线性代数期中考试

1. (20分)　当a为何值时，下述线性方程组有解？有解时，求出所有的解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2a + 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2a. \end{cases}$$

解：增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

用初等行变换化成阶梯型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

所以只有当$a=-2$时有解，此时的简化阶梯型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a=-2$时，有无穷多组解，通解为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2 \\ x_2 = \ \ 2x_3 + 5 \\ x_4 = \quad -10 \end{cases}$$

其中x_3为自由未知量。

2. (20分)　求下述矩阵的列空间和行空间的维数和各自的一个基。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答案：用不做行交换的初等行变换，可以把A化成

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

如果记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，则列空间的维数为3，而且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为列空间的一个基。

如果记

$$A=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \gamma_4\end{pmatrix},\quad \gamma_j^T\in K^5$$

则行空间的维数为3，由于没有做行交换，所以$\gamma_1,\gamma_3,\gamma_4$为行空间的一个基。

3. (20分)　设K为一个数域，在K^5中给定向量

$$X_1=(1,2,3,4,5)^T,\ X_2=(1,-1,1,-1,1)^T,\ X_3=(1,2,4,8,16)^T.$$

试求一个齐次线性方程组，使得X_1, X_2, X_3组成这个方程组的基础解系。

解答：设5元齐次线性方程的一般形式为$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=0$，其中系数$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$待定。把$X_1$, X_2, X_3的分量代入就得到这5个系数要满足线性方程组：

$$\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0\\ a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0\\ a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0\end{cases}$$

把这个齐次线性方程组的系数矩阵用初等行变换化成简化阶梯型

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&-1&1&-1&1\\1&2&4&8&16\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-6&-16\\0&1&0&-1&-6\\0&0&1&4&11\end{pmatrix}$$

由此可得这个齐次线性方程组的一个基础解析为：

$$\eta_1=(6,1,-4,1,0)^T,\quad \eta_2=(16,6,-11,0,1)^T.$$

以它们为行向量构造齐次线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1+x_2-4x_3+x_4=0\\ 16x_1+6x_2-11x_3+x_5=0\end{cases}$$

根据题设及前面的推导，X_1, X_2, X_3是这个齐次线性方程组的线性无关的解向量。这个齐次线性方程组的系数矩阵A的行向量组就是η_1,η_2，线性无关，所以rank(A)=2，$5-\mathrm{rank}(A)=3$。这就证明了X_1, X_2, X_3是这个齐次线性方程组的基础解系。

4. (10分) 设K为一个数域，n为大于1的正整数。已知$\gamma \in K^n$ 为n个未知量的非齐次线性方程组$AX = \beta$的一个解，并且$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r} \in K^n$ (r为大于1小于n的正整数)为这个方程组的导出组的基础解系。

求证：

(1) 向量组$\gamma,\ \gamma+\eta_1,\ \gamma+\eta_2,\ \ldots,\ \gamma+\eta_{n-r}$线性无关。

(2) 方程组$AX = \beta$的任一个解都可以被向量组$\gamma,\ \gamma+\eta_1,\ \gamma+\eta_2,\ \ldots,\ \gamma+\eta_{n-r}$线性表出。

答案：先看第(1)问。设$k_0, k_1, \ldots, k_{n-r} \in K$使得：

$$k_0\gamma + k_1(\gamma+\eta_1) + k_2(\gamma+\eta_2) + \cdots + k_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r}) = 0$$

重新整理可得

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\gamma + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0 \tag{1}$$

用矩阵A左乘上式两端，有

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})A\gamma + k_1A\eta_1 + \cdots + k_{n-r}A\eta_{n-r} = 0$$

由于$A\gamma = \beta,\ A\eta_j = 0$，所以有

$$(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\beta = 0 \tag{2}$$

再由$\beta \neq 0$，就得到$k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$，代入等式(1)，又得到

$$k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0$$

由基础解系的定义，就必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$，代入(2)式就得到$k_0 = 0$，这就证明了第(1)问。

现在看第(2)问。设$\xi \in K^n$为$AX = \beta$的任一个解，则存在$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K$使得

$$\xi = \gamma + \lambda_1\eta_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\eta_{n-r}$$

于是有

$$\xi = (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-r})\gamma + \lambda_1(\gamma+\eta_1) + \cdots + \lambda_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r})$$

这就证明了ξ可被向量组$\gamma,\ \gamma+\eta_1,\ \gamma+\eta_2,\ \ldots,\ \gamma+\eta_{n-r}$线性表出。

5. (10分) 设数域K中的一个s行n列矩阵A的秩为正整数r。求证：A的任意r个线性无关行与任意r个线性无关列交叉处元素组成的子式必非零。

解答：设A的$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq s$行线性无关，再设$A$的$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$列线性无关。由于行交换不改变列向量组的线性相关性，列交换不改变行向量组的线性相关性，所以经过一系列行交换和列交换，A就变成了前r行线性无关，前r列也线性无关的如下矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ & \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

其中B_1为r阶方阵，B_2为r行$n-r$列矩阵，B_3为$s-r$行r列矩阵，B_4为$s-r$行$n-r$列矩阵。而且B_1就是A的第$i_1, i_2, \ldots, i_r$行与第$j_1, j_2, \ldots, j_r$ 列交叉处元素组成的。现在要证明的就是$|B_1| \neq 0$。

由于$\text{rank}(B)=\text{rank}(A)=r$，以及$B$的前$r$列线性无关，所以$\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix}$的列向量组可由$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}$的列向量组线性表出，于是$B_2$的列向量组可由$B_1$的列向量组线性表出，所以

$$\text{rank}(B_1)=\text{rank}(B_1,\, B_2)=r \Rightarrow B_1 \text{ 为满秩方阵}$$

所以必有$|B_1|\neq 0$。

6. (10分)　设n为正整数，实数域中的矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足条件

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{对 } i=1,2,\ldots,n$$

证明：(1) $|A|\neq 0$；(2) 函数$f(t)=|tI_n+A|$在$t\in[0,+\infty)$时的值一定是正数。

解答：

(1) 用反证法来证明$|A|\neq 0$。假设$|A|=0$，则$n\times n$齐次线性方程组$Ax=0$必有非零解$x=(c_1,\ldots,c_n)^T$。设$|c_i|=\max\limits_{1\leq j\leq n}|c_j|>0$。由等式

$$a_{i1}c_1+\cdots+a_{ii}c_i+\cdots+a_{in}c_n=0$$

可得到

$$a_{ii}=\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{-c_j}{c_i}a_{ij} \Rightarrow a_{ii}=|a_{ii}|\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{|c_j|}{|c_i|}|a_{ij}|\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

这与题设条件矛盾。所以就必有$|A|\neq 0$。

(2)　由行列式的定义，$f(t)$是自变量t的n次多项式：

$$f(t)=t^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0, \quad \text{其中 } b_1,\ldots,b_{n-1}\in\mathbb{R}$$

必有$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$。

矩阵tI_n+A的对角元为$t+a_{ii}, i=1,2,\ldots,n$，所以$t\geq 0$时，这个矩阵也满足题目中的条件。

显然$f(t)$是一个连续函数。结论(1)已经说明在$[0,+\infty)$区间上$f(t)\neq 0$。如果存在$t_0\in[0,+\infty)$，$f(t_0)<0$，由连续函数介值定理，必有$\xi\in(t_0,\infty)$ 使得$f(\xi)=0$，这就与$f(t)$在区间$[0,+\infty)$中没有零点矛盾。

7. (10分) 设n为大于1的正整数，试计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix},$$

其中$a_j,\, b_j$属于任意的数域。

解答：当$n=2$时，把第2列的(-1)倍加到第2列，得到

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}-\frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_2}\\ \frac{1}{a_2+b_1}-\frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} & \frac{1}{a_1+b_2}\\ \frac{(b_2-b_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(b_2-b_1)}{(a_1+b_2)(a_2+b_2)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & 1\\ \frac{1}{a_2+b_1} & 1\end{vmatrix}=\frac{(b_2-b_1)}{(a_1+b_2)(a_2+b_2)}\frac{(a_2-a_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)}$$

当$n=3$时，把第3列的(-1)倍分别加到第1列和第2列，得到

$$D_3=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3}\\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}-\frac{1}{a_1+b_3} & \frac{1}{a_1+b_2}-\frac{1}{a_1+b_3} & \frac{1}{a_1+b_3}\\ \frac{1}{a_2+b_1}-\frac{1}{a_2+b_3} & \frac{1}{a_2+b_2}-\frac{1}{a_2+b_3} & \frac{1}{a_2+b_3}\\ \frac{1}{a_3+b_1}-\frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_2}-\frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_3}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{(b_3-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_3)} & \frac{(b_3-b_2)}{(a_1+b_2)(a_1+b_3)} & \frac{1}{a_1+b_3}\\ \frac{(b_3-b_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_3)} & \frac{(b_3-b_2)}{(a_2+b_2)(a_2+b_3)} & \frac{1}{a_2+b_3}\\ \frac{(b_3-b_1)}{(a_3+b_1)(a_3+b_3)} & \frac{(b_3-b_2)}{(a_3+b_2)(a_3+b_3)} & \frac{1}{a_3+b_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & 1\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & 1\\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\begin{vmatrix}\frac{(a_3-a_1)}{(a_1+b_1)(a_3+b_1)} & \frac{(a_3-a_1)}{(a_1+b_2)(a_3+b_2)} & 0\\ \frac{(a_3-a_2)}{(a_2+b_1)(a_3+b_1)} & \frac{(a_3-a_2)}{(a_2+b_2)(a_3+b_2)} & 0\\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\begin{vmatrix}\frac{(a_3-a_1)}{(a_1+b_1)(a_3+b_1)} & \frac{(a_3-a_1)}{(a_1+b_2)(a_3+b_2)}\\ \frac{(a_3-a_2)}{(a_2+b_1)(a_3+b_1)} & \frac{(a_3-a_2)}{(a_2+b_2)(a_3+b_2)}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{(a_3+b_1)(a_3+b_2)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{vmatrix}$$

即

$$
\begin{aligned}
D_3 &= \frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{(a_3+b_1)(a_3+b_2)}D_2 \\
&= \frac{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{(a_3+b_1)(a_3+b_2)}\frac{(b_2-b_1)}{(a_1+b_2)(a_2+b_2)}\frac{(a_2-a_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)} \\
&= \frac{\Pi_{1\le j<i\le 3}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\Pi_{1\le i,j\le 3}(a_i+b_j)}
\end{aligned}
$$

以上方法完全可以应用到n阶的情形，从而得到D_n和D_{n-1}的关系，用数学归纳法就可以证明：

$$
D_n = \frac{\Pi_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\Pi_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}, \quad n=2,3,\ldots
$$