

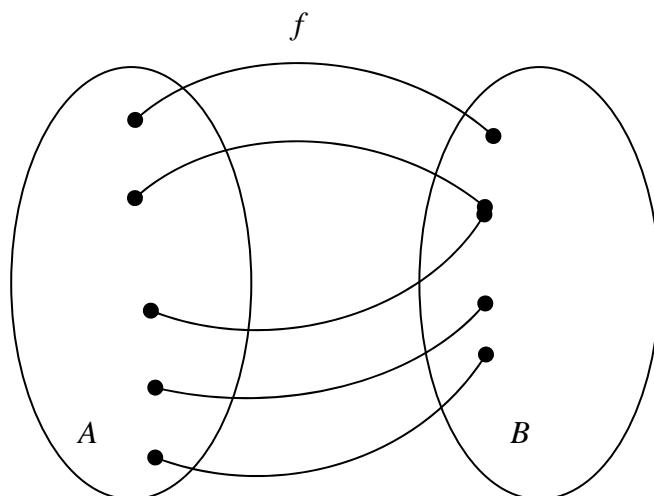
## FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI

### 2.1 Fungsi dan Grafiknya

#### Definisi

Sebuah fungsi  $f$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah suatu aturan yang memasangkan setiap  $x$  anggota  $A$  dengan tepat satu  $y$  anggota  $B$ .

$A$  disebut **domain** (daerah asal) fungsi  $f$  dan  $B$  disebut **kodomain** (daerah kawan). Sedangkan himpunan semua anggota  $B$  yang mempunyai pasangan disebut **range** (daerah hasil).



Gambar 2.1 Fungsi

Definisi di atas tidak memberikan pembatasan pada domain dan kodomain. Domain dapat berupa himpunan yang beranggotakan orang atau yang lain, demikian pula kodomain.

Dalam uraian selanjutnya domain dan kodomain dibatasi pada himpunan-himpunan bilangan real.

Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal seperti  $f$  (atau  $g$ , atau  $F$ ), maka  $f(x)$  menunjukkan nilai yang diberikan oleh  $f$  kepada  $x$ . Jadi jika  $f(x) = x^3 - 4$ , maka

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

### Contoh 1

Untuk  $f(x) = x^2 - 2x$ , carilah dan sederhanakan:

- a.  $f(4)$
- b.  $f(4 + h)$
- c.  $f(4 + h) - f(4)$
- d.  $\frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$  dengan  $h \neq 0$ .

*Penyelesaian:*

### Contoh 2

Untuk  $f(x) = x^2 - 2x$  dengan daerah asal  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , carilah daerah hasil fungsi  $f$ .

*Penyelesaian:*

Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, maka dianggap daerah asal fungsi tersebut adalah himpunan bilangan real sehingga aturan fungsinya bermakna dan memberikan nilai bilangan real.

### Contoh 3

- a. Daerah asal  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  adalah  $\{x \in R \mid x \neq 3\}$ .
- b. Daerah asal  $g(t) = \sqrt{9-t^2}$  adalah  $\{t \in R \mid 9-t^2 \geq 0\}$ .

Apabila daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat, dan grafik fungsi  $f$  adalah grafik dari persamaan  $y = f(x)$ .

### Contoh 4

Buatlah sketsa grafik dari: (a)  $f(x) = x^2 - 4$

(b)  $g(x) = \frac{1}{x}$   
(c)  $h(x) = |x|$

*Penyelesaian:*

## 2.2 Operasi pada Fungsi

Jika  $f$  dan  $g$  dua fungsi maka jumlah  $f + g$ , selisih  $f - g$ , hasil kali  $fg$ , hasil bagi  $f/g$  dan perpangkatan  $f^n$  adalah fungsi-fungsi dengan daerah asal berupa irisan dari daerah asal  $f$  dan daerah asal  $g$ , dan dirumuskan sebagai berikut.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ asalkan } g(x) \neq 0$$

### Contoh 5

Jika  $f(x) = x^2 - 2x$  dan  $g(x) = x - 1$ , tentukan  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  dan  $f^3$ . Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

*Penyelesaian:*

Selanjutnya didefinisikan komposisi fungsi sebagai berikut.

Jika  $f$  dan  $g$  dua fungsi dengan daerah asal  $g$  merupakan daerah hasil  $f$  maka komposisi  $g \circ f$  memenuhi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### Contoh 6

Jika  $f(x) = x^2 - 2x$  dan  $g(x) = x - 1$ , tentukan  $g \circ f$  dan  $f \circ g$ . Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

*Penyelesaian:*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\&= g(x^2 - 2x) \\&= x^2 - 2x - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\&= f(x - 1) \\&= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\&= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 \\&= x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

Gambar grafik dibiarkan untuk latihan.

### 2.3 Pengertian Limit

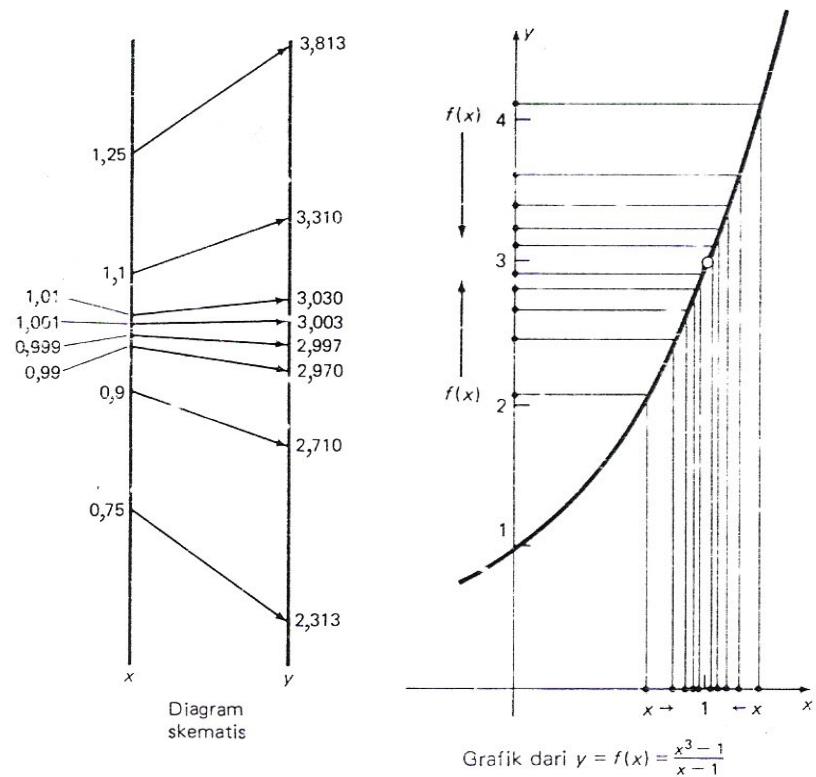
Perkataan limit berarti mendekati, seperti “Saya sudah menahan sampai mendekati batas kesabaran saya,” atau “Janganlah kamu mendekati zina.”

Untuk memahami pengertian limit fungsi kita awali dengan fungsi berikut.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi di  $x = 1$  sebab di titik ini  $f(x)$  berbentuk  $\frac{0}{0}$ . Tetapi dapat diselidiki mengenai nilai  $f(x)$  di titik-titik yang dekat dengan 1 ( $x$  mendekati 1). Perhatikan nilai  $f(x)$  untuk beberapa  $x$  seperti terlihat pada daftar dan grafik  $y = f(x)$  dapat dilihat pada gambar berikut.

$x$	$y = f(x)$
1,25	3,813
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710
0,75	2,313



Gambar 2.2

Berdasarkan informasi pada tabel dan pada grafik menunjukkan bahwa  $f(x)$  mendekati 3 apabila  $x$  mendekati 1. Secara matematis hal tersebut dituliskan dengan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

dan ini dibaca “limit  $(x^3 - 1)/(x - 1)$  untuk  $x$  mendekati 1 adalah 3.”

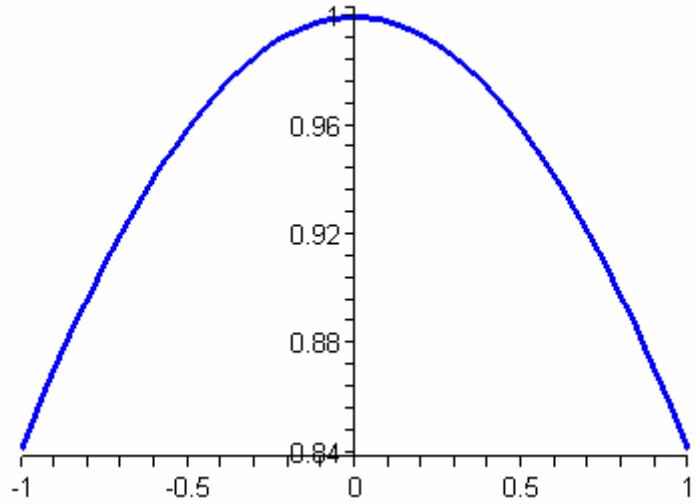
Dalam contoh ini kita menghubungkan limit dengan perilaku fungsi dekat dengan 1, bukannya di 1.

### Contoh 1

Dengan menggunakan beberapa nilai pendekatan  $x$  tentukan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

*Penyelesaian:*

$x$	$y = \frac{\sin x}{x}$
1	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0,01	0,99998
-0,1	0,99833
-0,5	0,95885
-1	0,84147



$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ingat kembali mengenai nilai mutlak. Jika  $\varepsilon$  adalah sembarang bilangan positif, maka jarak  $f(x)$  ke bilangan  $L$  kurang dari  $\varepsilon$  dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

dan ini ekuivalen dengan

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

yang menunjukkan bahwa  $f(x)$  terletak pada interval terbuka  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  seperti terlihat pada gambar 2.3 (a).

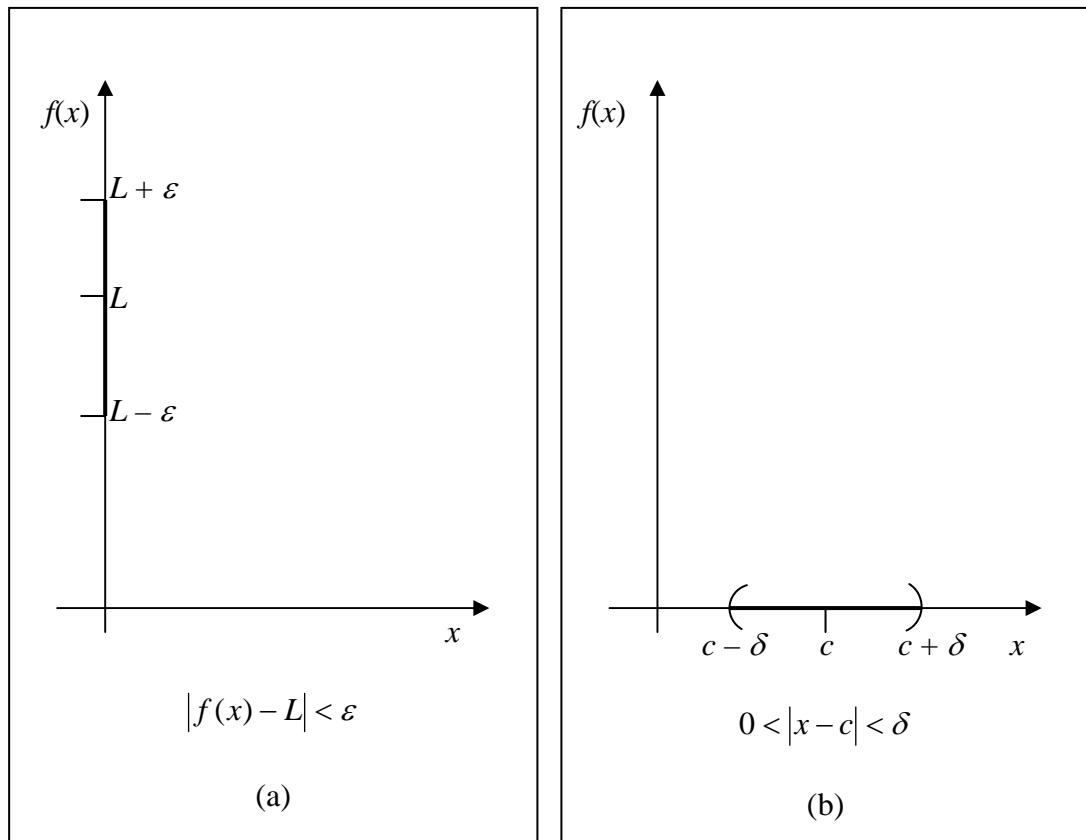
Selanjutnya misalkan  $\delta$  adalah suatu bilangan positif dan  $x$  cukup dekat dengan  $c$  sehingga jarak  $x$  ke  $c$  kurang dari  $\delta$ , tetapi  $x \neq c$  maka

$$0 < |x - c| < \delta$$

dan ini ekuivalen dengan

$$c - \delta < x < c + \delta$$

yang berarti  $x$  terletak dalam interval terbuka  $(c - \delta, c + \delta)$  dan dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2.3 (b).



Gambar 2.3

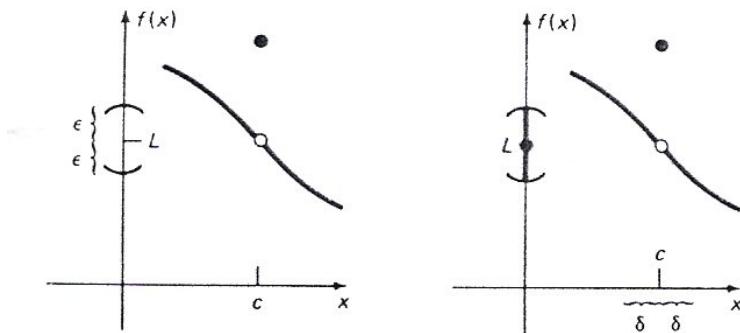
Gambar-gambar dalam Gambar 2.2 dan Gambar 2.3 diharapkan dapat memudahkan kita untuk memahami definisi formal dari limit sebagai berikut.

**Definisi**

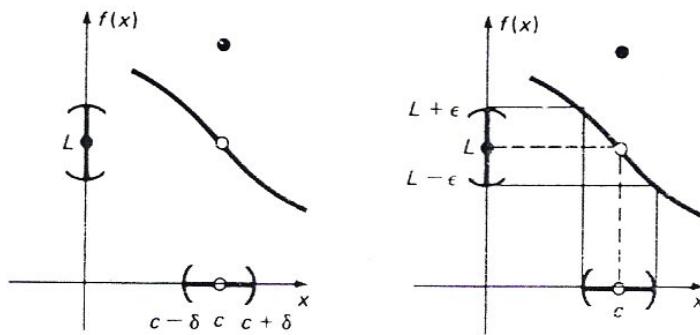
Limit  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $c$  adalah  $L$ , ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

jika dan hanya jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  (betapapun kecilnya), terdapat bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga apabila  $0 < |x - c| < \delta$  berlaku  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .



Untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga



apabila  $0 < |x - c| < \delta$  berlaku  $|f(x) - L| < \varepsilon$

Gambar 2.4

### Contoh 2

Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$

*Analisis pendahuluan:*

Misalkan  $\varepsilon > 0$  sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga apabila  $0 < |x - 4| < \delta$  berlaku  $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$ .

$$\text{Perhatikan } |(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu dapat dipilih  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Tentu saja dapat dipilih bilangan  $\delta$  yang kurang dari  $\frac{\varepsilon}{3}$ .

### Bukti:

Ambil sembarang bilangan  $\varepsilon > 0$ . Kita pilih  $\delta > 0$ , yaitu  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Apabila  $0 < |x - 4| < \delta$  maka berlaku

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| &= |3x - 12| \\ &= |3(x - 4)| \\ &= 3|x - 4| \\ &= 3\delta \\ &< 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$ .  $\square$

### Contoh 3

Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

*Analisis pendahuluan:*

Misalkan  $\varepsilon > 0$  sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan  $\delta > 0$  sedemikian

sehingga apabila  $0 < |x - 2| < \delta$  berlaku  $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$ .

Perhatikan

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |2|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dipilih  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  atau yang lebih kecil dari  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

**Bukti:**

Ambil sembarang  $\varepsilon > 0$  dipilih  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  sehingga  $0 < |x - 2| < \delta$  berlaku

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| &= \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| \\ &= |(2x+1) - 5| \\ &= |2(x-2)| \\ &= |2|x-2|| \\ &= |x-2| \\ &< \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Berarti terbukti bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$ .  $\square$

**Contoh 4**

Buktikan  $\lim_{x \rightarrow c} (mx + b) = mc + b$

*Analisis Pendahuluan:*

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , akan dicari bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga apabila  $0 < |x - c| < \delta$  berlaku  $|(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$ .

Perhatikan:

$$\begin{aligned} |(mx + b) - (mc + b)| &< \varepsilon \Leftrightarrow |mx - mc| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |m| |x - c| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - c| < \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ asalkan } m \neq 0 \end{aligned}$$

Dapat dipilih  $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ .

**Bukti:**

Untuk  $m = 0$ , bukti cukup jelas.

Misal  $m \neq 0$ . Untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dipilih  $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ . Oleh karenanya jika  $0 < |x - c| < \delta$

$$\begin{aligned} |(mx + b) - (mc + b)| &= |(mx + b) - (mc + b)| \\ &= |mx - mc| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |m| |x - c| \\ &< |m| \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon. \square \end{aligned}$$