UERJ – IPRJ – DMC

Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II – 2020/1

Professores: Helio Pedro Amaral Souto e Grazione de Souza

Este texto apresenta a proposta de Trabalho 2 para a Disciplina de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais II. Mais informações úteis, assim como explicações mais detalhadas, ocorrerão em sala de aula até a entrega do trabalho, para auxiliar os estudantes na construção do código/redação do relatório.

Trabalho 2: Comparação de Métodos aplicados à Equação de Advecção

A equação de advecção para um problema unidimensional no espaço envolvendo a determinação da concentração de um traçador (problema no qual despreza-se a influência da difusão física) pode ser apresentada na forma

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(uc\right) = 0, \tag{1}$$

onde c indica a concentração e u a velocidade.

Para u constante igual a $\overline{u}$, maior do que zero, reescreve-se a Eq. (1),

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial c}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Neste trabalho devem ser empregados diferentes métodos numéricos baseados na discretização por volumes finitos na solução da equação de advecção, Eq. (2). Objetiva-se determinar as soluções em um domínio unidimensional de comprimento L_x, com condição inicial,

$$c\left(x,0\right) = \exp\left[-A\left(x-B\right)\right] + s\left(x\right) \tag{3}$$

onde $s\left(x\right) = 0$, a menos do caso em que $C \leq x \leq D$, onde $s\left(x\right) = E$.

Como condições de contorno,

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^{t}_{x=0} = 0 \tag{4}$$

e

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^{t}_{x=L_x} = 0. \tag{5}$$

Os seguintes métodos numéricos devem ser aplicados na solução deste problema (o primeiro é um caso particular do método já utilizado no Trabalho 1):

a) *Forward Time-Backward Space* (FTBS)

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\overline{u}\Delta t}{\Delta x}\left(Q_i^n - Q_{i-1}^n\right) \tag{6}$$

b) Lax-Friedrichs

$$Q_i^{n+1} = \frac{Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n}{2} - \frac{\overline{u}\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n\right) \tag{7}$$

c) Lax-Wendroff

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\overline{u}\Delta t}{2\Delta x}\left(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n\right) + \frac{\overline{u}^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n\right) \tag{8}$$

d) Beam-Warming

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\overline{u}\Delta t}{2\Delta x}\left(3Q_i^n - 4Q_{i-1}^n + Q_{i-2}^n\right) + \frac{\overline{u}^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(Q_i^n - 2Q_{i-1}^n + Q_{i-2}^n\right) \tag{9}$$

Elabore testes envolvendo refinamento de malha no espaço (aumento progressivo no número de volumes finitos, n_x, na malha computacional). Avalie a solução para diferentes tempos finais de simulação (utilizar discussão em sala de aula) e compare os resultados obtidos com os diferentes métodos. Cada estudante terá o seu conjunto padrão de dados (A, B, C, D, E, por exemplo; utilizar discussão em sala de aula). Apresente os resultados usando gráficos e/ou tabelas e apresente seu trabalho na forma de um relatório (formato .pdf), seguindo a estrutura de Resumo, Introdução, Metodologia, Resultados, Discussão, Conclusões e Referências Bibliográficas, colocando em Anexo a listagem do código desenvolvido.

Data de entrega: até às 23:00 h do dia 16/11/2020.