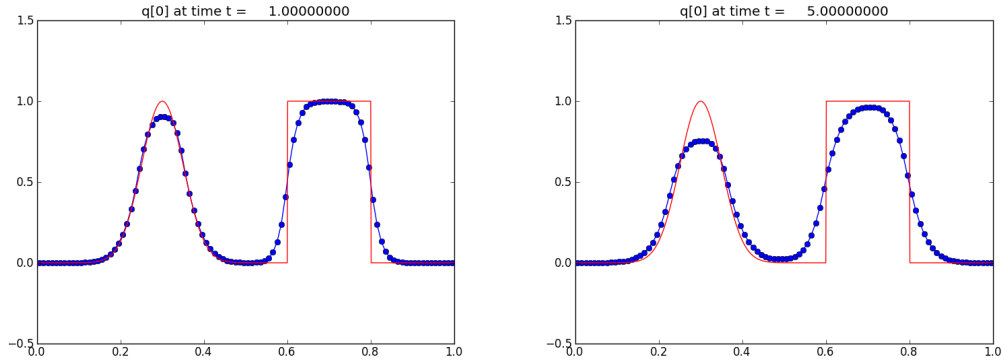
e,

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\Phi(x_{i-1/2}, t)) dt \quad (10)$$

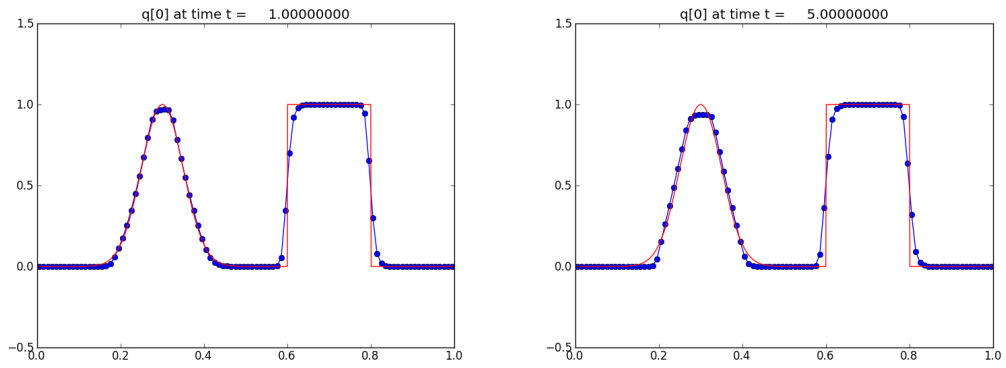
Devemos obter a solução numérica empregando três métodos clássicos do tipo TVD conhecidos [2] como: *Minmod*, *Superbee*, *Monotonized-Central Difference* e van Leer.

A fim de mostrarmos a superioridade destes métodos com relação aos resultados fornecidos previamente pelos métodos *Upwind*, Lax-Wendroff e Beam-Warming, o *software* CLAWPACK [3] foi utilizado na obtenção da solução numérica da Eq. (2) para a condição inicial fornecida pela Eq. (4), conforme podemos observar na Fig. 1. Um dos objetivos deste trabalho é a reprodução destes resultados (incluindo o esquema de van Leer), mediante a implementação numérica do método dos volumes finitos com a introdução de uma função limitadora de fluxo.

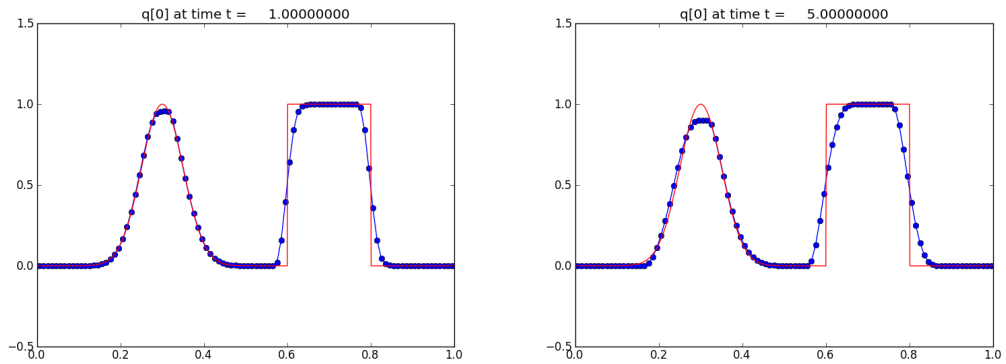
O código fonte e a listagem dos resultados, e/ou gráficos, devem ser fornecidos impressos!



(a) Minmod



(b) Superbee



(c) MC

Figura 1: Comparação entre as soluções da equação de advecção, para os instantes de tempo $t=1$ e 5 , fornecidas pelos métodos (a) *Minmod*, (b) *Superbee* e (c) *MC*.

2.1 Os Métodos TVD

Em se tratando dos métodos do tipo TVD os fluxos nas faces dos volumes finitos são calculados mediante a introdução de um termos anti-difusivo e de uma função limitadora de fluxo

$$F_{i-1/2}^n = \bar{u}^- Q_i^n + \bar{u}^+ Q_{i-1}^n + \frac{1}{2} |\bar{u}| \left(1 - \left| \frac{\bar{u} \Delta t}{\Delta x} \right| \right) \delta_{i-1/2}^n \quad (11)$$

$$F_{i+1/2}^n = \bar{u}^- Q_{i+1}^n + \bar{u}^+ Q_i^n + \frac{1}{2} |\bar{u}| \left(1 - \left| \frac{\bar{u} \Delta t}{\Delta x} \right| \right) \delta_{i+1/2}^n \quad (12)$$

válidos tanto para $\bar{u} > 0$ como para $\bar{u} < 0$. Nestas expressões os valores de $\delta_{i-1/2}^n$ e $\delta_{i+1/2}^n$ representam os valores limitados de $\Delta Q_{i-1/2}^n$ e $\Delta Q_{i+1/2}^n$ respectivamente. Caso os valores limitantes sejam os próprios saltos recuperamos o método de Lax-Wendroff, que pode ser interpretado como uma modificação do método de *Upwind* de primeira ordem. Para demais valores podemos obter outros métodos conhecidos de alta-resolução.

Nestas expressões dos fluxos, os limitadores de fluxo são obtidos a partir da proposição [2]

$$\delta_{i-1/2}^n = \psi(\theta_{i-1/2}^n) \Delta Q_{i-1/2}^n \quad (13)$$

onde

$$\theta_{i-1/2}^n = \frac{\Delta Q_{I-1/2}^n}{\Delta Q_{i-1/2}^n}$$

e o subscrito I é empregado para designar a interface *upwind* de $x_{i-1/2}$

$$I = \begin{cases} i - 1 & \text{se } \bar{u} > 0 \\ i + 1 & \text{se } \bar{u} < 0 \end{cases}$$

e de modo análogo

$$\delta_{i+1/2}^n = \psi(\theta_{i+1/2}^n) \Delta Q_{i+1/2}^n$$

com

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{\Delta Q_{I+1/2}^n}{\Delta Q_{i+1/2}^n}$$

Resumindo, vamos fornecer, em seguida, os diferentes valores de θ em função dos valores positivos ou negativos da velocidade de advecção. Para $\bar{u} > 0$ as possibilidades são:

$$\theta_{i-1/2}^n = \frac{Q_{i-1}^n - Q_{i-2}^n}{Q_i^n - Q_{i-1}^n}$$

Tabela 1: Função limitadora de fluxo para métodos de alta-resolução.

Método	$\psi(\theta)$
Mimmod	$\minmod(1, \theta)$
Superbee	$\max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$
Monotonized-Central-Difference (MC)	$\max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2\theta))$
van Leer	$\frac{\theta + \theta }{1 + \theta }$

e,

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{Q_{i+1}^n - Q_i^n}$$

enquanto que para $\bar{u} < 0$

$$\theta_{i-1/2}^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{Q_i^n - Q_{i-1}^n}$$

e,

$$\theta_{i+1/2}^n = \frac{Q_{i+2}^n - Q_{i+1}^n}{Q_{i+1}^n - Q_i^n}$$

A relação $\theta_{i-1/2}^n$ pode ser pensada como uma medida da suavidade dos dados próxima a $x_{i-1/2}$. Quando os dados forem suaves devemos esperar que $\theta_{i-1/2}^n \approx 1$, exceto para um extremo. Por outro lado, próximo de uma descontinuidade devemos esperar que este valor possa estar longe da unidade.

Uma grande variedade de outras funções limitadoras de fluxo podem ser encontradas na literatura. Alguns exemplos utilizados em métodos numéricos de alta-resolução podem ser vistos na Tabela 1. Muitos destes limitadores já estão disponíveis no *software* CLAWPACK [3]. Na Tabela 1 a função *minmod* de dois argumentos é dada por:

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } |a| < |b| \text{ e } ab > 0 \\ b & \text{se } |b| < |a| \text{ e } ab > 0 \\ 0 & \text{se } ab \leq 0 \end{cases}$$

Passamos, agora, ao desenvolvimento final para a escritura da forma geral dos métodos com os limitadores de fluxo. Vimos que estes métodos apresentam os fluxos

dados pelas Equações (11) e (12). Portanto, o emprego destes fluxos juntamente com as expressões para $\delta_{i-1/2}$ e $\delta_{i+1/2}$ resulta na forma geral para $\bar{u} > 0$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - C (Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2}C(1-C) [\psi(\theta_{i+1/2}^n) (Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \psi(\theta_{i-1/2}^n) (Q_i^n - Q_{i-1}^n)] \quad (14)$$

enquanto que para $\bar{u} < 0$ temos que

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - C (Q_{i+1}^n - Q_i^n) + \frac{1}{2}C(1+C) [\psi(\theta_{i+1/2}^n) (Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \psi(\theta_{i-1/2}^n) (Q_i^n - Q_{i-1}^n)] \quad (15)$$

tendo sido utilizado o número de Courant $C = \bar{u}\Delta t/\Delta x$.

Para todos os três métodos numéricos considerados neste trabalho, podemos mostrar que a condição de estabilidade, para a formulação explícita do método de volumes finitos, é verificada caso a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) for satisfeita: $0 \leq C \leq 1$ [2, 4].

Referências

- [1] Beny Neta. Partial differential equations. Ma 3132 lecture notes, Naval Postgraduate School, Monterey, California, USA, 1996.
- [2] Randall J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] R. J. LeVeque, M. J. Berger, et al. Clawpack software (version 4.6.2). www.clawpack.org, junho 2012.
- [4] C. A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, volume 1. Springer-Verlag, 1991.