# 4 INTEGRAL

**Definisi 4.0.1**

Fungsi $F$ disebut anti turunan (integral tak tentu) dari fungsi $f$ pada himpunan $D$ jika

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in D$.

Fungsi integral tak tentu $f$ dinotasikan dengan $\int f(x)\, dx$ dan $f(x)$ dinamakan integran.

Jadi $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x)$.

**Contoh 1**

sin $x$, sin $x$ + 5, sin $x - \sqrt{7}$ adalah fungsi-fungsi integral tak tentu dari cos $x$ pada seluruh garis real, sebab derivatif mereka sama dengan cos $x$ untuk semua $x$.

**Sifat 4.0.2:**

Misalkan $f$ dan $g$ mempunyai anti turunan dan $k$ suatu konstanta, maka

1. $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

**Teorema 4.0.3**

Jika $F$ dan $G$ keduanya integral tak tentu dari $f$ pada interval I, maka $F(x)$ dan $G(x)$ berselisih suatu konstanta pada I

Jadi $F(x) - G(x) = C$ dengan $C$ sembarang konstanta.

**Akibat 4.0.4**

Jika $F$ suatu fungsi integral tak tentu dari $f$, maka

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

dengan $C$ konstanta sembarang.

## 4.1 Rumus Dasar

1. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$, $x \neq 0$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C$
4. $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a \neq 1$, $a > 0$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
8. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
10. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc} \tan x + C$
    $= -\text{arc} \cot x + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{arc} \sin x + C$
    $= -\text{arc} \cos x + C$
13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{arc} \sec x + C$
    $= -\text{arc} \csc x + C$
14. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
15. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

**SOAL**

Tentukan:

1. $\int (x-2)^2 \, dx$
2. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3} \, dx$
3. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x} \, dx$
4. $\int (\sin x - \sqrt{x}) \, dx$
5. $\int 2^x \, dx$

## 4.2 Integral dengan Substitusi

Masalah: Tentukan $\int (2x+5)^{2006}\ dx$

Untuk menyelesaikan permasalahan seperti ini dapat digunakan aturan seperti pada teorema berikut.

**Teorema 4.2.1**

Jika $u = g(x)$ yang didefinisikan pada interval $I$ mempunyai invers $x = g^{-1}(u)$ dan fungsi-fungsi $g$ dan $g^{-1}$ keduanya mempunyai derivatif yang kontinu pada intervalnya masing-masing, dan $f$ kontinu pada interval di mana $g^{-1}$ didefinisikan, maka

$$\int f\{g(x)\}\, g'(x)\ dx = \int f(u)\ du$$

**Contoh 2**

Tentukan $\int (2x+5)^{2006}\ dx$

*Penyelesaian*:

Substitusikan $u = 2x + 5$ $\quad\rightarrow\quad$ $\dfrac{du}{dx} = 2$

$du = 2\ dx$

$$\begin{aligned}
\text{maka}\quad \int (2x+5)^{2006}\ dx &= \int \frac{1}{2}\ (2x+5)^{2006}\ 2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^{2006}\ du \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2007}\,u^{2007} + C \\
&= \frac{1}{4014}\,(2x+5)^{2007} + C
\end{aligned}$$

**Contoh 3**

Tentukan $\int x(3x^2+5)^{2006}\ dx$

*Penyelesaian*:

Substitusikan $u = 3x^2 + 5$ $\quad\rightarrow\quad$ $\dfrac{du}{dx} = 6x$

$du = 6x\ dx$

maka $\int x(3x^2+5)^{2006}\ dx \ = \int \frac{1}{6}\ (3x^2+5)^{2006}\ 6x\,dx$

$= \frac{1}{6}\int u^{2006}\ du$

$= \frac{1}{6}\ \frac{1}{2007}\ u^{2007}\ + C$

$= \frac{1}{12042}\ (3x^2+5)^{2007}\ + C$

**Contoh 4**

Tentukan $\int \cos \frac{1}{2} x\ dx$

*Penyelesaian*:

Substitusikan $u = \frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad du = \frac{1}{2}\ dx$

maka $\int 2 \cos \frac{1}{2}x\ \frac{1}{2}dx \ = 2\int \cos u\ \ du$

$= 2 \sin u\ + C$

$= 2 \sin \frac{1}{2}x\ + C$

**SOAL**

Tentukan:

1. $\int 3(x-2)^9\ dx$
2. $\int x(5x^2+2)^9\ dx$
3. $\int \frac{8}{(x+3)^4}\ dx$
4. $\int \frac{1}{x \ln x}\ dx$
5. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\ dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$
7. $\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}$
8. $\int x\sqrt{2x^2-1}\ dx$
9. $\int e^{\sin x} \cos x\ dx$
10. $\int e^{4x}\ dx$

## 4.3 Integral Parsial

Masalah: Tentukan $\int x\, e^x \; dx$

Misalkan: $u = f(x) \quad \rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = f\,'(x) \quad \rightarrow \quad du = f\,'(x)\, dx \rightarrow du = u'\, dx$

$v = g(x) \quad \rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx} = g\,'(x) \quad \rightarrow \quad dv = g\,'(x)\, dx \rightarrow dv = v'\, dx$

$uv = f(x)\, g(x) \quad \rightarrow \quad \dfrac{d(uv)}{dx} = f\,'(x)g(x) + f(x)g\,'(x)$

$$d(uv) = f\,'(x)g(x)dx + f(x)g\,'(x)dx$$

$$d(uv) = u'v\; dx + uv'dx$$

$$d(uv) = v\; du + u\; dv$$

Jika kedua ruas diintegralkan, diperoleh

$$uv = \int v\; du + \int u\; dv$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int u\; dv = uv - \int v\; du}$$

**Contoh 5**

Tentukan $\int x\, e^x \; dx$

*Penyelesaian*:

Misalkan $u = x \quad \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \quad \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

sehingga $\int x\, e^x \; dx = x e^x - \int e^x dx$

$= x e^x - \int e^x dx$

$= x\, e^x - e^x + C$

**Contoh 6**

*Tentukan* $\int x^2 \; e^x \; dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 \quad \rightarrow du = 2x\; dx$

$dv = e^x dx \quad \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

sehingga $\int x^2\ e^x\ dx = x^2\ e^x - \int e^x\, 2x dx$

$= x^2\ e^x - 2\int xe^x dx$

$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$

$= x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C$

**Contoh 7**

*Tentukan* $\int x \cos x\ dx$ 5.

*Penyelesaian*:

Misalkan $u = x \quad \rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\, dx \quad \rightarrow v = \int \cos x\, dx = \sin x$

sehingga $\int x \cos x\ dx = x \sin x - \int \sin x\ dx$

$= x \sin x + \cos x + C$

**Contoh 8**

*Tentukan* $\int e^x\ \cos x\ dx$

*Penyelesaian*:

Misalkan $u = e^x \quad \rightarrow du = e^x dx$

$dv = \cos x\, dx \quad \rightarrow v = \int \cos x\, dx = \sin x$

sehingga $\int e^x\ \cos x\ dx = e^x \sin x - \int \sin x\ e^x dx$

$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\ dx$

misal $u = e^x \quad \rightarrow du = e^x dx$

$dv = \sin x\, dx \quad \rightarrow v = \int \sin x\, dx$

$= -\cos x$

$= e^x \sin x - \left\{ e^x(-\cos x) - \int -\cos x\ e^x\ dx \right\}$

$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x\ e^x\ dx$

Diperoleh $\int e^x\ \cos x\ dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x\ e^x\ dx$

$2\int e^x\ \cos x\ dx = e^x \sin x + e^x \cos x$

$\int e^x\ \cos x\ dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C$

**SOAL**

Tentukan:

1. $\int x \sin x \, dx$
2. $\int x \sin 2x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$
4. $\int x \, e^{-x} \, dx$
5. $\int x^2 \, e^{-x} \, dx$
6. $\int e^x \sin x \, dx$
7. $\int \arcsin x \, dx$
8. $\int \arctan \, dx$
9. $\int x \ln x^2 \, dx$
10. $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$

### 4.4 Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma

Ingat: $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc tan } x + C$

Berdasarkan rumus di atas dapat dibuktikan bahwa untuk konstanta $a \neq 0$, maka berlaku:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \text{ arc tan } \frac{x}{a} + C \qquad (4.4.1)$$

Perhatikan penyebut dalam integran.

Selanjutnya akan dicari $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx$

Jika $f(x) = x^2 + 2bx + c$ dengan $D = 4b^2 - 4c < 0$, maka $f(x)$ **definit positif** dan selalu dapat dibawa ke bentuk

$$f(x) = (x + b)^2 + p^2$$

dengan $p^2 = c - b^2 > 0$

sehingga $\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx = \int \frac{1}{(x+b)^2 + p^2} \, dx$ dan dengan menggunakan (4.4.1) dapat diperoleh

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} \, dx = \frac{1}{p} \arctan \frac{x+b}{p} + C} \qquad (4.4.2)$$

dengan $p = \sqrt{c - b^2}$

**Contoh 9**

Tentukan $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx$

*Penyelesaian*:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}$ arc tan $\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

**Contoh 10**

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

*Penyelesaian*:

Dengan menggunakan rumus (4.4.1) diperoleh $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx == \frac{1}{3}$ arc tan $\frac{x}{3} + C$

**Contoh 11**

Tentukan $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

*Penyelesaian*:

$b = 1$

$c = 5$

$p = \sqrt{5-1^2} = \sqrt{4} = 2$

Dengan rumus (4.4.2) diperoleh $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}$ arc tan $\frac{x+1}{2} + C$

Atau secara langsung dengan cara berikut:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{2} \text{ arc tan } \frac{x+1}{2} + C$$

Selanjutnya ingat: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Dengan rumus ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C} \qquad (4.4.3)$$

**Contoh 11**

Tentukan $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx$

*Penyelesaian*:

Dengan rumus (4.4.3) diperoleh $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx = \ln\left|x^2+2x+4\right| + C$

**Contoh 12**

Tentukan $\int \frac{x+5}{x^2+6x+13}\,dx$

*Penyelesaian*:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+6x+13}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)+2}{x^2+6x+13}\,dx\\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)}{x^2+6x+13}\,dx + \int \frac{2}{x^2+6x+13}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right| + 2\int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right| + 2\,.\frac{1}{2}\,\text{arc tan}\,\frac{x+3}{2} + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right| + \text{arc tan}\,\frac{x+3}{2} + C\end{aligned}$$

## SOAL

Tentukan:

1. $\int \frac{x+5}{x^2+10x+13}\,dx$
2. $\int \frac{x^2+5}{x^3+15x-1}\,dx$
3. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$
4. $\int \frac{5}{x^2+4x+7}\,dx$
5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}\,dx$
6. $\int \frac{5x+1}{x^2+6x+13}\,dx$
7. $\int \frac{4x+1}{x^2-6x+13}\,dx$
8. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+7}\,dx$

## 4.5 Integral Fungsi Pecah Rasional

$P_n(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...+ a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dinamakan polinomial (fungsí suku banyak) berderajat $n$.

Fungsi konstan $P_o(x) = a_o$ dapat dipandang sebagai polinomial berderajat nol.

Fungsi pecah rasional adalah fungsi berbentuk $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ dengan $N(x)$ dan $D(x)$ polinomial-polinomial.

Uraian mengenai integral fungsi pecah rasional dapat diperinci untuk beberapa kasus sebagai berikut.

### 4.5.1 Keadaan $N(x) = D^l(x)$

Jika $N(x) = D^l(x)$ maka berdasarkan rumus (4.4.3) diperoleh:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \ln \left| D(x) \right| + C$$

dan ini sudah dibahas pada bagian 4.4 sehingga tidak perlu diulang.

### 4.5.2 Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$

Lakukan pembagian $N(x)$ oleh $D(x)$ sehingga diperoleh bentuk

$\dfrac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$ dengan derajat $R(x) <$ derajat $D(x)$

$Q(x)$ adalah polinom, sehingga integralnya sangat mudah.

**Contoh 13**

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx = \int \left\{ x - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx = ...$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 19x^2 - 48x + 60}{x^2 + 6x + 13}\, dx = \int \left\{ x^2 - 6x + 4 + \frac{6x+8}{x^2+6x+13} \right\} dx = ...$

Kepada pembaca dipersilakan untuk melanjutkan penyelesaian kedua contoh dalam contoh 13 di atas.

Dengan demikian yang perlu dipelajari lebih lanjut adalah keadaan dimana derajat $N(x) <$ derajat $D(x)$ dan $N(x) \neq D^l(x)$

### 4.5.3 Keadaan Derajat $N(x)$ < Derajat $D(x)$

Pada pembahasan ini $N(x) \neq D^{l}(x)$. Tanpa mengurangi umumnya pembicaraan, diambil koefisien suku pangkat tertinggi dari $x$ dalam $D(x)$ adalah satu. Untuk menghitung $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$, terlebih dahulu integran dipisah menjadi pecahan-pecahan parsialnya.

**Contoh 14**

$\frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6}$ dapat dipecah menjadi pecahan-pecahan parsial berikut

$$\frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

Jadi

$$\int \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{10}{x+2}\,dx + \int \frac{15}{x+3}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx - 10\int \frac{1}{x+2}\,dx + 15\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - 10\ln|x+2| + 15\ln|x+3| + C$$

Karena sebelum melakukan pengintegralan terlebih dahulu diadakan pemisahan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya, maka sebelumnya perlu dipelajari cara memisah $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya tersebut.

**Memisah Pecahan Menjadi Pecahan Parsial**

Dalam pembicaraan ini tetap diasumsikan:

1) derajat $N(x)$ < derajat $D(x)$
2) koefisien suku pangkat tertinggi dari $x$ dalam $D(x)$ adalah satu
3) $N(x)$ dan $D(x)$ tidak lagi mempunyai faktor persekutuan

Menurut keadaan faktor-faktor $D(x)$, dalam memisahkan $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya dapat dibedakan menjadi 4 keadaan, yaitu:

a. Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan
b. Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)
c. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan
d. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama.

**a. Semua faktor *D*(*x*) linear dan berlainan**

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, dan $x - d$, maka $D(x) = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,(x - d)$.

Dibentuk $$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} \qquad (1)$$

sebagai suatu identitas dalam $x$, sehingga untuk setiap nilai $x$ yang diberikan maka nilai ruas kiri dan nilai ruas kanan dalam (1) sama. Konstanta $A$, $B$, $C$, dan $D$ adalah konstanta-konstanta yang masih akan dicari nilainya.

**Contoh 15**

Pisahkan $\dfrac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

*Penyelesaian*:

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\,(x+2)\,(x+3) = 0$

Dibentuk

$$\frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

untuk $x = 1$ $\rightarrow$ $12 = A(3)(4)$ $\Leftrightarrow$ $A = 1$

untuk $x = -2$ $\rightarrow$ $30 = B(-3)(1)$ $\Leftrightarrow$ $B = -10$

untuk $x = -3$ $\rightarrow$ $60 = C(-4)(-1)$ $\Leftrightarrow$ $C = 15$

Jika nilai $A$, $B$, dan $C$ ini disubstitusikan ke dalam (2) maka diperoleh

$$\frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1}{x-1} - \frac{10}{x+2} + \frac{15}{x+3}$$

sehingga

$$\int \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{10}{x+2}\,dx + \int \frac{15}{x+3}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - 10\ln|x+2| + 15\ln|x+3| + C$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a}\,dx$

**b. Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang)**

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - c$, $x - d$, $x - d$, dan $x - d$, maka $D(x) = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)^2\,(x - d)^3$.

Selanjutnya dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \frac{E}{x-d} + \frac{F}{(x-d)^2} + \frac{G}{(x-d)^3} \qquad (3)$$

Perhatikan suku-suku pecahan di ruas kanan terutama yang sesuai dengan akar sama $c$ dan $d$.

**Contoh 16**

Pisahkan $\frac{x}{(x-2)(x+1)^3}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

*Penyelesaian*:

Dibentuk

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \qquad (4)$$

$$x = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$$

untuk $x = -1$ $\longrightarrow$ $-1 = -3D$

untuk $x = 2$ $\longrightarrow$ $2 = 27A$

untuk $x = 0$ $\longrightarrow$ $0 = A - 2B - 2C - 2D$

untuk $x = 1$ $\longrightarrow$ $1 = 8A - 4B - 2C - D$

Dari keempat persamaan tersebut diperoleh:

$A = \frac{2}{27}$, $B = -\frac{2}{27}$, $C = -\frac{6}{27}$, $D = \frac{1}{3}$

Jadi $$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{\frac{2}{27}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} + \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3}$$

Selanjutnya dapat dicari integral $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}\, dx$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}\, dx = \int \frac{\frac{2}{27}}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{2}{27}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} dx$$

$$= \ldots$$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\int \frac{1}{x-a}\, dx$ dan $\int \frac{1}{(x-a)^n}\, dx$ $n = 2, 3, \ldots$

**c. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan**

Ingat teorema dalam aljabar berikut.

Teorema: Akar-akar tidak real persamaan derajat tinggi dengan koefisien real sepasang-sepasang bersekawan, artinya jika $a + bi$ suatu akar maka $a - bi$ juga akar persamaan itu

Berdasarkan teorema tersebut maka apabila $a + bi$ akar persamaan $D(x) = 0$ maka demikian juga $a - bi$, sehingga salah satu faktor $D(x)$ adalah

$\{x - (a + bi)\}\{x - (a - bi)\} = (x - a)^2 + b^2$ yang definit positif.

Misal $D(x) = (x - p)(x - q)^2\{(x - a)^2 + b^2\}\{(x - c)^2 + d^2\}$ maka perlu dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} \qquad (5)$$

**Contoh 17**

Pisahkan $\frac{3x}{x^3-1}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

*Penyelesaian*:

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Dibentuk $\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$

untuk $x = 1$ $\longrightarrow$ $3 = 3A$

untuk $x = 0$ $\longrightarrow$ $0 = A - C$

untuk $x = -1$ $\longrightarrow$ $-3 = A + 2B - 2C$

Setelah dicari nilai-nilai $A$, $B$, dan $C$ diperoleh $A = 1$, $B = -1$, dan $C = 1$, sehingga

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

Jadi $\displaystyle\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx$

$= \ldots$

$= \ldots$

Pada bagian ini dijumpai bentuk $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx$ , $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ $n = 2, 3, \ldots$ , dan

$$\int \frac{AX+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx$$

**d. $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama**

Berdasarkan teorema dalam bagian c di atas maka apabila $a + bi$ merupakan akar berlipat $k$ dari persamaan $D(x) = 0$ maka demikian juga $a - bi$, dan faktor-faktor dari $D(x)$ yang sesuai dengan akar-akar ini adalah $\{(x-a)^2 + b^2\}^k$.

Misal $D(x) = (x-p)\,(x-q)^2\,\{(x-a)^2+b^2\}\{(x-c)^2+d^2\}^3$ maka perlu dibentuk

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} + \frac{Hx+J}{\{(x-c)^2+d^2\}^2}$$

$$+ \frac{Kx+L}{\{(x-c)^2+d^2\}^3}$$

**Contoh 18**

Pisahkan $\dfrac{3x^3-2x^2+5x-1}{(x-2)(x^2+1)^2}$ atas pecahan-pecahan parsialnya.

*Penyelesaian*:

Dengan cara seperti yang telah diberikan sebelumnya didapatkan

$$\frac{3x^3-2x^2+5x-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Jadi $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x-1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$

Pada bagian ini dapat muncul bentuk $\int \frac{AX + B}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx$ , $n = 2, 3, \ldots$ , dan

Dalam mencari $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ kita dihadapkan kepada empat jenis integral yang berbentuk:

(1) $\int \frac{1}{x-a} dx$

(2) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \quad n = 2, 3, \ldots$

(3) $\int \frac{AX + B}{(x-a)^2 + b^2} dx$

(4) $\int \frac{AX + B}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx \quad , n = 2, 3, \ldots$

Tiga bentuk yang pertama telah dapat diselesaikan menggunakan teori-teori yang sudah diberikan. Adapun integral bentuk keempat dapat diselesaikan dengan substitusi $y = x - a$ sebagai berikut.

$$\int \frac{AX + B}{\{(x-a)^2 + b^2\}^n} dx = \int \frac{Ay + aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{d(y^2 + b^2)}{\{y^2 + b^2\}^n} + \int \frac{aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy$$

Integral untuk suku pertama pada ruas terakhir bukan masalah karena berbentuk $\int \frac{du}{u^n}$, $n = 2, 3, \ldots$ Sedangkan integral pada suku keduanya dapat diubah menjadi

$$\int \frac{aA + B}{\{y^2 + b^2\}^n} dy = \frac{aA + B}{b^{2n}} \int \frac{dy}{\left\{1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}^n}$$

$$= \frac{aA + B}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^n} \quad \text{dengan } t = \frac{y}{b}$$

Untuk menghitung integral $\int \frac{dt}{\{1 + t^2\}^n}$ dapat digunakan **rumus reduksi** berikut

$$\int \frac{dt}{\{1+t^2\}^n} = \frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{\{1+t^2\}^{n-1}}$$

Dalam tulisan ini tidak diberikan bukti rumus reduksi tersebut.

**Contoh 19**

Selesaikan $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$ .

*Penyelesaian*:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2}\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+13)}{(x^2+4x+13)^2} + \int \frac{1}{\{(x+2)^2+9\}^2}\,dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+13} + \int \frac{1}{\{9[(x+2)/3]^2+1\}^2}\,dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+13} + \tfrac{1}{81}\int \frac{1}{\{[(x+2)/3]^2+1\}^2}\,dx
\end{aligned}$$

Untuk $\frac{1}{81}\int \frac{1}{\{[(x+2)/3]^2+1\}^2}\,dx$ substitusikan $t = \frac{x+2}{3}$, $dt = \frac{1}{3}dx$ sehingga

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{81}\int \frac{1}{\{[(x+2)/3]^2+1\}^2}\,dx &= \tfrac{1}{27}\int \frac{1}{\{t^2+1\}^2}\,dt \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{t}{(2.2-2)(1+t)} + \frac{2.2-3}{2.2-2}\int \frac{1}{\{t^2+1\}}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\{t^2+1\}}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{t}{2(1+t)} + \frac{1}{2}\arctan t\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{x+2}{3.2(1+\frac{x+2}{3})} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{x+2}{6+2(x+2)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x+2}{3}$$

Jadi $\int \frac{x+3}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{81}\int \frac{1}{\{[(x+2)/3]^2+1\}^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+13} + \frac{1}{27}\frac{x+2}{2x+10} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x+2}{3} + C.$$

**LATIHAN**

1. $\int \frac{x}{x^2+3x-4}\,dx$
2. $\int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+4)}\,dx$
3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$
4. $\int \frac{x}{(x^2-1)^2(x^2+1)}\,dx$
5. $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x}\,dx$
6. $\int \frac{4x^3+x^2+1}{(x^2-2)^3}\,dx$

## 4.6 Integral Fungsi Trigonometri

### 4.6.1 Rumus-rumus Sederhana

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

### 4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ dan $\int R(\cos x)\sin x\,dx$

Jika $R$ fungsi rasional maka $\int R(\sin x)\cos x\,dx = \int R(\sin x)\,d(\sin x)$

$$= \int R(y)\,dy$$

$$\int R(\cos x)\ \sin x\ dx = -\int R(\cos x)\ d(\cos x)$$
$$= -\int R(t)\ dt$$

Dengan mengingat rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, maka:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\ \cos x\ dx = \int R(y, 1-y^2)\ dy$$
$$\int R(\cos x, \sin^2 x)\ \sin x\ dx = -\int R(t, 1-t^2)\ dt$$

**Contoh 20**

1. $\int (2\cos^2 x - \sin x + 7)\cos x\ dx$
2. $\int \sin^3 x\ dx$

### 4.6.3 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\{1 - \cos 2x\}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}\{1 + \cos 2x\}$

**Contoh 21**

Carilah

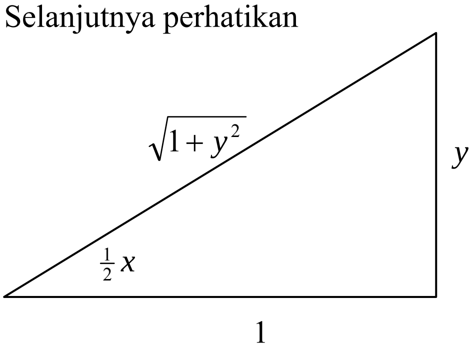
1. $\int \sin 3x\ \sin 2x\ dx$
2. $\int \sin 3x \cos 2x\ dx$
3. $\int \cos 3x \cos 2x\ dx$
4. $\int \sin^2 x\ dx$
5. $\int \sin^4 x\ dx$

### 4.6.4 Substitusi $y = \tan \frac{1}{2}x$

Jika $R(\sin x, \cos x)$ fungsi rasional dalam $\sin x$ dan $\cos x$, maka $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ dapat dibawa menjadi integral fungsi rasional dalam $y$ dengan menggunakan substitusi $y = \tan \frac{1}{2}x$.

$$y = \tan \tfrac{1}{2} x \quad \rightarrow \quad x = 2 \text{ arc } \tan y \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy$$

Selanjutnya perhatikan




Memperhatikan gambar di atas dapat dipahami bahwa

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \qquad \text{dan} \qquad \cos \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(2.\tfrac{1}{2} x) \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x = 2 \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2y}{1+y^2} \end{aligned}$$

Jadi $\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}$.

Dengan menggunakan rumus $\cos x = \cos(2.\tfrac{1}{2} x)$ diperoleh

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\tan x = \frac{2y}{1-y^2}$$

$$\cot x = \frac{1-y^2}{2y}$$

**Contoh 22**

Carilah: 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$     2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$     4. $\displaystyle\int \csc x \, dx$

### 4.6.5 Integral $R(\tan x)$

Jika integran fungsi rasional dalam $\tan x$ saja, maka dapat dijadikan integral fungsi rasional dalam $y$ dengan substitusi $y = \tan x$, sehingga $x = \text{arc} \tan y$ dan $dx = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

Jadi $\int R(\tan x)\, dx = \int \dfrac{R(y)}{1+y^2}\, dy$

**Contoh 23**

Carilah: 1. $\int \tan x\, dx$ 2. $\int \dfrac{dx}{1+\tan x}$

### 4.6.6 Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri

Jika $n$ bilangan bulat positif, maka:

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx = -\int (1-y^2)^n\, dy \qquad \text{dengan } y = \cos x$$

$$\int \cos^{2n+1} x\, dx = \int (1-t^2)^n\, dt \qquad \text{dengan } t = \sin x$$

Untuk $n$ bilangan genap positif dapat digunakan rumus:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

$$\int \sin^n x\, dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cot^n x\, dx = \frac{-\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx$$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\sin x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$\int \csc^n x\, dx = \frac{-\cos x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\, dx$$

Bukti rumus-rumus di atas tidak diberikan dalam tulisan ini.

**LATIHAN**

### 4.7 Integral Fungsi Irrasional

Dalam tulisan ini dibahas beberapa jenis integral fungsi irrasional. Pada dasarnya integral ini diselesaikan dengan mengubah integral irrasional menjadi integral rasional, baik rasional aljabar maupun trigonometri.

#### 4.7.1 Rumus yang perlu dihafal

1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \; = \; \arcsin \frac{x}{a} + C$

2) $\int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx \; = \; \text{arc sec} \frac{x}{a} + C$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx \; = \; \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx \; = \; \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

5) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \; = \; \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

6) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx \; = \; \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

7) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \; = \; \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

Dua rumus pertama mudah dibawa ke bentuk rumus integral dasar dengan substitusi $y = \frac{x}{a}$. Sedangkan rumus-rumus yang lain dapat dibuktikan dengan menggunakan metode yang akan diterangkan pada bagian 4.7.4.

### 4.7.2 Bentuk Irrasional Satu Suku

Jika integran hanya memuat bentuk irrasional dari satu macam suku, misalnya *x*, maka integral dapat dijadikan integral rasional dengan substitusi $y = \sqrt[n]{x}$ dimana *n* kelipatan persekutuan terkecil dari pangkat-pangkat akar.

**Contoh 24**

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ diambil substitusi $y = \sqrt[6]{x}$, sehingga $x = y^6$ dan $dx = 6y^5 dy$

### 4.7.3 Satu-satunya Bentuk Irrasional $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Dalam hal ini $\sqrt{ax^2+bx+c}$ sebagai satu-satunya bentuk irrasional di dalam integran, maka integran dapat dijadikan rasional dengan substitusi

$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + y$, jika $a > 0$

atau

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xy + \sqrt{c}$, jika $c \geq 0$

Dengan substitusi yang pertama diperoleh $x = \frac{-(y^2-c)}{2y\sqrt{a}-b}$ dan *dx* dapat dinyatakan ke dalam bentuk rasional dalam *y* kali *dy*.

**Contoh 25**

$\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx$ diambil substitusi $\sqrt{x^2-6x+2} = x + y$, sehingga $x = \frac{-(y^2-2)}{2(y+3)}$ dan $dx = -\frac{1}{2}\frac{y^2+6y+2}{(y+3)^2}dy$. Selanjutnya dapat diselesaikan seperti integral raasional

### 4.7.4 Substitusi Trigonometri

Dengan memperhatikan rumus trigonometri

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{dan} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

bentuk-bentuk irrasional berikut dapat dijadikan bentuk rasional fungsi trigonometri.

| Bentuk | Substitusi | Diferensial |
|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a \sin \theta$ | $dx = a \cos\theta \; d\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a \sec \theta$ | $dx = a \sec\theta \; \tan\theta \; d\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a \tan \theta$ | $dx = a \sec^2\theta \; d\theta$ |

**Contoh 26**

1. Buktikan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
2. Gunakan substitusi $x = a \sin \theta$ untuk menentukan $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$
3. Carilah $\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 2}}\, dx$

**LATIHAN 4.7**

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$
3. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 1}}\, dx$
4. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 8}}\, dx$