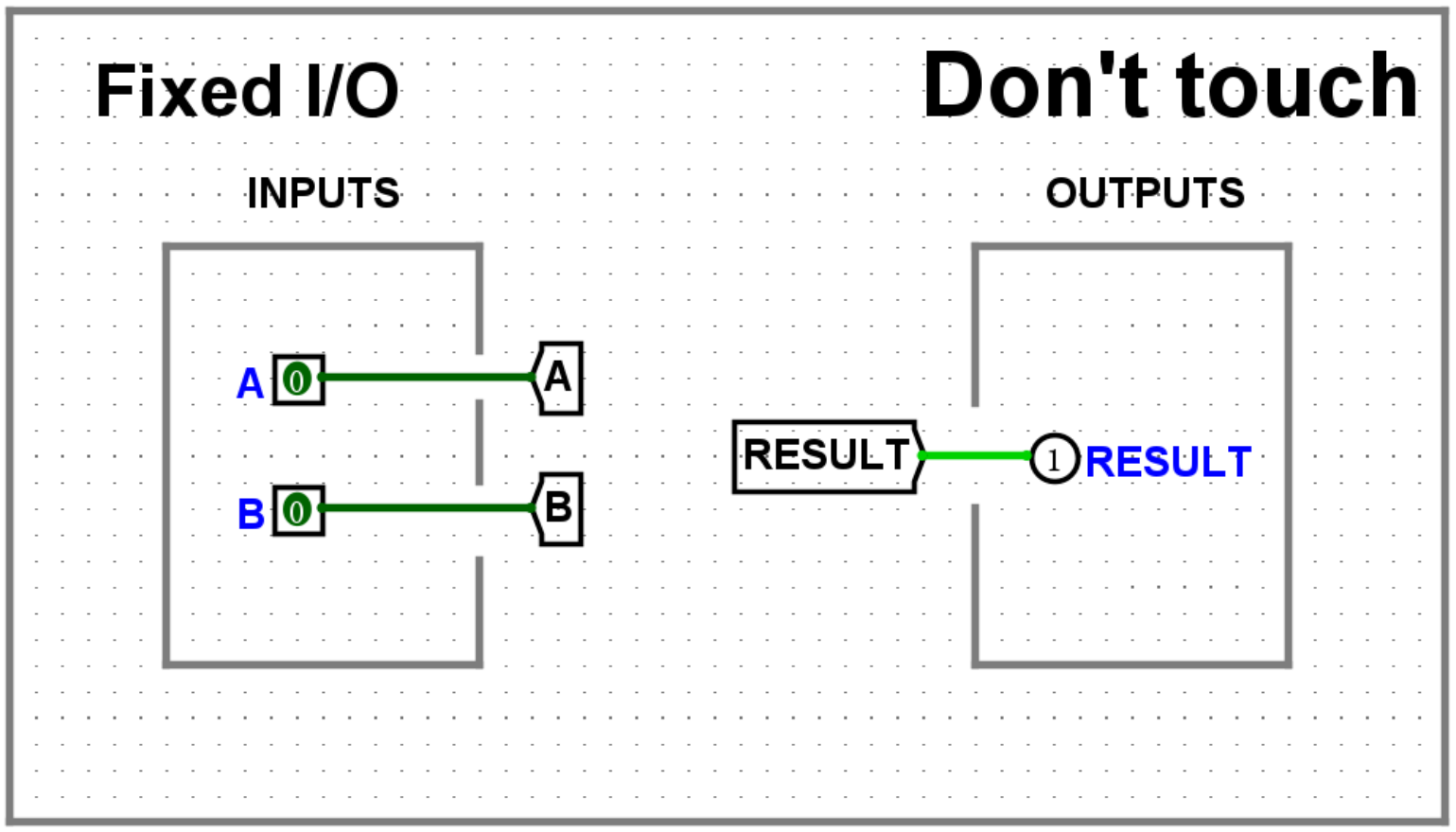
Homework 2

About "Don't Touch"



在作业中，我们有一些标注了 Don't Touch 的电路，这部分是固定位置的输入输出，用于进行作业的结果检测。

- 你可以**复制**它们，但请不要以任何形式**移动**它们。
- 如果因为移动 IO 部分导致测试不通过，TA 有权利不进行补测事宜。
    - 当然，如果你及时发现了问题，可以选择重新下载模板文件。

Exercise 1: Multiplier

在上一次作业里，我们已经实现了加法和减法。现在我们要尝试一些更复杂的运算：乘法。

在硬件电路中，乘法有很多种实现方式：我们可以通过不断进行移位的乘法和加法来实现，也可以通过引入更多的硬件资源，在一个组合电路中直接实现乘法运算。

在本次 Exercise 里，我们实现一个比较简单的版本，直接通过**模拟乘法的运行规律**来实现一个“四位+四位->八位”的乘法器。

1.1. 引入：十进制乘法运算过程

我们首先分析在十进制下，我们通过列竖式计算，将两个数字相乘时的计算思路：

我们将两数中的被乘数完整保留，与被逐位拆分的乘数分别进行乘法运算，从而获得“**部分积**”，再为每个**部分积**追加**位权**（这也就是为什么竖式要求将部分积错位相加），最终相加得到乘积。

依照常识，我们约定：

1. **被乘数**指四则运算的乘法中被乘的数字，一般来说放在算式的前面。
    - 如：4×2=8: 上述算式中，4是**被乘数**，2是**乘数**
2. 在乘法中，如果乘数是两位或两位以上的数，乘的时候，就要用乘数的每一位去乘被乘数，每次乘得的积，叫做**部分积**，或叫做不完全积。

3. **位权**指数码在不同位置上的权值。在进位计数制中，处于不同数位的数码代表的数值不同：如十进制数111，个位数上的1 的权值为 10^1 ，十位数上的1 的权值为 10^2 ，百位数上的1 的权值为 10^3 。

例如，三位数 `abc` 与 `xyz` 相乘（每一个字母代表相应数位上的数字）：

```
abc * xyz = x * abc * 100 + y * abc * 10 + z * abc * 1
```

1.2. 二进制乘法运算过程

在数字系统中，乘法运算是以二进制的形式进行的，不妨研究一位二进制数相乘的情况：

```
000 * 000 = 000;
000 * 001 = 000;

001 * 000 = 000;
001 * 001 = 001;
```

不难看出，一位二进制数相乘，实质上是进行**逻辑与运算**。接下来考虑两位二进制数与一位二进制数相乘：

```
010 * 000 = 000;
010 * 001 = 010;

011 * 000 = 000;
011 * 001 = 011;
```

也不难看出，以上运算事实上是一位二进制数对两位二进制数**按位取逻辑与运算**。接下来再考虑两位二进制数相乘：

```
010 * 010 = 100 = 10 * 1 * 10 + 10 * 0 * 1 = 100 + 0;

010 * 011 = 110 = 10 * 1 * 10 + 10 * 1 * 1 = 100 + 10;

011 * 010 = 110 = 11 * 1 * 10 + 11 * 0 * 1 = 110 + 0;

011 * 011 = 1001 = 11 * 1 * 10 + 11 * 1 * 1 = 110 + 11;
```

仔细感受运算过程，我们能够朴素地感知。对二进制数进行相乘操作，本质上可以被归纳为如下流程：

1. 将乘数逐位拆分，与被乘数的各个位进行逻辑与运算，然后得到一组二进制部分积；
2. 乘数的每一位有不同的位权，因此需要为部分积追加位权。
3. 将经过追加位权的部分积加起来，得到结果。

部分积追加位权的细节：因为高一位的乘数乘得的部分积与低一位的乘数乘得的部分积相比，**对于二进制来说**，前者是后者的两倍，所以对应的高一位的部分积要乘以2，也就是二进制下的“10”（记错“10_b”）。对于二进制来说，一个数乘以“10_b”，实际上就是将这个二进制数**左移了一位**，并为最后一位补上0（例如：$11 \rightarrow 110$）。**我们可以通过一个Python位运算的例子来理解移位操作。**

使用 Python 模拟乘法的位运算

Python中的二进制乘法可以通过位运算符实现。具体来说，就是使用 `&` 运算符进行按位与操作，使用 `<<` 运算符进行左移操作。
例如，将二进制数1010左移两位，即可得到101000，相当于将原数乘以2的2次方。下面为大家提供了一个示例代码，以供感受乘法器的原理:

```python
def binary_multiply(a: int, b: int) -> int:
    result: int = 0
    while (b > 0):
        if (b & 1):
            result += a
        a <<= 1
        b >>= 1
    return result
```

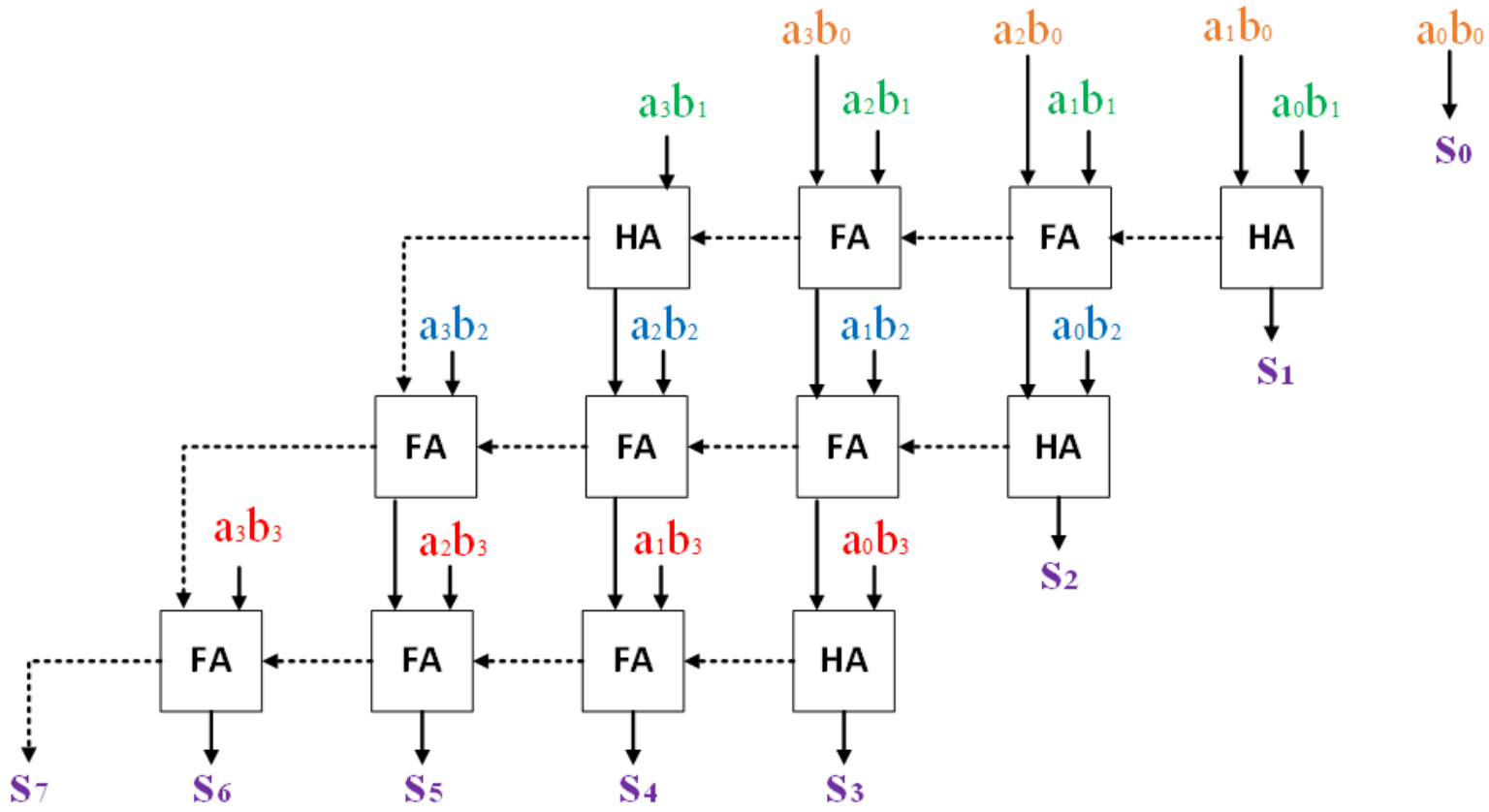
其中：

- `a` 和 `b` 分别表示要相乘的两个二进制数
- `result` 表示最终的乘积
- 在每次循环中，我们需要判断 `b` 的最低位是否为1
  - 如果是，我们将 `a` 加到 `result` 中；否则，我们什么也不做。
  - 然后，我们将 `a` 左移一位， `b` 右移一位，进入下一次循环，直到 `b == 0` 。
- 你可以通过 `print` 函数来输出中间结果。

1.3. 阵列乘法器

阵列乘法器模拟了上述 Python 程序的二进制乘法运算过程：

- 将乘数逐位拆分，与被乘数的各个位进行逻辑与运算，得到一组二进制部分积。
- 部分积作为每一位的被加数输进加法器中，与下一级的部分积进行相加操作，加法器会输入上一位的进位，然后将本级进位输出到下一位的加法器中。
- 随着部分积的位权由低到高，通过逐级左移一位排布的加法器阵列，可以模拟乘法的过程，并且输出结果。



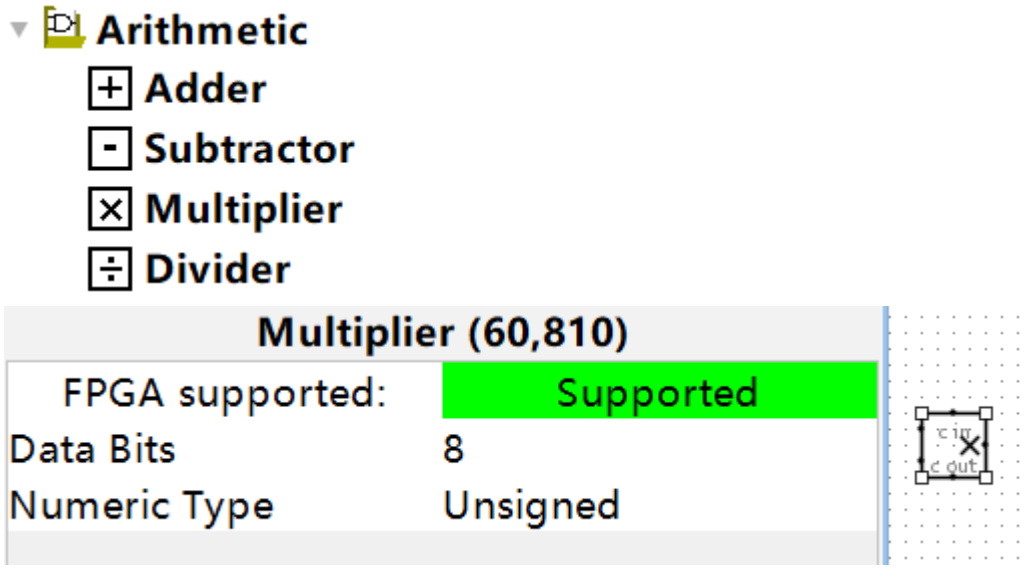
1.4. 输入、输出和实现要求

- **输入：** 乘法器接受两个 4 位的二进制数 `A` 和 `B` 。
- **输出：** 乘法器输出一个 8 位的二进制数 `result` ，表示 `A` 和 `B` 的乘积。
- **实现要求：** 你需要使用 Logisim 实现这个乘法器，其中你可以使用 Logisim 自带的加法器实现加法和移位操作，但不允许使用 Logisim 自带的乘法器。

Exercise 2: 简易 ALU

在这个 Exercise 里，我们需要用结合之前所学的知识（选择器、加法器、减法器等），搭建一个 ALU。

- ALU 的乘法器部分需要使用你在 Exercise 1 中实现的乘法器，不允许使用 Logisim 自带的乘法器。



2.1 ALU 介绍

ALU（Arithmetic & Logic Unit，算术逻辑单元）是计算机中进行所有数字计算和逻辑操作的核心部件。它根据选择信号执行不同的操作，包括算术运算、位逻辑运算和移位运算等。

在本题中，我们需要设计一个 **共11 位输入的 ALU**：

- **输入端：**
  - 数据输入 `A`：一个 4 位数（`A[3:0]`）
  - 数据输入 `B`：一个 4 位数（`B[3:0]`）
  - 选择信号 `ALU_sel`：一个 3 位数，用于选择 8 种不同的操作（`ALU_sel[2:0]`）。
- **输出端：**
  - 数据输出 `result`：一个 4 位数，根据选择信号的不同，ALU 执行以下 8 种操作：

通过设计这个 ALU，你将能够实现多种算术和逻辑操作，从而为计算机系统中的数据处理提供基础支持。

2.2 ALU 操作表

`ALU_sel` 信号的 3 位二进制数可以选择 8 种不同的操作，具体如下：

ALU_sel	操作	输出结果 result
000	加法	`result = A + B`
001	减法	`result = A - B`
010	乘法（低四位）	`result = (A * B)[3:0]`
011	乘法（高四位）	`result = (A * B)[7:4]`
100	比较（A > B）	`result = (A > B) ? 1 : 0`
101	左移（A）	`result = A << 1`
110	右移（A）	`result = A >> 1`
111	按位与	`result = A & B`

2.3 ALU 操作细节说明

- **加法：** 当 `ALU_sel = 000` 时，ALU 执行加法运算，`result = A + B`。
- **减法：** 当 `ALU_sel = 001` 时，ALU 执行减法运算，`result = A - B`。
- **乘法：** 当 `ALU_sel = 010` 时，ALU 输出乘法结果的低四位，即 `(A * B)[3:0]`；当 `ALU_sel = 011` 时，ALU 输出乘法结果的高四位，即 `(A * B)[7:4]`。

- **比较（A > B）：** 当 `ALU_sel = 100` 时，ALU 比较 A 和 B 的大小。如果 A 大于 B，输出 1，否则输出 0。
    - 请注意，我们的比较操作是无符号比较。在 Logisim 中，你需要通过修改内置比较器的默认设置来实现无符号比较。
    - “无符号”的英文是 `unsigned`，而默认的操作是补码比较，其英文为 `complement`。
- **左移：** 当 `ALU_sel = 101` 时，ALU 对 `A` 执行左移操作，`result = A << 1`。
- **右移：** 当 `ALU_sel = 110` 时，ALU 对 `A` 执行右移操作，`result = A >> 1`。
- **按位与：** 当 `ALU_sel = 111` 时，ALU 执行按位与操作，`result = A & B`。

2.4 输入、输出和实现要求

- **输入：** ALU 接受两个 4 位的数字 A 和 B，以及一个 3 位的选择信号 `ALU_sel`。
- **输出：** ALU 输出一个 4 位的结果 `result`，它是根据选择信号 `ALU_sel` 所指定的运算结果。
- **实现要求：** 你需要使用 Logisim 实现这个 ALU，其中乘法器部分需要使用你在 Exercise 1 中实现的乘法器；除此之外，你可以使用 Logisim 自带的加法器、减法器、比较器、移位器和 MUX 等组件。

TODO AND Submission

1. 完成 Exercise 1，根据示意图实现乘法器，并提交到 Gradescope
2. 完成 Exercise 2，根据我们的描述实现 ALU，并提交到 Gradescope