Trabalho 1 de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II

Ariel Nogueira Kovaljski

Nova Friburgo, XX de setembro de 2020

Conteúdo

1. Introdução

Neste trabalho foi implementado um método computacional de maneira a resolver a equação de Advecção-Difusão de forma numérica.

Para melhor entender o desenvolvimento, é necessária introdução de alguns conceitos-chave utilizados.

1.1 A Equação de Advecção-Difusão

A equação de advecção-difusão possibilita a solução de problemas envolvendo variações espaciais e temporais da concentração de uma substância escoando em um fluído. Um exemplo bastante didático consiste no despejo de esgoto em um afluente: o contaminante sofrerá efeitos difusivos — concentrando-se ao redor da saída — e efeitos advectivos — sendo carregado no sentido da correnteza.

Figura 1.1: Efeitos difusivos e advectivos observados no despejo de esgoto no Rio Bengala

Para um problema unidimensional tem-se a seguinte forma,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.1}$$

onde c indica a concentração, u a velocidade e D o coeficiente de difusão.

Considerando que para u e D constantes, tem-se $\bar{u}$ e α, respectivamente, é possível reescrever Eq. 1.1 como,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial c}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \tag{1.2}$$

1.2 Método dos Volumes Finitos

O método dos volumes finitos tem como finalidade a discretização do domínio espacial. Este é subdividido em um conjunto de volumes finitos e as variáveis dependentes são determinadas como médias volumétricas sobre estes volumes, avaliadas nos centros dos mesmos.

A partir da Eq. 1.1, para adaptá-la ao métodos dos volumes finitos, é possível reescrevê-la como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

onde,

$$\Phi = c \tag{1.4}$$

$$f = f(c) = uc - D\frac{\partial c}{\partial x} \tag{1.5}$$

Para a solução, considera-se um domínio discretizado e subdividido conforme figuras abaixo:

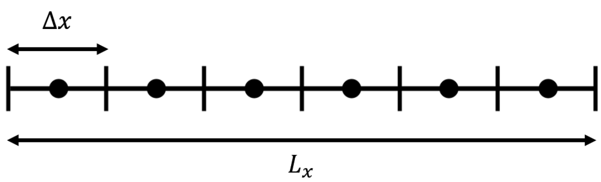

Figura 1.2: Partição do domínio da solução

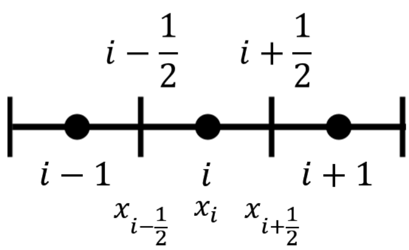

Figura 1.3: Posições ao redor do i-ésimo volume da malha

Para obter-se a discretização do domínio, integra-se a Eq. 1.3 no intervalo de tempo de t^n a t^{n+1} e no espaço de $x_{i-\frac{1}{2}}$ a $x_{i+\frac{1}{2}}$. Além disso, define-se os incrementos no tempo e no espaço como

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \qquad \text{e} \qquad \Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$$

Tem-se, assim, uma integração dupla

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\left(\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt\right)dx+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)dt=0$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}[\Phi(x,t^{n+1})-\Phi(x,t^n)]dx+\int_{t^n}^{t^{n+1}}[f(x_{i+\frac{1}{2}},t)-f(x_{i-\frac{1}{2}},t)]dt=0 \quad (1.6)$$

Define-se uma variável Q_i^k que consiste no valor médio aproximado de Φ no espaço, dado um tempo k onde $k=t^n$ ou $k=t^{n+1}$

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\Phi(x,t^n)dx \quad (1.7)$$

$$Q_i^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\Phi(x,t^{n+1})dx \quad (1.8)$$

Analogamente, define-se os fluxos como um F_k^n que consiste no valor médio aproximado de F no tempo, dada uma posição k onde $k=x_{i-\frac{1}{2}}$ ou $k=x_{i+\frac{1}{2}}$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}f(x_{i-\frac{1}{2}},t)dt \quad (1.9)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}f(x_{i+\frac{1}{2}},t)dt \quad (1.10)$$

Substituindo as Eq. 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10 na Eq. 1.6 e dividindo todos os termos por Δx tem-se que

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}[\Phi(x,t^{n+1})-\Phi(x,t^n)]dx\right\}+\frac{1}{\Delta x}\left\{\int_{t^n}^{t^{n+1}}[f(x_{i+\frac{1}{2}},t)-f(x_{i-\frac{1}{2}},t)]dt\right\}=0$$

$$Q_i^{n+1}-Q_i^n+\frac{1}{\Delta x}\left\{\int_{t^n}^{t^{n+1}}[f(x_{i+\frac{1}{2}},t)-f(x_{i-\frac{1}{2}},t)]dt\right\}=0$$

$$Q_i^{n+1}=Q_i^n+\frac{\Delta t}{\Delta t\Delta x}\left\{\int_{t^n}^{t^{n+1}}[f(x_{i+\frac{1}{2}},t)-f(x_{i-\frac{1}{2}},t)]dt\right\}$$

Por fim, obtém-se

$$Q_i^{n+1}=Q_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}}^n-F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (1.11)$$

onde o valor médio de Φ no volume de controle, Q, deve ser atualizado iterativamente para o próximo passo de tempo.

Para a aproximação dos fluxos, dentre as possíveis metodologias, foi escolhido o uso de uma aproximação *upwind* para a concentração c:

$$c \approx \frac{(Q_i^n-Q_{i-1}^n)}{\Delta x} \quad (1.12)$$

e uma aproximação centrada para a derivada espacial da concentração $\frac{\partial c}{\partial x}$:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta x^2} \tag{1.13}$$

que, ao serem substituídas na Eq. 1.11, resultam em

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{u}Q_i^n - \alpha\frac{(Q_{i+1}^n - Q_i^n)}{\Delta x} - \bar{u}Q_{i-1}^n + \alpha\frac{(Q_i^n - Q_{i-1}^n)}{\Delta x}\right]$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{u}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \alpha\frac{(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta x}\right]$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \Delta t\left[\bar{u}\frac{(Q_i^n - Q_{i-1}^n)}{\Delta x} - \alpha\frac{(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta x^2}\right] \tag{1.14}$$

2. Desenvolvimento

O desenvolvimento entra aqui.

2.1 Seção 1

A seção 1 entra aqui.

2.2 Seção 2

A seção 2 entra aqui.

2.3 Seção 3

A seção 3 entra aqui.

3. Resultados

Os resultados entram aqui.

3.1 Seção 1

A seção 1 entra aqui.

3.2 Seção 2

A seção 2 entra aqui.

3.3 Seção 3

A seção 3 entra aqui.

4. Conclusão

As conclusões entram aqui.

5. Código Computacional

O código computacional entra aqui.