Podmíněná pravděpodobnost

Příklad

Jev D "narozený v dlouhém měsíci" a jev R' "nerozený v měsící obsahující písmeno r"

- $D = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$
- $R = \{$2-Únor,6-Červen,7-Červenec,8-Srpen,12-Prosinec$\}$
- $P(D) = \frac{7}{12}$ a $P(R) = \frac{5}{12}$

Víme, že osoba se narodila v dlouhém měsíci a chceme vědět zda se narodila v měsíci obsahujícím písmeno r.

Řešení

Podmíněná pravděpodobnost R za předpokladu D je $P(R|D) = \frac{3}{7}$.
$P(D \cap R) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Cvičení R3.1

Nechť $N = R^c$ je jev "narozený v měsíci bez písmena r". Jaká je podmíněná pravděpodobnost $P(N|D)$.

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad

Jev D "narozený v dlouhém měsíci" a jev R' "nerozený v měsící obsahující písmeno r"

- $D = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$
- $R = \{2\text{-Únor}, 6\text{-Červen}, 7\text{-Červenec}, 8\text{-Srpen}, 12\text{-Prosinec}\}$
- $P(D) = \frac{7}{12}$ a $P(R) = \frac{5}{12}$

Víme, že osoba se narodila v dlouhém měsíci a chceme vědět zda se narodila v měsíci obsahujícím písmeno r.

Řešení

Podmíněná pravděpodobnost R za předpokladu D je $P(R|D) = \frac{3}{7}$.
$P(D \cap R) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Cvičení R3.1

Nechť $N = R^c$ je jev "narozený v měsíci bez písmena r". Jaká je podmíněná pravděpodobnost $P(N|D)$.

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad

Jev D "narozený v dlouhém měsíci" a jev R' "nerozený v měsící obsahující písmeno r"

- $D = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$
- $R = \{$2-Únor,6-Červen,7-Červenec,8-Srpen,12-Prosinec$\}$
- $P(D) = \frac{7}{12}$ a $P(R) = \frac{5}{12}$

Víme, že osoba se narodila v dlouhém měsíci a chceme vědět zda se narodila v měsíci obsahujícím písmeno r.

Řešení

Podmíněná pravděpodobnost R za předpokladu D je $P(R|D) = \frac{3}{7}$.
$P(D \cap R) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Cvičení R3.1

Nechť $N = R^c$ je jev "narozený v měsíci bez písmena r". Jaká je podmíněná pravděpodobnost $P(N|D)$.

Podmíněná pravděpodobnost 2

Obálkový příklad

Před dveřmi leží 3 obálky. Jev A "obálka 1 je uprostřed", jev B "obálka 2 je uprostřed", jev C "Obálky nejsou uspořádány" - $C = \{123, 321\}^c$. Určete:

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(A|C)$, $P(B|C)$
- $P(C|A)$, $P(C^c|A \cup B)$

Definice

Podmíněná pravděpodobnost A za předpokladu C je dána:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)},$$

za předpokladu, že $P(C) > 0$.

Podmíněná pravděpodobnost 2

Obálkový příklad

Před dveřmi leží 3 obálky. Jev A "obálka 1 je uprostřed", jev B "obálka 2 je uprostřed", jev C "Obálky nejsou uspořádány" - $C = \{123, 321\}^c$. Určete:

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(A|C)$, $P(B|C)$
- $P(C|A)$, $P(C^c|A \cup B)$

Definice

Podmíněná pravděpodobnost A za předpokladu C je dána:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)},$$

za předpokladu, že $P(C) > 0$.

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

Cvičení R3.3

Dokažte, že $P(A|C) + P(A^c|C) = 1$

Lemma

Nechť $Q(A) = P(A|C)$ pro všechna $A \subset \Omega$. Pak Q je pravděpodobnostní funkce.

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

Cvičení R3.3

Dokažte, že $P(A|C) + P(A^c|C) = 1$

Lemma

Nechť $Q(A) = P(A|C)$ pro všechna $A \subset \Omega$. Pak Q je pravděpodobnostní funkce.

Pravidlo násobení

Pravidlo násobení
Pro libovolné dva náhodné jevy A a C platí:

$$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C).$$

Pravděpodobnost stejných narozenin
Potkáte dva náhodné lidi. Jaká je pravděpodobnost, že jejich narozeniny jsou v jiný den? Jaká bude situace, když potkáte tři lidi? A N lidí?

Pravidlo násobení

Pravidlo násobení
Pro libovolné dva náhodné jevy A a C platí:

$$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C).$$

Pravděpodobnost stejných narozenin
Potkáte dva náhodné lidi. Jaká je pravděpodobnost, že jejich narozeniny jsou v jiný den? Jaká bude situace, když potkáte tři lidi? A N lidí?

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \end{aligned}$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$
\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost stejných narozenin - řešení

$P(B_2) = 1 - \frac{1}{365}$ - dva lidé mají odlišné narozeniny

A_3 třetí osoba má v jiný den narozeniny než dva předchozí

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(A_3|B_2)P(B_2)$

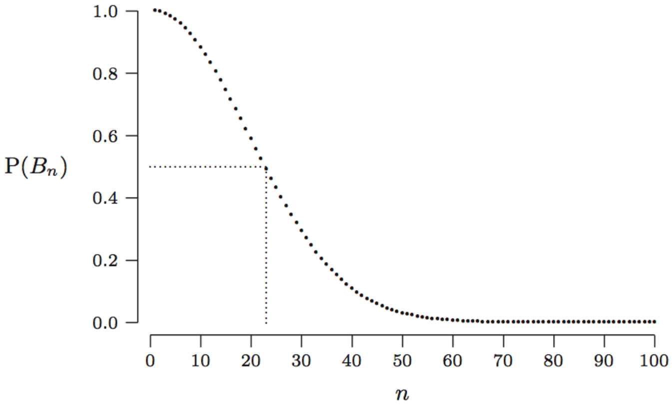
$P(A_3|B_2) = 1 - \frac{2}{365}$

$P(B_3) = P(A_3|B_2)P(B_2) = \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 0.9918$

$P(B_n) = P(A_n|B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) = \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(B_{n-1})$

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot P(A_{n-1}|B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{365}\right) \cdot P(B_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right)
\end{aligned}$$

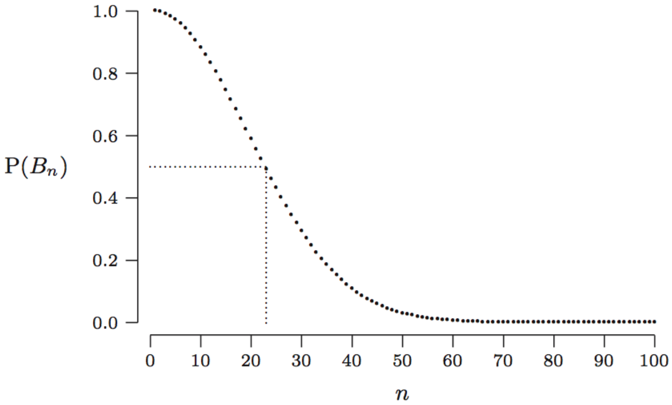
Narozeniny Graf



Cvičení R3.5

Vypočítejte pravděpodobnost, že tři náhodně vybraní lidé se narodili v různých měsících. Dokažete napsat vzorec pro n lidí?

Narozeniny Graf



Cvičení R3.5

Vypočítejte pravděpodobnost, že tři náhodně vybraní lidé se narodili v různých měsících. Dokažete napsat vzorec pro n lidí?

Záleží na tom, čím podmiňujeme

Dva alternativní způsoby

$$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C);$$
$$P(A \cap C) = P(C|A) \cdot P(A).$$

Oba způsoby jsou správné, ale často je jeden srozumitelný a druhý ne.

Narozeninový příklad

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(B_2|A_3)P(A_3)$

Pravděpodobnost, že první dva lidé se narodili v jiný den za předpokladu, že třetí osoba se narodila v jiný den než první dvě osoby?

Záleží na tom, čím podmiňujeme

Dva alternativní způsoby

$$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C);$$
$$P(A \cap C) = P(C|A) \cdot P(A).$$

Oba způsoby jsou správné, ale často je jeden srozumitelný a druhý ne.

Narozeninový příklad

$P(B_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(B_2|A_3)P(A_3)$

Pravděpodobnost, že první dva lidé se narodili v jiný den za předpokladu, že třetí osoba se narodila v jiný den než první dvě osoby?

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c)$,
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c)$,
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$$
$$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$$
$$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$$
$$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$$

celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.

Za předpokladu $P(B) = 0.02$

je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c).$
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112.$

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$$
$$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$$
$$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$$
$$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$$

celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c)$,
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c)$,
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B “kráva má nemoc šílených krav”, T “test je pozitivní”

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112$.

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Nemoc šílených krav

Příklad

- problémy testu: falešně pozitivní, falešně negativní
- B "kráva má nemoc šílených krav", T "test je pozitivní"

$$P(T|B) = 0.70,$$
$$P(T|B^C) = 0.10.$$

Jaká je pravděpodobnost $P(T)$?

$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$
$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c)$
$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B)$
$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c)$
celkem máme: $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c).$
Za předpokladu $P(B) = 0.02$
je $P(T) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.112.$

Cvičení R3.6

Vypočítejte $P(T)$ za předpokladu, že $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Zákon úplné pravděpodobnosti

Věta

Předpokládejme, že $C_1, C_2, \dots, C_m$ jsou disjunktní náhodné jevy, a že $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m = \Omega$. Pravděpodobnost libovolného náhodného jevu A lze pak vyjádřit jako:
$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \dots + P(A|C_m)P(C_m)$.

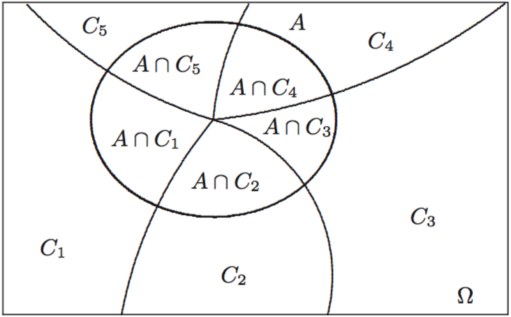
Grafické znázornění pro $m = 5$

Zákon úplné pravděpodobnosti

Věta

Předpokládejme, že $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jsou disjunktní náhodné jevy, a že $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m = \Omega$. Pravděpodobnost libovolného náhodného jevu A lze pak vyjádřit jako:
$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_m)P(C_m)$.

Grafické znázornění pro $m = 5$



Nemoc šílených krav (pokračování)

Příklad

Předpokládejme, že moje kráva má pozitivní test. Jaká je pravděpodobnost, že skutečně má nemoc šílených krav?

$$P(B|T) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Za předpokladu $P(B) = 0.02$ máme

$$P(B|T) = \frac{0.70 \cdot 0.02}{0.70 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot (1 - 0.02)} = 0.125$$

a analogicky $P(B|T^c) = 0.0068.$

Dokonalý test

$P(B|T) = 1$ a $P(B|T^c) = 0$

Nemoc šílených krav (pokračování)

Příklad

Předpokládejme, že moje kráva má pozitivní test. Jaká je pravděpodobnost, že skutečně má nemoc šílených krav?

$$P(B|T) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Za předpokladu $P(B) = 0.02$ máme

$$P(B|T) = \frac{0.70 \cdot 0.02}{0.70 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot (1 - 0.02)} = 0.125$$

a analogicky $P(B|T^c) = 0.0068.$

Dokonalý test

$P(B|T) = 1$ a $P(B|T^c) = 0$

Nemoc šílených krav (pokračování)

Příklad

Předpokládejme, že moje kráva má pozitivní test. Jaká je pravděpodobnost, že skutečně má nemoc šílených krav?

$$P(B|T) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Za předpokladu $P(B) = 0.02$ máme

$$P(B|T) = \frac{0.70 \cdot 0.02}{0.70 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot (1 - 0.02)} = 0.125$$

a analogicky $P(B|T^c) = 0.0068$.

Dokonalý test

$P(B|T) = 1$ a $P(B|T^c) = 0$

Nemoc šílených krav (pokračování)

Příklad

Předpokládejme, že moje kráva má pozitivní test. Jaká je pravděpodobnost, že skutečně má nemoc šílených krav?

$$P(B|T) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Za předpokladu $P(B) = 0.02$ máme

$$P(B|T) = \frac{0.70 \cdot 0.02}{0.70 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot (1 - 0.02)} = 0.125$$

a analogicky $P(B|T^c) = 0.0068$.

Dokonalý test

$P(B|T) = 1$ a $P(B|T^c) = 0$

Bayesova Věta

Věta

Předpokládejme, že náhodné jevy $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jsou disjunktní a $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m = \Omega$. Podmíněnou pravděpodobnost C_i za předpokladu libovolného jevu A lze vyjádřit jako:

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_m)P(C_m)}$$

Tradiční Bayesův vzorec: $P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A)}$

Cvičení R3.7

Vypočítejte $P(B|T)$ a $P(B|T^c)$ když $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.

Bayesova Věta

Věta

Předpokládejme, že náhodné jevy $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jsou disjunktní a $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m = \Omega$. Podmíněnou pravděpodobnost C_i za předpokladu libovolného jevu A lze vyjádřit jako:

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_m)P(C_m)}$$

Tradiční Bayesův vzorec: $P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) \cdot P(C_i)}{P(A)}$

Cvičení R3.7

Vypočítejte $P(B|T)$ a $P(B|T^c)$ když $P(T|B) = 0.99$ a $P(T|B^c) = 0.05$.