

5

INTEGRAL TERTENTU**5.1 Pengertian Integral Tertentu****Definisi 5.1.1**

Partisi P pada interval $[a,b]$ adalah suatu subset berhingga $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dari $[a,b]$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

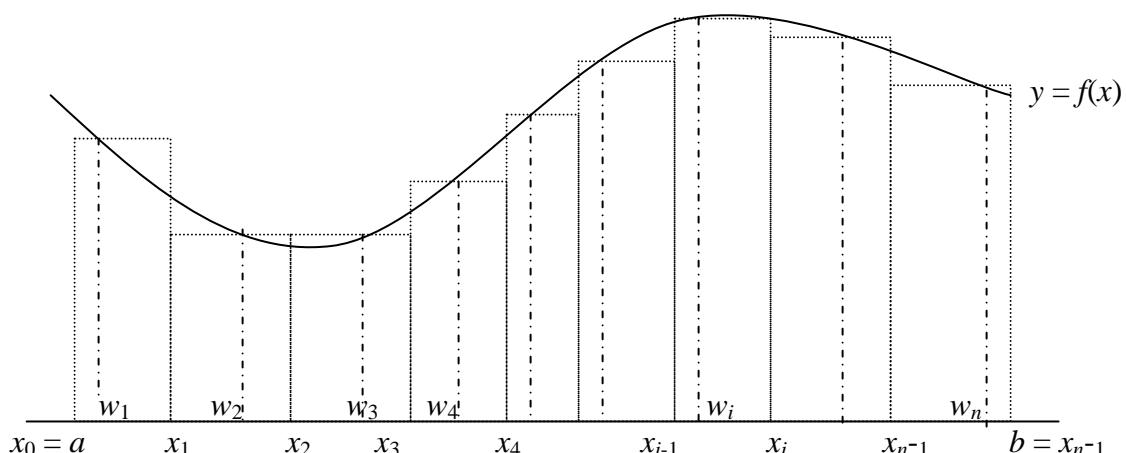
Jika $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$ maka Norm P , ditulis $\|P\|$, didefinisikan sebagai $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

**Contoh 1:**

Pada interval $[-3, 3]$, suatu partisi $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ mempunyai norm:

$$\begin{aligned}\|P\| &= \max\{-1\frac{1}{2} - (-3), -\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{2}), \frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}), 2 - \frac{1}{3}, 3 - 2\} \\ &= \max\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, \frac{5}{3}, 1\} \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Jika f fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ suatu partisi pada $[a,b]$, $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, maka $\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ disebut **Jumlah Riemann f** pada $[a,b]$.



Contoh 2:

Fungsi f pada $[-3, 3]$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 1$ dan $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$. Dipilih titik-titik: $w_1 = -2, w_2 = -\frac{1}{2}, w_3 = 0, w_4 = 1\frac{1}{2}, w_5 = 2\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{llllll} w_1 = -2 & \longrightarrow & f(w_1) = 3 & \Delta x_1 = \frac{3}{2} & \longrightarrow & f(w_1) \cdot \Delta x_1 = \frac{9}{2} \\ w_2 = -\frac{1}{2} & \longrightarrow & f(w_2) = -\frac{3}{4} & \Delta x_2 = 1 & \longrightarrow & f(w_2) \cdot \Delta x_2 = -\frac{3}{4} \\ w_3 = 0 & \longrightarrow & f(w_3) = -1 & \Delta x_3 = \frac{5}{6} & \longrightarrow & f(w_3) \cdot \Delta x_3 = -\frac{5}{6} \\ w_4 = 1\frac{1}{2} & \longrightarrow & f(w_4) = \frac{5}{4} & \Delta x_4 = \frac{5}{3} & \longrightarrow & f(w_4) \cdot \Delta x_4 = \frac{25}{12} \\ w_5 = 2\frac{2}{3} & \longrightarrow & f(w_5) = \frac{55}{9} & \Delta x_5 = 1 & \longrightarrow & f(w_5) \cdot \Delta x_5 = \frac{55}{9} \end{array}$$

Jumlah Riemann fungsi f tersebut pada interval $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P di atas adalah $\sum_{i=1}^5 f(w_i) \Delta x_i = \frac{100}{9}$.

Jika $P = \{-3, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\}$ partisi pada $[-3, 3]$ dan $w_1 = -2, w_2 = -1, w_3 = -\frac{1}{2}, w_4 = 0, w_5 = 1\frac{1}{2}, w_6 = 2\frac{1}{3}$, serta $w_7 = 2\frac{3}{4}$ tentukan jumlah Riemann fungsi f pada $[-3, 3]$ bersesuaian dengan partisi P ini.

Definisi 5.1.2

1. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ maka: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan positif δ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$, berlaku $\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i - L \right| < \varepsilon$.
2. Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ ini ada, maka limit tersebut dinamakan **integral tertentu (Integral Riemann)** fungsi f pada $[a,b]$. Selanjutnya f dikatakan *integrable* pada $[a,b]$ dan integralnya ditulis $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Jadi } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$$

3. Jika f integrable pada $[a,b]$ maka:
 - a. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$
 - b. Jika $a = b$ maka $\int_a^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$

Dari definisi 5.1.2 bagian 2 dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i$ secara geometris menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, di atas sumbu X , di antara garis $x = a$ dan $x = b$.

Contoh 3:

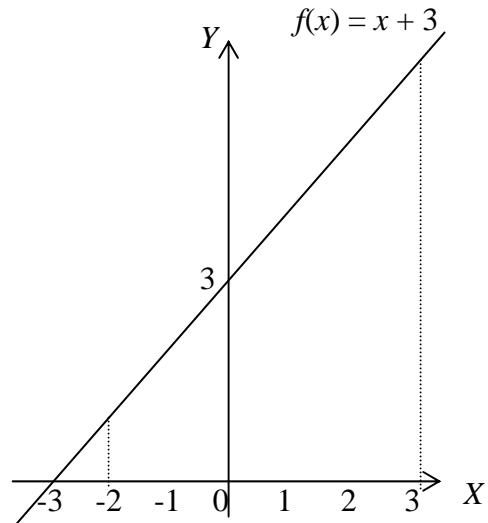
Jika $f(x) = x + 3$, tentukan $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$.

Penyelesaian:

Buat partisi pada $[-2, 3]$ dengan menggunakan n interval bagian yang sama panjang. Jadi panjang setiap interval bagian adalah $\Delta x = \frac{5}{n}$.

Dalam setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ partisi tersebut diambil $w_i = x_i$.

Akan dicari nilai $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta x_i$.



$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$x_3 = -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{5}{n}\right)$$

.

:

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

.

:

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3$$

Karena untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dipilih $w_i = x_i$ maka $w_i = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) = -2 + \frac{5i}{n}$, sehingga

$$\begin{aligned}f(w_i) &= w_i + 3 \\&= \left(-2 + \frac{5i}{n}\right) + 3 \\&= 1 + \frac{5i}{n}\end{aligned}$$

Jadi jumlah Riemann fungsi f pada $[-2, 3]$ bersesuaian dengan partisi P tersebut adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \frac{5}{n} \\&= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \\&= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} \\&= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\&= 5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Jika $\|P\| \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$, sehingga:

$$\begin{aligned}\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\&= 17 \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi $\int_{-2}^3 (x+3) dx = 17 \frac{1}{2}$.

Contoh 4:

Tentukan $\int_a^b dx$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dan sembarang titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i \text{ dan } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
 &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\
 &= x_n - x_0 \\
 &= b - a
 \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (b - a) = b - a$

Dengan demikian $\int_a^b dx = b - a$.

Teorema 5.1.3 (Teorema Fundamental Kalkulus)

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan F suatu anti turunan dari f pada $[a,b]$

(atau $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$), maka : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a)$ biasa ditulis $[F(x)]_a^b$

Bukti:

Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Karena $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Berdasarkan teorema nilai rata-rata maka terdapat $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$\begin{aligned}
 F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(w_i) (x_i - x_{i-1}) \\
 &= f(w_i) (x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f(w_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} \\
 &= \{F(x_1) - F(x_0)\} + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \{F(x_3) - F(x_2)\} + \dots + \{F(x_n) - F(x_{n-1})\} \\
 &= F(x_n) - F(x_0) \\
 &= F(b) - F(a)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a).$$

Jadi $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Contoh 5

$$\int_{-2}^3 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 = \{\frac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\} - \{\frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2)\} = 17\frac{1}{2}.$$

Contoh 6

Tentukan integral berikut.

$$1. \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

Teorema 5.1.4

Jika f integrable pada $[a,b]$ dan $c \in (a,b)$ maka $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Teorema 5.1.5

$$1. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \text{ konstanta}$$

$$2. \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$3. \text{ Jika } f(x) \geq 0 \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$4. \text{ Jika } f(x) \leq g(x) \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \text{ maka } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5.2 Aplikasi Integral

5.2.1 Luas Daerah

Berdasarkan pengertian integral tertentu (Integral Riemann) pada definisi 5.1.2 dan uraian di atas dapat dipahami bahwa jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x) dx$ secara geometris menyatakan luas daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu X serta dibatasi oleh garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Jadi

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Contoh 7

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x + 3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 3$.

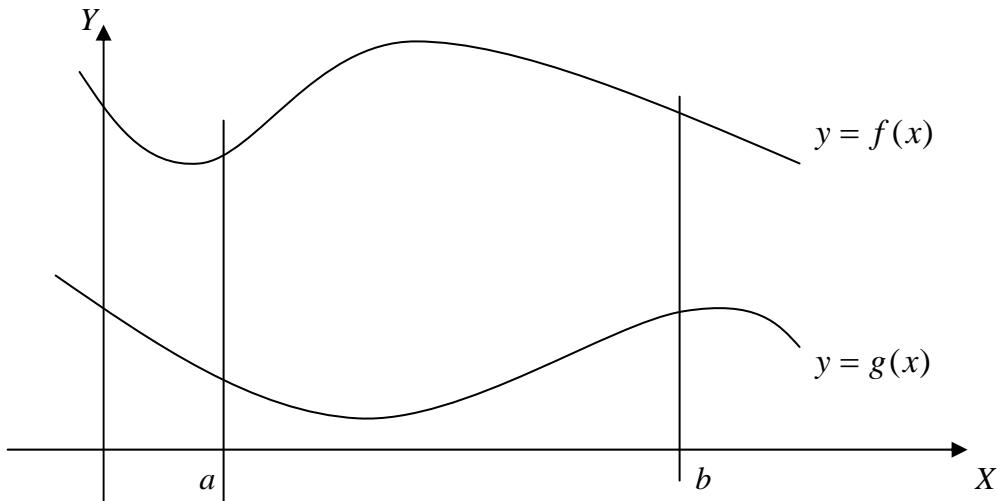
Penyelesaian:

$$A = \int_{-2}^3 (x + 3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 = \{\frac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\} - \{\frac{1}{2}(-2)^2 + 3(-2)\} = 17\frac{1}{2}.$$

Contoh 8

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu X , garis $x = -2$ dan garis $x = 2$.

Penyelesaian:



Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di atas, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

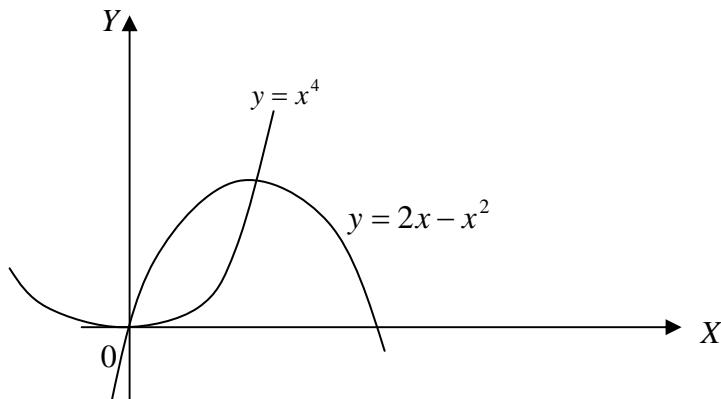
$$A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

Contoh 9

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian:

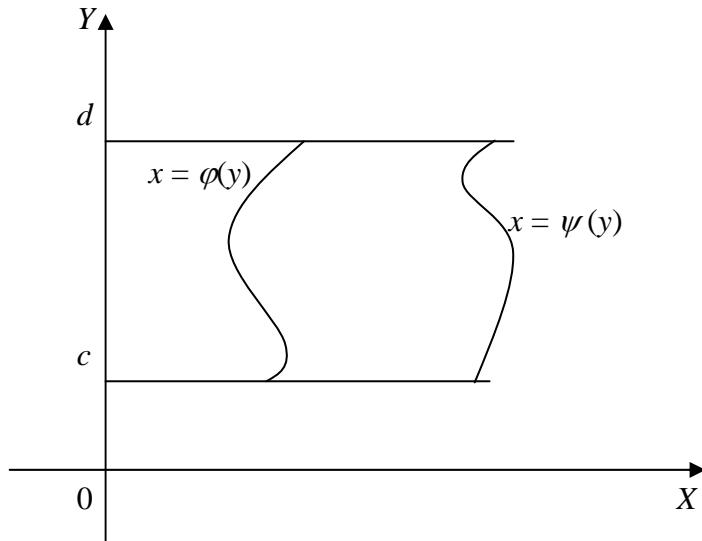
Menentukan batas-batas dicari dengan menentukan akar-akar persamaan $x^4 = 2x - x^2$ yang dapat kita temukan akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = 1$.



sehingga luasnya adalah $A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

Selanjutnya jika suatu daerah dibatasi oleh dua kurva $x = \varphi(y)$ dan $x = \psi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini, maka luas daerahnya adalah sebagai berikut

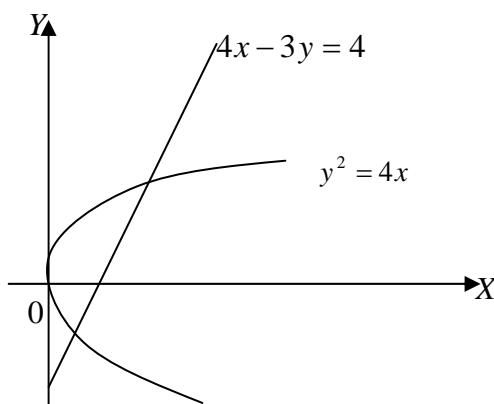
$$A = \int_c^d \{\psi(y) - \varphi(y)\} dy$$



Contoh 10

Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian:



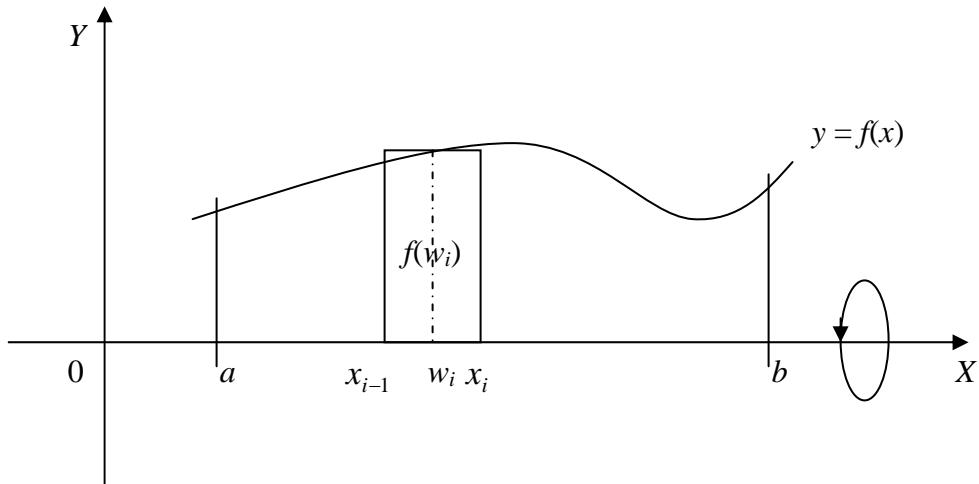
Menentukan batas-batas dengan mencari akar-akar persamaan $y^2 = 3y + 4$ yang diperoleh $y = -1$ dan $y = 4$.

$$y^2 = 4x \text{ ekuivalen dengan } x = \frac{1}{4}y^2 \text{ dan } 4x - 3y = 4 \text{ ekuivalen dengan } x = \frac{1}{4}(3y + 4)$$

$$\text{sehingga luasnya adalah } A = \int_{-1}^4 \left\{ \frac{1}{4}(3y+4) - \frac{1}{4}y^2 \right\} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^4 \{3y+4-y^2\} dy = \frac{125}{24}.$$

5.2.2 Volume Benda Putar

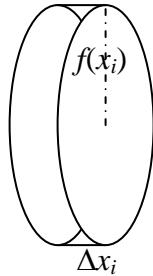
a. Metode Cincin



Jika daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$, sumbu X , garis-garis $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu X , maka diperoleh silinder hampiran dengan volume

$$\Delta V_i = \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$



Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

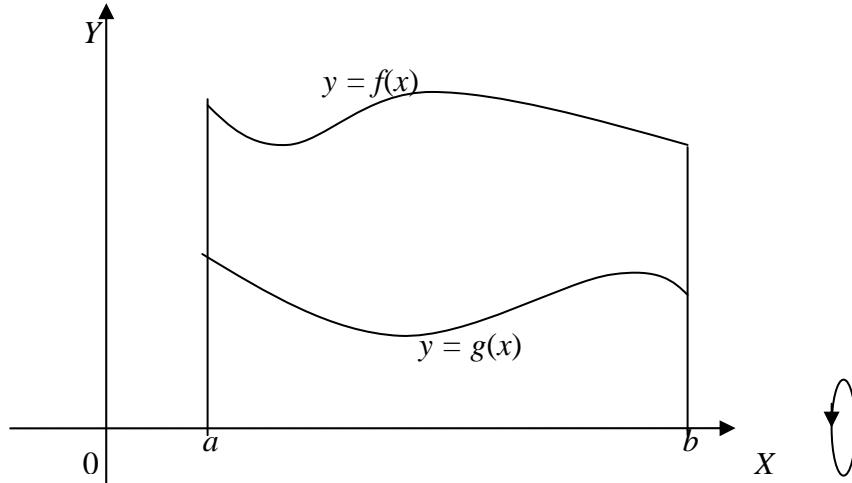
$$\begin{aligned} V_X &= \pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \{f(w_i)\}^2 \Delta x_i \\ &= \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

Jadi

$$V_X = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$



Dengan cara sama, jika daerah yang dibatasi kurva $x = \varphi(y)$, sumbu Y , garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda putar yang terjadi adalah.

$$V_Y = \pi \int_c^d \{\varphi(y)\}^2 dy$$

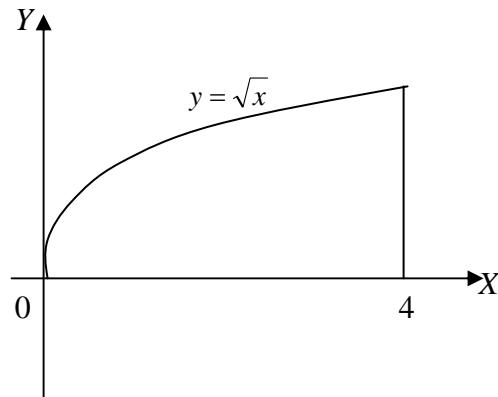
Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \varphi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_Y = \pi \int_c^d [\psi(y)^2 - \varphi(y)^2] dy$$

Contoh 11

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu X dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu X.

Penyelesaian:

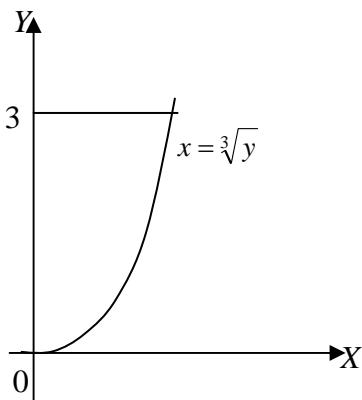


$$V_X = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 8\pi$$

Contoh 12

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu Y dan garis $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y.

Penyelesaian:



Karena $y = x^3$ maka $x = \sqrt[3]{y}$, sehingga

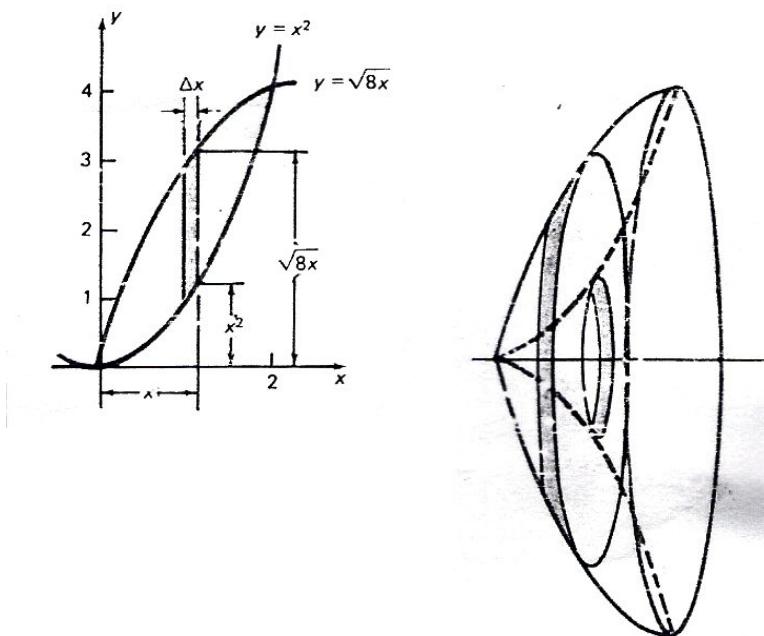
$$V_Y = \pi \int_0^3 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^3 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^3 = \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \pi$$

Contoh 13

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh dua kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu X.

Penyelesaian:

Dapat dicari bahwa perpotongan kedua kurva adalah di $(0, 0)$ dan $(2, 4)$. Jika $y^2 = 8x$ maka $y = \sqrt{8x}$. Perhatikan gambar berikut.



$$V_x = \pi \int_0^2 \left[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 [8x - x^4] dx = \pi \left[4x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{48}{5}\pi$$

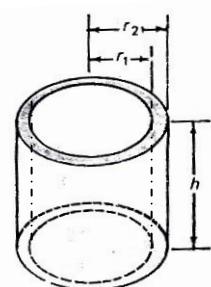
Tentukan pula apabila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu Y.

b. Metode Kulit Tabung

Perhatikan gambar di samping.

Volume benda pejal (ruang antara tabung besar dan kecil) adalah

$$\begin{aligned} V &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$



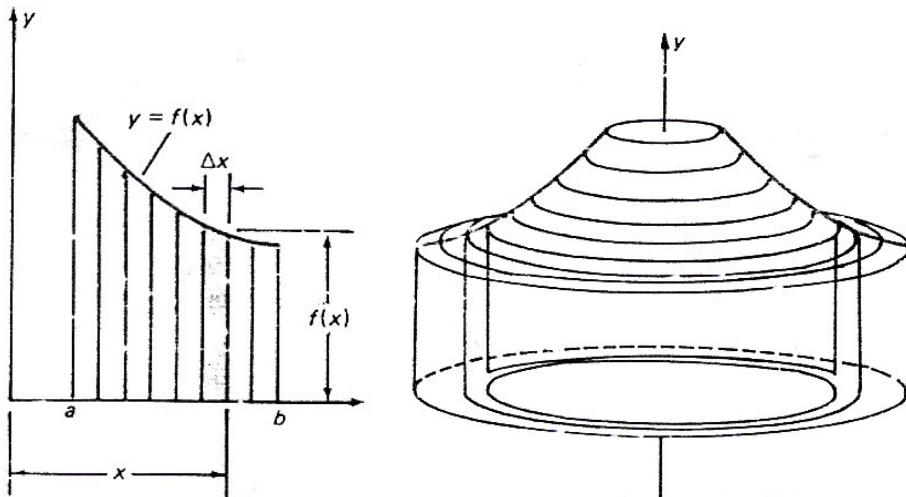
$$= 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right) (r_2 - r_1) h$$

Rumusan ini dapat ditulis sebagai

$$V = 2\pi \bar{r} h \Delta r$$

dengan $\bar{r} = \frac{r_2 + r_1}{2}$ dan $\Delta r = r_2 - r_1$

Misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu Y** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi dapat dicari sebagai berikut.



Dibuat partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$. Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dipilih satu titik $w_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \in [x_{i-1}, x_i]$, selanjutnya dibuat persegi panjang dengan panjang $f(w_i)$ dan

dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Jika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu Y , maka diperoleh tabung hampiran dengan volume

$$\Delta V_i = 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

Akibatnya diperoleh jumlahan Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi w_i f(w_i) \Delta x_i$$

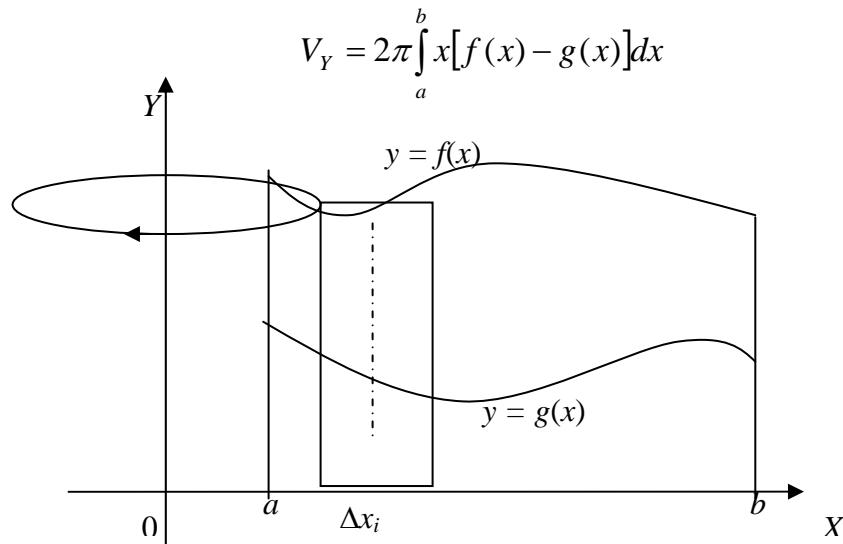
Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh volume benda putar yang dimaksud, yaitu

$$V_Y = 2\pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i f(w_i) \Delta x_i$$

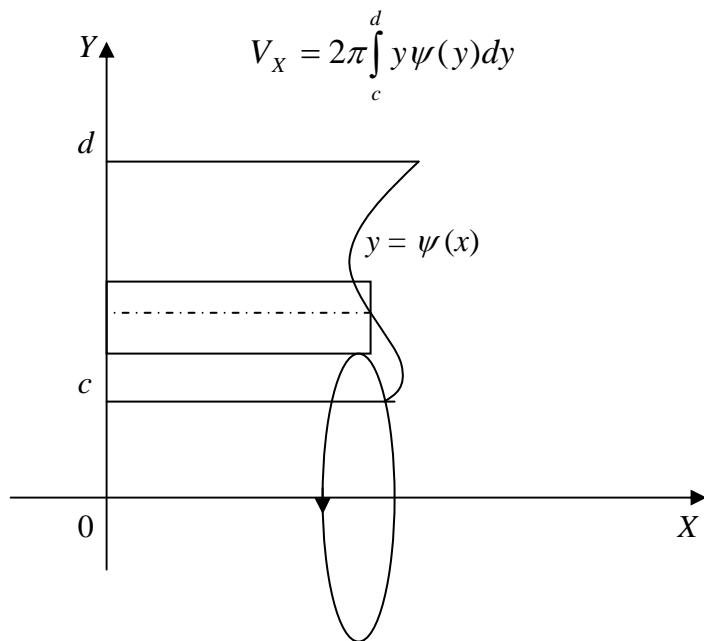
$$= 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Jadi $V_Y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

Selanjutnya apabila daerah yang dibatasi oleh dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ serta garis-garis $x = a$ dan $x = b$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu Y sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

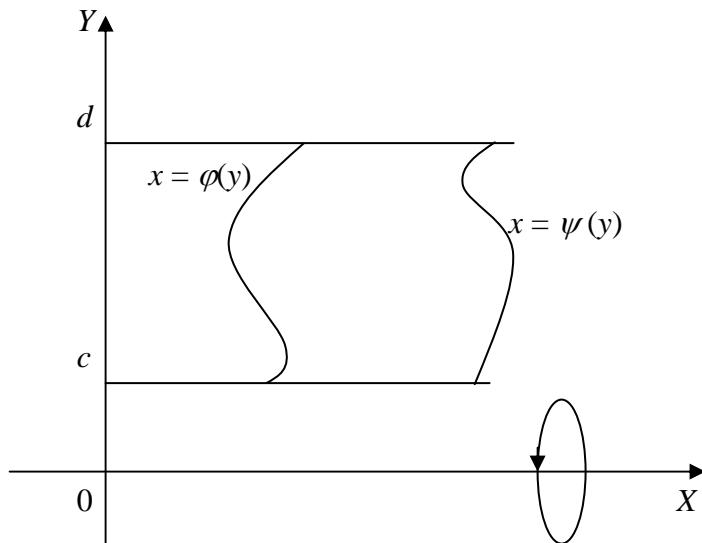


Dengan cara sama, misalkan diketahui daerah dibatasi oleh kurva $x = \psi(y)$, sumbu Y serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$. Apabila daerah tersebut diputar **mengelilingi sumbu X** sebagai sumbu putarnya, maka volume benda putar yang terjadi adalah



Demikian pula apabila daerah yang dibatasi oleh dua kurva $x = \psi(y)$ dan $x = \varphi(y)$ serta garis-garis $y = c$ dan $y = d$ seperti gambar di bawah ini diputar mengelilingi sumbu X sebagai sumbu putar, maka volume benda yang terjadi adalah

$$V_X = 2\pi \int_c^d y [\psi(y) - \varphi(y)] dy$$



Contoh 14

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu X , dan garis $x = 1$ diputar mengelilingi sumbu Y .

Penyelesaian:

$$V_Y = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \int_1^4 x^{1/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{28}{3}\pi$$

Contoh 15

Diketahui suatu daerah tertutup dibatasi oleh kurva garis $y = \frac{r}{t}x$, sumbu X , dan garis $x = t$.

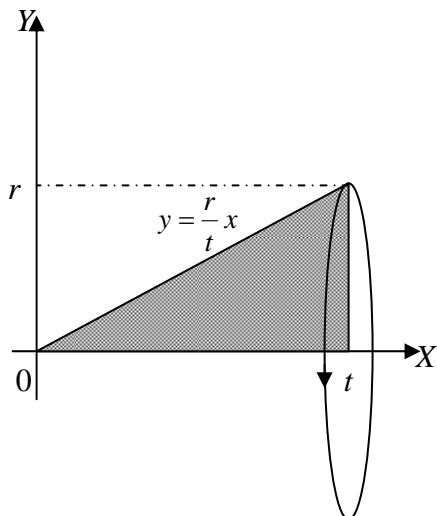
Dalam hal ini $r > 0$ dan $t > 0$. Jika daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu X , tentukan volume benda yang terjadi dengan dua cara.

Penyelesaian:

Cara I

Dengan metode cincin

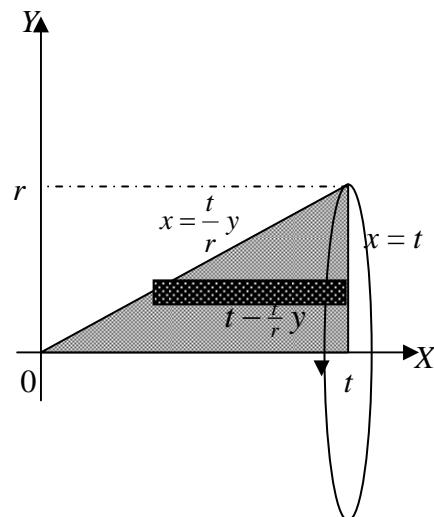
$$\begin{aligned}
 V_X &= \pi \int_0^t \left\{ \frac{r}{t} x \right\}^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \int_0^t x^2 dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{t^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 t
 \end{aligned}$$



Cara II

Dengan metode kulit tabung. Karena $y = \frac{r}{t} x$, maka $x = \frac{t}{r} y$

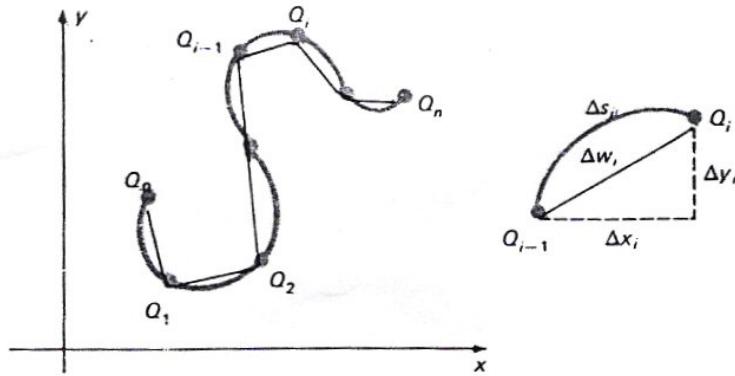
$$\begin{aligned}
 V_X &= 2\pi \int_0^r y(t - \frac{t}{r}y) dy \\
 &= 2\pi t \int_0^r (y - \frac{1}{r}y^2) dy \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3r} y^3 \right]_0^r \\
 &= 2\pi t \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^2 \right] \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 t
 \end{aligned}$$



5.2.3 Panjang Kurva

Misalkan suatu kurva mulus diberikan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Panjang kurva tersebut dapat dicari sebagai berikut.

Dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a,b]$ dengan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, maka kurva akan terbagi menjadi n bagian oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$. Perhatikan gambar berikut.



Pada bagian ke i , panjang busur $Q_{i-1}Q_i$, yaitu Δs_i dapat didekati oleh Δw_i . Dengan Pythagoras kita peroleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata pada Derivatif tentu terdapat $\bar{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ dan $\hat{t} \in (t_{i-1}, t_i)$ demikian sehingga

$$\begin{aligned}f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(\hat{t}_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

atau

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i\end{aligned}$$

dan panjang polygon dari segmen garis

$$\sum_{i=1}^n \Delta w_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Apabila $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh panjang kurva seluruhnya adalah

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Jadi

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

atau

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Jika persamaan kurvanya adalah $y = f(x)$ dengan $a \leq x \leq b$, maka

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

dan jika persamaan kurvanya adalah $x = \psi(y)$ dengan $c \leq y \leq d$, maka

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Contoh 16

Hitunglah keliling lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Penyelesaian:

Lingkaran tersebut dapat ditulis dalam persamaan parameter sebagai

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad \text{dengan } 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ sehingga } \frac{dx}{dt} = -r \sin t \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

$$\text{Akibatnya } L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = [r t]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Contoh 17

Menggunakan integral hitunglah panjang ruas garis yang menghubungkan titik $P(0, 1)$ dan $Q(5, 13)$.

Penyelesaian:

Persamaan ruas garis PQ adalah $y = \frac{12}{5}x + 1$, sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$. Oleh karena itu

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} dx = \int_0^5 \frac{\sqrt{13}}{5} dx = \left[\frac{\sqrt{13}}{5} x \right]_0^5 = 13$$

Contoh 18

Menggunakan integral hitunglah panjang kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari $(1, 1)$ dan $(4, 8)$.

Penyelesaian:

$y = x^{\frac{3}{2}}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Oleh karenanya

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}\right) \approx 7,63$$

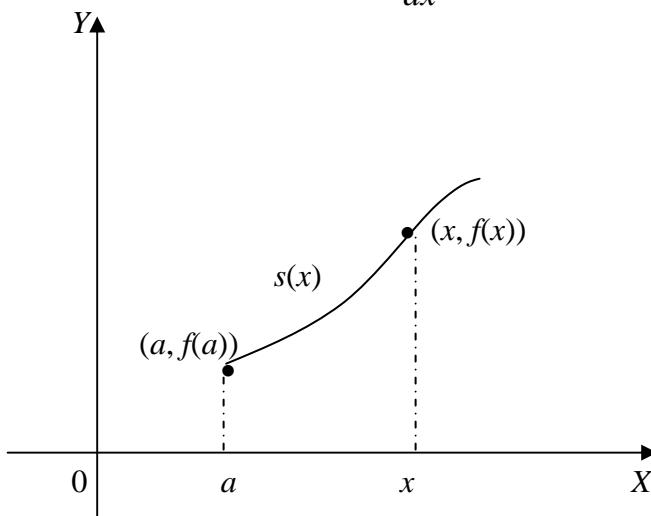
Diferensial Panjang Busur

Misalkan f suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada $[a, b]$. Untuk setiap $x \in (a, b)$ didefinisikan $s(x)$ sebagai

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du$$

maka $s(x)$ adalah panjang kurva $y = f(u)$ dari titik $(a, f(a))$ ke titik $(x, f(x))$, sehingga

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



Oleh karenanya diferensial panjang kurva ds dapat ditulis sebagai

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Selanjutnya hal ini dapat ditulis dalam bentuk-bentuk

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad \text{atau} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

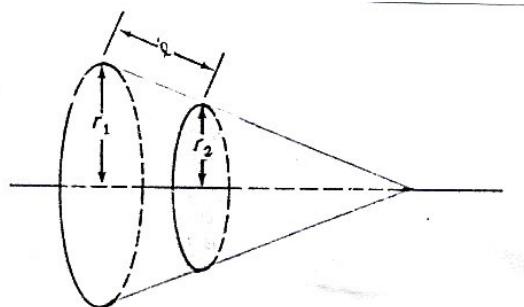
Untuk keperluan mengingat, dapat pula ditulis dalam bentuk:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

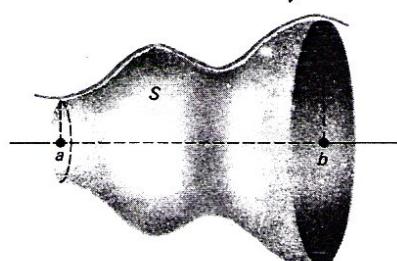
5.2.4 Luas Permukaan Benda Putar

Kita mulai dengan mencari rumus untuk luas permukaan (selimut) kerucut terpancung. Misalkan jari-jari lingkaran alas kerucut terpancung adalah r_1 dan jari-jari lingkaran atasnya r_2 sedangkan panjang ruas garis pada pembangun kerucut antara dua lingkaran itu (rusuk kerucut terpancung) l , maka luas selimut kerucut terpancung itu adalah

$$A = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) l$$

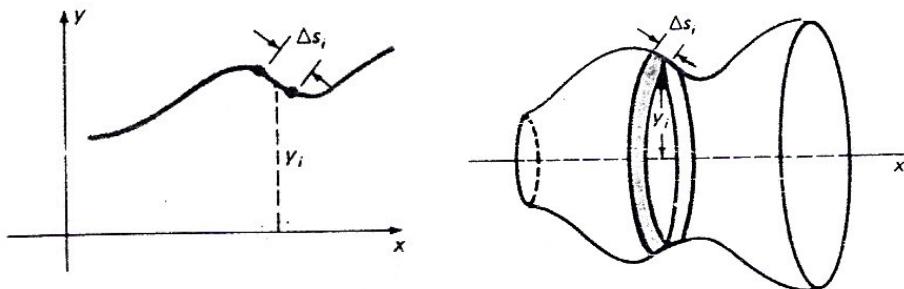


Apabila sebuah kurva pada suatu bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang itu, maka hasilnya berupa permukaan benda putar dengan luas permukaan dapat dicari sebagai berikut.



Pemutaran terhadap sumbu X

Misalkan suatu kurva mulus pada kuadran pertama diberikan oleh persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a, b]$ dengan $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, maka kurva terbagi menjadi n bagian. Misalkan Δs_i panjang kurva bagian ke i dan y_i ordinat sebuah titik pada bagian ini. Apabila kurva itu diputar mengelilingi sumbu X , maka ia akan membentuk suatu permukaan dan bagian Δs_i ini akan membentuk permukaan bagian. Luas permukaan bagian ini dapat dihampiri oleh luas kerucut terpancung, yaitu $2\pi y_i \Delta s_i$.



Apabila kita jumlahkan luas-luas ini dan kemudian mengambil limitnya dengan membuat $\|P\| \rightarrow 0$, kita akan memperoleh hasil yang kita definisikan sebagai luas permukaan benda putar tersebut. Jadi luasnya adalah

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y_i \Delta s_i = \int_{*}^{**} 2\pi y ds$$

Dengan menggunakan rumus A tersebut di atas, kita harus memberi arti yang tepat pada y , ds , dan batas-batas pengintegralan * dan **.

Misalkan apabila permukaan itu terbentuk oleh kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, yang diputar mengelilingi sumbu X , maka kita peroleh untuk luasnya:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Contoh 19

Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:

Misalkan $f(x) = \sqrt{x}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sehingga

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1} dx = \left[\pi \frac{1}{4} \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{\pi}{6} (17^{\frac{3}{2}} - 1) \approx 36,18$$

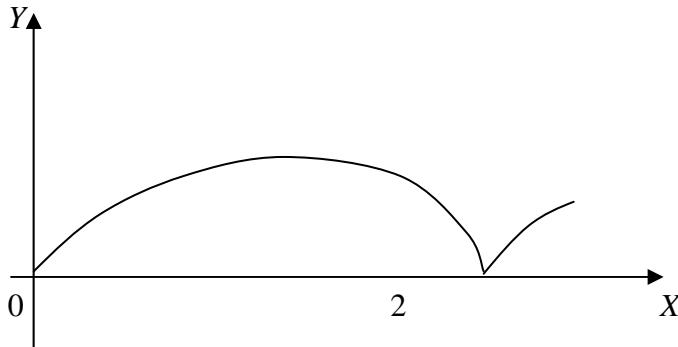
Apabila persamaan kurva yang bersangkutan diketahui dalam bentuk persamaan parameter $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, maka rumus untuk luas permukaan menjadi:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Contoh 20

Tentukan luas permukaan benda yang terbentuk apabila suatu busur dari sikloid $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ diputar mengelilingi sumbu X .

Penyelesaian:



Misalkan $f(t) = a(t - \sin t)$ dan $g(t) = a(1 - \cos t)$, maka $f'(t) = a(1 - \cos t)$ dan $g'(t) = a \sin t$, sehingga:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned}$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Dengan substitusi $u = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ maka $du = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$

Untuk $t = 0 \rightarrow u = 1$

Untuk $t = 2\pi \rightarrow u = -1$

$$\text{Jadi } A = -16\pi a^2 \int_1^{-1} (1-u^2) du = -16\pi a^2 \left[u - \frac{1}{3}u^3 \right]_1^{-1} = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Pemutaran terhadap sumbu Y

Analog:

Apabila sebuah kurva pada suatu bidang diputar mengelilingi sumbu Y, maka hasilnya berupa permukaan benda putar dengan luas permukaannya adalah:

$$A = \int_{*}^{**} 2\pi x ds$$

Contoh 21

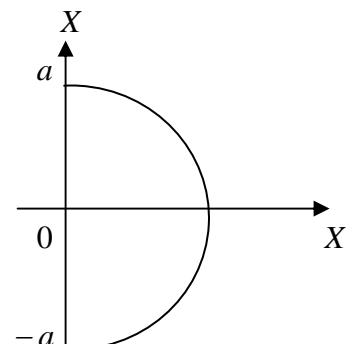
Tentukan luas permukaan benda yang terbentuk apabila kurva $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $-a \leq y \leq a$ diputar mengelilingi sumbu Y.

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \text{ maka } g'(y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\text{sehingga } A = \int_{*}^{**} 2\pi x ds = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}} dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^a a dy = 2\pi [ay]_{-a}^a = 4\pi a^2$$



Dengan demikian luas permukaan bola dengan jari-jari a adalah $4\pi a^2$.

5.2.5 Usaha atau Kerja

Dalam fisika kita tahu bahwa apabila ada gaya F yang konstan menggerakkan suatu benda sehingga bergerak sejauh d sepanjang suatu garis dengan arah gaya dan gerakan benda sama, maka kerja W yang dilakukan oleh gaya tersebut adalah

$$W = F \cdot d$$

Apabila satuan untuk F adalah pond an satuan jarak adalah kaki maka satuan kerja adalah **kaki pond**. Apabila gaya diukur dengan satuan dyne dan jarak dengan satuan sentimeter maka satuan kerja adalah **dyne cm** atau **erg**. Apabila gaya diukur dengan satuan Newton dan jarak dengan satuan meter maka satuan kerja adalah **Newton meter** atau **joule**.

Pada kenyataannya biasanya gaya itu tidak konstan. Misalkan sebuah benda digerakkan sepanjang sumbu X dari titik $x = a$ ke titik $x = b$. Misalkan gaya yang menggerakkan benda tersebut pada jarak x adalah $F(x)$ dengan F suatu fungsi kontinu. Untuk menentukan kerja yang dilakukan gaya tersebut dapat dicari sebagai berikut.

Interval $[a,b]$ dibagi dengan menggunakan partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Pada setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ gaya F dapat dihampiri oleh gaya konstan $F(w_i)$, dengan $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Jika $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, maka kerja yang dilakukan gaya F pada interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ adalah

$$\Delta W_i = F(w_i) \Delta x_i.$$

Jika dijumlahkan kemudian dicari limitnya untuk $\|P\| \rightarrow 0$ maka diperoleh kerja yang dilakukan gaya F pada interval $[a, b]$, yaitu

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(w_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx$$

Jadi

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

a. Aplikasi pada Pegas

Dengan menggunakan hukum Hooke yang berlaku dalam fisika, gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menarik (atau menekan) pegas sejauh x satuan dari keadaan alami adalah

$$F(x) = k \cdot x$$

Di sini, k adalah konstanta dan disebut konstanta pegas yang nilainya positif dan tergantung pada sifat fisis pegas. Semakin keras pegas, maka semakin besar nilai k .

Contoh 22

Apabila panjang alami sebuah pegas adalah 10 inci. Untuk menarik dan menahan pegas sejauh 2 inci diperlukan gaya 3 pon. Tentukan kerja yang dilakukan gaya untuk menarik pegas itu sehingga panjang pegas 15 inci.

Penyelesaian:

Menurut hukum Hooke gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menarik pegas sejauh x inci adalah $F(x) = k \cdot x$. Dari sini dapat dicari nilai konstanta k . Diketahui bahwa $F(2) = 3$, sehingga

$$3 = k \cdot 2 \text{ atau } k = \frac{3}{2}. \text{ Oleh karena itu } F(x) = \frac{3}{2}x.$$

Apabila pegas dalam keadaan alami sepanjang 10 inci menyatakan $x = 0$, maka pegas dengan panjang 15 inci menyatakan bahwa $x = 5$, sehingga

$$W = \int_0^5 \frac{3}{2}x \, dx = \frac{75}{4} = 18,75$$

Jadi, kerja untuk menarik pegas itu adalah 18,75 inci pond.

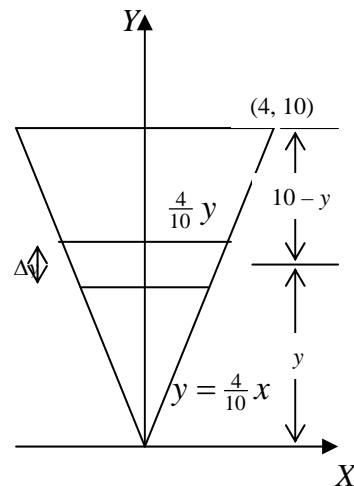
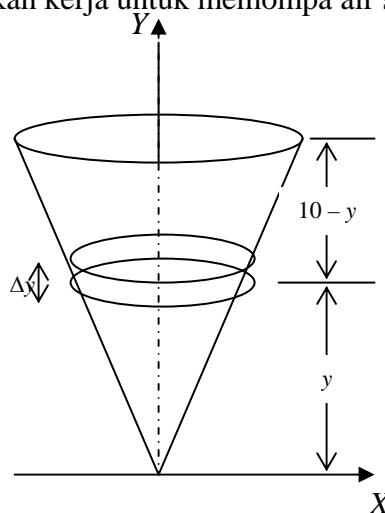
b. Aplikasi pada Pemompaan Cairan

Dengan menggunakan prinsip-prinsip yang sama dapat dihitung kerja yang dilakukan pada pemompaan cairan.

Contoh 23

Sebuah tangki berbentuk kerucut lingkaran tegak penuh dengan air. Apabila tinggi tangki 10 kaki dan jari-jari lingkaran atasnya 4 kaki,

- tentukan kerja untuk memompa air sehingga sampai tepi tangki
- tentukan kerja untuk memompa air sehingga mencapai 10 kaki di atas tepi tangki.



Penyelesaian:

a. Letakkan tangki dalam sistem koordinat seperti tampak dalam gambar. Buatlah sketsa yang berdimensi tiga dan juga sketsa penampang dimensi dua. Misalkan air dimasukkan ke dalam kerucut-kerucut terpanjang (horizontal),

Air ini harus diangkat sehingga mencapai tepi tangki. Perhatikan sebuah kerucut terpanjang ke i dengan tinggi Δy yang berjarak y dari puncak kerucut (puncak kerucut berada di bawah),

memiliki jari-jari $\frac{4}{10}y$, maka ia mempunyai volume hampiran $\Delta V = \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y$ dan

beratnya (gaya berat) $F = \delta \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y$, dengan $\delta = 62,4$ adalah kepadatan air dalam satuan pon/kaki kubik. Gaya yang diperlukan untuk mengangkat air tersebut adalah sama dengan beratnya dan harus diangkat sejauh $10 - y$. Jadi kerja ΔW adalah

$$\Delta W = \delta \pi\left(\frac{4}{10}y\right)^2 \Delta y (10 - y)$$

Karenanya, apabila dijumlahkan kemudian dicari limitnya diperoleh

$$W = \delta \pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (10y^2 - y^3) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \left[\frac{10}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^{10} \approx 26,138$$

Jadi kerja untuk memompa air sehingga sampai ke tepi tangki adalah 26,138 kaki pond.

b. Seperti dalam a, sekarang air dalam kerucut terpanjang harus diangkat $20 - y$, sehingga

$$W = \delta \pi \int_0^{10} \left(\frac{4}{10}y\right)^2 (20 - y) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \int_0^{10} (20y^2 - y^3) dy = \delta \pi \frac{4}{25} \left[\frac{20}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^{10} \approx 130,69$$

Jadi kerja untuk memompa air sehingga sampai ke tepi tangki adalah 130,690 kaki pond.