音乐基础知识

音乐：凭借声波振动而产生，在时间中展现
声波：是纵波，空气疏密的变化
声音的物理属性：高低由频率决定，音高（pitch）
声音强弱由压力决定，力度（dynamics）
～时间长度，时值（duration）
～特点 由波形决定，音色（timbre）

频率 — 音高　人听力 20–20K Hz
· 音乐会音高（concert pitch）中央C上方的A是440 Hz

人耳对不同频率声音有不同听觉下限阈值

声压 — 力度．人耳听觉下限阈值：20μPa（频率为1KHz时）
— 分贝　人对声强的感觉并非线性，用声压水平来度量
$I_p = 20\log_{10}\frac{P}{P_0}$　P_0是下限阈值，I_p单位就是分贝

音色　傅里叶级数　$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$
⇒ 一个复杂的振动可以分解成简单的正、余弦振动的叠加．
⇒ 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动
两种视角：把一个振动描绘成随时间变化的图．时域
把振动对应的不同频率上的图绘出　频域

乐理知识

乐音体系．乐音（musical tune）噪音（noise）
二十世纪以来音乐家越来越重视噪音的使用（organized noise）

噪音．（打击乐器（percussion instrument）：分为有固定音高和无固定音高的）
噪音使用 eg 1．柴科夫斯基《1812序曲》，用炮
eg 2．打溜子 v.s. stomp（踩踏）：（舞台表演形态）谭盾《地图》第三乐章打溜

乐音．音乐中使用的，有固定音高的全部乐音构成一个集合，称为乐音体系，它每个作
音级，从低到高排列叫音列，两个相邻的音相差一个半音
每级都有音名 C D E F G A B
在每个八度（octave），为区别不同八度间同名的音，人们把这些音分为各音组
88键

(变音记号)

音名 C.D.E.F.G.A.B 是基本音级，将基本音级加上升、降号成为变化音级.

升 #，降 b，重升 ×，重降 bb，还原 ♮

在现代钢琴 #E = F，bF = E，#B = C，bC = B

一个音级可以有不同音名，这些音名称为等音的，但这些音名有不同意义

唱名 do re mi fa sol la si (ti)

固定唱名法 (fixed do)　　do = C，唱名在键盘上位置固定

首调唱名法 (movable do)　移动唱名法，do 可以是任一个音级（简谱中 1 = A.B.C…）

大调主音唱 do，小调主音唱 la

五线谱.

历史：工尺(chě)谱　合 四 一 上 尺 工 凡 六 五 乙 → 燕乐谱

(5 6 7 1 2 3 4 5 6 7)

……

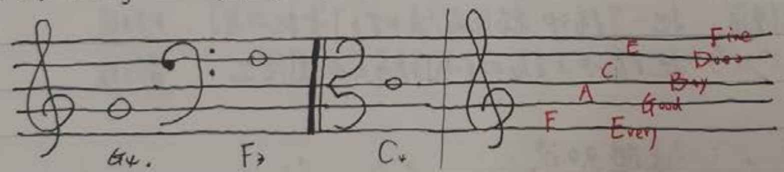
音符：符头、符干、符尾.　描述的是相对长度

附点：原音符时值 $\times \frac{3}{2}$

拍号：(time signature) $\frac{m}{n}$：以 n 分音符为 1 拍，每小节 m 拍

绝对时值：速度 (tempo)　♩= 60：每分钟奏 60 个四分音符.

谱号 (clef)：高音谱号 (treble ~)，低音 (bass ~)，中音 (alto ~)



谱表 (staff)，分为单谱表和联合谱表（钢琴、花括号大谱表 grant staff）

（合唱：S、A、T、B.）

变音记号：①调号 (key signature)：对乐谱中所有同名音（未改变调之前）

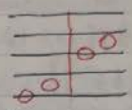
②临时变音记号：变音记号之后一小节之内同高度的音，延音例外

音程：Edwin Evans.（英国音乐评论家）：

Music is, however, an art not of notes but of intervals (音程)

在乐音体系中，两个音级之间距离称为音程 (interval)，高的叫上方音（冠音）
低的叫下方音（根音），先后发声叫旋律音程，同时叫和声音程
由两个参数决定（度数 + 半音数）
度数：在五线谱上包括的间和线个数
半音数：两个音级包含的半音的数目

the minor second
半音数为1的二度音程叫小二度：E_4-F_4，B_4-C_5。



the major second
半音数为2的二度音程叫大二度 C_4-D_4, D_4-E_4, F_4-G_4, G_4-A_4, A_4-B_4.

半音数为3的三度音程叫小三度 D_4-F_4, E_4-G_4, A_4-C_5, B_4-D_5

半音数为4的三度音程叫大三度 C_4-E_4, F_4-A_4, G_4-B_4.

the perfect fourth
半音数为5的四度音程叫纯四度 C_4-F_4, D_4-G_4, E_4-A_4, G_4-C_5, A_4-D_5, B_4-E_5.

the augmented fourth
半音数为6的四度音程叫增四度（三全音）最不协和。F_4-B_4.
tritone

the diminished fifth
半音数为6的五度音程叫减五度 B_4-F_5.

半音数为7的五度音程叫纯五度 C_4-G_4, D_4-A_4, E_4-B_4, F_4-C_5, G_4-D_5, A_4-E_5.

半音数为8的六度音程叫小六度 E_4-C_5, A_4-F_5, B_4-G_5.

半音数为9的六度音程叫大六度 C_4-A_4. D_4-B_4. F_4-D_5. G_4-E_5

半音数为10的七度音程叫小七度 D_4-C_5, E_4-D_5, G_4-F_5, A_4

半音数为11的七度音程叫大七度 C_4-B_4, F_4-E_5

the perfect octave
半音数为12的八度，纯八度 C_4-C_5, … B_4-B_5

不计纯一度，纯八度，有42个音程

diatonic interval

自然音程 和变化音程：

自然~：大小二，大小三，大小六，大小七，纯一、四、五、八，增四减五

变化~ 大、纯音程 增一半音得到增音程

小、纯音程 减一半音得到减音程

大减变小，小增变大

	减	小	纯	大	增
一			C-C(0)		C-♯C(1)
二	♯C-♭D(0)	C-♭D(1)		C-D(2)	C-♯D(3)
三	♯C-♭E(2)	C-♭E(3)		C-E(4)	C-♯E(5)
四	♯C-F(4)		C-F(5)		C-♯F(6)
五	♯C-G(6)		C-G(7)		C-♯G(8)
六	♯C-♭A(7)	C-♭A(8)		C-A(9)	C-♯A(10)
七	♯C-♭B(9)	C-♭B(10)		C-B(11)	C-♯B(12)
八	♯C-C'(11)		C-C'(12)		C-♯C'(13)

consonant int. dissonant int.

协和音程和不协和音程

完全 不完全

纯四，纯五，纯八，大小三度，大小六度：协和

二、七和所有增减， 不协和音程

协和的主观性？ 协不协和是相对的，有时不协和音程也有特殊作用。

毕达哥拉斯 B.C.569 – B.C.475 理论

在弦乐器中，弦长缩短 1/2，音高差八度

长度成简单整数比的弦能够发出协和声音 一度：1:1，八度：1:2

纯五度：2:3 纯四度：3:4（完全协和），六度 3:5 大三度 4:5 不完全协和

赫尔姆霍茨 1821-1894 德国生理学家、物理学家

泛音列重合理论 八度：$f, 2f, 3f \dots nf \dots$

$2f, 4f, 6f \dots 2nf \dots$ 全可对应

拍音理论，拍音的形成：假设一个声音频率为 w，另一个 $w+\delta$。

叠加为 $\sin(2\pi(w+\delta)t)+\sin(2\pi wt)$

$= 2\sin(2\pi(w+\frac{\delta}{2})t)\cdot\cos(\pi\delta t)$

这说明两个频率分别是 w 和 $w+\delta$ 的声音叠加，得到一个比 w 稍高的音，频率为 $w+\delta/2$，但其音量以 δ 为周期变化，使人感觉到拍。

频率为 w_1, w_2 的两声叠加，每秒产生 $\delta=|w_1-w_2|$ 个拍音

但有缺陷：在不同音区同音程协和程度会变化。

斯图姆夫 1848-1936 德国哲学家、心理学家

心理学实验结果，越协和越认为是同一个音

振动方程和泛音（overtone）

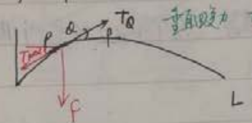
Edward Benjamin Britten 英国作曲，指挥，钢琴家 1658–1695

The young person's guide to the Orchestra

《青少年管弦乐队指南》之主题选自英国作曲家 亨利·珀赛尔 Henry Purcell 为戏剧《摩尔人の复仇》所作の插曲。

乐器分类 气鸣（aerophones）、唇鸣、簧鸣；弦鸣（chordophones）之弦、弹拨、击打；
电鸣（electrophones）；体鸣：（idiophones）打击、木琴、膜鸣（membranophones）鼓、卡祖笛

一维振动方程。假定一条均匀细弦被固定在水平轴 $(0,0)$，$(L,0)$ 间，设 $u(x,t)$ 是弦上 x 处在时刻の t 的位移。取一小段 $P.Q$，坐标：$(x_0, u(x_0,t))$，$(x_0+\Delta x, u(x_0+\Delta x,t))$。



竖直受力 $T_Q - T_P = T(\sin\beta - \sin\alpha)$
$\approx T(\tan\beta - \tan\alpha)$
$= T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0+\Delta x}\right)$
$= \rho\,\Delta x \cdot a$

记细线张力为 T，线密度 ρ。

则 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ —维波动方程

令 $c = \sqrt{T/\rho}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，由弦两端固定，边值条件：$u(0,t) = u(L,t) = 0$，$\forall t \geq 0$

分离变量法设 $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$，则

$$\frac{\partial^2 \phi(x)\psi(t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi(x)\psi(t)}{\partial x^2}$$，整理 $\frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$

两端只能是常数，设之为 $-\lambda$，则 $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$，$\psi''(t) + \lambda c^2 \psi(t) = 0$

$\lambda \leq 0$，无非平凡解。$\lambda > 0$，有通解 $\phi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$。

由边值条件 $0 = \phi(0) = A$，$0 = \phi(L) = B\sin\sqrt{\lambda}L$；$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ 离散性

$\phi_n(x) = B_n \cdot \sin\sqrt{\lambda_n}x$

进而 $u(x,t) = \phi_n(x)\psi_n(t) = B_n \sin\sqrt{\lambda_n}x\left(C_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)$

$(a_n = B_nC_n, b_n = B_nD_n)$ $= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + b_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)$ (f)

振动模态与泛音。设 θ_n 满足 $\sin\theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$，$\cos\theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$

(f) $\Rightarrow$ $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\sin(w_n t + \theta_n)$。 $\left(w_n = \frac{n\pi c}{L}\right)$。

由此 $u_n(x,t) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cdot\sin(w_n t + \theta_n)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$（随 x 不同振幅不同。）

$$f_1 = \frac{w_1}{2\pi} = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

1588–1648

梅森 Mersenne 定律，弦の振动频率与长度成反比，与张力平方根成正比，与线密度平方根成反比

$$f \propto \frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

（法国神学、哲学、数学、音乐理论家）

由此，弦的振动不是简单的单一频率运动，而是无数个正弦振动的叠加

对于 $n=1,2\cdots$ $\quad u_n(x,t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t+\theta_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

称为弦振动的第n个振动模态，其频率为 $f_n=\frac{n}{2L}\cdot c=\frac{n}{2L}\cdot\sqrt{\frac{T}{\rho}}=nf_1$

$\{f_1, 2f_1\cdots\}$ 称为泛音列

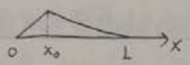
序列 $\{f_1\cdots f_n\cdots\}$ 称为弦的固有频率，f_1 是基频，相应声音叫基音 (fundamental note)

$f_n\,(n>1)$ 对应的声音叫泛音 (overtone) f_2 叫第一泛音，以此类推.

驻波：两频率和振幅相同，但行进方向相反的波在同一个介质中叠加，会形成驻波，
　　整条弦振动波形稳定驻留在原地，不随时间移动，弦上每一点都做简谐运动，但振幅各不相等，振幅为0的点叫波节 (node)，振幅最大的点在两波节间，为波腹 (antinode)

拨弦振动.

《拨弦波尔卡》 (Pizzicato Polka) 圆舞曲之王 John Strauss (1825-1899)

初值条件  折线函数，将其奇延拓到 $[-L,0]$

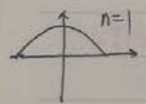
$$u(x,0)=\phi(x)=\begin{cases}\frac{h}{x_0}x & 0\le x\le x_0\\ \frac{h}{x_0-L}x-\frac{hL}{x_0-L} & x_0\le x\le L\end{cases}$$

$\phi(x)$ Fourier 级数一致收敛到 ϕ

以中点为例：$x_0=\frac{L}{2}$，求 Fourier 系数 $\quad a_n=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\begin{cases}0 & (n\text{偶})\\ \neq 0 & (n\text{奇})\end{cases}$

最终结论 中点拨弦振动：

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right)\cdot\cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right).$$



只有对应奇数的振动出现，(几何解释：弦的振动应该始终保持关于 $L/2$ 对称)

高维振动方程 $\quad u(x,y;t)\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2u$

管乐器及振动

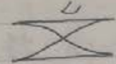
木管五重奏 ((wood) wind quintet) 长笛 (flute)，双簧管 (oboe)
单簧管 (黑管 clarinet) 大管 (巴松 bassoon) *圆号 (French horn).
《千与千寻》宫崎骏 　　《千と千尋の神隠し》久石让

管乐器的振动是管内空气柱，振动的空气柱会超出管的端口，故须对 (管口问题) (管口) 导致的音高频率进行端口校正 (end correction)

朱载堉（1536-1611）字伯勤，（河南沁阳）明代著名的律学家、历学家、音乐家，朱元璋九世孙
徐寿（清 1818-1884）受其启发做了实验，发表在 Nature[2] (1881) 上。

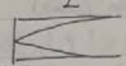
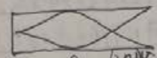
不计管口校正，开口位置处于振动波腹，闭口只能位于波节。。 $f=\frac{v}{\lambda}$

①开管振动模态。 L

 n=1，  n=2.

设管长为L，不同模态波长为 $\lambda_n=\frac{2L}{n}$，$\Rightarrow f_n=\frac{nv}{2L}$，泛音列 f（基）, 2f…

② 闭管振动模态。 L

 n=1  n=2

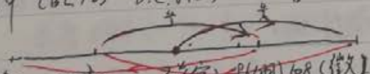
设管长为L，不同模态波长 $\lambda_n=\frac{4L}{2n-1}$，$\Rightarrow f_n=\frac{(2n-1)v}{4L}$，泛音列 f, 3f, 5f… 只有奇数 偶次泛音 第二、四泛音

长笛是开管，单簧管是闭管，同长二者闭管的比开管低八度（基频）
$C_4\rightarrow$… $D_3\rightarrow$（记谱为E_3—移调乐器）

③超吹，长笛的泛音列中，第二项为2f，超吹产生高八度的音，
单簧管泛音列中，第二项为3f，超吹产生高十二度的音。

乐音体系的生成 Temperament

律学(temperament) ①确定绝对音高(absolute pitch)，确定每个音具体频率。
基本假设 一个八度⇔频率二倍 ②确定相对音高(relative…)（关系）：同一八度内各音相对音高。
管仲(BC723-B.C.645)《管子》地员篇（三分损益法）三分损一：$\times\frac{2}{3}$，三分益一：$\times\frac{4}{3}$



(弦长) 64(角) 72(商) 81(宫) 96(羽) 108(徵)
(和数字对应) 3 ·2 1 6 5

三分损一、三分益一，交替（相对高度）

C D E #F G A B C
宫 商 角 变徵 徵 羽 变宫 清宫（就清为高八度的）

七声音阶：角三分益一得变徵，变徵三分损一得变宫

吕不韦《吕氏春秋》季夏纪第六 中记载了十二律
黄钟生林钟，林钟生太簇，~生南吕，~生姑洗（xiǎn），~生应钟，~生蕤宾，~生大吕，~生夷则，~生夹钟，~生无射（yì），无射生仲吕，三分益一为上生，三分损一为下生，黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。

黄钟	林钟	太簇	南吕	姑洗	应钟	蕤宾	大吕	夷则	夹钟	无射	仲吕
C	G	D	A	E	B	#F	#C	#G	#D	#A	#E
宫	徵	商	羽	角	变宫	变徵					
81	54	72	48	64	$\frac{2^7}{3}$	$\frac{2^8}{3^2}$	$\frac{2^{10}}{3^3}$	$\frac{2^{11}}{3^4}$	$\frac{2^{13}}{3^5}$	$\frac{2^{14}}{3^6}$	$\frac{2^{16}}{3^7}$

上 / 下

81（三分损益）$\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ 54 $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ 72 $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ 48 $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ 64 $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ $\frac{2^7}{3}$ $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ $\frac{2^9}{3^2}$ $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ $\frac{2^{11}}{3^3}$ $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ $\frac{2^{12}}{3^4}$ $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ $\frac{2^{14}}{3^5}$ $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ $\frac{2^{15}}{3^6}$ $\xrightarrow{\frac{4}{3}}$ $\frac{2^{17}}{3^7}$

旋宫不归？ 按序

	C	#C	D	#D	E	#E	#F	G	#G	A	#A	B
	黄	大	太	夹	姑	仲	蕤	林	夷	南	无	应
	81	$\frac{2^{11}}{3^3}$	72	$\frac{2^{14}}{3^5}$	64	$\frac{2^{17}}{3^7}$	$\frac{2^9}{3^2}$	54	$\frac{2^{12}}{3^4}$	48	$\frac{2^{15}}{3^6}$	$\frac{2^7}{3}$

得仲吕后，三分损一得其上方纯五度的#B，得到 $\frac{2^{18}}{3^8}$，按现在律制 #B = C′，但其小于 $\frac{81}{2}$，高于C′

⇒ 京房命其为执始，得六十律。

（西汉）

五度相生：以 $\frac{3}{2}$ ⟺ 纯五度，若超出2，再除以2，接此类推

（毕达哥拉斯）

$C \xrightarrow{五} G \xrightarrow{五} D \xrightarrow{五} A \xrightarrow{五} E \xrightarrow{五} B \xrightarrow{五} \#F \xrightarrow{五} \#C \xrightarrow{五} \#G \xrightarrow{五} \#D \xrightarrow{五} \#A \xrightarrow{五} \#E$

1, $\frac{3}{2}$, $\frac{3^2}{2^3}$, $\frac{3^3}{2^4}$, $\frac{3^4}{2^6}$, $\frac{3^5}{2^7}$, $\frac{3^6}{2^9}$, $\frac{3^7}{2^{11}}$, $\frac{3^8}{2^{12}}$, $\frac{3^9}{2^{14}}$, $\frac{3^{10}}{2^{15}}$, $\frac{3^{11}}{2^{17}}$

问题：毕达哥拉斯音差 $\frac{3^{12}}{2^{19}}$（pythagorean comma）

（五度相生各音级，前11个纯五度均是3:2，纯四度均是4:3，但三度音程出问题（C–E：$\frac{81}{64} > \frac{5}{4}$ 理想大三度）

若假定#E = F，大三度F–A之比：$\frac{2^{?}(除以2)}{3^{?}} < \frac{5}{4}$，大六度C–A、D–B：$\frac{27}{16} > \frac{5}{3}$ ）

得到#E后，考虑其上方纯五度 $\frac{3^{12}}{2^{18}} > 2$，其理应是#B = C′，但比C′高。

⇒ 从C出发连续做12次上行纯五度，得到音级X，将之降低7个八度，应回原点，但回到高于C

mophony（对律制问题没有发现）

单声音乐：指单一曲调构成的音乐，包括无伴奏的独唱、独奏，以及由曲调做同/高低八度的合奏

格里高利圣歌（Gregorian Chant）《赞美圣母》（Hail Holy Queen）

多声部音乐　A.D.9. 奥尔加农（Organum）　对位（counterpoint）

(a) 复调音乐（polyphony）　不同声部相对独立性，按对位法作法结合

(b) 主调音乐（homophony）　以一声部为主要旋律，其余伴奏、烘托

复调：Ricercar "无插部赋格"（16–17世纪），巴赫《音乐的奉献》中

有一首六声部里切卡尔（17世纪后贯穿主题模仿的里切卡尔）

主调，舒伯特（奥地利）《军队进行曲》

（just intonation）

纯律　从文艺复兴时始，西方音乐中越来越多地重视和使用三度、六度音程

于是人们探索在五度相生法中添加一个纯律元素　理想大三度的比例 5:4

由于四度＋五度 → 八度，四度音程频率比应为 $2 \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

故音名 F 的频率为 4/3，由大三度 F–A 得到音名 A

所对应的频率应该为 $\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$

再根据纯五度 E-B 和 G-D′ 确定 B、D 相对频率.
由纯五度 E-B 可算出 B 的频率 $\frac{15}{8}$，这时大三度 G-B，纯四度 B-E′ 也满足理想比
最后确定 D，假定其高八度的 d 频率为 y，由纯五度 G-d 可算得 $y=\frac{9}{4}$

C − D − E − F − G − A − B − C′ − D′ − E′ − F′ − G′ − A′ − B′

f　1　$\frac{9}{8}$　$\frac{5}{4}$　$\frac{4}{3}$　$\frac{3}{2}$　$\frac{5}{3}$　$\frac{15}{8}$　2　$\frac{9}{4}$　$\frac{5}{2}$　$\frac{8}{3}$　3　$\frac{10}{3}$　$\frac{15}{4}$

大三+纯四　纯五−大三

理想大三度 $\frac{5}{4}$，纯四度 $\frac{4}{3}$，纯五度 $\frac{3}{2}$，大六度 $\frac{5}{3}$，小三 $\frac{6}{5}$，纯八 = 纯四+纯五

按纯律，基本三和弦 C-E-G，F-A-C′，G-B-D′ 比例符合 4:5:6.
对复调音乐有重要意义.

纯律的缺点 ① 五度音程 D-A 不协和. 比例为 $\frac{80}{54} < \frac{81}{54} = \frac{3}{2}$
② 有两种不同大二度(全音) C-D，F-G，A-B：$\frac{9}{8}$，但
D-E，G-A：$\frac{10}{9}$.

谐(diào)调音差：按纯律，从C出发连续升高4个纯五度再降2个8度和一个大三度.
得到 $(\frac{3}{2})^4\times(\frac{1}{2})^2\times\frac{4}{5} = \frac{81}{80} > 1$. 回到比C略高处 → 谐调音差

不同律制在不同历史时期都发挥了不同作用，但都有缺陷.
西汉京房六十律，南朝宋太史令钱乐之三百六十律，蔡元定十八律.
律制缺陷的本质：设C：f，C′：2f. 若C上方五度为 $\frac{3}{2}f$，则连做n次五度
可以得到高m个八度的C，这时对应频率有
$$(\frac{3}{2})^n\cdot f = 2^m f，\quad 3^n = 2^{m+n} \quad (无整解)$$

mean-tone temperaments

中庸全音律

五度相生和纯律都有同样音程但频率比不同的问题
方法：对于纯律中音程 C-D 比例9:8 和音程 D-E 的比例 10:9 做几何平均
$$\sqrt{\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$，说明在大三度 C-E 之中点插入D，使得大二度
CD，DE 之间比例相等. 还需要确定两个半音(小二度)，
若再求中点仍不对. 另一方面，用八度去掉五个大二度再开方有
$$\sqrt{2\div(\frac{\sqrt{5}}{2})^5} = \frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$$. 有两个生律元素.

大二度的 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 和 小二度的 $\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$.

C D E F G A B C'

$$1 \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \tfrac{5}{4} \ \tfrac{8}{5\sqrt[4]{5}} \ \tfrac{2}{\sqrt[4]{5}} \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \sqrt[4]{5} \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \tfrac{\sqrt[4]{5^3}}{2} \ \tfrac{\sqrt{5}}{2} \ \tfrac{\sqrt[4]{5^5}}{4} \ \tfrac{8}{5\sqrt[4]{5}} \ 2$$

但这牺牲了纯五度的理想比例， $\sqrt[4]{5} < \frac{3}{2}$

平均律 (equal temperament) 半音： $\sqrt[12]{2}$

世界上第一个通过准确计算提出平均律的是朱载堉 《乐律全书》 <A01181

(新法密律) 其首先提出 不宗黄钟九寸之说，就是认识到了律名实为比例

巴赫：Johann Sebastian Bach 德国作曲家，巴洛克时代音乐大师 C大调前奏曲

(Harsichord 羽管键琴（大键琴）是钢琴前身之一，几无强弱变化)

→ Forte(强) piano(弱)

巴赫名作《音乐的奉献》(Das Musikalische Opfer) 1747.

在波茨坦觐见普鲁士国王腓特烈二世，在完成的作曲之中含十首卡农，

其中一首 "canon per tonos"：即经由种种调性的卡农

卡农：复调音乐的一种，原意为规律，一个声部的曲调始终追逐另一声部，直到最后一小节最后一个和弦，融合在一起，所有声部模仿一个声部，但不同高度的声部依一定间隔进入，造成一种此起彼伏，连绵不断的感觉，轮唱也是一种～

音分*：两音之间音分数为 $1200\log_2(\frac{f_2}{f_1})$

不同律制音分值对照表

	C	D	E	F	G	A	B	C'
		+4	+14	+2	-2	+16	+12	
十二平均	0	200	400	500	700	900	1100	1200
三分损益	0	204	408	498	702	906	1110	1200
纯律	0	204	386	498	702	884	1088	1200
中庸律	0	193	386	503	697	890	1083	1200

八度循环 2:1； 五度相生 3:2； 和弦协和 5:4

绝对音高

历史上并没有标准の绝对音高，不同国度、时代有不同标准

在 19 世纪の欧洲和北美，人们趋向于不断提高绝对音高（A の频率）

原因：乐器制造技术进步，音乐厅建造，听众人数

20世纪后随着广播、录音等产业の发展，需要制定一个国际通行の绝对音高标准

1939 年 5月 国际标准化协会 ISA 在伦敦召开会议，正式确定 $A = 440Hz$ 为"音乐会音高" concert pitch

1955 年 国际标准化组织 IOS 接受 $A = 440Hz$ 为技术标准，沿用至今

一个八度为何有 12 个半音

1、传统阿拉伯音乐中，音级间最小差 ½ 个半音，即四分之一音（quarter tone）

♯ ♯♯ ♯♯♯，d b ♭ 但不是所有都会在曲中用到，有不同调式の音阶

2. 纯八度音程包含 12 个半音，纯五度包含 7 个半音，即

设纯八度含 n 个半音，

纯五度含 m 个（即基本音级）

则 n 个纯五度 = m 个纯八度

$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$

12 个纯五度 = 7 个八度音程，理想纯五度之比为 3:2，八度 2:1

则应有 $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7$，但不可能。

$\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{7}{12}$ $\longrightarrow$ 7 个基本音级，12 个半音 ⇒ 无理数の有理逼近问题

(continued fraction)

$\log_2\frac{3}{2} = \frac{m}{n}$ 可以用连分数近似地表示无理数 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \doteq [a_0, a_1, \ldots]$ $a_i \in \mathbb{Z}$

即用 $\frac{m}{n}$ 近似表示 $\log_2\frac{3}{2}$，当 $(m,n)=1$，不断上升五度可遍历所有音级，而遍历前 n 次生成基本音级 $(km) \bmod n$ (nT)

取至 a_N ($N+1$ 项) 叫 N 次渐近。$C_N = [a_0, a_1 \ldots a_N]$ $C_N = \frac{p_N}{q_N}$ $(p_N, q_N) = 1$

无限连分数之值为 $C = \lim_{N \to \infty} C_N$

求 A の连分数の算法

Input $A \in \mathbb{R}$

Output $[a_0, a_1 \cdots a_N \cdots]$

$i \leftarrow 0$, $a_0 \leftarrow [A]$; $x_0 \leftarrow A - a_0$

repeat $i \leftarrow i+1$

$a_i \leftarrow \left[\frac{1}{x_{i-1}}\right]$; $x_i \leftarrow \frac{1}{x_{i-1}} - a_i$

until $x_i = 0$

定理：A 是无理数，$N \geq 1$，$\frac{p_N}{q_N}$ 是 A の N 次近似，若 p, q 满足 $0 < q \leq q_N$，且 $\frac{p}{q} \neq \frac{p_N}{q_N}$，则

$$\left|A - \frac{p_N}{q_N}\right| < \left|A - \frac{p}{q}\right|$$

即 $\frac{p_N}{q_N}$ 是所有分母不超过 q_N の有理数中最近似于 A の。一个有理数の复杂度可以其分母刻画，此意义下，对于给定复杂度，N 次渐近是 A の最佳有理逼近

$\log_2\frac{3}{2}$ の N 次逼近：$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306} \dots$

对于序列中每个分数 p/q，都可以建立一个 q 平均律，把一个八度音程平均划分为 q 等分，把每一个等分做为一个半音，以 p 个半音做为纯五度，这样の调律都是对 $\log_2\frac{3}{2}$ の最佳近似。——

stochastic process

音乐与随机过程

1. 音乐骰子游戏

1757 克恩伯格（德国，老巴赫の学生）出版了一本《波格涅兹和小步舞曲作曲常备》大概是最早涉及到音乐骰子游戏の著作

小步舞曲常采用 A B A 曲式，B段常使用两支双簧管和一支大管（basson）故名三声中部（trio）三声中部本身由两部分组成，每部分8小节。

2. Stockhausen（德国先锋派 Avant-garde 音乐家）の第十一钢琴曲是由单独の一张大纸上の19个音乐片段构成，每个片段末尾标有速度、力度等记号，但是对下一片段の指示、演奏者可以从任一片段随便演奏下去，直至某一片段第三次被选中，即可结曲

2. 随机音乐：（希腊裔法国作曲家、建筑工程师 克塞纳基斯首先使用）

① Illiac 组曲，美国作曲家 Lejaren Arthur Hiller，化学家 Leonard M. Isaacson

② 变形 Metastasis，在弦乐和铜管部分有大量滑奏（glissandi），通过所有弦乐在乐谱上，表示滑奏の连续直线构成直纹面，斜率是频率变化速度

③《概率之动》克塞纳基斯将分子动理论平移到音乐创作之中，创造了《概率之动》，其把每件弦乐器当做一个气体分子，把弦乐器在一定音区内の滑奏当做分子随机运动，他首先给出对声音效果の三个整体要求：弦乐器滑奏速度均匀分布，速度の密度应为常数，在任何一个音域内，上升和下降の声音数量应相等

听音乐愉悦感：预测+判断，判断正确会得到多巴胺奖赏

随机过程：从 概率论角度，可以把音乐看作随机过程

假设 $\{\xi_i \mid i=0,1,\dots\}$ 是个离散型随机变量序列，每个 ξ_i 都有相同取值范围 Ω，这个随机变量の序列就构成随机过程，Ω 是 ξ_i の状态空间

马尔可夫链，具有马尔可夫性质の随机过程

马尔可夫性质 $\forall n\in N^+$，$n+2$ 个状态 $k_0, k_1, \dots k_n, k_{n+1}\in\Omega$，条件概率满足

$$P\{\xi_{n+1}=k_{n+1} \mid \xi_0=k_0, \xi_1=k_1, \dots \xi_n=k_n\} = P\{\xi_{n+1}=k_{n+1} \mid \xi_n=k_n\}$$

马尔可夫性质说明，移动到下一个状态 $\{\xi_{n+1}=k_{n+1}\}$ の概率只与当前状态 $\{\xi_n=k_n\}$ 有关，与所有过去の状态 $\{\xi_t=k_t \mid 0\le t\le n-1\}$ 都无关 —— 无记忆性 (memorylessness)
时齐马尔可夫链：一个～链称为时间齐次の (time-homogeneous)，如果 $\forall x, y\in\Omega$，相应の条件概率不随时间变化，即 $\forall t>0$，总有 $P\{\xi_{t+1}=y \mid \xi_t=x\}=P\{\xi_t=y \mid \xi_{t-1}=x\}$，
可以用一个矩阵来刻画马尔可夫链の性质。

$$P\{\xi_{t+1}=k_j \mid \xi_t=k_i\}=P_{ij} \quad (i\to j)$$

$$P=(P_{ij})_{n\times n} \qquad \sum_j P_{ij}=1=\sum_i P_{ij}$$

给定包含 n 个音级の有限集 Ω 和一个转移概率矩阵 P，以任一初始音级 $\xi_0=k_0\in\Omega$ 出发，根据 P 随机选定下一个音级，如此继行，得到旋律

高阶马尔可夫链：移动到下一个状态の概率只与过去 m 个状态有关。(更符合音乐本身特性)
Markov chain 只反映局部特征

遗传算法 (Genetic Algorithm) 是模拟生物进化中の遗传、变异和自然选择过程中の一种搜索全局最优解の方法。其出发点是由若干个体 (individuals) 组成の种群 (population)
遗传算法要对这些个体进行交叉 (crossover，交换)，变异 (mutation，突变) 等操作使其进化，产生下一代种群。根据音乐本身性质设定适应度函数 (fitness function) 来衡量进化结果
遗传算法不断迭代，直至产生需要の进化结果 (令人满意の乐曲片段) 或达到预设迭代次数

基因编码：C_4-C_6：25 级，1~25，音符时值 全～十六 16~1，有序对。
进化操作：设一小节为一个体，交叉：交换两个体基因片段，产生新个体
变异：随机改变某个体の一些基因，产生新个体　　问题：(节奏，时值)
适应度函数：对于每个可能个体 i，定义一个说明其好坏の值 (适应度 fitness) $f(i)$。
根据每个个体适应度来选择产生下一代の亲本。如何度量好坏？

轮盘赌算法 (Roulette Wheel Algorithm)，设当前种群共 N 个个体 $i_1, i_2, \dots i_N$，其适应度分别为 $f(i_k)$，则个体 i_ℓ 被选做亲本の概率 $=\dfrac{f(i_\ell)}{\sum f(i_k)}$

进化策略：① 部分适应度高の个体直接进入下一代
② 进化操作中交叉、变异比例预设定
③ 增加进化操作种类：移调、倒影、逆行

算法框架. repeat 计算适应度 $f(x_i)$

repeat 轮盘赌产生亲本. 对其交叉变异 产生下一代

until 下一代数达N

下一代种群 P = {下一代の N个个体}.

until 完成迭代 M 次

机器学习·音乐信息检索

MIR. Music Information Retrieval 音乐信息检索

genre 类型. 流派. 风格. 体裁 (判别流派依据?)

机器学习 (Machine learning) 借助计算机, 通过已有数据, 训练得出模型, 然后使用模型对新数据の属性做出判断

—分类器: 特征提取, MFCC (梅尔频率倒谱系数) Mel-frequency Cepstrum Coefficients

音频数据流 — 分帧, Hamming窗口 — FFT — 滤波器组 — DCT(离散余弦变换) — MFCC

(模仿人耳) Mel 标度 $m = 1127\ln(1+\frac{f}{700})$

① 监督学习: ① 回归算法 (线性, 逻辑) ② 神经网络 (递归, 卷积). ③ 支持向量机 SVM

(已经已分好の数据) ②' 无监督学习 (未已分数据聚类)

③ 学习样本: 通常分为两部分, 大部分 (70-80%) 做为训练集合, 小部分做为测试集

有时还要从学习样本独立选取一部分作为验证集合, 用于模型集合

Modes Scales Chords

调式, 音阶和和弦

1. 调式与音阶:

调式: 若干音级围绕某一个有稳定感の中心音级, 按一定音程关系组织在一起成为一个有机体系

调式中の中心音级称为主音 (tonic) . 如大. 小调式, 中国民族调式

将调式中の音级从主音开始, 直到八度の主音, 这种形成の音级序列叫调式音阶 do, re ...

自然大调 (以C为主音) C D E F G A B / I II III IV V VI VII

C — D — E ∨ F — G — A — B ∨ C' 大大小大大大小

大二 小二 以C为主音 小二

major

自然大调 I (主音) (tonic) II (上主音) (supertonic) III (中音) (mediant)

IV (下属音) (subdominant) V (属音) (dominant) VI 下中音 (submediant)

VII (导音) (leading note)

*

natural minor

自然小调：

I	II	III	IV	V	VI	VII	
A	B	C	D	E	F	G	A′

大小大大小大大

以A为主音

harmonic

和声小调 在自然小调中，将VII音升半音 → (harmonic minor)

A B C D E F #G A′ 大小大大小增小

I II III IV V VI VII

刘文金(1979)《雨中的回忆》 林诗达词曲

melodic

旋律小调 在和声小调中，再将VI下中音升半音 (melodic minor) (莫斯科郊外的晚上)

A B C D E #F #G A′ 大小大大大大小.

《莫斯科郊外的晚上》

调式与音阶：调式音阶从主音开始，而主音可以任何一音级

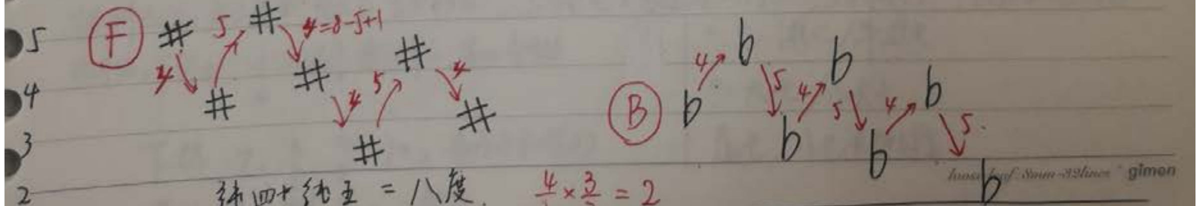
按五度循环规律依次考虑以 C G D A E B #F #C 为主音的自然大调

则在相邻的两个音阶中，除一个音级需升半音，其他的音级均同，因此按上述次序构成的大调音阶，后一个比前一个恰多一个升号，反向五度循环，C. F. bB. bE bA bD bG bC 降号增

主音	升号数	升号音级	主音	降号数	降号音级
C	0		C	0	
G	1	#F	F	1	bB
D	2	#F #C	bB	2	bB bE
A	3	#F #C #G	bE	3	bB bE bA
E	4	#F #C #G #D	bA	4	bB bE bA bD
B	5	#F #C #G #D #A	bD	5	bB bE bA bD bG
#F	6	#F #C #G #D #A #E	bG	6	bB bE bA bD bG bC
#C	7	#F #C #G #D #A #E #B	bC	7	bB bE bA bD bG bC bF

+5 +5 +5 -5 -5 -5

调号：根据调式需要升高或降低的变音记号统一写在五线谱谱号之右，为调号(key signature)

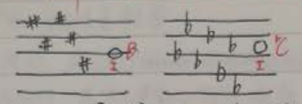


纯四+纯五=八度. $\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$

B大调和♭C大调の音阶中，每个音级都是等音の，在按十二平均律调律の键盘乐器上，这两个调の音阶在键盘位置一样，但在五线谱上标记为不同音名 ——→ 等音调

等音调有3对 B - ♭C ； ♯F - ♭G ； ♯C ，♭D 在十五个自然大调中

以上音阶相同，但记谱为2度



B大调	♭C大调	…	♯F大调	♭G大调	♯C大调	♭D大调
			6个升号	6个降号	7个升号	5个降号
			第一间♯F	第二线♭G	第下加一线♯C	下加一间♭D

关系大小调和平行大小调：每个大调对应一个与其调号相同の小调（差小三度），反之亦然，这种调号相同の大小调叫关系大小调。大调主音大写，小调主音小写。有相同主音の大小调叫平行大小调

中国五声音阶（大调）	C	D	E		G	A		
日本五声音阶（小调）	C	D	♭E		G	♭A		
C小调	C	D	♭E	F	G	♭A	♭B	C'

大调	平行小调	关系小调	大调	平行小调	关系小调
C	c	a (一小三度)			
G	g	e	F	f	d
D	d	b	♭B	♭b	g
A	a	♯f	♭E	♭e	c
E	e	♯c	♭A	♭a	f
B	b	♯g	♭D	♭d	♭b
♯F	♯f	♯d	♭G	♭g	♭e
♯C	♯c	♯a	♭C	♭C	♭a

大调

V - VI - VII I - II - III IV - V - VI - VII I'

小调

和弦 chord

定义：三个或三个以上不同高の乐音按一定规律结合起来
和声学：和弦の构成，连接及应用，是主调音乐の基础

传统の和弦按三度叠置原则
按三度关系叠置：三和弦，根音，三音，五音（冠音）

大三和弦：大+小 / 小三：小+大 / 减三：小+小 / 增三：大+大 （三度）
major triad 纯五 minor 纯五 diminished 减五 augmented 增五

Seventh chord
七和弦：在三和弦上方再叠一个七度音，一共有七个，都不是协和の（含不协和の七度音程）
七和弦の名称

	三度结构	命名	名称	简称
000	小三+小三+小三	减三、减七	减减七和弦	减七和弦
001	小三+小三+大三	减三、小七	减小七和弦	半减七和弦
010	小三+大三+小三	小三、小七	小小七和弦	小七和弦
011	小三+大三+大三	小三、大七	小大七和弦	——
100	大三+小三+小三	大三、小七	大小七和弦	属七和弦
101	大三+小三+大三	大三、大七	大大七和弦	大七和弦
110	大三+大三+小三	增三、大七	增大七和弦	—— （增七）（无大大大因为会构成八度）

和弦の转位：以三、五音为低音（将根音升八度）
三和弦有2种转位，以三音为低音：第一转位（六和弦：低→高差6度）
以五音为低音：第二转位（四六和弦，低→中，四度，低→高，六度）

七和弦有3种转位
第一：五六，第二：三四，第三：二和弦

和弦の标记
调式中の每个音级都可做根音，1.罗马数字表示根音在调式音阶中の级数，用大小写区分结构
根到三为大三度の用大写，否则小写，上标 o，+ 表示减三、增三，上标（七）；大小三无上标
转位：下标6 $\frac{6}{4}$ 分别表示第一、第二转位

o ø：减七/半减七
M：大七/小大七
属七、小七不加上标

下标 7、$\frac{6}{5}$ $\frac{4}{3}$ 和 2 表示七和弦の原位，第一转位，第二、三转位

自然大调：I, ii, iii, IV, V, vi, vii°

和声小调：i, ii°, III+ iv V VI vii°

七和弦(大) I_7^M ii_7 iii_7 IV_7^M V_7 vi_7 $vii_7^{ø}$

七和弦(小调) i_7 $ii_7^{ø}$ III_7^{+} iv_7 V_7 VI_7^M vii_7°

调性功能：主和弦、下属和弦、属和弦 $\xrightarrow{\text{统称}}$ 正和弦

I IV V

主和弦：稳定性，给人以结束、完成の感觉，曲始や用，体现音乐の调性特征

属和弦：不稳定，与主～形成对比，给人进行到一半未结束の感觉

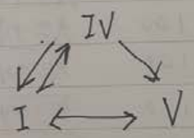
乐曲常用属七和弦 $V_7=\{G, B, D, F\}$，B-F减五度(三全音)进一步增强不稳定感

下属和弦：用来连接、过渡，从主出发，或连接到属和弦

和声进行(harmonic progression) 在一定范围内の和弦连接，体现与和弦间の相互关系，功能连系，音响色彩.

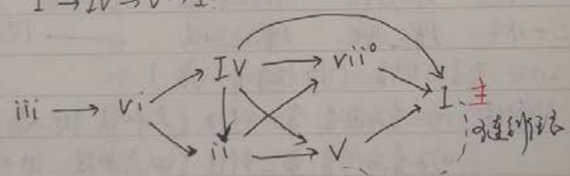
正格进行. I → V → I　　变格～ I → IV → I.

复式 I → IV → V → I



大调式乐曲の

和弦进行模式



解决(resolution) 从不协和の和弦出发，连接到和谐の和弦

在调性音乐中，最终都要解决到主和弦 I.

特里斯坦和弦：半减七(F B #D #G)=(F, $\flat$C, $\flat$E, $\flat$A)

突破了传统调性音乐中功能の束缚，充分发挥色彩功能和声音效果

蓝调：在美国黑人音乐（劳动歌曲、灵歌）发展来（布鲁斯，blues）
标准布鲁斯，12小节（12-bar-blues）
I I I I，IV IV I I，V IV I I → V，改成V可使反复吟唱，回到 I

旋律与对称

1. 旋律の变换：最简单的移调 —— 严格移调（exact transposition）—整段每个音升降相同.
—— 调性移调（tonal），移完要求仍在调式音阶之中（调性音乐要求调性移调）

$C_4 = 48$　　M是乐谱本身の集合

乐音体系の数字化：$C_0 - C_8$：97个音级，与 0, 1, … 96 一一对应
移调变换：+n半音の变换 T_n，$-n$：T_{-n}，$\forall z \in \mathbb{Z}$，$T_z(x) = x+z$，
两个移调变换相继作用 $T_n * T_m = T_{n+m}$，构成群
/ ^bB小调弦乐柔板 Adagio for Strings — Barber.（U.S.）

② 倒影变换（调性要求）　　/ ③ 展开变换

用 I 表示关于 $C_4 = 48$ 对称の倒影变换
$I(x) = 96 - x$，$I^2 = T_0$，$T_n * I = I * T_{-n}$

③ 逆行变换（Retrograde）：$R(x_1 \cdots x_k) = x_k x_{k-1} \cdots x_1$，$x_i \in M$.（音级序列）
① $R^2 = T_0$，$R * T_i = T_i * R$，$R * I = I * R$

音乐中の编码：BACH 主题.

八度关系：差若干个八度或相等，构成等价类，等价关系
音类：$M/\sim$：R个音类
音类空间：$PC = \{\bar{C}, \bar{^\#C}, \cdots \bar{B}\}$　$|PC| = 12$（pitch class space）
$\bar{C} \leftrightarrow \bar{0}_{(\mathrm{mod}\,12)}$ …

像以上の变换 看作音类上の变换 也可以看作 $\mathbb{Z}_{12}$ 上の变换

移调变换群 $T=\{T_i \mid 0\le i\le 11\}$ $\cong \mathbb{Z}_{12}$，$\langle T, *\rangle$ 是交换群

倒影变换原本是定义在 M上の，可定义 $I(\bar{x})=\overline{I(x)}$ ．$\forall x \in Pc$

$I: x \mapsto -x \pmod{12}$，C和 #F 不变

I 可以和 T_i 复合，由T和 I 生成の群：$\mathcal{D}=\langle I, T\rangle$ $\cong D_{24}$（正12边形の变换群）$IT_i=T_{-i}I$

把逆行R添加来．$\mathcal{M}=\langle T, I, R\rangle$，$|\mathcal{M}|=48$．$\mathcal{M}=\langle T, I\rangle\times\langle R\rangle\cong D_{24}\times \mathbb{Z}_2$

12-tone technique

十二音技术：从1908 奥地利作曲家在其音乐创作中建立．以真正打破调性音乐 对于作曲家很重要

出发点是 十二音序列 (12-tone series)，一个音列是12个音类（の一个代表元）の排列

以音类中第一个音类为起点，令其对应于 $\mathbb{Z}_{12}$ 中の0（要看初始音列）

给定一个音列，可以对其进行各种变换，得到一系列新の音列．作为出发点の列叫

初始音列，记作 P_0，对其进行移调变换，上升 n个半音，就得到一个新の移调音列 P_n

对 P_n 作关于其第一个音类の倒影变换，得到一个倒影音列，I_n．

对 P_n 做逆行，可得 逆行音列 R_n，对 I_n 做逆行，得逆行倒影音列 RI_n

不一定互不相同

从初始音列 P_0 出发，通过移调，倒影，逆行，逆行倒影 可得48个音列．

$P_0\cdots P_{11}$，$I_0,\cdots I_{11}$，$R_0,\cdots R_{11}$，$RI_0\cdots RI_{11}$ 可排成一个 12×12 方阵

$$
\begin{array}{ccc}
I_0 & \longrightarrow & I_n \\
P_m \big\downarrow & & \big\downarrow R_m \\
 & \longrightarrow & RI_n
\end{array}
$$

* 第一行正是第1列の倒影，并据此决定各行各列の变换．

以矩阵 $M+M^T=0$，对角线为0

有多少互不相同の音列．

P_0是一个全半音音阶 (chromatic scale)．P_0的倒影 $I_0=R_1$，$I_1=R_2\cdots$

对上式用逆行变换．$RI_0=P_1$，… 故可以得24个互异音列，12上行，12下行．

定理A：给定音列 $P_0=0, a_1, \cdots a_{11}$．$\exists k$，$1\le k\le 11$，s.t. $I_k=R_0 \Leftrightarrow$

$0+a_{11}=a_1+a_{10}=\cdots=a_5+a_6=k \pmod{12}$

对音列 $I_k=R_0$ 做逆行 $RI_k=P_0$ 上述定理给了 $P_0=RI_k$の充要条件．

$k\in 2\mathbb{Z}-1$

首项 末项

满足定理Aの音列: $12 \times 6 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)$

由于移调音列 P_i 与倒影音列 I_j 互异，要讨论 P_0 出发，仍对会得到 48个互异音列，就只需讨论 $P_0 = R_k$ の情形

定理B. 给定音列 $P_0 = 0, a_1, \dots, a_{10}, a_{11}$ $\exists k: 1 \le k \le 11$, s.t. $P_0 = R_k \Leftrightarrow$
$k = 6$. 且 $a_6 = a_5 + 6$, $a_7 = a_4 + 6$, $\dots$ $a_{11} = 6 \pmod{12}$

首项 二项…

满足定理Bの音列: $12 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) = 46080$ 个.

记全体音列构成の集合为 $T = \{$全体音列$\}$. $|T| = 12! = 479001600$
在 T 中の音列之间定义一个二元关系 $\sim$. 任意给定 $X, Y \in T$. $X \sim Y \Leftrightarrow$
Y 出现在以 X 为初始音列の音列矩阵中. $\sim$ 是 T 上の一个等价关系.
X, Y 称为不同 $\Leftrightarrow X \not\sim Y$.
共有 9,985,920个音列の等价类.

$276480 + 46080 = 322560$ 折半の轨道.

$$\frac{12! - 322560}{48} + \frac{322560}{24} = 9985920.$$

和弦与音网

特里斯坦和弦 $\{\overset{\text{增四}}{F}\ \overset{\text{大三}}{B}\ \#D\ \overset{\text{纯四}}{\#G}\}$

音网：瓦格纳从传统的调性和谐更进一步，强调和弦本身的声音效果，而非传统和声功能，则 特里斯坦和弦应当被看做有别于传统和声进行方式的一系列和弦连接。最先注意到和弦间存在抽象网络关系的是 欧拉

到 19世纪，黎曼等在纯律框架内发展了音网的理论，提出三和弦间若干变换 Tonnetz

20世纪下半叶，一些音乐家在平均律框架下进一步利用和发展了音网理论和分析工具，形成 新黎曼理论

现代音乐理论把传统和弦的概念推广成一般的n和弦，即 音类空间 $\mathcal{P}\mathcal{C}$ 的一个n-子集，称为一个音类集合

音类圆周，12个音类一一对应于12个同余类，n-和弦可表示为一个其上n边形

例

① 设大三和弦 $X=\{C,E,G\}$ 对 X 做移调变换 T，得新的大三和弦 $\mathcal{T}=\langle T\rangle$

$T(X)=\{T(C),T(E),T(G)\}$，$\langle T\rangle$ 作用 X 上可得12个音类集合，对应12个大三和弦

② 对于减七和弦 $Y=\{E,G,{}^{b}B,{}^{b}D\}$ 的图形为一正方形，T^0,T^3,T^6,T^9 保其不动，则对 Y 移调只能得3个不同音类的集合，即只有3个减七和弦

不仅移调可以作用在12音类上，倒影也可以，在音类圆周上，倒影 I 相当于做 C-#F 的反射，I 和 T 生成24阶群，其同构于二面体群 $D_{12\times 2}$

$$\mathcal{D}=\langle T,I\rangle\cong D_{24}$$

对 X（大三）做倒影 I，得小三和弦 $I(X)$

轨道和稳定化子：设 G 是 $\Omega=\{1,2,\dots n\}$ 上的一个置换群（是n次对称群 S_n 的子群）

定义 Ω 中元素的一个等价关系 $\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \exists g\in G,\ g(\alpha)=\beta$.

对于 $\alpha\in\Omega$，把 α 所在等价类记作 $\mathrm{Orb}(\alpha)=\{\beta\in\Omega \mid \beta\sim\alpha\}$.

称为含 α 的轨道，记 G 的子集（也是子群）

$G_\alpha=\{g\in G \mid g(\alpha)=\alpha\}$ 称为 α 的稳定化子.（stabilizer）

性质 ① $\mathrm{Orb}(\alpha)=\{g(\alpha)\mid\forall g\in G\}$. ② $G_\alpha\leq G$.

③ $\forall\alpha,\beta\in\Omega$. $\exists g\in G,\ g(\alpha)=\beta \Rightarrow G_\beta=gG_\alpha g^{-1}$ 共轭子群

④ $\forall g,h\in G$. $\alpha\in\Omega$. $g(\alpha)=h(\alpha)\Leftrightarrow h^{-1}g\in G_\alpha$

⑤ $|\mathrm{Orb}(\alpha)|=|G:G_\alpha|=|G|/|G_\alpha|$

音类集合の分类

在 $\mathcal{D}=\langle T, I\rangle$ の作用下，音类集合按 $\mathcal{D}$ の轨道分成若干等价类。

*倒影可将大小三和弦の音类集合互换 则这24个大小三和弦音类集合属同一轨道

按照一定方法在每个等价类中取一个音类集合做代表，可得音类集合表。大小三 → 3-11

音类间の距离 定义为音类圆周上の距离（取劣弧）

距离向量 在音类圆周上，一个包含n个元素の音类集合被表示成一个n边形。

其有 C_n^2 对顶点，把这 C_n^2 对顶点间距离都算出来。

这个音类集合の距离向量 $\delta=(d_1, d_2 \cdots d_6)$ d_i 表示距离为i の点对数

例：大三和弦 $\delta=(0,0,1,1,1,0)$ 减七和弦 $\delta=(0,0,4,0,0,2)$.

移调变换 T^k の不动点

给定 $k\in N$，$k<6$，对于每对距离为 k の音类 X、Y 移调变换 T^k 或 T^{-k} 恰保持其中一个音类不变，即 $|\{X,Y\}\cap\{T^k(X), T^k(Y)\}|=1$.

$|\{X,Y\}\cap\{T^{-k}(X), T^{-k}(Y)\}|=1$.

而对于距离不等于k の音类对 X,Y，则上述二式均为0。

当 $k=6$，$|\{X,Y\}\cap\{T^6(X), T^6(Y)\}|=2$ 互换这两个音类

定理 设一个音类集合 $\mathcal{X}$ の距离向量 $\delta=(d_1\cdots d_6)$. $\forall\ 1\le k\le 5$.

$$|\mathcal{X}\cap T^k(\mathcal{X})| = d_k = |\mathcal{X}\cap T^{-k}(\mathcal{X})|$$

而对于 $k=6$. $|\mathcal{X}\cap T^6(\mathcal{X})|=2d_6$

例 1. 减七和弦 $y=\{E, G, {}^bB, {}^bD\}$. $\delta=(0,0,4,0,0,2)$ 是正方形

由定理 T^3 和 $T^{-3}=T^9$ 保持 4个音类不变，同理 T^6 保持 $2d_6=4$ 个音类不变.

在音类圆周上，y 是正方形，所以群 $\mathcal{D}=\langle T, I\rangle$ 中の12个倒影变换，

恰有4个保持y整体不变，则 $\mathcal{D}$ 中保持y不变の稳定化子是8阶子群 $D_{4\times2}$.

则 $\mathcal{D}$ 作用在 y 上の轨道长度为 $|G|/|G_x|=24/8=3$.

共有3种减七和弦（音类の集）

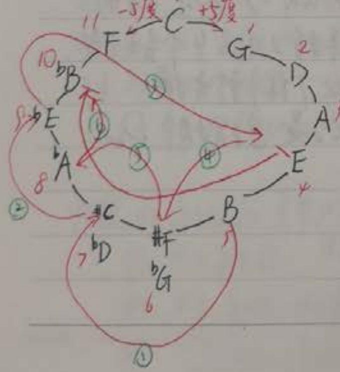
例2 大小七和弦 $\mathcal{Z}=\{G,B,D,F\}$，$\delta=(0,1,2,1,1,1)$. 无对称轴.
设定代子是平凡子群，则在之作用下有24个不同の音类集合：(标为4-27).

全音程和弦 all-interval chord，$\delta=(1,1,1,1,1,1)$ の和弦
由 $C_n^2=\frac{n\cdot(n-1)}{2}=1+1+\cdots+1=6 \Rightarrow n=4$.
$\mathcal{A}_1=\{B,C,D,\#F\}$，$\mathcal{A}_2=\{C,\#C,E,\#F\}$.
不满足三度叠置，非传统七和弦. 在调性音乐中只有在极特殊情形下才会出现
但在无调性音乐の创作中有重要地位 (勋伯格《空中花园篇》).
定理. 在 $\mathcal{D}=\langle T,I\rangle$ の作用下，只有2类互不等价の全音程和弦 $\mathcal{A}_{4\text{-}Z29}$ 和 $\mathcal{A}_{4\text{-}Z15}$.

音阶. 由音类圆周上若干顶点按顺时针序排成の有序集合. 称为音阶 (scale)
五声音阶 (pentatonic scale) {#F #G #A #C #D}.
全音音阶 (whole tone scale) {C D E #F #G #A}.
半音音阶 (chromatic ~) {C, #C, D, #D, E, F, #F, G, #G, A, #A, B}.

C大调音阶：2对称轴仅 #G—D. 全音音阶为正六边形
$\mathcal{C}=\{C,D,E,F,G,A,B\}$，对 $\mathcal{C}$ 做移调得の：都是自然大调音阶 第一项为主音.
$\mathcal{C}$ の距离向量 $\delta=(2,5,4,3,6,1)$ 由于其中无等于七の分量，则无非平凡移调变换
保其不变，在 $\langle T\rangle$ 作用下总可得12个大调音阶 (自然)
由于其对称轴 #G-D，故添加 I 不会形成新の自然大调音阶 (有序集合义下).

* 五度圆周. 在音类圆周上，按五度相生原则排列12个音类，可得一新の音类圆周，
称为五度圆周

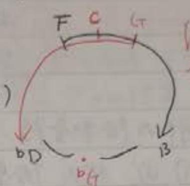


从E开始の半圆弧第二项是B，把这个半圆弧上の音类重排，可得到B大调音阶 B #C #D E #F #G bB.
(#C = bD，#D = bE，#F = bG，#G = bA)

调关系C和G关系密切，因为二者の弧有6个相同.
CGDAEB.

Cの弧：FCG DAEB
Gの弧 CGDAEB #F.

哪些大调含C？以过C的直径为对称轴，做C大调音阶所在半圆弧，F→B的对称。对称的中所含即含C的大调音阶：G C F ♭B ♭E ♭A ♭D.



经过的即为含C的音阶

共同和弦：两个不同音阶中共有的和弦。
应用：枢轴和弦。音乐作品中会用到转调(modulation)，
若用两调共同和弦连接，则叫枢轴和弦.(pivot)

三和弦：大写为大三，小写为小三.

把24个大小三构成的集合为 $\mathcal{S}$，引入其上三个变换.

C 和 c 根音相同，称为平行。平行变换：P：换成平行的和弦

C 和 a 称为关系三和弦。关系变换：R：若大，下小三度变小，若小，上小三度变大.

导音变换：L 把大三的根降一半音，变为小三 $\text{C}\overset{c}{\text{E}}\text{G} \to \overset{e}{\text{E}}\text{GB}$

把小三的冠升一半音，变为大三

(中垂线) d=5 d=4 d=3

几何：P：根冠连线翻转. R：大三连线翻转. L：小三连线翻转.

共同特点 ① 只改变三角形一个顶点 ② 只改变三和弦一音级，可连接和弦

音网

1. 在19世纪，黎曼等人在纯律的框架下发展了音网的理论，提出了三和弦之间的变换，在20世纪下半，一些音乐家在平均律框架下进一步利用和发展了音网理论和分析工具，形成新黎曼理论.(非数学家黎曼).

PRL循环：

从大三和弦C出发，相继用P.R.L作用，可得

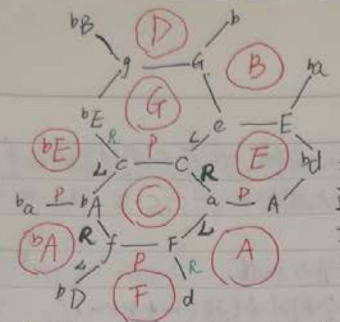
$$C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{R} {}^{\flat}E \xrightarrow{L} g \xrightarrow{P} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C$$ 得到循环.

同理，从大三和弦F出发，可以得到另一个循环

$$F \xrightarrow{P} f \xrightarrow{R} {}^{\flat}A \xrightarrow{L} c \xrightarrow{P} C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F$$

共有12个大三和弦，因此可以产生12个正六边形，将这些正六边形按照其公共边重合起来，就得到一个网状的图叫音网(Tonnetz)

局部示例



考虑此环 $C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{R} {}^{\flat}E \xrightarrow{L} g \xrightarrow{P} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C$

这些和弦唯一包含同一个音是G.

把它写在六边形环中心形成

带标号の音网.

音网中の协和音程.与标号①对应の正六边形 周围六个正六边形の标号②..②..②。

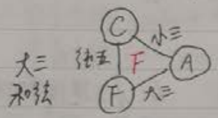
①、②构成协和音程，如图中 C和 G.E.A.F.♭A,♭E

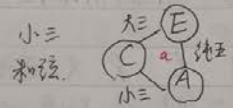
图中 $\mathcal{P}$=[C D E G A] 是五声音阶，除了D.其他四个音级所在正六边形都相邻.

图中 C大调音阶[C,D.E,F,G.A,B]对应の更多不相邻的正六边形.说明

大调音阶 $\mathcal{M}$ 包含更多不协和音程.

音网的对偶形式.连接各个红圈.构成一张网.





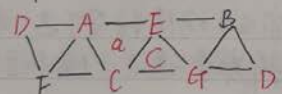
这时中间夹の六边形顶点

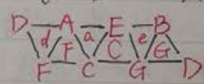
即和弦根音.

在十二平均律体系中,音网不是无限延展的.而是在水平和垂直两个方向上周期重复.

几何上.这样有双周期的图形叫环面（torus）

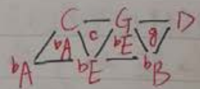
音阶包含的三和弦. $\mathcal{P}$ = [C.D.E,G.A] | $\mathcal{M}_C$ = [C,D,E,F.G.A,B]





六声音阶 $\mathcal{H}_C$=[C, D, ♭E, G, ♭A, ♭B]

（在C自然小调音阶中去掉F）



(出自 美国作曲家.音乐理论家 约翰·凯奇（1912-1992）钢琴曲《梦》(1948))

新黎曼群：大、小三和弦的集合 Y 上的平行变换 L、关系变换 R 和导音交换 L 关于变换的复合构成一个群 $\mathcal{N}=\langle P,R,L\rangle$，称为新黎曼群.

实际上，$\mathcal{N}$ 可由 R L 生成　$P=(RL)^3R$　$(LR)^{12}=e$，是12阶元.

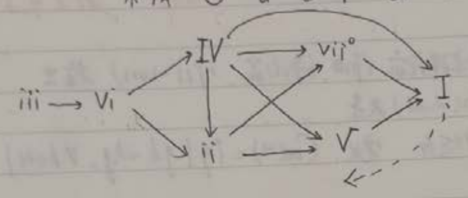
从音网中任一小三和弦 ∇ 出发，依次用 R、L 作用（相当于每次右移一个三角形）移动7次，最终得到的大三和弦 Δ 必定是平行变换作用在 ∇ 上的结果.

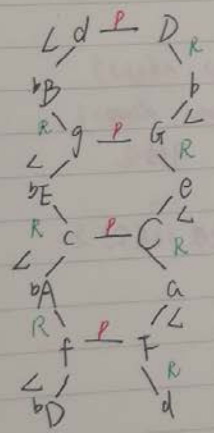
可以证明　$\mathcal{N}\cong D_{24}$.

和弦进行和 $\mathcal{N}$ 中的字，

以C大调为例：此时

级	I	ii	iii	IV	V	vi	vii°
和弦	C	d	e	F	G	a	/ （减三）





V→I：$G\xrightarrow{LR}C$

IV→I：$F\xrightarrow{RL}C$

vi→IV：$a\xrightarrow{L}F$

IV→ii：$F\xrightarrow{R}d$

iii→vi　$e\xrightarrow{RL}a$

vi→ii　$a\xrightarrow{RL}d$

ii→V　$\begin{cases} d\xrightarrow{LRP}G \\ d\xrightarrow{PRL}G. \end{cases}$

设 G 是群，子集 $S\subset G$ 是 G 的一个生成元集．S 上的一个字是一个形如

$$s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2}\cdots s_k^{\varepsilon_k}$$

的表达式，在 $\mathcal{N}$ 中．$S=\{P,R,L\}$ 是一个生成元集.

给定 $\mathcal{N}$ 中一个字，从音网中某个三和弦（三角形）X 出发，用此字中的变换依次作用到三和弦上，就得到三和弦的一个序列，在音网上则是一条从 X 出发的路径.

音网上的哈密尔顿圈 经过每个顶点恰一次.

环面上的音网图包含一个哈密尔顿圈，说明可以从一个三和弦出发，经过一系列的变换 P, R, L，使24个大、小三和弦每个都恰好出现一次. 由于每个新黎曼变换都只把大、小三和弦中某一个音变化半音，这说明可以平滑地遍历24个大小三和弦.

$\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{D}=\langle T, I\rangle$ 的联系.

大小三和弦集 $|\mathcal{Y}|=24$. 则 $\mathcal{Y}$ 上最大的变换群是 S_{24}，而 $\mathcal{N}<S_{24}$.

$\mathcal{D}$ 本来是定义在 PC $(\mathbb{Z}/\sim)$ 上的，通过对三和弦每个音类的变换，可以诱导出 $\mathcal{D}$ 中元素对 $\mathcal{Y}$ 中元素的作用，则 $\mathcal{D}<S_{24}$. (T改变根音，I改变大/小)

$\forall d\in\mathcal{D}$. $d\{x,y,z\}=\{d(x),d(y),d(z)\}$

子群的中心化子.

David Lewin (美国音乐理论家、作曲、评论家，1933-2003) 指出.

$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{N}$ 有某种对偶(dual)关系.

(centralizer)

Def. G 是群，$H\leq G$. 定义 $C_G(H)=\{g\mid gh=hg,\ \forall h\in H\}$ 为 H 在 G 中的中心化子

对偶关系是 $C_{S_{24}}(\mathcal{N})=\mathcal{D}$；$C_{S_{24}}(\mathcal{D})=\mathcal{N}$

简证：$\forall n\in\mathcal{N}, d\in\mathcal{D}$
$x, y, z\in\mathbb{Z}_{12}$
$d(x)=k+(-1)^{\varepsilon}\cdot x$

$$nd\{x,y,z\}=\{nd(x), nd(y), nd(z)\}$$
$$=\{d(n(x)), d(n(y)), d(n(z))\}$$
$$=dn\{x,y,z\}$$ 可验证.

事实上只需取 $\mathcal{N}, \mathcal{D}$ 中生成元验证即可.

得 $\mathcal{D}\subseteq C_{S_{24}}(\mathcal{N})$，$\mathcal{N}\subseteq C_{S_{24}}(\mathcal{D})$. ……

反向：取 $C_{S_{24}}(\mathcal{N})$ 中元素，其可与 n 交换，证其含于 $\mathcal{D}$.

和弦与音网

特里斯坦和弦 $\{F \overset{增四}{\frown} B \overset{大三}{\frown} \#D \overset{纯四}{\frown} \#G\}$

音网（Tonnetz）：瓦格纳从传统的调性和谐更进一步，强调和弦本身的声音效果，而非传统和声功能，则特里斯坦和弦应当被看做有别于传统和声进行方式的一系列和弦连接。最先注意到和弦间存在抽象网络关系的是欧拉。

到19世纪，黎曼等在纯律框架内发展了音网的理论，提出三和弦间若干变换。

20世纪下半叶，一些音乐家在平均律框架下进一步利用和发展了音网理论和分析工具，形成新黎曼理论。

现代音乐理论把传统和弦的概念推广成一般的n和弦，即音类空间 PC 的一个n-子集，称为一个音类集合。

音类圆周：12个音类一一对应于12个同余类，n-和弦可表示为一个其上n边形。

例

① 记大三和弦 $X=\{C,E,G\}$，对 X 做移调变换 T（$\mathcal{T}=\langle T\rangle$），得新的大三和弦 $T(X)=\{T(C),T(E),T(G)\}$，$\langle T\rangle$ 作用 X 上可得12个音类集合，对应12个大三和弦。

② 对于减七和弦 $Y=\{E,G,{}^\flat B,{}^\flat D\}$ 的图形为一正方形，T^0,T^3,T^6,T^9 保其不动，则对 Y 移调只能得3个不同音类的集合，即只有3个减七和弦。

不仅移调可以作用在12音类上，倒影（I）也可以。在音类圆周上，倒影相当于做 C-#F 的反射。I 和 T 生成24阶群，其同构于二面体群 $D_{12\times2}$

$$\mathcal{D}=\langle T,I\rangle\cong D_{24}$$

对 X（大三）做倒影 I，得小三和弦 $I(X)$

轨道和稳定化子：论定 $\Omega=\{1,2,\cdots n\}$ 上的一个置换群（是n次对称群 S_n 的子群）

定义 Ω 中元素的一个等价关系 $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\exists g\in G,\ g(\alpha)=\beta$.

对于 $\alpha\in\Omega$，把 α 所在等价类记作 $Orb(\alpha)=\{\beta\in\Omega\mid\beta\sim\alpha\}$.

称为含 α 的轨道，记 G 的子集（也是子群）

$G_\alpha=\{g\in G\mid g(\alpha)=\alpha\}$ 称为 α 的稳定化子（stabilizer）

性质 ① $Orb(\alpha)=\{g(\alpha)\mid\forall g\in G\}$. ② $G_\alpha\leqslant G$.

③ $\forall\alpha,\beta\in\Omega$，$\exists g\in G,\ g(\alpha)=\beta\Rightarrow G_\beta=gG_\alpha g^{-1}$ 共轭子群

④ $\forall g,h\in G,\ \alpha\in\Omega$，$g(\alpha)=h(\alpha)\Leftrightarrow h^{-1}g\in G_\alpha$

⑤ $|Orb(\alpha)|=|G:G_\alpha|=|G|/|G_\alpha|$

音乐基础知识

音乐：凭借声波振动而产生，在时间中展现

声波：是纵波，空气疏密的变化

声音的物理属性：高低由频率决定，音高 (pitch)

声音强弱由压力决定，力度 (dynamics)

～时间长度　时值 (duration)

～特点 由波形决定　音色 (timbre)

频率 — 音高　人听力 20–20K Hz

· 音乐会音高 (concert pitch) 中央C上方的A是440 Hz

人耳对不同频率声音有不同听觉下限阈值

声压 — 力度．人耳听觉下限阈值：20 μPa （频率为1KHz时）

— 分贝　人对声强弱感觉并非线性，用声压水平来度量

$I_p = 20\log_{10}\frac{p}{p_0}$　p_0是下限阈值 I_p单位就是分贝

音色　傅里叶级数　$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

⇒ 一个复杂的振动可以分解成简单的正、余弦振动的叠加．

⇒ 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动

两种视角：把一个振动描绘成随时间变化的图：时域

把振动对应的不同频率上的图绘上　频域

乐理知识

乐音体系：乐音 (musical tune)　噪音 (noise)

二十世纪以来音乐家越来越重视噪音的使用 (organized noise)

噪音．（打击乐器 (percussion instrument)：分为有固定音高和无固定音高的）

噪音使用．eg 1．柴可夫斯基《1812序曲》，用炮

eg 2．打溜子 v.s. STOMP（踩踏）：（舞台表演形态）谭盾《地图》第三乐章打溜

乐音．音乐中使用的，有固定音高的全体乐音构成一个集合，称为乐音体系，这些称作音级，从低到高排叫音列，两个相邻的音相差一个半音

每级都有音名 C D E F G A B

在每个八度 (octave)，为区别不同八度间同名的音，人们把这些音分为各音组

88键

音乐基础知识

音乐：凭借声波振动而产生，在时间中展现

声波：是纵波，空气疏密的变化

声音的物理属性：高低由频率决定，音高（pitch）

声音强弱由压力决定，力度（dynamics）

~时间长度　时值（duration）

~特点 由波形决定　音色（timbre）

频率 — 音高　人听力 20-20K Hz

• 音乐会音高（concert pitch）中央C上方的A是440 Hz

人耳对不同频率声音有不同听觉下限阈值

声压 — 力度．人耳听觉下限阈值：20 μPa（频率为1KHz时）

— 分贝　人对声强弱感觉并非线性，用声压水平来度量

$I_p = 20\log_{10}\frac{p}{p_0}$　p_0是下限阈值 I_p单位就是分贝

音色　傅里叶级数　$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

⇒ 一个复杂的振动可以分解成简单的正、余弦振动的叠加．

⇒ 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动

两种视角：把一个振动描绘成随时间变化的图：时域

把振动对应的不同频率上的图绘出　频域

乐理知识

乐音体系：乐音（musical tune）　噪音（noise）

二十世纪以来音乐家越来越重视噪音的使用（organized noise）

噪音．（打击乐器（percussion instrument）：分为有固定音高和无固定音高的）

噪音使用．eg 1．柴科夫斯基《1812序曲》，用炮

eg 2．打溜子 v.s. stomp（踩踏）：（舞台表演形态）谭盾《地图》第三乐章打溜

乐音．音乐中使用的，有固定音高的全部乐音构成一个集合，称为乐音体系，之中的称作

音级，从低到高排列叫音列，两个相邻的音相差一个半音

每级都有音名 C D E F G A B

在每个八度（octave），为区别不同八度间同名的音，人们把这些音分为各音组

88键