

3.1 Pengertian Turunan Fungsi

Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya di c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Contoh 1

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di $x = 2$ adalah

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) + 4 - (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h + 4 - (12 + 4 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 3h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3h + 2) \\ &= 14 \end{aligned}$$

Jika f mempunyai turunan di setiap x anggota domain maka

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika $y = f(x)$ turunan y atau turunan f dinotasikan dengan y' , atau $\frac{dy}{dx}$, atau $f'(x)$, atau

$$\frac{df(x)}{dx}$$

Contoh 2

Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di sembarang x adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

3.2 Turunan Fungsi Konstan dan Fungsi Pangkat

1. Jika $f(x) = k$ dengan k konstan untuk setiap x (f fungsi konstan), maka $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Jika $f(x) = x$ untuk setiap x (f fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, untuk setiap x , maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Contoh 3

Jika $f(x) = x^5$, maka turunan f adalah $f'(x) = 5x^4$

3.3 Sifat-sifat Turunan

Jika k suatu konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, u dan v fungsi-fungsi dalam x sehingga $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka berlaku:

1. Jika $y = ku$ maka $y' = k(u')$
2. Jika $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$
3. Jika $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$
4. Jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$
5. Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 4

1. Jika $f(x) = 3x^5$, maka $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
2. Jika $f(x) = 3x^5 + 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 + 2$
3. Jika $f(x) = 3x^5 - 2x$, maka $f'(x) = 15x^4 - 2$
4. Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, maka $f'(x) = (15x^4 + 2)(4x + 7) + (3x^5 + 2x)4$
5. Jika $f(x) = \frac{3x^5 + 2x}{4x + 7}$, maka $f'(x) = \frac{(15x^4 + 2)(4x + 7) - (3x^5 + 2x)4}{(4x + 7)^2}$

6. Jika $f(x) = x^p$ dengan p bilangan bulat negatif maka $f(x) = x^{-n}$ dengan $-n = p$,

sehingga $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Dengan menggunakan turunan $y = \frac{u}{v}$ diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1}x^{-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \\ &= px^{p-1} \end{aligned}$$

3.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi)

Untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ dengan cara mengalikan bersama kesembilan faktor $(3x^4 + 7x - 8)$ kemudian mencari turunan polinom berderajat 36 tentulah sangat melelahkan. Cara yang mudah untuk menentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$ adalah dengan menggunakan aturan rantai.

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi yang dirumuskan dengan $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$ maka $y = (f \circ g)(x)$ terdiferensialkan di x dan

$$\begin{aligned} y' &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x)) g'(x) \end{aligned}$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Fungsi komposisi dapat diperluas menjadi komposisi 3 fungsi, 4 fungsi dan seterusnya.

$$\begin{aligned} \text{Jika } y &= f(u) \\ u &= g(v) \\ v &= h(x) \end{aligned}$$

$$\text{yakni } y = (f \circ g \circ h)(x)$$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh 5

Tentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } u = 3x^4 + 7x - 8 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^3 + 7$$

$$y = u^9 \quad \rightarrow \frac{dy}{du} = 9u^8.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 9u^8(12x^3 + 7) \\ &= 9(3x^4 + 7x - 8)^8(12x^3 + 7) \end{aligned}$$

3.5 Turunan Fungsi Invers

Misalkan $y = f(x)$ dan f mempunyai invers f^{-1} sehingga $x = f^{-1}(y)$. Dengan menggunakan aturan rantai pada $x = f^{-1}(y)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{df^{-1}(y)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \end{aligned}$$

3.6 Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit secara umum dapat ditulis sebagai $f(x, y) = 0$ dengan y sebagai fungsi dalam x .

Contoh fungsi implisit: 1) $y - 2x^3 - 8 = 0$

$$2) 2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$$

Contoh 6

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $y - 2x^3 - 8 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $y - 2x^3 - 8 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$

Penyelesaian:

Apabila kedua ruas $2x^3y - 7y - x^2 + 1 = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$6x^2y + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 7 \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} (2x^3 - 7) = 2x - 6x^2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 6x^2y}{2x^3 - 7}$$

3.7 Turunan Tingkat Tinggi

Jika fungsi diturunkan maka turunannya, yaitu f' juga berupa fungsi sehingga boleh jadi f' mempunyai turunan tersendiri yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi yang f'' baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia merupakan turunan dari turunan f . Dengan notasi Leibniz kita tuliskan turunan kedua dari $y = f(x)$ sebagai

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Notasi lain adalah $f''(x) = D^2f(x)$

Contoh 7

Jika $f(x) = 3x^4 + 7x - 8$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = 12x^3 + 7$$

untuk mencari $f''(x)$ kita turunkan $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} (12x^3 + 7) \\ &= 36x^2 \end{aligned}$$

Contoh 8

Jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) (4x + 7) + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right) \\
 &= (15x^4 + 2) (4x + 7) + (3x^5 + 2x) 4 \\
 f''(x) &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2) (4x + 7) + (3x^5 + 2x) 4] \\
 &= \frac{d}{dx} [(15x^4 + 2) (4x + 7)] + \frac{d}{dx} [(3x^5 + 2x) 4] \\
 &= \left(\frac{d}{dx} (15x^4 + 2) \right) (4x + 7) + (15x^4 + 2) \left(\frac{d}{dx} (4x + 7) \right) + \\
 &\quad \left(\frac{d}{dx} (3x^5 + 2x) \right) 4 + (3x^5 + 2x) \left(\frac{d}{dx} 4 \right) \\
 &= 60x^3 (4x + 7) + (15x^4 + 2) 4 + (15x^4 + 2) 4 + (3x^5 + 2x) 0 \\
 &= 60x^3 (4x + 7) + (15x^4 + 2) 4 + (15x^4 + 2) 4
 \end{aligned}$$

3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden



3.8.1 Turunan Fungsi Rasional

Contoh-contoh tentang turunan yang diuraikan sebelumnya (contoh 3) adalah contoh-contoh turunan fungsi rasional. Jadi turunan fungsi rasional ini tidak perlu dibahas kembali.

3.8.2 Turunan Fungsi Irrasional

Fungsi Irrasional adalah akar dari fungsi-fungsi rasional

Contoh 9

Tentukan turunan $y = \sqrt[n]{x}$ dengan n bilangan bulat positif

Penyelesaian: $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$ sehingga $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{x})^{1-n} = \frac{1}{n} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Contoh 10

Tentukan turunan $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

Penyelesaian: $y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\text{Dengan aturan rantai diperoleh: } y' &= \frac{1}{2} (x^3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} (3x^2 + 4) \\ &= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}\end{aligned}$$

3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri

Akan dicari turunan fungsi kosinus sebagai berikut.

Ingat: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Jika $f(x) = \cos x$, maka

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Analog:

jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$

jika $f(x) = \operatorname{tg} x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$

jika $f(x) = \operatorname{ctg} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$

jika $f(x) = \operatorname{cosec} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

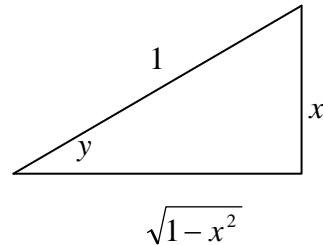
3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri adalah invers fungsi trigonometri.

Akan dicari turunan invers fungsi sinus (arcus sinus) berikut.

$$y = \arcsin x \rightarrow$$

$$x = \sin y \rightarrow$$



$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

Jadi,

jika $y = \arcsin x$, maka $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Analog:

$$\begin{aligned} \text{jika } y = \arccos x, \quad \text{maka } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{jika } y = \arctg x, \quad \text{maka } y' &= \frac{1}{1+x^2} \\ \text{jika } y = \operatorname{arccotg} x, \quad \text{maka } y' &= -\frac{1}{1+x^2} \\ \text{jika } y = \operatorname{arcsec} x, \quad \text{maka } y' &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ \text{jika } y = \operatorname{arccosec} x, \quad \text{maka } y' &= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma

Akan dicari turunan $f(x) = \ln x$ berikut.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{x} \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x}
\end{aligned}$$

Mengingat (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \ln f(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} f(x)$ dan (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = e$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\
&= \frac{\ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\
&= \frac{\ln e}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } f(x) = \ln x, \quad \text{maka } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Selanjutnya jika $y = {}^a \log x$ maka turunannya dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
y = {}^a \log x &\Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \\
&= \frac{1}{\ln a} \ln x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sehingga } y' &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = a^x \log x, \text{ maka } y' = \frac{1}{x \ln a}$$

3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial

Akan dicari turunan $y = a^x$ sebagai berikut.

$$y = a^x \Leftrightarrow \ln y = \ln a^x$$

$$\Leftrightarrow \ln y = x \ln a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln a} \ln y$$

$$\text{Sehingga } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh } \frac{dy}{dx} &= y \ln a. \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = a^x, \text{ maka } y' = a^x \ln a$$

$$\begin{aligned} \text{Khususnya untuk } a = e, \text{ jika } y = e^x, \text{ maka } y' &= e^x \ln e \\ &= e^x \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } y = e^x, \text{ maka } y' = e^x$$

3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik

Definisi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Jika $f(x) = \sinh x$, maka dengan menggunakan turunan fungsi eksponensial diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\text{jika } f(x) = \sinh x, \text{ maka } f'(x) = \cosh x$$

3.9 Turunan Fungsi Parameter

Apabila disajikan persamaan berbentuk:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

maka persamaan ini disebut persamaan parameter dari x dan y , dan t disebut

parameter. Dari bentuk parameter ini dapat dicari $\frac{dy}{dx}$ dengan cara sebagai

berikut. Dari $x = f(t)$ dibentuk $t = h(x)$ dengan h fungsi invers dari f . Nampak bahwa $y = g(t)$ merupakan bentuk fungsi komposisi

$$\begin{aligned} y &= g(t) \\ &= g(h(x)) \end{aligned}$$

Diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

sehingga $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$

SOAL

Carilah $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

1. $y = (3x^4 + 2x^2 + x)(x^2 + 7)$

2. $y = (x^3 + 3x^2)(4x^2 + 2)$

3. $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

4. $y = \frac{2}{5x^2 - 1}$

5. $y = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

6. $y = \frac{x-1}{x+1}$

7. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

Dengan aturan rantai tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk yang berikut

8. $y = (2 - 9x)^{15}$

9. $y = (5x^2 + 2x - 8)^5$

10. $y = \frac{1}{(4x^2 - 3x + 9)^9}$

11. $y = \sin(3x^2 + 11x)$

12. $y = \cos(3x^4 - 11x)$

13. $y = \sin^3 x$

14. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$

15. $y = \sin\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)$

16. $y = \cos\left(\frac{x^2-1}{x+4}\right)$

17. $y = \arcsin(3x^4 - 11x)$

18. $y = \text{arctg}(3x^4 - 11x)^8$

19. $y = \ln(5x^2 + 2x - 8)$

20. $y = e^{(2-9x)}$

Tentukan turunan fungsi implisit berikut

21. $x^2 + y^2 = 9$

22. $4x^2 + 9y^2 = 36$

23. $xy = 4$

24. $xy^2 - x + 16 = 0$

25. $x^3 - 3x^2y + 19xy = 0$

26. $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$

27. $\sqrt{xy} + 3y = 10x$

28. $xy + \sin y = x^2$

29. $\cos(xy) = y^2 + 2x$

30. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk fungsi parameter berikut

31. $y = 2 - 9t$
 $x = \sin t$

34. $x = \ln (2t - 9)$
 $y = (t^2 + 7)^3$

32. $y = 2 - 9t^2$
 $x = \arcsin (t - 1)$

35. $x = e^{(2t-9)}$
 $y = \operatorname{cosec} t$

33. $x = \ln (2 - 9t)$
 $y = \sin t$

36. $y = \sec (t - 1)$
 $x = \operatorname{tg} (t - 1)$